REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE IBN KHALDOUN - TIARET

MEMOIRE

Présenté à :

FACULTÉ DES MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DES MATHEMATIQUES

Pour l'obtention du diplôme de :

MASTER

Spécialité : [Analyse fonctionnel et application]

Par :

TOUAMRIA Nasreddine
KHELLADI Ali

Sur le thème

TRAITEMENT NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS INTÉGRALES LINÉAIRES DE DEUXIÉME ESPÈCE PAR DES MÉTHODES DE GALERKIN ET DE COLLOCATION.

Soutenu publiquement le 14/ 06/ 2022 à Tiaret devant le jury composé de :

Mr. BAGHDAD Said	MCB	Université Tiaret	Président
Mr. BENYOUSSEF Soufiane	MCB	Université Tiaret	Encadreur
Mr. OUARDANI Abderrahmane	MCB	Université Tiaret	Examinateur

2021-2022

Remerciement

Au nom d'Allah le clément et miséricordieux.

Tout travail réussi dans la vie nécessite en premier lieu la Bénédiction de Dieu, et ensuite l'aide et le support de plusieurs personnes nous tiennent donc à remercier et adresser nos reconnaissance à toute personne qui nous ont aidée de loin ou de près afin de réaliser ce travail nous exprimons ici notre profonde reconnaissance à l'égard de l'encadreur Dr. BENYOUSSEF Soufiane, il a su orienter nos travail sur l'immense champ d'actualité de recherche.

Les conseil et encouragements qu'il n'a jamais cessée de prodiguer sont inestimables, se patience et se compréhension nous ont permis d'avancer et de terminer ce travail Que tous les membres du jury et tous les enseignants qui ont gratitude et en particulier ceux de département de mathématiques(Ibn Khaldoun-Tiaret).

Ainsi que notre vive gratitude envers tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce modeste de cette mémoire de fin d'étude.

Dédicaces

⋆ À nos parents ⋆

⋆ À nos frères ⋆

⋆ À toutes nos familles ⋆

⋆ À chacun de nos amis.⋆

Résumé

Dans ce travail, on propose méthode de Galerkin et de collocation pour résoudre des équations intégrales linéaires de deuxième espèce, en utilisant des polynômes orthogonaux qui sont considérés comme des fonctions de base. Aussi, ces deux méthodes montrent les résultats en matière de polynôme approximatif qui est une combinaison linéaire de fonctions de base. On compare entre les solutions obtenues par la méthode de Galerkin et de collocation avec la solution exacte.
Mots clés : équations intégrales, polynômes orthogonaux, méthodes de Galerkin et de collocation, estimation erreurs.

Abstract

In this work, we propose a Galerkin and a collocation method for solving second-species linear integral equations, using orthogonal polynomials that are considered as basic functions. Also, these two methods show the results in approximate polynomial which is a linear combination of basic functions. The solutions obtained by the Galerkin and collocation method are compared with the exact solution.
Key words : integral equations, orthogonal polynomials, Galerkin and collocation methods, estimation errors.

Table des matières

Liste des tableaux

Introduction générale

Les méthodes de résolution numérique des équations intégrales importantes dans divers domaines scientifiques. Avec l'avantage des machines informatiques numérique, surtout les ordinateurs, ces méthodes sont maintenant un outil nécessaire pour enquêter sur les différents problèmes fondamentaux de notre assimilation phénomènes scientifiques difficiles à résoudre, c'est-à-dire impossibles à résoudre autrefois. Ainsi, notez qu'il existe actuellement un grand nombre de méthodes numériques utilisées dans diverses branches de la recherche scientifique notre offre n'est ni exhaustive ni trop théorique. Cependant, notre objectif rechercher et insister sur l'interdisciplinarité des manières de les confronter regroupés selon trois axes principaux.

La théorie mathématique, qui est essentiellement l'analyse fonctionnelle d'équations intégrales permettant d'analyser le problème et de prouver l'existence de la solution et surtout de montrer des méthodes d'approximation efficaces.

Analyse numérique qui étudie la faisabilité de ces méthodes, dont la plus importante est l'analyse de la vitesse de convergence et l'estimation de l'erreur.

La programmation machine, qui traduit ces méthodes en algorithmes rapide et efficace.

Suivant ces thèmes réguliers, notre travail se divise en quatre chapitres :

Le premier chapitre est une introduction à la définition et à la classification des équations intégrales, qui a pour objectif, de familiariser le lecteur de cette thèse avec le concept d'équation intégrale apprenons à connaître quelques polynômes orthogonaux qui sont des fonctions de base.

Le deuxième chapitre nous discutons en particulier la question de l'existence et l'unicité d'une solution aux équations intégrales.

Le troisième chapitre vise à fournir quelques méthodes analytiques pour les équations intégrales de Volterra et de Fredholm.

Le quatrième chapitre on propose méthode de collocation et de Galerkin pour résoudre des équations intégrales linéaires de deuxième espèce et compare entre les solutions obtenues avec la solution exacte.

Notations et définitions préliminaires

Nous introduisons les notations et les définitions nécessaires qui sont utilisées par la suite.

$k_F(x,t)$: noyau de l'équation intégrale de Fredholm.

$k_V(x,t)$: noyau de l'équation intégrale de Volterra.

$\mathbb{K}$: Le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

$C([a,b],\mathbb{K})$: L'espace de fonctions continues sur $[a,b]$.

EDO : Équations différentiels ordinaires.

$L^2([a,b])$: On dit qu'une fonction f est carré intégrable sur $[a,b]$ si l'intégrale $\int_a^b f^2(x)dx$ existe fine.

L'ensemble de toutes les fonctions de carrée intégrable sur $[a,b]$ sera noté $L^2([a;b])$. On muni $L^2([a;b])$ du produit scalaire définie par :

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx, \qquad f,g \in L_2([a;b])$$

Définition 0.1 (Espace Vectoriel Normé)**.** *Soit* $\mathbb{K}$ *un espace vectoriel E est dit normé E lorsqu'il est muni d'une norme, c'est-à-dire d'une application* $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}^+$ *satisfaisant les hypothèses suivantes :*

1) $\forall x \in E$, $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0_E$. *(séparation)*

2) $\forall(\lambda,x) \in \mathbb{K}\times E$, $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$. *(homogénéité)*

3) $\forall(x,y) \in E^2$, $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$. *(sous-additivité)*

Définition 0.2 (Suite de Cauchy)**.** *Soit E un espace vectoriel normé, on dite que* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*est une suite de Cauchy si :*

$$\forall\epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall(n,m) \in \mathbb{N}^2 \ (n \ge N \text{ et } m \ge N \Longrightarrow \|x_n - x_m\| < \epsilon)$$

Définition 0.3 (Espace de Banach)**.** *Tout espace vectoriel normé complet pour la distance déduite de sa norme* $\|\cdot\|$ *est dit espace de Banach.*

Définition 0.4 (Produit scalaire)**.** *Soit H un espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$ *, un produit scalaire sur H est une application de* $H\times H \to \mathbb{K}$*, notée* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *telle que pour tout x, y, z dans H et α, β dans* $\mathbb{K}$ *on a :*

1) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$.

2) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.

3) $\langle x, x \rangle$ *positif pour tout* x *dans* H *et* $\langle x, x \rangle = 0$ *si et seulement* $x = 0$.

Définition 0.5 (Espace de Hilbert)**.** *On appelle espace de Hilbert est un espace préhilbertien dont la norme associée en fait un espace complet.*

Définition 0.6 (Méthodes de Gauss)**.** *Les méthodes de Gauss sont les méthodes les plus répandues et les plus précises, car l'intégration est exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à* $2n+1$*. Soit* ϕ_n *une famille de polynômes orthogonaux pour la fonction de poids* $w(x)$ *sur l'intervalle* $[a,b]$*,alors cherchons à exprimer l'intégration :*

$$\int_a^b f(x)w(x)dx,$$

Si (ϕ_n) *est une base de polynômes orthogonaux pour la fonction de poids* $w(x)$*, on a :*

$$\int_a^b \phi_n \phi_m w(x)dx, \qquad \forall n \neq m$$

Théorème 0.1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** $\forall (f,g) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$*, on a :*

$$\int_\Omega |f(t)g(t)|dt \leq \left(\int_\Omega (f(t))^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_\Omega (g(t))^2 dt \right)^{1/2}$$

Théorème 0.2 (Fubini)**.** *Soit* f *une fonction continue sur* $[a,b] \times [c,d]$ *à valeurs dans C.Alors :*

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

Définition 0.7 (Espace compacte)**.** *On dit qu'une partie A d'un espace métrique est compacte si toute suite de A possède une suite extraite convergente.*

Chapitre 1

Définitions et classification des équations intégrales

1.1 Définition des équations intégrales :

Une équation intégrale est définie comme une équation dans laquelle la fonction inconnue figure sous le signe d'intégration, la forme générale d'une équation intégrale est :

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_E k(x, t, \phi(t))dt. \tag{1.1}$$

où E un ensemble fermée, bornée et mesurable d'un espace euclidien de dimension n (x et t des points de cet espace).
λ : est un paramètre numérique.
$f(x)$: une fonction donnée.
$K(x, t, \phi(t))$: est le noyau de l'équation intégrale.
$\phi(x)$: la fonction inconnue.

On dit qu'une équation intégrale est linéaire si :

$$K(x, t, \phi(t)) = K(x, t)\phi(t).$$

Nous étudierons le cas unidimensionnel (i.e : les variables x et t parcourent un intervalle $[a, b]$), alors la forme générale d'une équation intégrale linéaire est :

$$\lambda\phi(x) + f(x) = \int_E K(x, t)\phi(t)dt. \tag{1.2}$$

1.2 Classification des équations intégrales (Fredholm et Volterra) :

Une importante classification des équations intégrales existe, et sont classée par leur caractéristique selon trois générés :

1. **Limites d'intégration :** L'équation (1.1) est dit de Fredholm si les deux limites d'intégration sont fixées, on écrit :
$$\lambda\phi(x) + f(x) = \int_a^b K(x,t)\phi(t)dt, \qquad a \leq x, t \leq b$$
Si $b = x$ l'équation (1.1) est dit de Volterra, et on écrit :
$$\lambda\phi(x) + f(x) = \int_a^x K(x,t)\phi(t)dt.$$
2. **Placement du fonction inconnue ϕ :**
Si $\lambda = 0$ on a :
$$f(x) = \int_a^b K(x,t)\phi(t)dt,$$
et
$$f(x) = \int_a^x K(x,t)\phi(t)dt,$$
sont respectivement les équations de Fredholm et Volterra de première espèce.
Si $\lambda \neq 0$ on a :
$$\lambda\phi(x) + f(x) = \int_a^b K(x,t)\phi(t)dt,$$
et
$$\lambda\phi(x) + f(x) = \int_a^x K(x,t)\phi(t)dt,$$
sont respectivement les équations de Fredholm et Volterra de deuxième espèce.
3. **Placement du fonction connue f :**
Si $f \equiv 0$, l'équation (1.1) est dit homogène, sinon elle est dite non homogène.

1.3 Les équations intégrales singulières :

Une équation intégrale singulière est définie comme une intégrale aux limites infinies, ou lorsque le noyau de l'intégrale devient illimité à un certain point de l'intervalle.

Exemple 1.1.

