

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ IBN-KHALDOUN DE TIARET

FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES

DÉPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDE

Pour l'obtention du diplôme de Master

Domaine : Sciences & Technologie

Filière : Génie Mécanique

Cycle : Master

Spécialité: Modélisation et Simulation en Génie Mécanique

THÈME

**ANALYSE DES PLAQUES ET PANNEAUX EN
MATÉRIAUX COMPOSITES**

Préparé par:

SOUDANI Youcef

BOURIHIA Djilali

Sous la direction de:

Pr. SAHLI Ahmed

Membres du jury

Président
Rapporteur

AISSAT Sahraoui
BENAMEUR

MCB
MAA

Soutenu le : 18/06/2017

PROMOTION 2016 /2017

REMERCIEMENTS

Je remercie d'abord ALLAH le tout puissant qui m'a guidé et qui m'a donné la force et la volonté de réaliser ce travail.

Je tiens à remercier très chaleureusement mon encadreur Pr : SAHLI AHMED d'avoir accepté de diriger ce travail avec beaucoup de disponibilité et d'efficacité, pour m'avoir fait partager son expérience, pour les conseils et encouragements qu'il a su me prodiguer pendant toute la durée de ce travail.

Je remercie très chaleureusement mon père Abdelkader, ma mère Saadia, mes frères Mohamed, Abdelhadi, Khaled (Djilali) et toute la famille.

Je tiens également à remercier mes collègues de promotion, pour les pauses relaxation et discussions que nous avons partagé durant l'année théorique à l'université de TIARET.

Un grand remerciement à tous les enseignants du département de Génie mécanique et mes collègues et tous mes amis.

S-YOUCEF

REMERCIEMENTS

Je remercie Dieu avant tout.

Je tiens à remercier très chaleureusement mon encadreur Dr : SAHLI AHMED Professeur au Département de Génie Mécanique Université IBN Kholdoun TIARET, pour la confiance qu'il a placée en moi, pour sa patience, pour ses conseils, pour son aide précieuse et son soutien permanent durant tout mon travail.

Un grand remerciement à tous les enseignants du département de Génie mécanique et mes collègues et tous mes amis.

Enfin, mes pensées vont, bien entendu, vers mes parents, mes frères, ainsi que vers toute ma famille, leurs soutiens et leurs compréhensions ont été un atout majeur pour la réalisation de ce travail.

B-Djilali

LISTE DES FIGURES

N°	Figure	Page
I.1	Différents types de fibres de verre (documentation Ahlstrom)	04
I.2	Différentes familles du renfort	05
I.3	Déférentes familles de matrice	06
I.4	Moulage par contact	08
I.5	Moulage par projection simultanée	09
I.6	Injection thermodurcissable BMC	09
I.7	Compression thermodurcissable SMC	10
I.8	Enroulement filamentaire (ou bobinage)	10
I.9	Couche de composite	11
I.10	Constitution d'un stratifié	11
I.11	Matériaux sandwiches à âmes pleines	12
II.1	diagramme de déformation d'un matériau isotrope et anisotrope	14
II.2	corps en deux dimensions (Ω) à l'équilibre et ses conditions aux limites	14
II.3	Comportement mécanique d'un matériau isotrope	15
II.4	Comportement mécanique d'un matériau orthotrope	17
II.5	Comportement mécanique d'un matériau anisotrope	20
III.1	Pli unidirectionnel et de ses principaux axes de coordonnées	21
III.2	Système de coordonnées du pli (1 et 2) et du stratifié (x et y).	22
III.3	Flexion d'une ligne dans le plan x - z	24
III.4	Sens positif des forces et des moments résultants	27
III.5	Géométrie d'un stratifié à plusieurs couches	27
IV.1	Élément de commande dans un corps élastique montrant la direction positive des contraintes	32
IV.2	Élément de commande montrant la variation des contraintes	33
IV.3	plaque rectangulaire	37
V.1	Géométrie de stratifié utilisé.	40
V.1	La variation du contrainte normalisée σ_{x_n} pour différentes valeurs de n	43
V.2	La variation du contrainte normalisée σ_{y_n} pour différentes valeurs de n	43
V.3	La variation du contrainte normalisée τ_{xy_n} pour différentes valeurs de n	43
V.4	La variation du contrainte normalisée σ_{x_n} pour différentes valeurs de n	46
V.5	La variation du contrainte normalisée σ_{y_n} pour différentes valeurs de n	46
V.6	La variation du contrainte normalisée τ_{xy_n} pour différentes valeurs de n	46
V.7	La variation du contrainte normalisée σ_{x_n} pour différentes valeurs de n	49
V.8	La variation du contrainte normalisée σ_{y_n} pour différentes valeurs de n	49
V.9	La variation du contrainte normalisée τ_{xy_n} pour différentes valeurs de n	49

LISTE DES TABLEAUX

N°	Figure	Page
I.1	Propriétés mécaniques des fibres	05
I.2	Principales propriétés des matrices Thermodurcissables et Thermoplastiques	06
I.3	Propriétés mécaniques des résines	07
V.1	Les contraintes normalisées pour $n=1$ dans un stratifié unidirectionnel	41
V.2	Les contraintes normalisées pour $n=1,3$ dans un stratifié unidirectionnel	41
V.3	Les contraintes normalisées pour $n=1,3,5$ dans un stratifié unidirectionnel	42
V.4	Les contraintes normalisées pour un stratifié unidirectionnel	42
V.5	Les contraintes normalisées pour $n=1$ au centre de la plaque pour composite à couches croisées	44
V.6	Les contraintes normalisées pour $n=1,3$ au centre de la plaque pour composite à couches croisées	44
V.7	Les contraintes normalisées pour $n=1,3,5$ au centre de la plaque pour composite à couches croisées	45
V.8	Les contraintes normalisées au centre de la plaque pour composite à couches croisées	45
V.9	Les contraintes normalisées pour $n=1$ au quart de la plaque pour composite à couches croisées	47
V.10	Les contraintes normalisées pour $n=1,3$ au quart de la plaque pour composite à couches croisées	47
V.11	Les contraintes normalisées pour $n=1,3,5$ au quart de la plaque pour composite à couches croisées	48
V.12	Les contraintes normalisées au quart de la plaque pour composite à couches croisées	48

SOMMAIRE

Remerciements	I
Liste des figures	III
Liste des tableaux	IV
INTRODUCTION GÉNÉRALE	01
CHAPITRE I	
GÉNÉRALITÉ SUR LES MATÉRIAUX COMPOSITES	
I.1 Introduction	03
I.2 Définition	03
I.3 Constituants des matériaux composites	04
I.3.1 Les renforts	04
I.3.1.1 Différents types de renfort	04
I.3.1.2 Différentes natures de renfort	05
I.3.1.3 Principales caractéristiques mécaniques des fibres de base	05
I.3.2. La matrice	06
I.3.2.1. Différentes natures de la matrice	06
I.3.2.2. Principales caractéristiques mécaniques des résines	07
I.3.3. Les charges	07
I.3.4. Les additifs	07
I.3.5. L'interface	07
I.4. La mise en œuvre des matériaux composites	07
I.4.1. Moulage au contact	08
I.4.2. Moulage par projection simultanée	09
I.4.3. Injection thermodurcissable BMC	09
I.4.4. Compression thermodurcissable SMC	10
I.4.5. Enroulement filamentaire	10
I.5. Architecture des matériaux composites	11
I.5.1. Monocouche	11
I.5.2. Stratifiés	11
I.5.3. Sandwichs	12

CHAPITRE II

ÉLASTICITÉ ANISOTROPE

II.1 Fondements de l'élasticité linéaire	13
II.2 Matériaux isotropes	15
II.3 Matériaux orthotropes	17
II.4 Matériaux transversalement isotropes	19
II.5 Matériaux anisotropes	19

CHAPITRE III

THÉORIE CLASSIQUE DES PLAQUES LAMINÉES

III.1. Comportement élastique du pli en matériau composite	21
III.2. Contraintes et déformations dans un stratifié	24
III.3. Détermination des contraintes et déformations d'un stratifié	30

CHAPITRE IV

FORMULATION DES PLAQUES EN MATÉRIAUX COMPOSITES

IV.1. Introduction	32
IV.2. Équations d'équilibre des plaques	32
IV.3. Flexion des plaques stratifiées en matériaux composites (Théorie classique)	35
IV.4. Conditions aux limites de la théorie des plaques classique	37
IV.5. Solution de NAVIER pour les plaques rectangulaires en composite	37
IV.6 Solution de NAVIER pour une plaque supportée de façon uniforme	39

CHAPITRE V

VALIDATION

V.1. Introduction	40
V.2. Le matériau utilisé	40
V.3. Le calcul	40
V.3.1. Les matrices de rigidité	40
V.3.2. Représentation des contraintes normalisées au centre de la plaque ($X=a/2$, $Y=b/2$) pour un stratifié unidirectionnel ($\theta=0^\circ$)	41
a) pour les valeurs de $n = 1$ et $m = 1, 3, 5$	41
b) pour les valeurs de $n = 1, 3$ et $m = 1, 3, 5$	41
c) pour les valeurs de $n = 1, 3, 5$ et $m = 1, 3, 5$	42
d) Résumé	42
e) Interprétation	44
V.3.3. Représenter les contraintes normalisées au centre de la plaque ($X=a/2$, $Y=b/2$) pour composite à couches croisées [(0, 90) ₂]	44
a) pour les valeurs de $n = 1$ et $m = 1, 3, 5$	44
b) pour les valeurs de $n = 1, 3$ et $m = 1, 3, 5$	44
c) pour les valeurs de $n = 1, 3, 5$ et $m = 1, 3, 5$	45
d) Résumé	45
e) Interprétation	47
V.3.4. Représenter les contraintes normalisées au quart de la plaque ($X=a/4$, $Y=b/4$) pour composite à couches croisées [(0, 90) ₂]	47
a) pour les valeurs de $n = 1$ et $m = 1, 3, 5$	47
b) pour les valeurs de $n = 1, 3$ et $m = 1, 3, 5$	47
c) pour les valeurs de $n = 1, 3, 5$ et $m = 1, 3, 5$	48
d) Résumé	48
e) Interprétation	50
V.4. Conclusion	50
 CONCLUSION GÉNÉRALE	 51
Références	52
Annexes	54

INTRODUCTION GENERALE

Les plaques et les panneaux sont des composants structurels primaires dans de nombreuses structures à partir de véhicules spatiaux, d'avions, d'automobiles, de bâtiments et de maisons, de ponts, de navires et de sous-marins. La capacité de concevoir, d'analyser, d'optimiser et de sélectionner les matériaux et l'architecture appropriés pour les plaques et les panneaux est une nécessité pour tous les concepteurs et analystes structurels.

Le sujet concerne des plaques et des panneaux de matériaux composites. Étant donné que ces matériaux de matrice renforcée par des fibres peuvent être conçus pour la géométrie et le chargement particuliers, ils sont très souvent anisotropes, les propriétés étant fonction de la façon dont les fibres sont alignées, leur fraction de volume et bien sûr les matériaux de fibre et de matrice utilisés. En général, les structures en plaques et panneaux impliquant des matériaux composites pèsent moins qu'une plaque ou un panneau de matériau métallique avec les mêmes charges et conditions de contour, ainsi sont plus résistants à la corrosion. Par conséquent, les ingénieurs structurels modernes doivent être bien informés dans l'utilisation de matériaux anisotropes plus compliqués pour les plaques et panneaux composites.

Les plaques et les panneaux sandwich offrent des avantages spectaculaires par rapport aux constructions monocoques traitées ci-dessus. En ayant des matériaux de face et de noyau appropriés, des plaques sandwich et des panneaux isolés ou anisotropes soumis à des charges de pliage peuvent être 300 fois plus rigides en flexion, avec des contraintes faciales 1/30 de celles utilisant une construction monocoque d'une épaisseur égale aux deux faces de le sandwich. Ainsi, pour le poids supplémentaire du matériau de la lumière, les avantages spectaculaires de la construction en sandwich peuvent être atteints.

Les matériaux composites sont idéaux pour les structures qui nécessitent des rapports de résistance et de poids élevés. Les aéronefs et les engins spatiaux sont des structures typiques sensibles au poids dans lesquelles les matériaux composites sont rentables. Les structures composées de matériaux composites sont aujourd'hui parmi les structures les plus importantes utilisées dans l'industrie aérospatiale moderne. De telles structures légères et hautement renforcées sont également utilisées de manière incroyable dans les applications mécaniques et de génie civil, telles que l'utilisation de plaques de polymère renforcé de fibres (FRP) pour renforcer les éléments en béton existants (Hollaway et Leeming, 1999) et en remplaçant les ponts endommagés avec FRP (Alampalli et Kunin, 2002).

Les documents abordés dans ce chapitre se trouvent dans de nombreux ouvrages. En particulier, l'auteur est redevable à Berthelot (1999), à Jones (2002), Vincent (2005), Stephen (1981), Daniel (2006), Jianqiao (2003), Vasiliev (2001) pour le caractère de la présentation aux différentes sections.

Un stratifié composite typique se compose de couches individuelles qui sont généralement constituées de couches unidirectionnelles ayant la même orientation ou alternativement régulièrement.

Une structure composite typique consiste en un système de couches liées entre elles. Les couches peuvent être constituées de différents matériaux isotropes ou anisotropes, et ont des structures différentes, des épaisseurs et des propriétés mécaniques. Les caractéristiques du stratifié sont habituellement calculées en utilisant les informations concernant le nombre de couches, leur séquence d'empilement, leur géométrie et les propriétés mécaniques qui doivent être connues. Un nombre fini de couches peut être combiné pour former autant de stratifiés que l'idée de les étudier à l'aide de méthodes expérimentales ne semble pas réaliste. Le stratifié est caractérisé par 21 coefficients et démontre des effets de couplage qui peuvent difficilement être simulés dans des expériences.

Ainsi, le sujet de cette étude est de fournir des équations permettant de prévoir les comportements d'un stratifié en tant que système de couches avec des propriétés données. La seule restriction imposée au stratifié en tant qu'élément d'une structure composite concerne son épaisseur totale qui est supposée être beaucoup plus petite que les autres dimensions de la structure.

CHAPITRE I

GÉNÉRALITÉ SUR LES MATÉRIAUX COMPOSITES

I.1. INTRODUCTION

Il existe différentes familles de matériaux : les métaux, les plastiques, les composites, etc. ...

Les matériaux composites ne sont pas une nouveauté, ils ont tous temps été utilisé par l'homme, citons par exemple le bois, le béton et le béton armé.

I.2. DEFINITION :

Un matériau composite est constitué de l'assemblage de deux matériaux ou plus de natures différentes. Se complétant et permettant d'aboutir à un matériau hétérogène dont l'ensemble des performances est supérieur à celui des composants pris séparément (Berthelot J.M., 1992)

Le principal intérêt de l'utilisation des matériaux composites provient de ses excellentes caractéristiques. Ils disposent d'atouts importants par rapport aux matériaux traditionnels. Ils apportent de nombreux avantages fonctionnels :

- légèreté
- grande résistance à la fatigue
- liberté de formes
- maintenance réduite
- faible vieillissement sous l'action de l'humidité, de la chaleur, de la corrosion (sauf alu carbone)
- insensibles aux produits chimique sauf les décapants de peinture qui attaquent les résines.
- Une bonne isolation électrique.
- Leur faible taux d'utilisation vient de leur coût.

On distingue deux types de composites: les composites grande diffusion et les composites haute performance.

Grande diffusion :

Les matériaux composites à grande diffusion offrent des avantages essentiel, qui sont : optimisation des coûts par diminution des prix de revient, sa composition de polyester avec des fibres de verre longues ou courtes (sous forme de mat ou tissu) et la simplicité du principe d'élaboration du matériaux (moulage par contact, SMC et injection). Le taux de renfort avoisinant 30%.

Hautes performances :

Les matériaux composites à hautes performances sont utilisés dans le domaine d'aéronautique où le besoin d'une grande performance déduite des hautes valeurs ajoutées. Les renforts sont plutôt des fibres longues. Le taux de renfort est supérieur à 50%.

Ces composites sont élaborés par les procédures suivantes :

- drapage autoclave, enroulement filamentaire, RTM.
- beaucoup de procédés encore manuels.
- CMM, CMC.

I.3. CONSTITUANTS DES MATERIAUX COMPOSITES: (Berthelot, 1992 ., Bathias, 2009)**I.3.1. Les renforts :**

Les renforts contribuent à améliorer la résistance mécanique à la traction et la rigidité des matériaux composites et se présentent sous forme filamentaire (des fibres organiques ou inorganiques).

I.3.1.1. Différents types de renfort :

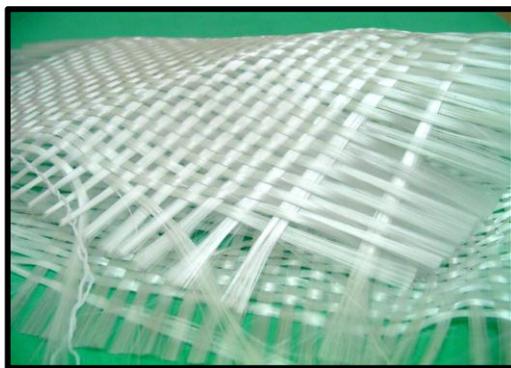
Les renforts les plus utilisés se présentent sous forme de fibres ou formes dérivées et constituent une fraction volumique de matériau composite généralement comprise entre 0.3 et 0.7.

Les renforts fibres se présentent sous diverses formes commerciales.

- Sous forme de roving (fils, mèches, etc. ...): le roving est un assemblage de fils de bases parallèles groupés sans torsion.
- Sous forme de tissus (tissus taffetas, toiles, serge, etc. ...): le tissu est formé par l'entrecroisement perpendiculaire des roving.
Les tissus de roving peuvent peser jusqu'à 800 g/m².
- Sous forme de mat (à fil coupé, à fil continu): le mat est un matelas de fils coupés ou continu à ensimage plastique, agglomérés par un liant à solubilité rapide ou lente dans la résine.



a – Roving de verre



b – Tissu de verre



c – Mat de verre

Figure (I.1) : Différents types de fibres de verre (documentation Ahlstrom)

I.3.1.2. Différentes natures de renfort:

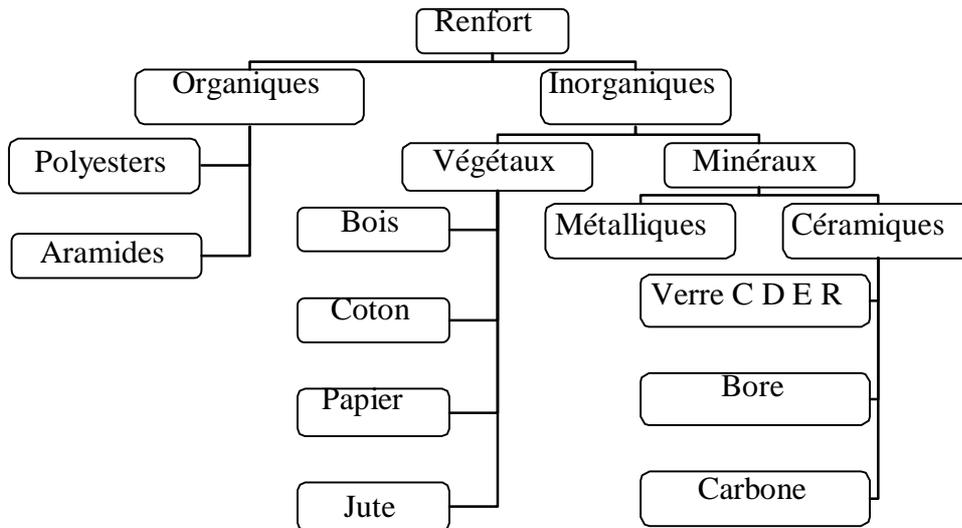


Figure (I.2) : Différentes familles du renfort.

