



FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES
DÉPARTEMENT DE GÉNIE CIVIL

Mémoire de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme de Master

Spécialité : Génie Civil

Option : Structures

Présenté par :

BOUCIF Bouchra

BELLAHRECHE Djilali.

Sujet du mémoire

**APPLICATION D'UNE NOUVELLE CINEMATIQUE D'ORDRE
ELEVE POUR L'ANALYSE DYNAMIQUE DES PLAQUES EN
MATERIAUX COMPOSITES AVANCES**

Soutenu publiquement ledevant le jury composé de :

M. ABDELAZIZ	Hadj Henni	Président
M. DRAICHE	Kada	Rapporteur
Mme. KHELIFA	Zoubida	Examineur
M. TLIDJI	Youcef	Examineur

PROMOTION : 2019 / 2020

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Remerciements

Avant tout, Nous remercions ALLAH le tout puissant qui de nous avoir accordé la santé, donné le courage ; la volonté et la patience d'accomplir ce travail.

*Il est difficile d'exprimer en quelques mots nos profondes remerciements vers notre encadreur **Dr DRAICHE Kada** qui a assuré la direction scientifique de ce travail et pris le temps de nous faire profiter de son expérience, ses connaissances et sa disponibilité constante pour structurer le travail et améliorer la qualité des différentes sections de ce travail, veuillez accepter monsieur les expressions de nos sincères remerciements.*

Nous tenons également de remercier Dr. ABDELAZIZ Hadj Henni le Président de jury d'avoir accepté la présidence de ce modeste travail, monsieur TLIDJI Youcef et Madame KHELIFA Zoubida les membres de jury d'avoir accepté d'examiner notre projet de fin d'étude.

Nous portons avec gratitude de reconnaissance pour l'ensemble des enseignants du département de Génie Civil qui ont contribué à notre formation du master en Génie Civil.

Nous remercions s'adressent également à l'ensemble du personnel technique et administratif du département de génie civil de Tiaret ainsi que tous nos collègues.

Dédicace

Je dédie ce travail à :

A la lumière de ma vie, la source de mes efforts MAMAN

A mon PAPA qui n'a pas assisté à cette étape de ma vie,

Qui m'a toujours encouragé pour avancer dans mes études

A mes frères Mohamed et AEK, mes sœurs Ikram et M. Nadia

A mes proches TURQUI Zoulikha et LAZREG Nassiba,

Pour votre soutien constant, durant tout mon parcours,

Pour m'avoir aidée à surmonter les moments difficiles

Merci infiniment d'avoir toujours été là pour moi

A mes amis BEKHADRA Mokhtar et BOURABAH Nacer

Merci Pour votre aide, votre soutien et vos encouragements

Boucif Bouhra

Dédicace

Je dédie ce travail à :

Ames parents les plus chers au monde qui m'ont tout donné, encouragement,

Soutiens et surtout amour, que dieu le tout puissant les protègent.

Ainsi qu'à toute ma belle-famille.

Ames très chères sœurs.

Ames très chères frères.

Ames neveux et nièces chacun à son nom.

Et à tous mes amis de près ou de loin.

Bellahreche Djilali.

Abstract

In this present work, a new simplified parabolic shear deformation theory is developed for the free vibration analysis of simply supported advanced composite plates "functionally graded materials: FGM". The present theory uses undetermined integral terms in the displacement field with only four variables which is inferior to the first-order shear deformation theory (FSDT) and other high-order theories (HSDT). However, it takes into consideration the effects of transverse shear stresses with a parabolic distribution through the thickness of the plate. The mechanical properties of FGM plates are assumed to be variable depending on a power law distribution of the volume fraction of the constituents. The equations of motion associated with the present theory are obtained using the Hamilton's principle. The analytical solution of the free vibration of the FGM plates is obtained using the Navier method. The numerical results obtained by this model are compared with the solutions proposed by other theories. It can be concluded that the proposed theory is precise and efficient to study the dynamic response of plates made of advanced composite materials.

Keywords: *FGM plates, free vibration, shear deformation, power law distribution.*

Résumé

Dans ce présent travail, une nouvelle théorie simplifiée de déformation en cisaillement parabolique est développée pour l'analyse de la vibration libre des plaques en matériaux composites avancés "matériaux fonctionnellement gradués : FGM" simplement appuyées. La présente théorie utilise des termes d'intégrales indéterminés dans le champ de déplacement avec seulement quatre variables ce qui est inférieur à la théorie de la déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) et les autres théories d'ordre élevé (HSDT). Toutefois, elle tient en considération les effets des contraintes de cisaillement transversal avec une distribution parabolique à travers l'épaisseur de la plaque. Les propriétés mécaniques des plaques FGM sont supposées d'être variables en fonction d'une distribution de loi de puissance de la fraction volumique des constituants. Les équations du mouvement associées à la présente théorie sont obtenues en utilisant le principe d'Hamilton. La solution analytique de la vibration libre des plaques FGM est obtenue en utilisant la méthode de Navier. Les résultats numériques obtenus par le présent modèle sont comparés avec les solutions proposées par d'autres théories. On peut conclure que la théorie proposée est précise et efficace pour étudier la réponse dynamique des plaques en matériaux composites avancés.

Mots clés : *plaques FGM, vibration libre, déformation en cisaillement, loi de distribution de puissance.*

المخلص

في هذا العمل الحالي، تم تطوير نظرية جديدة مبسطة عن تشوه القص المكافئ لتحليل الاهتزاز الحر للصفائح ذات المواد المركبة المتقدمة (المواد المتدرجة وظيفياً) بمساند بسيطة. وتستخدم النظرية الحالية مصطلحات تكاملية غير محددة في الحقل الحركي ذات أربعة متغيرات فقط، أقل من نظرية تشوه القص من الدرجة الأولى وغيرها من النظريات ذات الدرجات العليا. ومع ذلك فإنه يأخذ بعين الاعتبار تأثيرات ظغوط القص العرضي مع توزيع القطع المكافئ عبر سمك الصفيحة. ويفترض أن الخصائص الميكانيكية للصفائح المتدرجة وظيفياً متغيرة تبعاً لقانون توزيع اسي على التجزئة الحجمية للمكونات. يتم الحصول على معادلات الحركة المرتبطة بالنظرية الحالية باستخدام مبدأ هاملتون. يتم الحصول على الحل التحليلي للاهتزاز الحر للصفائح المتدرجة وظيفياً باستخدام طريقة نافيه. اما النتائج العددية التي يحصل عليها هذا النموذج فهي تقارن بالحلول المقترحة من نظريات سابقة، ويمكن استنتاج أن النظرية المقترحة دقيقة وفعالة في دراسة الاستجابة الديناميكية لصفائح المواد المركبة المتقدمة.

الكلمات الأساسية: صفائح المتدرجة وظيفياً، اهتزاز الحر، تشوه القص، قانون توزيع اسي.

TABLE DES MATIÈRES

Table des matières

Résumé

Abstract

المُلخَص

Liste des tableaux

Liste des figures

Liste des notations

Introduction générale

CHAPITRE I: Généralités sur les matériaux à gradients de propriétés

I.1 Introduction	6
I.2 Historique des FGMs.....	6
I.3 Le concept d'un matériau à gradient de propriétés	8
I.4 Avantages et inconvénients des FGMs.....	9
I.4.1 Avantages des FGMs	9
I.4.2 Inconvénients des FGMs.....	9
I.5 Procédés d'Elaboration des Matériaux à Gradient de Propriétés	10
I.5.1 La Métallurgie des Poudres	10
I.5.2 Coulage en Bande (Tape Casting ou Doctor-Blade).....	11
I.5.3 Projection Plasma.....	12
I.5.4 Dépôt par Centrifugation	13
I.5.5 Coulage Séquentiel en Barbotine (Slip Casting)	14
I.5.6 Frittage laser différentiel	15

I.5.7 Compaction Sèche des Poudres	15
I.5.6 Frittage et Infiltration.....	15
I.6 Propriétés matérielles effectives d'un matériau FGM	15
I.7 Propriétés physiques et mécaniques des FGM.....	16
I.8 Lois qui régissent la variation des propriétés matérielles d'une plaque FGM	17
I.8.1 Loi de mélange en puissance P-FGM	19
I.8.2 Loi de mélange sigmoïde S-FGM.....	20
I.8.3 Loi de mélange exponentielle E-FGM.....	21
I.9 Domaines d'applications des FGMs.....	21
I.10 Conclusion.....	23

Chapitre II : Les différentes théories des plaques

II .1 Introduction :	25
II .2 Les modèles analytiques des plaques FGM	26
II.2.1 La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT)	26
II .2.1.1Hypothèses de la théorie	27
II .2.1.2Champ de déplacement	27
II.2.2 La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)	28
II .2.2.1Hypothèses de la théorie	29
II .2.2.2Champ de déplacement	29
II.2.3 La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)	30
II .2.3.1Hypothèses de la théorie.....	31
II .2.3.2Champ de déplacement	31
II .2.4 La théorie raffinée de déformation des plaques.....	31
II .2.3.1Hypothèses de la théorie.....	32

II .2.3.2 Champ de déplacement	32
II.2.5 La théorie quasi-3D de déformation des plaques	33
II.2.6 La théorie d'élasticité 3D des plaques épaisses.....	34
II.3 Revue sur les différentes fonctions de gauchissement	35
II.3.1 Les fonctions polynomiales	35
II.3.2 Les fonctions trigonométriques	35
II.3.3 Les fonctions hyperboliques	36
II.3.4 Les fonctions exponentielles	37
II.3.5 Les fonctions combinées	37
II.4 Conclusion	39
 Chapitre III : Analyse dynamique des plaques FGM en utilisant une nouvelle cinématique d'ordre élevé	
III.1. Introduction	41
III.2 Modèle d'une plaque FGM	41
III.2.1. Configuration géométrique	41
III.2.2. Propriétés du matériau.....	42
III.2.3. Hypothèses de base de la nouvelle théorie :	42
III.3. Formulation théorique.....	43
III.3.1. Champs de déplacement.....	43
III.3.2. Champs de déformation	44
III.3.3. Equations constitutives	45
III.3.4. Equations de mouvement	45
1. Variation de l'énergie de déformation.....	45
2. Variation du travail externe	46
3. Variation de l'énergie cinétique	46

III.4. Solution analytique des plaques FGM simplement appuyées 50
III.5. Conclusion 51

Chapitre IV: Résultats et Discussions

IV.1 Introduction 54
IV.2 Propriétés des matériaux utilisés 54
IV.3 Résultats et discussions : Etudes comparatives 55
 IV.3.1 Analyse dynamique des plaques carrées en FGM Al/ZrO₂ 55
 IV.3.2 Analyse dynamique des plaques carrées en FGM Al/Al₂O₃ 56
 IV.3.3 Analyse dynamique des plaques rectangulaires en FGM Al/Al₂O₃ 58
IV.4 Résultats et discussions : Etudes paramétriques 60
IV.5. Conclusion 64

Conclusion générale

Références bibliographiques 68

LISTE DES TABLEAUX

Liste des tableaux

Tableau I-1 : Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal	17
Tableau IV.1 : Propriétés des matériaux utilisés dans la plaque FGM	55
Tableau IV.2 : Comparaison du paramètre de fréquence naturelle adimensionnelle $\bar{\beta}$ d'une plaque carrée simplement appuyée Al/ZrO ₂	56
Tableau IV.3 : Comparaison du paramètre de fréquence naturelle adimensionnelle $\hat{\beta}$ d'une plaque carrée simplement appuyée Al/Al ₂ O ₃	57
Tableau IV.4 : Comparaison du paramètre de fréquence naturelle adimensionnelle $\bar{\omega}$ d'une plaque rectangulaire simplement appuyée Al/Al ₂ O ₃ , ($b = 2.a$)	59
Tableau IV.5 : Les neuf premiers paramètres de fréquence naturelle adimensionnelle $\bar{\omega}$ d'une plaque carrée simplement appuyée Al/Al ₂ O ₃	62
Tableau IV.6 : Les neuf premiers paramètres de fréquence naturelle adimensionnelle $\bar{\omega}$ d'une plaque rectangulaire simplement appuyée Al/Al ₂ O ₃ ($a = 1.5b$)	63

