



FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES
DÉPARTEMENT GÉNIE CIVIL

Mémoire de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme de Master

Spécialité : Génie Civil

Option : structures

Présenté par :

Terbouche Abdelbaki

Boufateh Houria

Sujet du mémoire

***Application de la méthode des éléments finis au calcul
des portiques à ossatures métalliques***

Soutenu publiquement le

devant le jury composé de :

Mr.TLIDJI .Y

Président

Mr. ABDELAZIZ. H.H

Rapporteur

Mme.KHELIFA.Z

Examineur

Mr.DRAICHE .K

Examineur

PROMOTION :2019/2020

Dédicace

Je dédie en premier lieu cette modeste recherche à mon père Mokhtar et ma mère Djamila et mes frères Mohamed et Anoir et Tayeb .a Sami ,à mes sœurs Sihemet Zahra et Sondos et Wiam

Sayf al dine et chiraz

Je le dédie aussi à mes amis

Khadija, Halima ,Bouchra .B, Zahra , Hanane, Zineb.S ,Narimane

,Zahra, Kheira, Sarah.A, Sarah.R , Abir

Et tous mes amis

A tous mes familles et mes cousines

Je dédie en premier lieu cette modeste recherche à mon père Tayeb et ma mère Kheira et mes frères

Je le dédie aussi à mes amis

Okba ,mokhtar, Salah, yaakob,

Et tous mes amis

A tous mes familles et mes cousines

Remerciement

*Tous d'abord on remercie le bon dieu qui a aidé jusqu'à la fin de
notre travail.*

*Nous tenons à remercier dignement, profondément et sincèrement
notre promoteur Mr. Abdelaziz Hadj Henni pour son aide, sa
patience, sa compétence et ses précieux conseils et grâce à son appui
on a achevé ce travail, ainsi Mr Khaled Bouaakez Mr
klouche, Draïche et Thlidji Youcef et Mme khalifa qui nous aident par
ses conseils.*

*Nous tenons adresser nos sincères remerciements à tous les
enseignants qui ont participé à notre formation*

*Je remercie tous les gens qui ont contribué de près ou loin dans ce
modeste travail*

*En fin toute ma gratitude aux membres du jury qui nous font
l'honneur de juger ce travail*

Dédicace	
<i>Remerciement</i>	
Sommaire	
Notations principales.....	iii
Liste des figures.....	v
Liste des tableaux.....	vii
Résumé.....	viii
Abstract.....	xi
ملخص.....	X

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Introduction générale.....	1
----------------------------	---

CHAPITRE I Synthèse bibliographique sur La méthode des éléments finis

<i>I.1) Introduction :</i>	3
<i>I.2) Historique :</i>	3
<i>I.3) Principe de la méthode des éléments finis :</i>	5
<i>I.4) Éléments finis triangulaires</i>	7
<i>I.5) Eléments finis rectangulaires</i>	8
<i>I.6) Discrétisation du domaine</i>	12
<i>I.6.a) Approximation polynomiale et approximation nodale</i>	14
<i>I.7) Formulation des problèmes d'élasticité par l'approche d'éléments finis:</i>	15
<i>I.8) Formulation élémentaire des problèmes d'élasticité</i>	17
<i>I.9) Étapes de calcul des poutres par éléments finis :</i>	19

CHAPITRE II Généralités sur les Portiques à ossatures Métalliques

<i>II.1) Généralités :</i>	21
<i>II.2) Terminologie :</i>	21
<i>II.2.b) Assemblages :</i>	23
<i>II.3) Contreventement des charpentes :</i>	24
<i>II.3.a) Les structures à nœuds déplaçables :</i>	24
<i>II.3.b) Les structures à nœuds non déplaçables :</i>	24
<i>II.4) Limites des prestations :</i>	25
<i>II.5) Type de cadres en acier :</i>	27
<i>II.5.a) Type de composants pour cadres en acier :</i>	27
<i>II.5.a-1) Types de composants pour cadres en acier</i>	29
<i>II.6) Portiques métalliques simples</i>	30

CHAPITRE III Modélisation des portiques à ossatures métalliques par la méthode des Éléments finis

III.1) Introduction :	37
III.2) Développement d'un code de calcul par élément finis	37
III.3) formulation en éléments finis des systèmes portiques	37
III.4) Interpolation nodale sur les déplacements:	38
III.4.a) Relation déplacement –déformation:	40
III.4.b) Relation déformation – contrainte:	41
III.4.c) Calcul des efforts internes (moment de flexion et effort normal) :	41
III.5) Exemple de comparaison :	44
III.3.1 Solution RDM	44
III.3.2 Solution éléments finis	47
III.6) Exemples de traitement	54
III.6.1) Entrée des données	54
III.7. a) Cas d'une charge concentrée horizontalement	59
III.7.b) cas d'une charge répartie verticalement	60
III.7.c) cas d'une charge répartie horizontalement	61
III.8) Conclusion	63
Conclusion générale	64
RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES	

Notations principales

MEF : Méthode des éléments finis

$\{q\}^e$: Le vecteur de déplacement aux nœuds.

f : Le vecteur de chargement

K_g : La matrice de rigidité globale.

K_{el} : la matrice de rigidité élémentaire

I : moment d'inertie

E : module de YOUNG

P : la charge concentrée.

q : la charge répartie

M_g : le moment à gauche dans l'élément

M_d : le moment à droit dans l'élément

f : flèche

H, V : réactions sur appuis

M : moment

δ : Déplacement horizontal au niveau de la traverse

θ_A, θ_D : Rotation en pied de poteau

θ_B, θ_C : Rotation en tête de poteau

θ_E : Rotation au point central de la traverse

K_i : matrice de rigidité inverse

λ : matrice de passage

c_x : coordonnées des nœuds à l'axe X

c_y : coordonnées des nœuds à l'axe Y

U_n : les valeurs aux nœuds de la fonction

P_n : valeurs des polynômes aux nœuds des coordonnées X

a_n : variables généralisées qui sont les facteurs des polynômes

[L]:la matrice opérateur

[D] : La matrice d'élasticité.

{q}^e: Le vecteur de déplacement aux nœuds.

{F}^e: Le vecteur des forces nodales.

Liste des figures

Figure I.01 : Eléments finis triangulaires avec continuité C : (a) linéaire ; (b) quadratique ;(c) cubique.....	07
Figure I.02 : Triangle de Pascal.....	07
Figure I.03 : Fonctions d'interpolation du triangle quadratique.....	08
Figure I.04 : Élément rectangulaire et ses coordonnées carte siennes (x, y) et naturelles (ζ, η)	09
Figure I .05 : Famille des rectangles de Lagrange et quelques fonctions d'interpolation :(a) élément bilinéaire ; (b) élément biquadratique ; (c) élément bi cubique.....	09
Figure I.06 : Fonctions d'interpolation typiques de l'élément biquadratique.....	10
Figure I.07 : Termes de l'interpolation polynomiale des rectangles de Lagrange.....	10
Figure I .08 : Famille des rectangles de Serendip : (a) élément bilinéaire ; (b) élément biquadratique; (c) élément bi cubique ; (d) fonctions d'interpolation de l'élément biquadratique.....	11
Figure I.09 : Modes de l'interpolation polynomiale des rectangles de Serendip.....	12
Figure I.10 : Eléments tridimensionnels : (a) tétraèdres à 4 et 10noeuds ;(b) briques à 8et20noeuds;(c) prismes à 6 et 15 noeuds.....	12
Figure I.11 : Discrétisation du domaine – éléments triangulaires.....	13
Figure I.12 : Règles de discrétisation.....	13
Figure II.01 : vue de l'ensemble de la structure	21
Figure II.02 : vue de l'ensemble de la structure sans le bardage.....	25
Figure II.03 : <i>Modélisation de la structure porteuse principale avec ses stabilités</i>	26
Figure II.04 : <i>Modélisation des éléments principaux de la structure porteuse</i>	26
Figure II.05 : Cadre de portail en acier avec éléments coniques.....	28
Figure II.6 : application des charpentes en acier: (a) bâtiment industriel à un étage: (b) centrale électrique: (c) tour des mineurs de minerai: (d) plate-forme de distribution de pétrole et de gaz:(e) immeuble de grande hauteur.....	28
Figure II.7 : cadre pur.	29
Figure II.8 : Montures à brèches consenties.....	29
Figure II.9 : Cadres à brèche excentrique.....	29
Figure II .10 : Structures cadre-tube.....	29

Figure III.01: Elément de barre a deux nœuds avec joints rigides.....	35
Figure III.02: portique à étudier.....	44
Figure III.0.3: Diagramme des moments M	46
Figure III.04: Diagramme des efforts normaux	46
Figure III.05: Discrétisation du portique.....	47
Figure III.06 : portique à traverses droites (charge horizontale)	55
Figure III.07 : portique à traverses droites (charge vertical)	56
Figure III.08 : portique à traverses droites (charge VENT)	56
Figure III.09 : portique à traverses inclinées (charge horizontale)	57
Figure III.10 : portique à traverses inclinées (charge vertical).....	57
Figure III.11 : portique à traverses inclinées (charge VENT).....	58
Figure III.12 : discrétisation de la charge répartie q	60
Figure III.13 : discrétisation de la charge répartie Q	61

Liste des tableaux

Tableau II.0 1:Charge horizontale isolée en tête	31
Tableau II.0 2:Charge verticale uniformément répartie sur la traverse	32
Tableau II.0 3:Charge horizontale uniformément répartie sur le poteau	33
Tableau II.0 4: Charge verticale concentrée au milieu de la traverse	34
Tableau III.0 1: Déplacements aux nœuds des portiques type 01 et type 02.....	59
Tableau III.0 2:Efforts internes dans les éléments des portiques type 01 et type 02.....	59
Tableau III.0 3: Déplacements aux nœuds des portiques type 01 et type 02	60
Tableau III.0 4: Efforts internes dans les éléments des portiques type 01 et type 02	61
Tableau III.0 5:Déplacements aux nœuds des portiques type 01 et type 02	62
Tableau III.0 6: Efforts internes dans les éléments des portiques type 01 et type 02.....	62

Résumé

Un grand nombre des portiques utilisées par les ingénieurs, nécessite d'appliquer certaines méthodes de résolution. Dans ce cadre, nous sommes intéressés à présenter une méthode numérique est celle d'éléments finis qui facilite la tâche de calcul des portiques ayant des propriétés géométriques et des degrés d'hyperstatiques compliqués.

À cet effet un programme de calcul a été effectué et de vérifier la validité du modèle numérique proposé, en faisant la comparaison avec les méthodes analytiques existantes de la résistance des matériaux.

Dans le but de savoir l'utilité de cette méthode approchée pour la résolution des problèmes des portiques soumis à des charges quelconques des exemples concrets ont été exposés dans le dernier chapitre de ce mémoire à savoir des portiques à traverses droites ou inclinées à nœuds rigide.

Mots clés: portiques, Éléments finis, Résistances des Matériaux, Traverses.

Abstract

Many of the gantries used by engineers require the application of certain solving methods. In this context, we are interested in presented a numerical method is that of finite elements which facilitates the task of calculating frames with geometric properties and complicated hyper static degrees.

For this purpose a calculation program was carried out and to check the validity of the proposed numerical model, by making the comparison with the existing analytical methods of the resistance of materials.

In order to know the usefulness of this approximate method for the resolution of the problems of gantries subjected to any loads, concrete examples were exposed in the last chapter of this thesis, namely gantries with linear or inclined beam with rigid.

Keywords: portal frames, Finite elements, Resistances of Materials, Beam.

ملخص

تتطلب العديد من الجسور التي يستخدمها المهندسون طرق حل معينة ليتم تطبيقها. في هذا السياق، نحن مهتمون بتقديم طريقة عددية وهي طريقة العناصر المحدودة التي تسهل مهمة حساب الإطارات ذات الخصائص الهندسية ودرجات فرط الاستقرار المعقدة.

لهذا الغرض تم تنفيذ برنامج حسابي والتحقق من صحة النموذج العددي المقترح، من خلال المقارنة مع الطرق التحليلية الحالية لمقاومة المواد.

من أجل معرفة فائدة هذه الطريقة التقريبية لحل مشاكل الإطارات الخاضعة لأية أحمال، تم الكشف عن أمثلة ملموسة في الفصل الأخير من هذه الأطروحة، وهي الهياكل المركبة من العوارض المستقيمة أو المائلة ذات العقد الصلبة التي يمكننا مقابلتهم في الممارسة،

الكلمات المفتاحية: إطارات الهياكل، العناصر المحدودة، مقاومات المواد.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Introduction générale

Durant ces dernières décennies, la méthode des éléments finis a connu un essor important lié au développement des ordinateurs. Avec le développement des moyens informatiques, elle s'est avérée au cours du temps plus conviviale et plus efficace.

Dans de nombreuses situations le modèle adéquat peut être obtenu en utilisant un nombre fini de composants, alors on parlera de problème discret. Si la subdivision doit être poursuivie indéfiniment, c'est-à-dire en jeu un nombre infini d'éléments, alors ces problèmes sont continus.

Pour étudier un système continu, on remplace par un système discret censé lui être proche en un certain sens.

La résolution des problèmes de construction dans le domaine élastique revient généralement à la résolution d'un système d'équation aux dérivées partielles avec des conditions données sur le contour.

Il est très difficile d'obtenir une solution analytique exacte de ces équations, pour cela beaucoup de savants ont dû recourir en premier lieu à des méthodes numériques approchées et peu précises.

La résolution des problèmes par ces méthodes, a poussé d'autres auteurs à chercher des méthodes plus exactes, qui peuvent supprimer certaines ambiguïtés dans les résultats de calcul, notamment la suppression d'hypothèses non conformes à la recherche, les méthodes des éléments finis est le fruit de cette recherche.

L'idée principale de la méthode M.E.F. consiste à appliquer un procédé analogue à l'analyse des milieux continus, tels que les parois, la résolution du système linéaire donne donc les déplacements des nœuds, à partir desquels, on calcule les déformations puis les contraintes dans le milieu.

La M.E.F. consiste à utiliser une approximation simple des variables (déplacements) pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques.

Elle fait appel aux trois domaines suivant :

Sciences de l'ingénierie pour construire les équations aux dérivées partielles:

Méthode numérique pour résoudre et résoudre les équations algébriques.

Programmation et informatique pour exécuter efficacement les calculs sur Ordinateur.

Dans cette présente étude, on s'intéresse à l'application de cette méthode pour résoudre certains problèmes dans l'analyse des portiques en utilisant les types d'éléments barre à deux nœuds. Dans ce cadre, notre travail est composé de trois chapitres.

Dans le premier, nous présentons les notions et principes de la méthode des éléments finis.

Dans le deuxième chapitre, nous exposons des généralités sur les généralité des portiques à ossatures métalliques.

Le troisième chapitre est consacré à la modélisation des problèmes portiques par éléments barres sous divers chargements.

CHAPITRE I

Synthèse bibliographique sur La
méthode des éléments finis

1.1) Introduction :

Pour analyser phénomène naturel en générale ou un problème d'ingénierie en particulier, on est souvent amené à développer un modèle mathématique pouvant décrire d'une manière aussi fiable que possible le problème en question.

Le développement d'un modèle mathématique s'appuie généralement sur quelques postulats de base et plusieurs hypothèses simplificatrices pour aboutir à des équations gouvernantes qui sont souvent des équations différentielles auxquelles sont ajoutées des conditions aux limites[1].

Exemple : la théorie d'élasticité s'appuie sur le postulat fondamental de l'existence du vecteur contrainte et les hypothèses de petites déformations, d'homogénéité et d'isotropie des matériaux ainsi que la linéarité des relations liant les contraintes et les déformations.

La résolution analytique d'équation différentielle pose parfois des difficultés insurmontables, et une solution exacte décrivant bien le problème étudié n'est pas toujours facile à trouver. Le recours aux modèles physiques et à la simulation expérimentale pour la recherche d'une solution analogue à la solution recherchée peut s'avérer coûteux et en moyens. Avec les progrès enregistrés dans le domaine de l'informatique et les performances des ordinateurs de plus en plus grandes, il est devenu possible de résoudre des systèmes d'équation différentielles très complexes. Plusieurs techniques de résolution numérique

ont été ainsi développées et appliquées avec succès pour avoir des solutions satisfaisantes à des problèmes d'ingénierie très variés.

La méthode des éléments finis est l'une des techniques numériques les plus puissantes l'un des avantages majeurs de cette méthode est le fait qu'elle offre la possibilité de développer un programme permettant de résoudre, avec peu de modification, plusieurs types de problèmes en particulier, toute forme complexe d'un domaine géométrique où un problème est bien posé avec toutes les conditions aux limites, peut-être facilement traité par la méthode des éléments finis.

Cette méthode consiste à diviser le domaine physique à traiter en sous-domaines appelés éléments finis à dimensions infinitésimales. La solution recherchée est remplacée dans chaque élément par une approximation avec des polynômes simples et le domaine peut ensuite être reconstitué avec l'assemblage ou la sommation de tous les éléments [2].

1.2) Historique :

C'est l'ingénieur américain **Ray William Clough** qui, semble-t-il, a utilisé le terme de méthode des éléments finis le premier dans un article de 1960 intitulé de méthode des éléments finis. est analysée en contrainte plane mot rigidité (Stiffness) apparaissait dans le titre de son article Stiffness and deflection analysis of complex structure datant de 1956

Analysés. Le mot rigidité (Stiffness) apparaissait dans le titre de son article Stiffness and Deflection (et coécrit avec M. Turner, H. C. Martin et L. J. Topp).

Chapitre I : Synthèse bibliographique sur la méthode des éléments finis

Si on veut replacer très brièvement cela dans un contexte

Plus global, on peut dire que l'analyse des structures est née vers 1850.

La RDM, recourant au calcul manuel, était développée par

Maxwell, Castigliano, Mohr.

Le concept d'éléments finis est né vers 1940, avec des

Figures comme Newmark, Hrennikoff (1941), Mc Henry, Courant (1942)...

Son réel essor ne commence toutefois que dans les années 60 avec le développement du calcul numérique sur ordinateur.

La méthode des éléments finis (MEF) prend ses origines dans le besoin de résoudre des problèmes complexes d'élasticité et d'analyse de structure en ingénierie civile et aéronautique.

Son développement remonte aux travaux d'Alexander Hrennikoff (1941) et de Richard Courant (1942).

Bien qu'utilisant des approches différentes, ces deux pionniers partagent la même caractéristique essentielle à savoir la discrétisation par maillage du domaine continu en sous-domaines discrets, que l'on appelle éléments. C'est Olgierd Collège qui synthétisa ces deux Zienkiewicz de l'Imperial méthode en ce que l'on peut appeler la méthode des éléments finis et qui fit la première formalisation mathématique de la méthode.

Dans ses travaux, Hrennikoff discrétise le domaine En utilisant une analogie avec les treillis, tandis que l'approche de Courant divise le domaine en sous-régions finies triangulaires pour résoudre les équations aux dérivées partielles elliptiques du second ordre issues du problème de la torsion d'un cylindre[3].

On peut dire que la contribution de courant était

Une évolution s'appuyant sur vaste corpus de résultats antérieurs pour les équations aux dérivées partielles développés par Rayleigh, Ritz et Galerkin.

Le développement de la méthode des éléments finis a véritablement commencé au milieu d'années 1950 pour l'analyse structurale et aéronautique, et prit de l'ampleur l'Université de Stuttgart grâce au travail de John Argyris et à Berkeley grâce au travail de Ray W.Clough.