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)dt.$$

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{(x-t)^\alpha}\phi(t)dt, \quad 0 < \alpha < 1 \tag{1.3}$$

1.4 Genèse des équations intégrale

1.4.1 Problèmes aux conditions initiales pour les EDO :

Supposons que ϕ satisfait :

$$\begin{cases} \phi^{'}(x) = \psi(x, \phi(x)), & 0 < x < 1 \\ \phi(0) = \phi_0, \end{cases} \tag{1.4}$$

où la fonction ψ et le nombre ϕ_0 sont donnés. On suppose que ϕ est continue sur l'intervalle fermé $[0,1]$. Alors l'intégration donne :

$$\phi(x) = \int_0^x \psi(t, \phi(t))dt + \phi_0, \qquad 0 \leq x \leq 1 \tag{1.5}$$

Réciproquement, si ϕ est une fonction continue satisfait à (1.5) alors $\phi(0) = \phi_0$ et avec la différentiation on obtient (1.4). Donc, à condition que toutes les fonctions se comportent suffisamment bien de telle sorte que les conditions d'intégration et de différentiation soient remplies (1.4) et (1.5) ont la même solution et sont donc équivalent.
Nous pouvons procéder de la même manière pour les problèmes aux valeurs initiales du second ordre :

$$\begin{cases} \phi^{''}(x) = \psi(x, \phi(x)), & 0 < x < 1 \\ \phi(0) = \phi_0, \qquad \phi^{'}(0) = \phi_0^{'} \end{cases} \tag{1.6}$$

où le nombre $\phi_0^{'}$ est additivement assigné. Encore, nous devons réaliser une condition concernant la continuité, et pour éviter la nécessité de soulever cette question à plusieurs reprises, nous adoptons la convention que sauf indication contraire dans un problème tel que (1.6) et ses dérivés jusqu'à l'ordre le plus supérieur indiqué aux extrémités de l'intervalle, est prolongé aux fonctions continues sur l'intervalle fermé.

Une première intégration donne :

$$\phi^{'}(x) = \int_0^x \psi(t, \phi(t))dt + \phi_0^{'}, \qquad 0 \leq x \leq 1$$

En tenant compte de la condition $\phi^{'}(0) = \phi_0^{'}$et par une seconde intégration, on obtient :

$$\phi(x) = \int_0^x ds \int_0^s \psi(t, \phi(t))dt + \phi_0(x) + \phi_0, \qquad 0 \leq x \leq 1 \tag{1.7}$$

La simplification de l'intégrale double dans (1.7) découle de la relation :

$$\int_0^x ds \int_0^s F(s,t)dt = \int_0^x dt \int_t^x F(s,t)ds, \tag{1.8}$$

pour ce qu'il est suffisant que F soit une fonction continue pour les deux variables. Si on suppose que ψ est une fonction continue par rapport aux deux variables, alors (1.8) donne :

$$\int_0^x ds \int_0^s \psi(t, \phi(t))dt = \int_0^x (x-t)\psi(t, \phi(t))dt$$

et l'équation intégrale correspondante à (1.6) dans sa forme simple est donnée par :

$$\phi(x) = \int_0^x (x-t)\psi(t, \phi(t))dt + \phi_0^{'}(x) + \phi_0, \qquad 0 \leq x \leq 1 \tag{1.9}$$

Si ϕ est solution continue de (1.9) alors, la différentiation sous le signe intégral prouve que ϕ satisfait également (1.6).

1.4.2 Problèmes avec conditions aux limites pour les EDO :

On considère la détermination de ϕ pour :

$$\begin{cases} \phi^{''}(x) = \psi(x, \phi(x)), & 0 < x < 1 \\ \phi(0) = \phi_0, & \phi(1) = \phi_1 \end{cases} \tag{1.10}$$

On procède de la même manière que (1.6) , on obtient

$$\phi^{'}(x) = \int_0^x \psi(t, \phi(t))dt + C, \qquad 0 \leq x \leq 1$$

et

$$\phi(x) = \int_0^x (x-t)\psi(t, \phi(t))dt + Cx + \phi_0, \qquad 0 \leq x \leq 1 \tag{1.11}$$

la seule différence entre ceci et le calcul précédent, étant que la valeur $\phi^{'}(0) = C$ n'est pas donnée et C doit être déterminé en imposant la condition $\phi(1) = \phi_1$, ce qui implique :

$$C = \phi_1 - \phi_0 - \int_0^1 (1-t)\psi(t, \phi(t))dt,$$

donc (1.11) peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \int_0^x (x-t)\psi(t,\phi(t))dt - x\int_0^1 (1-t)\psi(t,\phi(t))dt + (\phi_1-\phi_0)x+\phi_0 \\ &= -\int_0^x t(1-x)\psi(t,\phi(t))dt - \int_x^1 x(1-t)\psi(t,\phi(t))dt + (\phi_1-\phi_0)x+\phi_0\end{aligned}$$

L'avantage de cette remise en ordre est qu'elle mène à la forme :

$$\phi(x) = -\int_0^1 k(x,t)\psi(t,\phi(t))dt + (\phi_1-\phi_0)x+\phi_0, \qquad 0 \le x \le 1 \tag{1.12}$$

tel que :

$$k(x,t) = \begin{cases} t(1-x), & si \quad t \le x \\ x(1-t), & si \quad x \le t \end{cases} \tag{1.13}$$

Nous pouvons renverser le processus et déduire que la fonction ϕ qui satisfait l'équation intégrale (1.12) et aussi le problème aux limites (1.10) .

Maintenant pour (1.10) si on prend le cas simple d'un problème aux limites linéaire :

$$\begin{cases} \phi''(x) = -\lambda\phi(x), & 0 < x < 1 \\ \phi(0) = \phi_0, & \phi(1) = \phi_1 \end{cases}$$

alors (1.12) se réduit à l'équation intégrale de Fredholm :

$$\phi(x) = \lambda\int_0^1 k(x,t)\phi(t)dt + f(x), \qquad 0 \le x \le 1$$

où

$$f(x) = (\phi_1-\phi_0)x+\phi_0$$

1.4.3 Problème de Sturm-Liouville :

L'opérateur différentiel de Sturm-Liouville est défini comme suit :

$$L = -\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial}{\partial x}\right) + q(x),$$

où $p(x)$ et $q(x)$ sont deux fonctions continues sur l'intervalle $[a;b]$, et en outre $p(x)$ admet un dérivée continue et non nulle sur cet intervalle.

Nous allons discuter deux types d'équations différentielles, c'est-à-dire :

$$L\phi = f(x), \qquad a \le x \le b \tag{1.14}$$

et

$$L\phi - \lambda r(x)\phi = 0, \tag{1.15}$$

où $f(x)$ et $r(x)$ sont des fonctions données. La fonction $r(x)$ est continue et non négative sur $[a;b]$. Ces équations est assujettie aux conditions aux limites suivantes :

$$\alpha_1\phi(a) + \alpha_2\phi^{'}(a) = 0, \tag{1.16}$$

$$\beta_1\phi(b) + \beta_2\phi^{'}(b) = 0. \tag{1.17}$$

Supposons qu'une fonction ϕ_1 satisfait la condition au limite (1.16), et une autre fonction ϕ_2 (linéairement indépendante de ϕ_1) satisfait la condition au limite (1.17). Ceci conduit à résoudre deux problèmes de valeur initiale, à savoir :

$$\begin{cases} L\phi_1 = 0 \\ \phi_1(a) = -\alpha_2, \qquad \phi_1^{'} = \alpha_1 \end{cases} \tag{1.18}$$

et

$$\begin{cases} L\phi_2 = 0 \\ \phi_2(b) = -\beta_2, \qquad \phi_2^{'}(b) = \beta_1 \end{cases} \tag{1.19}$$

Maintenant, en utilisant la méthode de variation des constantes, la solution de l'équation non homogène (1.14) est de la forme :

$$\phi(x) = C_1(x)\phi_1(x) + C_2(x)\phi_2(x), \tag{1.20}$$

où C_1 et C_2 sont déterminées à partir des relations :

$$C_1^{'}(x)\phi_1(x) + C_1^{'}(x)\phi_2(x) = 0, \tag{1.21}$$

$$C_1^{'}(x)\phi_1^{'}(x) + C_2^{'}(x)\phi_2^{'}(x) = -\frac{f(x)}{p(x)}. \tag{1.22}$$

Dans l'objectif de trouver aisément la solution de (1.14), nous avons besoin d'une autre relation de ϕ_1 et de ϕ_2. Ceci est résolu immédiatement du fait que ϕ_1 et ϕ_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène $L\phi = 0$. On a :

$$\begin{aligned} 0 &= \phi_2 L\phi_1 - \phi_1 L\phi_2 \\ &= -\phi_2\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial\phi_1}{\partial x}\right) + \phi_1\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial\phi_2}{\partial x}\right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial x}\left\{p\left(\phi_2\frac{\partial\phi_1}{\partial x} - \phi_1\frac{\partial\phi_2}{\partial x}\right)\right\}, \end{aligned}$$

de sorte que l'expression entre brackets est constante. Comme ϕ_1 et ϕ_2 peuvent êtres déterminés avec des facteurs constants près on peut donc choisir cette expression pour avoir :

$$p\left(\phi_2\frac{\partial\phi_1}{\partial x}-\phi_1\frac{\partial\phi_2}{\partial x}\right)=-1. \tag{1.23}$$

A partir des relations (1.21), (1.22) et (1.23), on trouve que $C_1^{'}(x)=-\phi_2(x)f(x)$ et $C_2^{'}(x)=\phi_1(x)f(x)$. Ainsi :

$$C_1(x)=\int_x^b\phi_2(\rho)f(\rho)d\rho,$$
$$C_2(x)=\int_a^x\phi_1(\rho)f(\rho)d\rho.$$

En substituant ces valeurs dans (1.20) on obtient la solution :

$$\phi(x)=\phi_1(x)\int_x^b\phi_2(\rho)f(\rho)d\rho+\phi_2(x)\int_a^x\phi_1(\rho)f(\rho)d\rho=\int_a^b G(x,\rho)f(\rho)d\rho, \tag{1.24}$$

où la fonction :

$$G(x,\rho)=\begin{cases}\phi_1(\rho)\phi_2(x), & \rho\le x\\ \phi_1(x)\phi_2(\rho), & \rho\ge x\end{cases} \tag{1.25}$$

est appelée fonction de Green pour le problème à valeur-limite, elle s'écrit encore d'une manière élégante, en définissant les régions :

$$x_<=min(x,\rho)=\begin{cases}x, & a\le x\le\rho\\ \rho, & \rho\le x\le b\end{cases}$$

$$x_>=max(x,\rho)=\begin{cases}\rho, & a\le x\le\rho\\ x, & \rho\le x\le b\end{cases}$$

Alors : $G(x,\rho)=\phi_1(x_<)\phi_2(x_>)$.

Finalement, à partir de (1.24), la solution de l'équation (1.15) est donné sous la forme :

$$\phi(x)=\lambda\int_a^b r(x)G(x,\rho)\phi(\rho)d\rho. \tag{1.26}$$

c'est une équation intégrale à noyau $r(\rho)G(x,\rho)$. En posant $u(x)=\sqrt{r(x)}\phi(x)$, l'équation intégrale (1.26) devient :

$$u(x)=\lambda\int_a^b K(x,t)u(t)dt. \tag{1.27}$$

où $K(x,t)=\sqrt{r(x)}\sqrt{r(t)}G(x,t)$.

1.5 Polynômes orthogonaux :

Le produit scalaire de fonctions les plus simples est l'intégrale du produit de ces fonctions, sur un intervalle borné :

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Plus généralement, on peut introduire une fonction de poids $w(x)$ dans l'intégrale (sur l'intervalle d'intégration $]a,b[$, w doit être à valeurs finies et strictement positives, et l'intégrale du produit de la fonction de poids par un polynôme doit être finie, les bornes a,b peuvent être infinis) :

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx.$$

avec cette définition du produit scalaire, deux fonctions sont orthogonales entre elles si leur produit scalaire est égal à zéro (de la même manière que deux vecteurs sont orthogonaux si leur produit scalaire égale zéro). On introduit alors la norme associée $\|f\|= \sqrt{\langle f,f\rangle}$, l'intervalle d'intégration est appelé intervalle d'orthogonalité.

1.5.1 Formule de Rodriguez :

On suppose dans cette section d'une famille de polynômes orthogonaux donnée par une formule de Rodriguez de la forme :

$$P_n(x) = \frac{1}{K_n w(x)} \frac{d^n}{dx^n}\{w(x)X^n\}.$$

où :
$P_n(x)$:un polynômes de degré n.
K_n :les nombres dépendent de la normalisation.
X :est un polynôme en x de degré k.
$w(x)$:la fonction poids des polynomes orthogonaux.