LISTE DES FIGURES

Liste des figures

FigureI.1 : <i>Protection thermique des FGM et non FGM</i>	8
FigureI.2 : <i>Processus de fabrication typique des FGM par la méthode de métallurgie des poudres</i>	11
FigureI.3 : <i>Principe du coulage en bande</i>	12
FigureI.4 : <i>Fabrication d'une plaque FGM avec la projection plasma</i>	13
FigureI.5 : <i>Schéma du procédé dépôt par centrifugation</i>	13
FigureI.6 : <i>Principe du coulage par barbotine</i>	14
FigureI.7 : <i>Modèle analytique pour une couche de matériau à gradient de propriétés</i> <i>a) première approche ; b) deuxième approche</i>	16
FigureI.8 : <i>Géométrie d'une plaque en FGM</i>	17
FigureI.9 : <i>Variation du module de Young dans une plaque P-FGM</i>	19
FigureI.10 : <i>Variation du module de Young dans une plaque S-FGM</i>	20
FigureI.11 : <i>Variation du module de Young dans une plaque E-FGM</i>	21
FigureI.12 : <i>Les principaux domaines d'application des FGMs</i>	22
Figure II.1 : <i>Illustration du modèle de la plaque de Love-Kirchhoff CPT</i>	26
Figure II.2 : <i>Illustration du modèle de la plaque de Reissner-Mindlin FSDT</i>	28
Figure II.3 : <i>Illustration du modèle d'ordre élevé HSDT de la plaque</i>	30

Figure II.4 : Variation de la fonction de forme $f(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur. 38

Figure II.4 : Variation de la dérivée de la fonction de forme $f'(z)$ des différents modèles suivant l'épaisseur. 38

Figure III.1 : La Géométrie d'une plaque à gradient de propriétés. 42

Figure IV.1 : L'effet de l'indice de loi de puissance sur le paramètre de fréquence fondamentale de la plaque carrée en FGM. 60

Figure IV.2 : L'effet du rapport d'épaisseur sur le paramètre de fréquence fondamentale de la plaque carrée en FGM. 61

Figure IV.3 : L'effet du rapport géométrique sur le paramètre de fréquence fondamentale de la plaque rectangulaire en FGM, $a = 10h$ 61

LISTE DES NOTATIONS

Liste des notations

\int	Intégrale indéterminé
\sum	La somme
$\{ \}$	Vecteur colonne
$[]$	Matrice
∂/dx	Dérivée partielle par rapport à x
∂/dy	Dérivée partielle par rapport à y
$(\ddot{\cdot})$	La dérivée seconde par rapport au temps
δ	Operateur de Variation
$P(z)$	Propriétés mécaniques
$V(z)$	Fraction volumique
$\rho(z)$	La masse volumique
$E(z)$	Module de Young en fonction de l'épaisseur
E_c, E_m	Module de Young (Céramique, Métal)
E_1, E_2	Module de Young dans la face supérieure/inferieure
p	Paramètre matériel (indice de loi de puissance)
h	L'épaisseur de la plaque
ν	Coefficient de poisson
$f(z)$	Fonction de forme (fonction de cisaillement transversal)
$g(z)$	La dérivée de la fonction de forme

Liste des notations

(u, v, w)	Les déplacements suivant les axes x , y et z
(u_0, v_0, w_0)	Les déplacements au niveau du plan moyen
$\int \theta(x, y, t) dy$	La rotation autour de x
$\int \theta(x, y, t) dx$	La rotation autour de y
$\{k^b\}$	Vecteur de courbure due à la flexion
$\{k^s\}$	Vecteur de courbure due au cisaillement
$\{\varepsilon^0\}$	Vecteur des déformations au niveau du plan moyen
σ_x, σ_y	Contraintes normales
τ_{xz}, τ_{yz}	Contraintes de cisaillement
$\varepsilon_x, \varepsilon_y$	Déformations normales
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	Déformations de distorsion
k_1, k_2	Coefficients dépendent de la géométrie
A', B'	Coefficients dépendent de la solution utilisée (Navier)
a	La largeur de la plaque
b	La longueur de la plaque
m, n	Nombres de mode
i, j	Nombres naturelle
A	Surface supérieure
δU	La variation de l'énergie de déformation
$\delta \mathcal{V}$	La variation du travail externe
δK	La variation de l'Énergie cinétique de la plaque

Liste des notations

$\delta u, \delta v, \delta w_b, \delta w_s$	Champ des déplacements virtuels
q	Charge transversale
(A, B, E, D, F, H, A^s)	Termes de rigidité de la plaque
$(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6)$	Les constantes d'inertie
Q_{ij}	Les coefficients de rigidité
N	Effort normal
M^b	Moment de flexion pure
M^s	Moment de flexion supplémentaire due au cisaillement transverse
S	Effort de cisaillement pur
$U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, \theta_{mn}$	Paramètres arbitraires
$[K]$	Matrice de rigidité
$[M]$	Matrice de masse
ω	Les fréquences naturelles de la plaque FGM
$\bar{\omega}$	Les fréquences adimensionnelles

INTRODUCTION GENERALE

Introduction générale

Toute pièce, tout composant, toute machine est à la base un matériau donc, les matériaux sont considérés comme un axe de recherche très porteur, le développement du matériau et du monde industriel en générale ne peut se concrétiser sans l'avancée de la science qui permet de créer des procédés novateurs et porteurs de développement industriel en mettant à la disposition de l'industrie les résultats d'une recherche scientifique.

Il n'est pas nécessaire d'être un expert pour se rendre compte que les avancées dans les industries dans les différents domaines tels que l'aéronautique, les réacteurs nucléaires, les constructions navales et aussi des sources d'énergie biomécanique, ne servent à rien si les matériaux suffisants pour supporter les charges de service et les conditions ne sont pas disponibles. Les nouveaux matériaux en composites à cet égard représentent un très important pas dans l'effort constant dans l'optimisation des nouvelles structures. De ce fait, l'idée des matériaux composites est récente principalement pour les nouveaux matériaux hétérogènes.

Un matériau composite est un matériau généralement constitué de deux ou plusieurs matériaux de natures différentes et il permet l'association des propriétés spécifiques de ces différents matériaux au sein d'une même pièce. L'optimisation locale de ces propriétés par association d'un matériau de haute dureté à la surface d'un même matériau tenace pose le problème de l'interface, par exemple les métaux avec une excellente résistance mécanique et dureté, mais dans des conditions de hautes températures, la résistance mécanique du métal devient faible, par contre la céramique a une faible dureté mais elle a d'excellentes caractéristiques en résistance thermique, Par conséquent les chercheurs trouvent que la combinaison de la céramique et le métal améliore la dureté et l'usinabilité du métal à la résistance à la chaleur, l'usure et l'oxydation de la céramique.

Un problème majeur est trouvé avec ces matériaux, la discontinuité des propriétés des deux matériaux provoque une forte concentration de contraintes au niveau des interfaces conduisant à une déformation plastique ou des fissurations, ainsi qu'un grave problème de délaminage, dus à une transition brutale de la composition. Pour le but de surmonter ces problèmes nuisibles, éviter les phénomènes de la décohésion interfaciale, et l'endommagement des matériaux composites conventionnels, les matériaux à gradient fonctionnel viennent.

Les matériaux composites avancés également appelés les matériaux à gradient de propriétés (Functionally Graded Material ; FGM) sont une classe de composites à haute performance qui présentent une variation continue des propriétés des matériaux d'une surface à l'autre pour avoir une propriété graduée suivant la direction spatiale désiré, tout en induisant des changements pour réduire la disparité dans les contraintes thermiques, les contraintes résiduelles, et éliminent ainsi la concentration des contraintes trouvée dans les composites stratifiés. Les concepts de FGM ont été proposés par des spécialistes des matériaux dans la région de Sendai au Japon [1] en 1984. Ce type de composite avancé est largement utilisé dans de nombreuses applications structurelles telles que l'aérospatiale, le nucléaire et l'automobile. Lorsque l'application du FGM augmente, des théories des plaques plus précises sont nécessaires pour prédire la réponse des plaques à gradient de propriétés.

Les études sur les vibrations des plaques FGMs ont fait l'objet d'une grande attention, et une variété de théories des plaques ont été introduites telles que la théorie classique des plaques (CPT), la théorie de la déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) et la théorie de la déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT). La CPT néglige l'effet de déformation en cisaillement transverse et donne des résultats acceptables uniquement pour les plaques minces comme présenté par Leissa [2], Chen *et al.* [3], Ebrahimi [4] et Rastgo [5], Baferani *et al.* [6], entre autres. Pour les plaques moyennement épaisses, la CPT sous-estime les flèches et surestime les fréquences et les charges de flambement. La FSDT a été développé pour surmonter la limitation du CPT. Puisque la FSDT tient compte de l'effet de déformation de cisaillement transversal par la voie de la variation linéaire du déplacement dans le plan à travers l'épaisseur, il viole les conditions d'équilibre au niveau des surfaces supérieure et inférieure de la plaque ; par conséquent, des facteurs de correction de cisaillement sont nécessaires pour corriger la variation irréaliste des contraintes de cisaillement transversales et de la déformation de cisaillement à travers l'épaisseur. Ces facteurs de correction de cisaillement dépendent de divers paramètres tels que les charges appliquées, les conditions aux limites et les paramètres géométriques. Bien que la FSDT donne des résultats acceptables pour des plaques moyennement épaisses [7–10], il n'est pas pratique à utiliser le facteur de correction de cisaillement en raison de la difficulté à déterminer sa valeur correcte. Pour éviter l'utilisation de facteurs de correction de cisaillement, plusieurs HSDTs ont été proposés comme Nelson et Lorch [11] avec neuf inconnues, Lo *et al.* [12] avec onze inconnues, Bhimaraddi et Stevens [13] avec cinq inconnues, Reddy [14] avec cinq inconnues, Kant et Pandya [15] avec sept inconnues, Kant et Khare [16] avec neuf inconnues, Talha et Singh [17] avec onze inconnues. Parmi les HSDTs susmentionnés, la théorie de Reddy est la plus largement utilisée en raison de

sa grande efficacité et de sa simplicité [18–25]. Puisque les déplacements dans le plan de la théorie de Reddy sont développés en fonction cubique de la coordonnée d'épaisseur, les équations de mouvement sont plus compliquées que celles de FSDT. Par conséquent, il est possible de développer une théorie précise, simple à utiliser.

La nouveauté dans ce travail se traduit par la minimisation du nombre de variables inconnues à quatre, au lieu de cinq variables ou plus apparaissant sur les théories conventionnelles, pour l'étude de la réponse dynamique des plaques à gradient de propriétés simplement appuyées. Le présent modèle d'ordre élevé inclut un nouveau champ de déplacement qui introduit des variables intégrales indéterminées. Ce modèle n'exige pas un facteur de correction de cisaillement, et donne une description parabolique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur, tout en assurant la condition de la nullité des contraintes de cisaillement au niveau des surfaces libres des plaques FGMs.

Structure de mémoire

Ce travail se regroupe principalement en quatre chapitres qui se résument comme suit :

Le premier chapitre, donne un aperçu sur les matériaux composites avancés ; (matériaux à gradient de propriétés ; FGM), les différentes méthodes de fabrication, les différentes lois possibles qui servent à décrire la variation des propriétés matérielles du FGM suivant l'épaisseur de la plaque et leur domaine d'application.

Le deuxième chapitre, présente une étude bibliographique sur les différentes théories des plaques à gradient de propriétés (FGMs), ces hypothèses et leurs cinématiques de déplacement. Ainsi, un aperçu détaillé sur les différentes fonctions de gauchissement.

Le troisième chapitre, est consacré au développement de la solution analytique des plaques FGM basée sur une simple théorie raffinée qui prend en considération l'effet de cisaillement transverse pour l'analyse de la vibration libre des plaques FGM.

Le quatrième chapitre, présente les résultats obtenus. Ils seront comparés avec d'autres résultats déjà publiés par d'autres auteurs. Cette comparaison nous a permis la validation de notre modèle proposé.

Enfin, une conclusion générale est envisagée permettant de mettre l'accent sur les différents résultats obtenus dans ce travail qui concernent le comportement dynamique des plaques FGM ainsi par des perspectives envisagées pour des futurs travaux.