Ray Clough est également l'un des pionniers du génie parasismique et s'est vu décerné en 2008, à la Conférence mondiale de l'ingénierie sismique en chine, le titre de « légende du génie para sismique » (“Legend of Earthquake Engineering”).

À la fin des années 50, les concepts clés de matrice de rigidité et d'assemblage d'éléments existaient quasiment sous la forme actuelle.

La NASA publia une demande de proposition pour le développement du logiciel d'éléments finis NASTRAN en 1965.

La base mathématique rigoureuse de la méthode des éléments finis a été consolidée en 1973 avec la publication de force et analyse des méthodes des éléments finis.

Elle a depuis été intégrée comme une branche des mathématiques appliquées à la modélisation numérique des systèmes physiques dans une large variété de disciplines.

Pour une discussion plus approfondie des apports et contribution relatives des différents pionniers de cette méthode [4].

1.3) Principe de la méthode des éléments finis :

La démarche générale de la méthode des éléments finis est la suivante. On a une EDP à résoudre sur un domaine Ω . On écrit la formulation variationnelle de cette EDP, et on se ramène donc à un problème de type

$$(\delta) \quad \text{trouver } U \in V \text{ tel que } a(U, V) = l(V), \forall U \in V$$

On va chercher une approximation de u par approximation interne.

Pour cela, on définit un maillage du domaine Ω , grâce auquel on va définir un espace d'approximation V_h , s.e.v de V de dimension finie N_h

(Par exemple V_h sera l'ensemble des fonctions continues sur Ω et affines sur chaque maille). Le problème approché est alors

$$(\delta_h) \quad \text{trouver } U_h \in V_h \text{ tel que } a(U_h, V_h) = l(V_h), \forall U_h \in V_h$$

Soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_{N_h})$ une base de V_h . En décomposant u_h sur cette base sous la forme

$$U_h = \sum_{i=1}^{N_h} \mu_i \varphi_i \dots\dots\dots(I.01)$$

Le problème (δ_h) devient

trouver μ_1, \dots, μ_{N_h} tels que

$$\sum_{i=1}^{N_h} \mu_i a(\varphi_i, v_h) = l(v_h), \forall v_h \in V_h \dots\dots\dots(I.02)$$

Où on recourt par linéarité de a et l :

Trouver μ_1, \dots, μ_{N_h} tels que

$$\sum_{i=1}^{N_h} \mu_i \alpha(\varphi_i, \varphi_j) = l(\varphi_j), \forall j = 1, \dots, N_h \dots \dots \dots (I.03)$$

C'est à dire résoudre le système linéaire

$$\begin{pmatrix} a(\varphi_1, \varphi_1) & \dots & a(\varphi_{N_h}, \varphi_1) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a(\varphi_{N_h}, \varphi_{N_h}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_{N_h} \end{pmatrix} \dots \dots \dots (I.04)$$

Soit

$$A\mu = b$$

$a(\varphi_i, \varphi_j)$ La matrice A est a priori pleine. Toutefois, pour limiter le volume de calculs, on va définir des fonctions de base φ_i dont le support sera petit, c'est à dire que chaque fonction φ_i sera nulle partout sauf sur quelques mailles. Ainsi les termes $a(\varphi_i, \varphi_j)$ seront le plus souvent nuls, car correspondant à des fonctions φ_i et φ_j de supports disjoints. La matrice A sera donc une matrice creuse, et on ordonnera les φ_i de telle sorte que A soit à structure bande, avec une largeur de bande la plus faible possible[5].

À ce niveau, les difficultés majeures en pratique sont de trouver les φ_i et de les manipuler pour les calculs d'intégrales nécessaires à la construction de A. Sans rentrer pour le moment dans les détails, on peut toutefois indiquer que la plupart de ces difficultés seront levées grâce à trois idées principales :

Le principe d'un solvance : On s'attachera à trouver des degrés de liberté (ou ddl) tels que la donnée de ces ddl détermine de façon univoque toute fonction de Vh.

Il pourra s'agir par exemple des valeurs de la fonction en quelques points.

Déterminer une fonction reviendra alors à déterminer ses valeurs sur ces ddl.

Définition des φ_i : On définira les fonctions de base par $\varphi_i = 1$ sur le $i^{ème}$ ddl, et

$\varphi_i = 0$ sur les autres ddl.

La manipulation des φ_i sera alors très simplifiée, et les φ_i auront par ailleurs un support réduit à quelques mailles.

La notion de "famille affine d'éléments" : Le maillage sera tel que toutes les mailles soient identiques à une transformation affine près. De ce fait, tous les calculs

d'intégrales pourront se ramener à des calculs sur une seule maille "de référence", par un simple changement de variable.

I.4) Éléments finis triangulaires

On construit quasi spontanément des éléments triangulaires à $n_n^e = (P + 1)(P + 2) / 2$ nœuds

(Figure I.01), correspondant à un polynôme complet de degré p en les variables indépendantes x et y,

avec continuité C^0 du même degré sur chacune des trois frontières.

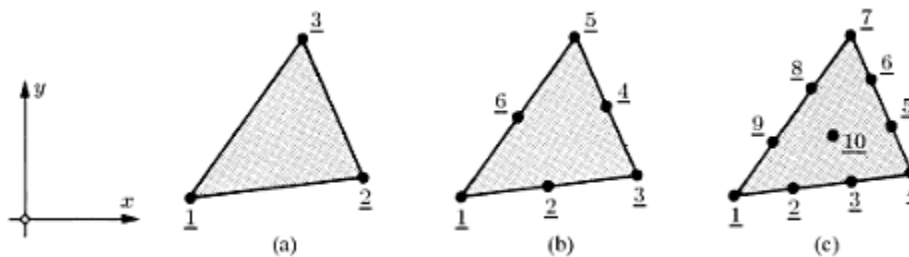


Figure I.0 1: Éléments finis triangulaires avec continuité C^0 :(a) linéaire ; (b) quadratique;(c) cubique.

Le polynôme d'interpolation s'écrit (composante u par exemple)

$$u(x, y) = b_1 + b_2x + b_3y + b_4x^2 + b_5xy + b_6y^2 + \dots + b_{(p+1)(p+2)/2} = p(x, y) \quad \dots(I.05)$$

et ses termes apparaissent naturellement grâce au triangle de Pascal (figure I.02).

Triangle	Degré	p	Nombre de termes
1	constant	0	1
x y	linéaire	1	3
x ² xy y ²	quadratique	2	6
x ³ x ² y xy ² y ³	cubique	3	10
x ⁴ x ³ y x ² y ² xy ³ y ⁴	quartique	4	15
x ⁵ x ⁴ y x ³ y ² x ² y ³ xy ⁴ y ⁵	quintique	5	21
...

Figure I.0 2:Triangle de Pascal.

Dans les éléments finis destinés aux calculs basés sur la convergence h on ne dépasse pratiquement jamais le degré 3. La matrice C peut toujours être inversée sans difficulté.

On peut aussi dessiner aisément les fonctions d'interpolation (figure I.03) et par suite en chercher les équations. On vérifie que leur somme vaut 1

$$\sum_{i=1}^{n_n^e} N_i = 1 \dots\dots\dots(I.06)$$

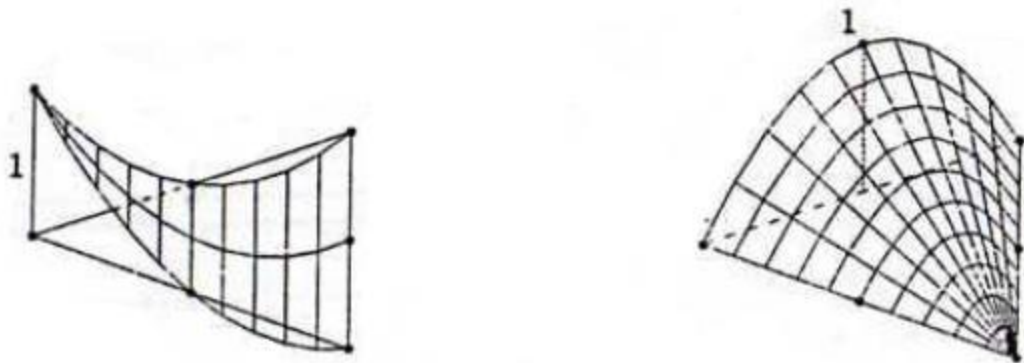


Figure I.0 3: Fonctions d'interpolation du triangle quadratique.

1.5) Eléments finis rectangulaires

Plaçant l'origine des coordonnées au centre de l'élément rectangulaire, de dimension $2 a \times 2b$, on définit avantageusement les coordonnées naturelles

70.I(..... $\eta = \frac{y}{b} \quad \zeta = \frac{x}{a}$

qui valent ± 1 sur les frontières du rectangle (figure I.04).

En partant de l'interpolation de Lagrange à une variable indépendante, on peut, pour les domaines rectangulaires, construire deux familles de fonctions d'interpolation.

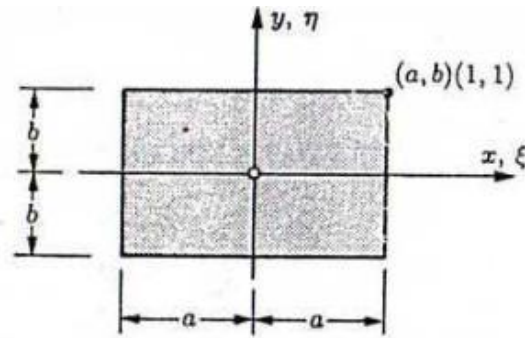
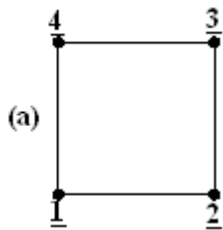


Figure I.0 4: Élément rectangulaire et ses coordonnées carte siennes (x, y) et naturelles (ξ η).

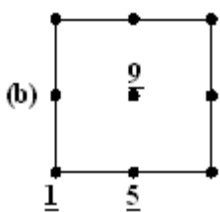
Famille de Lagrange

Les nœuds sont placés aux intersections des lignes d'un quadrillage régulier (figure I.05) et les fonctions d'interpolation peuvent s'obtenir par le produit des polynômes de Lagrange de chacune

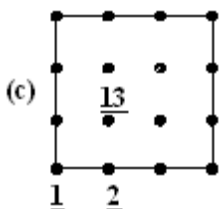
des coordonnées x et y , ou ξ et η . L'élément cubique est, déjà, rarement utilisé [Fran.91].



$$\begin{aligned}
 N_1(\xi, \eta) &= L_1^1(\xi) L_1^1(\eta) = (1-\xi)(1-\eta) / 4 \\
 N_2(\xi, \eta) &= L_2^1(\xi) L_1^1(\eta) = (1+\xi)(1-\eta) / 4 \\
 N_3(\xi, \eta) &= L_2^1(\xi) L_2^1(\eta) = (1+\xi)(1+\eta) / 4 \dots\dots\dots (I.08) \\
 N_4(\xi, \eta) &= L_1^1(\xi) L_2^1(\eta) = (1-\xi)(1+\eta) / 4
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 N_1(\xi, \eta) &= L_1^2(\xi) L_1^2(\eta) = \xi\eta(1-\xi)(1-\eta) / 4 \\
 N_5(\xi, \eta) &= L_2^2(\xi) L_1^2(\eta) = -\eta(1+\xi^2)(1-\eta) / 2 \\
 N_9(\xi, \eta) &= L_2^2(\xi) L_2^2(\eta) = (1-\xi^2)(1-\eta^2) \dots\dots\dots (I.09)
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 N_1(\xi, \eta) &= L_1^3(\xi) L_1^3(\eta) \\
 N_2(\xi, \eta) &= L_2^3(\xi) L_2^3(\eta) \\
 N_{13}(\xi, \eta) &= L_2^3(\xi) L_2^3(\eta) \dots\dots\dots (I.10)
 \end{aligned}$$

Figure I.0 5: Famille des rectangles de Lagrange et quelques fonctions d'interpolation : (a) élément bilinéaire ; (b) élément biquadratique ; (c) élément bicubique.

La figure I.06 montre les fonctions d'interpolation typiques de l'élément quadratique.

La fonction du nœud central s'appelle une **fonction bulle**, pour des raisons évidentes ; elle s'associe à des degrés de liberté internes qui peuvent être condensés. En tout point, la somme des

fonctions vaut 1.

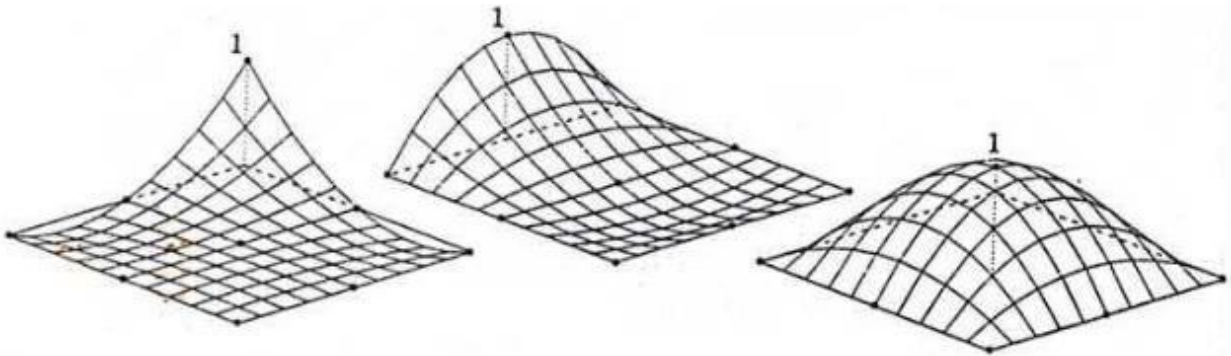


Figure I.0 6: Fonctions d'interpolation typiques de l'élément biquadratique

L'interpolation paramétrique $u = Pp$ comprend les termes contenus dans un losange issu du triangle de Pascal, comme l'indique la figure I.07. Le polynôme est complet jusqu'au degré p , puis

incomplet jusqu'au degré $2p$. Sur des lignes x (ou ζ) = cste, ou y (ou η) = cste, l'interpolation est complète au degré p .

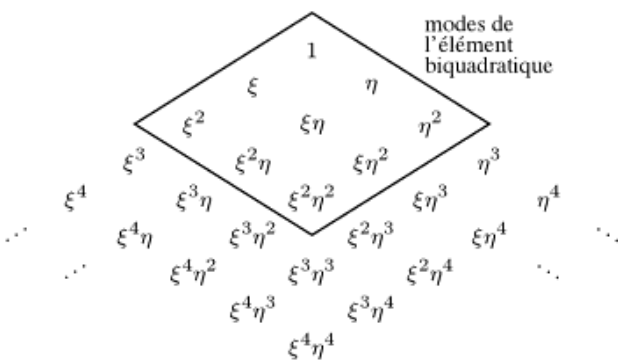


Figure I.0 7: Termes de l'interpolation polynomiale des rectangles de Lagrange

Famille de Serendip

Ces éléments sont construits sans nœuds internes (figure I.08). Ils sont donc plus simples que les précédents et, souvent, préférés. Les fonctions d'interpolation sont faciles à visualiser. En tout point d'un élément, leur somme est encore unité. L'élément bilinéaire est identique à celui de la famille de Lagrange [Fran.91]

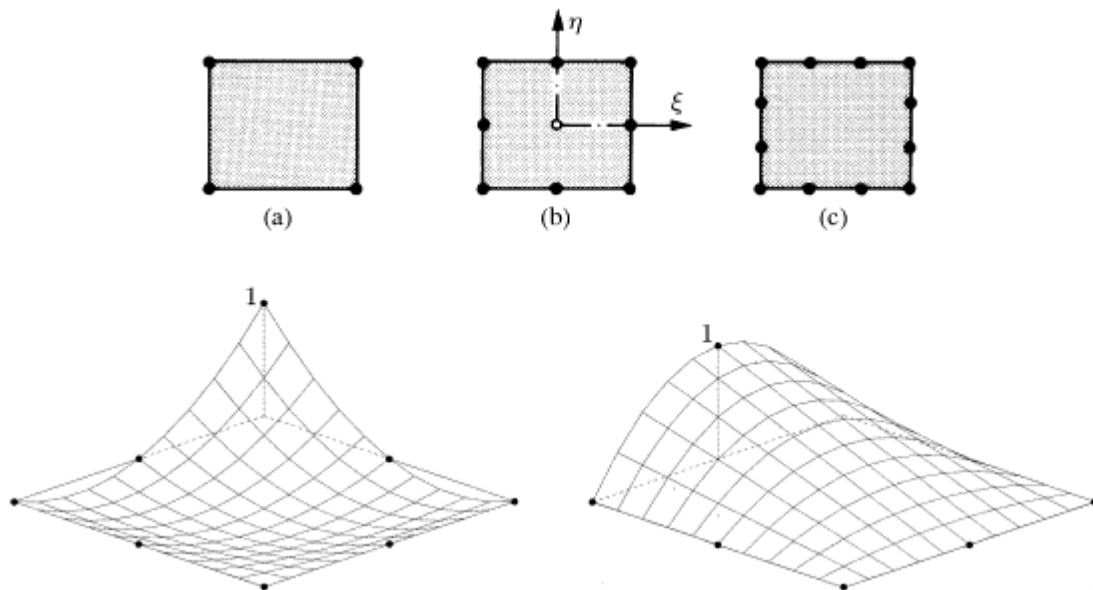


Figure I.0 8: Famille des rectangles de Serendip : (a) élément bilinéaire ; (b) élément biquadratique; (c) élément bi cubique ; (d) fonctions d'interpolation de l'élément biquadratique.

L'interpolation paramétrique est encore issue d'un triangle de Pascal (figure I.09).

Tant que $p \leq 3$, le polynôme, de degré $p + 1$, est complet au degré p . Quel que soit p , il demeure complet au degré p sur les lignes x (ou ζ) = cste, ou y (ou η) = cste. En pratique, on ne dépasse guère $p = 3$.

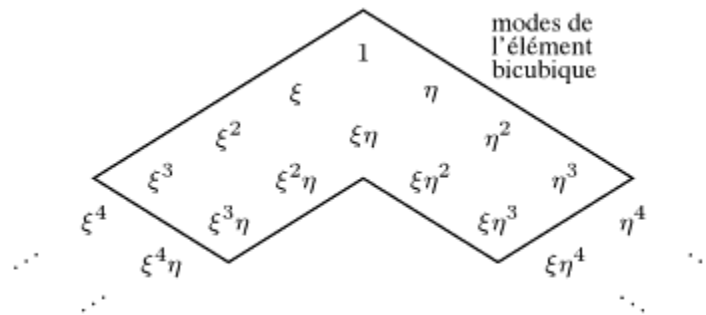


Figure I.0 9: Modes de l'interpolation polynomiale des rectangles de Serendip.