1.5.2 Équation et forme différentielles :

Soit $P_n(x)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes orthogonaux définie à l'aide d'une formule de Rodriguez, alors $P_n(x)$ satisfait, pour $n \geq 0$, une équation différentielle de la forme :

$$A(x)y^{''} + B(x)y^{'} + \lambda_n y = 0.$$

où $A(x)$ et $B(x)$ ne dépendent pas de n et λ_n ne dépend pas de x.

1.5.3 Polynômes orthogonaux classiques :

1. Polynômes de Jacobi :

Intervalle d'étude : $[-1;1]$

Fonction de poids :

$$W^{(\alpha,\beta)}(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$$

Formulation explicite :

$$J_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{m=0}^{n}\binom{n+\alpha}{m}\binom{n+\beta}{n-m}(x-1)^{n-m}(x+1)^m$$

Où on a utilisé :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Équation différentielle :

$$(1+x^2)y^{''} + (\beta - \alpha - (\alpha+\beta+2)x)y^{'} + n(n+1+\alpha+\beta) = 0$$

$$y = J_n^{(\alpha,\beta)}(x)$$

Formule de Rodriguez :

$$J_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}}\frac{d^n}{dx^n}\{(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}\}$$

Les premiers de ces polynômes sont pour $\alpha = 1$ et $\beta = 0$:

$$\begin{aligned} J_0(x) &= 1 \\ J_1(x) &= (3x+1)/2 \\ J_2(x) &= (5x^2+2x-1)/2 \\ J_3(x) &= \frac{35}{8}x^3 + 15x^2 - \frac{15}{8}x - \frac{3}{8} \end{aligned}$$

2. Polynômes de Tchebychev (première espèce) :

Intervalle d'étude : $[-1;1]$

Fonction de poids :

$$W(x) = (1-x^2)^{-1/2}$$

Formulation explicite :

$$T_n(x) = \frac{n}{2}\sum_{m=0}^{[n/2]}(-1)^m\frac{(n-m-1)!}{m!(n-2m)!}(2x)^{n-2m} = cos(nArccosx)$$

Équation différentielle :

$$(1-x^2)y^{''} - xy^{'} + n^2 y = 0$$

$$y = T_n(x)$$

Formule de Rodriguez :

$$T_n(x) = \frac{(-1)^n (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\pi}}{2^{n+1}\Gamma(n+\frac{1}{2})} \frac{d^n}{dx^n}\{(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}\}$$

Les premiers de ces polynômes sont :

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x \end{aligned}$$

3. ## Polynômes de Tchebychev (seconde espèce) :

Intervalle d'étude : $[-1;1]$

Fonction de poids :

$$W(x) = (1-x^2)^{1/2}$$

Formulation explicite :

$$U_n(x) = \sum_{m=0}^{[n/2]} (-1)^m \frac{(m-n)!}{m!(n-2m)!} (2x)^{n-2m} = \frac{T^{'}_{n+1}(x)}{n+1}$$

Équation différentielle :

$$(1-x^2)y^{''} - 3xy^{'} + n(n+2)y = 0$$

$$y = U_n(x)$$

Formule de Rodriguez :

$$U_n(x) = \frac{(-1)^n (n+1) \sqrt{\pi}}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}} 2^{n+1}\Gamma(n+\frac{3}{2})} \frac{d^n}{dx^n}\{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}\}$$

Les premiers de ces polynômes sont :

$$\begin{aligned} U_0(x) &= 1 \\ U_1(x) &= 2x \\ U_2(x) &= 4x^2 - 1 \\ U_3(x) &= 8x^3 - 4x \end{aligned}$$

4. **Polynômes de Legendre :**

Intervalle d'étude : $[-1;1]$

Fonction de poids :

$$W(x) = 1$$

Formulation explicite :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{m=0}^{[n/2]}(-1)^n\binom{n}{m}\binom{2n-2m}{n}(x)^{n-2m}$$

où on a utilisé :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Équation différentielle :

$$(1-x^2)y^{''} - 2xy^{'} + n(n+1)y = 0$$

$$y = P_n(x)$$

Formule de Rodriguez :

$$L_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\{(1-x^2)^n\}$$

Les premiers de ces polynômes sont :

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= (3x^2-1)/2 \\ P_3(x) &= (5x^3-3x)/2 \end{aligned}$$

5. **Polynômes de Gegenbauer (ou ultrasphériques) :**

Intervalle d'étude : $[-1;1]$

Fonction de poids :

$$W^{\alpha}(x) = (1-x^2)^{\alpha-1/2}$$

Formulation explicite :

$$G_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{m=0}^{[n/2]}(-1)^k\frac{\Gamma(n-m+\alpha)}{\Gamma(\alpha)m!(n-2m)!}(2x)^{n-2m}$$

Équation différentielle :

$$(1-x^2)y^{''}-(2\alpha+1)xy^{'}+n(n+2\alpha)y=0$$

$$y=G_n^{\alpha}(x)$$

Formule de Rodriguez :

$$G_n^{\alpha}(x)=\frac{(-1)^n(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\Gamma(n+2\alpha)\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}{2^{n+1}n!(1-x^2)^{\alpha}\Gamma(2\alpha)\Gamma(\frac{n+1}{2+\alpha})}\frac{d^n}{dx^n}\{(1-x^2)^{n+\alpha-\frac{1}{2}}\}$$

Les premiers de ces polynômes sont pour $\alpha=1$:

$$\begin{aligned}
G_0(x) &= 1\\
G_1(x) &= 2x\\
G_2(x) &= 4x^2-1\\
G_3(x) &= 8x^3-4x
\end{aligned}$$

Chapitre 2

Existence et unicité des solutions pour les équations intégrales

Dans ce chapitre, on présente le théorème du point fixe de Banach, ce théorème est important pour montrer la résolution d'une équation de la forme $\phi = A\phi$, où A est un opérateur défini sur un espace de Banach E dans les équations intégrales linéaires. Le théorème du point fixe de Banach est le plus connu et plus simple. Nous allons voir que si A est un opérateur contractant, alors cette équation admet un point fixe unique pour tout f dans E.

2.1 Opérateurs linéaires bornés :

Définition 2.1. *Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps des scalaires. Une application $T : E \to F$ est dite linéaire si pour tout ϕ et ψ dans E et pour tout scalaires α et β :*

$$T(\alpha\phi + \beta\psi) = \alpha T(\phi) + \beta T(\psi). \tag{2.1}$$

cette application est appelée aussi opérateur linéaire ou transformation linéaire.

Définition 2.2. *Soient E et F deux espaces normés. Un opérateur linéaire $T : E \to F$ est dit borné s'il existe une constante $M \geq 0$, telle que :*

$$\|T\phi\| \leq M\|\phi\| \quad pour \quad tout \quad \phi \in E. \tag{2.2}$$

Théorème 2.1. *Soit T un opérateur linéaire entre deux espaces vectoriels normés E et F. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) T est borné.

b) T est continu sur E.

c) T est continu a l'origine.

2.2 Opérateurs à noyau :

L'équation que nous allons intéresser dans le suite de cette section est l'équation de Fredholm du second type :

$$\lambda\phi(x) - \int_\Omega k(x,t)\phi(t)dt = f(x), \qquad \Omega \subset \mathbb{R}^n,$$

On désigne par Ω un ensemble compact inclue dans $\mathbb{R}^n$ et soit $C(\Omega)$ l'espace des fonctions continues sur Ω, on lui associe le produit scalaire :

$$\langle f,g\rangle = \int_\Omega f(x)g(x)dx.$$

Cet espace est muni de norme la convergence uniforme :

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in\Omega}|f(x)|.$$

On va considérer des équations mettant en jeu des intégrales , sous la forme d'un opérateur linéaire.

2.3 Opérateurs intégraux :

Définition 2.3. *Soit k une fonction mesurable sur $\Omega\times\Omega$. Alors la forme général d'un opérateur intégrale linéaire T, dit aussi opérateur à noyau, est formellement donné par l'expression :*

$$T\phi(x) = \int_\Omega k(x,t)\phi(t)dt. \tag{2.3}$$

$T\phi$ est défini dès que cette intégrale existe.

2.4 Contraction :

Définition 2.4. *Soit A un opérateur borné sur un espace de Banach E. On dit que A est un opérateur contractant s'il existe une constante positive $0<\kappa<1$ telle que :*

$$\|A\phi_1 - A\phi_2\| \leq \kappa\|\phi_1-\phi_2\| \tag{2.4}$$

pour tout $\phi_1,\phi_2\in E$, le résultat suivant est appelé théorème de l'application contractante.

2.5 Quelques théorèmes de point fixe :

2.5.1 Théorème du point fixe de Banach :

Le théorème du point fixe de Banach donne l'existence et l'unicité d'un point fixe pour une contraction sur un espace métrique complet.

Théorème 2.2 (Banach, 1922)**.** *Soit A un opérateur contractant sur E. Alors l'équation :*

$$A\phi = \phi, \tag{2.5}$$

admet une solution unique dans E. Une telle solution est un point fixe de l'opérateur A.

Preuve: Montrons d'abord l'unicité du point fixe. Raisonnons par l'absurde et supposant qu'il existe deux points fixes ϕ et ψ telles que $A\phi = \phi$ et $A\psi = \psi$, alors :

$$\|\phi - \psi\| = \|A\phi - A\psi\| \leq \kappa\|\phi - \psi\|$$

et

$$(1-\kappa)\|\phi - \psi\| \leq 0.$$

d'où $\|\phi - \psi\| = 0$, ce qui implique $\phi = \psi$.
Pour montrer l'existence, nous allons construire un processus itératif. Soit la donnée d'un élément initial ϕ_0 et d'une suite récurrente ϕn définie par :

$$\phi_{n+1} = A\phi_n, \qquad n \in \mathbb{N}$$

On doit montrer d'abord que cette suite est de Cauchy, et que sa limite est une solution de (2.5) . Que la limite existe, découle du faite que dans un Banach toute suite de Cauchy est convergente. Notons que :

$$\|\phi_{n+1} - \phi_n\| = \|A\phi_n - A\phi_{n-1}\| \leq \kappa\|\phi_n - \phi_{n-1}\|.$$

d'où

$$\|\phi_{n+1} - \phi_n\| \leq \kappa\|\phi_n - \phi_{n-1}\| \leq \kappa^2\|\phi_{n-1} - \phi_{n-2}\| \leq \cdots \leq \kappa^n\|\phi_1 - \phi_0\|.$$

en général, si n > m :

$$\begin{aligned}
\|\phi_n - \phi_m\| &= \|(\phi_n - \phi_{n-1}) + (\phi_{n-1} - \phi_{n-2}) + \cdots + (\phi_{m+1} - \phi_m)\| \\
&\leq \|\phi_n - \phi_{n-1}\| + \|\phi_{n-1} - \phi_{n-2}\| + \cdots + \|\phi_{m+1} - \phi_m\| \\
&\leq (\kappa^{n-1} + \kappa^{n-2} + \cdots + \kappa^m)\|\phi_1 - \phi_0\| \\
&\leq (\kappa^m + \kappa^{m+1} + \cdots)\|\phi_1 - \phi_0\| = \frac{\kappa^m}{1-\kappa}\|\phi_1 - \phi_0\|.
\end{aligned}$$

donc :

$$\lim_{n,m\to\infty} \|\phi_n - \phi_m\| = 0.$$

Par conséquent, la suite (ϕ_n) est de Cauchy, notons sa limite par ϕ. Il reste à montrer que ϕ est une solution de (2.5) . Comme A est continu, nous avons :

$$A\phi = A(\lim_{n\to\infty} \phi_n) = \lim_{n\to\infty} A\phi_n = \lim_{n\to\infty} \phi_n = \phi.$$

□

Exemple 2.1. *On considère ce problème aux limites admet une solution unique :*

$$\begin{cases} -\phi''(x) = 3(1+(\phi(x))^2), & 0 \leq x \leq 1 \\ \phi(0) = \phi(1) = 0, & \phi \in C^2([0,1]) \end{cases} \tag{2.6}$$

