REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE IBN KHALDOUN - TIARET

MEMOIRE

Présenté à :

FACULTÉ MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Pour l'obtention du diplôme de :

MASTER

Spécialité :[Mathématiques]

Par :

BENGUETAIB.Aicha

ALLOUBA.Aouda

Sur le Thème

Approche contemporaine sur les fonctions convexes et leurs applications.

Soutenu publiquement le 16/06/2022 à Tiaret devant le jury composé de :

Mr. HALIM Benali	Grade	Université MCA	Président
Mr. SENOUCI Abdelkader	Grade	Université Pr	Encadreur
Mr. SOFRANI Mohammed	Grade	Université MAA	Examinateur

2021-2022

Dédicaces

...je dédie ce travail en signe de reconnaissance .

A celui qui a lutté et sacrifié pour m'offrir les conditions propices à ma réusste
Mon trés cher père.
A celle qui m'a étreint de tendresse et d'affection et qui a constitué la première école de mon existence.
Ma très précieuse, chaleureuse et aimable mère.
Grace à mes parents que j'ai pu faire mes études et gravir les pentes qui me semblaient infranchissables.
À mes frères et ma soeur qui ont partagé avec moi tous les moments d'émotion lors de la réalisation de ce travail.Ils m'ont chaleureusement supporté et encouragè tout au long de mon parcours.
A toute la famille

Aicha

Dédicaces

...je dédie ce travail en signe de reconnaissance .

A ceux qui ont passé leur vie pour arriver à ce succès
Mes parents.
Que Dieu les protège. A mon cher mari.
A mon frère.
A mes belles sœurs.
A tous ceux qui m'ont appris une lettre.
A ceux qui sont proche du cœur, supporters.
Ma grande famille, priez pour moi.
A mes collègues.que Dieu les bénisse.

Aouda

Remerciements

En premier lieu, nous remercions Allah qui nous avoir donné le courage et la volonté cafin d'accomplir ce modeste travail.
Nos plus vifs remerciements vont aussi à l'encadreur à Mr.Senouci AEK pour son aide continue, ses précieux conseils et être patient avec nous.
Nous remercions les membres du jury pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant de siéger à notre défense et de revoir notre travail.
Nous remercions à tous les enseignants du département mathématique pour toute l'aide apportée à nous durant notre trajet scolaire.
Nous remercions les parents généreux pour leur soutien et leur encouragement à atteindre les plus hauts rangs. Et nous remercions les frères et sœurs chére.
Nous remercions les amis et les collègues .
Enfin, nous adressons nos remerciements à tous ceux qui nous ont aidés de près ou de loin.

Résumé

Ce mémoire est consacré à l'étude de la théorie de convexité et ses applications. L'objectif de cet travail est l'étude des ensembles et fonctions convexes à l'aide d'une approche contemporaine.Le mémoire comprend une introduction,trois chapitres,une conclusion et à la fin une bibliographie.Dans le premier chapitre on fournit quelques notions générales sur la convexité.
Au deuxième chapitre,on considère quelques applications.
Dans le troisième chapitre est présentée la notion de la majorisation et sa relation avec la convexité.

Mots clés : Ensemble convexe, fonction convexe, majorisation.

Table des matières

INTRODUCTION

L'analyse convexe est une discipline qui a connu son essor que très tardivement.La notion d'ensemble convexe était connue depuis longtemps et a été fortement étudiée par Minkowski.L' intérêt de cette notion a germé au cours de l'étude de la théorie géométrique des nombres et ceci entre la fin des années 1800 et le début des années 1900.Avec le développement de l'analyse fonctionnelle,cette notion a gagné en importance .Mais la communauté mathématique n'attachait que trop peu d'importance aux fonctions convexes vu qu'elles étaient elles-mêmes incorporées dans diverses théories.Plus tard,en 1943,W.Fenchel publia un livre consacré sur les ensembles convexes,puis vers 1950,il publie un livre aux ensembles et les fonctions convexes dans lequel il posa les bases de l'analyse convexe dans $\mathbb{R}^n$. Les fondateurs de l'analyse convexe moderne en tant que discipline à part entière sont R.T.Rockafellar, W.Fenchel et J.J.Moreau qui ont étudié les fonctions convexes de façon approfondie.En particulier, R.T.Raockafellar a permis une avancée énorme dans le domaine durant les années 1970 en étendant l'analyse convexe à des espaces vectoriels plus généraux que $\mathbb{R}^n$ dans ses divers publications.C'est plus ou moins à cette période que l'analyse convexe a reçu plus de considérations des mathématiciens car les champs d'applications étaient divers (théorie des jeux,ingénierie,optimisation,...)
Nous nous proposons d'étudier une approche contemporaine sur les fonctions convexes et leur applications.La première partie de ce travail comportera quelques notions de base (l'ensemble convexe,les fonctions convexes,...).
Le seconde chapitre,est consacré à l'étude de quelques applications de la convexité (la forme intégrale de l'inégalité de Jensen, la formule de sommation d'Abel et quelques inégalités).
Dans le troisième chapitre,nous établissons la notion de la majorisation et sa relation avec la convexité. A la fin on trouve une conclusion et une bibliographie.

Chapitre 1

Notions sur les fonctions convexes

1.1 Parties convexes d'un espace vectoriel

Dans ce qui suit on considère E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

Définition 1.1.1. *Soit C une partie non vide de E.On dit que C est **convexe** si*

$$\forall x, y \in C, \forall \lambda \in [0,1], (1-\lambda)x + \lambda y \in C. \tag{1.1}$$

Convention. $\emptyset$ est convexe.

Exemple 1.1. *Dans un espace normé $(E, \|.\|)$. La boule $B(a, \varepsilon)$ est une partie convexe. Car :*
Si on prend $x, y \in B(a, \varepsilon)$ et $\lambda \in [0,1]$,tel que

$$\|x-a\| \leq \varepsilon \qquad et \qquad \|y-a\| \leq \varepsilon. \tag{1.2}$$

On a :

$$\begin{aligned}\|(1-\lambda)x + \lambda y - a\| &= \|(1-\lambda)(x-a) + \lambda(y-a)\| \\ &\leq \|(1-\lambda)(x-a)\| + \|\lambda(y-a)\|\end{aligned}$$

et comme $1-\lambda \geq 0$ et $\lambda \geq 0$, on trouve que

$$\begin{aligned}\|(1-\lambda)(x-a)\| + \|\lambda(y-a)\| &= (1-\lambda)\|x-a\| + \lambda\|y-a\| \\ &\leq (1-\lambda)\varepsilon + \lambda\varepsilon \\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

(La dernière inégalité étant obtenue grâce a (1.2)).
Donc

$$\|(1-\lambda)x + \lambda y - a\| \leq \varepsilon, \tag{1.3}$$

c'est-a-dire

$$(1-\lambda)x + \lambda y \in B(a,\varepsilon), \tag{1.4}$$

d'ou $B(a,\varepsilon)$ est convexe.

Théorème 1.1.1. *Soit C une partie non vide de E. C est convexe si et seulement si*

$$\forall n \in I\!N^*, \forall x_1, ..., x_n \in C, \forall \lambda_1, ..., \lambda_n \in [0,1], (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \implies \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in C). \tag{1.5}$$

Preuve 1.1. $\Longleftarrow$*Supposons que (1.5) est vérifiée.*
En particulier, pour $n = 2$,on a

$$\forall x_1, x_2 \in C, \forall \lambda_1, \lambda_2 \in [0,1], (\lambda_1 + \lambda_2 = 1 \implies \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in C).$$

Ceci s'écrit encore

$$\forall x_1, x_2 \in C, \forall \lambda_2 \in [0,1], (1-\lambda_2)x_1 + \lambda_2 x_2 \in C.$$

Ce qui est la définition d'un convexe.
$\Longrightarrow$ *Supposons que C est convexe.*
Montrons par récurrence que (1.5) est vérifiée.
(Le résultat étant immédiat quand $n = 1$).

- *La propriété est vraie quand $n = 2$ par la définition d'un convexe.*
- *Soit $n \geq 2$.Supposons que(1.5).*

Soient $x_1, ..., x_n, x_{n+1} \in C$ puis $\lambda_1, ..., \lambda_n, \lambda_{n+1} \in [0,1]$ tels que

$$\lambda_1 + ... + \lambda_n + \lambda_{n+1} = 1.$$

Si $\lambda_{n+1} = 1$,alors $\forall i \in [1,n], \lambda_i = 0$ et donc $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = x_{n+1} \in C$.
Sinon,$\lambda_{n+1} \in [0,1[$ et on peut écrire

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = (1-\lambda_{n+1})(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} x_i) + \lambda_{n+1} x_{n+1}. \tag{1.6}$$

Pour tout $i \in [1,n]$, $\dfrac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} \geq 0$.De plus,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} = \frac{1}{1-\lambda_{n+1}} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \frac{1-\lambda_{n+1}}{1-\lambda_{n+1}} = 1.$$

Les réels $\dfrac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}}, 1 \leq i \leq n$,*sont donc* n *réels de* $[0,1]$ *et de somme égale à* 1.
Par l'hypothèse de récurrence, $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} x_i \in C$ *puis,d'après le cas* $n=2$,

$$(1-\lambda_{n+1})(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} x_i) + \lambda_{n+1} x_{n+1} \in C.$$

Le résultat est démontré par récurrence.■

Théorème 1.1.2. *Soient* I *un ensemble non vide d'indices puis* $(C_i)_{i\in I}$ *une famille de convexes de* E *indexée par* I.*Alors* $\bigcap_{i\in I} C_i$ *est un convexe de* E.

Preuve 1.2. *Posons* $C = \bigcap_{i\in I} C_i$.*Si* C *est vide, alors* C *est un convexe de* E *par convention.*
Supposons $C \neq \emptyset$.*Soit* $x, y \in E$.

$$\begin{aligned} x, y \in C &\implies \forall i \in I, x, y \in C_i. \\ &\implies \forall i \in I, \forall \lambda \in [0,1], (1-\lambda)x + \lambda y \in C_i. \\ &\implies \forall \lambda \in [0,1], (1-\lambda)x + \lambda y \in C. \end{aligned}$$

Donc C *est convexe.*■

Remarque 1.1.1. *L'union des ensembles convexe n'est pas forcement convexe.*
Contre exemple :
Prenons : $B_1 = B((0,0),1) = \{(x,y) \in I\!R^2, x^2+y^2 \leq 1\}$
et $B_2 = B((3,0),1) = \{(x,y) \in I\!R^2, (x-3)^2+y^2 \leq 1\}$,
on a $B_1 \cup B_2 = \{(x,y) \in I\!R^2, x^2+y^2 \leq 1 \quad ou \quad x^2+y^2-6x+8 \leq 0\}$.
On a $(0,0)$ *et* $(3,0) \in B_1 \cup B_2$, *alors si on prend* $\lambda = \frac{1}{2}$,
il vient que

$$\frac{1}{2}(0,0) + \frac{1}{2}(3,0) = (\frac{3}{2}, 0) \notin B_1 \cup B_2.$$

Donc $B_1 \cup B_2$ *n'est pas convexe.*

1.1.1 Enveloppe convexe

Théorème 1.1.3. *Soit* X *une partie de* E.*Il existe une plus petite partie convexe (au sens de l'inclusion) contenant* X.

Preuve 1.3. *Il existe au moins un convexe dans l'espace E contenant X.*
Soit C l'intersection de tous les convexes de E contenant X.
C contient X en tant qu'intersection de parties contenant X et C est un convexe en tant qu'intersection de convexes.
Donc,C est un convexe contenant X.
Enfin,tout convexe contenant X contient l'intersection de tous les convexes contenant X.

■

Définition 1.1.2. *Soit X une partie de E.Le plus petit convexe (au sens de l'inclusion) de E contenant X s'appelle* ***l'enveloppe convexe*** *de X et se noté* ***con(X)****.*

1.2 Fonctions convexes

Définition 1.2.1. *Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est dite convexe si*

$$\forall x_1, x_2 \in E, \forall \lambda \in [0,1] : f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2). \tag{1.7}$$

a) Si l'inégalité précédente est stricte,f est dite strictement convexe.
b) f est dite concave (resp.strictement concave) si $-f$ est convexe (resp.strictement convexe).
c) f est dite affine si elle est convexe et concave.

Exemple 1.2. • *Si $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé.la fonction,*

$$f : E \to \mathbb{R}$$

$$x \to f(x) = \|x\|$$

est convexe.
Car : $\forall x, y \in E, \forall t \in [0,1]$on a :

$$\begin{aligned} f(tx + (1-t)y) &= \|tx + (1-t)y\| \\ &\leq t\|x\| + (1-t)\|y\| \\ &= tf(x) + (1-t)f(y). \end{aligned}$$

• *La fonction $x \mapsto x^2$ est convexe car :*

$$\begin{aligned} (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) - f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) &= (1-\lambda)x_1^2 + \lambda x_2^2 - ((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2)^2 \\ &= \lambda(1-\lambda)(x_1 - x_2)^2. \end{aligned}$$

et pour $0 \leq \lambda \leq 1$,*on a*

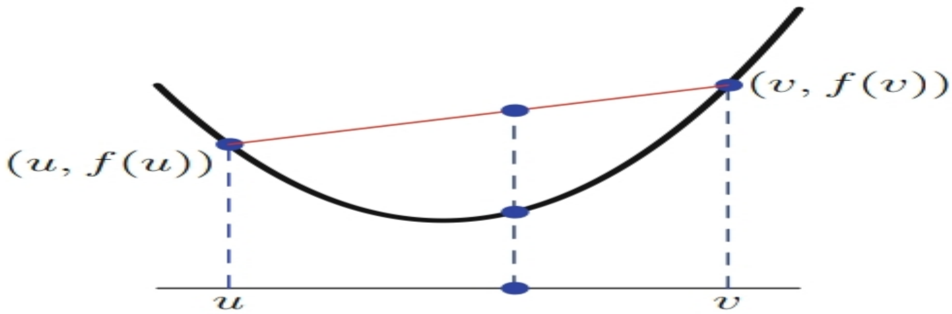
$$\lambda(1-\lambda)(x_1-x_2)^2 \geq 0.$$

Donc

$$(1-\lambda)f(x_1)+\lambda f(x_2) \geq f((1-\lambda)x_1+\lambda x_2).$$

1.2.1 Interprétation géométrique.

Géométriquement,une fonction f définie dans un intervalle I est dite convexe si pour tout couple de points $M_1 = (u, f(u)), M_2 = (v, f(v))$ de son graphe,tout point $P = (x, f(x))$ du graphe d'abscisse $x \in [u, v]$ est en dessous du segment M_1M_2.