CHAPITRE I

GÉNÉRALITÉS SUR LES MATÉRIAUX À GRADIENT DE PROPRIÉTÉS

Chapitre I : Généralités sur les matériaux à gradient de propriétés

I.1 Introduction

Le développement continu de l'industrie moderne et les résultats des progrès scientifiques dans la science des matériaux ont donné lieu à la demande continue des matériaux avancés qui peuvent satisfaire les propriétés et les qualités avancées nécessaires. Cette exigence pour les matériaux avancés avec des propriétés spécifiques a entraîné la transformation progressive des matériaux de leurs états de base (monolithique) en composites. Le progrès récent dans l'ingénierie et la transformation des matériaux ont conduit à une nouvelle classe des matériaux appelée matériaux fonctionnellement gradués (*Functionally Graded Material, FGM*).

Les matériaux composites avancés représentent une deuxième génération des matériaux composites et ont été conçus pour atteindre des niveaux de performance supérieurs et allier d'une façon simultanée la rigidité, la résistance, la ténacité élevée et une grande légèreté qui est le facteur le plus important.

Ce chapitre donne une idée générale sur les matériaux à gradient de propriétés « FGM », Un aperçu sur l'historique de leur développement, conceptions, leurs propriétés et les différentes lois qui régissent la variation des propriétés matérielles (module de Young, la masse volumique, coefficient de poisson) suivant l'épaisseur des plaques FGM, ces lois peuvent être de puissances, exponentielles ou même sigmoïde.

I.2 Historique des FGMs

Le matériau à gradient de propriétés a été introduit la première fois dans le laboratoire national d'aérospatial du Japon en 1984 par M. Niino et ses collègues à Sendai [26]. L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion [27].

En 1987, le gouvernement japonais a lancé un vaste projet intitulé «la recherche sur la technologie de base pour le développement des Matériaux à Gradient de propriétés et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques ». L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes

aérospatiaux. Dix-sept laboratoires nationaux de recherche, des universités et des entreprises ont été engagées dans ce projet [27].

Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux et les murs thermiques spéciaux sont appelés à travailler à des températures de surface de 1800°C ainsi qu'à un gradient de température de l'ordre de 1300°C. A cette année-là, aucun matériau industriel n'était connu pour supporter de telles sollicitations thermomécaniques.

À la fin de la première étape (1987-1989), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000K (température de surface) et à un gradient de température de 1000K. Quatre techniques ont été utilisées pour fabriquer les matériaux présentant un gradient de composition et de structure. Les techniques utilisées dans la fabrication de tels matériaux sont les suivantes :

- Le système SiC/C par Le dépôt chimique en phase vapeur (chemical vapor deposition, C.V.D) ;
- Le système PSZ/Mo par la technique de la compaction sèche des poudres ;
- Le système TiB₂/Cu par synthèse par auto-propagation à haute température ;
- Et enfin le système (Ni-Cr-Al-Y)/(ZrO₂-Y₂O₃) par projection plasma à double torches [28].

Dans la seconde étape (1990-1991), le but était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première étape. Durant cette étape, les champs d'applications des FGMs ne sont pas développés seulement pour les structures qui fonctionnent à une haute température, ils sont aussi élargis à d'autres applications : biomécaniques, technologie de capteur, optique [28].

En 1992, c'est la période de l'amélioration de l'efficacité des FGMs dans la conservation d'énergie photoélectrique, thermoélectrique, thermonucléaire [29]. A partir de ces résultats, un nouveau projet national intitulé « Recherche sur les matériaux pour la conservation de l'énergie avec le plan fonctionnel gradient de structure », communément dénommé « FGM partie II, a été lancé en 1993, pour la promotion de la science et technologie. Ce programme vise à s'appliquer la technologie des FGMs dans le but d'améliorer l'efficacité de la conservation de l'énergie comme l'énergie solaire, nucléaire, photovoltaïque, thermoélectrique.

Actuellement, la recherche en FGM est activement conduite dans le monde entier. Plusieurs programmes de recherche ont été lancés en 1995 en Allemagne et en 1996 au Japon.

Pendant le 21ème siècle le programme allemand 41 matériaux sont étudiés aux universités et aux instituts nationaux concernant le traitement et la modélisation pour développer des applications en FGM. La recherche reste continue avec le programme Japonais qui a été pris en charge par les universités et qui traite 67 topiques qui ont une relation avec la chimie et la physique des FGMs. Cependant, la continuité et la communication entre les chercheurs et la recherche en groupe s'avère d'une grande importance pour développer l'architecture des FGMs. Une nouvelle technologie des matériaux gradués non homogènes est née comme conséquence du développement des applications pratiques et des recherches.

I.3 Le concept d'un matériau à gradient de propriétés

Cependant, les matériaux composites conventionnels généralement constitués de deux couches ont un problème majeur : la discontinuité des propriétés et des contraintes au niveau des interfaces. Cette discontinuité provoque de fortes concentrations des contraintes, des fissurations de matrice ainsi qu'un grave problème de délaminage dus à la transition brutale de composition, en particulier dans un environnement à haute température. Pour surmonter ces difficultés une équipe de chercheurs japonais (1980) a proposé de nouveaux matériaux dits matériau à gradient de propriété (FGM) [30].

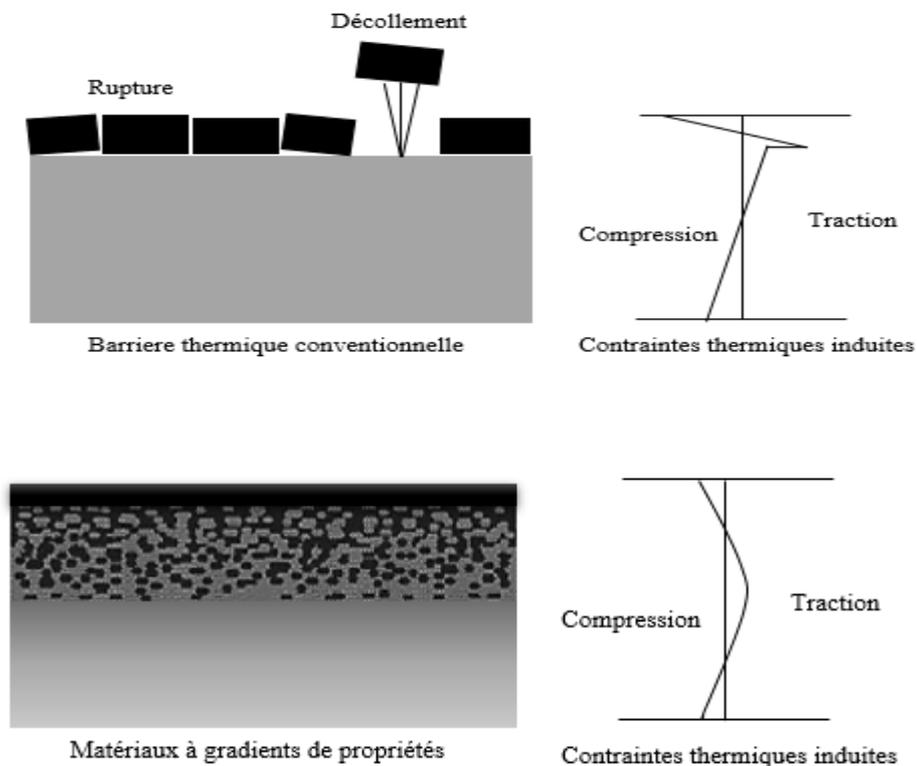


Figure 1.1 : Protection thermique des FGM et non FGM [105].

I.4 Avantages et inconvénients des FGMs

Les matériaux à gradients de propriétés présentent des avantages et des inconvénients

I.4.1 Avantages des FGMs

Outre l'accomplissement de son objectif principal, c'est à dire de fournir les différents requis des propriétés en divers points et des surfaces du futur produit qui, pourrait être réalisé par un simple revêtement. Birman *et al.* [31] et Shinohara [32], et beaucoup d'autres soulignent divers avantages supplémentaires des FGMs. Ils énumèrent certains avantages qui en résultent principalement de la non-existence d'une interface forte FGM, tels que :

- Diminuer les contraintes thermiques causées par les différences de coefficients de dilatation thermique des matériaux utilisés,
- Absence d'une interface nette devrait conduire à un contrôle d'ensemble mieux des contraintes,
- Meilleure cohésion entre différents matériaux, par exemple un métal et une céramique,
- Extension de la région fonctionnelle avant d'atteindre la valeur limite de la déformation plastique,
- Suppression de délaminage,
- Augmentation de la ténacité à la rupture,
- Elimination des singularités des contraintes à divers endroits, tels que les surfaces libres, des coins, des racines de fissures, etc.

I.4.2 Inconvénients des FGMs

Le principal obstacle à une application plus large de FGM est leur fabrication compliquée en raison de l'inadéquation des propriétés différentes, par exemple, la température de fusion, des affinités différentes pour divers autres éléments, la taille des particules, la morphologie, etc. ; un exemple type est un mélange d'un métal avec la température de fusion (T_1) et une céramique avec une température de fusion (T_2). Dans la plupart des cas, un tel couple est habituellement ($T_1 \ll T_2$). Puis, si la température de fabrication est d'environ (T_1), la céramique est encore non fondue et la structure finale contient des particules de céramique non fondue dans une matrice métallique. Dans de nombreux cas, une telle structure présente une grande porosité et une petite adhérence entre les différents composants et son application générale est

limitée. Cependant, pour des applications spéciales, la présence de particules très dures (carbures) dans une matrice solide peut être souhaitable.

D'autre part, travailler autour de la température (T_2) va certainement entraîner une oxydation rapide et de l'évaporation de nombreux métaux. La formation de phases indésirables, etc. Les matériaux doivent être fabriqués dans une atmosphère protectrice ou à une basse pression et ces deux technologies sont très coûteuses [33].

I.5 Procédés d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés

Le processus de fabrication est l'un des domaines les plus importants de la recherche et une grande partie de la recherche sur les FGMs a été consacrée au traitement. La méthode de fabrication de ces matériaux peut être divisée en établissant la structure dans l'espace non homogène « gradation » et la transformation de cette structure en matériau en bloc «consolidation ».

La partie du traitement est une opération complexe qui nécessite plusieurs contrôles pour atteindre la performance ultime du produit à la fin avec une technique de formage réussie et ça conduit un produit avec une microstructure d'ingénierie d'une petite taille du défaut, une composition homogène bien répartie et atteindre des performances optimales avec haut degré de fiabilité.

Il existe une grande variété des méthodes de production ont été élaborées pour être utilisées, les paragraphes suivants s'attachent à décrire les principales méthodes utilisées dans l'industrie :

I.5.1 La métallurgie des poudres

La métallurgie des poudres est l'une des techniques les plus répandues en raison de sa large gamme de contrôle de composition, sa microstructure et sa capacité à former une forme quasi nette. C'est une technique et a les avantages d'une plus grande disponibilité des matières premières, un traitement plus simple équipements, une consommation d'énergie plus faible et des temps de traitement plus courts. Dans le traitement de la poudre, le gradient a généralement produit en mélangeant différentes poudres dans des rapports variables et en les empilant les mélanges de poudre en couches séparées

Cette technique de fabriquer des matériaux fonctionnellement gradués passe par trois étapes de base notamment [34] :

- La pesée et le mélange de la poudre (a, b) ;
- Le jalonnement de la poudre pré-mélangée (c) ;
- Le frittage(d).

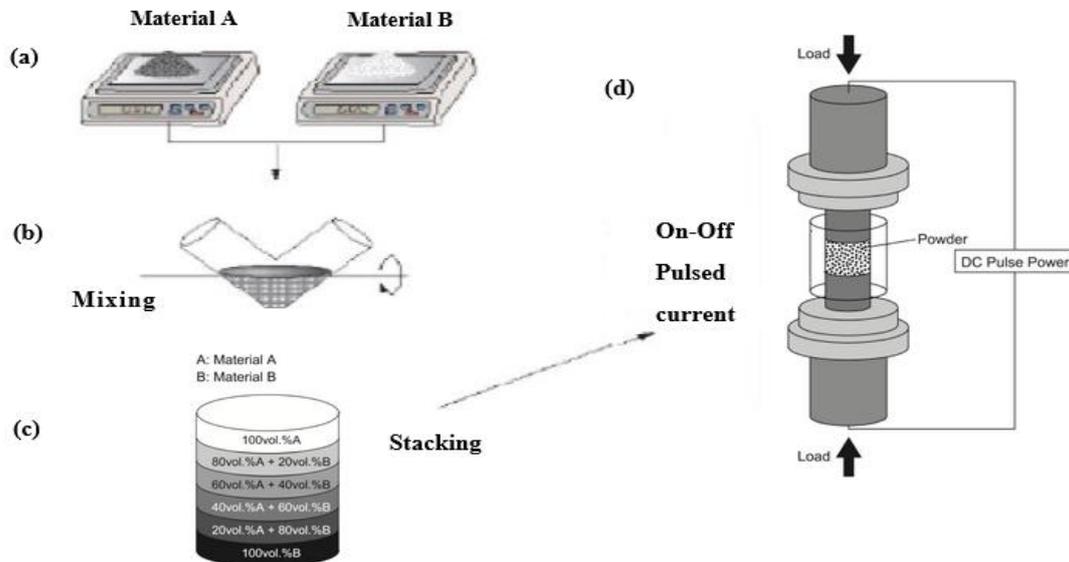


Figure. I.2 : Processus de fabrication typique des FGMs par la méthode de métallurgie des poudres [38].