On peut transformer tout problème aux limites de la forme :

$$\begin{cases} -\phi''(x) = g(x,\phi(x)),` & 0 \leq x \leq 0 \\ \phi(0) = \phi(1) = 0. \end{cases}$$

en une équation intégrale de Fredholm homogène :

$$\phi(x) = \int_0^1 k(x,t) g(t,\phi(t)) dt.$$

où :

$$k(x,t) = \begin{cases} t(1-x), & 0 \leq t < x \leq 1 \\ x(1-t), & 0 \leq x < t \leq 1 \end{cases}$$

Maintenant, pour tout $\phi \in C([0,1])$, on considère :

$$T\phi(x) = \int_0^1 k(x,t) 3(1+\phi(t)^2) dt.$$

on a :

$$\begin{aligned} |T\phi_1(x) - T\phi_2(x)| &= 3\left|\int_0^1 k(x,t)[\phi_1^2(t) - \phi_2^2(t)]dt\right| \\ &\leq 3\int_0^1 |k(x,t)||\phi_1(t) - \phi_2(t)||\phi_1(t) + \phi_2(t)|dt \\ &\leq 3\left(\int_0^x t(1-x)dt + \int_x^1 x(1-t)dt\right)(\|\phi_1\| + \|\phi_2\|)\|\phi_1 - \phi_2\| \\ &\leq 3\frac{x(1-x)}{2}(\|\phi_1\| + \|\phi_2\|)\|\phi_1 - \phi_2\| \\ &\leq \frac{3}{4}\|\phi_1 - \phi_2\|. \end{aligned}$$

Pour tout $\phi_1, \phi_2 \in U = \{\phi \in C([0,1]) : \|\phi\| \leq 1\}$. D'autre part, nous avons $T(U) \subseteq U$, en effet, soit $\phi \in U$:

$$|T\phi(x)| = \left|3\int_0^1 k(x,t)(1+\phi(t)^2)dt\right| \leq 6\int_0^1 k(x,t)dt = 6\frac{x(1-x)}{2} \leq \frac{3}{4}.$$

Donc, l'opérateur T admet un point fixe unique dans U qui est évidemment, solution du problème aux limites (2.6) .

Théorème 2.3. *Soit A un opérateur sur E, tel que A^n est un opérateur contractant. Alors l'équation :*

$$A\phi = \phi,$$

admet une solution unique sur E.

Preuve: Puisque A^n est contractant, il admet un point fixe unique noté par ϕ_0. Alors :

$$\|A(\phi_0) - \phi_0\| = \|A^n(A(\phi_0)) - A^n(\phi_0)\| \leq \kappa\|A(\phi_0) - \phi_0\|.$$

ce qui implique $A(\phi_0) = \phi_0$ puisque $0 < \kappa < 1$. L'unicité du point fixe de A découle du faite qu'il est aussi point fixe de A^n. □

2.6 Existence et unicité des solutions des équations intégrales linéaires :

Proposition 2.1. *Le m-ième noyau itéré de l'équation intégrale de Volterra est donné par :*

$$k_m(x,t) = \int_t^x k(x,z)k_{m-1}(z,t)dz, \quad si \quad t < x \tag{2.7}$$

et $k_m(x,t) = 0$, si $t \geq x$.

Théorème 2.4. *Soit $k(x,t)$ une fonction à valeurs réelles, continue sur le carré $0 \leq x,\ t \leq 1$. Alors l'équation intégrale :*

$$\phi(x) = f(x) + \lambda\int_0^x k(x,t)\phi(t)dt, \tag{2.8}$$

admet une solution unique pour tout λ et $f(x)$ dans $C([0,1])$.

Preuve: On considère l'opérateur :

$$A\phi = f + \lambda T\phi,$$

où :

$$T\phi(x) = \int_0^x k(x,t)\phi(t)dt.$$

Pour montrer l'existence d'un point fixe pour A, il suffit de montrer que A^n est contractant pour un certain n.

Nous avons :

$$A^n\phi = f + \lambda T\phi + \cdots + \lambda^{n-1}T^{n-1}\phi + \lambda^n T^n\phi,$$

avec :

$$T^n\phi(x) = \int_0^x k_n(x,t)\phi(t)dt.$$

alors :

$$\|A^n\phi_1 - A^n\phi_2\| = |\lambda|^n \left\| \int_0^x k_n(x,t)(\phi_1(t) - \phi_2(t))dt \right\|.$$

Pour déterminer $k_n(x,t)$, on utilise la proposition (2.1) :

$$\begin{aligned} k_1(x,t) &= k(x,t), \\ k_n(x,t) &= \int_t^x k(x,z)k_{n-1}(z,t)dz, \quad n \in \mathbb{N} - \{0,1\} \end{aligned}$$

D'autre part, comme $k(x,t)$ est continu sur le carré $0 \le x,t \le 1$, alors il est uniformément borné, (i.e) il existe M tel que $|k(x,t)| < M$ pour tout x, $t \in [0,1]$.

Par induction, on obtient la majoration :

$$|K_n(x,t)| \le \frac{M^n(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}, \qquad 0 \le t \le x.$$

En effet, pour $(n = 1)$ la propriété est évidente. Supposons qu'elle est à l'ordre n :

$$\begin{aligned} |k_{n+1}(x,t)| &\le \int_t^x |k(x,z)||k_n(z,t)|dt \\ &\le \frac{M^{n+1}}{(n-1)!}\int_t^x (z-t)^{n-1}dz \\ &\le \frac{M^{n+1}(x-t)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} \|A^n\phi_1 - A^n\phi_2\| &\le \frac{|\lambda|^n M^n}{(n-1)!}\left\| \int_0^x (\phi_1(t) - \phi_2(t)dt \right\| \\ &\le \frac{|\lambda|^n M^n}{(n-1)!}\|\phi_1 - \phi_2\| \le \|\phi_1 - \phi_2\| \end{aligned}$$

Pour n assez grand :

$$\frac{|\lambda|^n M^n}{(n-1)!} < 1$$

de sorte que A^n soit un opérateur contractant, et (2.8) admet une solution unique. □

Théorème 2.5. *Soit $k(x,t)$ une fonction à valeurs réelles, définie sur le carré $a \leq x,\ t \leq b$ telle que :*

$$B^2 = \int_a^b \int_a^b K^2(x,t)dxdt < +\infty.$$

Alors, l'équation intégrale :

$$\phi(x) = f(t) + \lambda \int_a^b K(x,t)\phi(t)dt, \qquad a \leq x \leq b$$

admet une solution unique $\phi(x) \in L^2([a,b])$, pour tout paramètre λ suffisamment petit et tout $f(x)$ dans $L^2([a,b])$.

Preuve: On considère l'opérateur :

$$A\phi(x) = f(t) + \lambda \int_a^b K(x,t)\phi(t)dt.$$

Soit $\phi(x) \in L^2([a,b])$, nous allons montrer d'abord que $A\phi \in L^2([a,b])$.

$$\int_a^b (A\phi)^2 dx = \int_a^b f^2(x)dx + 2\lambda \int_a^b f(x)\left(\int_a^b K(x,t)\phi(t)dt\right)dx + \lambda^2 \int_a^b \left(\int_a^b K(x,t)\phi(t)dt\right)^2 dx.$$

en utilisant la relation de Fubini et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\left(\int_a^b K(x,t)\phi(t)dt\right)dx &= \int_a^b \int_a^b K(x,t)\phi(x)f(t)dxdt \\ &\leq \left(\int_a^b \int_a^b K^2(x,t)dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \|\phi\|\|f\| < \infty.\end{aligned}$$

de la même manière, on obtient :

$$\int_a^b \left(\int_a^b K(x,t)\phi(t)dt\right)^2 dx < \infty.$$

Ainsi, $A\phi \in L^2([a,b])$. Par conséquent, $A : L^2([a,b]) \to L^2([a,b])$. Il reste à montrer que A est contractant. Soient $\phi(x), \psi(x) \in L^2([a,b])$:

$$\begin{aligned}
\|A\phi - A\psi\| &= \left(\int_a^b |A\phi - A\psi|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= |\lambda|\left[\int_a^b \left(\int_a^b k(x,t)[A\phi(t) - A\psi(t)]dt\right)^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq |\lambda|\left(\int_a^b \int_a^b k^2(x,t)dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |\phi(t) - \psi(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq |\lambda| B\|\phi - \psi\|.
\end{aligned}$$

Ceci, montre que si $|\lambda|B < 1$, i.e :

$$|\lambda| < \left(\int_a^b \int_a^b k^2(x,t)dxdt\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{B}$$

Alors l'opérateur A est contractant. Et par conséquent, l'équation intégrale $A\phi = \phi$ admet une solution unique pour tout $f(x)$ dans $L^2([a,b])$. □

2.7 Équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce

Théorème 2.6 (Existence et unicité). *Si $f \in L^2([a,b])$ et le noyau k vérifie la condition :*

$$\int_a^b \int_a^b |k(x,t)|^2 dxdt < +\infty \tag{2.9}$$

Alors l'équation :

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)\phi(t)dt \tag{2.10}$$

admet une solution unique dans $L^2([a,b])$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$:
La solution peut-être écrite sous la forme :

$$\phi(x) = f(x) + \sum_{n\geq 1} \lambda^n \int_a^x k_n(x,t)\phi(t)dt$$

où les noyaux $k_n(x,t)$ vérifient la relation de récurrence :

$$\begin{aligned}
k_1(x,t) &= k(x,t) \\
k_n(x,t) &= \int_a^x k_1(x,s)\int_a^x k_{n-1}(s,t)ds, \quad pour \quad tout \quad x \geq 2
\end{aligned}$$

Preuve:

$$M(x) = \int_a^x |k(x,t)|^2 dx$$

et

$$N(x) = \int_t^b |k(x,t)|^2 dt$$

Par (2.9) , M et N sont des fonctions intégrables, et donc il existe une constante S telle que :

$$\int_a^b M(x)dx \leq S \qquad et \qquad \int_a^b N(t)dt \leq S$$

Soit la fonction B définie sur $[a,b]$ par :

$$B(x) = \int_a^x M(t)dt$$

Il est claire que $0 \leq B(x) \leq N$, pour tout $x \in [a,b]$. Considérons l'opérateur :

$$(T\phi)(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)\phi(t)dt$$

alors :

$$T^n\phi = f + \sum_{j=1}^{n} \lambda^j L^j f$$

l'opérateur L^j peut-être écrit sous la forme :

$$(L^j\psi)(x) = \int_a^x k_j(x,t)\psi(t)dt$$

où les noyaux k_j sont définie ci-dessus.
En effet, pour $(j = 2)$ nous avons :

$$(L^2\psi)(x) = \int_a^x k(x,z) \int_a^z k(z,t)\psi(t)dtdz$$

cette intégrale est une intégrale double sur le domaine triangulaire :

$$\{f(t,z) : \quad a \leq t \leq z \quad et \quad a \leq z \leq x\}$$

après changement de l'ordre d'intégration, nous obtenons :

$$(L^2\psi)(x) = \int_a^x \int_t^x k(x,z)k(z,t)dt$$

Si nous notons :

$$k(x,t) = \int_t^x k(x,z)k(z,t)dt$$

alors par le même raisonnement, nous obtenons :

$$(L^2\psi)(x) = \int_a^x \int_t^x k(x,z)k_2(z,t)dz\psi(t)dt$$

et ainsi de suite.