I.3.1.3. Principales caractéristiques mécaniques des fibres de base :

Fibre	densité	σ_r (MPa) en traction	Allongement à la rupture en %	E_L (MPa) Longitudinale	Diamètre du filament élémentaire μm
Verre E	2.54	3400	4.8	73000	3-30
Verre R	2.48	4400	5.4	86000	3-30
Aramide BM	1.45	3100	2	70000	12
Aramide HM	1.45	3100	1	130000	12
Kevlar	-	2900	2.3	130000	1.45
Aluminium	-	1380	0.7	380000	3.9
Carbone HR	1.78	2800	0.5	200000	8
Carbone HM	1.80	2200	-	400000	8
Bore	2.63	3500	0.8	400000	100-200

Tableau I.1 : Propriétés mécaniques des fibres (Berthelot, 1992)

I.3.2. La matrice :

La matrice est l'élément qui lie et maintient les fibres. Elle répartie les efforts (résistance à la compression ou à la flexion) et assure la protection chimique des fibres.

I.3.2.1. Différentes natures de la matrice :

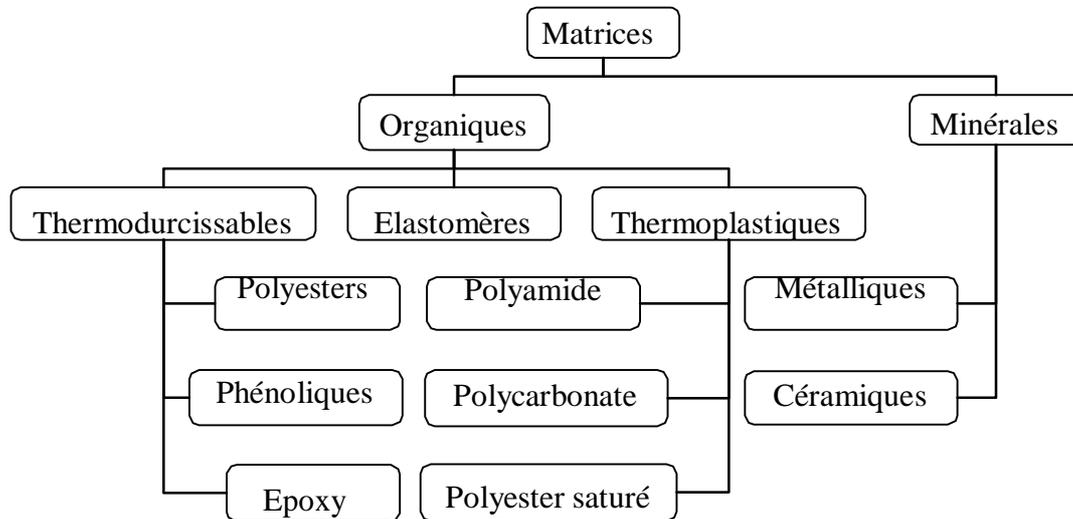


Figure (I.3) : Différentes familles de matrice.

- Résine thermodurcissable: sont mis en forme et se polymérisent selon la forme souhaitée. La transformation irréversible.
- Résine thermoplastique: mis en forme par chauffage, durcissent au cours du refroidissement. La transformation est réversible.

Matrices	Thermodurcissables	Thermoplastiques
Etat de base	Liquide visqueux à polymériser	Solide prêt à l'emploi
Stockage	Réduit	Illimité
Mouillabilité des renforts	Aisée	Difficile
Moulage	Chauffage continu	Chauffage + refroidissement
Cycle	Long (polymérisation)	Court
Tenue au choc	Limitée	Assez bonne
Tenue thermique	Meilleure	Réduite (sauf nouveau TP)
Chutes et déchets	Perdus ou utilisés en charges	Recyclables
Conditions de travail	Emanations de solvants	Propreté

Tableau I.2 : Principales propriétés des matrices Thermodurcissables et Thermoplastiques

I.3.2.2. Principales caractéristiques mécaniques des résines :

	Polyester	Epoxyde	Phénolique	Polyamide	Aluminium
ε_r en traction (%)	2 - 5	2 - 5	2.5	-	-
ρ (Kg/m ³)	1200	1100-1500	1200	1130	2630
σ_r en traction (MPa)	50 - 80	60 - 80	40	70	358
E en traction (GPa)	2.8 – 3.5	3 – 5	-	3	69

Tableau I.3 : Propriétés mécaniques des résines.**I.3.3. Les charges :**

L'objet de la charge renforçant est d'améliorer les caractéristiques mécaniques de la résine, ou diminuer le coût des résines en conservant les performances des résines. En générales ces charges sont des microbilles ou des particules (poudre).

Les principales charges utilisées sont :

- microbille en (verre, carbone, époxyde, phénolique, polystyrène, etc. ...)
- des poudres ou paillettes métalliques : (cuivre, fer, aluminium, etc. ...)
- des particules de carbone (noir de carbone)

I.3.4. Les additifs :

Ils sont nécessaires pour assurer une adhérence suffisante entre le renfort fibreux et la matrice et de modifier l'aspect ou les caractéristiques de la matière à laquelle ils sont ajoutés.

Les additifs se trouvent en faible quantité (quelques % et moins) et interviennent comme :

- lubrifiants et agents de démoulage.
- pigments et colorants.
- agents anti-retraits.
- agents anti-ultraviolets.
- accélérateur.
- catalyseur.

I.3.5. L'interface :

En plus de ces fibres et la matrice, il faut rajouter : une interface qui assure la compatibilité renfort/matrice, qui transmet les contraintes de l'un à l'autre sans déplacement relatif. Bonne adhérence en couche fine.

Des produits chimiques entre aussi dans la composition du composite, l'interphase etc. ... qui peut jouer sur le comportement mécanique, mais n'interviennent pratiquement jamais dans le calcul de structure composite.

I.4. LA MISE EN ŒUVRE DES MATERIAUX COMPOSITES:(Hull D. et Clyne T.W., 1997)
(DESSARTHE A. GUYOTH H et CARAYOL M., 1994)

Généralement le choix d'un procédé de moulage se fait en fonction de certains paramètres à savoir:

- Imprégnation du renfort par le système résineux.
- Mise en forme à la géométrie de la pièce.

- Durcissement du système :
soit par polycondensation et réticulation pour les matrices thermodurcissables,
soit par simple refroidissement pour les matières thermoplastiques.

Les procédés les plus importants sont :

- Moulage par contact
- Moulage par projection simultanée
- Injection thermodurcissable BMC
- Compression thermodurcissable SMC
- Enroulement filamentaire (ou bobinage)

I.4.1. Moulage au contact :

Le principe consiste à disposer dans un moule les renforts (sous forme de mat ou de tissu) imprégnés manuellement d'une matrice thermodurcissable.

Les pièces de formes quelconques peuvent être réalisées avec une cadence très faible.

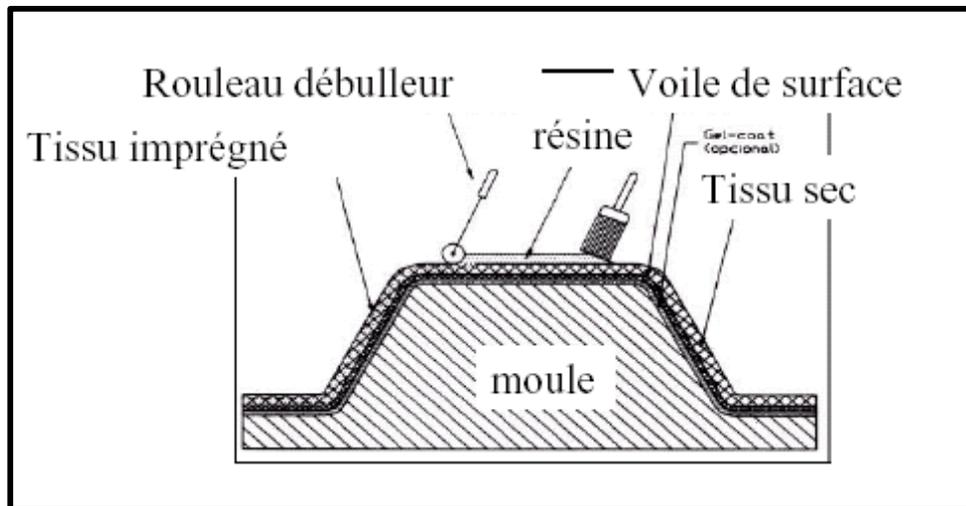


Figure (I.4) : Moulage par contact

I.4.2. Moulage par projection simultanée :

Le moulage est effectué par projection simultanée de fibres coupées et résine catalysée sur un moule. L'équipement à projeter est constitué d'une machine à couper le stratifile et d'un pistolet projetant la résine et les fibres coupées, l'ensemble fonctionnant par air comprimé. La couche de fibres imprégnées de résine est ensuite compactée et ébullée au rouleau cannelé.

Le moulage par projection permet d'obtenir de grandes séries de pièces, avec un bas prix de revient.

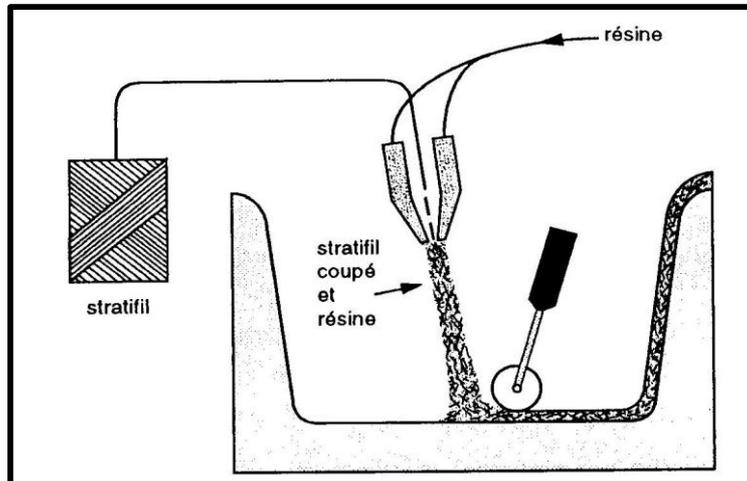


Figure (I.5) : Moulage par projection simultanée

I.4.3. Injection thermodurcissable BMC: (Bulk Molding Compound).

Le moulage du compound est réalisé entre moule et contre moule chauffé à température entre 140 à 170°C sous une pression de 50 à 100 bars.

Les avantages : réalisation de grandes séries, peu de finition.

Le compound : c'est de la résine, du fibre coupé et de la charge

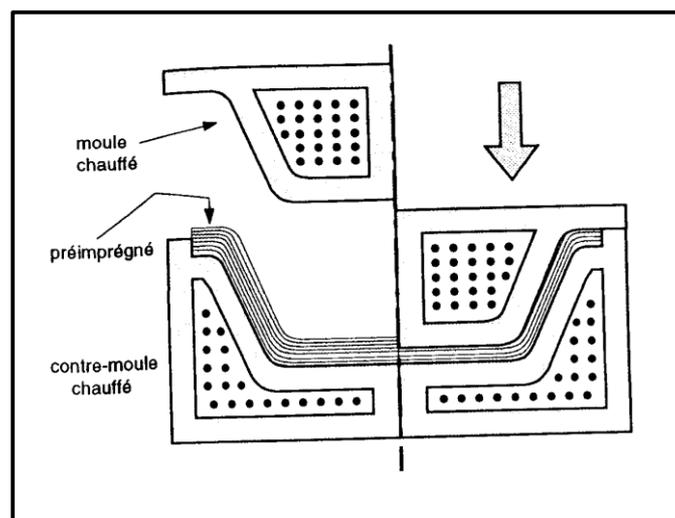


Figure (I.6) : Injection thermodurcissable BMC

I.4.4. Compression thermodurcissable SMC: (Sheet Molding Compound)

Le principe consiste à déposer des feuilles de préimprégnés dans un contre moule chauffé, de comprimer le matériau avec un moule chauffé, polymérisation puis éjection de la pièce.

Les avantages : coût matière, propriétés mécaniques et thermiques. Les limites sont l'aspect, le dimensionnement des presses et la finition.

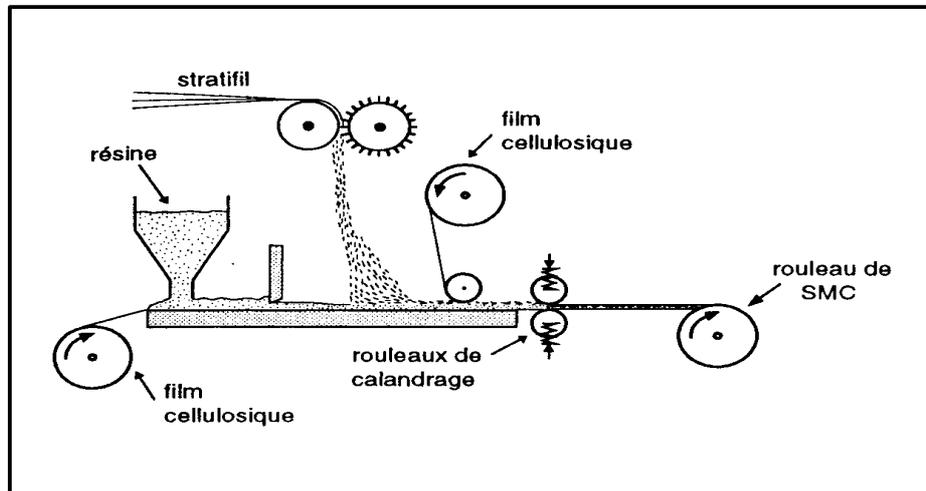


Figure (I.7) : Compression thermodurcissable SMC

I.4.5. Enroulement filamentaire (ou bobinage):

Technologie pour les HP. Le principe consiste en un enroulement sous tension sur un mandrin tournant autour de son axe de fibres continues préalablement imprégnées d'un liant.

Les avantages sont la disposition optimale des renforts, les très bonnes propriétés mécaniques, possibilité de réaliser des pièces de grandes dimensions avec des surfaces internes lisses.

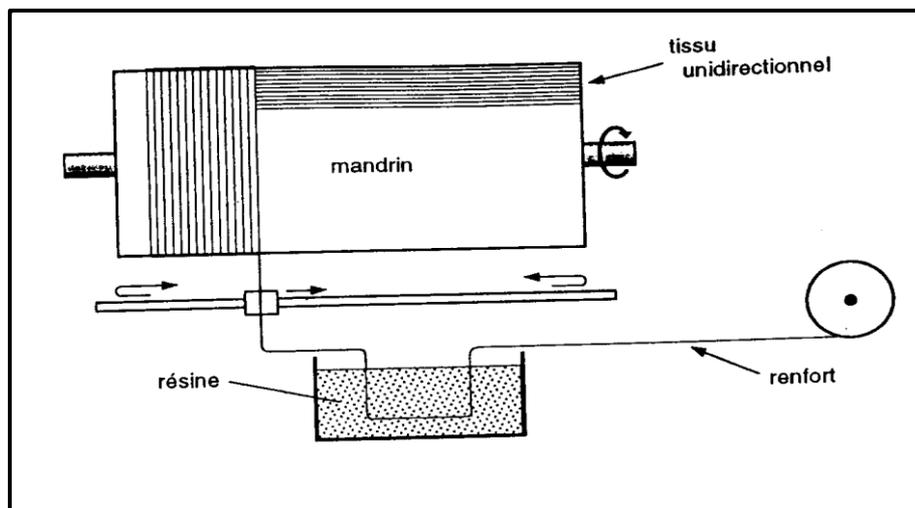


Figure (I.8) : Enroulement filamentaire (ou bobinage)

Il existe d'autres procédés : pultrusion, drapage en autoclave, centrifugation, stratification en continu, thermoformage sous vide et estampage...

I.5. ARCHITECTURE DES MATERIAUX COMPOSITES :

I.5.1. Monocouche:

Les monocouches représentent l'élément de base de la structure composite. Les différents types de monocouches sont caractérisés par la forme du renfort : à fibres continue, à fibres courtes, fibres tissus et mat.

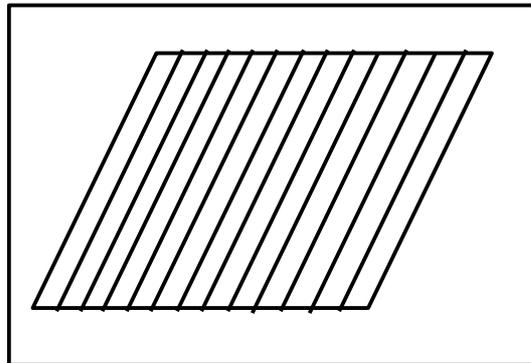


Figure (I.9) : Couche de composite

I.5.2. Stratifiés :

Les stratifiés sont constitués de couches successives (appelées parfois plis) de renforts (fils, stratifiles, mat, tissus, etc.) imprégnés de résines.

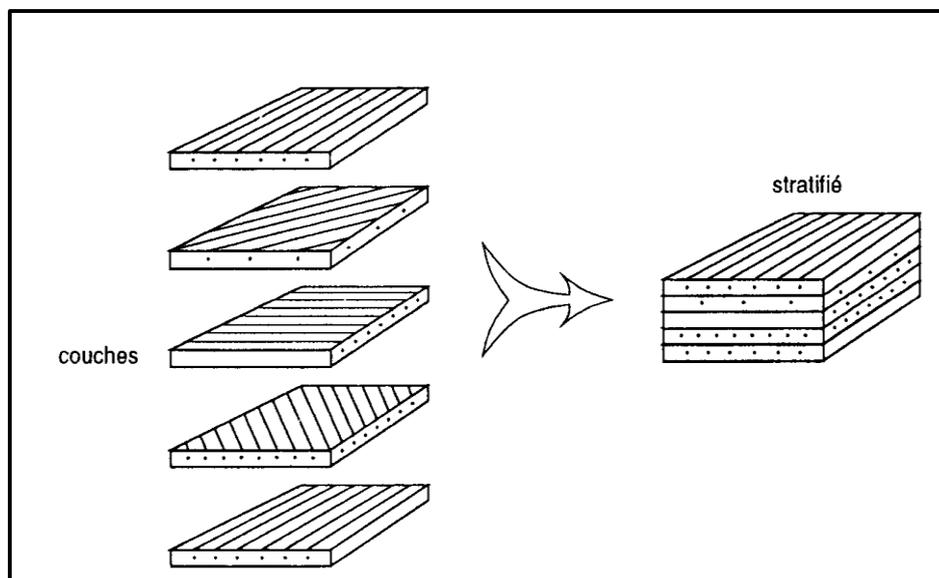


Figure (I.10) : Constitution d'un stratifié

I.5.3. Sandwichs :

Matériaux composés de deux semelles (ou peaux) de grande rigidité et de faible épaisseur enveloppant une âme (ou cœur) de forte épaisseur et faible résistance. L'ensemble forme une structure d'une grande légèreté. Le matériau sandwich possède une grande rigidité en flexion et c'est un excellent isolant thermique.