1.2.2 L'épigraphe

Définition 1.2.2. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.L'épigraphe de f est $Epi(f) = \{(x, y) \in I \times \mathbb{R}/y \geq f(x)\}$.*

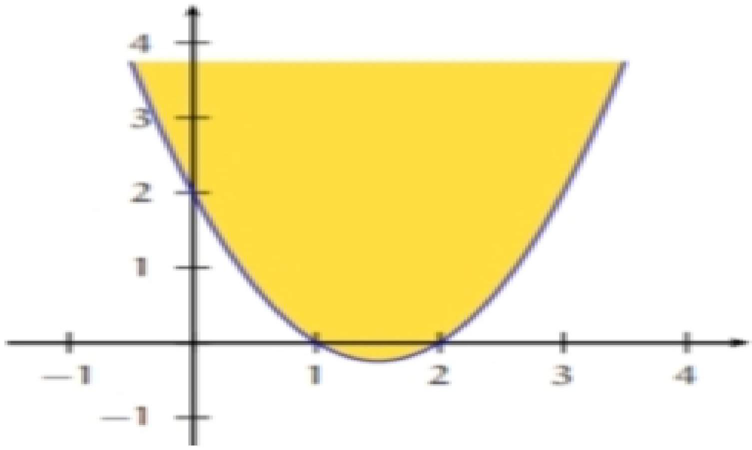


FIGURE 1.1 – l'épigraphe d'une fonction

Théorème 1.2.1. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.On dit que f est* ***convexe*** *sur I si et seulement si l'épigraphe de f est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.*

Preuve 1.4. - *Supposons que l'épigraphe de f est un convexe de $\mathbb{R}^2$.*
Montrons que f est convexe sur I.
Soient $x_1, x_2 \in I$ et $\lambda \in [0, 1]$.Les points $A_1 = (x_1, f(x_1))$ et $A_2 = (x_2, f(x_2))$ sont des point de $Epi(f)$.
Donc,le point $(1 - \lambda)A_1 + \lambda A_2$ est un point de $Epi(f)$.
Donc,l'ordonnée de ce point$(1-\lambda)f(x_1)+\lambda f(x_2)$ est supérieure ou égale à l'image de son abscisse $f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2)$.
Donc

$$f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2).$$

Supposons que f est convexe et montrons que l'épigraphe de f est un convexe de $\mathbb{R}^2$.
Soient $A_1 = (x_1, y_1)$ et $A_2 = (x_2, y_2)$ deux points de $Epi(f)$ et $\lambda \in [0, 1]$.

Soit $M = (1-\lambda)A_1 + \lambda A_2$, *posons* $M = (x, y)$

$$\begin{aligned} y = (1-\lambda)y_1 + \lambda y_2 &\geq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) \\ &\geq f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

et donc M *est un point de* $Epi(f)$.
Ainsi,pour tout $(A_1, A_2) \in (Epi(f))^2$ *et tout point* M *de* $[A_1, A_2]$,M *est un point de* $Epi(f)$. ■

Inégalité de Jensen

Théorème 1.2.2. *(Inégalité de Jensen) Soit* f *une fonction définie sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$.
f *est convexe sur* I *si et seulement si*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x_i \in I, \forall \lambda_i \in [0,1], i = \overline{1,n}, (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \implies f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)). \tag{1.8}$$

Preuve 1.5. $\Leftarrow$ *Supposons que (1.8) est vérifiée.*
En particulier, pour $n = 2$, *on a la définition de la convexité,donc* f *est bien convexe.*

$\Rightarrow$ *Supposons que* f *est convexe.*
Montrons par récurrence que (1.8) est vérifiée.
• *Pour* $n = 2$, *on retrouve la définition de la convexité de* f.
• *Pour* $n \geq 2$.*Supposons que (1.8) est vérifiée.*

Soient $x_1, ..., x_n, x_{n+1} \in I$ *puis* $\lambda_1, ...\lambda_n, \lambda_{n+1} \in [0,1]$ *tels que* $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$.
On pose $\sigma = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.*Alors* $\sigma + \lambda_{n+1} = 1, \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\lambda_i}{\sigma} = 1$.
Si $x = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\lambda_i}{\sigma} x_i$,*on a* $x \in I$ *et donc* $\sigma x + (1-\sigma)x_{n+1} \in I$.
D'après la convexité de f :

$$f(\sigma x + (1-\sigma)x_{n+1}) \leq \sigma f(x) + (1-\sigma)f(x_{n+1}).$$

Et d'après l'hypothèse de récurrence,on a

$$f(x) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\sigma} f(x_i).$$

Donc,

$$\begin{aligned}
f(\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i x_i) &\leq \sigma f(x) + (1-\sigma)f(x_{n+1}) \\
&\leq \sigma \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\sigma} f(x_i) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i).
\end{aligned}$$

■

L'inégalité arithmetico-géomitrique

Proposition 1.1. *(L.J.Rogers) Soient* $x_1, x_2, ..., x_n$ *des réels strictement positifs.Pour* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in [0,1]$ *tels que* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$*,on a*

$$x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} ... x_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n. \tag{1.9}$$

Preuve 1.6. *La fonction* $-ln$ *est convexe sur* $]0, +\infty[$*,ce qui donne d'après l'inégalité de Jensen (1.8).*

$$-ln(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i) \leq -\sum_{i=1}^{n}\lambda_i ln(x_i).$$

En multipliant par -1 *on trouve,*

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i ln(x_i) \leq ln(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i).$$

$$\sum_{i=1}^{n} ln(x_i)^{\lambda_i} \leq ln(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i).$$

En prenant l'exponentielle de chaque membre (l'exponentielle est croissante)on obtient

$$x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} ... x_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n.$$

■

Remarque 1.2.1. *(L'inégalité arithmetico-géomitrique)*
L'inégalité arithmetico-géomitrique s'obtient en posant $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = \dfrac{1}{n}$ *,d'ou*

$$\prod_{i=1}^{n}(x_i)^{\frac{1}{n}} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}. \tag{1.10}$$

Ou le coté gauche de l'inégalité est dite moyenne géométrique et l'autre coté moyenne arithmétique.

Proposition 1.2. *(Inégatité de Hölder)*
Soient $p, q > 0$ *deux réels tels que* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$*.Pour tout* $a_i, b_i \in I\!R, i = \overline{1, n}$*,on a :*

$$|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i| \leq (\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.11}$$

Preuve 1.7. *Montrons l'inégalité de Hölder pour les sommes finis.Pour cela notons* $\|a\|_p$ *la quantité* $(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p)^{\frac{1}{p}}$*.Appliquons alors l'inégalité (1.9) en posant* $n = 2, x_1 = t^p, x_2 = u^q$ *pour deux réels* $t, u > 0$ *et* $\lambda_1 = \dfrac{1}{p}, \lambda_2 = \dfrac{1}{q}$*.On obtient l'inégalité de Young.*

$$tu \leq \frac{t^p}{p} + \frac{u^q}{q}. \tag{1.12}$$

En appliquant cette dernière inégalité successivement à $t = \dfrac{|a_1|}{\|a\|_p}$ *et* $u = \dfrac{|b_1|}{\|b\|_q}$*,...,*$t = \dfrac{|a_n|}{\|a\|_p}$ *et* $u = \dfrac{|b_n|}{\|b\|_q}$*, on a*

$$\forall i \in \{1, ..., n\}, \frac{|a_i b_i|}{\|a\|_p \|b\|_q} \leq \frac{|a_i|^p}{p\|a\|_p^p} + \frac{|b_i|^q}{q\|b\|_q^q}.$$

En sommant maintenant terme à terme on en déduit

$$\frac{|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i|}{\|a\|_p \|b\|_q} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{|a_i b_i|}{\|a\|_p \|b\|_q} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{|a_i|^p}{p\|a\|_p^p} + \sum_{i=1}^{n} \frac{|b_i|^q}{q\|b\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

qui est bien l'inégalité de Hölder.■

1.2.3 Dérivabilité des fonctions convexes.

La fonction pente

Théorème 1.2.3. *Soit* f *une fonction définie sur un intervalle* I *de* $I\!R$ *à valeurs dans* $I\!R$. f *est convexe sur* I *si et seulement si* $\forall x_0 \in I$*,la fonction pente en* $x_0.\varphi_{x_0}$

défini sur $I-\{x_0\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *est croissante sur $I-\{x_0\}$.*
• *f est strictement convexe sur I si et seulement si la fonction pente en tout x_0 de I est strictement croissante sur I.*

Preuve 1.8. • *Supposons que pour tout x_0 de I,la fonction φ_{x_0} est croissante sur $I-\{x_0\}$.*
Soit $x_1, x_2 \in I$ tel que $x_1 < x_2$ et $\lambda \in]0,1[$.On a donc $x_1 < (1-\lambda)x_1+\lambda x_2 < x_2$.La fonction φ_{x_1} est croissante sur $I-\{x_1\}$.Donc, $\varphi_{x_1}((1-\lambda)x_1+\lambda x_2) \leq \varphi_{x_1}(x_2)$.Cette inégalité s'écrit explicitement

$$\frac{f((1-\lambda)x_1+\lambda x_2)-f(x_1)}{((1-\lambda)x_1+\lambda x_2)-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1},$$

ou encore

$$\frac{f((1-\lambda)x_1+\lambda x_2)-f(x_1)}{\lambda(x_2-x_1)} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

Puis

$$f((1-\lambda)x_1+\lambda x_2)-f(x_1) \leq \lambda(f(x_2)-f(x_1)).$$

Et finalement

$$f((1-\lambda)x_1+\lambda x_2) \leq (1-\lambda)f(x_1)+\lambda f(x_2).$$

Cette inégalité reste claire quand $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$ ou $x_1 = x_2$ et on a donc montré que f est convexe.
• *Supposons f convexe sur I.*
Soit $x_0, x_1, x_2 \in I$ tel que $x_1 < x_2$.
On aura trois cas :
Le premier cas. *Supposons $x_0 < x_1 < x_2$.*
Soit $\lambda = \dfrac{x_1-x_0}{x_2-x_0}$ un réel de $]0,1[$ tel que $x_1 = (1-\lambda)x_0+\lambda x_2$.Puisque f est convexe sur I,

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f((1-\lambda)x_0+\lambda x_2) \\ &\leq (1-\lambda)f(x_0)+\lambda f(x_2) \\ &= \frac{x_2-x_1}{x_2-x_0}f(x_0)+\frac{x_1-x_0}{x_2-x_0}f(x_2). \end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned} f(x_1)-f(x_0) &\leq \frac{-(x_1-x_0)}{x_2-x_0}f(x_0)+\frac{x_1-x_0}{x_2-x_0}f(x_2) \\ &= \frac{x_1-x_0}{x_2-x_0}(f(x_2)-f(x_0)). \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \leq \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}.$$

Le deuxième cas. *Supposons* $x_1 < x_2 < x_0$.
Soit $\lambda = \dfrac{x_2-x_1}{x_0-x_1}$ *un réel de* $]0,1[$ *tel que* $x_2=(1-\lambda)x_1+\lambda x_0$.*Puisque* f *est convexe sur* I,

$$\begin{aligned} f(x_2) &\leq (1-\lambda)f(x_1)+\lambda f(x_0) \\ &= \frac{x_0-x_2}{x_0-x_1}f(x_1)+\frac{x_2-x_1}{x_0-x_1}f(x_0). \end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned} f(x_2)-f(x_0) &\leq \frac{x_0-x_2}{x_0-x_1}f(x_1)+\frac{x_2-x_0}{x_0-x_1}f(x_0) \\ &= \frac{x_2-x_0}{x_1-x_0}(f(x_1)-f(x_0)). \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \leq \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}.$$

Le troisième cas.$Supposons$ $x_1 < x_0 < x_2$.*D'après les deux premiers cas,*

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = \varphi_{x_0}(x_1)=\varphi_{x_1}(x_0) \leq \varphi_{x_1}(x_2)=\varphi_{x_2}(x_1) \leq \varphi_{x_2}(x_0) = \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}.$$

Ceci montre que la fonction pente en x_0 *est croissante sur* $I-\{x_0\}$. ■

Proposition 1.3. *(Inégalité des pentes.) Soit* $f: I \to I\!R$ *une fonction convexe et* $x<y<z$ *trios points de* I.*Alors on a la double inégalité*

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}. \tag{1.13}$$

Preuve 1.9. • *Pour tout* $x, y \in I$ *tels que* $y \neq x$,*on définit la fonction suivante*

$$g_x(y) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}.$$

On remarque que $g_x(y) = g_y(x)$.
• *Les fonctions* g_a *sont toutes croissantes (d'après le Théorème (1.2.3)) sur* $]-\infty, a[\cap I$ *et sur* $]a,+\infty[\cap I$,*nous aurons bien le résultat attendu en écrivant*

$$g_x(y) \leq g_x(z) = g_z(x) \leq g_z(y).$$

Donc,

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}.$$

■

Remarque 1.2.2. *Si $f : I \to I\!R$ est une fonction convexe et x, y, a, b des points dans l'intervalle I tels que $x \leq a$,$y \leq b$, $x \neq y$ et $a \neq b$ alors*

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq \frac{f(a)-f(b)}{a-b}.$$

Théorème 1.2.4. *Une fonction convexe $f : I \to I\!R$ est continue à chaque point intérieur de I.*

Preuve 1.10. *Supposons que $a \in intI$ et choisissons $\varepsilon > 0$ tel que $[a-\varepsilon, a+\varepsilon] \subset I$ puis*

$$f(a) \leq \frac{1}{2}f(a-\varepsilon) + \frac{1}{2}f(a+\varepsilon)$$

et

$$f\left(a \pm t\varepsilon\right) = f\left((1-t)a + t(a \pm \varepsilon\right) \leq (1-t)f(a) + tf(a \pm \varepsilon)$$

pour tout $t \in [0, 1]$ donc

$$t\left(f(a \pm \varepsilon) - f(a)\right) \geq f(a \pm t\varepsilon) - f(a) \geq -t\left(f(a \mp \epsilon) - f(a)\right)$$

qui donne

$$|f(a \pm t\varepsilon) - f(a)| \leq t.max\{|f(a+\varepsilon) - f(a)|, |f(a-\varepsilon) - f(a)|\}$$

pour tout $t \in [0, 1]$. la continuité de f en a est maintenant claire.■

Lemme 1. *Si $f : I \to I\!R$ est convexe , alors f est monotone sur $intI$ ou il existe un point $\varepsilon \in intI$ tel que f est décroissante sur l'intervalle $(-\infty, \varepsilon] \bigcap I$ et croissante sur l'intervalle $[\varepsilon, \infty) \bigcap I$.*

Preuve 1.11. *Soient $a, b \in intI$ tels que $a < b$,on pose $m = f(\varepsilon)$, avec*

$$m = inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$$

.