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et raisonnement par récurrence, nous obtenons :

$$|k_j(x,t)|^2 \leq M(x)N(x)\frac{(B(x)-B(t))^{j-2}}{(j-2)!} \quad pour \quad tout \quad j \geq 2$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} |(T^j\phi_1)(x)-(T^j\phi_2)(x)| &= |\lambda|^{2j}\left|\int_a^x k_j(x,t)(\phi_1(x)-\phi_2(x)]dt\right|^2 \\ &\leq |\lambda|^{2j}\int_a^x M(x)N(x)\frac{(B(x)-B(t))^{j-2}}{(j-2)!}dt\int_a^x |\phi_1(x)-\phi_2(x)|^2dt \\ &\leq \frac{|\lambda|^{2j}(B(x)-B(t))^{j-2}}{(j-2)!}\int_a^x M(t)N(t)dt\|\phi_1-\phi_2\|^2 \\ &\leq \frac{|\lambda|^{2j}(B(x)-B(t))^{j-2}P}{(j-2)!}|\phi_1-\phi_2\|^2 \end{aligned}$$

En intégrant par rapport à x dans $[a,b]$, nous obtenons :

$$\|T^j\phi_1 - T^j\phi_2\|^2 \leq \frac{|\lambda|^{2j}P^j}{(j-2)!}|\phi_1-\phi_2\|^2 \quad pour \quad tout \quad j \geq 2$$

Par conséquent, puisqu'il existe un $n \geq 2$ tel que :

$$\frac{|\lambda|^{2j}P^j}{(j-2)!} < 1$$

T^n est une contraction. D'après le théorème du point fixe de Banach, l'équation (2.10) a une solution unique qui s'écrit sous la forme :

$$\lim_{n\to\infty} T^n\phi = f + \sum_{j\geq 0}\lambda^j T^j f$$

où ce qui est équivalent :

$$\phi(x) = f(x) + \sum_{n\geq 0}\lambda^n \int_a^x k_n(x,t)f(t)dt$$

□

Chapitre 3

Les méthodes analytiques des équations intégrales linéaires

Dans ce chapitre, nous allons appliquer certaines méthodes analytiques classiques pour les équations intégrales de Fredholm et Volterra.

3.1 Les équations intégrales de Volterra :

3.1.1 La méthode des approximations successives :

Le principe de cette méthode consiste à remplacer la fonction inconnue $\phi(x)$ sous le signe intégral de l'équation de Volterra par toute fonction continue à valeurs réelles sélectionnée $\phi_0(x)$, appelée approximation zéro.On obtient la première approximation $\phi_1(x)$, de la relation :

$$\phi_1(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x;t)\phi_0(t)dt \tag{3.1}$$

Il est claire que $\phi_1(x)$ est continue si $f(x)$, $K(x;t)$ et $\phi_0(x)$ sont continues. La deuxième approximation $\phi_2(x)$ peut être obtenue de la même façon en remplaçant $\phi_0(x)$ dans l'équation (3.1) par $\phi_1(x)$:

$$\phi_2(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x;t)\phi_1(t)dt \tag{3.2}$$

Ainsi, nous obtenons une suite infinie de fonctions :

$$\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \cdots \phi_n(x), \cdots$$

qui satisfait la relation de récurrence :

$$\phi_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x;t)\phi_{n-1}(t)dt, n = 1, 2, 3, \cdots \tag{3.3}$$

On admet :

(1) la fonction $f(x)$ dans (3.3) est continue dans l'intervalle $0 \leq x \leq a$.

(2) le noyau $K(x;t)$ est également continu dans le triangle $0 \leq x \leq a; 0 \leq t \leq x$, alors la suite des approximations successives $\phi_n(x), n \geq 0$ converge vers la solution $\phi(x)$:

Ainsi á la limite la solution $\phi(x)$ est obtenue comme suit :

$$\phi(x) = \lim_{n\to\infty} \phi_n(x)$$

de sorte que la solution résultante $\phi(x)$ soit indépendante du choix de l'approximation $\phi_0(x)$.

Exemple 3.1. *L'équation intégrale de Volterra en utilisant la méthode des approximations successives :*

$$\phi(x) = -1 + e^x + \frac{1}{2}x^2 e^x - \frac{1}{2}\int_0^x t\phi(t)dt$$

Nous choisissons $\phi_0(x) = 0$, Nous utilisons ensuite la formule d'itération :

$$\phi_{n+1}(x) = -1 + e^x + \frac{1}{2}x^2 e^x - \frac{1}{2}\int_0^x t\phi_n(t)dt, \quad n \geq 0 \tag{3.4}$$

En substituant $\phi_0(x) = 0$ dans (3.4) ,nous obtenons :

$\phi_1(x) = -1 + e^x + \frac{1}{2!}x^2 e^x$

$\phi_2(x) = -3 + \frac{1}{4}x^2 + e^x(3 - 2x + \frac{5}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^3)$

$\phi_3(x) = x\left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots\right)$

$\vdots$

$\phi_n(x) = x\left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{7!}x^7 \cdots\right)$

Ici nous avons utilisé le développement de Taylor de e^x pour déterminer $\phi_3(x)$, $\phi_4(x)$,$\cdots$

La solution $\phi(x)$:

$$\phi(x) = \lim_{n\to\infty} \phi_{n+1}(x) = xe^x$$

3.1.2 La méthode de transformation de Laplace :

Équations intégrales de Volterra de type convolution telles que :

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x-t)\phi(t)dt \tag{3.5}$$

où le noyau $K(x-t)$ est de type convolution, se résout très facilement en utilisant la méthode de la transformée de Laplace. Pour commencer le processus de résolution, nous définissons d'abord le Transformée de Laplace de $\phi(x)$:

$$\mathcal{L}\phi(x) = \int_0^\infty e^{-sx}\phi(x)dx \tag{3.6}$$

En utilisant la transformée de Laplace de l'intégrale de convolution, nous avons :

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^x k(x-t)\phi(t)dt\right\} = \mathcal{L}\{k(x)\}\mathcal{L}\{\phi(x)\} \tag{3.7}$$

Ainsi, en prenant la transformée de Laplace de l'équation (3.5) , on obtient :

$$\mathcal{L}\{\phi(x)\} = \mathcal{L}\{f(x)\} + \lambda\mathcal{L}\{k(x)\}\mathcal{L}\{\phi(x)\}$$

et la solution pour $\mathcal{L}\{\phi(x)\}$ est donnée par :

$$\mathcal{L}\{\phi(x)\} = \frac{\mathcal{L}\{f(x)\}}{1-\lambda\mathcal{L}\{k(x)\}}$$

et en inversant cette transformée, on obtient :

$$\phi(x) = \int_0^x \psi(x-t)f(t)dt \tag{3.8}$$

où l'on suppose que $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{1-\lambda\mathcal{L}\{k(x)\}}\right\} = \psi(x)$. L'expression (3.8) est la solution du second type équation intégrale de Volterra de type convolution.

3.1.3 La méthode des substitutions successives :

Dans cette méthode, nous substituons successivement $\phi(x)$ par sa valeur donnée par l'équation :

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x,t)\phi(t)dt \tag{3.9}$$

Nous trouvons :

$$\begin{aligned}\phi(x) &= f(x)+\lambda\int_0^x k(x,t)\left[f(x)+\lambda\int_0^t k(t,t_1)\phi(t_1)dt_1\right]dt\\ &= f(x)+\int_0^x k(x,t)f(t)dt+\lambda^2\int_0^x k(x,t)\int_0^t k(t,t_1)\phi(t_1)dt_1dt\\ &= f(x)+\int_0^x k(x,t)f(t)dt+\lambda^2\int_0^x k(x,t)\int_0^t k(t,t_1)f(t_1)dt_1dt\\ &\quad +\cdots\\ &\quad +\lambda^n\int_0^x k(x,t)\int_0^t k(t,t_1)\cdots\\ &\quad \times\int_0^{t_{n-2}} k(t_{n-2},t_{n-1})f(t_{n-1})dt_{n-1}\cdots dt_1dt+R_{n+1}(x)\end{aligned}$$

oú

$$R_{n+1}=\lambda^{n+1}\int_0^x\int_0^t k(t,t_1)\cdots\int_0^{t_{n-1}} k(t_{n-1},t_n)f(t_n)dt_n\cdots dt_1dt$$

est le reste après n termes. Il est facile de montrer que $lim_{n\to\infty}R_{n+1}=0$: En conséquence, la série générale $\phi(x)$ s'écrit :

$$\begin{aligned}\phi(x) &= f(x)+\int_0^x k(x,t)f(t)dt\\ &+ \int_0^x\int_0^t k(x,t)k(t,t_1)f(t_1)dt_1dt\\ &+ \int_0^x\int_0^t\int_0^{t_1} k(x,t)k(t,t_1))k(t_1,t_2)f(t_2)dt_2dt_1dt\\ &+ \cdots\end{aligned}\tag{3.10}$$

Notons ici que dans cette méthode la fonction inconnue $\phi(x)$ est substituée par la fonction donnée $f(x)$ qui rend l'évaluation des intégrales multiples facilement calculable.

Théorème 3.1. *Si :*

1. $\phi(x)=f(x)+\lambda\int_0^x k(x,t)\phi(t)dt$*, oú* λ *est une constante.*
2. $K(x,t)$ *est une fonction á valeurs réelles , continue dans le rectangle* $R=\{(x,t):a\leq x\leq b, a\leq t\leq b\}$
$$|k(x,t)|\leq M \quad dans \quad R, \quad k(x,t)\neq 0$$
3. $f(x)\neq 0$ *; est réelle et continue dans* $I=\{x:a\leq x\leq b\}$
4. λ *une constante.*

Alors l'équation (3.9) possède une seule solution continue $\phi(x)$ dans l'intervalle I, et cette solution est donnée par la série absolument et uniformément convergente (3.10).

Les résultats de ce théorème restent sans changement pour l'équation :

$$\phi(x) = f(x) + \int_0^x k(x,t)\phi(t)dt, \quad pour \quad \lambda = 1$$

3.1.4 La méthode de décomposition d'Adomian :

La méthode est essentiellement une méthode de série de puissances . Nous démontrerons la méthode en exprimant $\phi(x)$ sous la forme d'une série :

$$\phi(x) = \sum_{n=0} \phi_n(x) \tag{3.11}$$

avec $\phi_0(x)$ choisi comme terme égale au terme figurant á l'extérieure du signe intégral.
Soit l'équation intégrale :

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x,t)\phi(t)dt \tag{3.12}$$

prenons :

$$\phi_0(x) = f(x)$$

la substitution de (3.11) dans l'équation (3.12) donne :

$$\sum_{n=0} \phi_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x,t)\left[\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(x)\right]dt \tag{3.13}$$

Les termes $\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \cdots, \phi_n(x), \cdots$ de la fonction inconnue $\phi(x)$, seront complètement déterminés de manière récurrente, en effet :

$$\begin{aligned}
\phi_0(x) &= f(x) \\
\phi_1(x) &= \lambda \int_0^x k(x,t)\phi_0(t)dt \\
\phi_2(x) &= \lambda \int_0^x k(x,t)\phi_1(t)dt \\
\cdots &= \cdots \\
\phi_n(x) &= \lambda \int_0^x k(x,t)\phi_{n-1}(t)dt
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Cet ensemble d'équations (3.14) peut être écrit sous la forme :

$$\begin{aligned}
\phi_0(x) &= f(x) \\
\phi_{n+1}(x) &= \lambda \int_0^x k(x,t)\phi_n(t)dt, n \geq 0
\end{aligned} \tag{3.15}$$

3.1.5 La méthode de série solution :

Nous présentons une méthode utile, qui provient principalement de la série de Taylor pour les fonctions analytiques, pour résoudre les équations intégrale de Volterra. Nous supposons que la solution $\phi(x)$ de l'équation intégrale de Volterra :

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x,t)\phi(t)dt \tag{3.16}$$

est analytique, et possède donc une série de Taylor de la forme :

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{3.17}$$

oú les coefficients sont déterminés par récurrence. Substituons (3.17) dans les deux membres de (3.16) nous obtenons :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = T(f(x)) + \lambda \int_0^x k(x,t)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right)dt$$

oú $T(f(x))$ est la série de Taylor pour $f(x)$.