I.5.2 Coulage en bande (Tape casting ou Doctor-Blade)

Le coulage en bande est une technique de mise en forme par voie liquide qui consiste à étaler une barbotine de poudres fines en suspension sur une surface plane en couches minces et régulières. L'étalement de la bande est obtenu par le mouvement relatif d'un réservoir ou sabot. La suspension est ainsi laminée par son passage entre la lame du réservoir et le support (Figure I.3), ce qui confère à la bande déposée une épaisseur uniforme sur toute sa longueur.

La hauteur du couteau du réservoir par rapport au support détermine l'épaisseur de la bande [35]. Les produits obtenus sont des feuillets avec des épaisseurs contrôlées (25-1000 μm). Après un raffermissement de la pâte, les feuillets sont démoulés et ensuite découpés. Ce procédé est devenu une technique économique pour la production des substrats céramiques de type Al_2O_3 et surtout pour les condensateurs à base de BaTiO_3 .

On peut d'ailleurs remarquer qu'il s'agit déjà de FGM puisqu'il faut empiler des couches conductrices (métaux rares) avec des couches diélectriques (BaTiO_3 principalement).

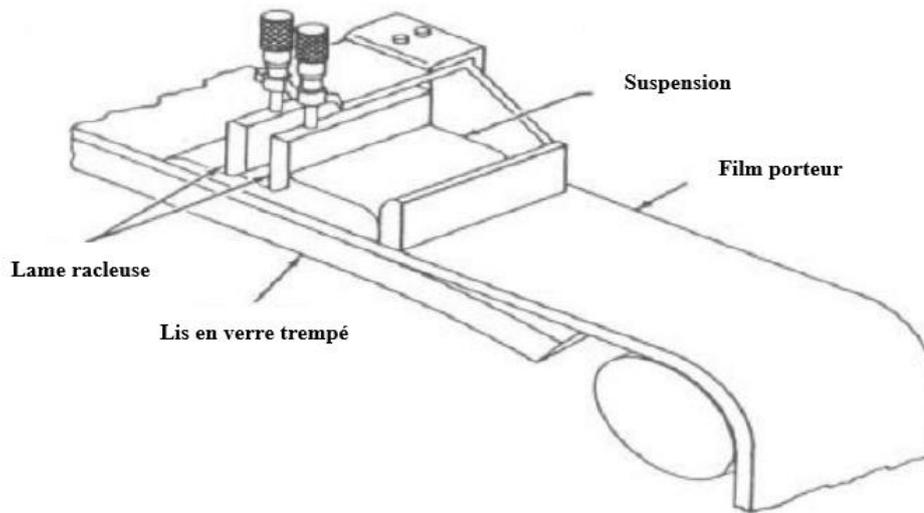


Figure I.3 : Principe du coulage en bande [35].

Le procédé de coulage en bande est largement utilisé pour réaliser des matériaux composites laminaires suivant deux méthodes :

- Soit par réalisation directe de bandes multicouches grâce à un système de lames multiples, c'est le cas des tri-couches élaborés par [36].
- Soit par empilage de couches élaborées séparément, dont la cohésion est ensuite assurée par une étape de thermo-compression [37].

I.5.3 Projection plasma

Un gaz soumis à une forte température (par exemple celle d'un arc électrique), se transforme en un état ionisé (plasma). Cette transformation est accompagnée d'un dégagement de chaleur important. Si une particule de céramique se trouve dans cet environnement, elle se fond totalement ou superficiellement, ce qui permet de la situer sur un substrat.

La projection plasma des particules des divers matériaux est devenue une méthode très utilisée pour fabriquer des FGMs. L'équipement relativement simple, le rendement élevé du dépôt des particules sur des substrats à géométrie compliquée, les performances des surfaces en fonctionnement et la compatibilité des céramiques avec les métaux sont les avantages essentiels de cette technique [38].

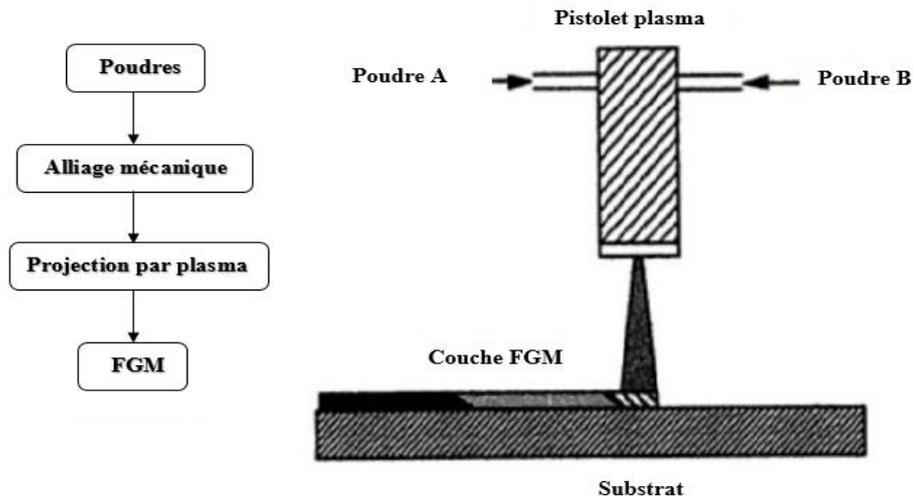


Figure. I.4 : Fabrication d'une plaque FGM avec la projection plasma [38].

I.5.4 Dépôt par Centrifugation

La technique consiste à verser une suspension colloïdale relativement diluée dans des flacons cylindriques, le tout est soumis à une centrifugation. La sédimentation s'opère et le liquide surnageant est retiré. Ce procédé est répété pour obtenir des multicouches Figure I.5 [39]. Les facteurs pertinents comprennent la durée du processus, la vitesse de rotation et le contenu des fluides solides et dispersifs.

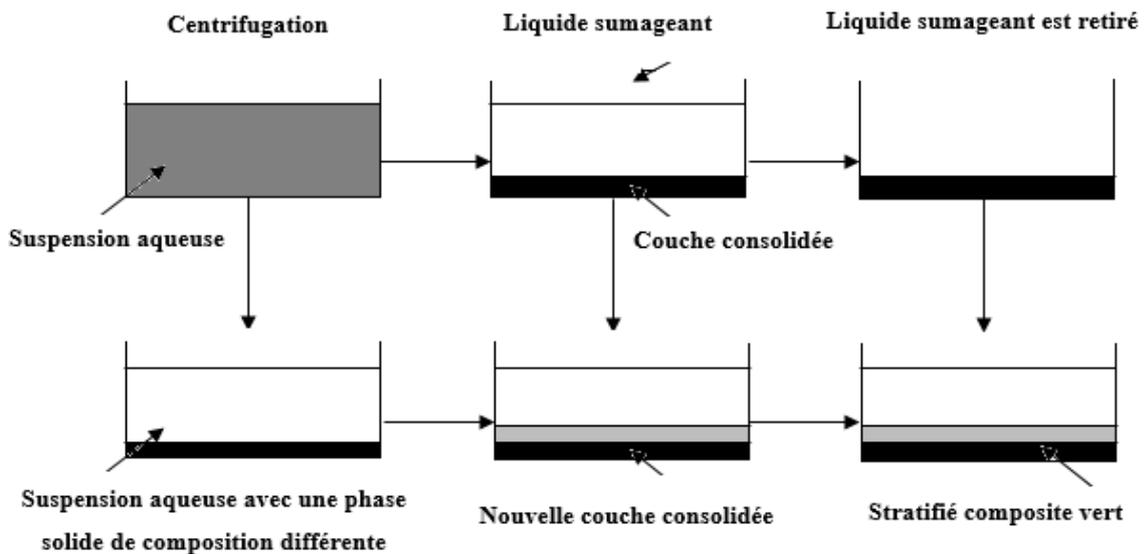


Figure I.5 : Schéma du procédé dépôt par centrifugation.

I.5.5 Coulage séquentiel en barbotine (Slip casting)

Le coulage en barbotine (Slip casting) consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, laissant un tesson (couche de poudre compacte) sur la surface du moule. Après séchage, on obtient le corps en cru.

Donc le coulage se décompose en deux étapes essentielles :

- Formation du tesson ou (prise) ;
- Consolidation du tesson ou (raffermissement).

La filtration, c'est à dire la formation du tesson lors du coulage, peut être considéré comme un processus d'élimination d'une partie de l'eau de la barbotine ; Cette eau migre à travers la couche de tesson déjà formée, sous l'effet :

- Du pouvoir de succion du plâtre (coulage classique [40]).
- Ou d'une pression appliquée sur la barbotine (coulage sous pression).

Dans le cas de la fabrication de multicouches, après la formation du premier tesson, le dépôt de la deuxième couche s'effectue de manière telle que la barbotine ne pénètre pas dans le tesson formé. Ce procédé est successivement reproduit pour les autres couches.

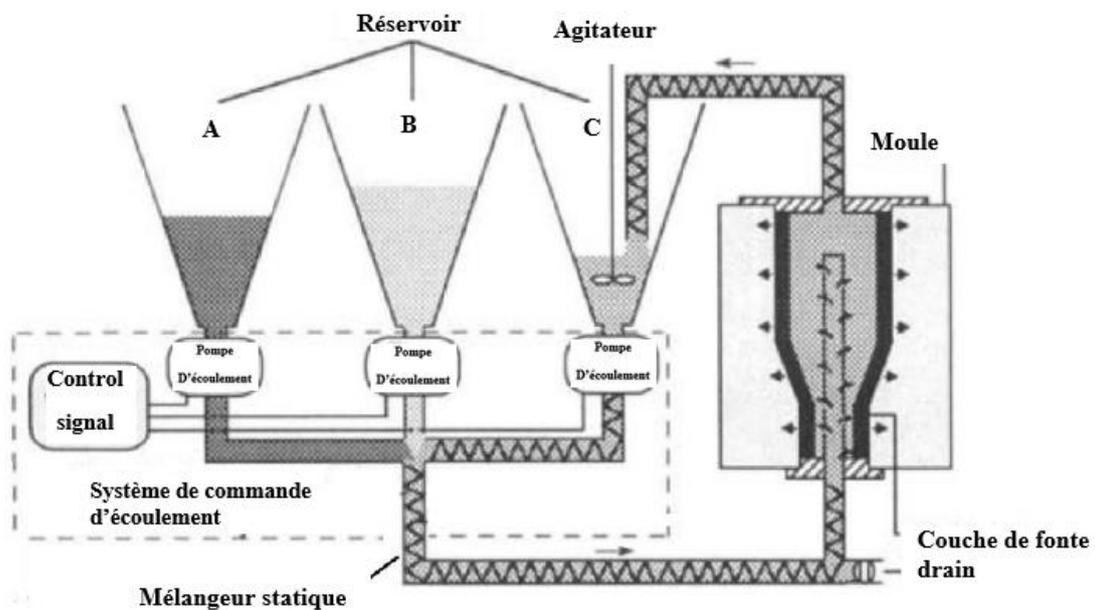


Figure. I.6: Principe du coulage par barbotine [40].

I.5.6 Frittage et infiltration

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes.

- La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité.
- La seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration.
- Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique.

Cette technique peut être généralement appliquées pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres.

I.5.7 Compaction sèche des poudres

Dans cette technique les poudres sont successivement versées dans un moule en acier. Chaque fois qu'une poudre est versée, une faible compression est exercée. Ensuite, la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Ce procédé est suivi, généralement, par une pression isostatique et un délainage. La densification sera enfin l'étape finale [41].