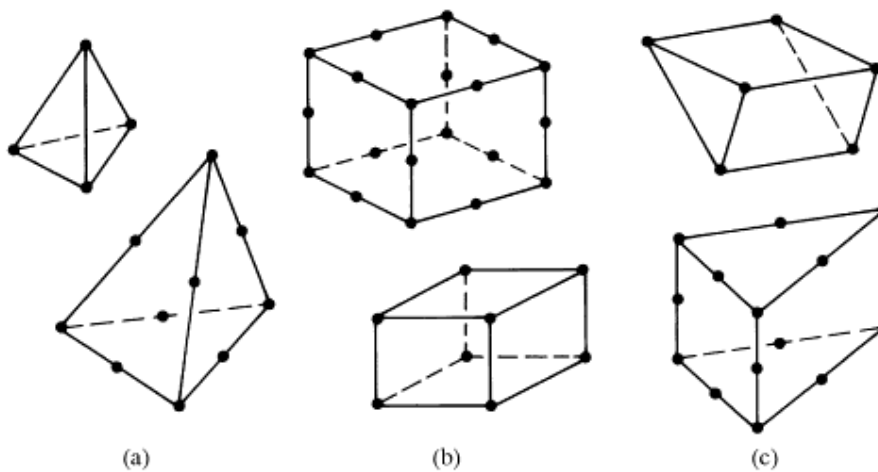


Figure I 10: Eléments tridimensionnels : (a) tétraèdres à 4 et 10noeuds ; (b) briques à 8et20noeuds ;(c) prismes à 6 et 15 nœuds.

I.6) Discrétisation du domaine

La méthode des éléments finis est une méthode d'approximation par sous domaines, donc avant toute application il faut diviser le domaine à étudier en éléments. Chaque élément est défini géométriquement par un nombre de nœuds bien déterminé qui constituent en général ses sommets. (Figure I.11)

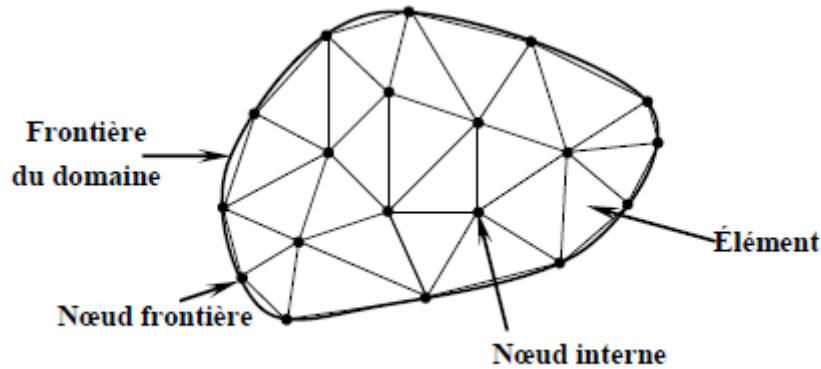


Figure I.1 1: Discretisation du domaine – éléments triangulaires

La discrétisation géométrique doit respecter les règles suivantes :

- 1) Un nœud d'un élément ne doit pas être intérieur à un côté d'un autre du même type. (Figure I.12 a)
- 2) Aucun élément bidimensionnel ne doit être plat, éviter les angles proches de 180° ou de 0° . (Figure I.12 b)
- 3) Deux éléments distincts ne peuvent avoir en commun que des points situés dans leurs frontières communes ; le recouvrement est exclu. (Figure I.12 c)
- 4) L'ensemble de tous éléments doit constituer un domaine aussi proche que possible du domaine donné ; les trous entre éléments sont exclus. (Figure I.12 d)



Figure I.1 2: Règles de discrétisation

Le résultat du procédé de discrétisation doit contenir deux données essentielles qui sont les coordonnées des nœuds et les connectivités des éléments. On doit numéroter tous les nœuds et les éléments de façon à avoir des matrices globales à petite largeur de bande, pour cela, la numérotation se fait selon la plus petite largeur du domaine[6].

Après avoir défini l'élément, on peut remplacer la fonction exacte par une approximative. On utilise souvent des polynômes ou des fonctions faciles à mettre en œuvre sur ordinateur.

I.6.a) Approximation polynomiale et approximation nodale

La fonction approchée est exprimée, dans le cas unidimensionnel, par :

$$u = \sum_{i=0}^n a_i x^i \dots\dots\dots (I.11)$$

Qu'on peut écrire sous la forme matricielle suivante :

$$u = \langle 1 \ x \ x^2 \ \dots \ \rangle \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{Bmatrix} \equiv \langle p(x) \rangle \{A\} \dots\dots\dots (I.12)$$

Cette forme d'approximation est appelée interpolation polynomiale. Si on exprime la fonction sur tous les nœuds on obtient pour chaque nœud i de coordonnée x_i :

$$u_i = \langle p(x_i) \rangle \{A\} \equiv \sum_j P_{ij} a_j \dots\dots\dots (I.13)$$

Soit pour tous les nœuds :

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} \langle p_{1j} \rangle \{a_j\} \\ \langle \dots \rangle \{.\} \\ \langle p_{nj} \rangle \{a_j\} \end{Bmatrix} \equiv U_n = P_n a_n \dots\dots\dots (I.14)$$

U_n : représente les valeurs aux nœuds de la fonction.

P_n : Valeurs des polynômes aux nœuds des coordonnées x_i .

a_n : variables généralisées qui sont les facteurs des polynômes.

L'inconvénient de cette interpolation réside dans l'utilisation des paramètres a_i comme variable de base, des calculs supplémentaires sont nécessaires pour calculer la fonction

recherchée. Afin d'éviter ces calculs, on peut mettre les valeurs de la fonction u aux nœuds comme variables de base en procédant comme suit :

A partir de l'équation (3.12), on peut tirer les a_n en fonction des u_n et on les remplace dans l'équation (3.10). Ce qui donne :

$$u = \langle p(x) \rangle p_n^{-1} U_n \equiv \langle N(x) \rangle U_n \quad \dots\dots\dots (I.15)$$

C'est la forme la plus utilisée par le fait que ses variables sont les valeurs de la fonction aux nœuds, la résolution donne directement ces valeurs.

Ce type d'approximation est appelée interpolation nodale, les fonctions N_i sont appelées fonction de forme, elles sont fonction du type d'élément utilisé pour la discrétisation géométrique.

I.7) Formulation des problèmes d'élasticité par l'approche d'éléments finis:

Pour obtenir une solution approchée d'un problème d'élasticité, nous allons proposer une approche de déplacement à l'aide d'un champ de déplacement inconnu.

Notre objectif dans cette partie est d'exprimer l'équation fondamentale par éléments finis en fonction des déplacements inconnus.

Principe des travaux virtuels :

Ce principe se généralise de la manière suivante :

Le travail virtuel des charges extérieures est égal au travail virtuel interne absorbé par la structure. Il exprime les relations existant entre l'ensemble des charges extérieures et les forces intérieures correspondantes satisfaisant ensemble à la condition d'équilibre, et l'ensemble des déplacements des nœuds et les déformations correspondantes des différentes parties satisfaisant à la condition de compatibilité.

Considérons un corps solide de volume (V) lié à un repère orthonormé au (x, y, z) en état d'équilibre statique sous l'action des forces volumiques soient F et des forces de surface soient \vec{p}_1 .

Nous admettons que un point matériel a subi les déplacements U, V et W suivant les directions x, y et z respectivement.

A partir des équations différentielles d'équilibre on à :

$$\sigma_{,ij} + f_i = 0$$

$$\overline{div}[\sigma] + \overline{f} = \vec{0} \dots\dots\dots I.16$$

En introduisant le travail virtuel dû aux forces appliquées dans l'équation (1) on aura :

$$\int_v \sigma \{U\}^T \times (\overline{div}[\sigma] + \overline{f}) dv = 0 \dots\dots\dots (I.17)$$

$$\int_v \left\{ \delta U \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial \sigma} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial \sigma} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial \sigma} + f_x \right) + \delta V \left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial \sigma} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial \sigma} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial \sigma} + f_y \right) + \delta W \left(\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial \sigma} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial \sigma} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial \sigma} + f_z \right) \right\} div = 0 \dots\dots\dots (I.18)$$

(Théorème de Gauss)

$$\int_v \delta U \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dv = \int_v \delta U \times \sigma_x \times n_x - \int_v \sigma_x \times \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) dv \dots\dots\dots (I.19)$$

Répétant l'intégration, par partie pour chaque terme de l'équation (2) ; on obtient

$$\int_v \left[\sigma_x \times \partial \left(\frac{\delta U}{\delta X} \right) + \sigma_{xy} \times \left(\partial \left(\frac{\delta U}{\delta Y} \right) + \partial \left(\frac{\delta V}{\delta X} \right) \right) + \sigma_{xz} \times \left(\partial \left(\frac{\delta U}{\delta Z} \right) + \partial \left(\frac{\delta V}{\delta X} \right) \right) + \dots + \sigma_z \times \partial \left(\frac{\delta W}{\delta Z} \right) - \partial U \times f_x - \partial V \times f_y - \partial W \times f_z \right] dS = 0 \dots\dots\dots (I.20)$$

$$\delta\{\varepsilon\} = \left\langle \delta \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right), \delta \left(\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \right), \delta \left(\frac{\partial U}{\partial Z} + \frac{\partial V}{\partial X} \right), \dots, \delta \left(\frac{\partial W}{\partial Z} \right) \right\rangle \dots\dots\dots (I.21)$$

Ou encore :

$$- \int_v \delta\{\varepsilon\}^T \times \{\sigma\} \times dv + \int_s \{\delta U\}^T \times \vec{X}_t \times \int_v \delta\{U\}^T \times \{f\} \times dv = 0 \dots\dots\dots (I.22)$$

Cette relation représente l'expression du théorème des travaux virtuels qui traduit que la variation de l'énergie totale (énergie de déformation dû aux forces internes plus énergie potentielle dû aux forces externes qui égale à zéro (0) c'est-à-dire le principe de conservation d'énergie.

1.8) Formulation élémentaire des problèmes d'élasticité

Considérons un seul élément de volume V^e et de surface S^e du corps solide soit le champ de déplacement inconnu pour cet élément qui comporte (n) nœuds

$$\delta\{U\}^e = \langle U, V, W \rangle^T \dots\dots\dots(I.23)$$

(U, V, W) sont les variables du champ de déplacement.

En appliquant le principe de travaux virtuels sur cet élément (V^e)

$$\int_V \delta\{\epsilon\}^T \times \{\sigma\} \times dv^e - \left(\int_S \{\delta U\}^T \times \bar{X}_t \times dS^e + \int_V \delta\{U\}^T \times \{f\} \times dV^e \right) = 0 \dots\dots(I.24)$$

L'approximation nodale par interpolation sur les déplacements

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^N N_i U_i = N_1 U_1 + N_2 U_2 + \dots\dots\dots + N_n U_n \\ \sum_{i=1}^N N_i V_i = N_1 V_1 + N_2 V_2 + \dots\dots\dots + N_n V_n \\ \sum_{i=1}^N N_i W_i = N_1 W_1 + N_2 W_2 + \dots\dots\dots + N_n W_n \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(I.25)$$

Comme on peut l'écrire sous une forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \dots\dots\dots & N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots\dots\dots & 0 & N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots\dots\dots & 0 & 0 & N_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ W_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ W_2 \\ \dots \\ U_n \\ V_n \\ W_n \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(I.26)$$

$$\{U\}^e = [N] \times \{q\}^e \dots\dots\dots(I.27)$$

Avec:

[N] : Matrice des fonctions d'interpolations

{q}^e: Vecteur de déplacements aux nœuds

À partir des relations déformation -déplacement on obtient:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \left(\frac{\partial U}{\partial X}\right) \\ \left(\frac{\partial V}{\partial Y}\right) \\ \left(\frac{\partial W}{\partial Z}\right) \\ \left(\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X}\right) \\ \left(\frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\partial W}{\partial XY}\right) \\ \left(\frac{\partial U}{\partial Z} + \frac{\partial W}{\partial X}\right) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial Y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial Z} \\ \frac{\partial}{\partial Y} & \frac{\partial}{\partial X} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial Z} & \frac{\partial}{\partial Y} \\ \frac{\partial}{\partial Z} & 0 & \frac{\partial}{\partial X} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(I.28)$$

$$\{\varepsilon\} = [L] \times \{U\}^e$$

Avec : [L]: est la matrice opérateur.

A partir de la loi de HOOKE :

$$\{\sigma\} = [D] \times \{\varepsilon\} \dots\dots\dots(I.29)$$

Avec [D] : est la matrice d'élasticité :

$$\{\sigma\} = [D] \times [L] \times \{U\}^e$$

$$\{U\}^e = [N] \times \{q\}^e$$

$$\{\varepsilon\}^e = [N] \times \{q\}^e = [B] \times \{q\}^e$$

$$\text{Avec : } [B] = [L] \times [N]$$

$$\{\sigma\} = [D] \times [B] \times \{q\}^e \dots\dots\dots(I.30)$$

En substituant ces relations dans l'équation (*)

On arrive à:

$$\int_{V^e} [B]^T \times [D] \times [B] \times \{q\}^e \times \delta \{q\}^{eT} dV^e + \int_{S^e} [N]^T \delta \{q\}^{eT} \{x_i\} dS^e + \int_{V^e} [N]^T \delta \{q\}^{eT} \{x_i\} dV^e \delta \{q\}^{eT} \int_{V^e} [B]^T \times [D] \times [B] \times \{q\}^{eT} dV^e \\ = \delta \{q\}^{eT} \left(\int_{S^e} [N]^T \delta \{q\}^{eT} \{x_i\} dS^e + \int_{V^e} [N]^T \delta \{q\}^{eT} \{x_i\} dV^e \right) \dots\dots\dots I.13$$

Équations fondamentale pour éléments finis en termes de déplacements

$$[K] \times \{q\}^e = \{f\}^e \dots\dots\dots(I.32)$$

Avec :

[K]^e: est la matrice de rigidité élémentaire

{q}^e: Le vecteur de déplacement aux nœuds

$\{F\}^e$: Le vecteur des forces nodales

Avec :

$$[K]^e = \int [B]^T \times [D] \times [B] dV^e \dots\dots\dots(I.33)$$

Vecteur des forces nodales :

$$\{f\}^e = \int_{S^e} [N]^T \{x_i\} dS^e + \int_{V^e} [N]^T \{f_i\} dV^e + \sum_{i=1}^n p_i \dots\dots\dots(I.34)$$

Avec :

(Pi):est une charge concentrée aux nœuds

1.9) Étapes de calcul des poutres par éléments finis :

Données:

Les caractéristiques géométriques (longueur, largeur)

Les caractéristiques physique (E,/L...)

Discrétisation:

Maillage du domaine en éléments finis (type d'élément souhaité) numérotation des nœuds et des éléments

Formulation élémentaire:

Évaluation de la matrice de rigidité élémentaire $[K]^e$

Évaluation du vecteur des forces nodales $\{f\}^e$

Formulation globale :

Assemblage pour plusieurs éléments (addition) :

$$[K]^G = \sum_{e=1}^n [K]^e \dots\dots\dots(I.35)$$

$$\{f\}^G = \sum_{e=1}^n \{f\}^e \dots\dots\dots(I.36)$$

Introduction des conditions d'appuis (déplacements imposés)

Résolution du système globale :

Sachant que :

$$[K]^o \{q\}^G = \{F\}^G \dots\dots\dots(I.37)$$

Détermination des déplacements aux nœuds.

Calcul des contraintes dans chaque élément (efforts internes N, T et M)

Chapitre I : Synthèse bibliographique sur la méthode des éléments finis

Cette méthode consiste à formuler le problème d'élasticité en fonction des

Déplacements aux nœuds.

On peut mettre en évidence les différentes étapes de calcul suivant :

a- formulation élémentaire : calcul des matrices de rigidité élémentaires et des vecteurs des forces nodales pour chaque élément après la discrétisation de la structure en éléments finis souhaités.

b- formulation globale : assemblage (addition) des matrices de rigidité élémentaires et des Forces globales élémentaires de manière à satisfaire les équations d'équilibre des nœuds.

c- prise en compte des conditions de déplacements imposés (condition d'appuis).

d- résolution du système : $[K] \times \{q\} = (F)$ pour la structure complète pour déterminer les Déplacements aux nœuds.

e- calcul des efforts internes (les contraintes) dans chaque élément.

CHAPITRE II

Généralités sur les
Portiques à ossatures
Métalliques

II.1) Généralités :

L'industrie sidérurgique s'est développée à la fin du 19^{ème} siècle en proposant des produits de construction (laminés ou moulés) adaptés à la construction d'ossatures métalliques - Charpente Métallique.

Ces éléments de construction "rigides" permettent de dégager des grands espaces utiles au sol. La portée des éléments d'ossature peut atteindre plusieurs dizaines de mètres.

En outre le poids de ces éléments d'ossature, comparé à ceux d'une même structure en béton armé (ou maçonnerie) est réduit et allège considérablement les charges transmises au sol.

Associé à des éléments de peau "légers" (bardage, façades rideau ...), ces structures sont adaptées à la réalisation de constructions telles que salles de sports, piscines, entrepôts, usines... Leur réalisation est rapide (assemblage direct d'éléments préfabriqués) et donc d'un prix très compétitif [7].

II.2) Terminologie :

Une charpente métallique est constituée de portiques ou fermes réalisés par l'assemblage des poteaux, arbalétriers, entrails... Ces portiques sont reliés entre eux par des pannes (poutres).

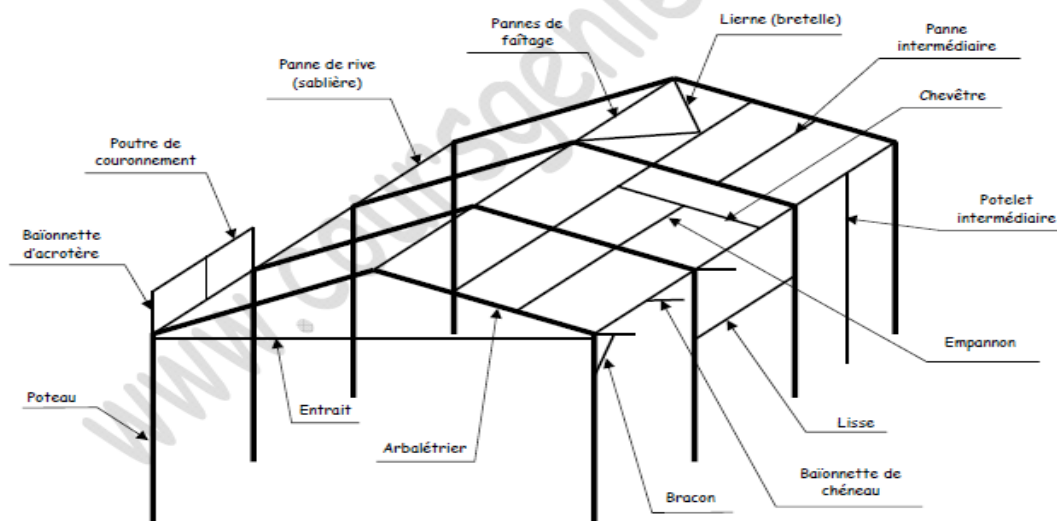
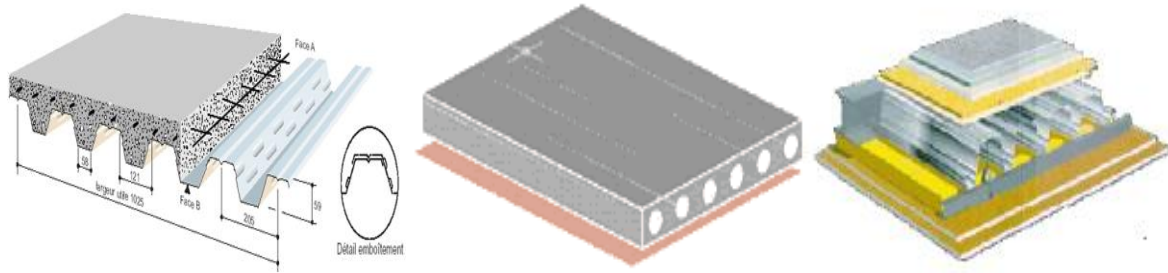


Figure II.0 1: vue de l'ensemble de la structure

Lorsqu'il existe des planchers intermédiaires, ceux-ci sont fréquemment constitués d'une association acier -béton: les planchers collaborant. On trouve aussi des prédelles, des dalles alvéolaires et des planchers secs.