Si $a \leq x < y < \varepsilon$ alors y est une combinaison convexe de x et ε , précisément $y = \dfrac{\varepsilon - y}{\varepsilon - x}x + \dfrac{y-x}{\varepsilon - x}\varepsilon$ puisque f est convexe

$$\begin{aligned} f(y) &= f(\frac{\varepsilon - y}{\varepsilon - x}x + \frac{y-x}{\varepsilon - x}\varepsilon) \\ &\leq \frac{\varepsilon - y}{\varepsilon - x}f(x) + \frac{y-x}{\varepsilon - x}f(\varepsilon) \\ &\leq f(x). \end{aligned}$$

Donc f est décroissante sur l'intervalle $[a, \varepsilon]$.
Si $\varepsilon < b$ un argument similaire montre que f est croissante sur $[\varepsilon, b]$. ■

Théorème 1.2.5. *Soit f une fonction à valeur réel définie sur un intervalle I, f est (strictement) convexe si et seulement si pour tout sous-intervalle compact J de I , et toute fonction affine L , le sup de $f + L$ sur J est atteint à un point d'extrémité.*

Preuve 1.12. *$\Rightarrow$ Si f est convexe , la somme $F = f + L$ l'est aussi , puisque tout point z d'un sous-intervalle $J = [x, y]$ est une combinaison convexe de x et y tels que pour $\lambda \in [0, 1]$ on a $z = (1-\lambda)x + \lambda y$ ainsi*

$$\begin{aligned}\sup_{z\in J} F(z) &= \sup_{\lambda\in[0,1]} F((1-\lambda)x + \lambda y)\\ &\leq \sup_{\lambda\in[0,1]} [(1-\lambda)F(x) + \lambda F(y)]\\ &= \max\{F(x), F(y)\}.\end{aligned}$$

$\Leftarrow$ Soit un sous-intervalle compact $J = [x, y]$ de I , il existe une fonction affine $L(x) = mx + n$ qui s'accorde avec f aux extrémités x et y puis pour tout $\lambda \in [0, 1]$. on a

$$\sup_{\lambda\in[0,1]} [(f-L)((1-\lambda)x + \lambda y)] = 0$$

d'ou

$$\begin{aligned}0 &\geq f((1-\lambda)x + \lambda y) - L((1-\lambda)x + \lambda y)\\ &= f((1-\lambda)x + \lambda y) - (1-\lambda)L(x) - \lambda L(y)\\ &= f((1-\lambda)x + \lambda y) - (1-\lambda)f(x) - \lambda f(y).\end{aligned}$$

Donc

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) - \lambda f(y).$$

■

Les fonctions quasi-convexe

Définition 1.2.3. *Soit $f : I \to I\!R$ on dit que*

*a) f est **quasi-convexe** si*

$$\forall x, y \in I \qquad et \qquad \lambda \in [0, 1], f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq \max\{f(x), f(y)\}.$$

*b) f est **quasi-concave** si*

$$\forall x, y \in I \qquad et \qquad \lambda \in [0,1], f((1-\lambda)x + \lambda y)) \geq \min\{f(x), f(y)\}.$$

La caractérisation suivante de la convexité dans la classe de fonction continue reste également utile pour vérifier la convexité.

Théorème 1.2.6. *Une fonction $f : I \to I\!R$ est convexe si et seulement s'elle vérifie les deux conditions suivantes :*
a) f est continue en chaque point intérieur de I.
b) f est convexe au milieu , c'est à dire que $\forall x, y \in I$:

$$f(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Preuve 1.13. *$\Rightarrow$ Résultant directe du Théorème (1.2.4).*
$\Leftarrow$ Prouvent par l'absurde : si f n'est pas convexe , alors il existe un sous intervalle $[a,b]$ tel que le graphe de $f|_{[a,b]}$ n'est pas sous la corde joignant $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ c'est à dire la fonction

$$\varphi(x) = -f(x) + f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a), x \in [a,b]$$

vérifier $\gamma = \inf \varphi(x) : x \in [a,b] < 0$, notez que $-\varphi$ est convexe au milieu , continue et $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ soit $c = \inf\{x \in [a,b] : \varphi(x) = \gamma\}$, ensuite nécessairement $\varphi(c) = \gamma$ et $c \in (a,b)$, par la définition de c pour tout $h > 0$ pour quel $c \pm h \in (a,b)$ on a $\varphi(c-h) > \varphi(c)$ et $\varphi(c+h) \geq \varphi(c)$ de sorte que

$$-\varphi(c) > \frac{-\varphi(c-h) - \varphi(c+h)}{2}.$$

Contradiction avec le fait que $-\varphi$ est convexe au milieu.$\blacksquare$

Corollaire 1.2.1. *Soit $f : I \to I\!R$ une fonction continue alors f est convexe si et seulement si*

$$f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) \geq 0$$

$\forall x \in I, h > 0$ tel que $x+h, x-h \in I$.

Notez que le théorème (1.2.6) et le corollaire(1.2.1) ci-dessus ont vérifiant dans le cas des fonctions strictement convexe , le corollaire (1.2.1) permet de vérifier immédiatement la stricte convexité (concavité) de certaines fonctions très courantes telles que la fonction exponentielle , la fonction logarithmique et la restriction de la fonction sinus dans $[0, \pi]$, en effet dans le premier cas , le fait que si $a, b > 0, a \neq b$ implique

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$$

est équivalente à

$$e^{x+h} + e^{x-h} - 2e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R} \qquad et \qquad h > 0.$$

Proposition 1.4. *(**Les opérations sur les fonctions convexes**).*

1. Soient $f_1, f_2 : I \to I\!R$ deux fonctions convexes.Alors la fonction $f_1 + f_2$ est convexe.
2. Soient $f : I \to I\!R$ une fonction convexe et $\lambda \in I\!R^+$.Alors la fonction λf est convexe.
3. Soient $f, g : I \to I\!R$ deux fonctions convexes, et g soit a la fois croissante.Alors fog est convexe.

Preuve 1.14. *1.Soient $x, y \in I$ et $t \in [0,1]$ alors*

$$\begin{aligned}(f_1 + f_2)((1-t)x + ty) &= f_1((1-t)x + ty) + f_2((1-t)x + ty)\\ &\leq (1-t)f_1(x) + tf_1(y) + (1-t)f_2(x) + tf_2(y)\\ &\leq (1-t)(f_1 + f_2)(x) + t(f_1 + f_2)(y).\end{aligned}$$

Donc $f_1 + f_2$ est convexe.
2.Soient $x, y \in I$ et $t \in [0,1]$ et $\lambda \in I\!R^+$ alors

$$\begin{aligned}\lambda f((1-t)x + ty) &\leq \lambda(1-t)f(x) + \lambda t f(y)\\ &\leq (1-t)\lambda f(x) + t\lambda f(y).\end{aligned}$$

Donc λf est convexe.
3.Soient $x, y \in I$ et $t \in [0,1]$ alors comme f convexe on a :

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$

Puisque g croissant,

$$gof((1-t)x + ty) \leq g((1-t)f(x) + tf(y)).$$

Puisque g convexe

$$gof((1-t)x + ty) \leq (1-t)gof(x) + tgof(y).$$

D'ou gof est convexe. ■

Théorème 1.2.7. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose de plus que f est dérivable sur I.*
f est convexe sur I si et seulement si f' est une fonction croissante sur I.
f est concave sur I si et seulement si f' est une fonction décroissante sur I.

Preuve 1.15. $\Leftarrow$ *Supposons f' croissante sur I.*
Soit $x, y \in I$ tel que $x < y$.
Pour $\lambda \in [0, 1]$,posons

$$g(\lambda) = (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y) - f((1 - \lambda)x + \lambda y).$$

La fonction $\lambda \to (1 - \lambda)x + \lambda y$ est dérivable sur $[0, 1]$ à valeurs dans $[x, y] \subset I$ et la fonction f est dérivable sur I.
Donc la fonction $\lambda \to f((1-\lambda)x+\lambda y)$ est dérivable sur $[0, 1]$ et il en est de même de la fonction g.De plus, pour $\lambda \in [0, 1]$,

$$g'(\lambda) = f(y) - f(x) - (y - x)f'((1 - \lambda)x + \lambda y). \tag{1.14}$$

D'après le théorème des accroissements finis, il existe un réel $c \in]x, y[$ tel que $f(y) - f(x) = (y - x)f'(c)$ ou il existe un réel $\lambda_0 \in]0, 1[$ tel que $\lambda_0 = \dfrac{c - x}{y - x}$,tel que

$$f(y) - f(x) = (y - x)f'((1 - \lambda_0)x + \lambda_0 y).$$

Donc,

$$\forall \lambda \in [0, 1], g'(\lambda) = (y - x)[f'((1 - \lambda_0)x + \lambda_0 y) - f'((1 - \lambda)x + \lambda y)]. \tag{1.15}$$

La fonction affine

$$\lambda \to (1 - \lambda)x + \lambda y = \lambda(y - x) - x$$

est croissante sur $[0, 1]$ (car $x < y$) et donc la fonction

$$\lambda \to f'((1 - \lambda)x + \lambda y)$$

est croissante sur $[0, 1]$ puis la fonction g' est décroissante sur $[0, 1]$.
Puisque $g'(\lambda_0) = 0$, on en déduit que g' est positive sur $[0, \lambda_0]$ et négative sur $[\lambda_0, 1]$.
Ainsi,la fonction g est croissante sur $[0, \lambda_0]$ et décroissante sur$[\lambda_0, 1]$.Puisque $g(0) = g(1) = 0$, la fonction g est positive sur $[0, 1]$ ou,

$$\forall \lambda \in [0, 1], f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y). \tag{1.16}$$

Donc,la fonction f est convexe sur I. $\Rightarrow$*Supposons que f est convexe.*
Soient alors $x_1, x_2 \in I$ avec $x_1 < x_2$.
Alors,d'après l'inégalité des pentes on a :

$$\forall x \in]x_1, x_2[, \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Et le passage à la limite lorsque x tend vers x_1 est possible,car f est dérivable,et donne :

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

On aussi d'après l'inégalité des pentes :

$$\forall x \in]x_1, x_2[, \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Et le passage à la limite lorsque x tend vers x_2 donne :

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2).$$

On a donc $f'(x_1) \leq f'(x_2)$. Ce qui prouve la croissance de f'. ■

Corollaire 1.2.2. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $I\!R$ à valeurs dans $I\!R$. On que f est deux fois dérivable sur I.*
f est convexe sur I si et seulement si $f'' \geq 0$.
f est concave sur I si et seulement si $f'' \leq 0$.

Preuve 1.16. *On sait que f' est croissante sur I si et seulement si $(f')' = f''$ est positive sur I.*■

Exemple 1.3. *Soit $x \in]0, +\infty[$*

$$(lnx)'' = -\frac{1}{x^2} < 0.$$

*Donc **ln** est une fonction concave.*■

1.2.4 Point d'inflexion

Définition 1.2.4. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $I\!R$ à valeurs dans $I\!R$,deux fois dérivable sur I.*
*Soit x_0 un réel de I en lequel f'' s'annule en changeant de signe, on dit que le point $(x_0, f(x_0))$ est un **point d'inflexion** de la courbe représentative de f.*

Remarque 1.2.3. *Un point d'inflexion est un point de la courbe en lequel la **concavité** change de sens.*

1.2.5 Tangentes du graphe d'une fonction convexe

Corollaire 1.2.3. *Le graphe de toute fonction convexe dérivable dans I est au dessus de chacune de ses tangentes.*

Preuve 1.17. *L'équation de la tangente en x_0 est $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Démontrer la propriété énoncée revient à démontrer l'inégalité suivante :*

$$\forall x, x_0 \in I : f(x) - f(x_0) - (x - x_0)f'(x_0) \geq 0 \tag{1.17}$$

Or, d'après le théorème des accroissement finis,il existe un réel $c \in]x, x_0[$ tel que

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)f'(c).$$

Donc

$$(x - x_0)[f'(c) - f'(x_0)] \geq 0$$

car f' est croissante sur I.

1.2.6 Inégalité de convexité

De ce qui précède,on a l'habitude de déduire que **le graphe d'une fonction est au dessus de ses tangentes et au-dessous de ses cordes**. Cette constatation explicitement utilisée fournit des inégalités appelées **inégalités de convexité**.On donne ci-dessous un certain nombre d'inégalités de convexité classique à connaitre.

• La fonction exponentielle est strictement convexe sur $\mathbb{R}$ car sa dérivée seconde à savoir $x \to e^x$,est strictement positive sur $\mathbb{R}$.Son graphe est donc au-dessus de sa tangente en $(0, e^0) = (0, 1)$ sur $\mathbb{R}$ et strictement au-dessus sur $\mathbb{R}^*$.Ceci fournit

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, e^x > 1 + x$$

• La fonction $x \to ln(1 + x)$ est strictement concave sur $] - 1, +\infty[$ car sa dérivée seconde $x \to -\dfrac{1}{(1+x)^2}$,est strictement négative sur $] - 1, +\infty[$.Son graphe est donc au-dessous da sa tangente en $(0, ln(1)) = (0, 0)$ sur $] - 1, +\infty[$ et strictement au-dessous sur $] - 1, 0[\cup]0, +\infty[$.Ceci fournit

$$\forall x \in] - 1, +\infty[, ln(1 + x) \leq x.$$

et

$$\forall x \in] - 1, 0[\cup]0, +\infty[, ln(1 + x) < x.$$

• La fonction $x \to sinx$ est strictement concave sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ car sa dérivée seconde à savoir $x \to -sinx$,est strictement négative sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.Son graphe est donc au-dessous de sa tangente en $(0, sin(0)) = (0, 0)$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et strictement au-dessous sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et son graphe est au-dessus de sa corde joignant les points $(0, 0)$ et $(\frac{\pi}{2}, 1)$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.Ceci fournit

$$`\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \frac{2}{\pi}x \leq sinx \leq x.$$

1.2.7 Fonction Log-convexe

Cette section vise à une brève discussion sur un concept plus fort de convexité.

Définition 1.2.5. *Soit $f : I \to (0, \infty)$ est dite log-convexe(log-concave) si* $\log f$ *$(-\log f)$est une fonction convexe, d'une manière équivalente, la condition de log-convexité de f signifie que*

$$x, y \in I, \lambda \in (0, 1) \Rightarrow f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq f(x)^{1-\lambda} f(y)^{\lambda} \tag{1.18}$$

C'est a dire, si $logf$ est convexe, pour tout $x, y \in I$ et $\lambda \in [0, 1]$ on a :

$$\begin{aligned} logf((1 - \lambda)x + \lambda y) &\leq (1 - \lambda)logf(x) + \lambda logf(y) \\ &= logf(x)^{1-\lambda} + logf(y)^{\lambda} \\ &= log(f(x)^{1-\lambda}.f(y)^{\lambda}). \end{aligned}$$

Donc

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq f(x)^{1-\lambda}.f(y)^{\lambda}.$$

Proposition 1.5. *1. Toute fonction log-convexe est aussi convexe.*

2. Toute fonction concave strictement positive est aussi log-concave.

Preuve 1.18. *1. Supposons que f est log-convexe.*
C'est a dire, pour $x, y \in I$ et $\lambda \in [0, 1]$ on a :

$$\begin{aligned} f((1 - \lambda)x + \lambda y) &\leq f(x)^{1-\lambda}.f(y)^{\lambda}. \\ &\leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y). \end{aligned}$$

(La dernière inégalité étant obtenue grâce a l'inégalité arithmetico-géométrique.)
Donc f est convexe.