Ce procédé peut être envisagé pour la fabrication de pièces de formes complexes. En effet il s'applique aussi avec la technique du pressage isostatique, et de façon industrielle.

I.5.8 Frittage laser différentiel

Le rayonnement thermique du laser permet le contrôle de la température et la focalisation du point à chauffer. La différence de l'intensité de l'irradiation sur différents points du matériau, provoque un frittage différentiel le long de la pièce, ce qui résulte en des microstructures différentes, dépendant de la position du point irradié. Cette technique a été utilisée pour élaborer un FGM de PSZ/Mo.

I.6 Propriétés matérielles effectives d'un matériau FGMs

Généralement les FGMs sont fabriqués par deux phases de matériaux avec différents propriétés classées par leur microstructure variable dans l'espace ; conçue pour optimiser l'exécution des éléments de structures par la distribution de propriétés correspondantes. Une description détaillée d'une microstructure graduée réelle et généralement non Disponible, sauf peut-être pour des informations sur la distribution de la fraction volumique. Tandis que la

fraction volumique de chaque phase varie graduellement dans la direction de gradation, les propriétés effectives des FGM changent le long de cette direction.

Par conséquent, nous avons deux approches possibles pour les FGM comme modèles :

- Pour la première, une variation par morceaux de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée, et le FGM est pris pour être posé avec la même fraction volumique dans chaque région, c'est à dire, couche quasi-homogène de céramique-métal.
- Pour la deuxième, une variation continue de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée (voir Figure I.7).

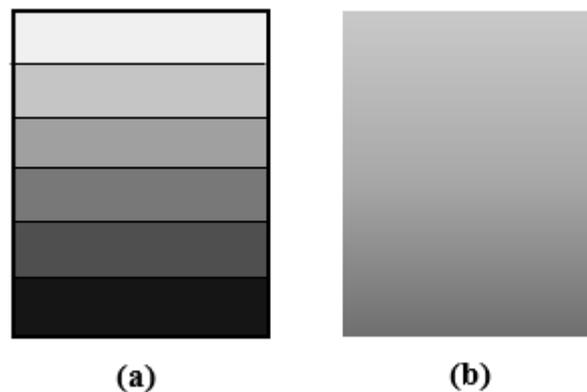


Figure I.7: *Modèle analytique pour une couche de matériau à gradient fonctionnel :*

a) première approche ; b) deuxième approche

I.7 Propriétés physiques et mécaniques des FGM

L'apparition des nouvelles industries nécessitent des milieux à haute performance et agressifs, il est devenu important d'insérer au moins une phase de matériau céramique dans toute FGM en raison de ses propriétés intéressantes. Dans ce type de FGM les propriétés souhaitables sont obtenues par la combinaison du métal et céramique. Les propriétés mécaniques et physiques de ces deux composantes sont illustrées dans le Tableau I.1.

Tableau I.1 : comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.

Matériaux	Zone	Propriétés
Céramique	La face à haute température	- Bonne résistance thermique - Bonne résistance à l'oxydation - Faible conductivité thermique
Céramique -métal	Continuité du matériau d'un point à l'autre (couches intermédiaires)	- Élimination des problèmes de l'interface - Relaxer les contraintes thermiques
Métal	La face à basse température	- Bonne résistance mécanique - Conductivité thermique élevée - Très bonne ténacité

I.8 Lois qui régissent la variation des propriétés matérielles d'une plaque FGM

Les matériaux à gradient fonctionnel « FGMs » consistent à l'association de deux ou plusieurs matériaux aux propriétés structurels et fonctionnelles différentes, avec une transition idéalement continues de la composition de la structure, et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent.

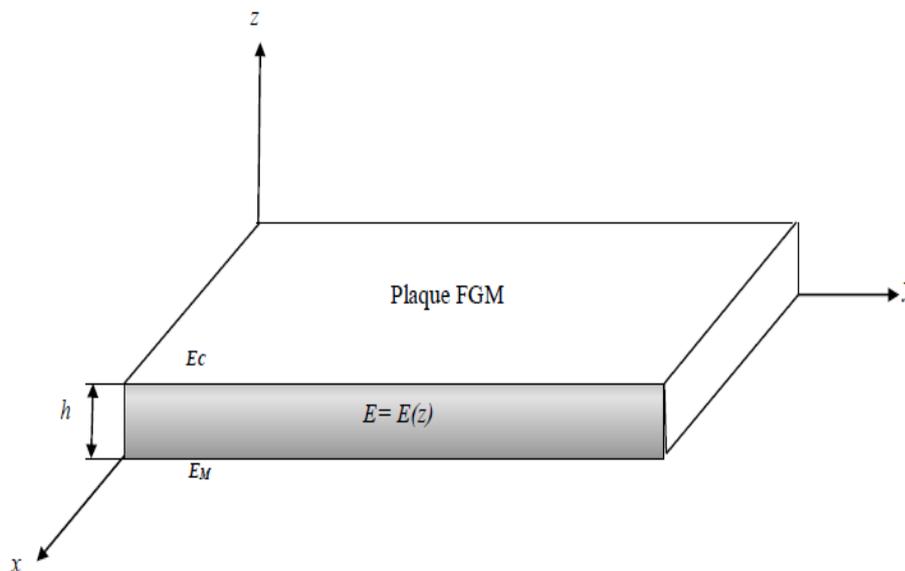


Figure I.8 : Géométrie d'une plaque en FGM.

Les coordonnées x et y définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe z perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque et dans la direction de l'épaisseur. Les propriétés du matériau dont le module de Young et le coefficient de Poisson sur les surfaces supérieures et inférieures sont différentes mais sont déterminés selon les demandes d'exécution.

La dépendance des propriétés de la position se traduit par la prise en compte de la loi des mélanges correspondant au modèle de Voigt [42].

$$P = \sum_{i=1}^n P_i V_i \quad (\text{I.1})$$

P : Propriété le long de l'axe z .

P_i : La propriété mécanique du constituant (i).

V_i : La fraction volumique du constituant (i).

Avec :

$$\sum_{i=1}^n V_i = 1 \quad (\text{I.2})$$

Dans la pratique, la plupart des structures FGM sont à deux constituants : de la céramique et du métal inoxydable. Dans ce cas la loi de Voigt se réduire à :

$$P = P_m V_m = P_c V_c \quad (\text{I.3})$$

P_m : Propriété mécanique du métal.

P_c : Propriété mécanique de la céramique.

V_m : Fraction volumique du métal.

V_c : Fraction volumique de la céramique.

Avec :

$$V_m + V_c = 1 \quad (\text{I.4})$$

Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de loi de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume. Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à

l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure.

I.8.1 Loi de mélange en puissance P-FGM

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance

$$V(z) = \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^p \quad (\text{I.5})$$

Où p est un paramètre matériel et h est l'épaisseur de la plaque. Une fois la fraction volumique locale $V(z)$ a été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges [43].

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)V(z) \quad (\text{I.6})$$

Où E_m et E_c sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure ($z = -h/2$) et de la surface supérieure ($z = h/2$) de la plaque FGM.

La variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la Figure I.9, il apparaît clairement que le module d'élasticité change rapidement près de la surface inférieure pour $p < 1$, et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour $p > 1$.

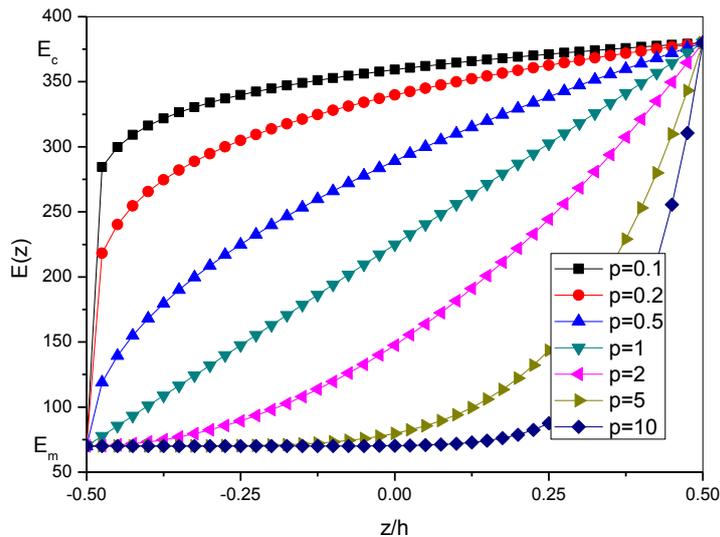


Figure I.9 : Variation du module de Young dans une plaque P-FGM.

I.8.2 Loi de mélange sigmoïde S-FGM

Dans le cas d'ajouter une plaque P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interface où le matériau est continu mais change rapidement. Par conséquent, Chung et Chi ont [44] défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2+z}{h/2} \right)^p \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.7a})$$

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2-z}{h/2} \right)^p \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.7b})$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par les relations suivantes :

$$E(z) = V_1(z) E_c + [1 - V_1(z)] E_m \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.8a})$$

$$E(z) = V_2(z) E_c + [1 - V_2(z)] E_m \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.8b})$$

La Figure I.10 montre que la variation du module d'élasticité obtenue en utilisant l'équation (I.8) dépend en principe de la fraction volumique donnée par l'équation (I.7) qui représente les distributions sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée (plaque S-FGM).

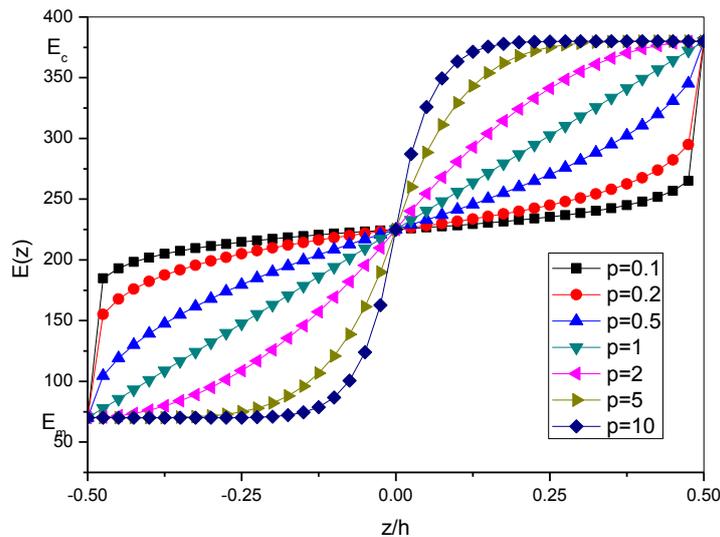


Figure I.10 : Variation du module de Young dans une plaque S-FGM.

I.8.3 Loi de mélange exponentielle E-FGM

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme [45].

$$E(z) = E_m e^{B(z+h/2)} \quad (\text{I.9a})$$

Avec :

$$B = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{E_1}{E_2} \right) \quad (\text{I.9b})$$

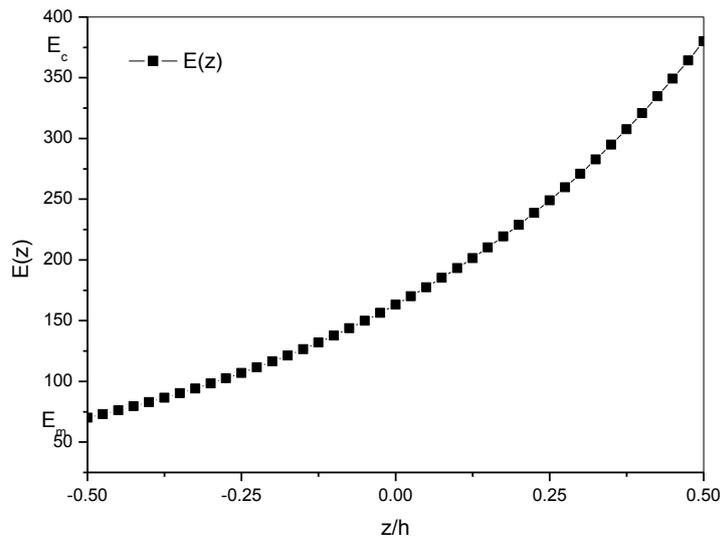


Figure I.11 : Variation du module de Young dans une plaque E-FGM.