Plancher collaborant Dalle alvéolaire

Plancher sec

II.2.a-Profils associés :

Les profils associés sont généralement des aciers laminés, les charpentes peuvent également être en aluminium.

Poteaux :type HEA, HEB, IPE

Potelets :type UPN, tubulaires

Arbalétriers :type IPE, poutres treillis

Pannes : type IPE, UPN, poutres treillis

Chevêtres :type IPE, UPN

Couronnement :type IPE, UPN

Liernes : type T, fers plats

Baïonnettes :type UPN, fers plats

Profil H

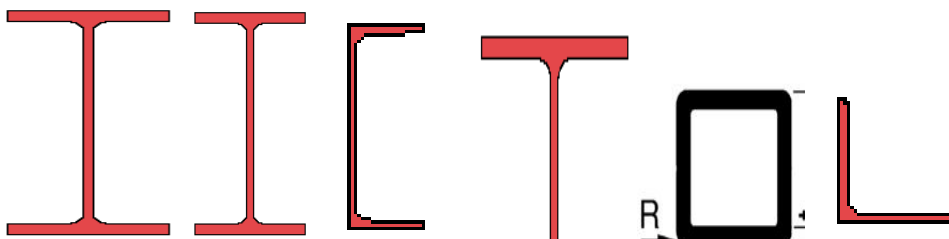
Profil I

Profil U

Profil T

Tube

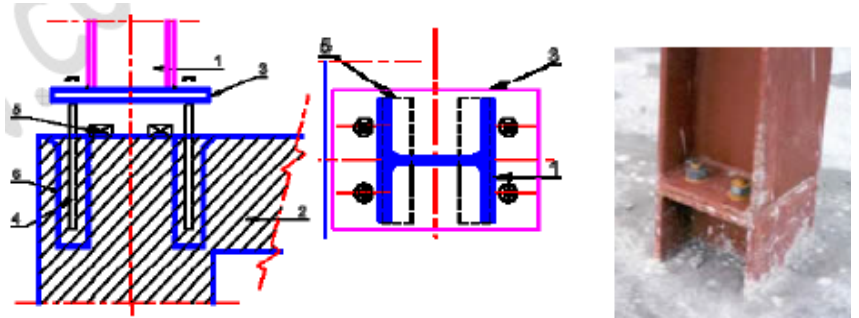
Cornière



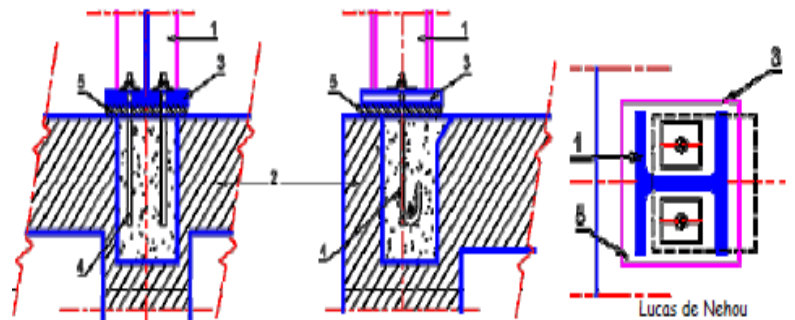
II.2.b) Assemblages :

En fonction de leur rigidité, les assemblages seront considérés encastrés ou articulé, voire ponctuels (Système à corbeaux).

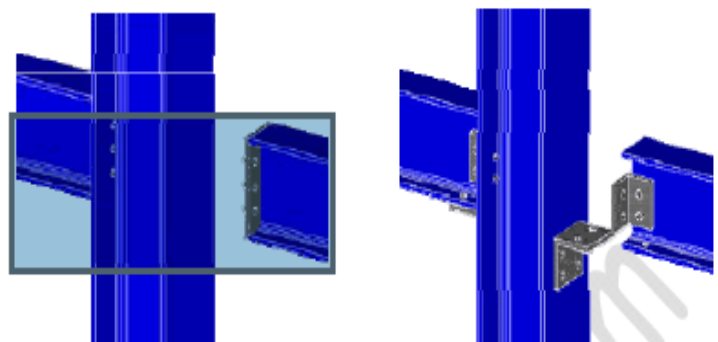
Encastrement au sol



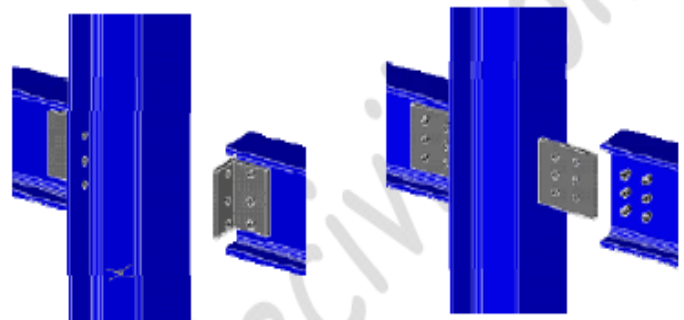
Articulation au sol



Encastrement poteau - poutre



Articulation poteau - poutre



II.3) Contreventement des charpentes :

On appelle contreventement, l'ensemble des éléments de la charpente destinés à :

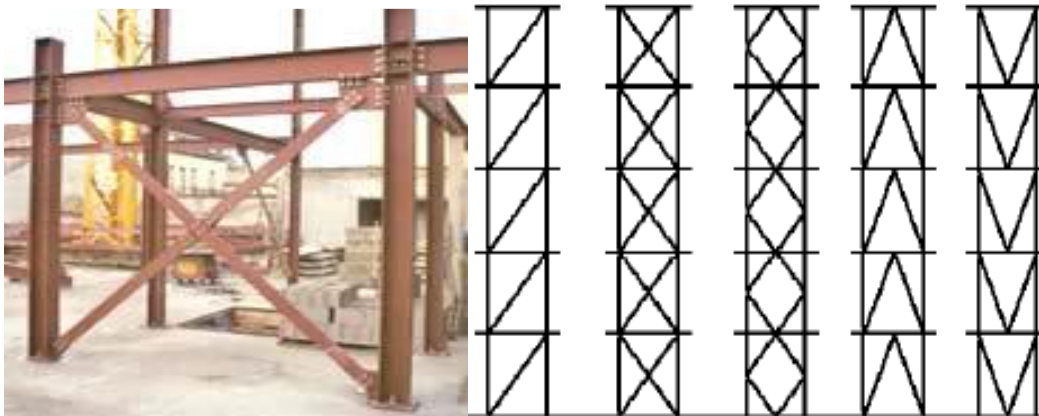
- transmettre les efforts du vent vers les fondations,
- assurer la stabilité de l'ossature face aux efforts du vent.

On distingue deux types de structures:

II.3.a) Les structures à nœuds déplaçables :

Elles sont constituées (pour simplifier) par des assemblages du type articulation permettant une liberté de mouvement de l'ensemble de la structure. Ils sont contreventés dans les 3 plans.

Contreventement par croix de St André Palées triangulées



II.3.b) Les structures à nœuds non déplaçables :

Elles sont constituées par des assemblages de portiques à liaisons du type encastré (associées ou non à des articulations) formant un ensemble rigide. Ces portiques sont dits de contreventement.

Ils sont contreventés dans les 2 autres plans.

La rigidité apportée par les encastremements limite les déplacements des nœuds de la structure.

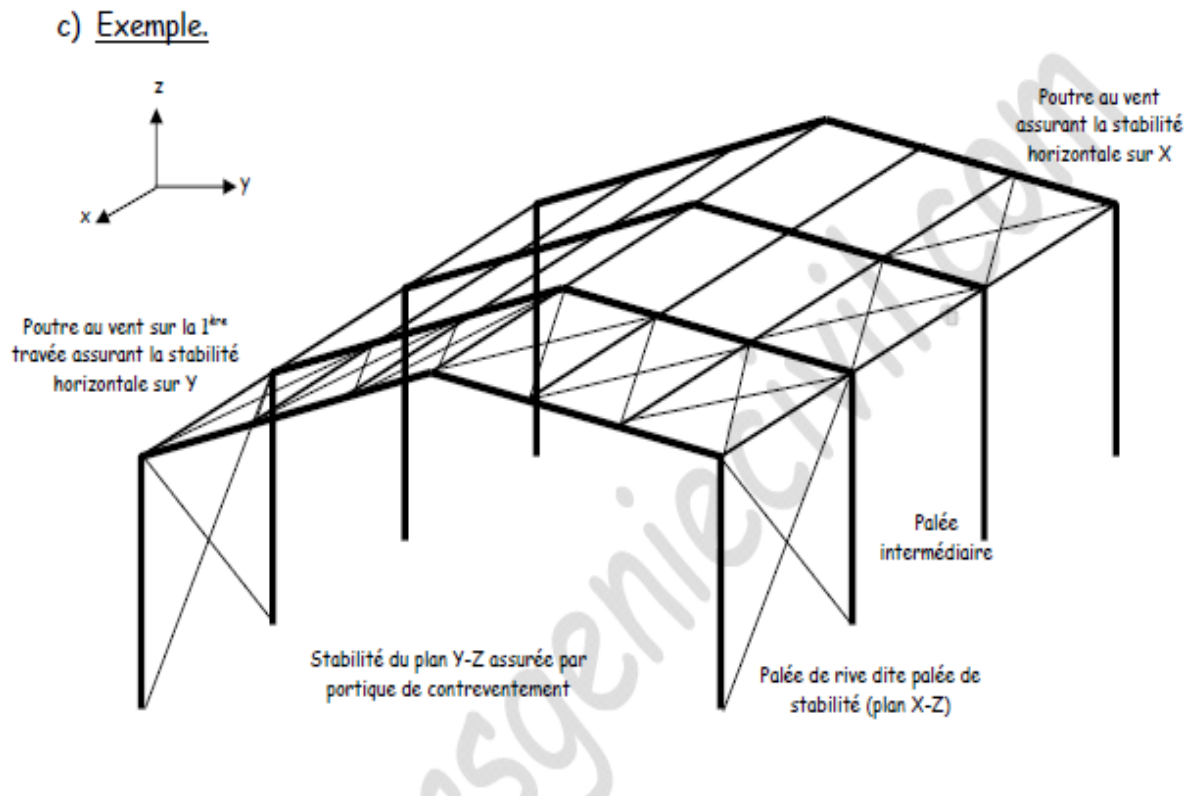


Figure II.0 2: vue de l'ensemble de la structure sans le bardage

Les éléments de contreventement (diagonales et Croix de St André) se comportent comme des bielles : barretendues ou comprimées (il faut alors les vérifier vis à vis du flambement).

Ils ne doivent en aucun cas être considérés comme des dispositifs permettant l'appui d'éléments de structure ou de peau.

Les croix de St André et les diagonales peuvent être constituées de câbles tendus, de laminés T, tubulaire ou de fers plats[8].

II.4) Limites des prestations :

En effet, pour le calcul statique de tels ouvrages, il est courant de ne considérer que l'ossature principale constituée de l'ensemble des éléments porteurs principaux (portique, poteaux, élément de contreventement...). La figure II. Donne un exemple d'une telle modélisation.

Attention, dans cet exemple, 3 palées de stabilité ont été disposées aux deux extrémités du bâtiment. Cette disposition n'est pas classique. Elle a été retenue pour souligner le fait qu'il est possible de concevoir une poutre au vent hyperstatique mais ce n'est pas la solution la plus courante, notamment car les palées centrales constituent un obstacle au libre passage[9].

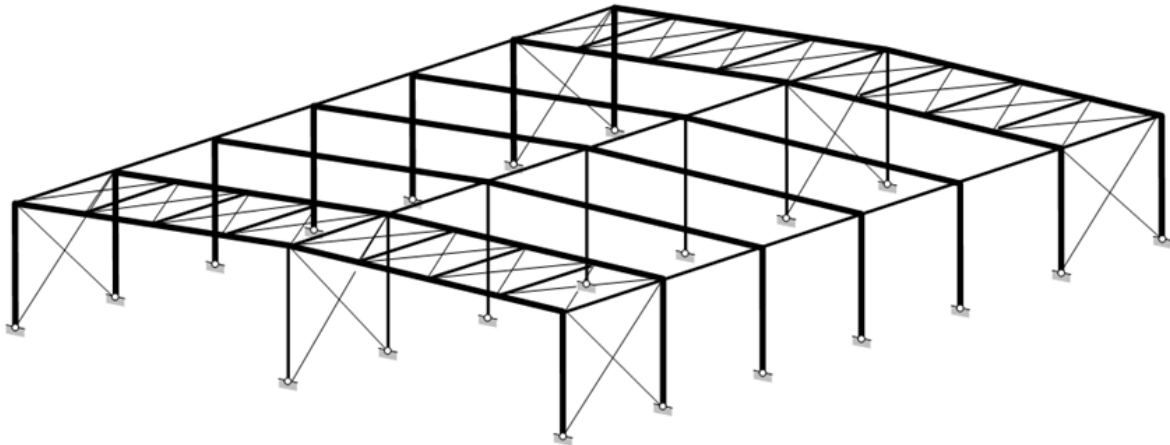


Figure II.0 3: Modélisation de la structure porteuse principale avec ses stabilités.

Il faut souligner qu'une modélisation 2D est souvent suffisante pour les structures industrielles constituées de portiques supportant des actions dirigées dans leur plan et dont les déplacements sont situés dans le même plan (figure II.04). L'instabilité des éléments comprimés doit cependant être étudiée dans tous les plans où elle risque de se développer.

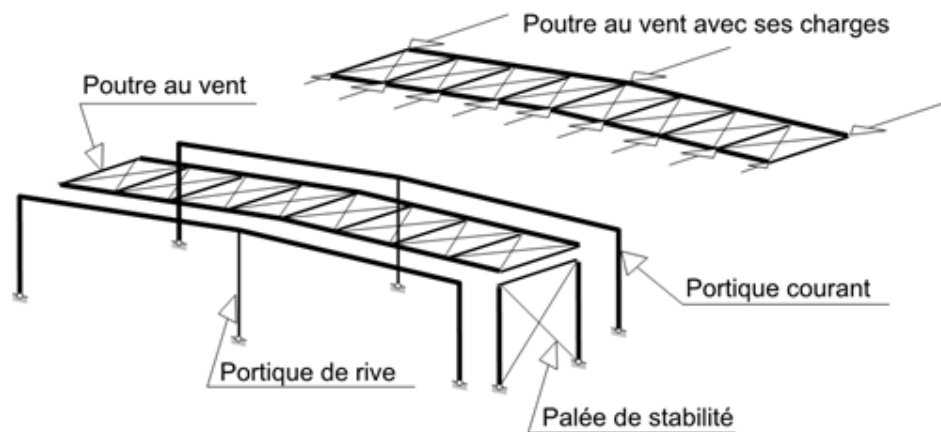


Figure II.0 4: Modélisation des éléments principaux de la structure porteuse.

II.5) Type de cadres en acier :

Les charpentes en acier ont été largement utilisées dans les bâtiments industriels à un étage et de faible hauteur (figure 1.1 (a)), les centrales électriques (figure 1.1 (b)), les mines de minerai (figure 1.1 (c)), les plates-formes pétrolières et gazières en mer (Figure 1.1 (d)) et immeubles de grande hauteur à plusieurs étages (Figure 1.1 (e)). Les discussions contenues dans ce livre porteront principalement, mais sans s'y limiter, sur les cadres en acier utilisés dans les bâtiments. Selon la vue en élévation, les cadres en acier utilisés dans les bâtiments de faible hauteur et de grande hauteur peuvent être classés en (1) cadre pur (Figure 1.2), (2) cadre à contreventement concentrique (Figure 1.3), (3) cadre à contreventement excentrique (Figure 1.4) et (4) tube de cadre (Figure 1.5).

Un cadre pur a une bonne ductilité avec une rigidité de balancement moins bonne pour les bâtiments à plusieurs étages. Renforcé avec des renforts pour un cadre pur, la rigidité du balancement d'un cadre contreventé concentriquement est beaucoup améliorée. Cependant, sa capacité contre les charges latérales sera facilement réduite si les contreventements en compression sont flambés, ce qui est défavorable dans des conditions telles que les tremblements de terre. Un cadre à contreventement excentrique est un compromis de rigidité et de capacité de balancement entre le cadre pur et le cadre à contreventement concentrique. Le flambage des contreventements en compression peut être évité en introduisant la déformation par cisaillement d'une poutre de cisaillement excentrique, qui fournit de bonnes performances de consommation d'énergie au cadre contreventé excentriquement (Li, 2004). Un tube de cadre est en fait un groupe de cadres avec des colonnes très proches, où, en raison de la petite portée et de la rigidité relativement grande des poutres en acier, les colonnes dans la périphérie se courbent comme un tube à paroi mince pour résister aux charges de balancement. Parce qu'il a une bonne rigidité et une bonne capacité de charge, le tube de cadre est généralement utilisé dans les immeubles de grande hauteur (Council on Tall Buildings, 1979). [10]

II.5.a) Type de composants pour cadres en acier :

Pour faciliter la fabrication, les composants prismatiques à section uniforme (figure II.6(a)) sont généralement utilisés pour les cadres en acier. Cependant, pour réduire la consommation d'acier, des poutres et des poteaux coniques (figure II.6 (b)) sont normalement utilisés pour les portiques en acier (figure II.7) afin de conserver une résistance relativement uniforme pour résister aux charges verticales dominantes (Li, 2001). Dans les bâtiments en acier à plusieurs étages, le béton coulé sur place est largement utilisé pour les dalles de plancher (figure II.8). Pour utiliser la capacité des dalles de béton, une poutre mixte peut être conçue, et avec des poteaux de cisaillement à tête, l'action composite entre les dalles de béton et les poutres en acier peut être obtenue (Nethercot, 2003), comme le montre la figure II.9

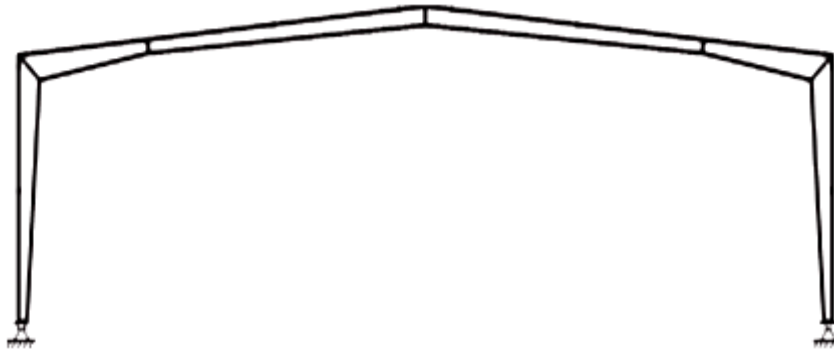


Figure II.0 5: Cadre de portail en acier avec éléments coniques



Figure II.0 6: application des charpentes en acier: (a) bâtiment industriel à un étage: (b) centrale électrique: (c) tour des mineurs de minerai: (d) plate-forme de distribution de pétrole et de gaz: (e) immeuble de grande hauteur