2. *Soit f est fonction concave strictement positive. C'est a dire, pour $x, y \in I$ et $\lambda \in [0,1]$ on a :*

$$\begin{aligned} f((1-\lambda)x+\lambda y) &\geq (1-\lambda)f(x)+\lambda f(y) \\ &\geq f(x)^{1-\lambda}.f(y)^{\lambda}. \end{aligned}$$

Donc f est log-concave.

■

Exemple 1.4. *Un exemple important d'une fonction log-convexe est la fonction gamma*

$$\Gamma : (0,\infty) \to I\!R, \Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt, x > 0. \tag{1.19}$$

Preuve 1.19. *Soient $x, y \in (0,+\infty)$ et $\lambda \in [0,1]$*

$$\begin{aligned} \Gamma((1-\lambda)x+\lambda y) &= \int_0^{\infty} t^{(1-\lambda)x+\lambda y-1}e^{-t}dt \\ &= \int_0^{\infty} t^{(1-\lambda)(x-1)}e^{(1-\lambda)(-t)}t^{\lambda(y-1)}e^{\lambda(-t)}dt. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de hölder, on posant $p = \dfrac{1}{1-\lambda}$ et $q = \dfrac{1}{\lambda}$ on trouve que

$$\begin{aligned} \Gamma((1-\lambda)x+\lambda y) &\leq (\int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt)^{1-\lambda}(\int_0^{\infty} t^{y-1}e^{-t}dt)^{\lambda} \\ &\leq \Gamma(x)^{(1-\lambda)}\Gamma(y)^{(\lambda)}. \end{aligned}$$

■

1.3 Quelques propriétés sur les fonctions convexes

Définition 1.3.1 ([3])**.** *Une fonction $f : I \to I\!R$ est dite convexe si et seulement si*

$$f(x) \leq \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b) \tag{1.20}$$

équivalente à

$$\begin{vmatrix} 1 & a & f(a) \\ 1 & x & f(x) \\ 1 & b & f(b) \end{vmatrix} \geq 0, \tag{1.21}$$

avec $a < x < b$ dans I.
En effet,tout point x appartiennent à l'intervalle $[a, b]$ peut être écrit uniquement comme une combinaison convexe de a et b plus précisément,

$$x = \frac{b-x}{b-a}a + \frac{x-a}{b-a}b.$$

En soustrayant $f(a)$ des deux coté de l'inégalité (1.20) et en répétant l'opération avec $f(b)$ à la place de $f(a)$.
On obtient que toute fonction convexe $f : I \to I\!R$ vérifie l'inégalité des trois pentes,

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(b)-f(x)}{b-x}. \tag{1.22}$$

Pour $a < x < b$ dans I.(voir la figure(1.2)) clairement cette inégalité caractérise la convexité de f.de plus si on a des inégalités strictes ça permettent de caractériser la convexité stricte de f.

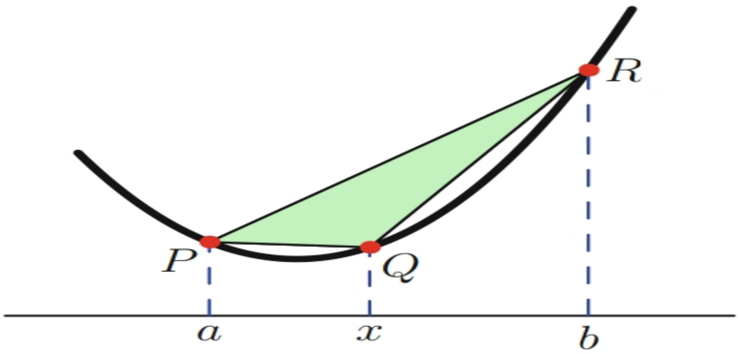


FIGURE 1.2

Théorème 1.3.1. *(O.Stolz) Soit $f : I \to I\!R$ une fonction convexe.Alors f admet des dérivées à gauche et à droite finies en chaque point intérieur de I et $x < y$ dans $intI$ et*

$$f'_-(x) \leq f'_+(x) \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq f'_-(y) \leq f'_+(y). \tag{1.23}$$

De plus, dans $intI$, f'_- est continue à gauche et f'_+ est continue à droite. Donc, si une fonction convexe est dérivable sur $intI$, alors elle est aussi continûment dérivable.

Preuve 1.20. *D'après l'inégalité des trois pentes, on a*

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(y)-f(a)}{y-a} \leq \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$$

pour tout $x \leq y < a < z$ dans I. Ce fait nous assure que la dérivée à gauche en a existe et

$$f'_{-}(a) \leq \frac{f(z) - f(a)}{z - a}.$$

Un argument symétrique donnera alors l'existence de $f'_{+}(a)$ et la disponibilité de la relation $f'_{-}(a) \leq f'_{+}(a)$.
D'autre part, en commençant par $x < u \leq v < y$ dans $intI$, la même inégalité des trois pentes donne

$$\frac{f(u) - f(x)}{u - x} \leq \frac{f(v) - f(x)}{v - x} \leq \frac{f(v) - f(y)}{v - y}.$$

Donc en posant $u \to x+$ et $v \to y-$, on obtient que $f'_{+}(x) \leq f'_{-}(y)$.
Pour la continuité des dérivées, remarquons qu'à partir de la continuité de f sur $intI$ on en déduit que

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \lim_{z \to x} \frac{f(y) - f(z)}{y - z} \geq \lim_{z \to x} f'_{+}(z).$$

Chaque fois que $x < z < y$. En passant à la limite comme $y \to x$ on obtient

$$f'_{+}(x) \geq \lim_{z \to x} f'_{+}(z)$$

Comme f'_{+} est croissante.
L'inégalité inverse est également valable. Ainsi f'_{+} est continu à droite dans $intI$. La continuité à gauche de f'_{-} peut se prouver de la même manière.$\blacksquare$

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe et $[a, b]$ est un intervalle compact contenu à l'intérieur de I alors,

$$f'_{+}(a) \leq f'_{+}(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'_{-}(y) \leq f'_{-}(b),$$

pour tout $x, y \in [a, b]$ avec $x < y$.
Donc $f/[a, b]$ vérifie la condition de Lipschitz $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ avec $L = max\{|f'_{+}(a)|, |f'_{-}(b)|\}$. Une conséquence immédiate est le résultat suivant :

Théorème 1.3.2. *$(f_n)_n$ est une suite des fonctions convexes convergente définie sur un intervalle ouvert I, alors sa limite f est également convexe. De plus,la convergence est uniforme sur tout sous-intervalle compact et*

$$f'_{-}(a) \leq \lim_{n \to \infty} inf (f_n)'_{-}(a) \leq \lim_{n \to \infty} sup (f_n)'_{+}(a) \leq f'_{+}(a) \tag{1.24}$$

pour tout $a \in I$.

Preuve 1.21. *La convexité de f est triviale.*
D'après l'inégalité des trois pentes (1.22) ,et pour tout $h > 0$ avec $a + h \in I$,on a

$$(f_n)'_+(a) \leq \frac{f_n(a+h) - f_n(a)}{h}$$

alors

$$\lim_{n\to\infty} sup(f_n)'_+(a) \leq \lim_{n\to\infty} sup\frac{f_n(a+h) - f_n(a)}{h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

En prenant $h \to 0$, nous obtenons le coté droite de l'inégalité du Théorème(1.3.2) et le coté gauche de inégalité peut être démontrée de la même manière. Prise en tenant compte d'une remarque ci-dessus sur la Lipschitzianité locale des fonctions convexes, on peut facilement déduire la convergence uniforme sur des sous-intervalles compacts de I.■

L'égalité ne peut pas être vérifiée dans le théorème ci-dessus. Pour voir cela, considérons la suite des fonctions convexes$f_n(x) = |x|^{1+1/n}$ qui converge sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $f(x) = |x|$. Alors $(f_n)'_+(0) = 0$ pour tout n tant que $f'_+(0) = 1$.

La dérivée seconde symétrique supérieure et inférieure

Les dérivées seconde symétrique supérieure et inférieure de f en x sont, respectivement,défini par les formules suivantes :

$$\overline{D}^2 f(x) = \lim_{h\to 0} sup\frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} \tag{1.25}$$

$$\underline{D}^2 f(x) = \lim_{h\to 0} inf\frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} \tag{1.26}$$

avec

$$\overline{D}^2 f(x) = \underline{D}^2 f(x) = f"(x), \tag{1.27}$$

d'ou $\overline{D}^2 f(x)$ et $\underline{D}^2 f(x)$ peuvent exister même aux points de discontinuité.

Théorème 1.3.3. *Supposons que I est un intervalle ouvert. Une fonction à valeurs réelles f est convexe sur I si et seulement si f est continue et $\overline{D}^2 f \geq 0$ Par conséquent, si une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe au voisinage de chaque point de I, alors il est convexe sur tout l'intervalle I.*

Preuve 1.22. *Si f est convexe, alors il est claire que $\overline{D}^2 f \geq \underline{D}^2 f \geq 0$.*
La continuité de f suit du théorème (1.2).
Supposons maintenant que $\overline{D}^2 f > 0$ sur I.
Si f n'est pas convexe, alors on peut trouver un point x_0 tel que $\overline{D}^2 f(x_0) \leq 0$,ce

qui sera une contradiction.
En fait, dans ce cas il existe un sous-intervalle $I_0 = [a_0, b_0]$ *tel que*

$$f((a_0 + b_0)/2) > (f(a_0) + f(b_0))/2.$$

On peux remplacer l'intervalle $I_0 = [a_0, b_0]$ *par l'un des ses intervalles*

$$[a_0, (a_0 + b_0)/2], [(3a_0 + b_0)/4, (a_0 + 3b_0)/4], [(a_0 + b_0)/2, b_0]$$

notée $I_1 = [a_1, b_1]$*, avec* $b_1 - a_1 = (b_0 - a_0)/2$ *et* $f((a_1 + b_1)/2) > (f(a_1) + f(b_1))/2$.
En procédant par induction, on arrive à une situation où le principe des intervalles inclus nous donne le point x_0.
Dans le cas général, considérons la séquence de fonctions

$$f_n(x) = f(x) + \frac{1}{n}x^2$$

Alors $\overline{D}^2 f_n > 0$ *, et le raisonnement ci-dessus nous montre que* f_n *est convexe. Clairement* $f_n(x) \to f(x)$ *pour chaque* $x \in I$*, de sorte que la convexité de* f *est une conséquence de Théorème(1.3.2) ci-dessus.*■

1.4 La continuité absolue des fonctions convexes

Le fait que la différenciation et l'intégration sont des opérations inverses l'une de l'autre induit une dualité entre la classe des fonctions convexes continues définies sur un intervalle I et la classe des fonctions croissantes sur cet intervalle.
Soient $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une fonction croissante, un point $c \in I$ et une fonction f, définit par

$$f(x) = \int_c^x \varphi(t)dt$$

Comme φ est borné sur des intervalles bornés, il s'ensuite que f est localement Lipschitz(et donc continue). C'est aussi une fonction convexe. En effet,il suffit de montrer que f est convexe au milieu. D'ou, pour $x \leq y$ dans I nous avons.

$$\begin{aligned} \frac{f(x)+f(y)}{2} - f(\frac{x+y}{2}) &= \frac{\int_c^x \varphi(t)dt + \int_c^y \varphi(t)dt}{2} - \int_c^{\frac{x+y}{2}} \varphi(t)dt. \\ &= \frac{\int_c^{\frac{x+y}{2}} \varphi(t)dt + \int_{\frac{x+y}{2}}^x \varphi(t)dt + \int_c^{\frac{x+y}{2}} \varphi(t)dt + \int_{\frac{x+y}{2}}^y \varphi(t)dt}{2} - \int_c^{\frac{x+y}{2}} \varphi(t)dt. \\ &= \frac{1}{2}(\int_{\frac{x+y}{2}}^y \varphi(t)dt - \int_x^{\frac{x+y}{2}} \varphi(t)dt) \geq 0, \end{aligned}$$

puisque φ est croissante.
Remarquons que f est différentiable en tout point de continuité de φ et $f' = \varphi$ en ces pointes.

Remarque 1.4.1. *Chaque fonction convexe continue admet une représentation intégrale comme ci-dessus.*

Théorème 1.4.1. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe continue, alors pour tout $a < b$ dans I on a*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'_+(t)dt. \tag{1.28}$$

Cette formule fonctionne aussi en remplaçant $f'_+(t)$ avec$f'_-(t)$ (ainsi qu'avec tout fonction φ telle que $\varphi(t) \in [f'_-(t), f'_+(t)]$ pour $t \in (a,b)$).

Preuve 1.23. *Soient u et v tels que $a < u < v < b$. Si $u = t_0 < t_1 < ... < t_n = v$ est une division de $[u,v]$, alors en appliquant le théorème de Stolz,on trouve,*

$$f'_+(t_{k-1}) \leq \frac{f(t_k) - f(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \leq f'_+(t_k)$$

pour tout $k = 1, ..., n$. Cela donne

$$\sum_{k=1}^{n} f'_+(t_{k-1})(t_k - t_{k-1}) \leq f(v) - f(u) = \sum_{k=1}^{n}[f(t_k) - f(t_{k-1})] \leq \sum_{k=1}^{n} f'_+(t_k)(t_k - t_{k-1}),$$

ainsi

$$\sum_{k=1}^{n} f'_+(t_{k-1}) \int_{(t_{k-1})}^{t_k} dt \leq f(v) - f(u) \leq \sum_{k=1}^{n} f'_+(t_k) \int_{(t_{k-1})}^{t_k} dt,$$

et puisque f'_+ est une fonction croissante on en déduit que

$$\int_u^v f'_+(t)dt \leq f(v) - f(u) \leq \int_u^v f'_+(t)dt.$$

Donc

$$f(v) - f(u) = \int_u^v f'_+(t)dt.$$

Puisque f est continue en a et $f'_+(t) \leq f'_+(v)$ sur $(a, v]$,si u réduire jusqu'à a. nous obtenons l'intégrabilité de Lebesgue de f'_+ sur $[a, v]$ et la formule

$$f(v) - f(a) = \int_a^v f'_+(t)dt$$

et lorsque v croissant jusqu'à b en déduire, via un argument similaire, l'expression intégrale pour $f(b) - f(a)$, et l'intégrabilité de f'_+ sur $[a, b]$.■

En analyse réelle, une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite absolument continue s'il est dérivable presque partout et f' est intégrable au sens de Lebesgue sur $[a, b]$. Lebesgue a prouvé que ce fait équivaut à l'existence d'une intégrale représentation de la forme

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)dt,$$

pour une fonction intégrable au sens de Lebesgue appropriée g.
Ainsi, le théorème montre que toute fonction convexe continue est absolument continue. On peut aussi prouver que toute fonction continue de Lipschitz est absolument continue.