I.9 Domaines d'applications

Il existe de nombreux domaines d'applications pour les pièces en FGM [46]. Les deux principaux sont les domaines aérospatial et biomédical. Dans le domaine aérospatial, où le concept de FGM fit son apparition, les pièces multi matériaux sont en majorité développées dans le but de résister à la fois à des sollicitations thermiques et mécaniques. Le centre de recherche de la NASA propose, par exemple, de développer des pièces en FGM pour des navettes spatiales. Des analyses thermiques montrent que pendant les phases de vol, la température du fuselage peut atteindre les 1000 °C tandis que celle du réservoir est proche des 400°C. La conception de ces supports de fixation doit leur permettre de supporter ces contraintes thermiques en limitant les efforts de cisaillement et de flexion qui impactent leur durée de vie.

On trouve également des applications dans le domaine de l'électronique [47], de l'énergie nucléaire [48], de la défense [49] ou de la production d'outillage. Cette liste n'est évidemment pas exhaustive et on imagine qu'au fur et à mesure des avancées scientifiques, l'appropriation de ce type de structure par les concepteurs permettra encore de l'élargir. Effectivement, les possibilités de combinaison sont en théorie quasiment illimitées et chaque combinaison forme une structure avec des propriétés spécifiques. On peut donc penser que les structures multi matériaux vont transformer en profondeur le monde de la conception en augmentant considérablement les possibilités dans l'étape stratégique du choix des matériaux.

Les différents domaines d'applications des matériaux composites avancés sont illustrés dans la Figure I.12.

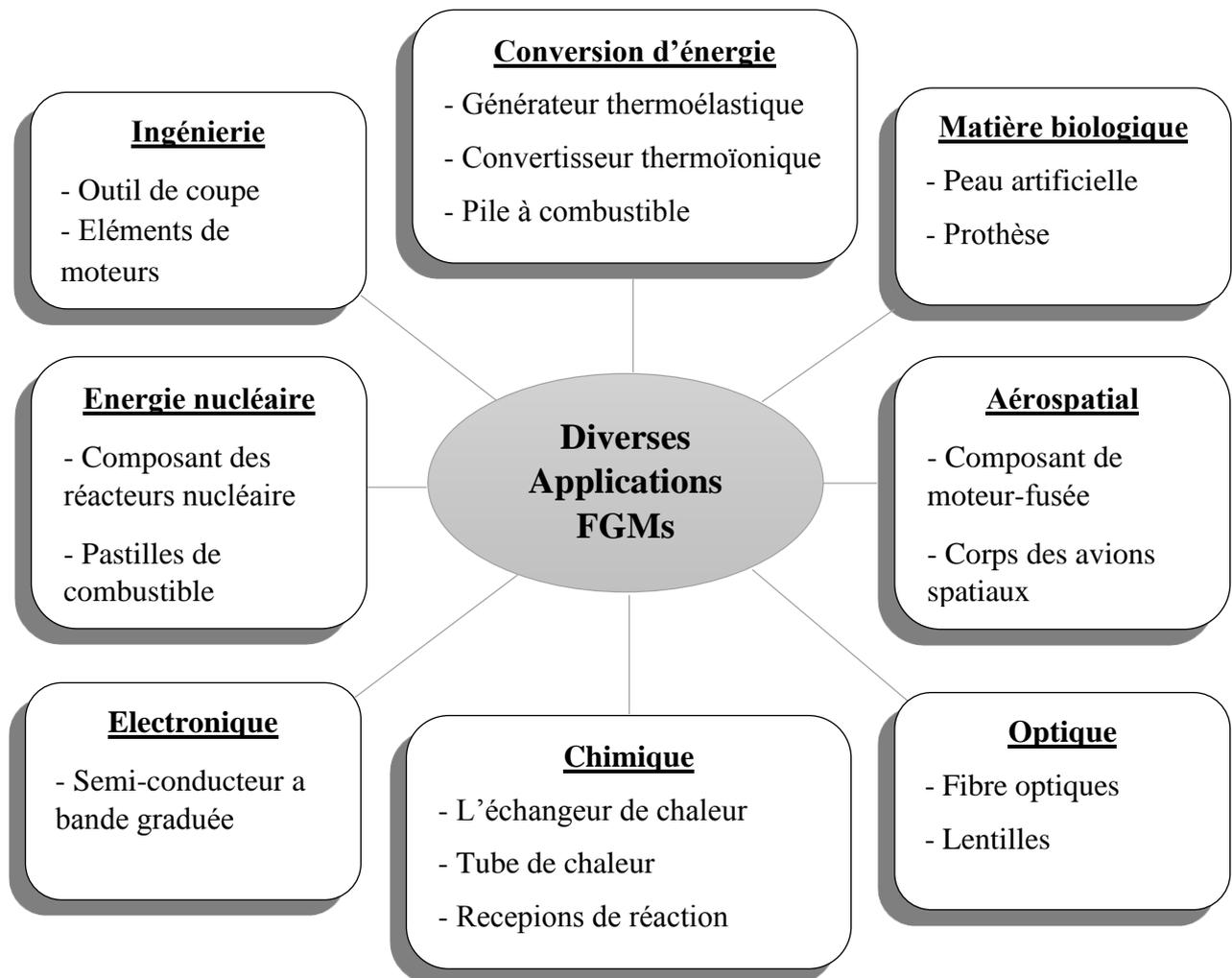


Figure I.12 : Les principaux domaines d'application des FGMs.

I.10 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un bref historique sur les matériaux à gradients de propriétés, leurs modes de la mise en œuvre et les modèles de l'homogénéisation de ce type des matériaux.

Et en dernier lieu, nous avons évoqué les différentes lois qui régissent la variation des propriétés matérielles des plaques que soit de puissance, sigmoïde ou exponentielle à travers l'épaisseur d'une plaque par la variation des propriétés du matériau (module d'Young, coefficient de poisson et la masse volumique). Ce chapitre fait l'introduction au chapitre suivant, pour estimer la mécanique des plaques en FGM.

CHAPITRE II

LES DIFFÉRENTES THÉORIES DES PLAQUES

Chapitre II : Les différentes théories des plaques

II.1 Introduction

Les domaines d'ingénierie comme l'aérospatial, la mécanique, le génie civil et tous les domaines qui ayant une stratégie et économique important utilise les plaques dans l'un de ces constitutions. C'est pour cette raison les plaques fait l'objet d'un très grand nombre de travaux. Néanmoins, elles subissent plusieurs modifications de leur forme géométrique et plusieurs types de leurs compositions.

Une plaque est un élément structural délimité par deux plans parallèles, dont l'épaisseur est faible que les deux dimensions dans le plan caractérisant la surface de référence [50].

Les plaques subissent plusieurs théories (Kirchhoff, Reissner-Mindlin...), ces théories des plaques sont développées en utilisant la méthode semi-inverse dans laquelle une supposition éclairée est faite quant à la forme du champ de déplacement ou du champ de contraintes, laissant suffisamment de liberté dans le champ supposé peut satisfaire les équations d'élasticité. Au plus des siècles, c'est en 1888 que Love utilisa les hypothèses de Gustav Kirchhoff, elles-mêmes inspirées des hypothèses d'Euler-Bernoulli pour trouver une théorie des plaques minces (également appelée théorie classique ou théorie de Kirchhoff-Love). Mindlin a consolidé la théorie des plaques semi-épaisses (théorie de déformation du premier d'ordre) à partir des travaux de Timoshenko [51], Chi [52] et Reissner [53].

Ensuite, des théories d'ordre supérieur sont venues pour améliorer les hypothèses des théories classiques et du premier ordre lorsque l'épaisseur de la plaque devient importante. Il existe aussi une nouvelle théorie pour les plaques isotropes qui est développé par Shimpi en 2002 [54], ce modèle appelée la théorie raffinée de déformation des plaques RPT (Refined Plate Theory).

Il existe aussi une autre théorie est basée sur l'élasticité tridimensionnelle (théorie 3-D) qui ne fait aucune hypothèse restrictive sur les déplacements de la plaque. Les différentes théories existantes peuvent donc être classées en quatre principales catégories : théorie classique des plaques minces (appelée aussi théorie de Kirchhoff-Love), théorie des plaques semi épaisses du premier ordre (appelée aussi théorie de Mindlin-Reissner), théories d'ordre supérieur applicables aux plaques épaisses (comme celle de Reddy) et la théorie basée sur l'élasticité tridimensionnelle (théorie 3-D) [55].

II.2 Les modèles analytiques des plaques FGM

L'utilisation intensive des plaques isotropes et des plaques composites dans diverses industries a stimulé les chercheurs à développer des théories capables de décrire correctement leur comportement structural.

L'analyse des plaques nécessite une résolution d'un problème tridimensionnel, et presque toutes les théories développées d'un part réduire le problème 3-D à un problème 2-D pour faciliter à atteindre un objectif principal, et d'autre part en se servant des hypothèses simplificatrices concernant la cinématique des déformations et l'état des contraintes à travers l'épaisseur. Dans ce qui suit, seules les théories les plus utilisées dans l'analyse des plaques FGM, seront exposées.

II.2.1 Théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT)

On commence par le modèle le plus générale et le plus simple le modèle de Kirchhoff. La théorie adoptée de ce modèle est basée sur la distribution linéaire des déplacements suivant l'épaisseur. Elle est utilisée dans le domaine des petites déformations et des petits déplacements pour les plaques minces. Dans le cas d'une plaque homogène isotrope, la part de cisaillement dans la flèche est directement reliée à l'élancement (L/h).

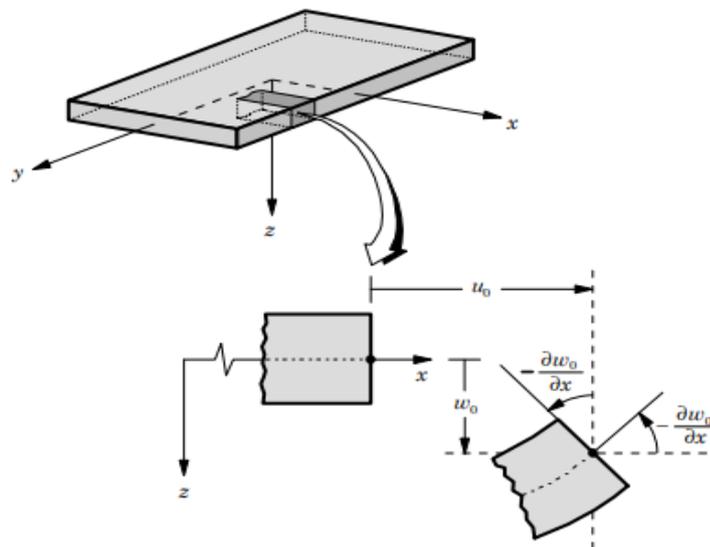


Figure II.1 : Illustration du modèle de la plaque de Love-Kirchhoff CPT [103].

II.2.1.1 Hypothèses de base de CPT

Les hypothèses cinématiques adoptées pour les plaques minces généralement à deux dimensions, ces hypothèses de Kirchhoff reprise par Love sont les suivants :

- La plaque est de petite épaisseur devant les autres dimensions (rapport d'élanement h/a ou $h/b < 0.05$). Elle possède un plan moyen, également appelé plan neutre ;
- Les sections droites, initialement normales au plan neutre, restent planes et normales à celui-ci après déformation. La déformation en cisaillement transverse est donc négligée ;
- Les termes non linéaires du déplacement sont négligés. L'inertie de rotation est aussi négligée ;
- La contrainte normale dans la direction transversale est petite, donc négligeable comparativement aux contraintes appartenant au plan de la plaque.

L'effet de la déformation en cisaillement transverse augmente d'une manière significative lorsque le rapport l'élanement h/a ou h/b est supérieur ou égale à 0.05. Étant donné que cette théorie néglige la flexibilité de cisaillement transverse ceci conduit à une surestimation de la rigidité de flexion et par voie de conséquence une surestimation de vibration et une sous-estimation des déplacements.

II.2.1.2 Champ de déplacement

A partir des hypothèses ci-dessus, le champ de déplacement de la théorie classique s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}, \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y}, \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

Avec (u_0, v_0, w_0) sont les composantes du champ de déplacement à la surface moyenne ($z = 0$). L'effet de cisaillement transversal n'est pas pris en compte dans cette méthode, de ce fait les résultats pour les plaques épaisses seront surestimés et inexacts. A cet effet survient la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre.

II.2.2 Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)

Puisque la théorie classique donne des résultats non précis pour les plaques épaisses, La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (la théorie de Mindlin-Reissner) a prolongé la théorie classique avec une expression différent de la courbure et qu'il faudra en plus prendre en considération le cisaillement transversal comme la figure II.2 illustre.