II.5.a-1) Types de composants pour cadres en acier

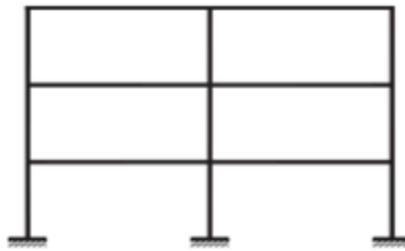


Figure II.0 7: cadre pur

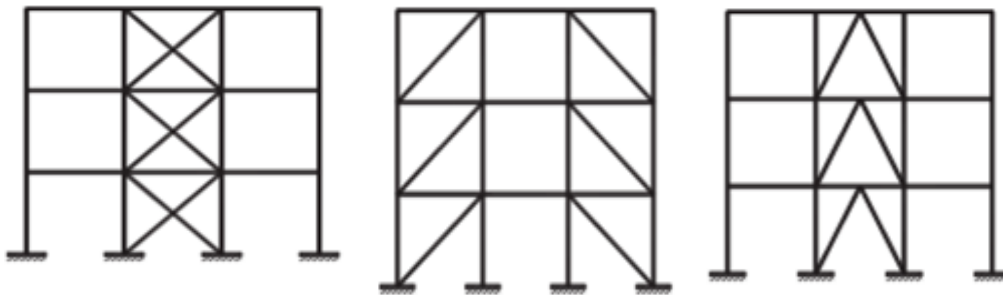


Figure II.0 8: Montures à brèches consenties

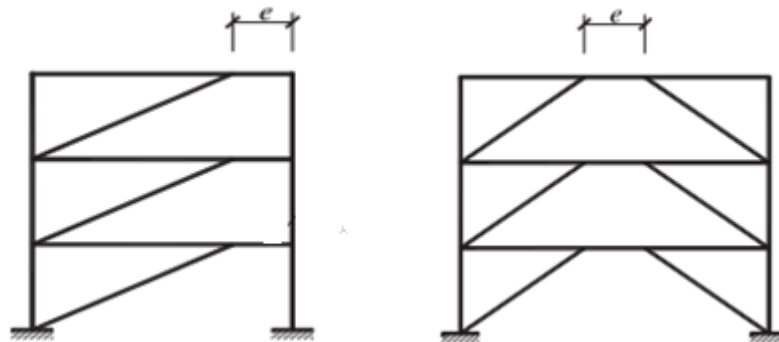


Figure II.0 9: Cadres à brèche excentrique

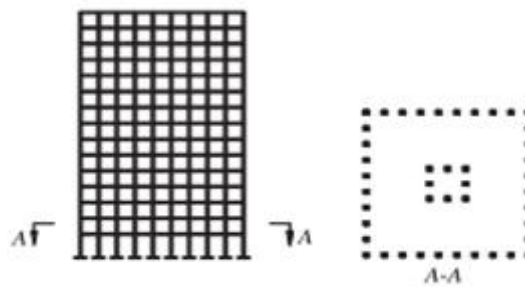


Figure II. 10 : Structures cadre-tube

II.6) Portiques métalliques simples

Efforts. Moments. Déformations

1. Charge horizontale isolée en tête
2. Charge verticale uniformément répartie sur la traverse
3. Charge horizontale uniformément répartie sur le poteau
4. Charge verticale concentrée au milieu de la traverse.

Dans cet article nous donnerons les valeurs des réactions aux appuis, du moment, du déplacement horizontal au niveau de la traverse et des angles de rotations des portiques simples.

Notations et Symboles

• Articulation

┌ Encastrement

Fflèche

$$k = \frac{\text{raideur traverse}}{\text{raideur poteau}} = \frac{I_1}{I_0} \cdot \frac{h}{\ell}$$

H, V Réactions sur appuis

M Moment

δ Déplacement horizontal au niveau de la traverse

θ_A, θ_D Rotation en pied de poteau

θ_B, θ_C Rotation en tête de poteau

θ_E Rotation au point central de la traverse

Tableau II.0 1: Charge horizontale isolée en tête

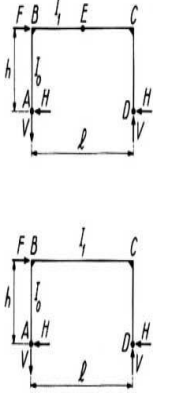
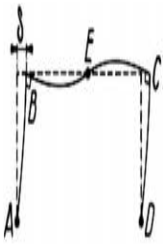
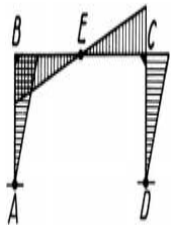
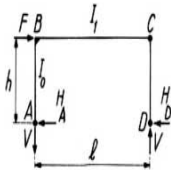
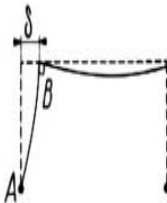
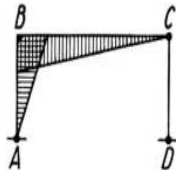
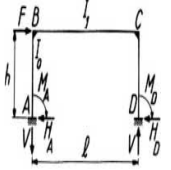
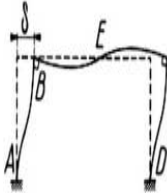
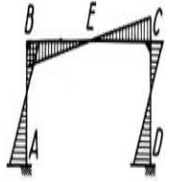
Schéma statique	Déformée	Diagramme des moments	H	V	M	θ	δ
 <p>$K = \frac{I_1}{I_0} \cdot \frac{h}{l}$</p>			$\frac{1}{2}F$	$F \cdot \frac{h}{l}$	$M_B = +\frac{Fh}{l}$	$\theta_A = \frac{Fhl(3k+1)}{12EI_1}$ $\theta_B = -\frac{Fhl}{12EI_1}$ $\theta_E = -\frac{Fhl}{24EI_1}$	$\frac{Fh^2\ell}{12EI_1}(2K+1)$
 <p>$K = \frac{I_1}{I_0} \cdot \frac{h}{l}$</p>			$H_A = F$ $H_D = 0$	$F \cdot \frac{h}{l}$	$M_g = Hh = Fh$	$\theta_A = +\frac{Fhl}{6EI_1}(2+3K)$ $\theta_B = +\frac{Fhl}{3EI_1}$ $\theta_C = -\frac{Fhl}{6EI_1}$ $\theta_D = \frac{8}{h} = \frac{Fhl}{3EI_1}(1+K)$	$\frac{Fh^2\ell}{3EI_1}(1+K)$
 <p>$k = \frac{I_1}{I_0} \cdot \frac{h}{l} N_1 = 6K+1$</p>			$\frac{F}{2}$	$F \cdot \frac{h}{l} \cdot \frac{3k}{N_1}$	$\left. \begin{matrix} M_A \\ M_D \end{matrix} \right\} = \mp \left(\frac{Vl}{2} - \frac{Fh}{2} \right)$ $\left. \begin{matrix} M_B \\ M_C \end{matrix} \right\} = \pm \frac{Vl}{2}$	$\theta_A = 0$ $\theta_B = \frac{Vl^2}{12EI_1}$ $\theta_E = -\frac{Vl^2}{24EI_1}$	$\frac{h}{12EI_1}(2Fh-3Vl)$

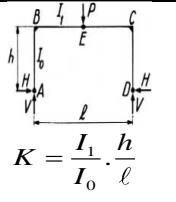
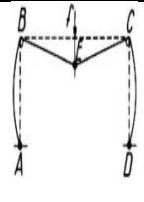
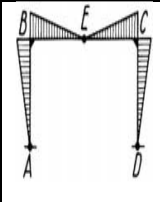
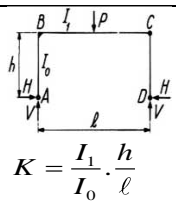
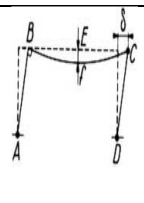
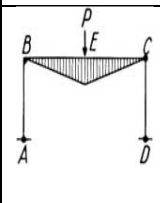
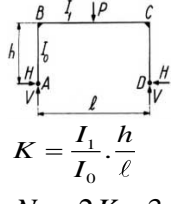
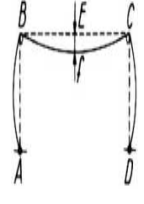
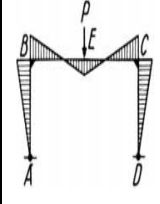
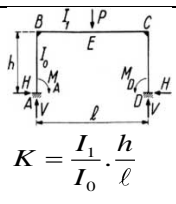
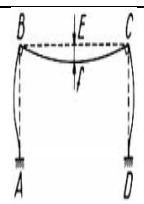
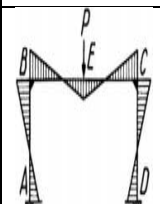
Tableau II.0 2: Charge verticale uniformément répartie sur la traverse

Schéma statique	Déformée	Diagramme des moments	H	V	N	θ	δ et F
<p>$K = \frac{I_1}{I_0} \cdot \frac{h}{l}$</p>			$\frac{P}{8} \cdot \frac{h}{l}$	$\frac{P}{2}$	$M_B = -\frac{P\ell}{8}$	$\theta_A = -\frac{P\ell h}{48EI_0}$ $\theta_B = +\frac{P\ell h}{24EI_0}$ $\theta_E = +\frac{P\ell^2}{48EI_1}(2K+1)$	$F = \frac{P\ell^3}{384EI_0}(8K+3)$
			0	$\frac{P}{2}$	$M_m = +\frac{P\ell}{8}$	$\theta_A = -\theta_B = +\frac{P\ell^2}{24EI_1}$	$\delta = \frac{P\ell^2 h}{24EI_1}$ $F = \frac{5}{384} \cdot \frac{P\ell^3}{EI_1}$
			$\frac{P}{4N_1} \cdot \frac{\ell}{h}$	$\frac{P}{2}$	$M_B = -\frac{P\ell}{4N_1}$ $M_E = +\frac{P\ell}{8} \cdot \frac{N_3}{N_1}$	$\theta_A = -\frac{P\ell h}{24EI_0} \cdot \frac{1}{N_1}$ $\theta_B = -\frac{P\ell h}{12EI_0} \cdot \frac{1}{N_1}$	$F = \frac{P\ell^3}{384EI_1} \cdot \frac{N_2}{N_1}$
			$\frac{P}{4N_1} \cdot \frac{\ell}{h}$	$\frac{P}{2}$	$M_A = +\frac{P\ell}{12N_1}$ $M_B = -\frac{P\ell}{6N_1}$ $M_E = -\frac{P\ell}{24} \cdot \frac{N_3}{N_1}$	$\theta_A = 0$ $\theta_B = +\frac{Hh^2}{6EI_0} = +\frac{P\ell h}{24N_1 EI_0}$	$F = \frac{P\ell^3}{384EI_1} \cdot \frac{N_2}{N_1}$

Tableau II.0 3: Charge horizontale uniformément répartie sur le poteau

Schéma statique	Déformée	Diagramme des moments	H	V	N	θ	δ et F
<p> $K = \frac{I_1}{I_0} \cdot \frac{h}{l}$ </p>			$H_A = \frac{3}{4} F$ $H_D = \frac{1}{4} F$	$\frac{Fh}{2l}$	$M_B = +\frac{Fh}{4} = -M_C$ $M_m = +\frac{9}{32} Fh$	$\theta_A \left. \vphantom{\theta_A} \right\} = \frac{Fh\ell}{48EI_1} \left\{ \begin{array}{l} (9K+2) \\ -(7K+2) \end{array} \right.$ $\theta_B \left. \vphantom{\theta_B} \right\} = +\frac{Fh\ell}{48EI_1} (2+K)$ $\theta_C = \frac{Fh\ell}{48} (1\pm K)$	$\delta = \frac{Fh^2\ell}{48EI_1} (2-11K)$ $F = \frac{Fh^2\ell}{48EI_0} (2-K)$
<p> $K = \frac{I_1}{I_0} \cdot \frac{h}{l}$ $N_1 = 1+2K$ $N_2 = 4+5K$ </p>			$H_A = F$ $H_D = 0$	$\frac{Fh}{2l}$	$M_{B_{max}} = \frac{Fh}{2}$	$\theta_A = \frac{Fh\ell}{6EI_1} \cdot N_1$ $\theta_B = \frac{Fh\ell}{6EI_1}$ $\theta_C = -\frac{Fh\ell}{12EI_1}$	$\delta = \frac{Pl^2h}{24EI_1} \cdot N_2$ $F_{max} = \frac{Ph\ell^2}{18\sqrt{3}EI_1}$
<p> $K = (I_1/I_0) \cdot (h/l)$ $N_1 = 3+2K$ $N_3 = 6+5K$ $N_2 = 18+11K$ $N_6 = 6+K$ $N_3 = 6+5K$ $N_7 = 2+5K$ $N_4 = 2+K$ $N_8 = 6+34K+17K^2$ </p>			$H_A = \frac{F}{8} \cdot \frac{N_2}{N_1}$ $H_D = \frac{F}{8} \cdot \frac{N_5}{N_1}$	$\frac{Fh}{2l}$	$M_B = \frac{3}{8} Fh \cdot \frac{N_4}{N_1}$ $M_C = -\frac{5}{8} Fh \cdot \frac{N_5}{N_1}$	$\theta_A = -\frac{Fh\ell}{48EI_1} \cdot \frac{N_8}{N_1}$ $\theta_B = \frac{Fh\ell}{48EI_1} \cdot \frac{N_6}{N_1}$	$\delta = \frac{Fh^2\ell}{48EI_1} \cdot N_1$ $F = \frac{1}{64} \frac{Fh\ell^2}{EI_1} \cdot \frac{K}{N_1}$
<p> $K = \frac{I_1}{I_0} \cdot \frac{h}{l}$ $N_1 = K+2$ $N_4 = 4K+1$ $N_2 = 6K+1$ $N_5 = 2K+3$ $N_3 = K+3$ $N_6 = 6K+13$ </p>			$H_A = \frac{F}{8} \cdot \frac{N_6}{N_1}$ $H_D = \frac{F}{8} \cdot \frac{N_5}{N_1}$	$\frac{Fh}{\ell} \cdot \frac{K}{N_2}$	$M_A = -\frac{Fh}{4} \left(\frac{N_4}{N_2} + \frac{N_3}{6N_1} \right)$ $M_D = +\frac{Fh}{4} \left(\frac{N_4}{N_1} - \frac{N_3}{6N_1} \right)$ $M_B = +\frac{Fh}{24} K \left(\frac{12}{N_2} - \frac{1}{N_1} \right)$ $M_C = -\frac{Fh}{24} K \left(\frac{12}{N_2} + \frac{1}{N_1} \right)$	$\theta_B = \frac{Fh\ell}{48EI_1} \left(\frac{4}{N_2} - \frac{K}{N_1} \right)$ $\theta_E = -\frac{Fh\ell}{24EI_1} \cdot \frac{2-3K}{N_2}$	$\delta = \frac{Fh^3}{16EI_1} \cdot \frac{1+2K}{N_2}$ $F_E = \frac{Fh\ell^2}{192EI_1} \cdot \frac{K}{N_1}$

Tableau II.0 4: Charge verticale concentrée au milieu de la traverse

Schéma statique	Déformée	Diagramme des moments	H	V	M	θ	δ et F
 $K = \frac{I_1}{I_0} \cdot \frac{h}{l}$			$\frac{P\ell}{4}$	$\frac{P}{2}$	$M_B = -\frac{P\ell}{4}$	$\theta_B = \frac{P\ell h}{12EI_0}$ $\theta_E = \frac{P\ell^2}{48EI_1}(4K+3)$ $\theta_A = -\frac{P\ell h}{24EI_0}$	$F = \frac{P\ell^3}{48EI_1}(2K+1)$
 $K = \frac{I_1}{I_0} \cdot \frac{h}{l}$			0	$\frac{P}{2}$	$M_E = +\frac{P\ell}{4}$	$\theta_A = -\theta_B = \frac{P\ell^2}{16EI_1}$	$\delta = \frac{P\ell^2 h}{16EI_1}$ $F = \frac{P\ell^3}{48EI_1}$
 $K = \frac{I_1}{I_0} \cdot \frac{h}{l}$ $N_1 = 2K + 3$ $N_2 = 4K + 3$ $N_3 = 8K + 3$			$\frac{3}{9N_1} \cdot \frac{P\ell}{h}$	$\frac{P}{2}$	$M_B = -\frac{3}{8N_1} P\ell$ $M_E = \frac{P\ell}{8} \cdot \frac{N_2}{N_1}$	$\theta_A = \frac{1}{16N_1} \cdot \frac{P\ell h}{EI_0}$ $\theta_B = \frac{K}{8N_1} \cdot \frac{P\ell^2}{EI_1}$ ou $\frac{1}{8N_1} \cdot \frac{P\ell h}{EI_0}$ $\theta_E = 0$	$F = \frac{P\ell^3}{192EI_1} \cdot \frac{N_3}{N_1}$
 $K = \frac{I_1}{I_0} \cdot \frac{h}{l}$ $N_1 = K + 2$ $N_2 = 2K + 1$ $N_3 = K + 1$			$\frac{3}{8N_1} \cdot \frac{P\ell}{h}$	$\frac{P}{2}$	$M_A = +\frac{P\ell}{8N_1}$ $M_B = -\frac{P\ell}{4N_1}$ $M_E = +\frac{P\ell}{4} \cdot \frac{N_2}{N_1}$	$\theta_B = \frac{1}{16EI_0} \cdot \frac{P\ell h}{N_1}$	$F = \frac{P\ell^3}{96EI_1} \cdot \frac{N_2}{N_1}$

CHAPITRE III

Modélisation des portiques
à ossatures métalliques par la méthode des
Éléments finis

III.1) Introduction :

A l'heure actuelle, on dispose un code de calcul par la méthode des éléments finis (programme) permettant le calcul numérique des systèmes portiques sous divers chargements. À cet effet tout d'abord nous effectuons une comparaison des résultats obtenus par cette présente méthode avec ceux donnés par les méthodes existantes dans la littérature afin d'examiner la qualité des résultats obtenus numériquement. Par la suite nous présentons certains exemples d'application concernant des portiques à traverses droites ou inclinées et par l'exécution du programme en langage Maple nous exploitons les résultats des efforts internes dans les éléments du portique ainsi que les déplacements des nœuds.

III.2) Développement d'un code de calcul par élément finis

Entrée des données (caractéristique géométrique et physiques)

Cordonnées des nœuds et (x y).

Numérotation des nœuds et des éléments (la matrice de connectivité)

Introduction des conditions d'appuis (déplacements imposés)

Chargement (forces nodales)

Calcul de la matrice de rigidité élémentaire des éléments

Appel aux sous programmes de calcul des déplacements

Appel aux sous programmes de calcul des efforts internes.

Impression des résultats (déplacements aux nœuds et les efforts dans chaque barre)

III.3) formulation en éléments finis des systèmes portiques

Ce type d'élément est traité pour l'analyse des structures formées de poutres ou barres dans un plan (portiques) les nœuds de l'élément peuvent être des extrémités de la barre et les inconnus (les degrés de liberté) sont : la translation suivant les directions (X, Y) du plan et la rotation dans ce plan autour de l'axe (Z).