1.5 Le sous-différentiel

Notre définition d'une fonction convexe a pris en considération la position du graphe par rapport au segment entre deux points quelconques sur le graphe.L'objectif de cette section est de présenter une double caractérisation, basée sur des substituts de lignes tangentes.

Définition 1.5.1. *Une fonction f admet une droite support en un point $a \in I$ si il existe un nombre réel λ (appelé le sous-gradient de f en a) tel que*

$$f(x) \geq f(a) + \lambda(x - a), \tag{1.29}$$

pour tout $x \in I$.

L'ensemble des sous-gradients de f au point a est appelé le sous-différentiel de f en a, et est noté $\partial f(a)$.
Géométriquement, le sous-différentiel nous donne les pentes des lignes support pour le graphe de f. (Voir la figure(1.3)). Le sous-différentiel d'un point est toujours un ensemble convexe, peut-être vide. Les fonctions convexes ont la propriété remarquable que $\partial f(x) \neq \phi$ de tout point intérieur. Cependant, même dans leur cas, le sous-différentiel pourrait être vide aux extrémités.

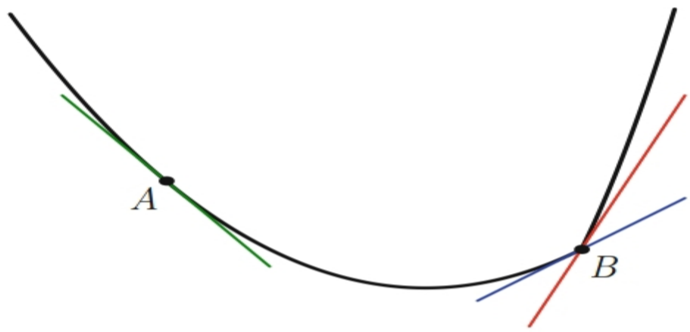


FIGURE 1.3 – les lignes tangentes

Théorème 1.5.1. *Soit f une fonction convexe sur un intervalle I,pour tout point a intérieur de I on a*

$$\partial f(a) = [f'_-(a), f'_+(a)].$$

La conclusion ci-dessus inclut les points d'extrémité de I à condition que f soit différentiable là. Par conséquent, la dérivabilité d'une fonction convexe f à un point signifie que f admet une unique ligne de support en ce point.

Preuve 1.24. *Un point λ appartient à $\partial f(a)$ si et seulement si*

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \lambda \leq \frac{f(y) - f(a)}{y - a}. \tag{1.30}$$

Soient $x < a < y$ dans I, on utilise le fait que $x - a < 0$. Selon l'inégalité de trois pentes, le premier taux tend vers $f'_-(a)$ lorsque x tend vers a,

le deuxième taux tend vers $f'_+(a)$ quand y tend vers a. Donc λ appartient à $\partial f(a)$ si et seulement si $\lambda \in [f'_-(a), f'_+(a)]$. ■

Si en combinant le Théorème(1.29) et le Théorème(1.5.1) on obtient le résultat suivant :

Corollaire 1.5.1. *Les fonctions convexes sont les seules fonctions f qui vérifient la condition $\partial f(x) \neq \phi$ en tout point intérieur de l'intervalle de définition.*

Preuve 1.25. *Soient $u, v \in I$ avec $u \neq v$ et $t \in (0, 1)$. Alors $(1-t)u + tv \in intI$, de sorte que pour tout $\lambda \in \partial f((1-t)u + tv)$ on obtient*

$$f(u) \geq f((1-t)u + tv) + t(u - v).\lambda \tag{1.31}$$

$$f(v) \geq f((1-t)u + tv) - (1-t)(u - v).\lambda \tag{1.32}$$

En multipliant l'inégalité (1.31) par $(1-t)$,et l'inégalité (1.32) par t puis par l'addition on obtient

$$(1-t)f(u) + tf(v) \geq f((1-t)u + tv).$$

Donc f est une fonction convexe.

Définition 1.5.2. *Une fonction $f : I\!R \to I\!R \cup \{\infty\}$ est dite convexe si*

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) \tag{1.33}$$

pour tout $x, y \in I\!R$ et tout $\lambda \in (0, 1)$. La fonction f est dite strictement convexe si l'inégalité(1.33) est stricte pour $x \neq y$.
Dans ce qui suit, nous ne traiterons que des fonctions propres, c'est-à-dire des fonctions f dont les domaines

$$domf = \{x : f(x) \in I\!R\}$$

sont non vides. Toute fonction $f : I \to I\!R$ qui est convexe au sens habituel peut être transformée en une fonction convexe propre au sens de la définition en la prolongeant par ∞ en dehors de I.
Le domaine de toute fonction convexe propre $g : I\!R \to I\!R \cup \{\infty\}$ est un intervalle non vide,et la restriction de g à cet ensemble est une fonction convexe usuelle.
Étant donnée une fonction convexe propre $f : I\!R \to I\!R \cup \{\infty\}$, on définit sa fonction convexe conjugué (ou transformée de Legendre-Fenchel) comme

$$f^* : I\!R \to I\!R \cup \{\infty\}, f^*(y) = sup\{xy - f(x) : x \in I\!R\}$$

Remarquez que f^* est une fonction convexe propre.
En effet,

$$\begin{aligned} f^*((1-\lambda)y+\lambda z) &= sup\{x[(1-\lambda)y+\lambda z]-f(x) : x \in I\} \\ &\leq (1-\lambda)sup\{xy-f(x) : x \in I\}+\lambda sup\{xz-f(x) : x \in I\} \\ &= (1-\lambda)f^*(y)+\lambda f^*(z). \end{aligned}$$

■

Chapitre 2

Quelques applications

2.1 La forme intégrale de l'inégalité de Jensen

Le but de cette section est d'étendre l'inégalité discrète de Jensen au cadre général des espaces mesurés finis.
Rappelons qu'un espace mesuré fini est tout triplet (Ω, Σ, μ) constitué d'un ensemble non vide Ω , un Σ σ-algèbre de sous ensemble de Ω , et une mesure σ-additive $\mu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_+$ tel que $0 < \mu(\Omega) < \infty$.
En remplaçant μ par $\mu/\mu(\Omega)$, on peut réduire l'étude des espaces de mesure fini à celui des espaces de probabilité caractérisé par le fait que $\mu(\Omega) = 1$.
L'inégalité de Jensen relie deux concepts importants qui peuvent être attachés à un espace de mesure fini (Ω, Σ, μ) :la moyenne arithmétique intégrale et le barycentre.

2.1.1 La moyenne arithmétique intégrale

La moyenne arithmétique intégrale (ou la valeur moyenne) d'une fonction μ-intégrable $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par la formule

$$M_1(f) = \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega f(x) d\mu(x).$$

Dans le contexte de la théorie de probabilité , ce nombre est aussi appelé l'espérance (ou la valeur étendue) de f et est notée $E(f)$.L'espérance génère un fonctionnelle $E : L^1(\mu) \rightarrow \mathbb{R}$ qui a les propriétés suivantes :

1. $E(1) = 1$.
2. $f \geq 0$ implique $E(f) \geq 0$.
3. $E(\alpha f + \beta g) = \alpha E(f) + \beta E(g)$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, f, g \in L^1(\mu)$.

La notion de barycentre sera introduite dans le contexte de mesure de probabilité μ défini sur $B(I)$ (les sous-ensembles boréliens d'un intervalle I) (est aussi dite mesure de probabilité borélienne dans l'intervalle I).
précisément nous concéderons la classe

$$P^1(I) = \{\mu : \mu - \text{mesure de probabilité borélienne dans } I \text{ et } \int_I |x| d\mu(x < \infty)\}.$$

Cette classe comprend toutes les mesures de probabilité de Borel nul en dehors d'une borne sous-intervalle.

2.1.2 Le barycentre d'une mesure de probabilité Borélienne

Définition 2.1.1. *Le barycentre d'une mesure de probabilité Borélienne $\mu \in P^1(I)$ est le point*

$$bar(\mu) = \int_I x d\mu(x). \tag{2.1}$$

Le cas discret d'une mesure de probabilité $\lambda = \sum_{k=1}^n \lambda_k \delta_{x_k}$ concentrée aux points $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$, telle que δ_z représente la mesure de Dirac en z, c'est-à-dire la mesure donnée par :

$$\delta_z(A) = \begin{cases} 1 & ,\text{si } z \in A \\ 0 & ,\text{sinon} \end{cases}$$

Dans ce cas

$$E(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x) d\lambda(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k). \tag{2.2}$$

Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donc

$$bar(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^N} x d\lambda(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k. \tag{2.3}$$

Exemple 2.1. *Le barycentre de la restriction de la mesure de Lebesgue à un intervalle $[a, b]$ est le point moyen tel que :*

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b x dx = \frac{a+b}{2}. \tag{2.4}$$

Car

$$\begin{aligned}\frac{1}{b-a}\int_a^b x dx &= \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b.\\ &= \frac{1}{b-a}\left[\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}\right].\\ &= \frac{a+b}{2}.\end{aligned}$$

Théorème 2.1.1. ***(la forme intégrale de l'inégalité de Jensen).*** *Soient (Ω, Σ, μ) un espace de probabilité et $g : \Omega \to I\!R$ une fonction μ-intégrable. Si f est une fonction convexe définie sur un intervalle I incluant l'image de g, alors $E(g) \in I$ et*

$$f(E(g)) \leq \int_\Omega f(g(x))d\mu(x). \tag{2.5}$$

Lorsque les deux fonctions g et fog sont μ-intégrables, alors l'inégalité ci-dessus devient

$$f(E(g)) \leq E(fog). \tag{2.6}$$

De plus, si f est strictement convexe, alors cette inégalité devient une égalité si et seulement si g est constante μ-presque partout.

Preuve 2.1. *Soit $E(g) \in I$. On posons $h = E(g) - g$ comme une fonction strictement positive dont l'intégrale sur Ω égale a 0.*
Ensuite, choisissons une fonction $\varphi : I \to I\!R$ telle que $\varphi(x) \in \partial f(x)$ pour tout $x \in intI$.
Si $E(g) \in intI$ et puisque f est une fonction convexe on a :

$$f(g(x)) \geq f(E(g)) + (g(x) - E(g)).\varphi(E(g))$$

pour tout $x \in \Omega$ et l'inégalité de Jensen suit en intégrant les deux côtés sur Ω. ■

Corollaire 2.1.1. *Si $\mu \in P^1(I)$ et $f : I \to I\!R$ est une fonction convexe μ-intégrable, ensuite*

$$f(bar(\mu)) \leq \int_I f(x)d\mu(x). \tag{2.7}$$

Preuve 2.2. *Dans l'inégalité (2.6), si on pose $g(x) = x$, on trouve que*

$$\begin{aligned}f(bar(\mu)) &= f\left(\int_I x d\mu(x)\right)\\ &\leq \int_I f(x)d\mu(x).\end{aligned}$$

■

2.2 Applications de l'inégalité de Jensen.

L'inégalité de Jensen est essentielle pour déduire de nombreuses inégalités utiles comme **l'inégalité de Rogers-Hölder** et **l'inégalité de Hardy**. Dans le premier cas, on remarque que l'inégalité de Jensen (appliquée à la fonction x^p sur $(0;1)$ et $p \geq 1$ implique que toute fonction mesurable positive h (liée à un espace de mesure finie (Ω, Σ, μ) avec $\mu(\Omega) = 1$) vérifie l'inégalité

$$\left(\int_\Omega h(x)d\mu(x)\right)^p \leq \int_\Omega h^p(x)d\mu(x). \tag{2.8}$$

Théorème 2.2.1. ***(l'inégalité de Rogers-Hölder)*** *Soient $f, g \in L^p(\mu)$ et $p, q \in (0;1)$ avec $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$*

$$\int_\Omega |fg| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}. \tag{2.9}$$

Preuve 2.3. *Il suffit de considérer le cas où f et g sont des fonctions positives et que $\int_\Omega g^q(x)d\mu(x) = 1$.*

La mesure

$$\nu(A) = \int_A g^q(x)d\mu(x), A \in \Sigma \tag{2.10}$$

est une mesure de probabilité qui agit selon la formule

$$\int_\Omega hd\nu = \int_\Omega hg^q d\mu. \tag{2.11}$$

Prenons en considération la formule (2.8) on en déduit que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega fgd\mu &= \int_\Omega fg^{1-q}g^q d\mu \\
&= \left(\int_\Omega fg^{1-q}d\nu\right)^{p.\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_\Omega f^p g^{p(1-q)}d\nu\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_\Omega f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.1 \\
&= \|f\|_{L_p} \|g\|_{L_q},
\end{aligned}$$

avec $g^q d\mu = d\nu$ et $g^{p(1-q)}d\nu = d\mu$.

C'est l'inégalité de Rogers-Hölder.

■

Nous traitons ensuite l'inégalité de Hardy.

Théorème 2.2.2. *(L'inégalité de Hardy) Soit $f \in L^p(0;1)$, $f \geq 0$, avec $p \in (1;\infty)$ puis la fonction*

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt, \qquad x > 0 \tag{2.12}$$

appartienne a $L^p(0,\infty)$ et

$$\|F\|_{L^p} \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_{L^p}. \tag{2.13}$$

Si $f = 0$ presque partout,on trouve l'égalité dans (2.13).

L'inégalité de Hardy peut être déduite du lemme suivant :

Lemme 2. ***(L.-E.Persson et N.Samko)***
Soient $0 < b \leq \infty$ et $-\infty \leq a < c \leq \infty$. Si u est une fonction convexe positive sur $(a;c)$, alors

$$\int_0^b u\left(\frac{1}{x}\int_0^x h(t)dt\right)\frac{dx}{x} \leq \int_0^b u(h(x))\left(1-\frac{x}{b}\right)\frac{dx}{x}, \tag{2.14}$$

pour toute fonction intégrable $h : (0;b) \to (a;c)$.
Si u est concave, alors l'inégalité est vraie dans le sens inverse.