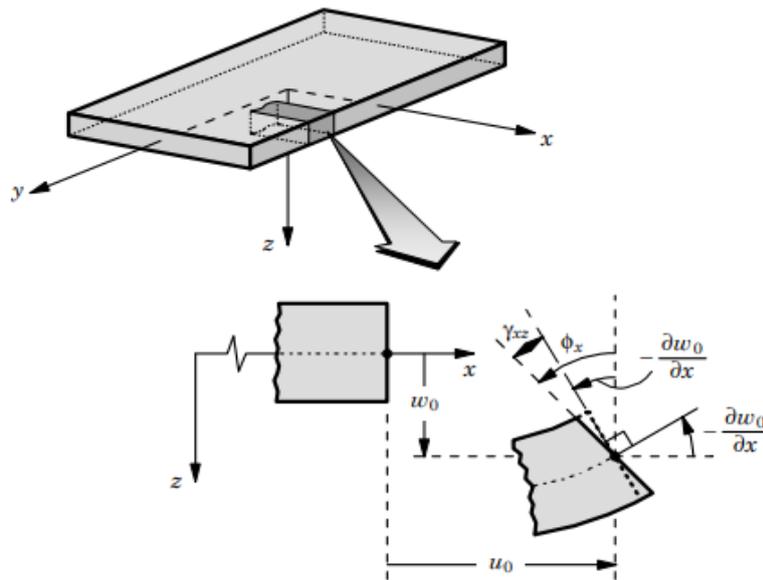


Figure II.2 : Illustration du modèle de la plaque de Reissner-Mindlin FSDT [103].

Dans ce dernier cas les contraintes de cisaillement sont donc uniformes à n'importe quel point suivant l'épaisseur, cette uniformité évitent la discontinuité entre les couches dans les composites conventionnels, mais cela se produit une mauvaise description d'uniformité de distribution des contraintes.

Cette mauvaise description de distribution des contraintes oblige d'introduire des facteurs de correction de cisaillement pour satisfaire les conditions de nullité des contraintes de cisaillement transversal à la surface supérieure et inférieure de la plaque et pour mieux prendre en compte, dans l'écriture de l'énergie, les effets du cisaillement transversal [56].

La détermination de facteur de correction n'était pas facile car il dépend de plusieurs paramètres comme la géométrie de la plaque, de la variation du coefficient de Poisson à travers l'épaisseur, du chargement appliqué et des conditions aux limites imposées.

II.2.2.1 Hypothèses de base de FSDT

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) se base sur les hypothèses de (Reissner(1945) et Mindlin (1951)), d'où :

- Aucune déformation ne se produit dans le plan moyen de la plaque ;
- La contrainte normale dans la direction transversale est négligeable devant les autres composantes ;
- La section plane et perpendiculaire à l'axe neutre avant déformation reste plane et perpendiculaire à l'axe neutre après déformation (Figure III.3) ;
- Les normales ne changent pas de longueur ;
- Les effets de déformation en cisaillement sont pris en compte.

La troisième hypothèse implique que la déformation de cisaillement transversale est différente de zéro, mais elle dépend également à la contrainte de cisaillement qui est nulle sur les surfaces extérieures puisque la contrainte de cisaillement devient constante suivant toute l'épaisseur de la plaque. Pour compenser cette erreur, on applique le facteur de correction de cisaillement K .

II.2.2.2 Champ de déplacement

Le champ de déplacement de la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre est exprimé comme suit :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\phi_x(x, y), \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\phi_y(x, y), \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

Avec (u_0, v_0, w_0) et (ϕ_x, ϕ_y) sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y , respectivement.

Et afin d'améliorer ces méthodes et d'éviter l'introduire le facteur de correction de cisaillement, des théories de la déformation de cisaillement d'ordre supérieure ont été développées pour remédier à ce problème.

Le champ de déplacement définis dans l'équation (II.2) permet de reprendre la théorie classique des plaques décrite dans la dernière section par le remplacement :

$$\phi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x}, \phi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (\text{II.3})$$

II.2.3 Théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)

Pour le but d'éviter l'utilisation d'un facteur de correction en cisaillement et pour tenir en compte des hypothèses plus réalistes que celles de Kirchhoff et Mindlin-Reissner, plusieurs chercheurs proposent des théories à un ordre supérieur qu'ils sont basés sur une distribution non linéaire des contraintes et des déformations à travers l'épaisseur, contrairement à la théorie CPT et la théorie FSDT.

Par conséquent, on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et/ou de la déformation normale transversale. Ces modèles permettent de représenter le gauchissement de la section dans la configuration déformée (Figure II.3) [56], [57].

On trouve les mêmes parties : le déplacement de la membrane, le déplacement dû à la flexion et le déplacement dû au cisaillement. Mais cette fois, le déplacement axial dû au cisaillement n'est plus linéaire. Donc, on remplace le (z) pour la théorie précédente par une fonction $f(z)$ qu'on appelle « fonction de gauchissement » ou « fonction de forme ».

Les modèles HSDT peuvent être développés à l'aide des fonctions de forme polynomiale ou des fonctions non-polynomiale.

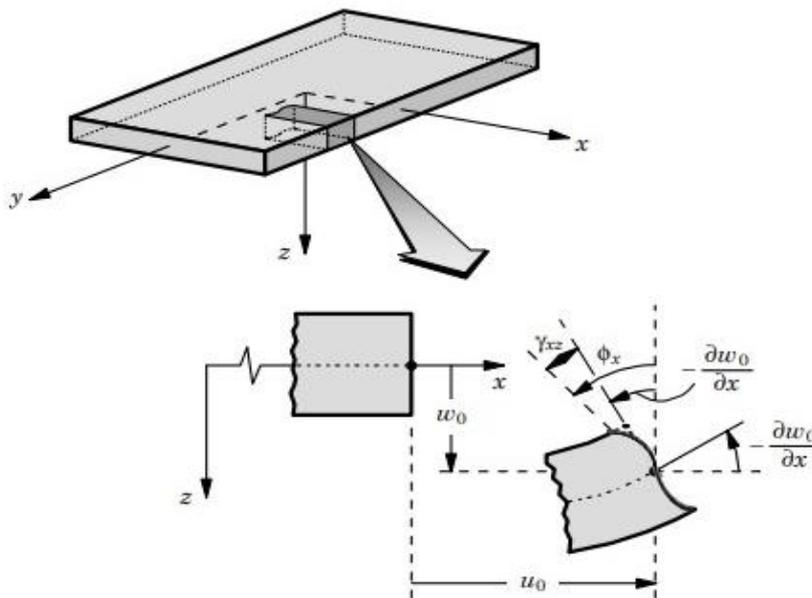


Figure II.3 : Illustration du modèle d'ordre élevé HSDT de la plaque [103]

II.2.3.1 Hypothèses de base de HSDT

La plupart des modèles d'ordre supérieur utilisent un développement en série de Taylor des champs de déplacements qui s'écrivent de la forme :

- Les contraintes de cisaillement transversale sont supposées variées de façon parabolique à travers l'épaisseur et nulles sur les surfaces supérieur et inférieur ;
- La contrainte normale dans la direction transversale (σ_{zz}) est petite, donc négligeable comparativement aux contraintes appartenant au plan de la plaque ;
- Après déformation, les sections transversales ne restent pas forcément planes et normales au plan moyen ;
- Par rapport à l'épaisseur de la plaque, les déplacements sont petits.

II.2.3.2 Champ de déplacement

Le champ de déplacement de la théorie d'ordre élevé est généralement défini comme suit :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z) \phi_x(x, y), \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z) \phi_y(x, y), \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

Où les variables (u_0, v_0, w_0) et (ϕ_x, ϕ_y) représentent les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y , respectivement.

$f(z)$ Est une fonction de cisaillement transverse qui caractérise l'effet de gauchissement à travers l'épaisseur de la plaque stratifié, Il faut également noter que l'expression de cette fonction est variable selon les différentes théories existantes dans la littérature. A savoir que $f(z) = 0$ pour le cas de la théorie classique des plaques stratifiées, par contre $f(z) = z$ au titre de la théorie du premier ordre en cisaillement transverse.

II.2.4 Théorie raffinée de déformation des plaques (RPT)

Un modèle raffiné de déformation des plaques, RPT (Refined Plate Theory) a été développé par le chercheur Shimpi en 2002 pour les plaques isotropes dans un but de réduire le nombre de variables utilisées dans les formulations des théories à ordre élevé [58]. Cette théorie raffinée de déformation présente une similitude par rapport à la théorie classique des plaques (CPT) dans les équations du mouvement, les conditions aux limites et les expressions des moments et

ne nécessite pas de coefficient de correction de cisaillement. Plusieurs chercheurs ont démontré la fiabilité de cette théorie tels que Kim et Thai [59] ou ils ont appliqué cette théorie dans le cas de la flexion des plaques FGM dans le cas statique ainsi que d'autres travaux de Thai et Kim [60] dans le cas du flambement des plaques orthotropes.

II.2.4.1 Hypothèses de base de RPT

Les hypothèses de la théorie raffinée des plaques de Shimpi [58] sont :

- Le déplacement est petit par rapport à l'épaisseur de la plaque ;
- La contrainte normale transverse σ_z est négligeable par rapport aux contraintes axiales σ_x et σ_y ;
- Le déplacement $w(x, y)$ normal au plan médian de la plaque est la somme des deux composantes de la flexion $w_b(x, y)$ et de cisaillement $w_s(x, y)$;
- Les déplacements aux plans $u(x, y)$ et $v(x, y)$ suivant les axes x et y sont constitués de deux composantes de flexion et de cisaillement dues aux forces normales au plan ;
- Les composantes de flexion $u_b(x, y)$ et $v_b(x, y)$ sont considérées comme semblables aux déplacements donnés par la théorie classique des plaques :

$$u_b(x, y) = -z \frac{\partial w_b}{\partial x}, v_b(x, y) = -z \frac{\partial w_b}{\partial y} \quad (\text{II.5})$$

- Les composantes de cisaillement $u_s(x, y)$ et $v_s(x, y)$ sont liées à la composante de déplacement de cisaillement $w_s(x, y)$.

II.2.4.2 Champ de déplacement

Le champ de déplacement de la théorie RPT s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x}, \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y}, \\ w(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y) \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

Après le développement de la théorie RPT par Shimpi (2002) ; [54], La fiabilité de cette méthode a été démontrée par plusieurs chercheurs. Toutefois, des solutions analytiques pour la déflexion, la charge de flambement et la fréquence naturelle ont été obtenues pour les plaques

dans des conditions limites arbitraires en utilisant la méthode des solutions de Sobhy *et al.* [61]. La théorie RPT a été utilisée dans les travaux de (Merdaci *et al.* [62], Tounsi *et al.* [63], et Thai et Vo [64], Draiche *et al.* [65]) pour les plaques composites et sandwich en FGM, et enfin Thai et Choi [66] ont amélioré cette théorie (RPT) en introduisant l'effet de l'étirement de l'épaisseur dans les plaques Fonctionnellement graduées en se basant sur une fonction tangentielle inverse.

III.2.5 Théorie de déformation des plaques quasi-3D

Dans ce type de théorie quasi-3D le déplacement transversal est scindé en trois constituantes qui sont la flexion, le cisaillement et l'effet de l'étirement de l'épaisseur de la plaque en anglais « stretching effect ». Plusieurs chercheurs ont travaillé dans ce type de théorie tel que Kim et Thai [59] qui avait proposé une théorie à cinq variables pour la déformation au cisaillement de premier ordre au lieu des théories d'ordre élevé à six variables, d'autres chercheurs ont proposé par le biais de plusieurs fonctions des théories quasi-3D à cinq variables tel que [67] et [68]. Des théories quasi-3D à quatre variables ont été développées afin de minimiser le nombre d'équations est cela grâce à l'introduction de nouvelles hypothèses pour les théories quasi-3D à six inconnues, comme les travaux de Zenkour qui a proposé une nouvelle théorie quasi-3D à quatre inconnues pour analyser les différents types de plaques: FGM [69], les plaques sandwichs [70] et les plaques composites stratifiées [71], il y a aussi Mantari et Guedes Soares [72] qui ont développé une théorie quasi-3D à quatre inconnues en combinant à l'aide d'une fonction hyperbolique l'effet de cisaillement et l'effet de l'étirement du déplacement transversal. De ce fait le champ de déplacement dans cette théorie est présenté comme suit :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y) + g(z) \varphi(x, y) \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

Où $w_b(x, y)$ et $w_s(x, y)$ représentent les composantes du champ de déplacement dans les directions x et y . Cependant, $\varphi(x, y)$ est un déplacement supplémentaire qui prend en considération l'effet d'étirement et $g(z)$ est la dérivée de la fonction de cisaillement transverse définie comme suit :

$$g(z) = 1 - f'(z) \quad (\text{II.8})$$

II.2.6 Théorie d'élasticité 3D des plaques épaisses

Pour évaluer le comportement exact des plaques épaisses, il faut trouver des nouvelles stratégies pour une description précise des champs de contraintes à travers l'épaisseur, on note surtout les contraintes de cisaillement. Malgré que les théories d'ordre supérieur maîtrisent efficacement les problèmes traités avec succès, mais il faut remarquer que la déformation normale transverse est négligée dont elle a un impact important sur la précision souhaitée. Le recours à l'élasticité tridimensionnelle est donc la règle, les principales idées pour résoudre ce type de problème (en analyse statique ou dynamique) sont : la construction des champs des contraintes et disposer leurs solutions exactes ou leurs approximations.