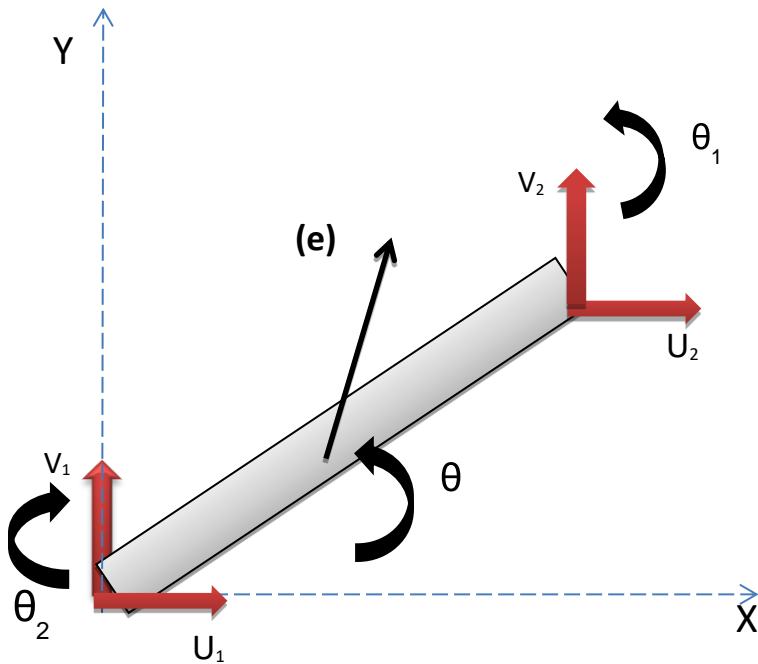


Figure III.01 : Elément de barre a deux nœuds avec joints rigides

Nous allons traiter le cas d'un élément d'une poutre du plan (X, Y) à savoir les caractéristiques géométriques suivantes:

L : la longueur de la barre.

E : module d'élasticité longitudinal.

A : la section transversale.

(*U*, *V*) sont les déplacements suivant les directions (X, Y) respectivement, ces déplacements sont affectés en chaque nœud de cette barre (6 degrés de liberté).

III.4) Interpolation nodale sur les déplacements:

Pour ce problème, on se propose le model de déplacements sous forme d'un polynôme d'approximation suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} U(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x \quad \dots\dots\dots(\text{III.1}) \\ V(x) = \alpha_3 + \alpha_4 x + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 x^3 \end{array} \right.$$

La rotation (θ) étant la dérivée de déplacement (*V*) par rapport à (*x*)

$$\theta(x) = \frac{V_x}{dx} = \alpha_4 + 2\alpha_5 x + 3\alpha_6 x^2 \dots\dots\dots (\text{III.2})$$

Le vecteur de déplacement: α_1

$$\{q\}^e = \langle U_1 \ V_1 \ \theta_1, U_2 \ V_2 \ \theta_2 \rangle^T$$

Sous une forme matricielle:

$$\begin{Bmatrix} U(x) \\ V(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots \text{(III.3)}$$

$$\begin{Bmatrix} U(x) \\ V(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = \varphi(x) \cdot \{\alpha_i\} \dots\dots\dots \text{(III.4)}$$

= Conditions de déplacements aux nœuds 1 et 2 :

Nœud (1) :

Nœud (2) :

$$X=0 \begin{cases} U_1(0) = \alpha_1 = U_1 \\ V_1(0) = \alpha_3 = V_1 \\ \theta_1(0) = \alpha_4 = \theta_1 \end{cases} \quad X=L \begin{cases} U_2(L) = \alpha_1 + \alpha_2 L = U_2 \\ V_2(L) = \alpha_3 + \alpha_4 L + \alpha_5 L^2 + \alpha_6 L^3 = V_2 \dots\dots\dots \text{(III.5)} \\ \theta_2(L) = \alpha_4 + 2\alpha_5 L + 3\alpha_6 L^2 = \theta_2 \end{cases}$$

Que nous pouvant réécrire sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ \theta_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix}$$

Ou $\{q\}^e = [A] * \{\alpha\} \dots\dots\dots \text{(III.6)}$

Pour déterminer les paramètres d'approximations $\{\alpha\}$, il suffit d'inverser la matrice $[A]$ ceci peut se faire comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L} & 0 & \frac{3}{L^2} & -\frac{1}{L} \\ 0 & \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & 0 & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ \theta_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

de (2) : $\{\alpha\} = \{q\}^e * [A]^{-1} \dots\dots\dots \text{(III.7)}$

En substituant (6) dans la relation (4)

$$\begin{Bmatrix} U(x) \\ V(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = [\varphi(x)] * [A]^{-1} * \{q\}^e = [N] * \{q\}^e \dots\dots\dots(\text{III.8})$$

Ou [N] : la matrice d'interpolation

$$N = \begin{bmatrix} (1 - \frac{x}{L}) & 0 & 0 & (\frac{1}{L}) & 0 & 0 \\ 0 & (1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}) & (x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^3}) & 0 & (\frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}) & (-\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}) \\ 0 & (-\frac{6x}{L^2} + \frac{6x^2}{L^3}) & (1 - \frac{4x}{L} + \frac{3x^2}{L^3}) & 0 & (\frac{6x}{L^2} - \frac{6x^2}{L^3}) & (-\frac{2x}{L} + \frac{3x^2}{L^2}) \end{bmatrix} \dots\dots\dots(\text{III.9})$$

III.4.a) Relation déplacement –déformation:

Les contraintes et les déformations sont des grandeurs généralisées et dans notre cas on a deux types de déformations :

- 1- Une déformation longitudinale sous l'effet de la traction ou de compression $\epsilon(x)$
- 2- Une déformation sous l'effet de la flexion ξ

Soit: $\epsilon_x = \frac{du}{dx} = \alpha_2$

$\xi = -\frac{d^2v}{dx^2} = -2\alpha_5 - 6\alpha_6 x$

Le tenseur de déformation prend la forme :

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \xi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -6x \end{bmatrix} \{\alpha_i\}$$

$= G(x)_y \cdot \{q\}^e \cdot [A]^{-1} = -[B] \cdot \{q\}^e$

Avec : $[B] = G(x)_y \cdot [A]^{-1}$

La matrice [B] peut être écrite explicitement sous la forme:

$$[B] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3})_y & (\frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2})_y & 0 & (\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3})_y & (\frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2})_y \end{bmatrix} \dots\dots\dots(\text{III.10})$$

III.4.b) Relation déformation – contrainte:

La loi de comportement relie le tenseur des déformations au tenseur des contraintes par la formule suivante : $\sigma(x) = E.\varepsilon(x)$

Ou E : représente le module d'Young.

A parti des relations précédentes on déduit : $\{\alpha(x)\} = E.[B(x)]\{q\}^e$

III.4.c) Calcul des efforts internes (moment de flexion et effort normal) :

-D'après la loi de la ligne élastique on a :

$$M(x) = -EI \frac{d^2v}{dx^2} \text{ (III.11)}$$

-D'autre part on a :

$$\xi = -\frac{d^2v}{dx^2} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -2 \quad -6x] \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \dots\dots \text{ (III.12)}$$

-En remplaçant (2) dans l'expression (1)

on aura:

$$M(x) = -EI [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -2 \quad -6x] \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots \text{ (III.13)}$$

$$M(x) = -EI\xi \dots\dots\dots \text{ (III.14)}$$

-D'après la loi de Hooke :

$$N = EA\varepsilon_x$$

Sous forme matricielle on obtient:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \xi \end{Bmatrix} = [D]\{\varepsilon\} = [B]\{q\}^e$$

De la relation précédente (14) l'expression du moment s'exprime alors comme suit:

$$M(x) = EI[B]\{q\}^e$$

$$\text{Avec : } \langle B \rangle = \left\langle \left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \right) \left(\frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2} \right) \left(-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \right) \right\rangle \left(\frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2} \right)$$

$$\{q\}^e = \langle V_1 \theta_1 V_2 \theta_2 \rangle^T$$

$$\text{Donc : } \{M(x)\}^e = EI \cdot \left\langle \left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \right) \left(\frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2} \right) \left(-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \right) \left(\frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2} \right) \right\rangle \begin{Bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

Et encore:

$$\{M(x)\}^e = EI \cdot \left(\left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \right) V_1 \left(\frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2} \right) \theta_1 + \left(-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \right) V_2 \left(\frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2} \right) \theta_2 \right) \dots \dots \text{(III. 15)}$$

L'expression de l'effort normal s'exprime comme suit:

$$\begin{cases} N = EA[B]\{q\}^e \\ N = \frac{EA}{L} (U_2 - U_1) \dots \dots \dots \text{(III.16)} \end{cases}$$

III.4.e) Calcul de la matrice de rigidité élémentaire:

Pour un matériau élastique, la matrice de rigidité $[K]^e$ est donnée par :

$$[K]^e = \int [B]^T \cdot [D][B] dv^e$$

Avec : $[D]=E$ (module de Young), $dv=A dx$

La matrice de rigidité élémentaire sous l'effet de la flexion composée (la traction ou compression plus la flexion simple) devient:

$$[K]^e = EA \int [B]^e \cdot [B] dx$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 0 \\ 0 & (\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}) \\ 0 & (\frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2}) \\ \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & (-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}) \\ 0 & (\frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}) & (\frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2}) & 0 & (\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}) & (\frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2}) \end{bmatrix} dx$$

On arrive à:

$$[K]^e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(\text{III.17})$$

Si "I" et "A" sont constants : la matrice de rigidité élémentaire d'un élément de barre à deux nœuds soumis à la sollicitation de flexion composée s'écrit comme suit :

$$[K]^e = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & -A & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12I}{L^3} & \frac{6I}{L^2} & 0 & -\frac{12I}{L^3} & \frac{6I}{L^2} \\ 0 & \frac{6I}{L^2} & 4I & 0 & -\frac{6I}{L^2} & 2I \\ -A & 0 & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12I}{L^3} & -\frac{6I}{L^2} & 0 & \frac{12I}{L^3} & -\frac{6I}{L^2} \\ 0 & \frac{6I}{L^2} & 2I & 0 & -\frac{6I}{L^2} & 4I \end{bmatrix} \dots\dots\dots(\text{III.18})$$

III.5) Exemple de comparaison :

Soit le cas d'un portique composé de deux éléments (poteau, traverse) soumis à une charge verticale à une extrémité comme il montré en figure (III.02).

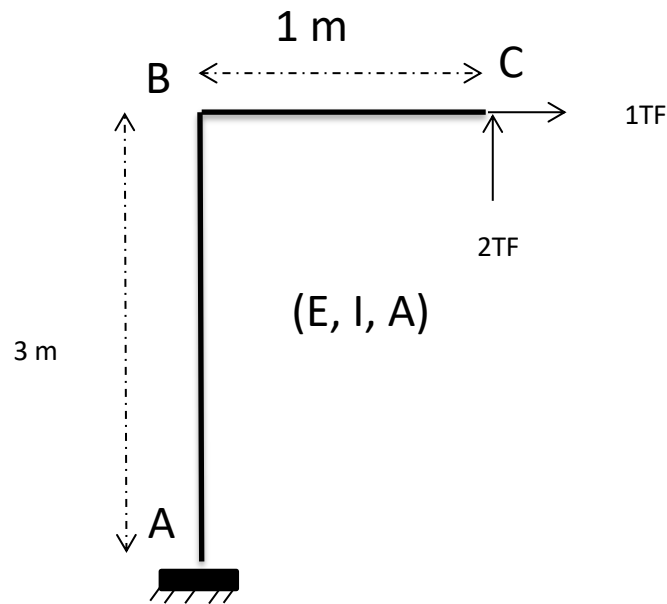
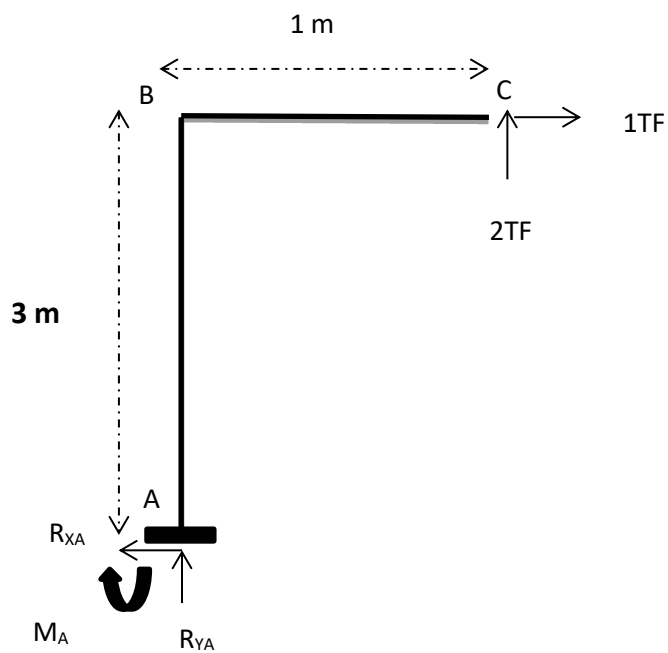


Figure III.02: portique à étudier

III.3.1 Solution RDM

Calcul des efforts internes



$$\sum F_X = 0 \Rightarrow -R_{X_A} + 1tf = 0$$

$$\Rightarrow R_{X_A} = 1tf$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow R_{Y_A} + 2tf = 0$$

$$\Rightarrow R_{Y_A} = -2tf$$

$$\sum M_{/A} = 0 \Rightarrow -M_R - 1 \times 3tf + 2tf \times 1 = 0$$

$$\Rightarrow M_R = -1tf.m$$

Section 1-1 :

$$0 \leq X \leq 3$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow R_{Y_A} + N_{AB} = 0$$

$$\Rightarrow N_X^{AB} = -R_{Y_A} = 2TF$$

$$\sum M_X^{AB} = 0 \Rightarrow M_R + X.R_{X_A} = M_X^{AB}$$

$$\Rightarrow M_X^{AB} = M_R + X.R_{X_A} = -1 + X$$

$$X = 0 \Rightarrow M_X^{AB} = -1tf.m$$

$$X = 3 \Rightarrow M_X^{AB} = 2tf.m$$

Section 2-2 :

$$0 \leq X \leq 1$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow -R_{X_A} + N_{BC} = 0$$

$$\Rightarrow N_X^{BC} = R_{X_A} = 1tf$$

$$\sum M_X^{BC} = 0 \Rightarrow M_R + X.R_{Y_A} + R_{X_A}.3 = M_X^{BC}$$

$$\Rightarrow M_X^{BC} = M_R + X.R_{Y_A} + R_{X_A}.3 = 2.(1 - X)$$

$$X = 0 \Rightarrow M_X^{BC} = 2tf.m$$

$$X = 1 \Rightarrow M_X^{BC} = 0tf.m$$

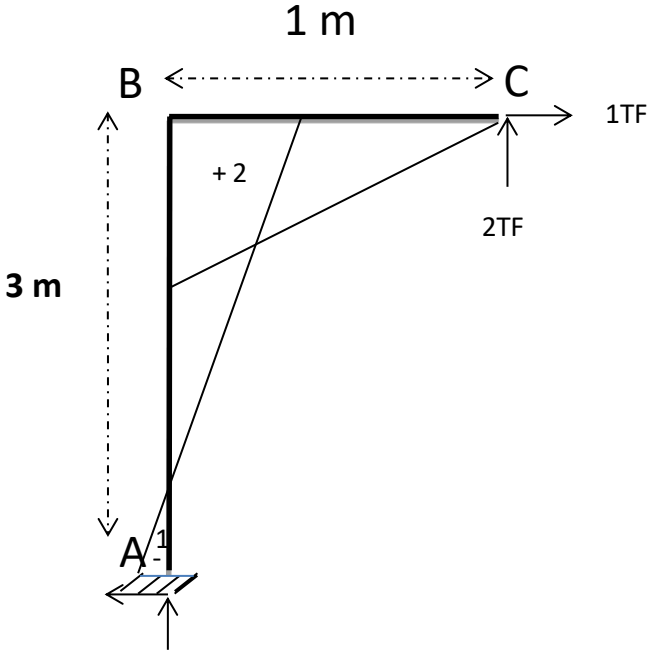


Figure III.03:Diagramme des moments M

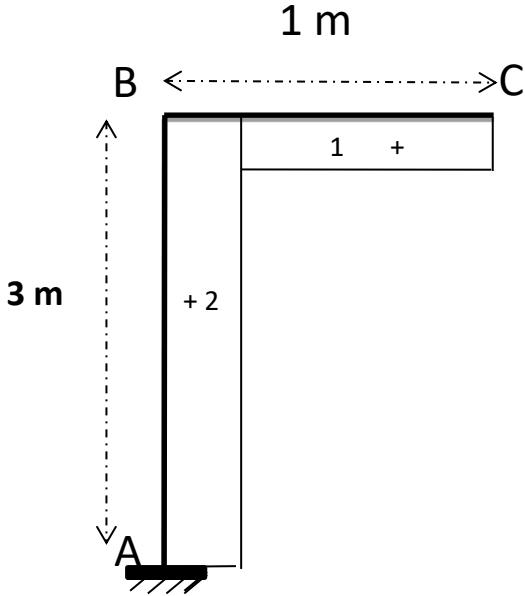


Figure III.04 : Diagramme des efforts normaux N

III.3.2 Solution éléments finis

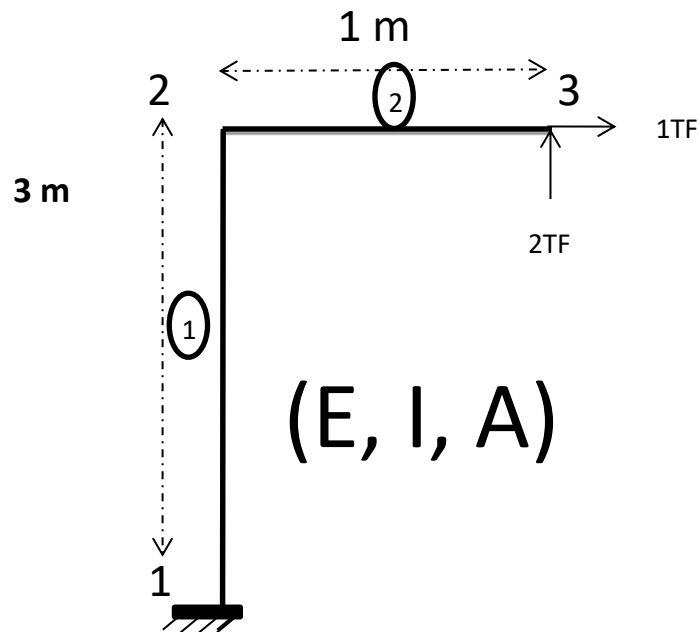


Figure III.05 : Discrétisation du portique

Code de calcul numérique du portique :

Discrétisation du portique en 2 éléments, 3 nœuds et de 9 degré de liberté.

$$disc := \begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

Coordonnées des nœuds et caractéristiques géométriques de la section EI , EA.

$$cx := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad cy := \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad eincr := \begin{bmatrix} ei1 & ei1 \end{bmatrix} \quad esurf := \begin{bmatrix} ea1 & ea1 \end{bmatrix}$$

Connectivité des éléments, longueurs des éléments et leurs orientations

$$Con = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad L(1)=3, L(2)=1, cs(1)=0, cs(2)=1, sn(1)=1, sn(2)=0$$