Preuve 2.4. *En fait, par l'inégalité de Jensen,*

$$\begin{aligned}
\int_0^b u\left(\frac{1}{x}\int_0^x h(t)dt\right)\frac{dx}{x} &\leq \int_0^b \left(\frac{1}{x}\int_0^x u(h(t))dt\right)\frac{dx}{x} \\
&\leq \int_0^b \frac{1}{x^2}\left(\int_0^b u(h(t))\chi_{[0,x]}(t)dt\right)dx \\
&= \int_0^b u(h(t))\left(\int_t^b \frac{1}{x^2}dx\right)dt \\
&\leq \int_0^b u(h(t))\left(1-\frac{t}{b}\right)\frac{dt}{t}.
\end{aligned}$$

■

Dans le Lemme précédent,pour $u(x) = |x|^p$ avec $p > 1$ on obtient

$$\int_0^b \left|\frac{1}{x}\int_0^x h(t)dt\right|^p \frac{dx}{x} \leq \int_0^b |h(x)|^p\left(1-\frac{x}{b}\right)\frac{dx}{x}, \tag{2.15}$$

Dans (2.15).on pose $a = b^{\frac{p}{p-1}}$ et $f(x) = h(x^{1-\frac{1}{p}})x^{-\frac{1}{p}}$. On trouve

$$\int_0^a |\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt|^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^a |f(x)|^p \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^{\dfrac{p-1}{p}}\right) dx.$$

Cela donne l'inégalité de Hardy pour les fonctions $f \in L_p(0, a)$ (où $0 < a < \infty$). D'où l'inégalité de Hardy s'ensuit en laissant $a \to \infty$.

2.3 Applications de la formule de sommation partielle d'Abel

Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite linéaire par morceaux si elle est continue et qu'il existe une division $a = x_0 < ... < x_n = b$ telle que la restriction de f à chaque intervalle partiel $[x_k, x_{k+1}]$ est une fonction affine.

Lemme 3. *Toute fonction convexe continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une limite uniforme d'une suite de fonctions convexes linéaires par morceaux.*
De la même manière, toute fonction continue, croissante et convexe $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une limite uniforme d'une suite de fonctions linéaires par morceaux, croissantes et convexes.

Preuve 2.5. *D'après la continuité uniforme de la fonction f, la suite de fonctions linéaires par morceaux f_n obtenue en joignant les points*

$$(a, f(a)), \left(a + \frac{b-a}{n}, f\left(a + \frac{b-a}{n}\right)\right), ..., \left(a + n\frac{b-a}{n}, f\left(a + n\frac{b-a}{n}\right)\right),$$

par segments linéaires, est uniformément convergente vers f.
Le fait que toute fonction linéaire par morceaux inscrite dans une fonction convexe donc elle-même est une fonction convexe. ■

Lemme 4. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction convexe linéaire par morceaux. Alors f est une somme d'une fonction affine et d'une combinaison linéaire, à des coefficients positifs, et d'une translations de la fonction valeur absolue. Autrement dit, f est de la forme*

$$f(x) = \alpha x + \beta + \sum_{k=1}^{n} c_k |x - x_k| \tag{2.16}$$

pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ des coefficients positifs $c_1, ..., c_n$.
Ici la fonction valeur absolue $|x - x_k|$ peuvent être remplacés par des fonctions de la forme $(x - x_k)^+$ ou $(x - x_k)^-$.
Les fonctions linéaires croissantes et convexes par morceaux peuvent être représentées par une combinaison linéaire, à coefficients positifs, et d'une fonction de la forme $(x - x_k)^+$.

Preuve 2.6. *Soit $a = x_0 < ... < x_n = b$ une division de $[a, b]$ telle que la restriction de f a chaque intervalle partiel $[x_k, x_{k+1}]$ soit affine.*
Si $\alpha x + \beta$ est la fonction affine dont la restriction à $[x_0, x_1]$ coïncide avec $f_{[x_0, x_1]}$, alors ce sera une ligne support pour f et $f(x) - (\alpha x + \beta)$ sera une fonction convexe croissante qui s'annule sur $[x_0, x_1]$.
Ce qui montre l'existence d'une constante $c_1 \geq 0$ telle que $f(x) - (\alpha x + \beta) =$

$c_1(x-x_1)^+$ *sur l'intervalle* $[x_0, x_2]$.

En répétant l'argument, nous arrivons à la représentation suivante

$$f(x) = \alpha x + \beta + \sum_{k=1}^{n-1} c_k (x - x_k)^+, \tag{2.17}$$

où tous les coefficients c_k *sont positifs.*

La preuve se termine en remplaçant les translatés de la fonction partie positive par les translatés de la fonction valeur absolue.

Théorème 2.3.1. ***[Inégalité de Popoviciu]*** *Soit* $f : I \to I\!R$ *est une fonction continue,* f *est convexe si et seulement si*

$$\frac{f(x)+f(y)+f(z)}{3} + f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \geq \frac{2}{3}\left[f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{y+z}{2}\right) + f\left(\frac{x+z}{2}\right)\right] \tag{2.18}$$

pour $x, y, z \in I$. *L'inégalité ci-dessus est stricte pour* $x = y = z$.

Preuve 2.7. *Nécessité.*
Soient $x, y, z \in I$ *.Supposons que* f *est convexe et que* $x \leq y \leq z$ *et* $y \leq \dfrac{x+y+z}{3}$.
Alors

$$\frac{x+y+z}{3} \leq \frac{x+z}{2} \leq z$$

et

$$\frac{x+y+z}{3} \leq \frac{y+z}{2} \leq z.$$

On peut donc trouver $s, t \in [0,1]$ *tels que :*

$$\frac{x+z}{2} = s.\frac{x+y+z}{3} + (1-s).z. \tag{2.19}$$

$$\frac{y+z}{2} = t.\frac{x+y+z}{3} + (1-t).z. \tag{2.20}$$

En additionnant les deux égalités.On obtient

$$(x+y-2z)\left(s+t-\frac{3}{2}\right) = 0.$$

Si $x+y-2z=0$ *donc* $x=y=z$ *donc l'égalité est vérifier.*

Sinon $s+t-\frac{3}{2}$ *c'est à dire* $s+t=\frac{3}{2}$ *et*

$$f\left(\frac{x+z}{2}\right) \leq s.f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)+(1-s).f(z).$$

$$f\left(\frac{y+z}{2}\right) \leq t.f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)+(1-t).f(z).$$

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}.f\left(x\right)+\frac{1}{2}.f(y).$$

En sommant les trois inégalités et on multipliant par $\frac{2}{3}$*.On obtient l'inégalité de Popoviciu.*
le cas $y \geq \dfrac{x+y+z}{3}$ *est analogue.*

Suffisance. L'inégalité de Popoviciu (lorsqu'elle est appliquée pour $y=z$*) donne l'inégalité suivante,*

$$\frac{1}{4}f(x)+\frac{3}{4}f(\frac{x+2y}{3}) \geq f(\frac{x+y}{2}), \qquad \text{pour} \qquad x,y \in I. \tag{2.21}$$

Donc, f *est convexe au milieux.*■

Théorème 2.3.2. ***(L'inégalité de Jensen-Steffensen)*** *Soient* $x_1,...,x_n$ *est une famille des points monotone dans un intervalle* $[a,b]$ *et* $w_1,...,w_n$ *sont des poids réels,alors*

$$\sum_{k=1}^{n} w_k = 1 \qquad \text{et} \qquad 0 \leq \sum_{k=1}^{m} w_k \leq \sum_{k=1}^{n} w_k \qquad \text{pour} \qquad m \in \{1,...,n\}. \tag{2.22}$$

Alors toute fonction convexe f *définie sur* $[a,b]$ *vérifie l'inégalité*

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} w_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} w_k f\left(x_k\right). \tag{2.23}$$

Notre argument pour le Théorème (2.3.2) combine l'approximation linéaire par morceaux des fonctions convexes avec une conséquence de la formule de sommation partielle d'Abel(également connue sous le nom de transformation d'Abel).

Théorème 2.3.3. *[2] (Formule de sommation partielle d'Abel)*
Soient $(a_k)_{k=1}^n$ et $(b_k)_{k=1}^n$ sont deux familles de nombres complexes, alors

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} \left[(a_k - a_{k+1}) \left(\sum_{j=1}^{k} b_j \right) + a_n \sum_{j=1}^{n} b_j \right]. \tag{2.24}$$

Abel a utilisé sa formule pour dériver un certain nombre de résultats importants connus aujourd'hui sous le nom de critère d'Abel de convergence des séries signées, le théorème d'Abel sur les séries de puissance et la méthode de sommation d'Abel. Dans ce qui suit nous nous intéresserons à une autre conséquence de celle-ci :

Corollaire 2.3.1. *[2] (L'inégalité d'Abel- Steffensen) Soient $x_1, x_2, ..., x_n$ et $y_1, y_2, ..., y_n$ sont deux familles de nombres réels qui vérifient l'une des deux conditions suivantes*

$$(a) \qquad x_1 \geq x_2 \geq ... \geq x_n \geq 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{j} y_k \geq 0 \qquad \text{pour} \qquad j \in \{1, 2, ..., n\},$$

$$(b) \qquad 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=j}^{n} y_k \geq 0 \qquad \text{pour} \qquad j \in \{1, 2, ..., n\},$$

alors

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \geq 0.$$

Ainsi, si $x_1, x_2, ..., x_n$ est une famille monotone et $y_1, y_2, ..., y_n$ est une famille de nombres réels tels que

$$0 \leq \sum_{k=1}^{j} y_k \leq \sum_{k=1}^{n} y_k \qquad \text{pour} \qquad j = 1, ..., n.$$

Alors

$$\left(\min_{1 \leq k \leq n} x_k \right) \sum_{k=1}^{n} y_k \leq \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leq \left(\max_{1 \leq k \leq n} x_k \right) \sum_{k=1}^{n} y_k. \tag{2.25}$$

Preuve 2.8. ***(de l'inégalité de Jensen-Steffensen)*** *En prenant en compte le Lemme 3 et le Lemme 4, on peut réduire la preuve en considérant la fonction valeur absolue. En supposant l'ordre $x_1 \leq ... \leq x_n$, on en déduit que*

$$0 \leq x_1^+ \leq ... \leq x_n^+ \qquad x_1^- \geq ... \geq x_n^- \geq 0.$$

D'après le corollaire (2.3.1),

$$\sum_{k=1}^{n} w_k x_k^+ \geq 0, \qquad et \qquad \sum_{k=1}^{n} w_k x_k^- \geq 0,$$

alors

$$|\sum_{k=1}^{n} w_k x_k| \leq \sum_{k=1}^{n} w_k |x_k|.$$

■

La version intégrale de l'inégalité de Jensen-Steffensen peut être établie dans de la même manière, en utilisant l'intégration par parties au lieu de la formule de sommation partielle d'Abel.

Théorème 2.3.4. *[2]* ***(La version intégrale de l'inégalité de Jensen-Steffensen)*** *Soient $g : [a, b] \to I\!R$ est une fonction monotone et $w : [a, b] \to I\!R$ est une fonction intégrable telle que*

$$0 \leq \int_a^x w(t)dt \leq \int_a^b w(t)dt = 1 \qquad pour \qquad x \in [a, b]. \tag{2.26}$$

Alors chaque fonction convexe f définie sur un intervalle I qui inclut l'image de g vérifie l'inégalité

$$f\left(\int_a^b g(t)w(t)dt\right) \leq \int_a^b f(g(t))w(t)dt. \tag{2.27}$$

Chapitre 3

Convexité et Majorisation

Ce chapitre vise à offrir un aperçu de la théorie de la majorisation et les inégalités qui lui sont associées. Introduit par G.H. Hardy, J.E. Littlewood, et G. Pólya en 1929, et popularisé par leur célèbre livre sur les inégalités, la relation de majorisation a attiré beaucoup d'attention non seulement des mathématiciens, mais aussi de personnes travaillant dans divers autres domaines tels que les statistiques, l'économie, la physique,...etc.

3.1 La théorie de la majorisation de Hardy–Littlewood–Pólya.

Dans ce qui suit, pour tout vecteur $x = (x_1, ..., x_N) \in \mathbb{R}^N$, on notera par

$$x_1^{\downarrow} \geq ... \geq x_N^{\downarrow}. \tag{3.1}$$

les composantes de x dans l'ordre décroissant.

Définition 3.1.1. *Soient deux vecteurs x et y dans $\mathbb{R}^N$, on dit que x est majoré par y (noté $x <_{HLP} y$) si*

$$\sum_{i=1}^{k} x_i^{\downarrow} \leq \sum_{i=1}^{k} y_i^{\downarrow} \qquad , k = 1, ..., N. \tag{3.2}$$

et

$$\sum_{i=1}^{N} x_i^{\downarrow} = \sum_{i=1}^{N} y_i^{\downarrow}. \tag{3.3}$$

Théorème 3.1.1. *Soient $x, y \in I\!R^N$ tels que $x <_{HLP} y$, alors*

$$\sum_{k=1}^{N} f(x_k) \leq \sum_{k=1}^{N} f(y_k). \tag{3.4}$$

Pour toute fonction convexe continue f dont le domaine de définition est un intervalle contenant les composantes de x et y.

Inversement, si l'inégalité (3.4) est vraie pour toute fonction convexe continue dont le domaine de définition contenant les composantes de x et y, alors $x <_{HLP} y$.