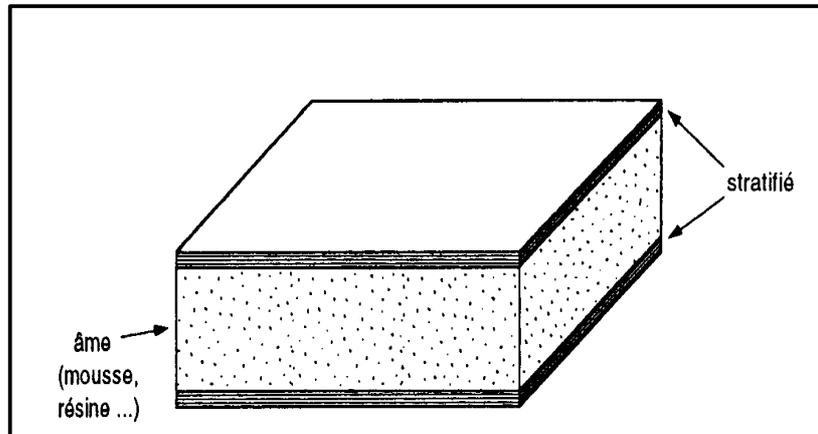


Figure (I.11) : Matériaux sandwichs à âmes pleines

CHAPITRE II

ÉLASTICITÉ ANISOTROPE

Dans ce chapitre, les relations constitutives pour les types de matériaux utilisés dans cette mémoire sont présentées, ainsi que la formulation traditionnelle pour les matériaux composites stratifiés.

II.1. FONDEMENTS DE L'ÉLASTICITÉ LINÉAIRE

Il est d'une importance fondamentale pour le chercheur, de comprendre et de connaître exactement les caractéristiques géométriques et mécaniques du mélange fibre / matrice, qui est la structure de base du matériau composite. Lors de l'étude du comportement mécanique des corps élastiques sous charge (théorie de l'élasticité), il faut considérer ce qui suit ;

- Un corps élastique se déforme sous contrainte d'une manière réversible.
 - A chaque point dans le corps, on peut identifier les principaux plans dans lesquels existent seulement les contraintes normales.
 - directions normales dans ces plans sont appelés directions principales de contraintes.
 - Une petite sphère de matériau autour d'un point du corps devient une ellipsoïde après le chargement.
- La position spatiale relative à l'ellipsoïde par rapport aux principales directions de contraintes permet de caractériser, si le matériau est isotrope ou anisotrope, comme expliqué à la figure (II.1).

Pour les problèmes d'élasticité linéaire, l'équilibre d'un corps Ω avec un contour $\Gamma = \partial\Omega$ est considéré (Figure II.2), le contour est composé de deux parties Γ_u et Γ_t tels que $\Gamma_u \cup \Gamma_t = \Gamma$. La condition au limite de déplacement définie par les déplacements des composants connus u_i^b est imposée dans la partie Γ_u et dans la partie Γ_t , les composantes t_i^b sont données. Le corps peut également être chargé par les forces de volume résultant du poids propre b_i (Czyż et al., 2013), par exemple.

Par conséquent, la relation de base de la théorie de l'élasticité dans le corps sont les rapports de contrainte déplacement, des relations constitutives et des conditions d'équilibre, qui sont données respectivement par les équations suivantes :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.1)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2.2)$$

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad ; \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.3)$$

Où ε_{ij} sont les composantes du tenseur symétrique de déformations, u_i sont les composantes du vecteur de déplacement, σ_{ij} sont les composantes du tenseur symétrique de contraintes et C_{ijkl} est le tenseur d'ordre 4 pour caractériser la matière, connue sous le nom de tenseur de rigidité (MALVERN, 1969). Substituer l'équation (2.1) dans l'équation (2.2) :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2.4)$$

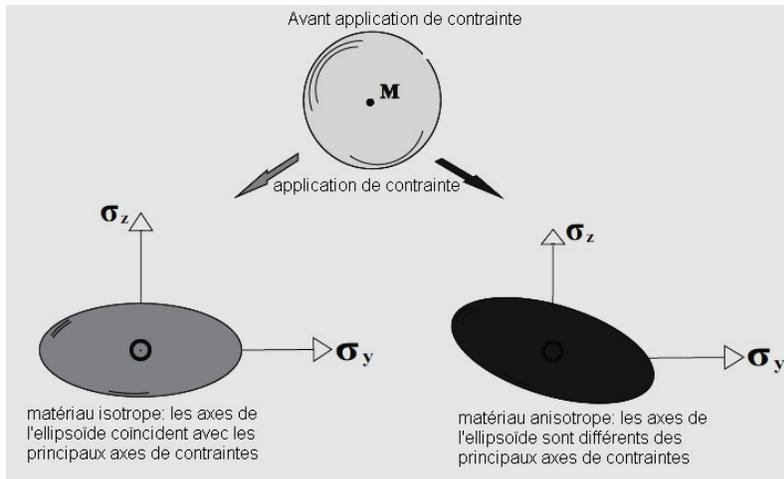


Figure (II.1) : diagramme de déformation d'un matériau isotrope et anisotrope.

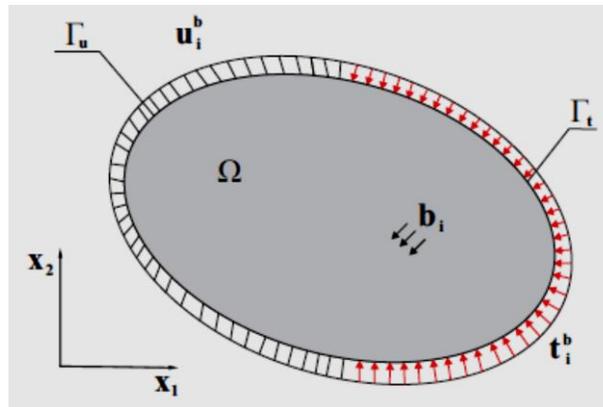


Figure (II.2) : corps en deux dimensions (Ω) à l'équilibre et ses conditions aux limites.

L'équation (2.2) est la loi de Hooke généralisée, et le tenseur C_{ijkl} a une symétrie des contraintes et des déplacements qui permettent, grâce à la forme quadratique de l'énergie de déformation, écrire les relations suivantes:

$$C_{ijkl} = C_{jikl} \quad ; \quad C_{ijkl} = C_{ijlk} \quad ; \quad C_{ijkl} = C_{klij} \tag{2.5}$$

Ainsi, le nombre de constante réduite de 81 à uniquement 21 composantes à déterminer dans problèmes à trois dimensions, et la loi de Hooke est écrite comme suit (MALVERN, 1969) :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212} \\ C_{1133} & C_{2233} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1313} & C_{1323} & C_{1312} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2313} & C_{2323} & C_{2312} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1213} & C_{1223} & C_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \tag{2.6}$$

Une autre équation très importante en élasticité linéaire est le tenseur de Cauchy transformé, qui détermine les forces de surface t_i dans une direction particulière à un moment donné :

$$t_i = \sigma_{ij} n_j \tag{2.7}$$

n_j étant la composante du vecteur normal de surface.

Pour de nombreux problèmes pratiques d'élasticité, la section transversale du corps perpendiculaire à l'un des axes est constante, les conditions aux limites sont constantes le long de cet axe, et il n'y a aucune force agissant sur cet axe, cette structure est appelée plaque.

Dans une telle situation, l'analyse peut être effectuée en utilisant le modèle à deux dimensions (figure II.3) et, par conséquent, l'analyse peut être distinguée suivants les cas, les états de la matière (Czyż et al, 2013) :

- L'état de déformation plane (EDP), qui se produit lorsque la taille du solide dans le sens de X_3 est très grande (épaisseur) et est soumis à des forces qui ne varient pas sur la longueur. Par conséquent, on suppose que toutes les sections transversales le long de la longueur sont dans les mêmes conditions, avec suffisamment pour l'étude d'adopter une tranche solide situé entre deux sections qui distancent d'une unité. Pour EDP, il a $\varepsilon_{ij} \neq 0$ pour $i, j = 1, 2$ et $\varepsilon_{i3} = 0$ pour $i = 1, 2, 3$.
- L'état de contrainte plane (ECP), qui se produit quand une plaque mince est sollicitée par une charge uniformément répartie sur toute son épaisseur, agissant parallèlement au plan de la plaque. Pour l'ECP, il a été $\sigma_{ij} \neq 0$ pour $i, j = 1, 2$ et $\sigma_{i3} = 0$ pour $i = 1, 2, 3$.

Les équations différentielles d'équilibre et des conditions aux limites définissent le problème de la valeur limite d'élasticité linéaire. Si seules les structures géométriques et des conditions aux limites simples sont considérées, des solutions analytiques peuvent être trouvées. Mais dans la plupart des cas, c'est l'application d'une méthode numérique qui permet d'obtenir une solution approchée (Czyż et al., 2013).

Ainsi, après cette section on montrera les équations constitutives pour les types de matériaux qui composent un EVR ou les matériaux composites stratifiés sont formulés uniquement en cas d'ECP.

II.2. MATÉRIAUX ISOTROPES

Les matériaux isotropes sont ceux qui maintiennent leurs propriétés constantes dans toutes les directions de la matière sous une sollicitation de charge donnée, qui est un matériau ayant une symétrie infinie de plans orthogonaux les uns aux autres, donc on peut dire qu'il n'y a pas de directions matériels préférées. Ainsi, on peut considérer qu'une contrainte normale appliquée à une plaque isotrope créer une extension dans la direction longitudinale et une contraction dans le sens transversal (figure II.3), sans déformation de cisaillement. Toutefois, l'application d'une contrainte tangentielle (figure II.3) ne provoque qu'une déformation de cisaillement, sans aucune extension ou de contraction (Jones, 2002).

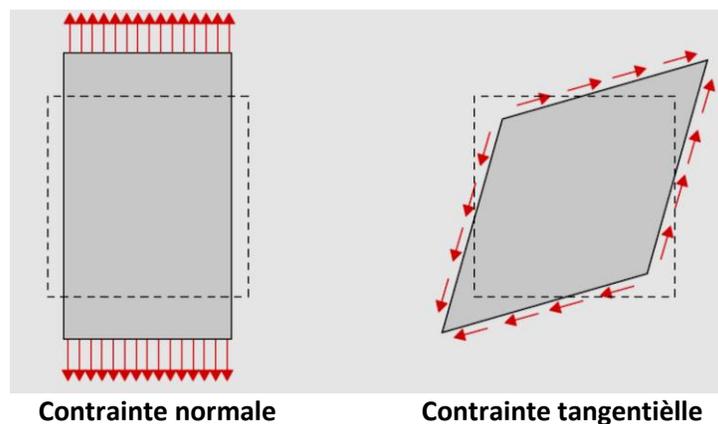


Figure (II.3) : Comportement mécanique d'un matériau isotrope.

Ainsi, la relation constitutive d'un matériau isotrope élastique est écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_3 \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

Où la matrice contenant des constantes E (de module élastique), ν (coefficient de Poisson) et G (module de cisaillement) est la matrice de la flexibilité du matériau.

L'inverse de l'équation (2.8) est la relation contrainte-déformation, où la matrice de rigidité du matériau est présenté (MALVERN, 1969):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E\nu}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{E\nu}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

Pour G :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.11)$$

L'équation (2.8) et l'équation (2.10) montre qu'un matériau isotrope est caractérisé par seulement deux constantes élastiques indépendantes, le module de E et le rapport de Poisson de ν . Les relations de contrainte-déformation et de déformation-contrainte peuvent être écrites sous une forme plus compacte, comme indiqué dans l'équation (2.12) et l'équation (2.13) :

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (2.12)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left[\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{(2\mu + 3\lambda)} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right] \quad (2.13)$$

Où μ, λ sont les constantes de Lamé, δ_{ij} est le delta de Kronecker. Les constantes de Lamé peuvent être liés au rapport de Poisson ν de la manière suivante :

$$\lambda = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \quad (2.14)$$

En plus des relations entre les constantes de Lamé et le coefficient de Poisson vu dans l'équation (2.14) L'équation (2.15) et l'équation (2.16) montrent d'autres relations entre ces constantes et des constantes E et G de l'ingénierie (MALVERN, 1969) :

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad (2.15)$$

$$G = \mu \quad (2.16)$$

II.3. MATÉRIAUX ORTHOTROPES

Quand il y a trois plans de symétrie orthogonaux les uns aux autres dans le matériau, cela augmente le nombre des constantes élastiques par rapport aux matériaux isotropes, en utilisant des arguments similaires à ceux donnés pour les matériaux avec un seul plan de symétrie, de tels matériaux sont appelés orthotrope (Saleeb ET CHEN, 1982), ou le matériau orthotrope a des propriétés qui sont différentes dans les trois directions perpendiculaires par rapport à un point de la matière, en outre Ils montrent trois plans de symétrie perpendiculaires entre eux, de sorte que leurs propriétés dépendent de l'orientation d'un point sur le corps.

Comme avec des matériaux isotropes (Figure II.3), en appliquant une contrainte normale dans une direction principale d'une plaque orthotrope (le long d'une intersection des trois plans orthogonaux la symétrie) se traduit par une extension dans la direction de la contrainte et une contraction perpendiculaire à la contrainte (figure II.4). L'ampleur de l'extension dans la direction principale du matériau sous contrainte normale dans cette direction est différente de la grandeur de l'extension dans une autre direction principale du matériau sous la même contrainte standard dans cette autre direction, alors il y a un module d'élasticité dans chaque direction principale. En outre, en raison des propriétés différentes dans deux directions principales, la contraction peut être plus grande ou plus petite que la contraction d'un matériau isotrope qui est similairement chargé avec le même module d'élasticité dans la direction de la charge, de manière différente des coefficients de Poisson sont associés à différentes paires de directions principales. L'application d'une contrainte de cisaillement provoque une déformation de cisaillement (Figure 2.4), mais l'ampleur de cette déformation est entièrement indépendante des modules d'élasticité et des coefficients de Poisson (Jones, 2002).

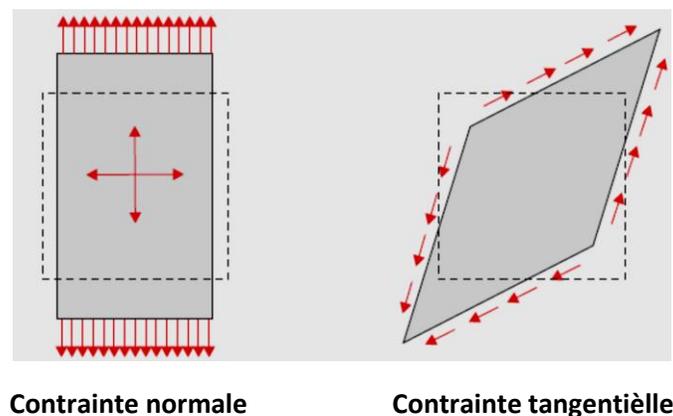


Figure (II.4) : Comportement mécanique d'un matériau orthotrope.

Ainsi, les relations de contrainte-déformation et de déformation-contrainte pour un matériau orthotrope, ont les formes, respectivement suivantes :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_1\nu_{21}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{E_2\nu_{12}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.18)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_3 \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{-\nu_{23}}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.19)$$

Où les constantes E_1, E_2 et E_3 sont les modules d'élasticité dans les directions principales 1, 2 et 3 respectivement ; $\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{21}$ et ν_{23} les coefficients de Poisson, défini comme le rapport entre la déformation transversale et la déformation longitudinale ; G_{12} est le module de cisaillement dans le plan 12, donné par la relation :

$$G_{ij} = \frac{E_i}{2(1+\nu_{ij})} \quad ; \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.20)$$

Et aussi, par des conditions de symétrie :

$$\frac{\nu_{ji}}{E_j} = \frac{\nu_{ij}}{E_i} \quad ; \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.21)$$

En conclusion, on peut noter pour les matériaux orthotropes (CHEN ET Saleeb, 1982):

- La déformation angulaire est indépendant des contraintes normales ;
- Déformation linéaire est indépendante de la contrainte de cisaillement ;
- La contrainte de cisaillement ne provoque qu'une déformation angulaire dans le plan dans lequel elle opère.

II.4. MATÉRIAUX TRANSVERSALEMENT ISOTROPES

Un matériau transversalement isotrope est un matériau orthotrope qui a une isotropie dans l'un des plans de symétrie, ou ayant les mêmes propriétés dans toutes les directions, dans ce plan. En supposant que le plan d'isotropie est le plan 23, les relations de contrainte-déformation et déformation-contrainte sont données respectivement par (CHEN ET Saleeb, 1982) :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_1\nu_{21}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{E_2\nu_{12}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.22)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.23)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_3 \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{-\nu_{23}}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.24)$$

II.5. MATÉRIAUX ANISOTROPES

Un matériau anisotrope est un matériau qui n'a pas de plan de symétrie, c'est à dire, possède des propriétés différentes dans toutes les directions des plans. L'application d'une contrainte normale dans une plaque anisotrope, provoque non seulement une extension dans la direction de la contrainte et de contraction perpendiculaire à cette contrainte, ainsi qu'une déformation de cisaillement (figure II.5). A l'inverse, l'application d'une contrainte de cisaillement provoque l'extension et la contraction, en plus de la déformation de cisaillement (figure II.5) (Jones, 1999).

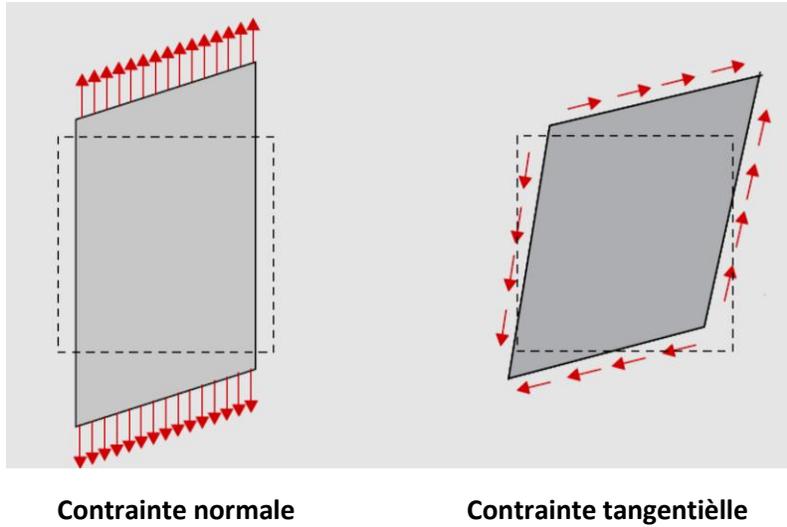


Figure (II.5) : Comportement mécanique d'un matériau anisotrope.