Conditions d'appuis $nfix=3, mfix= [1, 2, 3]$ (déplacements nuls)

- vecteur de chargement

$$f := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matrices de passage pour chaque élément

$$\lambda(1) := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda(2) := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice des rigidités élémentaires dans le système local

$$ke(1) := \begin{bmatrix} \left[\frac{4}{9}ei1.0. - \frac{2}{3}ei1. - \frac{4}{9}ei1.0. - \frac{2}{3}ei1 \right] \\ \left[0. \frac{1}{3}ea1.0.0. - \frac{1}{3}ea1.0 \right] \\ \left[-\frac{2}{3}ei1.0. \frac{4}{3}ei1. \frac{2}{3}ei1.0. \frac{2}{3}ei1 \right] \\ \left[-\frac{4}{9}ei1.0. \frac{2}{3}ei1. \frac{4}{9}ei1.0. \frac{2}{3}ei1 \right] \\ \left[0. - \frac{1}{3}ea1.0.0. \frac{1}{3}ea1.0 \right] \\ \left[-\frac{2}{3}ei1.0. \frac{2}{3}ei1. \frac{2}{3}ei1.0. \frac{4}{3}ei1 \right] \end{bmatrix}$$

$$ke(2) := \begin{bmatrix} [ea1.0.0 - ea1.0.0]. \\ [0.12ei1.6.ei1.0 - 12ei1.6ei1]. \\ [0.6ei1.4.ei1.0 - 6ei1.2ei1]. \\ [-ea1.0.0.ea1.0.0]. \\ [0. - 12ei. - 6ei1.0.12ei1. - 6ei1]. \\ [0.6.ei1.2ei1.0. - 6ei1.4ei1] \end{bmatrix}$$

Matrices de rigidité élémentaires dans le repère global

$$ke(1) := \begin{bmatrix} \left[\frac{4}{9}ei1.0. - \frac{2}{3}ei1. - \frac{4}{9}ei1.0.0.0.0.0 \right]. \\ \left[0. \frac{1}{3}ea1.0.0. - \frac{1}{3}ea1.0.0.0.0 \right]. \\ \left[-\frac{2}{3}ei1.0. - \frac{4}{3}ei1. \frac{2}{3}ei1.0. \frac{2}{3}ei1.0.0.0 \right]. \\ \left[-\frac{4}{9}ei1.0. \frac{2}{3}ei1. \frac{4}{9}ei1.0. \frac{2}{3}ei1.0.0.0 \right]. \\ \left[0. - \frac{1}{3}ea1.0.0. \frac{1}{3}ea1.0.0.0.0 \right]. \\ \left[-\frac{2}{3}ei1.0. \frac{2}{3}ei1. \frac{2}{3}ei1.0. \frac{4}{3}ei1.0.0.0 \right]. \\ [0.0.0.0.0.0.0.0.0.0]. \\ [0.0.0.0.0.0.0.0.0.0]. \\ [0.0.0.0.0.0.0.0.0.0] \end{bmatrix}$$

$$ke(2) := \begin{bmatrix} [0.0.0.0.0.0.0.0.0.0]. \\ [0.0.0.0.0.0.0.0.0.0]. \\ [0.0.0.0.0.0.0.0.0.0]. \\ [0.0.0.ea1.0.0 - ea1.0.0]. \\ [0.0.0.0.12ei1.6ei1.0 - 12.ei1.6ei1]. \\ [0.0.0.0.6ei1.4ei1.0 - 6ei1.2ei1]. \\ [0.0.0 - ea1.0.0.ea1.0.0]. \\ [0.0.0.0. - 12ei1. - 6ei1.0.12ei1. - 6ei1]. \\ [0.0.0.0.6ei1.2ei1.0 - 6ei1.4ei1] \end{bmatrix}$$

--Matrice de rigidité globale du portique (par la technique d'assemblage)

$$\begin{aligned}
 kg := & [[0.444444444444 \textit{ ei1.0.} \\
 & -0.666666666667 \textit{ ei1.} -0.444444444444 \textit{ ei1.} \\
 & 0.0.0.0.0.0.], \\
 & [0.0.333333333333 \textit{ ea1.0.0.} \\
 & -0.333333333333 \textit{ ea1.0.0.0.0.}], \\
 & [-0.666666666667 \textit{ ei1.0.} \\
 & 1.333333333333 \textit{ ei1.0.666666666667 ei1.0.} \\
 & 0.666666666667 \textit{ ei1.0.0.0.}], \\
 & [-0.444444444444 \textit{ ei1.0.} \\
 & 0.666666666667 \textit{ ei1.0.444444444444 ei1} \\
 & + \textit{ ea1.0.0.666666666667 ei1.} -1. \textit{ ea1.0.0.} \\
 &], \\
 & [0. -0.333333333333 \textit{ ea1.0.0.} \\
 & 0.333333333333 \textit{ ea1} + 12. \textit{ ei1.6. ei1.0.} \\
 & -12. \textit{ ei1.6. ei1}], \\
 & [-0.666666666667 \textit{ ei1.0.} \\
 & 0.666666666667 \textit{ ei1.0.666666666667 ei1.} \\
 & 6. \textit{ ei1.5.333333333333 ei1.0.} -6. \textit{ ei1.2. ei1}], \\
 & [0.0.0. -1. \textit{ ea1.0.0.ea1.0.0.}], \\
 & [0.0.0.0. -12. \textit{ ei1.} -6. \textit{ ei1.0.12. ei1.} \\
 & -6. \textit{ ei1}], \\
 & [0.0.0.0.6. \textit{ ei1.2. ei1.0.} -6. \textit{ ei1.4. ei1}]]
 \end{aligned}$$

Matrice de rigidité inverse

$$k_i := \left[\left[\begin{array}{cccc} \frac{2.250000023 \cdot 10^{-8}}{eil}, -0., -\frac{1.125000019 \cdot 10^{-16}}{eil}, \frac{9.000000114 \cdot 10^{-8}}{eil}, 0., \\ -\frac{4.500000054 \cdot 10^{-8}}{eil}, \frac{9.000000114 \cdot 10^{-8}}{eil}, -\frac{4.500000054 \cdot 10^{-8}}{eil}, -\frac{4.500000054 \cdot 10^{-8}}{eil} \end{array} \right], \right. \\
 \left[\begin{array}{cccc} -0., \frac{3.000000032 \cdot 10^{-8}}{eal}, -0., 0., \frac{3.000000032 \cdot 10^{-8}}{eal}, 0., -0., \frac{3.000000032 \cdot 10^{-8}}{eal}, -0. \end{array} \right], \\
 \left[\begin{array}{cccc} -\frac{2.562890702 \cdot 10^{-25}}{eil}, -0., \frac{7.500000079 \cdot 10^{-9}}{eil}, -\frac{2.250000023 \cdot 10^{-8}}{eil}, 0., \\ \frac{7.500000067 \cdot 10^{-9}}{eil}, -\frac{2.250000023 \cdot 10^{-8}}{eil}, \frac{7.500000067 \cdot 10^{-9}}{eil}, \frac{7.500000067 \cdot 10^{-9}}{eil} \end{array} \right], \\
 \left[\begin{array}{cccc} \frac{2.250000014 \cdot 10^{-8}}{eil}, 0., -\frac{2.250000035 \cdot 10^{-8}}{eil}, \frac{9.000000149}{eil}, -0., -\frac{4.500000067}{eil}, \\ \frac{9.000000149}{eil}, -\frac{4.500000067}{eil}, -\frac{4.500000067}{eil} \end{array} \right], \\
 \left[\begin{array}{cccc} 0., \frac{3.000000026 \cdot 10^{-8}}{eal}, 0., -0., \frac{3.000000026}{eal}, -0., 0., \frac{3.000000026}{eal}, 0. \end{array} \right], \\
 \left[\begin{array}{cccc} -0., 0., \frac{7.500000079 \cdot 10^{-9}}{eil}, -\frac{4.500000021}{eil}, -0., \frac{3.000000007}{eil}, -\frac{4.500000021}{eil}, \\ \frac{3.000000007}{eil}, \frac{3.000000007}{eil} \end{array} \right], \\
 \left[\begin{array}{cccc} \frac{2.250000014 \cdot 10^{-8}}{eil}, -0., -\frac{2.250000035 \cdot 10^{-8}}{eil}, \frac{9.000000149}{eil}, 0., -\frac{4.500000067}{eil}, \\ \frac{8.542969008 \cdot 10^{-24} (1.170553234 \cdot 10^{23} eil + 1.053497928 \cdot 10^{24} eal)}{eil eal}, -\frac{4.500000067}{eil}, \\ -\frac{4.500000067}{eil} \end{array} \right], \\
 \left[\begin{array}{cccc} -0., \frac{3.000000026 \cdot 10^{-8}}{eal}, \frac{7.500000079 \cdot 10^{-9}}{eil}, -\frac{4.500000021}{eil}, \frac{3.000000026}{eal}, \\ \frac{3.000000007}{eil}, -\frac{4.500000021}{eil}, \\ \frac{8.542969008 \cdot 10^{-24} (3.901844111 \cdot 10^{23} eal + 3.511659732 \cdot 10^{23} eil)}{eil eal}, \frac{3.500000005}{eil} \end{array} \right], \\
 \left[\begin{array}{cccc} 0., -0., \frac{7.500000079 \cdot 10^{-9}}{eil}, -\frac{4.500000021}{eil}, 0., \frac{3.000000007}{eil}, -\frac{4.500000021}{eil}, \\ \frac{3.500000005}{eil}, \frac{4.000000003}{eil} \end{array} \right] \Bigg]$$

Résolution du système $kg \cdot q = f$ (détermination des déplacements inconnus)

$$q := \left[\begin{array}{l} \frac{6 \cdot 10^{-17}}{eil}, \frac{6.00000006410^{-8}}{eal}, -\frac{7.5000001010^{-9}}{eil}, \frac{1.5 \cdot 10^{-8}}{eil}, \frac{6.0000000052}{eal}, \\ \frac{1.499999993}{eil}, \frac{8.542969008 \cdot 10^{-24} (1.170553234 \cdot 10^{23} eil + 1.053497928 \cdot 10^{24} eal)}{eil eal} \\ -\frac{9.000000134}{eil}, -\frac{4.500000021}{eil} \\ + \frac{1.708593802 \cdot 10^{-23} (3.901844111 \cdot 10^{23} eal + 3.511659732 \cdot 10^{23} eil)}{eil eal}, \frac{2.499999989}{eil} \end{array} \right]$$

Affichage des résultats

Déplacements des nœuds

$$noeud(1), 0, 0, 0$$

$$noeud(2), \frac{1.5 \cdot 10^{-8}}{eil}, \frac{6.0000000052}{eal}, \\ \frac{1.499999993}{eil}$$

$$noeud(3), \frac{1.000000000}{eal} + \frac{1.5 \cdot 10^{-8}}{eil}, \\ \frac{2.166666643}{eil} + \frac{6.0000000053}{eal}, \\ \frac{2.499999989}{eil}$$

Efforts normaux dans les éléments

$$N(1) := 2.000000017$$

$$N(2) := 1.000000000$$

Moments de flexion à gauche et à droite de l'élément

$$M_g \quad M_d$$

Élément1 1, 1.000000005, -2.000000001

Élément2

$$2, -\frac{1 \cdot 10^{-8} \text{ eil}}{\text{eal}} - 1.99999991, \\ \text{eil} \left(\frac{1 \cdot 10^{-8}}{\text{eal}} - \frac{8 \cdot 10^{-8}}{\text{eil}} \right)$$

D'après les résultats obtenus pour cet exemple par les solutions analytique et numérique. On observe bien que la qualité des résultats sont satisfaisants ce qui implique que notre modèle numérique est validé.

III.6) Exemples de traitement

Dans cet exemple nous voulons appliquer la méthode des éléments finis au traitement des cas des portiques possédant des traverses droites ou inclinées sous charges verticale ou horizontale. À cet effet, nous proposons des schémas statiques pour certains portiques comme il est montré en figures ci-dessous afin d'examiner l'effet d'orientation des traverses sur le comportement de ces portiques.

III. 6 . 1) Entrée des données

- Nombre des éléments NE et des nœuds NN
Type 1 et 2

- sous charge concentrée horizontalement NE= 4 ; NN= 5

- sous charge répartie verticalement NE= 20 ; NN= 21

- sous charge répartie horizontalement NE= 19 ; NN= 20

- Chargement f :
Type 1 et 2

- sous charge concentrée horizontalement

$$f(4) = P \text{ et } f(i) = 0 \text{ pour } i = 1 \dots 15 \text{ et } i \neq 4$$

- Sous charge répartie verticalement

$$f(5) = f(29) = 0,5 q ; f(i) = q \text{ pour } i = 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26 ; f(j) = 0 \text{ pour } j \neq i \text{ et } j = 1 \dots 42$$

- Sous charge répartie horizontalement

$$f(1) = f(31) = 0,25 Q ; f(i) = 0,5 Q \text{ pour } i = 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28 ; f(j) = 0 \text{ pour } j \neq i \text{ et } j = 1 \dots 42$$

conditions d'appuis :

Type 1 et 2

$$n_{fix} = 6$$

- sous charge concentrée horizontalement $m_{fix} = [1, 2, 3, 13, 14, 15]$

- sous charge répartie verticalement $m_{fix} = [1, 2, 3, 61, 62, 63]$

- sous charge répartie horizontalement $m_{fix} = [1, 2, 3, 58, 59, 60]$

En ce qui suit, nous présentons les schémas statiques ainsi leurs discrétisations.

Type 01 : portique à traverses droites

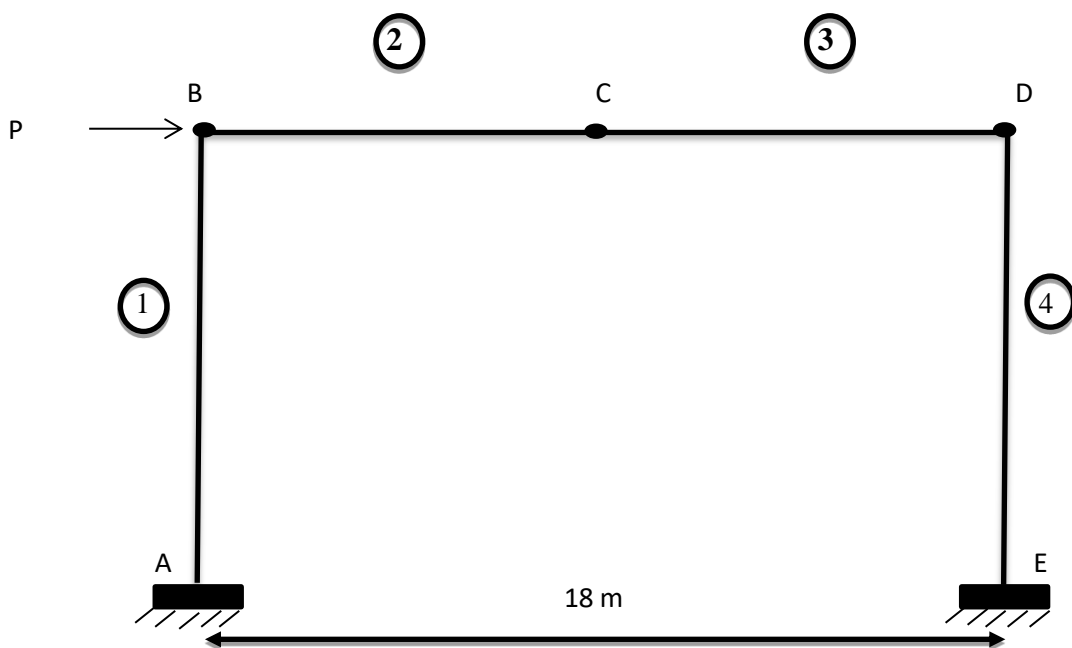


Figure III-06 : portique à traverses droites soumis à une charge concentrée horizontalement

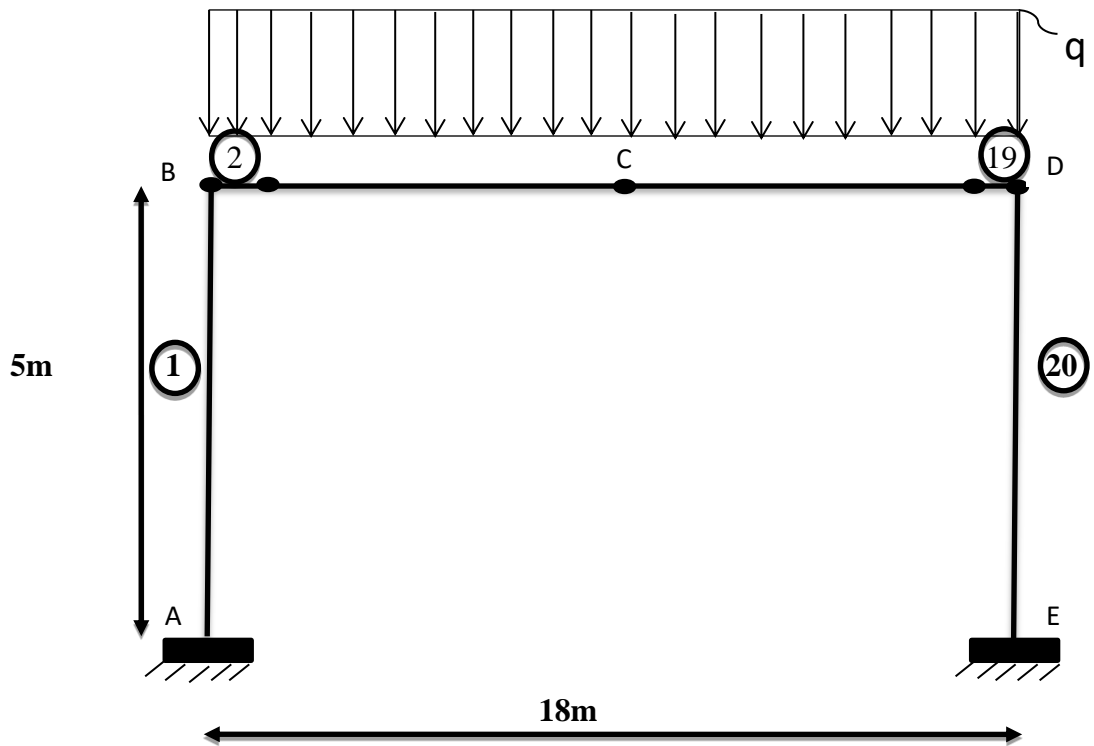


Figure III-07 : portique à traverses droites soumis à une charge répartie verticalement