3.2 Les équations intégrales de Fredholm :

3.2.1 La méthode de décomposition d'Adomain :

La méthode de décomposition d'Adomian consiste á décomposer la fonction inconnue $\phi(x)$ de toute équation en une somme d'un nombre infini de composantes définies par la série de décomposition.

$$\phi(x) = \sum_{n=0} \phi_n(x) \tag{3.18}$$

avec $\phi_0(x)$ choisi égale au terme figurant á l'extérieur du signe intégral. Soit l'équation intégrale :

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\phi(t)dt \tag{3.19}$$

La Substitution de (3.18) dans l'équation (3.19) donne :

$$\sum_{n=0} \phi_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\left[\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(t)\right]dt \tag{3.20}$$

Les termes $\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \cdots, \phi_n(x), \cdots$ de la fonction inconnue $\phi(x)$ sont complètement déterminés par récurrence, si nous posons :

$$\begin{aligned}
\phi_0(x) &= f(x) \\
\phi_1(x) &= \lambda \int_a^b K(x,t)\phi_0(t)dt \\
\phi_2(x) &= \lambda \int_a^b K(x,t)\phi_1(t)dt \\
\cdots &= \cdots \\
\phi_n(x) &= \lambda \int_a^b K(x,t)\phi_{n-1}(t)dt
\end{aligned}$$

et de proche en proche on calcule les autres termes.
S'écrire sous la forme cet ensemble d'équations :

$$\begin{aligned}
\phi_0(x) &= f(x) \\
\phi_{n+1}(x) &= \lambda \int_a^b K(x,t)\phi_n(t)dt, n \geq 0
\end{aligned}$$

On voit clairement que la méthode de décomposition a converti l'équation intégrale en une détermination de termes calculables. Il a été formellement démontré que si une solution exacte existe pour le problème, alors la série obtenue converge très rapidement vers cette solution exacte. Le concept de convergence de la série de décomposition a été étudié par de nombreux chercheurs afin de confirmer la convergence de la série résultante.

Exemple 3.2. *L'équation intégrale suivant :*

$$\phi(x) = e^x - x + x\int_0^1 t\phi(t)dt$$

par la méthode de décomposition .

Considérons $\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(x)$ est la solution de l'équation. D'où par substitution dans l'équation donnée :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \phi(x) = e^x - x + x\int_0^1 t\sum_{n=0}^{\infty} \phi(t)dt$$

nous avons :

$$\phi_0(x) = f(x) = e^x - x$$

$$\phi_1(x) = x\int_0^1 t(e^t - t)dt = \frac{2}{3}x$$

$$\begin{aligned}\phi_2(x) &= x\int_0^1 t\phi_1(t)dt \\ &= x\int_0^1 \frac{2}{3}t^2dt \\ &= \frac{2}{9}x\end{aligned}$$

$$\phi_3(x) = x\int_0^1 \frac{2}{9}tdt = \frac{2}{27}x$$

et ainsi de suite :

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}\phi_i &= \phi_0(x)+\phi_1(x)+\cdots \\ &= e^x - x + \frac{2}{3}x\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots\right) \\ &= e^x - x + \frac{2}{3}xS\end{aligned}$$

la somme S de la série géométrique infinie est donnée par :

$$S = \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots\right) = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

La série est converge vers la solution exacte : $\phi(x) = e^x$.

3.2.2 La méthode de calcul direct :

Il existe une méthode efficace pour résoudre certains types d'équations intégrales de Fredholm et cette méthode est généralement connue sous le nom de méthode de calcul direct. Dans ce méthode, le noyau $K(x,t)$ doit être séparable dans la forme du produit de sorte qu'il puisse s'exprimer comme :

$$K(x,t) = g(x)h(t) \tag{3.21}$$

En conséquence, l'équation de Fredholm peut être exprimée comme :

$$\begin{aligned}\phi(x) &= f(x)+\lambda\int_a^b k(x,t)\phi(t)dt \\ &= f(x)+g(x)\lambda\int_a^b h(t)\phi(t)dt \qquad (3.22)\end{aligned}$$

L'équation intégrale (3.22) est une intégrale définie et on pose :

$$\alpha = \int_a^b h(t)\phi(t)dt \tag{3.23}$$

où α est une constante inconnue qui doit être déterminée. Il en résulte cette équation (3.22) peut s'écrire :

$$\phi(x) = f(x) + \alpha\lambda g(x) \tag{3.24}$$

Il est donc évident que la solution $\phi(x)$ est complètement déterminée pourvu que α soit connu de l'équation (3.23).

Remarque 3.1. *Il faut noter ici que la méthode de calcul direct a fourni une solution exacte, plutôt qu'une solution sous forme de série oú la constante α a été déterminée. L'évaluation est entièrement dépendante de la structure du noyau $K(x,t)$, et parfois il peut arriver que des difficultés de calcul peuvent survenir dans la détermination de la constante α si l'équation algébrique résultante est de troisième ordre ou plus. Ce genre de difficulté peut survenir dans l'équation intégrale non linéaire.*

3.2.3 La méthode des approximations successives :

Cette méthode résout tout problème en trouvant des approximations successives à la solution en commençant par une estimation initiale comme $\phi_0(x)$ appelée l'approximation zéro, les valeurs les plus couramment utilisées pour les approximations zéro sont 0, 1, ou, x. Bien sûr d'autres valeurs réelles peuvent également être sélectionnées, la méthode des approximations successives permet d'obtenir :

$$\phi_0(x) = \text{toute fonction sélective à valeurs réelles.}$$

$$\phi_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\phi_{n-1}(t)dt, \qquad n \geq 1 \tag{3.25}$$

Nous avons remarqué qu'avec la sélection de $\phi_0(x) = 0$, la première approximation $\phi_1(x) = f(x)$, la solution finale $\phi(x)$ est obtenue par la solution est déterminée en utilisant la limite :

$$\phi(x) = \lim_{n \nrightarrow \infty} \phi_{n+1}(x) \tag{3.26}$$

3.2.4 La méthode de série solution :

Une fonction réelle $\phi(x)$ est dite analytique si elle a des dérivées de tous ordres de sorte que la série de Taylor centrée en b dans son domaine :

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\phi^{(n)}(b)}{n!}(x-b)^n \tag{3.27}$$

converge vers $f(x)$ dans un voisinage de b, par de simplicité, la forme de la série Taylor en $x = 0$ peut-être écrite comme :

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{3.28}$$

la méthode de série solution qui découle principalement de la série de Taylor pour les fonctions analytiques, sera utilisée pour résoudre les équations intégrales de Fredholm. Nous supposerons que la solution $\phi(x)$ de l'équation intégrale :

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\phi(t)dt \tag{3.29}$$

est analytique, et possède donc une série de Taylor de la forme donnée en (3.28), où les coefficients seront déterminés par récurrence. Substituons (3.28) dans les deux membres de (3.29) ce qui donne :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = T(f(x)) + \lambda \int_a^b k(x,t)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right)dt \tag{3.30}$$

où $T(f(x))$ est la série de Taylor pour $f(x)$.

Remarque 3.2. *Les méthodes analytiques insuffisantes pour résoudre toutes les équations intégrales, il est donc nécessaire d'utiliser les méthodes numériques pour chercher les solutions approchées pour ces équations intégrales.*

Chapitre 4

Résolution approchées par méthodes de collocation et Galerkin

Notre but dans ce chapitre est de rendre disponibles les idées que nous avons présentées dans les chapitres précédents. Nous ferons une manière détaillée de certaines méthodes numériques de précision approximative des équations d'intégration de second type. En particulier, nous présenterons notre contribution à l'identification approximative de ces équations, compris la méthode de collocation et les méthodes de Galerkin.

4.1 Méthode de collocation :

Nous appliquons la méthode de collocation aux équations intégrées de Volterra et Fredholm suivantes :

4.1.1 Équation intégrale de Fredholm :

Soit l'équation intégrale de Fredholm suivante :

$$\phi(x) - \lambda \int_a^b k_F(x,t)\phi(t)dt = f(x). \tag{4.1}$$

Notre objectif est trouve une solution approchée pour l'équation (4.1), tel que :

$$\phi_N(x) = \sum_{i=0}^{N} C_i \psi_i(x), \tag{4.2}$$

ϕ_N est la série tronquée. Les bases $\psi_i(x)$ sont des polynômes orthogonaux et les coefficients C_i à déterminer, quand $N \longrightarrow +\infty$,alors : $\phi_N(x) \longrightarrow \phi$.
En remplaçant (4.2) dans (4.1), on obtient :

$$\phi_N(x) - \lambda \int_a^b k_F(x,t)\phi_N(t)dt = f(x). \tag{4.3}$$

Nous trouvons :

$$\sum_{i=0}^{N} C_i\psi_i(x) - \lambda \int_a^b k_F(x,t) \sum_{i=0}^{N} C_i\psi_i(x)dt = f(x). \tag{4.4}$$

Nous sortons $\sum_{i=0}^{N} C_i$ comme facteur commun :

$$\sum_{i=0}^{N} C_i \left[\psi_i(x) - \lambda \int_a^b k_F(x,t)\psi_i(t)dt\right] = f(x). \tag{4.5}$$

On pose :

$$A_i(x) = \psi_i(x) - \lambda \int_a^b k_F(x,t)\psi_i(t)dt.$$

avec :

$$A_{ij} = A_i(x_j).$$

tels que : $\left(x_j = a + \dfrac{b-a}{N} j\right)$ sont les points de collocation.

on peut écrire aussi sous la forme $x_j = a + hj$, dans lequel $h = \dfrac{b-a}{N}$ est appeler le pas.
Et à partir de l'équation devient sous la forme suivante :

$$A_{ij} = \psi_i(x_j) - \lambda \int_a^b k_F(x_j,t)\psi_i(t)dt. \tag{4.6}$$

Si le système matricielle linéaire :

$$AC = F. \tag{4.7}$$

dans lequel :

$$A = \begin{pmatrix} A_{0.0} & A_{0.1} & A_{0.2} & \cdots & A_{0.N} \\ A_{1.0} & A_{1.1} & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ A_{N.0} & \cdots & \cdots & \cdots & A_{N.N} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{pmatrix}.$$

On définie le changement de variable de l'intervalle $[a,b]$ à $[-1,1]$:

$$\begin{cases} x = \varphi(y) = \frac{b-a}{2}y + \frac{b+a}{2}. \\ t = \varphi(z) = \frac{b-a}{2}z + \frac{b+a}{2}. \end{cases}$$

si :

$$\begin{cases} \text{x=a}, & alors & \text{y=-1}. \\ \text{x=b}, & alors & \text{y=1}. \end{cases} \quad et \begin{cases} \text{t=a}, & alors & \text{z=-1}. \\ \text{t=b}, & alors & \text{z=1}. \end{cases}$$

D'après l'application de changement de variable, on obtient :

$$\begin{cases} \phi(x) = \phi(\varphi(y)) = \tilde{\phi}(y), \\ k_F(x,t) = (\dfrac{b-a}{2})k_F(\varphi(y),\varphi(z)) = \tilde{k}_F(y,z), \\ f(x) = f(\varphi(y)) = \tilde{f}(y). \end{cases}$$

En remplace $\left[\phi(x) = \phi(\varphi(y)) = \tilde{\phi}(y)\right]$ dans (4.6), alors on trouve le résultat suivant :

$$\tilde{\phi}(y) - \lambda \int_{-1}^{1} \tilde{k}_F(y,z)\tilde{\phi}(z)dz = \tilde{f}(y). \tag{4.8}$$

et donc :

$$\tilde{A}_{ij} = \tilde{\psi}_i(y_j) - \lambda \int_{-1}^{1} \tilde{k}_F(y_j,z)\tilde{\psi}_i(z)dz, \tag{4.9}$$

Le système (4.7), devient :

$$\tilde{A}C = \tilde{F} \tag{4.10}$$

En utilisant le quadrature de Gauss pour approximait l'intégrale.
On a :

$$\int_{-1}^{1} \tilde{k}_F(y,z)\tilde{\psi}_i(z)dz = \sum_{k=0}^{N} \omega_k \tilde{k}_F(y,\sigma_k)\tilde{\psi}(\sigma_k). \tag{4.11}$$

tels que σ_k et ω_k sont respectivement les racines et les poids de Gauss-Legendre.
En appliquant les bases de Legendre dans l'équation (4.9), on obtiens :

$$\tilde{A}_{ij} = P_i(y_j) - \lambda \sum_{k=0}^{N} \omega_k \tilde{k}_F(y_j,\sigma_k)P_i(\sigma_k). \tag{4.12}$$