Ainsi, la relation déformation-contrainte est donnée par (Saleeb ET CHEN, 1982) :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\nu_{21} & \frac{\eta_{12,1}}{E_1} \\ -\nu_{12} & \frac{1}{E_2} & \frac{\eta_{12,2}}{E_2} \\ \frac{\eta_{12,1}}{E_1} & \frac{\eta_{12,2}}{E_2} & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.25)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_3 \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nu_{13} & -\nu_{23} & \frac{\eta_{12,3}}{E_3} \\ \frac{\eta_{23,1}}{E_1} & \frac{\eta_{23,1}}{E_2} & \frac{\zeta_{12,23}}{G_{23}} \\ \frac{\eta_{32,1}}{E_1} & \frac{\eta_{31,2}}{E_2} & \frac{\zeta_{12,32}}{G_{31}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.26)$$

où les constantes $\eta_{jk,l}$ sont appelés coefficients d'influence mutuelle du premier type, qui comportent des extensions dans les directions des axes principaux, produites par les contraintes de cisaillement agissant sur les plans principaux, et les constantes $\zeta_{ij,kl}$ sont des coefficients de Chentsov qui caractérisent les déformations tangentielles dans des plans parallèles aux plans principaux de l'élasticité, causées par des contraintes tangentielles qui agissent sur d'autres plans, parallèles aux plans principaux de l'élasticité Lekhnitskii (1963).

La relation contrainte-déformation est obtenue en inversant l'équation (2.25), déterminant ainsi les composantes du tenseur des coefficients de raideurs élastiques.

CHAPITRE III

THÉORIE CLASSIQUE DES PLAQUES LAMINÉES

III.1. COMPORTEMENT ÉLASTIQUE DU PLI EN MATÉRIAU COMPOSITE

Un plan bidimensionnel dans le pli (1,2), dans lequel les fibres sont noyées dans une matrice et alignées d'une manière unidirectionnelle (Figure III.1) est orthotrope (Daniel et Ishai, 1994), et puis la relation contrainte-déformation est donnée par l'équation (2.17), et réduite en utilisant la notation de tenseur proposé par Lekhnitskii (1963) :

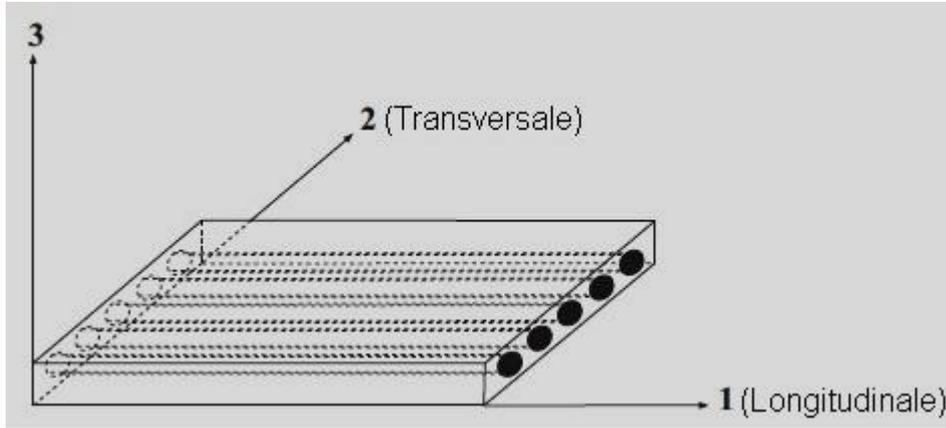


Figure (III.1) : Pli unidirectionnel et de ses principaux axes de coordonnées.

$$\begin{cases} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{cases} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{cases} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \end{cases} \quad (3.1)$$

Où Q_{ij} sont maintenant les composants de la matrice de rigidité, à savoir :

$$Q = [Q_{ij}] \quad (3.2)$$

En termes de constantes d'ingénierie, les composants du tenseur de rigidité du pli peuvent être écrits comme :

$$\begin{aligned} Q_{11} &= E_1 / (1 - \nu_{12}\nu_{21}) & ; & & Q_{22} &= E_2 / (1 - \nu_{12}\nu_{21}) \\ Q_{66} &= G_{12} & ; & & Q_{16} &= Q_{26} = 0 \\ Q_{12} &= \nu_{21}E_1 / (1 - \nu_{12}\nu_{21}) = \nu_{12}E_2 / (1 - \nu_{12}\nu_{21}) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Comme mentionné précédemment, pour les matériaux orthotropes, le pli est complètement caractérisé avec 4 constantes élastiques indépendantes, E_1, E_2, G_{12} et ν_{12} , et étant constante ν_{21} est déterminée par l'équation (2.21) des conditions de symétrie.

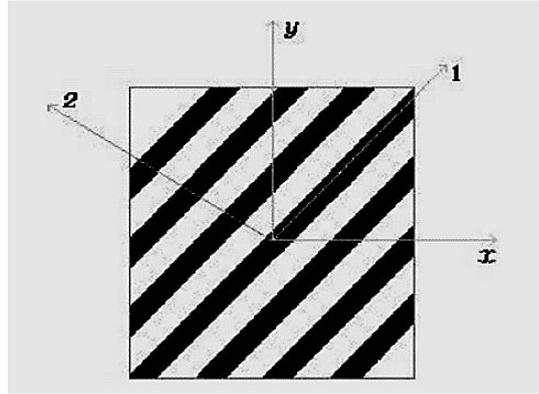


Figure (III.2) : Système de coordonnées du pli (1 et 2) et du stratifié (x et y).

Souvent, les axes principaux du pli (1 et 2) ne coïncident pas avec l'axe du stratifié (x et y). Lorsque cela se produit, la relation constitutive pour chaque pli individuelle doit être transformée à l'axe de référence du stratifié (Figure III.2), puis déterminer la relation constitutive. Pour que cette transformation se fasse, il suffit que le tenseur des contraintes et les déformations sont multipliées par la matrice de transformation, à savoir :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{Bmatrix} = T \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{Bmatrix} \tag{3.4}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_s \end{Bmatrix} = T \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix} \tag{3.5}$$

Où $[\sigma]_{x,y}$ et $[\varepsilon]_{x,y}$ sont des tenseurs de contrainte et de déformation respectivement écrits dans le système de référence du stratifié, σ_{ij} et ε_{ij} sont les mêmes tenseurs écrit dans le système de référence du pli et T est une matrice de transformation donnée par:

$$T = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

Où

$$m = \cos \theta \tag{3.7}$$

$$n = \sin \theta \tag{3.8}$$

Elle observe que la matrice inverse T^{-1} peut être obtenue en remplaçant l'angle positif θ (Figure III.2) par l'angle négatif $-\theta$. L'équation constitutive peut être écrite comme :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{Bmatrix} = T^{-1} Q (T^{-1})' \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_s \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

Où $(T^{-1})'$ est la matrice transposée de la matrice inverse de T et :

$$T^{-1} = T(-\theta) = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & -2mn \\ n^2 & m^2 & 2mn \\ mn & -mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Multipliant les matrices de l'équation (3.9) (DANIEL ET Ishai, 1994) :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_s \end{Bmatrix} \quad (3.11)$$

Où

$$\begin{aligned} Q_{xx} &= m^4 Q_{11} + n^4 Q_{22} + 2m^2 n^2 Q_{12} + 4m^2 n^2 Q_{66} \\ Q_{yy} &= n^4 Q_{11} + m^4 Q_{22} + 2m^2 n^2 Q_{12} + 4m^2 n^2 Q_{66} \\ Q_{ss} &= m^2 n^2 Q_{11} + m^2 n^2 Q_{22} + (m^4 + n^4) Q_{12} - 4m^2 n^2 Q_{66} \\ Q_{xs} &= m^3 n Q_{11} - mn^3 Q_{22} - mn(m^2 - n^2) Q_{12} - 2mn(m^2 - n^2) Q_{66} \\ Q_{ys} &= m^3 n Q_{11} - mn^3 Q_{22} + mn(m^2 - n^2) Q_{12} + 2mn(m^2 - n^2) Q_{66} \\ Q_{xy} &= m^2 n^2 Q_{11} - m^2 n^2 Q_{22} - 2m^2 n^2 Q_{12} + (m^2 - n^2) Q_{66} \end{aligned} \quad (3.12)$$

La matrice $[Q]_{xy}$ est complètement remplie, avec les six constantes élastiques qui régissent le comportement du pli, et Q_{xs} , Q_{ys} sont des combinaisons linéaires des quatre autres. Dans le système de coordonnées transformé, le pli est dit généralement orthotrope et la matrice $[Q]_{xy}$ est analogue à la matrice Q des plis entièrement anisotropes ($Q_{xs} \neq 0$, $Q_{ys} \neq 0$). Quand $Q_{16} = Q_{26} = 0$ on dit que le matériau particulier est orthotrope.

III.2. CONTRAINTES ET DÉFORMATIONS DANS UN STRATIFIÉ

Les stratifiés sont réalisés de manière à agir comme si elles étaient un élément d'un seul matériau. Le contact entre deux plis dans un stratifié est considéré comme parfait, qui est infiniment mince et n'a pas de déformation. Ainsi, les plis ne peuvent pas glisser les uns sur les autres, et les décalages en continu restent à l'interface entre les plis. Considérant la déformation d'une partie du stratifié dans le plan x - z comme représenté sur la figure (III.3).

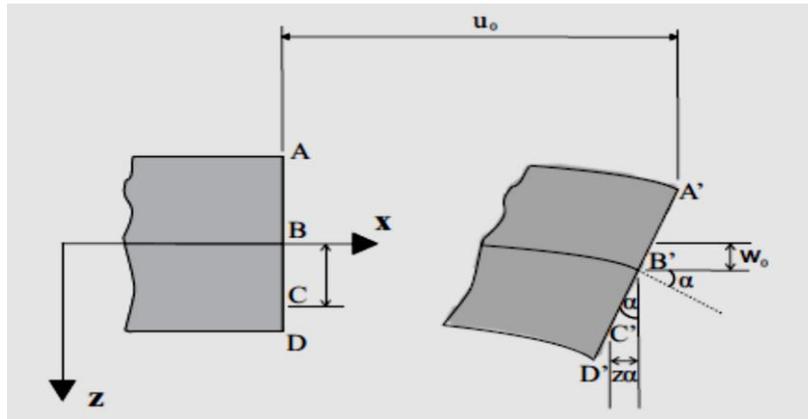


Figure (III.3) : Flexion d'une ligne dans le plan x - z

En supposant que la ligne de ABCD, initialement rectiligne et perpendiculaire au plan médian du stratifié avant déformation reste droite et perpendiculaire au plan médian du stratifié après déformation. Cette hypothèse, l'hypothèse Kirchhoff est équivalente à la négligence des déformations de cisaillement γ_{xy} et γ_{yz} , et également équivalent à supposer que les plis constituant la section transversale ne glissent pas l'un sur l'autre. En outre, on suppose que le point de B situé dans le plan médian, subit un déplacement u_0, v_0 et w_0 le long des directions x, y et z respectivement. Le déplacement u dans la direction de x du point C, qui est situé sur la ligne ABCD, distant de z du plan médian, est donné par (Agarwal et BROUTMAN, 1990) :

$$u = u_0 - z \alpha \quad (3.13)$$

Où α est l'inclinaison du plan médian du stratifié dans la direction de x . Ainsi :

$$\alpha = \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (3.14)$$

Combinant l'équation (3,13) et l'équation (3.14), on obtient :

$$u = u_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (3.15)$$

Similarité, le déplacement v dans le sens y d'un point arbitraire à une distance z par rapport au plan géométrique est :

$$v = v_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (3.16)$$

Le déplacement w , dans la direction z de tout point de ABCD est le déplacement w_0 du plan médian non déformé au plan médian déformé. Par conséquent, le déplacement normale en tout point du stratifié est supposé égale au déplacement w_0 . Ainsi la déformation normale ε_z n'est pas considérée. Les déformations peuvent être obtenues en calculant les déplacements u et v :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Les relations de contrainte-déformation peuvent être écrites en termes de déformation du plan médian et les courbures des plaques :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.18)$$

Où les déformations dans le plan médian sont :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (3.19)$$

et les courbures des plaques sont (Daniel et Ishai, 1994) :

$$\begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.20)$$

L'équation (3,18) indique que les déformations dans un stratifié varient linéairement le long de l'épaisseur. Les contraintes présentes sur un pli peuvent être obtenues en substituant l'équation (3,18) dans la relation contrainte-déformation pour un pli donné par l'équation (3.11) :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

Ainsi, la variation des contraintes à travers l'épaisseur d'un stratifié est obtenue en calculant la variation des contraintes dans tous les plis. D'une manière générale, la variation des contraintes à travers l'épaisseur d'un stratifié est non linéaire. Les contraintes sont discontinues à l'interface de deux plis, et le gradient de contraintes sur deux plis adjacents est différent.

Les contraintes dans un stratifié varient d'une couche à l'autre. Par conséquent, il est commode de travailler avec un système simplifié de forces et de moments équivalent agissant dans une section transversale du stratifié. Ainsi, les forces et les moments agissant sur cette section qui en résultent sont définis ci-dessous. La force résultante est obtenue en intégrant les contraintes correspondantes dans l'épaisseur de la section transversale du stratifié, h (Daniel et Ishai, 1994) :

$$\begin{aligned} N_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz \\ N_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz \\ N_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz \end{aligned} \quad (3.22)$$

De même, les moments résultant sont obtenus en intégrant, le long de l'épaisseur, produit entre la contrainte correspondante et la distance de la même par rapport au plan du stratifié, z :

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz \\ M_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz \\ M_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz \end{aligned} \quad (3.23)$$

Dans les équations ci-dessus, N_x , N_y et N_{xy} ont des unités de force par unité de longueur et M_x , M_y et M_{xy} ont des unités de moments par unité de longueur. Le sens positif des forces et des moments résultants est conforme à la convention de signe montrée dans la figure (III.4). Ensemble, ces six termes de forces et moments forment un système statiquement équivalent à un système de contraintes du stratifié, mais appliqué dans son plan médian.

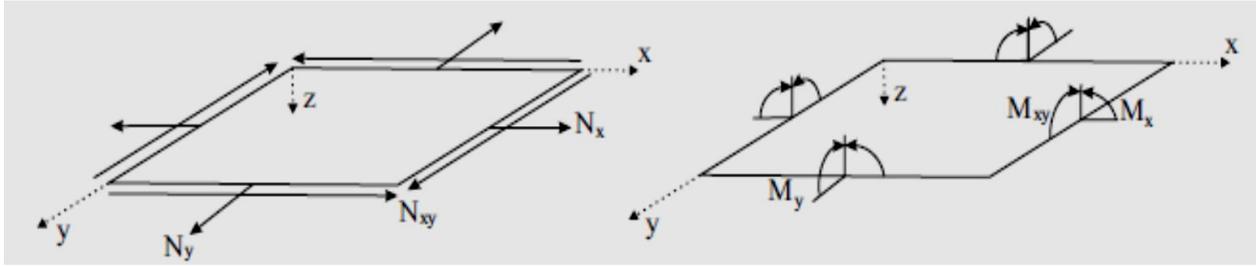


Figure (III.4) : Sens positif des forces et des moments résultants.

Considérons maintenant un stratifié formé par n plis orthotropes, comme dans la figure (III.5). Le système des forces et des moments agissant sur le plan médian de ce stratifié peut être obtenu en remplaçant les intégrales continues dans l'équation (3.22) et l'équation (3.23) par les sommations d'intégrales qui représentent la contribution de chacun des plis séparément :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad (3.24)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad (3.25)$$

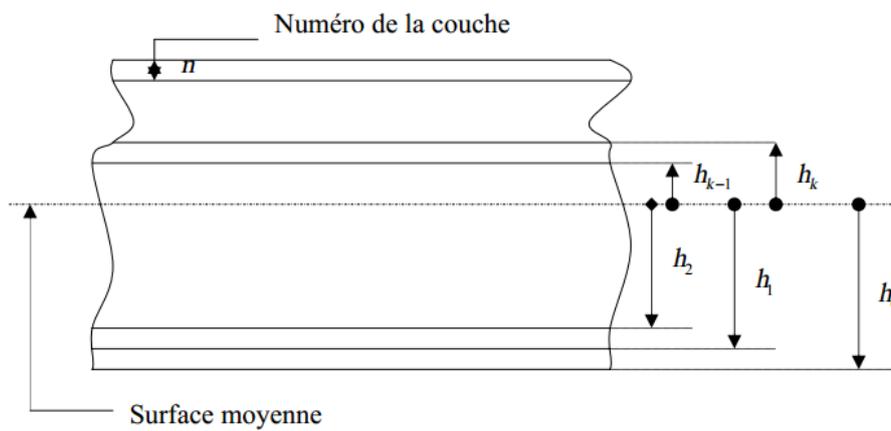


Figure (III.5) : Géométrie d'un stratifié à plusieurs couches.

Les contraintes dans l'équation (3.24) et l'équation (3.25) peuvent être écrites en termes de déformation du plan médian et les courbures de la plaque, l'équation (3.21), et les forces et les moments résultants peuvent être directement liés aux déformations du plan médian et courbures de la plaque. Substituant l'équation (3.21) dans l'équation (3.24) et l'équation (3.25), nous aurons (Daniel et Ishai, 1994):

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix}_k = \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} dz + \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} z dz \right\} \quad (3.26)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}_k = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} z dz + \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} z^2 dz \quad (3.27)$$

L'évaluation de l'équation (3.26) et l'équation (3.27), peuvent être retirées de la somme les déformations du plan médian et les courbures de la plaque, puisque celles-ci restent constantes, non seulement sur un pli, mais dans le stratifié, ce qui simplifie les équations ainsi. En outre, la matrice de rigidité \bar{Q} reste constante pour chaque pli et peut donc être placée en dehors de l'intégrale. Ainsi, l'équation (3.26) et l'équation (3.27) deviennent :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} dz \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.28)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} z^2 dz \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.29)$$

Définition de trois nouvelles matrices, l'équation (3.28) et l'équation (3.29) peuvent être écrites de manière simplifiée :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.30)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned}
A_{ij} &= \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (h_k - h_{k-1}) \\
B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \\
D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (h_k^3 - h_{k-1}^3)
\end{aligned} \tag{3.32}$$

En combinant l'équation (3.30) et l'équation (3.31), l'équation constitutive du stratifié dans son ensemble peut être écrite comme :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ k \end{Bmatrix} \tag{3.33}$$

Dans l'équation (3.30) et l'équation (3.33) les matrices de A, B et D sont appelés matrice de rigidité de l'extension, matrice de rigidité du couplage, et la matrice de rigidité en flexion, respectivement. La matrice de rigidité de l'extension concerne la résultante des forces de déformation sur le plan médian, et matrice de rigidité de la flexion associée à la résultante des moments avec la courbure du stratifié (Daniel et Ishai, 1994).

La présence de la matrice de couplage B dans l'équation constitutive du stratifié indique la relation entre la flexion et la déformation dans le stratifié. Ce sont les forces normales et de cisaillement agissant dans le plan médian de la plaque causant, non seulement, la déformation dans son plan médian, mais aussi la flexion et la torsion de la plaque. De même, flexion et moment de torsion sont accompagnés par des déformations dans le plan médian. Ainsi, la traction d'un stratifié dont les termes B_{ij} de la matrice de couplage sont non nuls, produira la flexion et / ou torsion du stratifié, ainsi que la déformation longitudinale et de cisaillement.