Preuve 3.1. *Pour la première partie, notez que nous pouvons supposer que $x_k \neq y_k$ pour tout indices k. Alors, selon la formule de sommation partielle d'Abel, on a,*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N} f(y_k^{\downarrow}) - \sum_{k=1}^{N} f(x_k^{\downarrow}) &= \sum_{k=1}^{N} [(y_k^{\downarrow} - x_k^{\downarrow}) \frac{f(y_k^{\downarrow}) - f(x_k^{\downarrow})}{y_k^{\downarrow} - x_k^{\downarrow}}] \\
&= \sum_{k=1}^{N-1} (\frac{f(y_k^{\downarrow}) - f(x_k^{\downarrow})}{y_k^{\downarrow} - x_k^{\downarrow}} - \frac{f(y_{k+1}^{\downarrow}) - f(x_{k+1}^{\downarrow})}{y_{k+1}^{\downarrow} - x_{k+1}^{\downarrow}})(\sum_{i=1}^{k} y_i^{\downarrow} - \sum_{i=1}^{k} x_i^{\downarrow}) \\
&+ \left(\frac{f(x_N^{\downarrow}) - f(y_N^{\downarrow})}{x_N^{\downarrow} - y_N^{\downarrow}} \right) (\sum_{k=1}^{N} y_k^{\downarrow} - \sum_{k=1}^{N} x_k^{\downarrow}) \\
&= \sum_{k=1}^{N-1} (\frac{f(y_k^{\downarrow}) - f(x_k^{\downarrow})}{y_k^{\downarrow} - x_k^{\downarrow}} - \frac{f(y_{k+1}^{\downarrow}) - f(x_{k+1}^{\downarrow})}{y_{k+1}^{\downarrow} - x_{k+1}^{\downarrow}})(\sum_{i=1}^{k} y_i^{\downarrow} - \sum_{i=1}^{k} x_i^{\downarrow}).
\end{aligned}$$

Alors

$$\sum_{k=1}^{N} f(x_k) \leq \sum_{k=1}^{N} f(y_k).$$

est vérifié. Puisque $\sum_{i=1}^{k} x_i^{\downarrow} \leq \sum_{i=1}^{k} y_i^{\downarrow}$ et par la prise en compte de l'inégalité des trois accords.
Pour l'inverse, puisque l'identité et son inverse sont des fonctions convexes, on déduit de (3.4) que

$$\sum_{i=1}^{N} y_i^{\downarrow} = \sum_{i=1}^{N} x_i^{\downarrow}.$$

Aussi, en utilisant la convexité de la fonction

$$f = (x - y_k^{\downarrow})^{+},$$

on obtient

$$\begin{aligned} x_1^{\downarrow} + ... + x_k^{\downarrow} - k y_k^{\downarrow} &\leq \sum_{j=1}^{N} f(x_j^{\downarrow}) \\ &\leq \sum_{j=1}^{N} f(y_j^{\downarrow}) \\ &\leq y_1^{\downarrow} + ... + y_k^{\downarrow} - k y_k^{\downarrow}. \end{aligned}$$

c'est-à-dire,

$$x_1^{\downarrow} + ... + x_k^{\downarrow} \leq y_1^{\downarrow} + ... + y_k^{\downarrow}.$$

■

3.2 Sujets spéciaux en théorie de la majorisation

L'objectif principal de cette section est de discuter des relations entre la double inégalité d'Hermite-Hadamard et la théorie de Choquet, cette connexion l'a conduit à une extension partielle de la théorie de la majoration au-delà du cas classique des mesures de probabilité, en utilisant ce que l'on appelle Mesures de Steffensen-Popoviciu. Leur principale caractéristique est d'offrir un cadre large sous lequel l'inégalité de Jensen-Steffensen reste disponible. En conséquence, on obtient l'extension du membre gauche de l'inégalité d'Hermite–Hadamard à un contexte impliquant des mesures de Borel signées [1] sur des ensembles convexes compacts arbitraires. Une extension similaire du membre droit de cette inégalité est connue uniquement en dimension 1, le cas de dimension supérieure étant encore ouvert.

3.2.1 Mesures de Steffensen-Popoviciu

L'inégalité de Jensen-Steffensen révèle un cas important où l'inégalité de Jensen fonctionne au-delà du cadre des mesures positives. Le but de tous ce qui suit est de mieux comprendre la relation entre les mesures signées et l'inégalité de Jensen.

Définition 3.2.2. *Soit K un sous-ensemble convexe compact d'un espace réel de Banach E. Une mesure de* ***Steffensen-Popoviciu*** *sur K est toute mesure borélienne réelle μ sur K telle que $\mu(K) > 0$ et*

$$\int_K f(x)d\mu(x) \geq 0, \tag{3.5}$$

pour toute fonction convexe continue positive $f : K \to \mathbb{R}$.

Puisque toute fonction convexe continue $f : K \to \mathbb{R}$ est le sup ponctuel de la famille de ses minorants continus et affines (Voir chapitre 3 de [2]), il s'ensuit qu'une mesure borélienne réelle μ sur K est Steffensen–Popoviciu si, et seulement si,$\mu(K) > 0$ et

$$\int_K (x^*(x) + \alpha)^+ d\mu(x) \geq 0, \tag{3.6}$$

pour tout $x^* \in E^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. où x^* est une fonction linéaire continue de E et E^* est l'espace des fonctions linéaires continues sur E

Le résultat suivant nous donne une caractérisation complète de cette classe de mesures dans le cas où K est un intervalle compact.

1.

Définition 3.2.1 (**Mesure signée** : On appelle mesure signée toute fonction d'ensembles μ sur un espace mesurable (X, A) a valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ou $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ telle que $\mu(\emptyset) = 0$ et μ est σ-additive.)**.**

Théorème 3.2.1. *Soit μ une mesure borélienne réelle sur un intervalle $[a, b]$ avec $\mu([a, b]) > 0$. Alors μ est une mesure de Steffensen–Popoviciu si, et seulement si, elle vérifie la condition suivante de positivité des points finaux :*

$$\int_a^t (t-x)d\mu(x) \geq 0 \qquad et \qquad \int_t^b (x-t)d\mu(x) \geq 0, \tag{3.7}$$

pour tout $t \in [a, b]$.

Preuve 3.2. *La nécessité de (3.7) est claire. Pour la partie suffisance, notez que tout fonction positive, continue et convexe $f : [a, b] \to I\!R$ est la limite uniforme d'une suite $(g_n)_n$ de fonctions positives, linéaires par morceaux et convexes. chacune de ces fonctions g peut être représentée par une combinaison finie à coefficients positifs de fonctions de la forme 1, $(x-t)^+$ et $(t-x)^+$. Ainsi*

$$\int_a^b f(x)d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)d\mu(x) \geq 0.$$

Théorème 3.2.2. *Soit $p : [a, b] \to I\!R$ est une fonction intégrable. Alors*

$$\int_a^b f(x)p(x)dx \geq 0,$$

pour toute fonction positive, absolument continue et quasi-convexe $f : [a, b] \to I\!R$ si et seulement si,

$$\int_a^x p(t)dt \geq 0 \qquad et \qquad \int_x^b p(t)dt \geq 0. \tag{3.8}$$

pour tout $x \in [a, b]$.

Les mesures absolument continues $\mu = p(x)dx$ qui vérifient $\mu([a, b]) > 0$ et aussi la condition (3.8) seront appelées mesures de Steffensen-Popoviciu fortes.

Preuve 3.3. ***Suffisance***, *puisque f est une fonction convexe, il existe un point*

$c \in [a,b]$ *telle que* f *est décroissante sur* $[a,c]$ *et croissante sur* $[c,b]$. *D'ou*

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)p(x)dx &= \int_a^c f(x)p(x)dx + \int_c^b f(x)p(x)dx \\
&= \int_a^c f(x)d\left(\int_a^x p(t)dt\right) - \int_c^b f(x)d\left(\int_x^b p(t)dt\right) \\
&= \left[f(x)\int_a^x p(t)dt\right]_a^c - \int_a^c f'(x)\left(\int_a^x p(t)dt\right)dx \\
&- \left[f(x)\int_x^b p(t)dt\right]_c^b + \int_c^b f'(x)\left(\int_x^b p(t)dt\right)dx \\
&= f(c)\int_a^c p(t)dt + \int_a^c (-f'(x))\left(\int_a^x p(t)dt\right)dx \\
&+ f(c)\int_c^b p(t)dt + \int_c^b f'(x)\left(\int_x^b p(t)dt\right)dx \geq 0,
\end{aligned}$$

comme une somme de nombres positifs.

Nécessité. *En supposant* $x_0 \in (a,b)$ *et* $\varepsilon > 0$ *suffisamment petit, la fonction*

$$L_\varepsilon = \begin{cases} 1, & \text{pour} \quad x \in [a, x_0 - \varepsilon] \\ \dfrac{-(x-x_0)}{\varepsilon}, & \text{pour} \quad x \in [x_0 - \varepsilon, x_0] \\ 0, & \text{pour} \quad x \in [x_0, b] \end{cases}$$

est positive, décroissante et aussi absolument continue. Donc

$$\int_a^{x_0} p(t)dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^b L_\varepsilon(x)p(x)dx \geq 0.$$

De manière similaire, on peut prouver que $\int_{x_0}^b p(t)dt \geq 0$. ■

Remarque 3.2.1. *Comme toute fonction convexe continue* $f : [a,b] \to I\!R$ *est absolument continue, le Théorème (3.2.2) implique que toute mesure de Steffensen–Popoviciu forte est aussi une mesure de Steffensen–Popoviciu. Cependant, l'inclusion est stricte.*

Exemple 3.1. $(x^2+\lambda)dx$ *est un exemple* ***de mesure de Steffensen–Popoviciu*** *sur l'intervalle* $[-1,1]$ *si, et seulement si,* $\lambda > \dfrac{-1}{3}$,
et c'est ***une mesure de Steffensen–Popoviciu forte*** *si, et seulement si,* $\lambda > \dfrac{-1}{4}$.

Un exemple simple de mesures de Steffensen-Popoviciu en dimension 2 est indiqué ci-dessous.

Exemple 3.2. *Si $p(x)dx$ et $q(y)dy$ sont des mesures de Steffensen–Popoviciu sur intervalles $[a,b]$ et $[c,d]$ respectivement, alors $(p(x)+q(y))dxdy$ est une mesure de la même type sur $[a,b]\times[c,d]$. En fait, si $f:[a,b]\times[c,d]\to I\!R$ est une fonction convexe positive, alors*

$$x \to \left(\int_c^d f(x,y)dy\right) \qquad et \qquad y \to \left(\int_a^b f(x,y)dx\right).$$

Sont aussi des fonctions convexes positives et donc

$$\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,(p(x)+q(y))\,dydx = \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)p(x)dx + \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)q(y)dy \geq 0,$$

comme une somme de nombres positifs.

Théorème 3.2.3. *Soient $p:[a,b]\to I\!R$ et $q:[c,d]\to I\!R$ deux fonctions continues telles qu'au moins une des deux conditions suivantes soit vérifiée :*

$$(i)p\geq 0 \qquad et \qquad 0\leq\int_c^y q(s)ds\leq\int_c^d q(s)ds \qquad pour \qquad tout \qquad y\in[c,d],$$

$$(ii)q\geq 0 \qquad et \qquad 0\leq\int_a^x p(t)dt\leq\int_a^b p(t)dt \qquad pour \qquad tout \qquad x\in[a,b].$$

Alors

$$\int_a^b\int_c^d f(x,y)p(x)q(y)dydx\geq 0, \tag{3.9}$$

pour toute fonction f positive, continûment différentiable et quasi-convexe $f:[a,b]\times[c,d]\to I\!R$. La condition de dérivabilité continue sur f peut être remplacée par celle de continuité absolue.

Preuve 3.4. *En supposant que (i) est vérifié, on commence par choisir un chemin continu $x\to c^*(x)$ tel que*

$$f(x,c^*(x)) = min\{f(x,y):c\leq y\leq d\}$$

pour tout $x\in[a,b]$.

Alors $y\to f(x,y)$ est décroissante sur $[c,c^*(x)]$ et croissante sur $[c^*(x),d]$, ce qui implique

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\leq 0 \qquad sur \qquad [c,c^*(x)]$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \geq 0 \qquad sur \qquad [c^*(x), d].$$

Donc

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)p(x)q(y)dydx = \int_a^b \left[\int_c^{c^*(x)} f(x,y)d\left(\int_c^y q(t)dt\right)\right] p(x)dx$$

$$-\int_a^b \left[\int_{c^*}^d f(x,y)d\left(\int_y^d q(t)dt\right)\right] p(x)dx$$

$$= \int_a^b \left[\left[f(x,y)\int_c^y q(t)dt\right]_c^{c^*(x)} - \int_c^{c^*(x)} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\int_c^y q(t)dt\right) dy\right] p(x)dx$$

$$-\int_a^b \left[\left[f(x,y)\int_y^d q(t)dt\right]_{c^*(x)}^d - \int_{c^*(x)}^d \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\int_y^d q(t)dt\right) dy\right] p(x)dx$$

$$= \int_a^b f(x, c^*(x))\left(\int_c^{c^*(x)} q(t)dt\right) p(x)dx$$

$$+\int_a^b \left[\int_c^{c^*(x)} \left(\frac{-\partial f}{\partial y}(x,y)\int_c^y q(t)dt\right) dy\right] p(x)dx$$

$$+\int_a^b f(x, c^*(x))\left(\int_{c^*(x)}^d q(t)dt\right) p(x)dx$$

$$+\int_a^b \left[\int_{c^*(x)}^d \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\int_y^d q(t)dt\right) dy\right] p(x)dx$$

$$= \int_c^d q(t)dt \int_a^b f(x,c^*(x))p(x)dx - \int_a^b \left[\int_c^{c^*(x)} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\int_c^y q(t)dt\right) dy\right] p(x)dx$$

$$+\int_a^b \int_{c^*(x)}^d \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\int_y^d q(t)dt\right) dy\right] p(x)dx \geq 0$$

sous la forme d'une somme de nombres positifs.

La preuve est faite.■

3.2.2 Le barycentre d'une mesure de Steffensen-Popoviciu

Dans tous ce qui suit,on adopte les notations suivantes :

K désignera un sous-ensemble convexe compact (non vide) d'un espace de Hausdorff réel localement convexe E,

$C(K)$ désignera l'espace de toutes les fonctions continues à valeurs réelles sur K,

$Conv(K)$ désignera l'espace de toutes les fonctions convexes continues à valeurs réelles définies sur K.

L'espace linéaire $Conv(K) - Conv(K)$ engendré par $Conv(K)$ est dense dans $C(K)$. Nous aurons également besoin de l'espace

$$A(K) = Conv(K) \cap -Conv(K),$$

de toutes les fonctions affines continues à valeurs réelles sur K.

L'enveloppe supérieure et l'enveloppe inférieure

Définition 3.2.3. *Soit une fonction f dans $C(K)$*
L'enveloppe inférieure de f est défini par

$$\check{f}(x) = sup\{h(x) : h \in A(K) \qquad et \qquad f \geq h\},$$

et l'enveloppe supérieure de f est défini par

$$\widehat{f}(x) = inf\{h(x) : h \in A(K) \qquad et \qquad h \geq f\}.$$

Ils sont liés par des formules de la forme

$$\check{f} = -\widehat{(-f)}.$$

Il suffit donc d'étudier les propriétés d'un type d'enveloppe, disons la partie supérieure.

Lemme 5. *L'enveloppe supérieure $\widehat{f}$ d'une fonction $f \in C(K)$ est concave, bornée et semi-continue supérieurement.En plus :*

1. *$f \leq \widehat{f}$ et $f = \widehat{f}$ si f est concave.*
2. *si $f, g \in C(K)$, alors $\widehat{f+g} \leq \widehat{f} + \widehat{g}$ avec égalité si $g \in A(K)$, aussi,$\widehat{\alpha f} = \alpha \widehat{f}$ si $\alpha \geq 0$.*

Preuve 3.5. *Voire [2].*

Le barycentre d'une mesure de Steffensen-Popoviciu

La connexion entre les points d'un ensemble convexe compact K et les fonctionnelles positives sur $C(K)$ est rendue visible par le concept de barycentre.