On a : $\varphi(y) = x$ alors $y = \varphi^{-1}(x)$.
puisque $y_j = \varphi^{-1}(x_j)$ sur l'intervalle [-1,1], si ($\det(\tilde{A}) \neq 0$), alors :

$$C = \tilde{A}^{-1}\tilde{F} \tag{4.13}$$

on obtient :

$$\tilde{\phi}_N(y) = \sum_{k=0}^{N} C_i P_i(y), \tag{4.14}$$

sur l'intervalle [-1,1].
Revenant à l'intervalle [a,b], on obtiens :

$$\phi_N(x) = \tilde{\phi}_N(\varphi^{-1}(x)). \tag{4.15}$$

4.1.2 Équation intégrale de Volterra :

Soit l'équation intégrale de Volterra suivante :

$$\phi(x) - \lambda \int_a^x k_V(x,t)\phi(t)dt = f(x). \tag{4.16}$$

Nous suivons les mêmes étapes précédentes que nous avons faites avec l'équation de (Fredholm) et l'appliquons à l'équation de (Volterra) (4.16), nous trouvons l'équation sous la forme suivant :

$$A_{ij} = \phi_i(x_j) - \lambda \int_a^{x_j} k_V(x_j,t)\phi_i(t)dt. \tag{4.17}$$

On définie le changement de variable de $[a,x]$ à $[-1,y]$:

$$\begin{cases} x = \varphi(y) = \frac{b-a}{2}y + \frac{b+a}{2}, \quad si : y \in [-1,1], \quad alors \quad x \in [a,b] \\ t = \varphi(z) = \frac{b-a}{2}z + \frac{b+a}{2}, \quad si : z \in [-1,y], \quad alors \quad t \in [a,x] \end{cases}$$

si :

$$\begin{cases} y = \varphi^{-1}(x) = \frac{2b}{b-a}x - \frac{b+a}{b-a}, \\ z = \varphi^{-1}(t) = \frac{2b}{b-a}t - \frac{b+a}{b-a}. \end{cases}$$

on obtient :

$$\begin{cases} \phi(x) = \phi(\varphi(y)) = \tilde{\phi}(y), \\ f(x) = f(\varphi(y)) = \tilde{f}(y), \\ \tilde{k}_v(x,t) = \frac{b-a}{2}k_v(\varphi(y),\varphi(z)) = \tilde{k}_v(y,z). \end{cases}$$

Pour l'équation de Volterra, on fait un autre changement de variable de $[-1,y]$ à $[-1,1]$ on obtient :

$$z = z(\theta) = \frac{y+1}{2}\theta + \frac{y-1}{2}, \qquad \theta \in [-1,1] \tag{4.18}$$

alors :

$$\begin{aligned}\int_a^x k_v(x,t)\phi(t)dt &= \int_{-1}^{y} \tilde{k}_v(y,z)\phi(z(\theta))d\theta \\ &= \int_{-1}^{1} \hat{k}_v(y,z(\theta))\phi(z(\theta))d\theta.\end{aligned} \tag{4.19}$$

puisque :

$$\hat{k}_v(y,z(\theta)) = \frac{y+1}{2}\tilde{k}_v(y,z(\theta)).$$

donc :

$$\tilde{A}_{ij} = \tilde{\psi}_i(y_j) - \lambda \int_{-1}^{1} \hat{k}_V(y_j,z)\tilde{\psi}_i(z)dz. \tag{4.20}$$

En utilisant le quadrature de Gauss pour approximais l'équation de Volterra .
On a :

$$\int_{-1}^{1} \hat{k}_V(y,z)\tilde{\psi}_i(z)dz = \sum_{k=0}^{N} \omega_k \hat{k}_V(y,\sigma_k)\tilde{\psi}(\sigma_k). \tag{4.21}$$

en appliquant les bases de Legendre dans l'équation (4.20), on trouve :

$$\tilde{A}_{ij} = P_i(y_j) - \lambda \sum_{k=0}^{N} \omega_k \hat{k}_V(y,\sigma_k)P_i(\sigma_k). \tag{4.22}$$

On a y_i sont les points de collocation sur l'intervalle [-1,1] .
Donc : $\varphi(y) = x$ alors $y = \varphi^{-1}(x)$
Alors revenant à l'intervalle $[a,x]$, on trouve :

$$\phi_N(x) = \tilde{\phi}_N(\varphi^{-1}(x)). \tag{4.23}$$

4.2 Méthode de Galerkin :

Nous appliquons la méthode de Galerkin aux équations intégrées de Volterra et Fredholm suivantes :

4.2.1 Équation intégrale de Fredholm :

Soit l'équation intégrale de Fredholm suivante :

$$\phi(x) - \lambda \int_a^b k_F(x,t)\phi(t)dt = f(x). \tag{4.24}$$

Après le changement de variable dans la méthode précédente de $[a,b]$ à $[-1,1]$. On pose :

$$R_N(y) = \tilde{\phi}_N(y) - \lambda \int_{-1}^1 \tilde{k}_F(y,z)\tilde{\phi}_N(z)dz - \tilde{f}(y), \tag{4.25}$$

telle que R_N est le reste.
On fait maintenant un produit scalaire à définie comme suivant :

$$\langle R_N(x), \tilde{\psi}_j(y)\rangle = \langle \tilde{\phi}_N(x) - \lambda \int_{-1}^1 \tilde{k}_F(y,z)\tilde{\phi}_N(z)dz - \tilde{f}(y), \tilde{\psi}_j(y)\rangle. \tag{4.26}$$

Notre objective est de trouver une solution approchée pour l'équation (4.26), tel que :

$$\tilde{\phi}_N(y) = \sum_{i=0}^N C_i \tilde{\psi}_i(y). \tag{4.27}$$

où $\tilde{\psi}_i(x)$ sont les bases orthogonaux, et C_i les coefficients à déterminer.
En remplaçant (4.27) dans (4.26), nous trouvons :

$$\langle R_N(y), \tilde{\psi}_j(y)\rangle = \langle \sum_{i=0}^N C_i \tilde{\psi}_i(y) - \lambda \int_{-1}^1 \tilde{k}_F(y,z) \sum_{i=0}^N C_i \tilde{\psi}_i(z)dz - \tilde{f}(y), \tilde{\psi}_j(y)\rangle. \tag{4.28}$$

Quand $N \to +\infty$, $R_N(y) \to 0$ donc :

$$\langle R_N(y), \tilde{\psi}_j(y)\rangle \to 0.$$

Alors :

$$\langle \sum_{i=0}^N C_i \tilde{\psi}_i(y) - \lambda \int_{-1}^1 \tilde{k}_F(y,z) \sum_{i=0}^N C_i \tilde{\psi}_i(z)dz - \tilde{f}(y), \tilde{\psi}_j(y)\rangle = 0.$$

Maintenant, nous distribuons le produit scalaire :

$$\langle \sum_{i=0}^N C_i \tilde{\psi}_i(y), \tilde{\psi}_j(y)\rangle - \lambda \langle \int_{-1}^1 \tilde{k}_F(y,z) \sum_{i=0}^N C_i \tilde{\psi}_i(z)dz, \tilde{\psi}_j(y)\rangle = \langle \tilde{f}(y), \tilde{\psi}_j(y)\rangle.$$

On prend $\sum_{i=0}^N C_i$ comme facteur commun :

$$\sum_{i=0}^N C_i \left[\langle \tilde{\psi}_i(y), \tilde{\psi}_j(y)\rangle_w - \lambda \langle \int_{-1}^1 \tilde{k}_F(y,z)\tilde{\psi}_i(z)dz, \tilde{\psi}_j(y)\rangle_w \right] = \langle \tilde{f}(y), \tilde{\psi}_j(y)\rangle_w,$$

On applique les base de Legendre :

$$\sum_{i=0}^{N} C_i \left[\int_{-1}^{1} P_i(y)P_j(y)dy - \lambda \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \tilde{k}_F(y,z)P_i(z)P_j(y)dzdy \right] = \int_{-1}^{1} \tilde{f}(y)P_j(y)dy, \tag{4.29}$$

En utilisant le quadrature de Gauss pour approximait l'intégrale, on obtiens :

$$\sum_{i=0}^{N} C_i \left[\sum_{l=0}^{N} P_i(\sigma_l)P_j(\sigma_l)\omega_l - \lambda \sum_{l=0}^{N}\sum_{k=0}^{N} \tilde{k}_F(\sigma_l,\sigma_k)P_i(\sigma_k)P_j(\sigma_l)\omega_k\omega_l \right] = \sum_{l=0}^{N} \tilde{f}(\sigma_l)P_j(\sigma_l)\omega_l. \tag{4.30}$$

On obtient le système suivant :

$$\tilde{A}C = \tilde{F}$$

où :

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{0.0} & A_{0.1} & A_{0.2} & \cdots & A_{0.N} \\ A_{1.0} & A_{1.1} & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ A_{N.0} & \cdots & \cdots & \cdots & A_{N.N} \end{pmatrix},$$

alors :

$$A_{ij} = \sum_{l=0}^{N} w_l P_i(\sigma_l)P_j(\sigma_l) - \lambda \sum_{l=0}^{N}\sum_{k=0}^{N} w_k w_l \tilde{k}_F(\sigma_l,\sigma_k)P_i(\sigma_k)P_j(\sigma_l). \tag{4.31}$$

Et donnée :

$$\tilde{F} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix},$$

avec :

$$f_j = \sum_{l=0}^{N} w_l \tilde{f}(\sigma_l)P_j(\sigma_l). \tag{4.32}$$

D'autre part :

$$C = \tilde{A}^{-1}\tilde{F}$$

Revenant à l'intervalle $[a,b]$, on obtiens :

$$\phi_N(x) = \tilde{\phi}_N(\varphi^{-1}(x)). \tag{4.33}$$

4.2.2 Équation intégrale de Volterra :

Soit l'équation intégrale de Volterra suivante :

$$\phi(x) - \lambda \int_a^x k_V(x,t)\phi(t)dt = f(x). \tag{4.34}$$

On fait la même chose que les procédures précédentes (équation de Fredholm) sur l'équation de Volterra :
d'après le changement de variable de $[a,x]$ à $[-1,y]$, et de $[-1,y]$ à $[-1,1]$, on pose :

$$R_N(y) = \tilde{\phi}_N(y) - \lambda \int_{-1}^{1} \hat{k}_V(y,z)\tilde{\phi}_N(z)dz - \tilde{f}(y) \tag{4.35}$$

On fait les mêmes étapes de l'équation de Fredholm (4.25), à (4.35) , on trouve :

$$\sum_{i=0}^{N} C_i \left[\langle \tilde{\psi}_i(y), \tilde{\psi}_j(y) \rangle_w - \lambda \langle \int_{-1}^{1} \hat{k}_V(y,z(\theta))\tilde{\psi}_i(z(\theta))d\theta, \tilde{\psi}_j(y) \rangle_w \right] = \langle \tilde{f}(y), \tilde{\psi}_j(y) \rangle_w. \tag{4.36}$$

Nous appliquons les base de Legendre, on trouve :

$$\sum_{i=0}^{N} C_i \left[\int_{-1}^{1} P_i(y)P_j(y)dy - \lambda \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \tilde{k}_V(y,z(\theta))P_i(z(\theta))P_j(y)d\theta dy \right] = \int_{-1}^{1} \tilde{f}(y)P_j(y)dy \tag{4.37}$$

En utilisant le quadrature de Gauss pour approximait l'intégrale, on trouve :

$$\sum_{i=0}^{N} C_i \left[\sum_{l=0}^{N} P_i(\sigma_l)P_j(\sigma_l)\omega_l - \lambda \sum_{l=0}^{N}\sum_{k=0}^{N} \hat{k}_V(\sigma_l,\sigma_k)P_i(\sigma_k)P_j(\sigma_l)\omega_k\omega_l \right] = \sum_{l=0}^{N} \tilde{f}(\sigma_l)P_j(\sigma_l)\omega_l. \tag{4.38}$$

On obtient le système suivant :

$$\tilde{A}C = \tilde{F}$$

alors :

$$A_{ij} = \sum_{l=0}^{N} w_l P_i(\sigma_l)P_j(\sigma_l) - \lambda \sum_{l=0}^{N}\sum_{k=0}^{N} w_k w_l \hat{k}_V(\sigma_l,\sigma_k)P_i(\sigma_k)P_j(\sigma_l), \tag{4.39}$$

avec :

$$f_j = \sum_{l=0}^{N} w_l \tilde{f}(\sigma_l)P_j(\sigma_l). \tag{4.40}$$

D'autre part :

$$C = \tilde{A}^{-1}\tilde{F}$$

Revenant à l'intervalle $[a,b]$ on obtiens :

$$\phi_N(x) = \tilde{\phi}_N(\varphi^{-1}(x)). \tag{4.41}$$

4.3 Illustration numérique :

Dans cette partie, nous essayons d'étudier numériquement certaines équations intégrales de Fredholm et Volterra ou (Fredholm-Volterra), en appliquant la méthode collocation et la méthode de Galerkin, afin de comparer ces deux méthodes avec autres méthodes numériques.