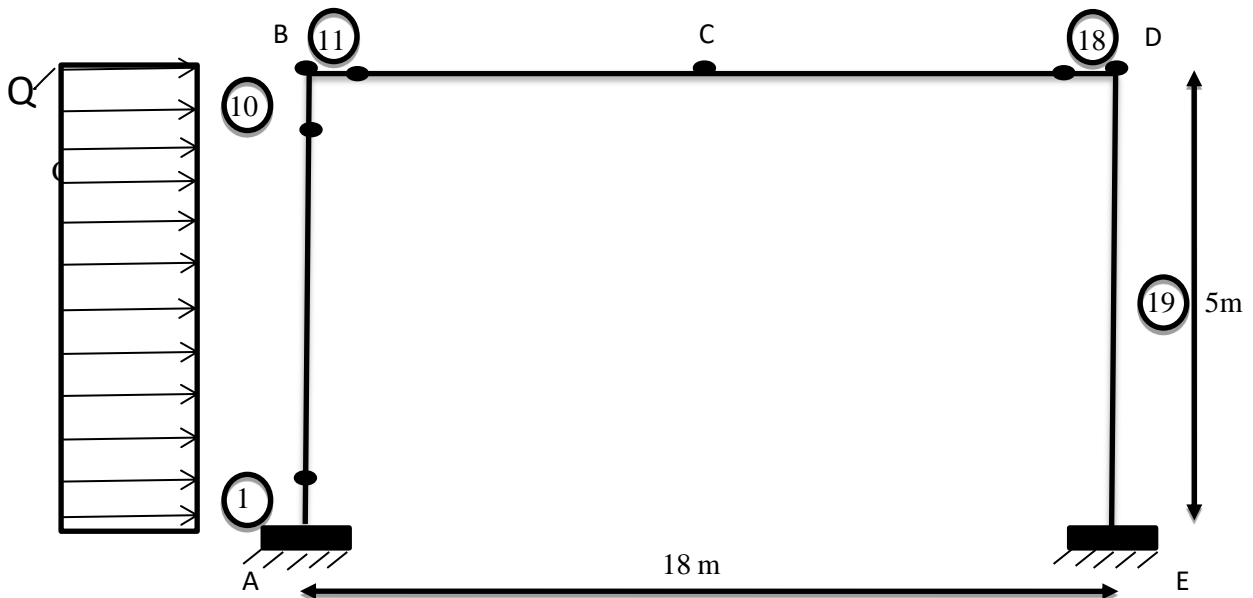


Figure III-08 : portique à traverses droites soumis à une charge répartie horizontalement

Type 02 : portiques à traverses inclinées

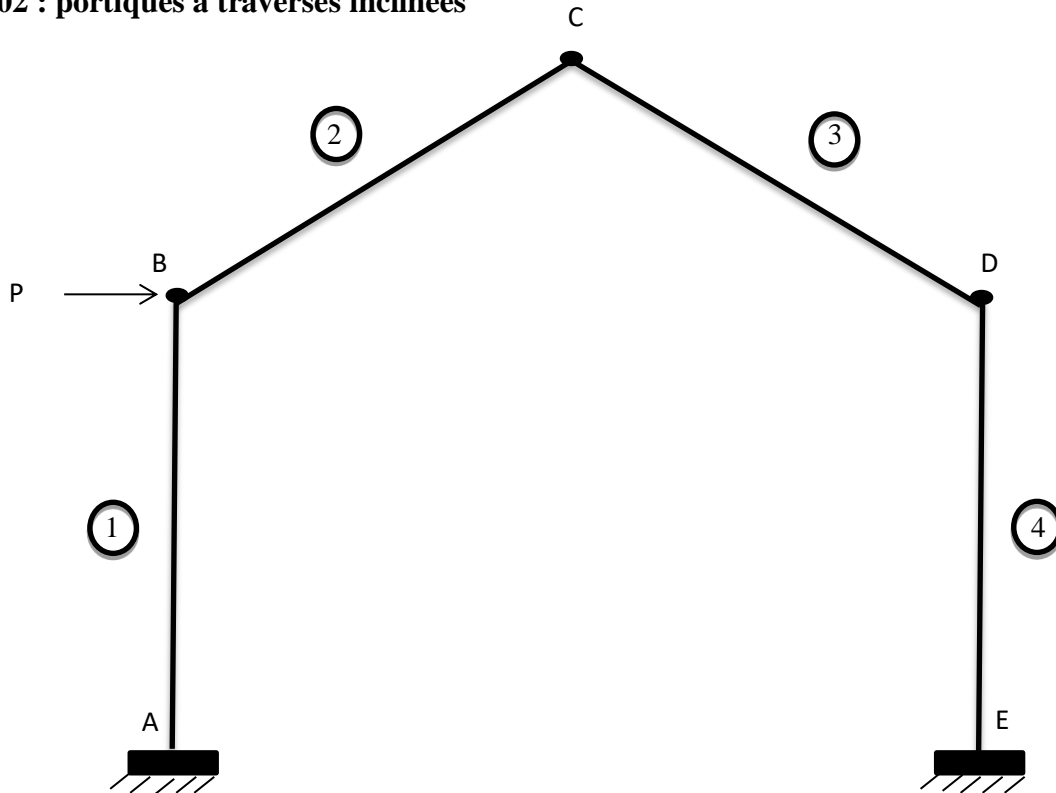


Figure III.09 : portique à traverses inclinées soumis à une charge concentrée horizontalement

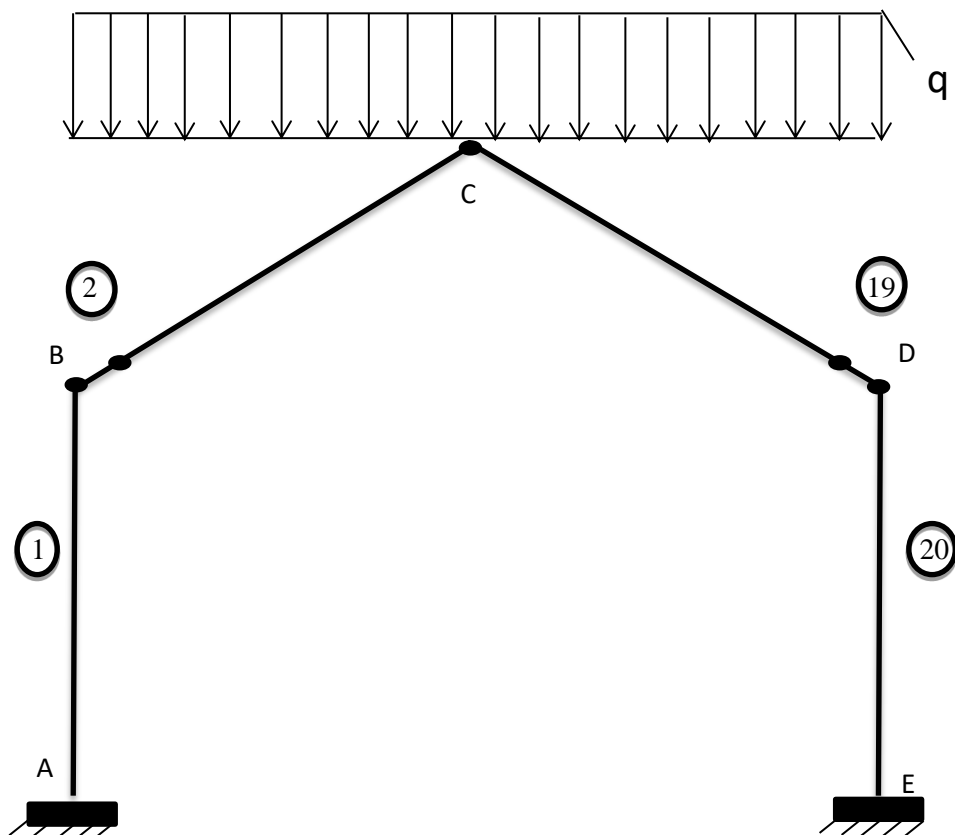


Figure III.10 :: portique à traverses inclinées soumis à une charge répartie verticalement

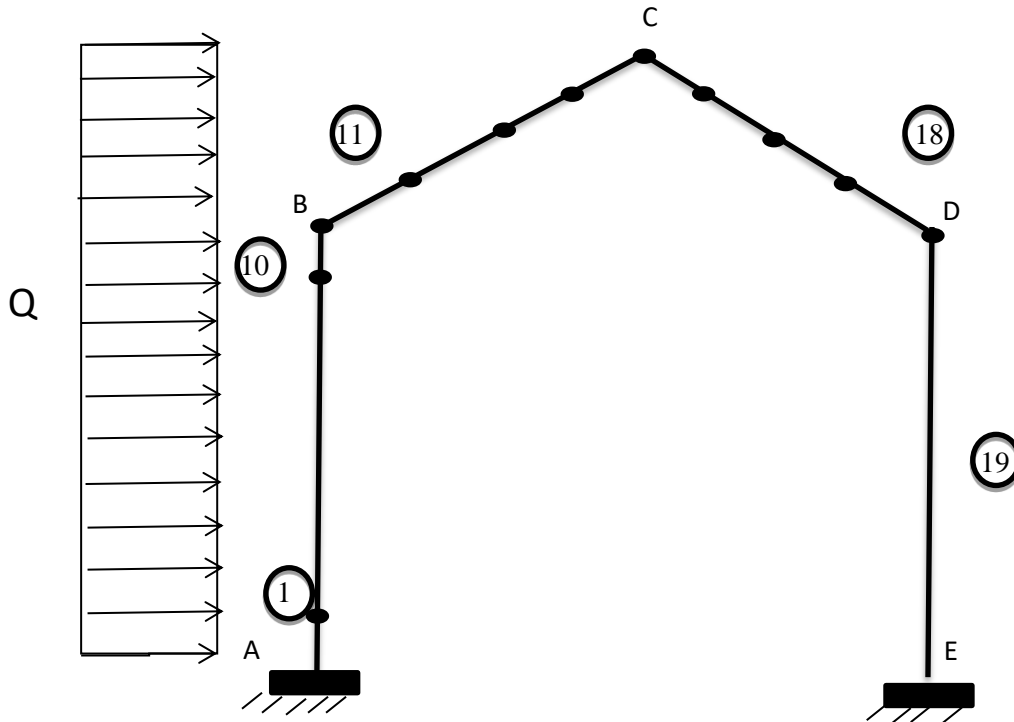


Figure III.11 : : portique à traverses inclinées soumis à une charge répartie horizontalement

III.7) Présentation des résultats

En exécutant le programme de calcul déjà validé précédemment nous avons exploité les résultats de ces cas de chargement comme ils sont illustrés aux tableaux (III.01), (III.02), (III.03) , (III.04), (III.05)et (III.06). Lors de l'entrée des données des caractéristiques géométriques nous avons introduit les rigidités de flexion EI et de compression ou traction EA par unité.

Les portiques sous charge concentrée horizontalement sont discrétisés en quatre éléments par contre pour le cas de la charge répartie verticalement et horizontalement on subdivise plus sur les traverses (application de la charge répartie verticale) et sur les poteaux (application de la charge répartie horizontale) respectivement. Ainsi les résultats exploités sont représentés aux niveau des joints A , B, C, D etE des portiques.

III.7. a) Cas d'une charge concentrée horizontalement

Tableau III.0 1: Déplacements aux nœuds des portiques type 01 et type 02

Points	TYPE 01			TYPE 02		
	U.(EI.EA)/P	V.(EI.EA)/P	Θ.(EI)/P	U.(EI.EA)/P	V.(EI.EA)/P	Θ.(EI)/P
A	0	0	0	0	0	0
B	14.617	0.430	-3.288	14.442	0.426	-2.913
C	11.142	-4.118	1.115	11.505	1.452	1.128
D	7.667	-0.430	-1.458	8.029	-0.426	-1.908
E	0	0	0	0	0	0

Tableau III.0 2: Efforts internes dans les éléments des portiques type 01 et type 02

Éléments	TYPE 01			TYPE 02		
	N/P	Mg/P	Md/P	N/P	Mg/P	Md/P
1	0.086	2.192	-0.876	0	2.3	-1.135
2	-0.386	-0.816	-0.101	0.286	-1.135	0.258
3	-0.386	-0.101	0.673	-0.323	0.258	0.4
4	-0.086	0.673	-1.256	-0.085	0.4	-1.163

III.7.b) cas d'une charge répartie verticalement

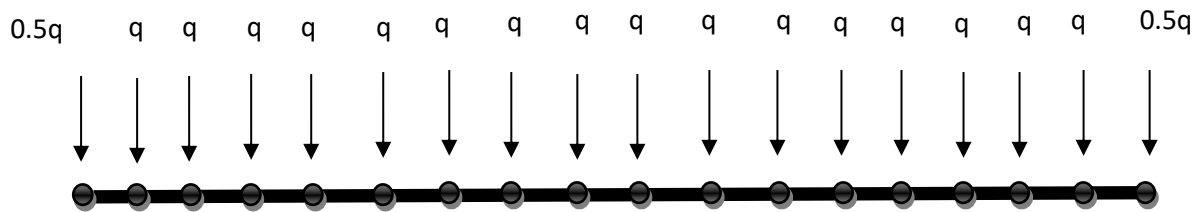


Figure III.12 : discrétisation de la charge répartie q .

Tableau III.0 3: Déplacements aux nœuds des portiques type 01 et type 02

Points	TYPE 01			TYPE 02		
	$U.(EI.EA)/P$	$V.(EI.EA)/P$	$\Theta.(EI)/P$	$U.(EI.EA)/P$	$V.(EI.EA)/P$	$\Theta.(EI)/P$
A	0	0	0	0	0	0
B	6.101	45	21.7	-49.274	45	42.522
C	0	356.448	0	0	509.725	0
D	-6.101	45	-21.7	49.274	45	-42.522
E	0	0	0	0	0	0

Tableau III.0 4: Efforts internes dans les éléments des portiques type 01 et type 02

Eléments	TYPE 01			TYPE 02		
	N/q	Mg/q	Md/q	N/q	Mg/q	Md/q
1	9	10.144	-18.824	0	5.182	-22.191
2	7.484	-18.824	-11.599	5.474	-22.191	-13.691
10	5.750	10.978	10.0877	5.474	17.808	18.308
11	5.750	10.0877	10.978	5.474	18.308	17.808
19	7.484	-11.599	-18.824	5.474	-13.691	-22.191
20	9	-18.824	10.144	9	-22.191	5.182

II.7.c) cas d'une charge répartie horizontalement

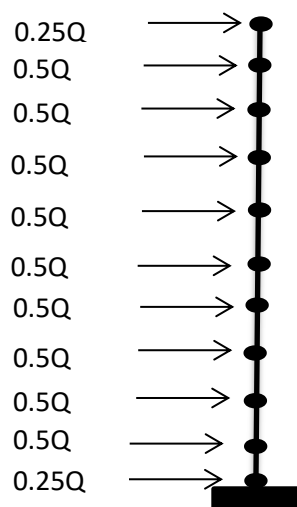


Figure III.13 : discrétisation de la charge répartie Q

Tableau III.0 5: Déplacements aux nœuds des portiques type 01 et type 02

Points	TYPE 01			TYPE 02		
	U.(EIEA)/Q	V.(EIEA)/Q	Θ.(EI)/Q	U.(EIEA)/Q	V.(EIEA)/Q	Θ.(EI)/Q
A	0	0	0	0	0	0
B	29.82	-0.722	-4.638	57.377	2.063	-10.154
C	23.011	-2.955	1.870	52.929	7.796	4.532
D	16.198	-0.722	-3.325	36.655	-2.063	-8.679
E	0	0	0	0	0	0

Tableau III.0 6: Efforts internes dans les éléments des portiques type 01 et type 02

Eléments	TYPE 01			TYPE 02		
	N/Q	Mg/Q	Md/Q	N/Q	Mg/Q	Md/Q
1	0.144	7.466	5.344	0.412	11.872	9.090
10	0.144	-1.626	-1.373	0.412	-3.166	-3.573
11	-0.757	-1.373	-1.048	0.396	-3.573	-2.801
14	--0.757	-0.398	-0.0729	-1.068	-0.509	1.012
15	-0.757	-0.0729	0.252	-1.491	1.012	1.222
18	-0.757	0.902	1.227	-1.491	1.643	1.853
19	-0.144	1.227	-2.557	-0.412	1.853	-5.325

Suite à ces résultats illustrés aux tableaux précédant nous avons l'intérêt de savoir les paramètres de résistance qui sert à dimensionner les poteaux ainsi que les traverses. On remarque dans le cas de la charge horizontale le déplacement horizontal pour le type 2 est inférieur à celui du type 1 au point d'application de la charge P de même le déplacement vertical est maximal au sommet des traverses. Concernant les efforts internes sont importants aux niveaux des traverses.

Dans le cas de la charge répartie verticalement le déplacement vertical pour le type 2 est supérieur à celui du type 1. Le maximum des efforts normaux se situent au niveau des poteaux par contre pour les moments au sommet des traverses.

Dans le dernier cas de la charge répartie horizontalement le déplacement vertical pour le type 2 est supérieur à celui du type 1. Le maximum des efforts normaux se situent au niveau des traverses par contre pour les moments à la base du poteau chargé.

III.8) Conclusion

Dans ce chapitre nous avons développé la formulation en éléments finis pour des éléments de barre à deux nœuds possédant des orientations quelconques dans le plan de la structure travaillant en sollicitation de flexion composée. Par la suite notre modèle numérique fait appel à des codes de calculs qui sont utilisés dans la partie de comparaison et traitement.

Après avoir exécuté le programme de calcul, les résultats obtenus donne lieu que ce modèle est validé. Pour avoir une bonne extension du programme nous avons proposé deux types des portiques sous l'action des charges extérieures différentes comme il est monté dans la partie de traitement afin d'analyser la réponse statique ainsi que la préparation des paramètres de dimensionnement des éléments de ce type du système.

CONCLUSION

GÉNÉRALE

Conclusion générale

Au cours de ce travail, une méthode numérique de calcul de structures utilisant une approche par éléments finis a été réalisée.

Cela nous a permis de comprendre les techniques de programmation de la méthode, et donc d'exploiter les résultats obtenus et de les comparer avec les méthodes analytiques pour calculer les structures existantes et celles de la résistance des matériaux.

Le modèle numérique implémenté sur le programme de calcul a montré que les résultats obtenus sont satisfaisants. De cela on peut dire que cette satisfaction est due de bien savoir introduire convenablement les données du problème ainsi que le choix du maillage du système.

L'orientation des traverses du portique influe directement sur la réponse statique sous différentes charges comme il montré en dernier chapitre.

Enfin, nous recommandons les futurs masters d'appliquer cette approche au traitement des portiques avec joints semi rigides ou à toitures multiples

RÉFÉRENCES

BIBLIOGRAPHIQUES

Références Bibliographiques

- [1] Christian Welgosz: Cours et exercices de Résistance des matériaux, Elasticité, Elément finis. Edition Marketing S.A 1999.
- [2] Claude Foulard professeur : le calcul des structures par éléments finis. Edition Hermas, paris 1988.
- [3] A.ANISSIMOV : calcul des barres dans les cas de sollicitation. O.P.U 1993.
- [4] Mémoire de fin d'étude : Calcul des poutres continuées par méthode des éléments finis. Promotion 2009-2010.
- [5] J.L.BATOZ, G.DHATT, Modélisation des structures par éléments fini, poutres et plaques, Hermès, 1990.
- [6] M.BOUMAH RAT, A GOURDIN, méthodes numériques appliquées avec nombreux problèmes résolus en fortran. GPU 1993.
- [7] JEAN MOREL - Calcul des Structures Métalliques selon l'Eurocode 3, Editions Eyrolles 3ème tirage (1997).
- [8] PIERRE MAITRE – Formulaire de la construction métallique, Editions Le Moniteur (1997).
- [9] CLAUDE CORBET – Dessin de construction en ouvrage ouvrages chaudronnés et structures métalliques, Editions Casteilla (2000).

- 1. MANFRED A. HIRT, MICHEL CRISINEL – Charpentes métalliques Conception et dimensionnement des halles et bâtiments, Editions Presses polytechniques et universitaires Romandes (2002).