Cette observation a été démontrée expérimentalement par Ashton et al. (1969) en utilisant un modèle fabriqué avec deux couches orthotropes en fibre de nylon renforcées avec du caoutchouc, de sorte que certains termes B_{ij} sont différents de zéro. Les extrémités ont été laissées libres de tourner de telle sorte que lorsque le modèle a été étiré, la seule force agissant non nul dans le stratifié était N_x , alors que toutes les autres forces et moments résultant sont nuls. Ce type d'essai montre clairement le couple produit par une force normale. La relation entre la déformation et la flexion du stratifié n'est pas attribuée aux plis orthotropes ou anisotropes, mais l'asymétrie d'empilement du stratifié. En effet, cette relation est valable pour un stratifié constitué de couches de différents matériaux isotropes.

III.3. DÉTERMINATION DES CONTRAINTES ET DÉFORMATION D'UN STRATIFIÉ

L'objectif de l'analyse d'un stratifié composite est de déterminer les contraintes et les déformations dans chacun des plis le constituant. Des déformations causées dans un pli par des charges externes sont en fonction des déformations dans le plan médian du pli, des courbures de la plaque et de la distance par rapport au plan médian du stratifié. L'équation (3,18) donne la relation entre ces valeurs. Les contraintes présentes sur un pli peuvent être déterminées à la fois du calcul de la déformation du pli, en utilisant la relation contrainte-déformation donnée par l'équation (3.11) ou directement à partir des déformations et de courbures du plan médian à l'aide de l'équation (3.21). Donc la première étape dans la détermination des contraintes et des déformations du pli est de calculer les déformations et courbures dans le plan médian.

Les relations entre les charges appliquées, la déformation du plan médian et les courbures de la plaque sont fournies par l'équation (3.30) et l'équation (3.31). Ces deux équations matricielles représentent six équations algébriques, impliquant six inconnues (trois liés à des déformations dans le plan médian et trois aux courbures de la plaque). Pour chaque stratifié dont la matrice de couplage B est non nul, la solution de ces équations nécessite l'inversion de la matrice 6 x 6 de l'équation (3.33). Toutefois, cette inversion peut être réalisée en plusieurs étapes, et l'inversion complète peut être divisée par inversion et multiplication des matrices plus petites. Ci-dessous, les déformations et courbures sont dérivées en tant que fonctions explicites des charges appliquées, à savoir les contraintes et les moments qui en résultent.

Les équations constitutives générales pour un stratifié ont été tirées de l'équation (3.33). Compte tenu des équations pour N et M séparément (Agarwal et BROUTMAN, 1990) :

$$\begin{aligned} \{N\} &= [A] \{\varepsilon^0\} + [B] \{k\} \\ \{M\} &= [B] \{\varepsilon^0\} + [D] \{k\} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Résolution de la première des équations de l'équation (3.34) pour les déformations dans le plan médian :

$$\{\varepsilon^0\} = [A^{-1}] \{N\} - [A^{-1}] [B] \{k\} \quad (3.35)$$

Substitution de l'équation (3,35) dans la seconde relation de l'équation (3.34) :

$$\{M\} = [B] [A^{-1}] \{N\} + [-[B] [A^{-1}] [B] + [D]] \{k\} \quad (3.36)$$

Les équations (3.35) et (3.36) peuvent être combinées pour obtenir une forme partiellement inversée de l'équation constitutive du stratifié:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A^* & B^* \\ C^* & D^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ k \end{Bmatrix} \quad (3.37)$$

Où

$$\begin{aligned}
 [A^*] &= [A^{-1}] \\
 [B^*] &= -[A^{-1}][B] \\
 [C^*] &= [B][A^{-1}] \\
 [D^*] &= [D] - [B][A^{-1}][B]
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

Il convient de noter que, pour obtenir cette forme partiellement inversée de l'équation constitutive du stratifié, seulement une matrice 3x3 doit être inversée et deux multiplications effectuées.

Maintenant, l'équation (3.35) et l'équation (3.36) peut être réécrites comme :

$$\begin{aligned}
 \{\varepsilon^0\} &= [A^*]\{N\} + [B^*]\{k\} \\
 \{M\} &= [C^*]\{N\} + [D^*]\{k\}
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

La résolution de la deuxième équation ci-dessus pour la courbure de la plaque :

$$\{k\} = [D^{*-1}]\{M\} - [D^{*-1}][C^*]\{N\} \tag{3.40}$$

Et en substituant l'équation (3.40) dans la première équation des équations (3.39) :

$$\{\varepsilon^0\} = \left[[A^*] - [B^*][D^{*-1}][C^*] \right] \{N\} + [B^*][D^{*-1}]\{M\} \tag{3.41}$$

L'équation (3.40) et l'équation (3.41) peuvent être combinées pour obtenir la forme complètement inversée de l'équation constitutive :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} \tag{3.42}$$

Où :

$$\begin{aligned}
 [A'] &= [A^*] - [B^*][D^{*-1}][C^*] \\
 [B'] &= [B^*][D^{*-1}] \\
 [C'] &= -[D^{*-1}][C^*] \\
 [D'] &= [D^{*-1}]
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

Par conséquent, la forme complètement inversée des équations constitutives pour un stratifié est obtenu en inversant la matrice de 3x3 et en outre par la multiplication de deux matrices.

CHAPITRE IV

FORMULATION DES PLAQUES EN MATÉRIAUX COMPOSITES

IV.1. INTRODUCTION

Dans le chapitre 3, les équations constitutives des matériaux composites ont été développées en détail, décrivant les relations entre les contraintes résultantes intégrées (N_x , N_y , N_{xy}), les moments intégrés (M_x , M_y , M_{xy}) et les courbures (κ_x , κ_y , κ_{xy}) comme on le voit dans l'équation (3.30-3.31). Ceux-ci seront utilisés avec les relations déformations-déplacements (équations (3.19) et (3.20)) et les équations d'équilibre à développer dans la section 4.2 ci-dessous, pour développer des théories structurales pour les plaques et panneaux minces, configuration dans laquelle les matériaux composites sont le plus généralement employés

IV.2. ÉQUATIONS D'ÉQUILIBRE DES PLAQUES

Les contraintes résultantes (N), les forces résultantes de cisaillement (Q) et les couples (M), avec des indices appropriés, sont définies par les équations (3.24, 3.25) et leurs directions positives sont représentées sur la figure (3.4), pour une plaque rectangulaire, définie comme un corps de longueur a dans la direction x , largeur b dans la direction y , et épaisseur h dans la direction z , où $h \ll b$, $h \ll a$, c'est-à-dire une plaque mince.

Dans la modélisation mathématique des matériaux solides, y compris les stratifiés du chapitre 3, on utilise généralement la théorie du continuum. Ce faisant, on choisit un point matériel représentatif dans le solide élastique ou le pli, comme étant typiquement macroscopique, de tous les points matériels dans le corps ou le pli. Le point matériel est supposé être infiniment plus petit que n'importe quelle dimension de la structure le contenant, mais infiniment plus grand que la taille de l'espacement du réseau moléculaire du matériau structuré la comprenant. En outre, le point matériel a une forme commode ; et dans un système de référence cartésien cette forme commode est un petit cube de dimensions dx , dy et dz comme montré dans la figure (IV.1).

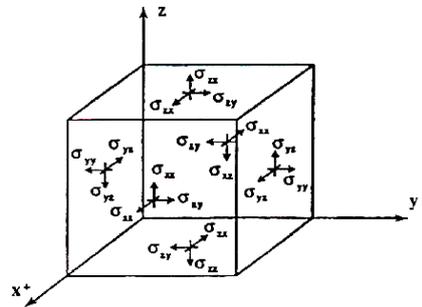


Figure (IV.1) : Élément de commande dans un corps élastique montrant la direction positive des contraintes.

Ce point matériel de dimension cubique dx , dy et dz est appelé élément de commande. Les valeurs positives de toutes les contraintes agissantes sur chaque surface de l'élément de contrôle sont présentées à la figure (IV.2), ainsi que la façon dont elles varient d'une surface à l'autre, en utilisant la convention de signe positif compatible avec la plupart des publications scientifiques et en accord avec la figure (IV.2). Les contraintes de surface agissantes sur l'élément de commande représentées sur la figure (IV.2), les composantes des forces de volume F_x , F_y et F_z peuvent également agir sur le corps. Ces forces telles que les forces gravitationnelles, magnétiques ou centrifuges sont proportionnelles au volume de l'élément de commande, c'est-à-dire à sa masse.

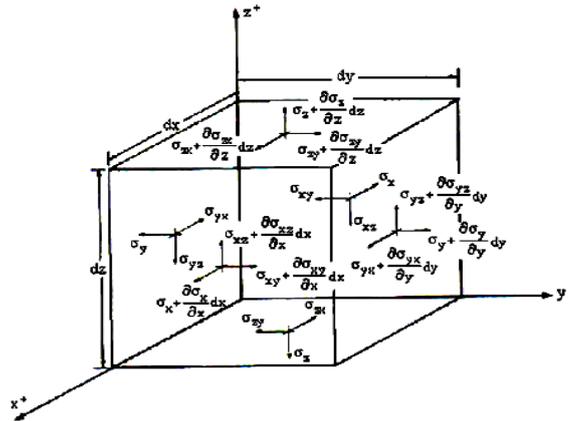


Figure (IV.2) : Élément de commande montrant la variation des contraintes.

On peut maintenant établir un équilibre des forces dans les directions x, y et z, ce qui donne trois équations d'équilibre : on obtient les équations (4.1). Ces trois équations comprennent les équations d'équilibre pour un corps élastique tridimensionnel. Cependant, pour la théorie des poutres, des plaques et des coques, qu'il s'agisse de matériaux composites ou non, il faut intégrer les contraintes sur l'épaisseur des structures à paroi mince pour obtenir des solutions.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + F_x &= 0 \\
 \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + F_y &= 0 \\
 \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z &= 0
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

Rappelant les définitions des forces résultantes et des couples définis aux points (3.24, 3.25) et (3.26, 3.27) ; Pour une plaque ou panneau laminé (ou sandwich), ils sont :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} dz = \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix}_k dz_k
 \tag{4.2}$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k z_k dz_k
 \tag{4.3}$$

La première forme de (4.2) et (4.3) est applicable à une plaque à une seule couche, tandis que la seconde forme est nécessaire pour une plaque stratifiée ou sandwich en raison des discontinuités de contrainte associées à différents matériaux et/ou des orientations différentes dans les différents plis.

Passons maintenant à (4.1), négligeant le terme de force de volume, F_x , pour simplifier cet exemple, l'intégration terme par terme à travers chaque couche et la sommation à travers la plaque fournit

$$\sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} \frac{\partial \sigma_{x_k}}{\partial x} dz + \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} \frac{\partial \sigma_{yx_k}}{\partial y} dz + \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} \frac{\partial \sigma_{zx_k}}{\partial z} dz = 0 \quad (4.4)$$

Dans les deux premiers termes, l'intégration et la différenciation peuvent être échangées, donc :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{x_k} dz \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{yx_k} dz \right] + \sum_{k=1}^N \sigma_{zx_k} \Big|_{h_{k-1}}^{h_k} = 0 \quad (4.5)$$

Dans les deux premiers termes N_x et N_{yx} apparaissent explicitement comme les quantités entre crochets. Dans le troisième terme, il est clair que, entre toutes les couches d'une plaque composite stratifiée et entre la face et l'âme des matériaux d'un panneau sandwich, les contraintes de cisaillement interlaminaire s'annulent mutuellement, et on peut définir les contraintes de cisaillement appliquées sur le dessus ($z = h_N$) et inférieure ($z = h_0$) des surfaces (voir Figure IV.1) :

$$\sigma_{zx}(h_N) = \tau_{1x} \quad \text{et} \quad \sigma_{zx}(h_0) = \tau_{2x} \quad (4.6)$$

L'équation (4.5) peut alors s'écrire :

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} + \tau_{1x} - \tau_{2x} = 0 \quad (4.7)$$

De même, l'intégration de l'équation d'équilibre dans la direction y fournit :

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + \tau_{1y} - \tau_{2y} = 0 \quad (4.8)$$

Où

$$\sigma_{zy}(h_N) = \tau_{1y} \quad \text{et} \quad \sigma_{zy}(h_0) = \tau_{2y} \quad (4.9)$$

De même, l'équilibre dans la direction z lors de l'intégration et de la sommation fournit :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + P_1 - P_2 = 0 \quad (4.10)$$

Où

$$\sigma_z(h_N) = P_1 \quad \text{et} \quad \sigma_z(h_0) = P_2 \quad (4.11)$$

On voit que les équations (4.7), (4.8) et (4.10) sont identiques aux équations pour une plaque en matériau isotrope. La raison en est que les équations d'équilibre sont des équilibres de forces et n'ont rien à voir avec les matériaux composant la plaque.

En plus des équations d'équilibre de forces intégrées ci-dessus, deux équations du moment sont également nécessaires, une pour la direction x et une pour la direction y. En multipliant l'équation 4.4 par zdz , l'intégration à travers chaque couche et la sommation à travers tous les plis aboutit à ce qui suit :

$$\sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} \frac{\partial \sigma_{x_k}}{\partial x} z dz + \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} \frac{\partial \sigma_{yx_k}}{\partial y} z dz + \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} \frac{\partial \sigma_{zx_k}}{\partial z} z dz = 0$$

De nouveau, dans les deux premiers termes, l'intégration et la sommation peuvent être échangées avec la différenciation, comme résultat que les deux premiers termes deviennent

$$\left(\frac{\partial M_x}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right)$$

Cependant, le troisième terme doit être intégré par parties comme suit :

$$\sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} \frac{\partial \sigma_{zx_k}}{\partial z} z dz = \sum_{k=1}^N \left\{ z \sigma_{zx} \Big|_{h_{k-1}}^{h_k} - \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{zx} dz \right\}$$

Ici, le dernier terme est clairement $-Q_x$. À nouveau dans le premier terme à droite, les moments de toutes les contraintes interlaminaire entre plis s'annulent, et les seuls termes non nuls sont les moments des contraintes de cisaillement de surface appliquées, de sorte que le terme devient :

$$h_N \tau_{1x} - h_0 \tau_{2x} = \frac{h}{2} [\tau_{1x} + \tau_{2x}]$$

En utilisant l'expression précédente, l'équation d'équilibre des moments dans la direction x est

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x + \frac{h}{2} [\tau_{1x} + \tau_{2x}] = 0 \quad (4.12)$$

De même, dans la direction y, l'équation d'équilibre des moments est

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y + \frac{h}{2} [\tau_{1y} + \tau_{2y}] = 0 \quad (4.13)$$

Où tous les termes sont définis ci-dessus. Ainsi, il existe cinq équations d'équilibre pour une plaque rectangulaire, quel que soit le matériau utilisé dans la plaque : (4.7), (4.8), (4.10), (4.12) et (4.13).

IV.3. FLEXION DES PLAQUES STRATIFIÉES EN MATÉRIAUX COMPOSITES (THÉORIE CLASSIQUE)

Considérons une plaque stratifiée composée d'un matériau composite qui est symétrique au plan médian, c'est-à-dire $B_{ij} = 0$, et n'a pas d'autres termes de couplage $(.)_{16} = (.)_{26} = 0$. Une telle plaque est appelée une plaque orthotrope. En outre, ne supposons aucune contrainte de cisaillement superficielle et aucun effet hygrothermique pour la simplicité. Les équations d'équilibre des plaques en flexion, dues aux charges latérales données par les équations (4.10), (4.12) et (4.13) deviennent :

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0 \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0 \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + P(x, y) = 0 \quad (4.16)$$

Où $P(x, y) = P_1(x, y) - P_2(x, y)$ Les dérivées de (4.14) et (4.15) peuvent être substituées dans (4.16) :

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -P(x, y) \quad (4.17)$$

A partir de l'équation (3.30 et 3.31) et pour le cas de symétrie de plan moyen $B_{ij} = 0$, et il n'y a pas d'autres termes de couplage $(.)_{16} = (.)_{26} = 0$, les relations constitutives sont :

$$M_x = D_{11} k_x + D_{12} k_y$$

$$M_y = D_{12} k_x + D_{22} k_y \quad (4.18-19-20)$$

$$M_{xy} = D_{66} k_{xy}$$

Il est bien connu que des effets de déformation transversale de cisaillement (c'est-à-dire $\varepsilon_{xz} \neq 0$, $\varepsilon_{yz} \neq 0$) sont importants dans des plaques composées de matériaux composites à matrice polymère pour déterminer les flèches maximales, des fréquences vibratoires naturelles et des charges critiques de flambage. Cependant, il est approprié d'utiliser une analyse de contraintes plus simple impliquant une théorie classique qui néglige la déformation transversale de cisaillement pour la conception préliminaire pour déterminer une "première coupe" pour les contraintes, une séquence d'empilement appropriée et une estimation de l'épaisseur de la plaque requise.

Ainsi, en substituant l'équation (3.20) dans les équations (4.18) à (4.20), on obtient, dans le cas de déformations transversales de cisaillement,

$$\begin{aligned} M_x &= -D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ M_y &= -D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ M_{xy} &= -2D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (4.21-22-23)$$

La substitution de dérivées de ces trois équations à son tour dans l'équation (4.17) donne :

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = P(x, y) \quad (4.24)$$

Les coefficients ci-dessus sont habituellement simplifiés pour :

$$D_{11} = D_1 \quad ; \quad D_{22} = D_2 \quad ; \quad (D_{12} + 2D_{66}) = D_3 \quad (4.25)$$

Avec pour résultat que (4.24) devient

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = P(x, y) \quad (4.26)$$

C'est l'équation différentielle gouvernante pour la flexion d'une plaque composée d'un matériau composite, à l'exclusion de la déformation transversale du cisaillement, sans termes de couplage (C'est-à-dire $B_{ij} = 0$, et $(.)_{16} = (.)_{26} = 0$) et aucun terme hydrothermal ($\Delta T = \Delta m = 0$) soumis à une charge distribuée latérale $p(x, y)$. Parce qu'aucun des 16 ni des 26 termes de couplage ne sont inclus, (4.26) se réfère à une plaque qui est "spécialement orthotrope".

Comme indiqué précédemment, négliger la déformation transversale du cisaillement et les effets hygrothermiques peuvent conduire à des erreurs significatives, mais dans de nombreux cas leur négligence conduit à des solutions plus faciles qui sont utiles dans la conception préliminaire pour "dimensionner" la plaque initialement. Notez également que si la plaque est isotrope, alors dans ce cas $D_{11} = D_{22} = D_1 = D_2 = D_3 = D$

Les solutions de l'équation (4.26) peuvent être obtenues de deux façons : la solution directe de l'équation différentielle gouvernante (4.26), ou utilisation de la solution du principe de l'énergie. Cette dernière offre plus de latitude par l'obtention de solutions approximatives satisfaisantes.

Les solutions directes des équations différentielles régissant les plaques de matériaux composites se répartissent en trois catégories : les solutions Navier, les solutions Levy et les solutions de perturbation. Chacune a ses avantages et désavantages. Toutefois, avant cela, les conditions aux limites doivent être discutées.

IV.4. CONDITIONS DES LIMITES DE LA THÉORIE DES PLAQUES CLASSIQUES

Dans la théorie des plaques orthotropes classiques (c'est-à-dire ignorant la déformation transversale), on peut satisfaire à deux et seulement deux conditions aux limites à chaque bord de la plaque car l'équation différentielle gouvernante (4.26) est du quatrième ordre en x et du quatrième ordre en y . Les conditions aux limites d'un bord simplement supporté et d'un bord encasté sont identiques à celles de la théorie des poutres classique, où n est la direction normale au bord de la plaque et t est la direction parallèle ou tangente au bord.