Dans ce qui suit, nous montrerons que ce concept peut être attaché non seulement aux mesures de Borel de probabilité, mais aussi à toute mesure de Steffensen–Popoviciu. Comme ci-dessus.

Lemme 6. *Pour toute mesure de Steffensen–Popoviciu μ sur K il existe et est unique un point $bar(\mu)$ dans K tel que*

$$bar(\mu) = \frac{1}{\mu(K)} \int_K x d\mu(x). \tag{3.10}$$

Preuve 3.6. *Voire [2].*

L'inégalité généralisée de Jensen-Steffensen

L'extension de l'inégalité de Jensen au contexte de la mesure de Steffensen-Popoviciu est donné par le théorème suivant :

Théorème 3.2.4. ***(L'inégalité généralisée de Jensen-Steffensen)*** *Soit μ une mesure de Steffensen–Popoviciu sur l'ensemble convexe compact K. Alors*

$$f(bar(\mu)) \leq \frac{1}{\mu(K)} \int_K f(x) d\mu(x), \tag{3.11}$$

pour toutes les fonctions convexes continues $f : K \to I\!R$.

Preuve 3.7. *D'après le lemme(5), puisque f est une fonction convexe donc $f = \check{f}$ c'est à dire*

$$\begin{aligned} f(bar(\mu)) &= sup\{h(bar(\mu)) : h \in A(K), h \leq f\} \\ &= sup\{\frac{1}{\mu(K)} \int_K h d\mu : h \in A(K), h \leq f\} \\ &\leq \frac{1}{\mu(K)} \int_K f d\mu. \end{aligned}$$

■

L'inégalité de Jensen–Steffensen classique représente le cas particulier où μ est une mesure de Steffensen–Popoviciu forte sur un intervalle compact.

3.2.3 Majorisation via l'ordre de Choquet

La majoration des mesures dans le cadre des mesures de Steffensen–Popoviciu étend le cas des mesures de probabilité de Borel discrètes.

Définition 3.2.4. *Soient μ et ν deux mesures de Steffensen-Popoviciu sur un compact convexe K, on dit que μ est majoré par ν dans l'ordre de Choquet (en abrégé, $\mu <_{Ch} \nu$) si*

$$\frac{1}{\mu(K)} \int_K f(x) d\mu(x) \leq \frac{1}{\nu(K)} \int_K f(x) d\nu(x), \tag{3.12}$$

pour toutes les fonctions convexes continues $f : K \to I\!R$.

Lemme 7. *Soient μ et ν deux mesures de Steffensen-Popoviciu telles que $\mu(K) = \nu(K) = 1$ et*

$$\int_K f(x) d\mu(x) \leq \int_K f(x) d\nu(x), \tag{3.13}$$

pour toute fonction $f \in Conv(K)$, $f \geq 0$. Alors $\mu <_{Ch} \nu$.

En particulier, $\delta_{bar}\nu <_{Ch} \nu$ et $\delta_{bar}\nu$ est la plus petite mesure de Steffensen–Popoviciu de la somme totale égal à 1 majorée par ν.

Preuve 3.8. *Soit $\lambda_{\varepsilon,z} = \nu - \mu + \varepsilon\delta_z$ une mesure de Steffensen–Popoviciu, dès que $\varepsilon > 0$ et $z \in K$. D'après l'inégalité de Jensen–Steffensen, si $f \in Conv(K)$, alors*

$$\int_K f(x) d\nu(x) - \int_K f(x) d\mu(x) + \varepsilon f(z) \geq \varepsilon f(bar(\lambda_{\varepsilon,z})) \geq \varepsilon \min_{x \in K} f(x),$$

d'où en posant $\varepsilon \to 0$ on en déduit que

$$\int_K f(x) d\nu(x) - \int_K f(x) d\mu(x) \geq 0.$$

■

Lemme 8. *Soit $F : [a, b] \to I\!R$ une fonction à variation bornée telle que $F(a) = 0$. Alors pour tout $f \in Conv(K)$*

$$\int_a^b f(x) dF(x) \geq 0. \tag{3.14}$$

Si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifier :

$$F(b) = 0. \tag{3.15}$$

$$\int_a^b F(x)dx = 0 \tag{3.16}$$

et pour tout $x \in (a, b)$

$$\int_a^x F(t)dt \geq 0. \tag{3.17}$$

Preuve 3.9. *En utilisant deux fois l'intégration par parties, on obtient*

$$\int_a^b f(x)dF(x) = -\int_a^b F(x)f'(x)dx = \int_a^b (\int_a^x F(t)dt)f''(x)dx \geq 0,$$

d'où la partie suffisante est prouvée. Pour la nécessité, notez que $\int_a^x F(t)dt < 0$ pour certains $x \in (a, b)$ donne un intervalle I autour de x sur lequel l'intégrale est toujours négative. En choisissant f tel que $f = 0$ en dehors de I, les égalités ci-dessus conduisent à une contradiction. La nécessité des deux autres conditions découle de la vérification notre déclaration pour $f = 1, -1, x - a, a - x$ (dans cet ordre). ■

Corollaire 3.2.1. *Soient $F, G : [a, b] \to I\!R$ deux fonctions à variation bornée tel que $F(a) = G(a)$. Ensuite, pour que*

$$\int_a^b f(x)dF(x) \leq \int_a^b f(x)dG(x).$$

Pour toute fonction convexe continue $f : [a, b] \to I\!R$, il faut et il suffit que F et G vérifient les trois conditions suivantes :

1.
$$F(b) = G(b). \tag{3.18}$$

2. *pour tout $x \in (a, b)$,*
$$\int_a^x F(t)dt \leq \int_a^x G(t)dt. \tag{3.19}$$

3.
$$\int_a^b F(t)dt = \int_a^b G(t)dt. \tag{3.20}$$

Preuve 3.10. *Il suffit de remplacer F par $F - G$ dans la preuve (3.9).*■

Corollaire 3.2.2. *Soit $f, g \in L^1[a, b]$ deux fonctions. Alors $fdx <_{Ch} gdx$ si et seulement si les conditions suivantes sont remplies :*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx; \qquad \int_a^b xf(x)dx = \int_a^b xg(x)dx;$$

$$\int_a^x (x-t)f(t)dt \leq \int_a^x (x-t)g(t)dt, \qquad \text{pour} \qquad \text{tout} \qquad x \in [a, b].$$

3.2.4 Le théorème de Choquet

Le but de cette section est de présenter une extension complète de l'inégalité d'Hermite-Hadamard au cadre des fonctions convexes continues définies sur des espaces convexes compacts arbitraires (lorsque les valeurs moyennes sont calculées via des mesures de probabilité de Borel). Cela se fait en combinant l'inégalité généralisée de Jensen–Steffensen avec les théorèmes de majoration de G. Choquet, E. Bishop et K. de Leeuw. Nous commençons par le cas métrisable, en suivant l'approche classique initiée par G. Choquet.

Théorème 3.2.5. ***(Théorème de Choquet : le cas métrisable)*** *Soit μ une mesure de probabilité borélienne sur un sous-ensemble convexe compact métrisable K d'un espace de Hausdorff localement convexe E. Alors il existe une mesure de probabilité borélienne λ sur K tel que les deux conditions suivantes soient vérifiées :*
(a) $\mu <_{Ch} \lambda$ et λ et μ ont le même barycentre,
(b) l'ensemble $extK$, de tous les points extrêmes de K, est un ensemble de Borel et λ est concentré sur $extK$ (c'est-à-dire $\lambda(K \backslash extK) = 0$).

Corollaire 3.2.3. ***(Représentation de Choquet)*** *Soit un point $x \in K$, il existe une mesure de probabilité borélienne λ concentrée sur $extK$ telle que pour tout fonctions f définies sur K on a*

$$f(x) = \int_{extK} f(x) d\lambda(x). \tag{3.21}$$

Preuve 3.11. *En appliquons le Théorème (3.2.5) à $\mu = \delta_x$,on trouve*

$$\int_K f(x) d\delta(x) = \int_K f(x) d\lambda(x)$$

d'ou

$$f(x) = \int_{extK} f(x) d\lambda(x).$$

■

Corollaire 3.2.4. ***(L'inégalité d'Hermite-Hadamard généralisée ; le cas métrisable)*** *Sous les hypothèses du Théorème (3.2.5) nous avons*

$$f(bar(\mu)) \leq \int_K f(x) d\mu(x) \leq \int_{extK} f(x) d\lambda(x). \tag{3.22}$$

pour toute fonction convexe continue $f : K \to I\!R$.

Preuve 3.12. *La partie gauche représente l'inégalité généralisée de Jensen-Steffensen. Et pour la partie droit on appliquant le Théorème (3.2.5) à $\mu = \delta_x$.* ■

Preuve 3.13. ***du Théorème (3.2.5)***
Voir[2].

3.2.5 L'inégalité d'Hermite-Hadamard pour les mesures signées

En dimension 1, l'inégalité d'Hermite-Hadamard affirme que pour toute mesure de probabilité de Borel μ sur un intervalle compact $[a, b]$ et toute fonction convexe continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nous avons

$$f(bar(\mu)) \leq \int_a^b f(x)d\mu(x) \leq \frac{b - bar(\mu)}{b-a}.f(a) + \frac{vbar(\mu) - a}{b-a}.f(b). \tag{3.23}$$

L'inégalité de Jensen-Steffensen montre que l'inégalité de gauche fonctionne dans le contexte plus général des mesures de Steffensen-Popoviciu. Malheureusement, cela ne s'applique pas à l'inégalité de droite. Cependant, A.M. Fink a pu indiquer quelques exemples concrets de mesures signées pour lesquelles la double inégalité (3.23) est vérifiée. Cela a permis de parler des mesures d'Hermite-Hadamard, c'est-à-dire de ces mesures de Steffensen-Popoviciu de masse totale 1, pour lesquelles l'inégalité d'Hermite-Hadamard fonctionne dans son intégralité.

Théorème 3.2.6. *Soit μ une mesure borélienne réelle sur l'intervalle $[a, b]$ telle que $\mu([a, b]) = 1$. Alors l'inégalité*

$$\frac{b - bar(\mu)}{b-a}.f(a) + \frac{bar(\mu) - a}{b-a}.f(b) \geq \int_a^b f(x)d\mu(x). \tag{3.24}$$

fonctionne pour toutes les fonctions convexes continues $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ si, et seulement si,

$$\frac{b-t}{b-a}\int_a^t (x-a)d\mu(x) + \frac{t-a}{b-a}\int_t^b (b-x)d\mu(x) \geq 0. \tag{3.25}$$

pour tout $t \in [a, b]$.

Preuve 3.14. *Comme chaque fonction f admet une représentation intégrale de la forme*

$$f(x) = \frac{b-x}{b-a}.f(a) + \frac{x-a}{b-a}.f(b) + \int_a^b G(x,t)f''(t)dt,$$

où $G(x,t) = \begin{cases} -(x-a)(b-t)/(b-a) & si \quad a \leq x \leq t \leq b \\ -(t-a)(b-x)/(b-a) & si \quad a \leq t \leq x \leq b \end{cases}$

représente la fonction de Green de l'opérateur $\frac{d^2}{dt^2}$, avec des conditions aux limites homogènes $y(a) = y(b) = 0$. Ainsi, pour toute fonction convexe $f \in C^2([a, b])$ on a

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)d\mu(x) - \frac{b - bar(\mu)}{b-a}.f(a) + \frac{bar(\mu)-a}{b-a}.f(a) &= \int_a^b \left[f(x) - \frac{b-x}{b-a}.f(a) + \frac{x-a}{b-a}.f(b) \right] d\mu(x) \\
&= \int_a^b \left(\int_a^b G(x,t)f''(t)dt \right) d\mu(x) \\
&= \int_a^b f''(t) \left(\int_a^b G(x,t)d\mu(x) \right) dt \\
&= \int_a^b f''(t)y(t)dt,
\end{aligned}$$

où $y(t) = \int_a^b G(x,t)d\mu(x)$ *est une fonction continue. L'opérateur différentiel* $\frac{d^2}{dt^2}$ *applique* $Conv([a,b]) \cap C^2([a,b])$ *sur le cône positif de* $C([a,b])$*, donc l'inégalité (3.24) est vraie si et seulement si,*$y(t) \leq 0$ *pour tout* $t \in [a,b]$*. Ceci termine la preuve.*■

Exemple 3.3.

$$3(x^2 - \frac{1}{6})dx, \qquad \frac{3780}{499}(x^2 - \frac{1}{6})^3 dx \qquad et \qquad \frac{25}{8}(x^4 - \frac{1}{25})dx$$

sont des exemples de mesure d'Hermite-Hadamard sur l'intervalle $[-1,1]$ *(chacun de masse totale* 1 *et de barycentre* 0*). Remarquerez que* $(x^2 - \frac{1}{4})dx$ *est une mesure Steffensen-Popoviciu forte sur l'intervalle* $[-1,1]$ *, ne vérifie pas la condition (3.25) et n'est pas donc une mesure d'Hermite-Hadamard.*

Conclusion

Le but de ce travail a été de faire une approche contemporaine sur les fonctions convexes et leurs applications. Nous espérons que ce travail soit un document utile et un point de départ pour d'autre projets de recherche.

Bibliographie

[1] Kada Allab,*Éléments d'analyse*, Tome 2. Office des publications universitaire, 2007.

[2] Constantin P.Niculescu, Lars-Erik Persson, *Convex Functions and Their Applications*.Second Edition.Springer International Publishing AG,part of Springer Nature 2018.

[3] Constantin P.Niculescu, Lars-Erik Persson, *Convex Functions and their Applications*.First Edition.Springer Science+Business Media,Inc.2005.

[4] Haïm brézis,*Analyse Fonctionnelle,théorie et applications*.Dunod,1999.

[5] AlbertW.Marshall.Ingram Olkin.Barry C.Arnodl,*Inequalities :Theory of Majorization and Its Applications*.Second Edition,Springer Science+Business, LLC 2011.

[6] A.N.KOLMOGOROV. *INTRODUCTORY REAL ANALYSIS* ;Dover publication,INC 1975.

[7] V.G.Mihşen.*A generalizations of the ocnvexity*,Seminar on Functionnal Equations,Approx,and Convex.Cluj-Napoca(Romania)1993.

[8] B.G.Pachpatte,*On some inequalities for convex functions*,RGMIA Res.Rep.Coll.6 (2003).

[9] B.G.Pachpatte,*A note on integral inequalities involving two log-onvex functions*.Mathematical Inequalities and Applications,2004.

[10] G.H.Toader.*Some generalisations of the convexity*.Proc.Colloq.Optim(1984),329-338.

[11] K.L.Tseng,S.R.Hwang,and S.S.Dragomir.*On some new inequalities of Hermite-Hadamard-Fejer type involving convex functions*.Demons.Math,40(1)(2004).