Remarque 4.1. *Dans tous les exemples suivants, nous utilisons les polynômes de Legendre.*

Remarque 4.2. *Dans le Tableau 4.1 suivant l'erreur E_N on prenant différents subdivisions n. où :*

$$E_N = \max_{0\leq i\leq N} \|\phi(x_i) - \phi_N(x_i)\|.$$

Telle que E_N est l'erreur maximal .

Exemple 4.1. *On considère l'équation intégrale linéaire de Fredholm suivante :*

$$\phi(x) - \frac{1}{5}\int_0^1 \frac{\phi(t)}{1+t^2+x^2}dt = 10x + \ln(\frac{1+x^2}{2+x^2}), \qquad 0 \leq 0, t \leq 1 \tag{4.42}$$

la solution exacte est donnée par :$\phi(x) = 10x$.
à fin de résoudre cet équation, on va utiliser la méthode de collocation et la méthode de Galerkin pour les comparer avec la méthode de Nyström, on obtient le Tableau 4.1 suivant :

N	Méthode de collocation	Méthode de Galerkin	Méthode de Nyström [7]
5	2,081E-08	2,077E-08	7,6E-03
10	2,664E-15	4,530E-13	1,9E-03

Table 4.1 – Des erreurs absolue de comparaison la méthode de collocation et de Galerkin avec la méthode de Nyström.

Exemple 4.2. *On considère l'équation de Volterra :*

$$\phi(x) + \int_0^x xt\phi(t)dt = \frac{(2-x)e^{-x^2}+x}{2}, \qquad 0 \leq x \leq 1. \tag{4.43}$$

Telle que la solution exacte est $\phi(x) = e^{-x^2}$, les résultats présentés dans Tableau 4.2, on va utiliser la méthode de collocation pour les comparer avec la méthode de développement en série de Fourier généralisée suivant (pour $N = 8$) :

x_i	Méthode de collocation	Méthode de développement en série de Fourier généralisée [2]
0	1,11E-16	6,63E-07
0,1	1,40E-07	4,55E-07
0,2	6,96E-08	1,02E-06
0,3	3,13E-08	9,57E-07
0,4	1,28E-08	1,73E-07
0,5	3,71E-10	1,76E-06
0,6	1,06E-08	3,07E-08
0,7	2,82E-08	1,79E-06
0,8	5,66E-08	2,63E-07
0,9	1,12E-07	5,64E-07
1	2,25E-08	1,37E-06

TABLE 4.2 – Des erreurs absolue de comparaison la méthode de collocation avec la méthode de RBF.

Exemple 4.3. *On considère l'équation de Volterra :*

$$\phi(x) - \int_{-1}^{x} e^{-x-t}\phi(x)dt = 2 - e^{x+1}, \qquad -1 \leq x \leq 1 \tag{4.44}$$

telle que la solution exacte est $\phi(x) = 1$, Les résultats numériques sont présentés dans le Tableau 4.3 suivant (pour $N = 10$) :

x_i	Méthode de collocation	Méthode de Galerkin	Méthode de Simpson modifiée [2]
-1	6,66E-16	7,80E-14	0
-0,8	7,77E-16	2,19E-14	1,37E-07
-0,6	6,66E-16	2,19E-14	3,43E-07
-0,4	3,33E-16	1,14E-14	6,51E-06
-0,2	6,66E-16	9,88E-15	1,11E-06
0	7,77E-16	2,50E-14	1,80E-06
0,2	4,44E-16	1,07E-14	2,83E-06
0,4	8,88E-16	1,24E-14	4,37E-06
0,6	4,44E-16	2,02E-14	6,67E-06
0,8	1,33E-15	2,54E-14	1,01E-05
1	1,33E-15	8,17E-14	1,52E-05

TABLE 4.3 – Des erreurs absolue de comparaison la méthode de collocation et de Galerkin avec la méthode de Simpson modifiée.

Exemple 4.4. *On considère l'équation de Fredholm :*

$$\phi(x) + \frac{1}{3}\int_0^1 e^{2x-\frac{5t}{3}}\phi(t)dt = e^{2x-\frac{5}{3}}, \qquad 0 \le x \le 1 \tag{4.45}$$

Telle que la solution exacte est $\phi(x) = e^{2x}$, les résultats présentés dans Tableau 4.4, on va utiliser la méthode de collocation et la méthode Galerkin pour les comparer avec la méthode de développement en série de Fourir généralisée suivant (pour $N = 8$) :

x_i	Méthode de collocation	Méthode de Galerkin	Méthode de développement en série de Fourire généralisée [2]
0	1,37E-09	7,30E-08	5,40E-07
0,1	3,37E-08	1,39E-08	4,17E-07
0,2	2,03E-08	3,49E-09	1,62E-07
0,3	6,18E-09	1,46E-08	9,97E-08
0,4	6,60E-09	1,93E-08	5,33E-07
0,5	3,73E-09	4,44E-15	5,12E-07
0,6	8,81E-10	2,01E-15	8,86E-08
0,7	1,49E-08	1,58E-08	3,82E-07
0,8	1,38E-08	3,94E-09	6,76E-07
0,9	4,99E-08	1,64E-08	3,36E-07
1	1,01E-08	8,92E-08	5,00E-07

Table 4.4 – Des erreurs absolue de comparaison la méthode de collocation et de Galerkin avec la méthode de RBF.

Exemple 4.5. *On considère l'équation de Fredholm-Volterra suivante :*

$$\phi(x) - \int_0^1 e^{-x-1}\phi(t)dt + \int_0^x (x-t)\phi(t)dt = 2e^x - e^{-x} - x - 1. \tag{4.46}$$

Telle que la solution exacte est $\phi(x) = e^x$, en utilisant la méthode collocation et la méthode Galerkin , nous trouvons les résultats dans le Tableau 4.5 suivant :

	Méthode de collocation			Méthode de Galerkin		
x_i	N=4	N=8	N=16	N=4	N=8	N=16
0	2.380E-06	5.111E-12	4.441E-16	3.932E-02	3.680E-02	3.635E-02
0,1	4.733E-05	4.706E-11	1.110E-15	3.555E-02	3.331E-02	3.289E-02
0,2	1.854E-05	1.958E-11	6.661E-16	3.323E-02	3.092E-02	3.049E-02
0,3	1.224E-05	1.131E-11	1.110E-15	3.334E-02	3.075E-02	3.027E-02
0,4	1.750E-05	4.686E-12	0.000E-00	3.708E-02	3.405E-02	3.350E-02
0,5	1.120E-05	1.928E-12	0.000E-00	4.584E-02	4.223E-02	4.156E-02
0,6	1.586E-05	9.659E-13	2.220E-16	6.120E-02	5.683E-02	5.601E-02
0,7	1.096E-05	1.538E-11	4.441E-16	8.492E-02	7.956E-02	7.856E-02
0,8	2.239E-05	1.753E-11	4.441E-16	1.189E-01	1.123E-01	1.111E-01
0,9	5.565E-05	5.370E-11	8.882E-16	1.652E-01	1.572E-01	1.558E-01
1	3.931E-06	7.685E-12	8.882E-16	2.259E-01	2.166E-01	2.149E-01

TABLE 4.5 – Des erreurs absolue de comparaison la méthode de collocation avec la méthode de Galerkin.

Conclusion

Dans ce mémoire, notre but est de faire un résolution numérique des équations intégrales linéaires de deuxième espèce par les méthodes de collocation et Galerkin, on a approché la solution sous forme de polynôme de Legendre. On a illustré à la fin par des exemples avec la programmation par (logiciel de calcul numérique MATLAB), où on a estimé les erreurs pour les méthodes et comparer les solutions approchées de ces méthodes avec la solution de autre méthodes.

Et après la comparaison des résultats approche de ces méthodes, on remarque que les méthodes des collocation et Galerkin donnent des résultats mieux que les autres méthodes, alors que la méthode de collocation donne des résultats mieux que la méthode de Galerkin .

Bibliographie

[1] A.BABAH,Traitement numérique des équations intégrales de Volterra de seconde espèce,Université Mohamed Boudiaf de M'sila,2021.

[2] A. RAHMOUNE, Sur la Résolution Numérique des Équations Intégrales en utilisant des Fonctions Spéciales, Université de Batna, 2011.

[3] A. RAHMOUNE,équations intégrales linéaires et non linéaires, August 16, 2018.

[4] C.PORTENIER, LES POLYNOMES ORTHOGONAUX CLASSIQUES de JACOBI LAGUERRE et HERMITE, polynome Jacobi,Version du 2 février 2004.

[5] D.SAFA ET G.SAFA,Résolution des équations intégrals par la méthode des ondelettes, UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR EL OUED, 2019.

[6] H. BENALI ,Introduction Aux Équations Intégrales Linéaires Méthodes et Applications, Université Ibn Khaldoun de Tiaret . 2019.

[7] H.CHABNA,Traitement numérique des équations intégrales non linéaires de Fredholm, Université 8 Mai 1945 Guelma, 2019.

[8] Molla, H. U., and Saha, G. (2018). Numerical Approximation of Fredholm Integral Equation (FIE) of 2nd Kind using Galerkin and Collocation Methods. GANIT : Journal of Bangladesh Mathematical Society, 38, 11–25. https ://doi.org/10.3329/ganit.v38i0.39782.

[9] HAMIDOU ANIS, Etude d'une classe de problèmes d'évolutions avec conditions non locales, UNIVERSITE LARBI BEN M'HIDI-OUM EL BOUAGHI, 2018.

[10] J.MATOS, Analyse fonctionnelle, université Evry val d'essonne, 2015.

[11] K.MIMOUNE ,Equations Intégrales Linéaires de Volterra de Seconde Espèce et Méthode de Galerkine ,UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER ,BISKRA ,Juin 2019.

[12] L.SCHWARTZ, Topologie générale et analyse fonctionnelle,1993.

[13] Valet Ludovic. Généralités sur les polynômes orthogonaux.. DEA. Polynômes orthogonaux, 2000, pp.49. (cel-00661847).

[14] Mathieu. Lavoie, Polynômes orthogonaux, Université Laval, Québec, Canada, 2015, http ://hdl.handle.net/20.500.11794/26114.

[15] M.RAHMAN, Integral Equations and their Applications , Dalhousie University, Canada, WIT Press 2007.

[16] R.CHEIKH, Sur les équations intégrales fonctionnelles, Université de Saida - Dr Moulay Tahar, 2021.

[17] S.BENYOUSSEF, Numerical treatment of integro-differential equations by spectral collocation methods, MOHAMED BOUDIAF UNIVERSITY - M'SILA, 28/07/2021.

[18] S.BENYOUSSEF, Résolution numérique des équations intégro-différentielles de Fredholm, Université de M'Sila - Mohamed Boudiaf, 2014.

[19] TAO TANG, On spactral mrthods for Volterra integral equations and the convergence analysis, Journal of Computational Mathematics, Journal of Computational Mathematics Vol. 26, No. 6 (November 2008), pp. 825-837 (13 pages).

[20] V.CHALIFOUR, Comme exigence partielle de la maitrise en mathématiques et informatique appliquées, l'université du Québec à TROIS-RIVIÈRES, Juillet 2019.