Les conditions aux limites pour le matériau composite, la plaque anisotrope sont identiques aux bords simplement supportés, encastés et libres pour une plaque isotrope.

IV.5. SOLUTIONS DE NAVIER POUR LES PLAQUES RECTANGULAIRES EN COMPOSITE

Comme on l'a vu plus haut pour les plaques isotropes, on peut utiliser l'approche de Navier. Cette approche pour des plaques spécialement orthotropes implique des solutions séparables, comme montré ci-dessous, de l'équation différentielle gouvernante de la plaque montrée dans l'équation (4.26). Ainsi

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \bar{X}_m(x) \bar{Y}_n(y) \quad (4.27)$$

$$P(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \bar{X}_m(x) \bar{Y}_n(y)$$

Dans ce qui précède, les fonctions $\bar{X}_m(x)$ et $\bar{Y}_n(y)$ sont un ensemble de fonctions uniformément convergentes, complètes et orthogonales qui satisfont aux conditions aux limites. Ainsi, lorsque la sommation complète est prise, on obtient la solution exacte. D'un point de vue pratique, à cause d'une convergence uniforme, un nombre fini de termes est suffisant pour fournir une précision quelconque.

Si l'on suppose une plaque qui est simplement supportée sur les quatre arêtes, alors l'équation (4.27) peut être écrite comme

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (4.28 - 29)$$

$$P(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

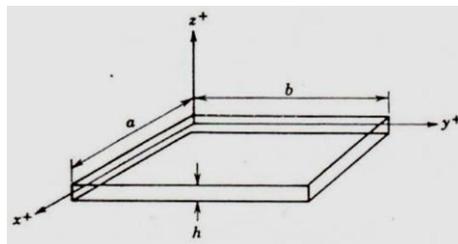


Figure (IV.3) : plaque rectangulaire.

Ces demi-gamme de séries sinusoïdales (le problème original de Navier) satisfont aux conditions aux limites simplement supportées sur les quatre bords de la plaque illustrée à la figure (IV.3).

Si la plaque a d'autres conditions aux limites, alors d'autres fonctions doivent être utilisées pour $\bar{X}_m(x)$ et $\bar{Y}_n(y)$, auquel cas l'approche s'appelle l'approche Navier généralisée.

Pour procéder il faut d'abord déterminer B_{mn} dans l'équation (4.29) pour décrire la charge $p(x, y)$, qu'elle soit continue ou discontinue. On multiplie simplement les deux côtés de gauche et de droite de l'équation (4.29) par $\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)dx dy$ et on intègre les deux côtés de 0 à a dans la direction x et de 0 à b dans la direction y , c'est-à-dire sur la zone plan de la plaque. Il faut se rappeler que

$$\int_0^a \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)dx = \begin{cases} a/2 & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases} \quad (4.30)$$

Donc

$$B_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b P(x, y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)dy dx \quad (4.31)$$

Par exemple si $p(x, y) = P_0 =$ une constante, une charge courante se produit,

$$B_{mn} = \frac{4P_0}{mn\pi^2} \left[1 - (-1)^m\right] \left[1 - (-1)^n\right] \quad (4.32)$$

Maintenant ce qui précède peut-être utilisé pour une plaque isotrope ou orthotrope, une théorie classique ou une théorie avancée (y compris une déformation transversale par cisaillement) et une plaque stratifiée ou à couche unique. Considérant un panneau composite orthotrope, utilisant la théorie classique de la plaque, simplement supportée sur les quatre bords, l'équation (4.26) est utilisée.

En substituant simplement les équations (4.28) et (4.29) dans l'équation (4.26), l'égalité exige que chaque terme soit égalé, donc :

$$A_{mn} = \frac{B_{mn}}{D_1 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 + 2D_3 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + D_2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4} \quad (4.33)$$

Où les quantités de rigidité en flexion D_1 , D_2 et D_3 sont définies par les équations (4.25), pour un panneau composite stratifié. Pour le cas isotrope dans lequel $E_{11} = E_{22} = 2G/(1+\nu)$, les équations (4.25) deviennent $D_1 = D_2 = D$.

Après avoir obtenu la solution pour $w(x, y)$ en utilisant les équations (4.28), (4.29) (4.30) et (4.33), on peut calculer l'amplitude et l'emplacement de la flèche maximale. En prenant la dérivée de $w(x, y)$ et en utilisant les équations (4.21) à (4.23), les moments M_x , M_y et M_{xy} sont déterminés pour trouver les valeurs maximales et leur localisation. Enfin, selon que le panneau est un stratifié ou une couche unique, les contraintes maximales sont déterminées en calculant les courbures aux emplacements des moments maximaux, en utilisant :

$$k_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} ; \quad k_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \text{et} \quad k_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

En sachant cela, on peut calculer les contraintes dans chacun des plis k par l'utilisation de (4.2) où dans ce cas d'une charge latérale seulement, il n'y a pas de réponse dans le plan, c'est-à-dire ε_{x0} , ε_{y0} et ε_{xy0} sont nulles et il n'y a pas d'effets thermiques ou d'humidité :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ 2k_{xy} \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

Le nombre de termes nécessaires pour atteindre une précision souhaitée dépend de la charge particulière $p(x, y)$, le rapport d'aspect de la plaque b/a , et le système matériel dont plaque est fabriquée.

IV.6 SOLUTION NAVIER POUR UNE PLAQUE SUPPORTÉE DE FAÇON UNIFORME UN EXEMPLE DE PROBLÈME

Le cas d'une plaque simplement appuyée, chargée uniformément $p(x, y) = -p_0$ est résolu à l'aide de la solution en séries de Navier de la section 4.5 pour deux systèmes de matériaux composites : unidirectionnels et transversaux, les contraintes σ_x , σ_y , et σ_{xy} sont déterminées pour chaque cas aux quart et au milieu des points du plan. En outre, dans cet exemple, les solutions ont été examinées en utilisant un, trois et cinq termes dans la solution de la série Navier.

Dans cette analyse, il est naturellement supposé que tous les plis sont parfaitement liés et la théorie classique est utilisée (c'est-à-dire ε_{xz} et ε_{yz} , sont supposés nulles). Il en résulte que les contraintes planes, σ_x , σ_y , et σ_{xy} sont déterminées directement, alors que les contraintes transversales de cisaillement σ_{xz} et σ_{yz} sont déterminées ultérieurement.

En utilisant les procédés discutés précédemment, on constate que les contraintes dans chaque pli pour le cas de $p(x, y) = -p_0$ sont donnés par:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}_k = + \frac{16P_0 z}{\pi^4} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{mnD} \begin{bmatrix} \left[-\bar{Q}_{11}^k \left(\frac{m}{a} \right)^2 - \bar{Q}_{12}^k \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ \left[-\bar{Q}_{12}^k \left(\frac{m}{a} \right)^2 - \bar{Q}_{22}^k \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ 2\bar{Q}_{66}^k \left(\frac{m}{a} \right) \left(\frac{n}{b} \right) \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

Où

$$D = D_1 \left(\frac{m}{a} \right)^4 + 2D_3 \left(\frac{mn}{ab} \right)^2 + D_2 \left(\frac{n}{b} \right)^4$$

CHAPITRE V

VALIDATION

V.1. INTRODUCTION

Dans le chapitre 4 et à partir les équations (3.1) , (3.3) ,(3.11) , (3.12) , (3.32) , (4.25) et (4.35) on détermine la variation des contraintes dans un stratifié.

Pour simplifier le calcul, on utilise la contrainte normalisée

$$\sigma_{ij \text{ normalisée}} = \sigma_{ij} / P_0$$

avec : P_0 = chargement de la plaque

V.2. LE MATERIAU UTILISÉ

On considère comme exemple numérique une plaque carrée de $a = b = 30.5$ cm. L'épaisseur de la plaque laminée est de 0.2 cm, huit épaisseurs de 0,025 cm ($h_k = 0,025$ cm).

Le premier système de matériau considéré est E verre / époxy, avec un volume de fibres Fraction V_f 70%, avec les propriétés suivantes :

$E_{11} = 60.67$ GPa ; $E_{22} = 24.82$ GPa ; $G_{12} = 12$ GPa ; $\nu_{12} = 0.23$.

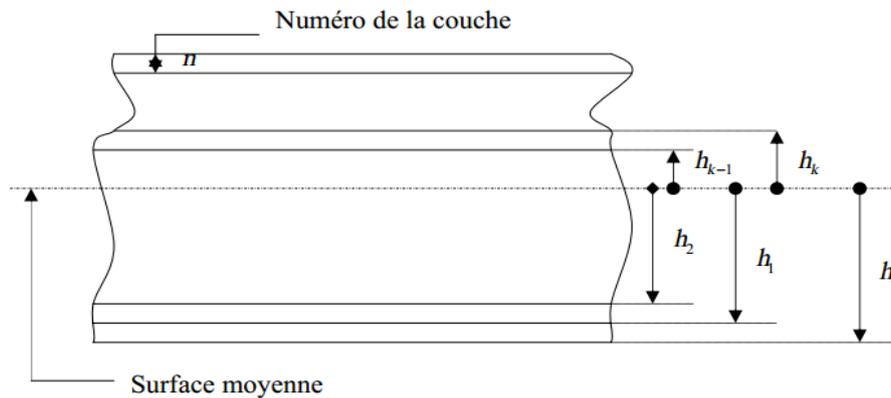


Figure (V.1) : Géométrie de stratifié utilisé.

V.3. LE CALCULE

V.3.1. Les matrices de rigidité

$$Q = 10^{10} \begin{pmatrix} 6.4059 & 0.6027 & 0 \\ 0.6027 & 2.6206 & 0 \\ 0 & 0 & 1.2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{Q}_{\theta=0^\circ} = 10^{10} \begin{pmatrix} 6.4059 & 1.2 & 0 \\ 1.2 & 2.6206 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6027 \end{pmatrix}$$

$$\bar{Q}_{\theta=90^\circ} = 10^{10} \begin{pmatrix} 2.6206 & -1.2 & 0 \\ -1.2 & 6.4059 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6027 \end{pmatrix}$$

V.3.2. Représentation des contraintes normalisées au centre de la plaque ($X=a/2$, $Y=b/2$) pour un stratifié unidirectionnel ($\theta=0^\circ$)

a) pour les valeurs de $n = 1$ et $m = 1, 3, 5$

Les plis		Sigma X (* 10^4m^{-2})	Sigma Y (* 10^4m^{-2})	Sigma XY (* 10^4m^{-2})
Le 1 ^{er} pli	Z=4h _k	-1.2191	-0.5779	0
	Z=3h _k	-0.9143	-0.4334	0
Le 2 ^{ème} pli	Z=3h _k	-0.9143	-0.4334	0
	Z=2h _k	-0.6095	-0.2889	0
Le 3 ^{ème} pli	Z=2h _k	-0.6095	-0.2889	0
	Z=h _k	-0.3048	-0.1445	0
Le 4 ^{ème} pli	Z=h _k	-0.3048	-0.1445	0
	Z=0	0	0	0
Le 5 ^{ème} pli	Z=0	0	0	0
	Z=-h _k	0.3048	0.1445	0
Le 6 ^{ème} pli	Z=-h _k	0.3048	0.1445	0
	Z=-2h _k	0.6095	0.2889	0
Le 7 ^{ème} pli	Z=-2h _k	0.6095	0.2889	0
	Z=-3h _k	0.9143	0.4334	0
Le 8 ^{ème} pli	Z=-3h _k	0.9143	0.4334	0
	Z=-4h _k	1.2191	0.5779	0

Tableau (V.1) : Les contraintes normalisées pour n=1 dans un stratifié unidirectionnel

b) pour les valeurs de $n = 1, 3$ et $m = 1, 3, 5$

Les plis		Sigma X (* 10^4m^{-2})	Sigma Y (* 10^4m^{-2})	Sigma XY (* 10^4m^{-2})
Le 1 ^{er} pli	Z=4h _k	-1.1509	-0.5639	0
	Z=3h _k	-0.8632	-0.4230	0
Le 2 ^{ème} pli	Z=3h _k	-0.8632	-0.4230	0
	Z=2h _k	-0.5754	-0.2820	0
Le 3 ^{ème} pli	Z=2h _k	-0.5754	-0.2820	0
	Z=h _k	-0.2877	-0.1410	0
Le 4 ^{ème} pli	Z=h _k	-0.2877	-0.1410	0
	Z=0	0	0	0
Le 5 ^{ème} pli	Z=0	0	0	0
	Z=-h _k	0.2877	0.1410	0
Le 6 ^{ème} pli	Z=-h _k	0.2877	0.1410	0
	Z=-2h _k	0.5754	0.2820	0
Le 7 ^{ème} pli	Z=-2h _k	0.5754	0.2820	0
	Z=-3h _k	0.8632	0.4230	0
Le 8 ^{ème} pli	Z=-3h _k	0.8632	0.4230	0
	Z=-4h _k	1.1509	0.5639	0

Tableau (V.2) : Les contraintes normalisées pour n=1,3 dans un stratifié unidirectionnel

c) pour les valeurs de $n = 1, 3, 5$ et $m = 1, 3, 5$

Les plis		Sigma X (*10 ⁴ m ⁻²)	Sigma Y (*10 ⁴ m ⁻²)	Sigma XY (*10 ⁴ m ⁻²)
Le 1 ^{er} pli	Z=4h _k	-1.1659	-0.5670	0
	Z=3h _k	-0.8744	-0.4253	0
Le 2 ^{ème} pli	Z=3h _k	-0.8744	-0.4253	0
	Z=2h _k	-0.5830	-0.2835	0
Le 3 ^{ème} pli	Z=2h _k	-0.5830	-0.2835	0
	Z=h _k	-0.2915	-0.1418	0
Le 4 ^{ème} pli	Z=h _k	-0.2915	-0.1418	0
	Z=0	0	0	0
Le 5 ^{ème} pli	Z=0	0	0	0
	Z=-h _k	0.2915	0.1418	0
Le 6 ^{ème} pli	Z=-h _k	0.2915	0.1418	0
	Z=-2h _k	0.5830	0.2835	0
Le 7 ^{ème} pli	Z=-2h _k	0.5830	0.2835	0
	Z=-3h _k	0.8744	0.4253	0
Le 8 ^{ème} pli	Z=-3h _k	0.8744	0.4253	0
	Z=-4h _k	1.1659	0.5670	0

Tableau (V.3) : Les contraintes normalisées pour n=1,3,5 dans un stratifié unidirectionnel

d) Résumé

Les plis		Sigma X (*10 ⁴ m ⁻²)			Sigma Y (*10 ⁴ m ⁻²)			Sigma XY (*10 ⁴ m ⁻²)		
		n=1	n=1,3	n=1,3,5	n=1	n=1,3	n=1,3,5	n=1	n=1,3	n=1,3,5
Le 1 ^{er} pli	Z=4h _k	-1.2191	-1.1509	-1.1659	-0.5779	-0.5639	-0.5670	0	0	0
	Z=3h _k	-0.9143	-0.8632	-0.8744	-0.4334	-0.4230	-0.4253	0	0	0
Le 2 ^{ème} pli	Z=3h _k	-0.9143	-0.8632	-0.8744	-0.4334	-0.4230	-0.4253	0	0	0
	Z=2h _k	-0.6095	-0.5754	-0.5830	-0.2889	-0.2820	-0.2835	0	0	0
Le 3 ^{ème} pli	Z=2h _k	-0.6095	-0.5754	-0.5830	-0.2889	-0.2820	-0.2835	0	0	0
	Z=h _k	-0.3048	-0.2877	-0.2915	-0.1445	-0.1410	-0.1418	0	0	0
Le 4 ^{ème} pli	Z=h _k	-0.3048	-0.2877	-0.2915	-0.1445	-0.1410	-0.1418	0	0	0
	Z=0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Le 5 ^{ème} pli	Z=0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Z=-h _k	0.3048	0.2877	0.2915	0.1445	0.1410	0.1418	0	0	0
Le 6 ^{ème} pli	Z=-h _k	0.3048	0.2877	0.2915	0.1445	0.1410	0.1418	0	0	0
	Z=-2h _k	0.6095	0.5754	0.5830	0.2889	0.2820	0.2835	0	0	0
Le 7 ^{ème} pli	Z=-2h _k	0.6095	0.5754	0.5830	0.2889	0.2820	0.2835	0	0	0
	Z=-3h _k	0.9143	0.8632	0.8744	0.4334	0.4230	0.4253	0	0	0
Le 8 ^{ème} pli	Z=-3h _k	0.9143	0.8632	0.8744	0.4334	0.4230	0.4253	0	0	0
	Z=-4h _k	1.2191	1.1509	1.1659	0.5779	0.5639	0.5670	0	0	0

Tableau (V.4) : Les contraintes normalisées pour un stratifié unidirectionnel

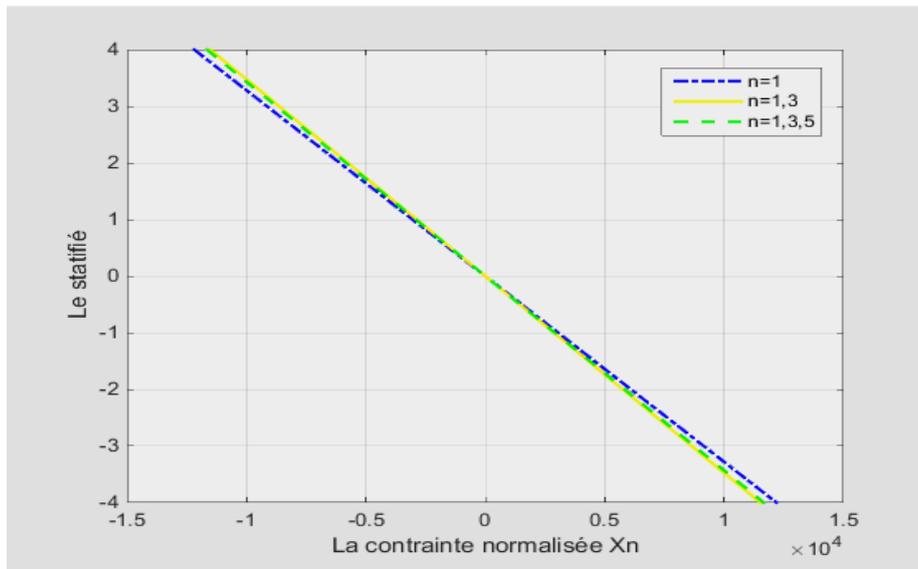


Figure (V.1) : La variation du contrainte normalisée σ_{x_n} pour différentes valeurs de n

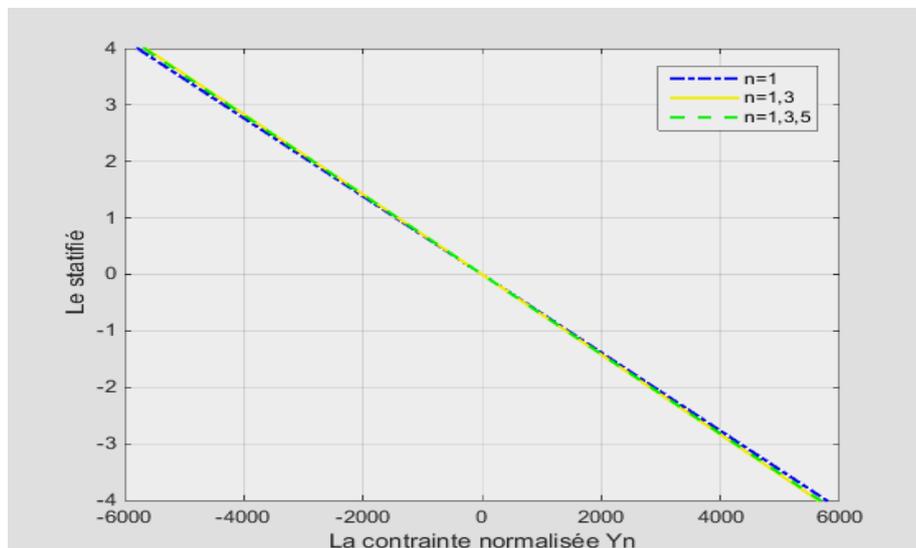


Figure (V.2) : La variation du contrainte normalisée σ_{y_n} pour différentes valeurs de n

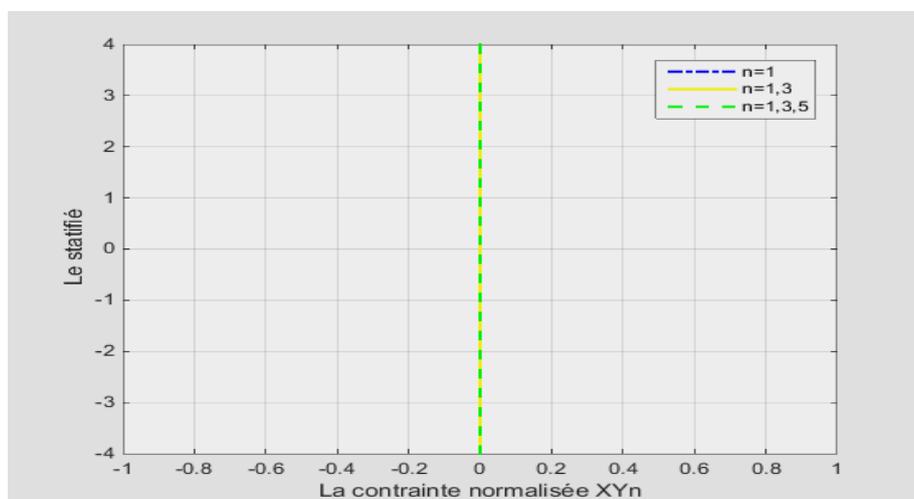


Figure (V.3) : La variation du contrainte normalisée τ_{xy_n} pour différentes valeurs de n

e) Interprétation

Dans les figures précédents, les contraintes ont été normalisées comme $\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}/p_0$.

Dans la figure (V.1, 2 et 3) les contraintes normalisées sont indiquées au point médian de la plaque ($x = a / 2, y = b / 2$) pour un stratifié unidirectionnel ($\theta = 0^\circ$). Dans ce cas, les contraintes sont proportionnelles à la distance par rapport au plan médian de la plaque.

V.3.3. Représenter les contraintes normalisées au centre de la plaque (X=a/2 , Y=b/2) pour composite à couches croisées [(0, 90)₂]

a) pour les valeurs de n = 1 et m = 1, 3, 5

Les plis		Sigma X (*10 ⁴ m ⁻²)	Sigma Y (*10 ⁴ m ⁻²)	Sigma XY (*10 ⁴ m ⁻²)
Le 1 ^{er} pli	Z=4h _k	-1.2191	-0.5779	0
	Z=3h _k	-0.9143	-0.4334	0
Le 2 ^{ème} pli	Z=3h _k	-0.2768	-0.9418	0
	Z=2h _k	-0.1846	-0.6279	0
Le 3 ^{ème} pli	Z=2h _k	-0.6095	-0.2889	0
	Z=h _k	-0.3048	-0.1445	0
Le 4 ^{ème} pli	Z=h _k	-0.0923	-0.3139	0
	Z=0	0	0	0
Le 5 ^{ème} pli	Z=0	0	0	0
	Z=-h _k	0.3048	0.1445	0
Le 6 ^{ème} pli	Z=-h _k	0.0923	0.3139	0
	Z=-2h _k	0.1846	0.6279	0
Le 7 ^{ème} pli	Z=-2h _k	0.6095	0.2889	0
	Z=-3h _k	0.9143	0.4334	0
Le 8 ^{ème} pli	Z=-3h _k	0.2768	0.9418	0
	Z=-4h _k	0.3691	1.2558	0

Tableau (V.5) : Les contraintes normalisées pour n=1 au centre de la plaque pour composite à couches croisées

b) pour les valeurs de n = 1, 3 et m = 1, 3, 5

Les plis		Sigma X (*10 ⁴ m ⁻²)	Sigma Y (*10 ⁴ m ⁻²)	Sigma XY (*10 ⁴ m ⁻²)
Le 1 ^{er} pli	Z=4h _k	-1.1509	-0.5639	0
	Z=3h _k	-0.8632	-0.4230	0
Le 2 ^{ème} pli	Z=3h _k	-0.2217	-0.9615	0
	Z=2h _k	-0.1478	-0.6410	0
Le 3 ^{ème} pli	Z=2h _k	-0.5754	-0.2820	0
	Z=h _k	-0.2877	-0.1410	0
Le 4 ^{ème} pli	Z=h _k	-0.0739	-0.3205	0
	Z=0	0	0	0
Le 5 ^{ème} pli	Z=0	0	0	0
	Z=-h _k	0.2877	0.1410	0
Le 6 ^{ème} pli	Z=-h _k	0.0739	0.3205	0
	Z=-2h _k	0.1478	0.6410	0
Le 7 ^{ème} pli	Z=-2h _k	0.5754	0.2820	0
	Z=-3h _k	0.8632	0.4230	0
Le 8 ^{ème} pli	Z=-3h _k	0.2217	0.9615	0
	Z=-4h _k	0.2956	1.2820	0

Tableau (V.6) : Les contraintes normalisées pour n=1,3 au centre de la plaque pour composite à couches croisées

c) pour les valeurs de $n = 1, 3, 5$ et $m = 1, 3, 5$

Les plis		Sigma X (*10 ⁴ m ⁻²)	Sigma Y (*10 ⁴ m ⁻²)	Sigma XY (*10 ⁴ m ⁻²)
Le 1 ^{er} pli	Z=4h _k	-1.1659	-0.5670	0
	Z=3h _k	-0.8744	-0.4253	0
Le 2 ^{ème} pli	Z=3h _k	-0.2327	-0.9567	0
	Z=2h _k	-0.1551	-0.6378	0
Le 3 ^{ème} pli	Z=2h _k	-0.5830	-0.2835	0
	Z=h _k	-0.2915	-0.1418	0
Le 4 ^{ème} pli	Z=h _k	-0.0776	-0.3189	0
	Z=0	0	0	0
Le 5 ^{ème} pli	Z=0	0	0	0
	Z=-h _k	0.2915	0.1418	0
Le 6 ^{ème} pli	Z=-h _k	0.0776	0.3189	0
	Z=-2h _k	0.1551	0.6378	0
Le 7 ^{ème} pli	Z=-2h _k	0.5830	0.2835	0
	Z=-3h _k	0.8744	0.4253	0
Le 8 ^{ème} pli	Z=-3h _k	0.2327	0.9567	0
	Z=-4h _k	0.3103	1.2756	0

Tableau (V.7) : Les contraintes normalisées pour n=1,3,5 au centre de la plaque pour composite à couches croisées

d) Résumé

Les plis		Sigma X (*10 ⁴ m ⁻²)			Sigma Y (*10 ⁴ m ⁻²)			Sigma XY (*10 ⁴ m ⁻²)		
		n=1	n=1,3	n=1,3,5	n=1	n=1,3	n=1,3,5	n=1	n=1,3	n=1,3,5
Le 1 ^{er} pli	Z=4h _k	-1.2191	-1.1509	-1.1659	-0.5779	-0.5639	-0.5670	0	0	0
	Z=3h _k	-0.9143	-0.8632	-0.8744	-0.4334	-0.4230	-0.4253	0	0	0
Le 2 ^{ème} pli	Z=3h _k	-0.2768	-0.2217	-0.2327	-0.9418	-0.9615	-0.9567	0	0	0
	Z=2h _k	-0.1846	-0.1478	-0.1551	-0.6279	-0.6410	-0.6378	0	0	0
Le 3 ^{ème} pli	Z=2h _k	-0.6095	-0.5754	-0.5830	-0.2889	-0.2820	-0.2835	0	0	0
	Z=h _k	-0.3048	-0.2877	-0.2915	-0.1445	-0.1410	-0.1418	0	0	0
Le 4 ^{ème} pli	Z=h _k	-0.0923	-0.0739	-0.0776	-0.3139	-0.3205	-0.3189	0	0	0
	Z=0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Le 5 ^{ème} pli	Z=0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Z=-h _k	0.3048	0.2877	0.2915	0.1445	0.1410	0.1418	0	0	0
Le 6 ^{ème} pli	Z=-h _k	0.0923	0.0739	0.0776	0.3139	0.3205	0.3189	0	0	0
	Z=-2h _k	0.1846	0.1478	0.1551	0.6279	0.6410	0.6378	0	0	0
Le 7 ^{ème} pli	Z=-2h _k	0.6095	0.5754	0.5830	0.2889	0.2820	0.2835	0	0	0
	Z=-3h _k	0.9143	0.8632	0.8744	0.4334	0.4230	0.4253	0	0	0
Le 8 ^{ème} pli	Z=-3h _k	0.2768	0.2217	0.2327	0.9418	0.9615	0.9567	0	0	0
	Z=-4h _k	0.3691	0.2956	0.3103	1.2558	1.2820	1.2756	0	0	0

Tableau (V.8) : Les contraintes normalisées au centre de la plaque pour composite à couches croisées

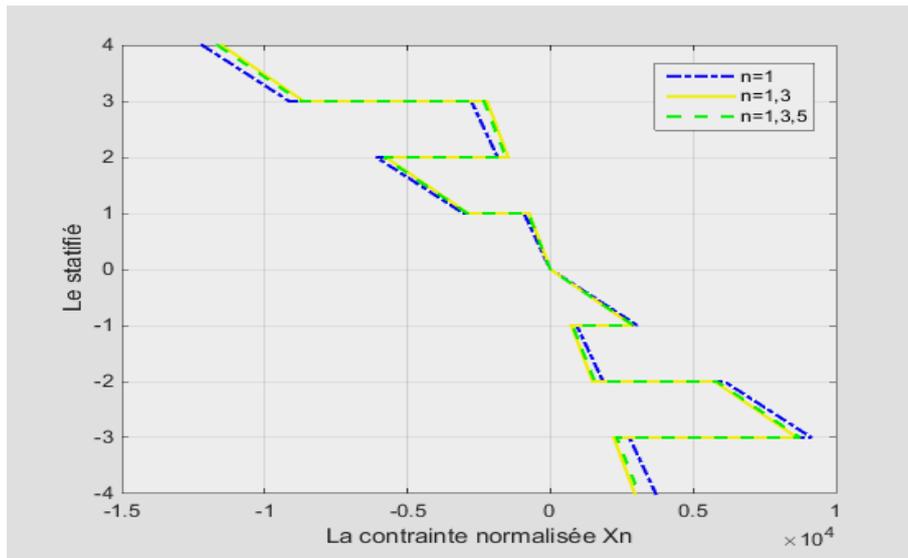


Figure (V.4) : La variation du contrainte normalisée σ_{x_n} pour différentes valeurs de n

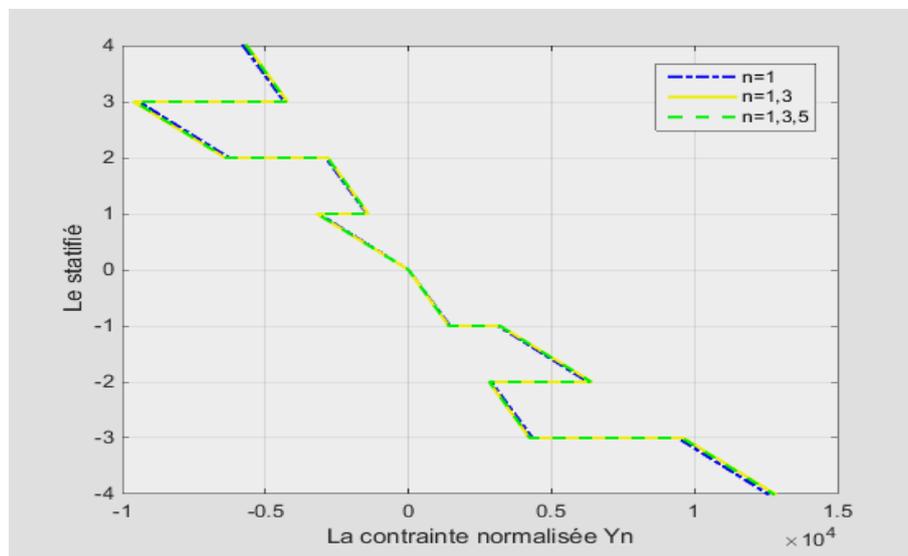


Figure (V.5) : La variation du contrainte normalisée σ_{y_n} pour différentes valeurs de n

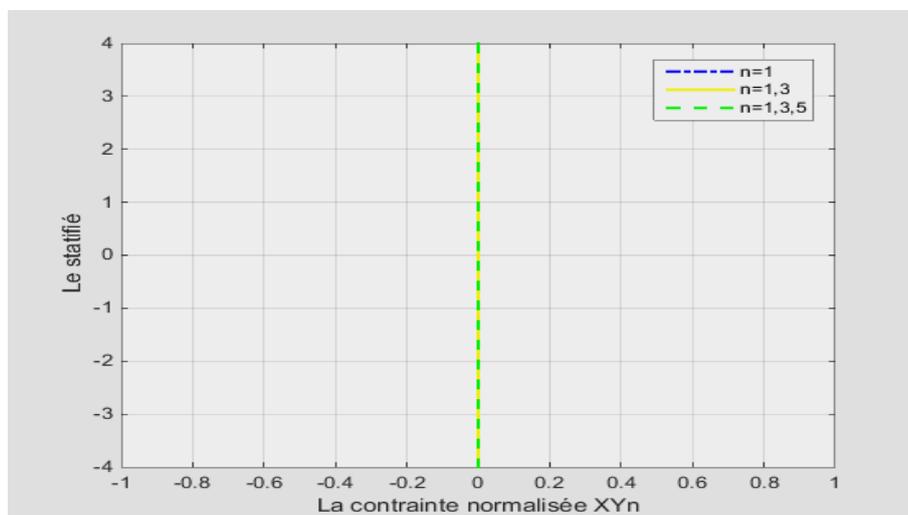


Figure (V.6) : La variation du contrainte normalisée τ_{xy_n} pour différentes valeurs de n

e) **Interprétation**

Sur la figure (V.4, 5 et 6) les contraintes normalisées au point médian de la plaque sont représentées pour un stratifié de couches transversales symétriques à plan médian. Ici, parce que les plis alternent entre 0° et 90° , les contraintes sont discontinues du pli à la couche, et dans chaque pli, les contraintes sont plus grandes dans le sens de la fibre que dans la direction 90° .

V.3.4. Représenter les contraintes normalisées au quart de la plaque ($X=a/4$, $Y=b/4$) pour composite à couches croisées [(0, 90)₂]

a) pour les valeurs de $n = 1$ et $m = 1, 3, 5$

Les plis		Sigma X (*10 ³ m ⁻²)	Sigma Y (*10 ³ m ⁻²)	Sigma XY (*10 ³ m ⁻²)
Le 1 ^{er} pli	Z=4h _k	-6.5026	-3.4389	0.9378
	Z=3h _k	-4.8770	-2.5792	0.7033
Le 2 ^{ème} pli	Z=3h _k	-1.3179	-5.1928	1.1240
	Z=2h _k	-0.8786	-3.4619	0.7493
Le 3 ^{ème} pli	Z=2h _k	-3.2513	-1.7195	0.4689
	Z=h _k	-1.6257	-0.8597	0.2344
Le 4 ^{ème} pli	Z=h _k	-0.4393	-1.7309	0.3747
	Z=0	0	0	0
Le 5 ^{ème} pli	Z=0	0	0	0
	Z=-h _k	1.6257	0.8597	-0.2344
Le 6 ^{ème} pli	Z=-h _k	0.4393	1.7309	-0.3747
	Z=-2h _k	0.8786	3.4619	-0.7493
Le 7 ^{ème} pli	Z=-2h _k	3.2513	1.7195	-0.4689
	Z=-3h _k	4.8770	2.5792	-0.7033
Le 8 ^{ème} pli	Z=-3h _k	1.3179	5.1928	-1.1240
	Z=-4h _k	1.7572	6.9238	-1.4987

Tableau (V.9) : Les contraintes normalisées pour n=1 au quart de la plaque pour composite à couches croisées

b) pour les valeurs de $n = 1, 3$ et $m = 1, 3, 5$

Les plis		Sigma X (*10 ³ m ⁻²)	Sigma Y (*10 ³ m ⁻²)	Sigma XY (*10 ³ m ⁻²)
Le 1 ^{er} pli	Z=4h _k	-6.9578	-3.5508	0.9299
	Z=3h _k	-5.2183	-2.6631	0.6974
Le 2 ^{ème} pli	Z=3h _k	-1.6286	-5.1761	1.0933
	Z=2h _k	-1.0857	-3.4508	0.7288
Le 3 ^{ème} pli	Z=2h _k	-3.4789	-1.7754	0.4650
	Z=h _k	-1.7394	-0.8877	0.2325
Le 4 ^{ème} pli	Z=h _k	-0.5429	-1.7254	0.3644
	Z=0	0	0	0
Le 5 ^{ème} pli	Z=0	0	0	0
	Z=-h _k	1.7394	0.8877	-0.2325
Le 6 ^{ème} pli	Z=-h _k	0.5429	1.7254	-0.3644
	Z=-2h _k	1.0857	3.4508	-0.7288
Le 7 ^{ème} pli	Z=-2h _k	3.4789	1.7754	-0.4650
	Z=-3h _k	5.2183	2.6631	-0.6974
Le 8 ^{ème} pli	Z=-3h _k	1.6286	5.1761	-1.0933
	Z=-4h _k	2.1715	6.9015	-1.4577

Tableau (V.10) : Les contraintes normalisées pour n=1,3 au quart de la plaque pour composite à couches croisées

c) pour les valeurs de $n = 1, 3, 5$ et $m = 1, 3, 5$

Les plis		Sigma X (*10 ³ m ⁻²)	Sigma Y (*10 ³ m ⁻²)	Sigma XY (*10 ³ m ⁻²)
Le 1 ^{er} pli	Z=4h _k	-6.8536	-3.5300	0.9308
	Z=3h _k	-5.1402	-2.6475	0.6981
Le 2 ^{ème} pli	Z=3h _k	-1.5490	-5.2014	1.0936
	Z=2h _k	-1.0327	-3.4676	0.7291
Le 3 ^{ème} pli	Z=2h _k	-3.4268	-1.7650	0.4654
	Z=h _k	-1.7134	-0.8825	0.2327
Le 4 ^{ème} pli	Z=h _k	-0.5163	-1.7338	0.3645
	Z=0	0	0	0
Le 5 ^{ème} pli	Z=0	0	0	0
	Z=-h _k	1.7134	0.8825	-0.2327
Le 6 ^{ème} pli	Z=-h _k	0.5163	1.7338	-0.3645
	Z=-2h _k	1.0327	3.4676	-0.7291
Le 7 ^{ème} pli	Z=-2h _k	3.4268	1.7650	-0.4654
	Z=-3h _k	5.1402	2.6475	-0.6981
Le 8 ^{ème} pli	Z=-3h _k	1.5490	5.2014	-1.0936
	Z=-4h _k	2.0653	6.9352	-1.4581

Tableau (V.11) : Les contraintes normalisées pour $n=1,3,5$ au quart de la plaque pour composite à couches croisées

d) Résumé

Les plis		Sigma X (*10 ³ m ⁻²)			Sigma Y (*10 ³ m ⁻²)			Sigma XY (*10 ³ m ⁻²)		
		n=1	n=1,3	n=1,3,5	n=1	n=1,3	n=1,3,5	n=1	n=1,3	n=1,3,5
Le 1 ^{er} pli	Z=4h _k	-6.5026	-6.9578	-6.8536	-3.4389	-3.5508	-3.5300	0.9378	0.9299	0.9308
	Z=3h _k	-4.8770	-5.2183	-5.1402	-2.5792	-2.6631	-2.6475	0.7033	0.6974	0.6981
Le 2 ^{ème} pli	Z=3h _k	-1.3179	-1.6286	-1.5490	-5.1928	-5.1761	-5.2014	1.1240	1.0933	1.0936
	Z=2h _k	-0.8786	-1.0857	-1.0327	-3.4619	-3.4508	-3.4676	0.7493	0.7288	0.7291
Le 3 ^{ème} pli	Z=2h _k	-3.2513	-3.4789	-3.4268	-1.7195	-1.7754	-1.7650	0.4689	0.4650	0.4654
	Z=h _k	-1.6257	-1.7394	-1.7134	-0.8597	-0.8877	-0.8825	0.2344	0.2325	0.2327
Le 4 ^{ème} pli	Z=h _k	-0.4393	-0.5429	-0.5163	-1.7309	-1.7254	-1.7338	0.3747	0.3644	0.3645
	Z=0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Le 5 ^{ème} pli	Z=0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Z=-h _k	1.6257	1.7394	1.7134	0.8597	0.8877	0.8825	-0.2344	-0.2325	-0.2327
Le 6 ^{ème} pli	Z=-h _k	0.4393	0.5429	0.5163	1.7309	1.7254	1.7338	-0.3747	-0.3644	-0.3645
	Z=-2h _k	0.8786	1.0857	1.0327	3.4619	3.4508	3.4676	-0.7493	-0.7288	-0.7291
Le 7 ^{ème} pli	Z=-2h _k	3.2513	3.4789	3.4268	1.7195	1.7754	1.7650	-0.4689	-0.4650	-0.4654
	Z=-3h _k	4.8770	5.2183	5.1402	2.5792	2.6631	2.6475	-0.7033	-0.6974	-0.6981
Le 8 ^{ème} pli	Z=-3h _k	1.3179	1.6286	1.5490	5.1928	5.1761	5.2014	-1.1240	-1.0933	-1.0936
	Z=-4h _k	1.7572	2.1715	2.0653	6.9238	6.9015	6.9352	-1.4987	-1.4577	-1.4581

Tableau (V.12) : Les contraintes normalisées au quart de la plaque pour composite à couches croisées

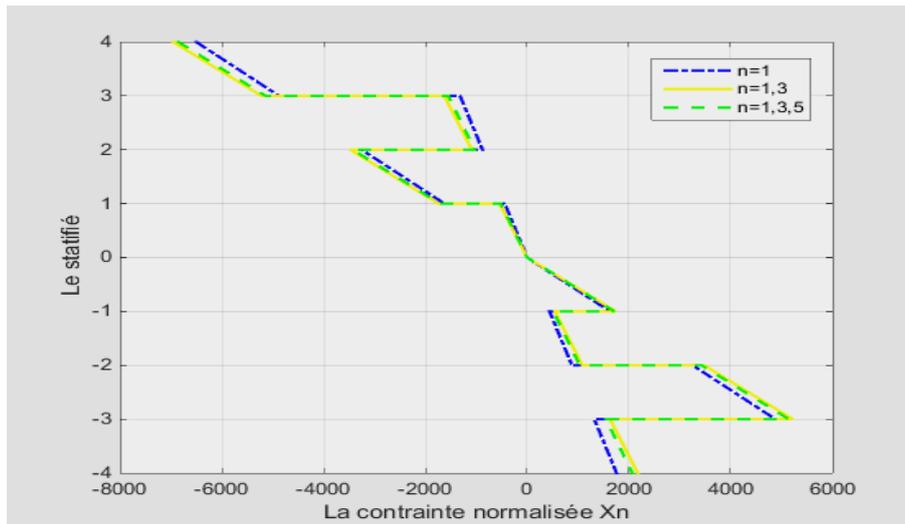


Figure (V.7) : La variation du contrainte normalisée σ_{x_n} pour différentes valeurs de n

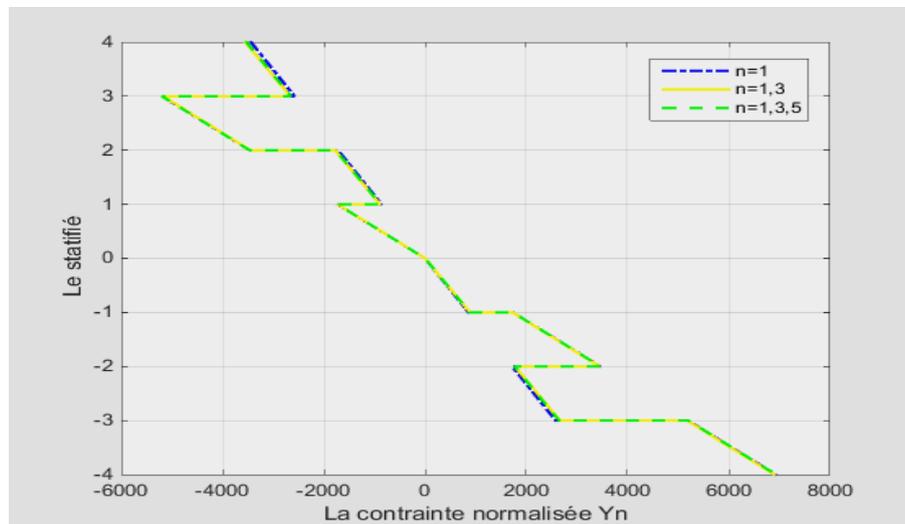


Figure (V.8) : La variation du contrainte normalisée σ_{y_n} pour différentes valeurs de n

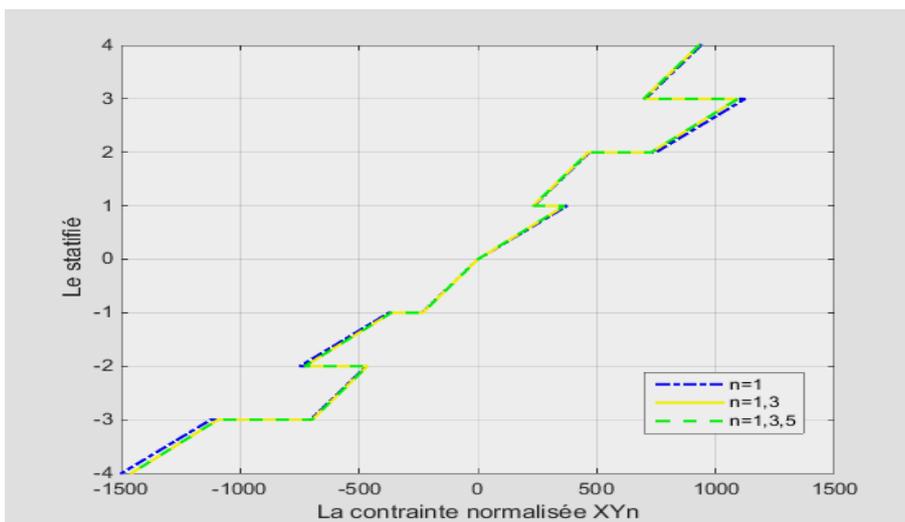


Figure (V.9) : La variation du contrainte normalisée τ_{xy_n} pour différentes valeurs de n

e) Interpretation

Sur la figure (V.7, 8 et 9), ces contraintes sont indiquées à l'emplacement du quart de point pour la plaque transversale. En raison de la symétrie, au niveau des plaques, les contraintes de cisaillement dans le plan sont nulles, tandis qu'au quart de point existe un σ_{xy} non nulle, comme le montre la figure (V.7, 8 et 9).

V.4. CONCLUSION

Certaines conclusions peuvent être tirées de cet ensemble d'exemples.

1. La convergence de la solution est rapide dans le cadre de la prise de trois termes pour m et n pour évaluer $\bar{\sigma}_x$, mais n'est pas aussi rapide dans le calcul de $\bar{\sigma}_y$.
2. Pour le même matériau, il existe peu de différence entre la valeur maximale de la contrainte $\bar{\sigma}_x$ pour les composites unidirectionnels et les couches transversales à des emplacements de plaques similaires, mais les contraintes $\bar{\sigma}_y$ diffèrent considérablement.
3. La contrainte $\bar{\sigma}_y$ à un emplacement fixe pour le stratifié graphite / époxy est beaucoup plus petit par rapport à la valeur $\bar{\sigma}_x$ (10%) par rapport à E celui du stratifié verre / Epoxy $\bar{\sigma}_y$ représente 33% de la valeur de $\bar{\sigma}_x$ au même endroit.

Conclusion Générale

Il semble qu'il n'y ait pas de fin d'essayer de décrire plus adéquatement mathématiquement le comportement des matériaux composites utilisés dans les composants structurels. Malheureusement, plus on obtient de telles descriptions, plus les mathématiques deviennent difficiles, comme en témoignent les difficultés croissantes observées à mesure que l'on progresse dans les sections du mémoire.

Une complication supplémentaire qui est importante dans certaines structures de matériaux composites est que la rigidité (et les autres propriétés) sont différentes en tension qu'elles ne sont en compression. Cela se produit parce que

(1) parfois les propriétés mécaniques de la traction et de la compression des matériaux à la fois fibre et matrice diffèrent et

(2) parfois, il se produit car le matériau de la matrice est très faible par rapport à la fibre de sorte que les fibres se bouclent en compression sous une petite charge de sorte que, pour le composite, la rigidité en compression diffère nettement de la rigidité en tension. Par conséquent, on peut idéaliser un peu et dire que l'on a un ensemble de propriétés élastiques en tension et un autre ensemble de propriétés élastiques en compression.

Toutes les complications qui en résultent sont trop difficiles à traiter dans ce texte pour ceux qui essaient d'apprendre les principes fondamentaux des plaques et des panneaux de matériaux composites.

Références

AGARWAL B D. et BROUTMAN L J. *Analysis and Performance of Fiber Composites*—Second edition. 1990.

ALAMPALLI, SREENIVAS et KUNIN, Jonathan. Rehabilitation and field testing of an FRP bridge deck on a truss bridge. *Composite structures*, 2002, vol. 57, no 1, p. 373-375.

ASHTON J E. et WADDOUPS M E. *Analysis of anisotropic plates*. Journal of composite materials, 1969, vol. 3, no 1, p. 148-165.

BATHIAS C., *Matériaux composites*, 2^{ème} édition, Edition Dunod l'usine nouvelle, paris,2009.

BERTHELOT J M., *Matériaux composites : comportement mécanique et analyse des structures* , MASSON, 1992.

BERTHELOT J M. (1999) *Composite Materials: Mechanical Behaviour and Structural Analysis*, Springer-Verlag, New York.

CHEN W F. et SALEEB A F. *Uniaxial behavior and modeling in plasticity*. West Lafayette: Purdue University, 1982.

CZYŻ T, DZIADKIEWICZ G, FEDELIŃSKI P et al. *Advanced computer modelling in micromechanics*. Publisher Silesian University of Technology, Gliwice. 132p, 2013.

DANIEL I M, ISHAI O et al., *Engineering mechanics of composite materials*. New York : Oxford university press, 1994.

DANIEL I M, ISHAI O., (2006), *engineers mechanics of composite materials*. New York Oxford University press 2006.

DESSARTHE A. GUYOTH H et CARAYOL M., *Techniques de fabrication des pieces mécaniques en plastiques ou composites* , CETIM ,1994.

HOLLAWA Y, LEONARD C. et LEEMING M. (ed.). *Strengthening of reinforced concrete structures: Using externally-bonded FRP composites in structural and civil engineering*. Elsevier, 1999.

HULL D. et CLYNE T W., *An introduction to composites materials* ,2nd edition , Edition Cambridge University Press ,UK,1997.

JIANQIAO Y, *Laminated composite plates and shells: 3D modeling*. Springer-Verlag London 2003.

JONES R M. (2002) *Mechanics of Composite Materials*, Second Edition, R.T. Edwards, Flourtown, PA.

LEKHNITSKIĬ S G. *Theory of elasticity of an anisotropic elastic body*. Holden-day, 1963.

MALVERN, LAWRENCE E. *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. 1969.

TSAI, STEPHEN W. et HAHN H. Thomas. *Introduction to composite materials*. 1980. Lancaster, Pennsylvania, Technomic, 1981, vol. 453.

VASILIEV V V, & EVGENY V M., *Mechanics and analysis of composite materials*. 2001 Elsevier Science Ltd

VINSON J R., (2005) *plate and panel structures of isotropic, composite and piezoelectric materials, including sandwich construction*. Published by Springer, P.O. Box 17, 3300 AA Dordrecht, The Netherlands.

Annexe

Programme établi pour le traitement des plaques Stratifiées

```

clear all;clc;
% Les données
E1=60.67E9;E2=24.82E9;gama=0.23;G=12E9;
a=0.305;b=0.305;nk=8;hk=2.5E-4;

% Calcule de la matrice de rigidité Q
Q=[E1/(1-gama^2) E2*gama/(1-gama^2) 0
   E2*gama/(1-gama^2) E2/(1-gama^2) 0
   0 0 G];

for c=1:nk
    O=(c-1)*(pi/2); % la variation d'angle entre les plis
    m=cos(O);n=sin(O);

    % Calcule de la matrice Q bar
    Q11=m^4*Q(1,1)+n^4*Q(2,2)+2*m^2*n^2*Q(1,2)+4*m^2*n^2*Q(3,3);
    Q22=n^4*Q(1,1)+m^4*Q(2,2)+2*m^2*n^2*Q(1,2)+4*m^2*n^2*Q(3,3);
    Q33=m^2*n^2*Q(1,1)+m^2*n^2*Q(2,2)+(m^4+n^4)*Q(1,2)-4*m^2*n^2*Q(3,3);
    Q12=m^2*n^2*Q(1,1)-m^2*n^2*Q(2,2)-2*m^2*n^2*Q(1,2)+(m^2-n^2)*Q(3,3);
    Qb=[Q11 Q12 0;Q12 Q22 0;0 0 Q33];

    % Calcule du coef D

    for i=1:3
        for j=1:3
            D(i,j)=0;
            for k=1:nk
                v=(5-k)*hk;w=(4-k)*hk;
                D(i,j)=D(i,j)+(1/3)*Qb(i,j)*(v^3-w^3);
            end
        end
    end
end
end

```

```

% calcule des contraintes
Cx=0;Cy=0;Cxy=0;

for k=1:2      % les valeurs de n
  for l=1:3    % les valeurs de m
    i=2*k-1;j=2*l-1;
    Db=D(1,1)*(i/a)^4+2*(D(1,2)+2*D(3,3))*(i*j/a/b)^2+D(2,2)*(j/b)^4;
    Cx=Cx+(1/i/j/Db)*(-Qb(1,1)*(i/a)^2-Qb(1,2)*(j/b)^2)*sin(i*pi/2)*sin(j*pi/2);
    Cy=Cy+(1/i/j/Db)*(-Qb(1,2)*(i/a)^2-Qb(2,2)*(j/b)^2)*sin(i*pi/2)*sin(j*pi/2);
    Cxy=Cxy+(1/i/j/Db)*(2*Qb(3,3)*i*j/a/b)*cos(i*pi/2)*cos(j*pi/2);
  end
end

z=(5-c)*hk; % la distance entre le plan médian et le pli C
r=2*c;
X(r-1)=z*Cx*16/pi^4; % La contrainte normalisée
X(r)=(z-hk)*Cx*16/pi^4;
Y(r-1)=z*Cy*16/pi^4;
Y(r)=(z-hk)*Cy*16/pi^4;
XY(r-1)=z*Cxy*16/pi^4;
XY(r)=(z-hk)*Cxy*16/pi^4;

end

Sigma=[X;Y;XY]

```

Résumé

Un matériau isotrope est un matériau qui présente des propriétés mécaniques, physiques, thermiques et électriques identiques dans toutes les directions. Les matériaux isotropes impliquent seulement quatre constantes élastiques, le module d'élasticité, E, le module de cisaillement, G, le module de compression K et le rapport de Poisson, ν . Cependant, seuls deux sont indépendants et les relations suivantes existent :

$$G = E/2(1-\nu) \quad K = E/3(1-2\nu)$$

L'utilisation croissante de matériaux anisotropes tels que les matériaux composites a entraîné une révolution des matériaux et nécessite une nouvelle base de connaissances sur le comportement des matériaux anisotropes.

Avant de comprendre le comportement physique des structures de matériaux composites et avant de pouvoir déterminer quantitativement les contraintes, les déformations, les fréquences naturelles et les charges de flambage dans ces structures, une compréhension claire de l'élasticité anisotrope est nécessaire

ملخص

مادة الخواص هي المواد ذات الخواص الميكانيكية والفيزيائية والحرارية والكهربائية متطابقة في جميع الاتجاهات. وتشمل المواد الخواص أربعة الثوابت المرنة فقط ،

معامل المرونة، E، ومعامل القص G، ومعظم معامل K ونسبة Poisson، ν . مع ذلك، فقط اثنان مستقلة والعلاقات التالية موجودة:

$$G = E/2(1-\nu) \quad K = E/3(1-2\nu)$$

وقد أدى الاستخدام المتزايد للمواد متباين الخواص مثل المواد المركبة في ثورة المواد ويتطلب معرفة أساسية جديدة على سلوك المواد متباين الخواص.

قبل فهم السلوك المادي للمواد وهياكل المركب قبل أن يتمكنوا من تحديد الكمية والإجهاد، والتوتر، والتردد الطبيعي والتواء الأحمال في هذه الهياكل، فهم واضح للمرونة متباين الخواص ضروري

Abstract

An isotropic material is a material that has identical mechanical, physical, thermal and electrical properties in all directions. The isotropic materials involve only four elastic constants, the modulus of elasticity, E, the shear modulus, G, the compression modulus K and the Poisson ratio,. However, only two are independent and the following relationships exist:

$$G = E/2(1-\nu) \quad K = E/3(1-2\nu)$$

The increasing use of anisotropic materials such as composite materials has led to a material revolution and requires a new knowledge base on the behavior of anisotropic materials.

Before understanding the physical behavior of composite material structures and before being able to quantitatively determine the stresses, deformations, natural frequencies and buckling loads in these structures, a clear understanding of the anisotropic elasticity is necessary