Récemment, plusieurs auteurs ont été, en outre, consacrer leurs recherches en particulier de donner des expressions analytiques exactes, bien qu'elles soient éventuellement approximatives pour résoudre de façon récurrente les problèmes traités.

Vel *et al.* [73] ont présenté des solutions exactes pour l'analyse vibratoire des plaques FGMs , Uymaz *et al.* [74] ont proposé une solution approchée par une série des études utilisant les polynômes orthogonaux de Tchebychev, mêmes problèmes ont été traités par Li *et al.* [75] qui introduisent la méthode de Ritz comme une stratégie de résolution .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

Où ρ est la densité du matériau, u, v et w représentent les composantes du champ de déplacement dans les directions x, y et z , respectivement.

Toutefois, pour franchir les limites de la résolution analytique et approximative des problèmes tridimensionnels, seules les méthodes numériques, telles que la méthode des éléments finis et les méthodes approximatives permettant d'étudier le comportement mécanique les plaques épaisses en appliquant les théories d'élasticité tridimensionnelle, de géométries quelconques et sous différents types de chargement ainsi que les conditions aux limites. Généralement ces méthodes offrent des avantages et des potentialités primordiales.

II.3 Revue sur les différentes fonctions de gauchissement

Nous avons cité dans cette partie quelques contributions importantes de développement de modèles d'ordre supérieur qui se sont distinguées dans la littérature et qui diffèrent par la fonction de gauchissement $f(z)$ qui assure la nullité des contraintes de cisaillement aux surfaces libres de la plaque.

II.3.1 Les fonctions polynomiales

Ces fonctions donnent une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle. La distribution des contraintes de cisaillement transversal est parabolique suivant l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

- La fonction d'Ambartsumyan [76], donnée sous forme :

$$f(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad (\text{II.10})$$

- La fonction de Kaczkowski [77], Panc [78] et Reissner [79] est exprimée par :

$$f(z) = \frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.11})$$

- La fonction de Levinson [80] et Reddy [14] est exprimée par :

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.12})$$

II.3.2 Les fonctions trigonométriques

Plusieurs modèles trigonométriques sont été employées pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur des plaques isotropes, composites et FGM. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy. Les fonctions de cisaillement transverse s'écrivent comme ci-dessous :

- La fonction trigonométrique sinusoidale de Levy [81] et Touratier [57] :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{z}{h}\right) \quad (\text{II.13})$$

- La fonction d'Arya *et al.* [82] exprimée par :

$$f(z) = \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (\text{II.14})$$

- La fonction de Mantari *et al.* [83] donnée comme :

$$f(z) = \tan(mz) - mz \sec^2\left(\frac{mh}{2}\right), m = \frac{1}{5h} \quad (\text{II.15})$$

- La fonction de Thai *et al.* [66] :

$$f(z) = -z + h \tan^{-1}\left(\frac{2z}{h}\right) \quad (\text{II.16})$$

- La fonction de Nguyen *et al.* [84] exprimée par :

$$f(z) = h \tan^{-1}\left(\frac{rz}{h}\right) - \frac{16rz^3}{3h^2(r^2 + 4)}, r = 1 \quad (\text{II.17})$$

II.3.3 Les fonctions hyperboliques

Les différentes fonctions les plus célèbres dans la littérature sont :

- La fonction hyperbolique de Soldatos [85] :

$$f(z) = h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) - z \cosh\left(\frac{1}{2}\right) \quad (\text{II.18})$$

- La fonction d'Akavci *et al.* [86] :

$$f(z) = \frac{3\pi}{2} h \tanh\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{3\pi}{2} z \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}\right) \quad (\text{II.19})$$

- La fonction de Grover *et al.* [87] :

$$f(z) = \sinh^{-1}\left(\frac{rz}{h}\right) - z \frac{2r}{h\sqrt{r^2 + 4}}, r = 3 \quad (\text{II.20})$$

- La fonction hyperbolique de Mahi *et al.* [88] :

$$f(z) = \frac{h}{2} \tanh\left(\frac{2z}{h}\right) - \frac{4z^3}{3h^2 \cosh^2(1)} \quad (\text{II.21})$$

II.3.4 Les fonctions exponentielles

Peu de ces fonctions ont été utilisées pour étudier le comportement mécanique des matériaux composites et fonctionnellement gradués. Le premier modèle exponentiel de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The exponential shear deformation plate theory ESDPT) a été développé par Karama *et al.* [89], est obtenue en prenant :

$$f(z) = z \cdot e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (\text{II.22})$$

Autre fonction exponentielle a été développée par Aydogdu [90], définie comme :

$$f(z) = z \cdot 3^{\frac{-2(z/h)^2}{\ln(3)}} \quad (\text{II.23})$$

II.3.5 Les fonctions combinées

La plupart des fonctions de ce type ont été suggérées par Mantari, et certaines d'entre elles peuvent être mentionnées dans cette recherche bibliographique.

- La fonction combinée de Mantari *et al.* [91] :

$$f(z) = \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \cdot e^{\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi z}{h}\right)} + \frac{\pi z}{2h} \quad (\text{II.24})$$

- La fonction combinée de Mantari *et al.* [92] :

$$f(z) = \sinh\left(\frac{z}{h}\right) \cdot e^{m\cosh\left(\frac{z}{h}\right)} - \frac{z}{h} \left[\cosh\left(\frac{1}{2}\right) + m\sinh^2\left(\frac{1}{2}\right) \right] \cdot e^{m\cosh\left(\frac{1}{2}\right)}, m = -7 \quad (\text{II.25})$$

- La fonction combinée de Thai *et al.* [66] :

$$f(z) = \tan^{-1} \left[\sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right] \quad (\text{II.26})$$

Les figures ci-dessous représentent la variation de la fonction de gauchissement à travers l'épaisseur z (variations des déplacements), et la variation de la dérivée de la fonction $f(z)$ (distributions des contraintes de cisaillement transverse).

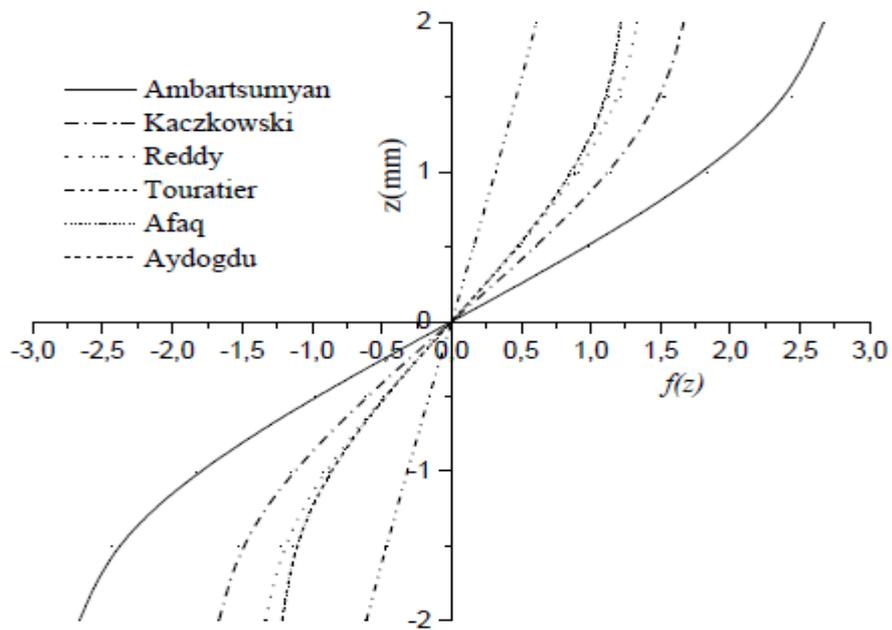


Figure II.4 : Variation de la fonction de forme $f(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur [104].

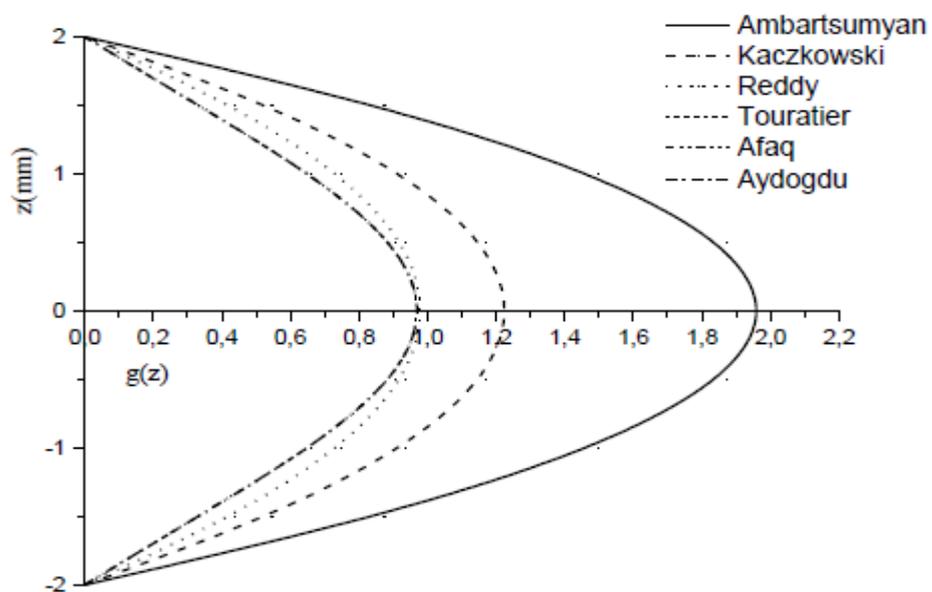


Figure II.5 : Variation de la dérivée de la fonction de forme $f'(z)$ des différents modèles suivant l'épaisseur [104].

II.4 Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté les différentes théories des plaques telles que la théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff, théorie de déformation en cisaillement du premier d'ordre (Reissner-Mindlin), la théorie d'ordre élevé, la théorie raffinée des plaques à quatre variables (RPT) et aussi La théorie quasi-3D ainsi que leurs histoires de développement.

D'après notre étude bibliographique concernant les différentes théories il est clair que la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé est intéressante en termes de précision d'une part mais elle possède des formulations théoriques complexe d'autres part.

CHAPITRE III

*ANALYSE DYNAMIQUE DES PLAQUES
FGM EN UTILISANT UNE NOUVELLE
CINÉMATIQUE D'ORDRE ÉLEVÉ*

Chapitre III : *Analyse dynamique des plaques FGM en utilisant une nouvelle cinématique d'ordre élevé*

III.1 Introduction

Afin de résoudre les problèmes de la mécanique des milieux continus, plusieurs théories ont été développées. L'objectif de cette dernière est le calcul approximatif des grandeurs généralisées sur la base du système d'équations d'équilibre, de compatibilité, de conditions aux limites, complété par une loi de comportement reliant les contraintes et les déformations généralisées.

Ce chapitre représente une modélisation du comportement mécanique dans le cas de l'analyse de la vibration libre des plaques en matériau composite avancé, également appelé à gradients de propriétés (FGM) avec la proposition d'une simple théorie de déformation en cisaillement avec une variation parabolique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque. Le présent travail inclut un nouveau champ de déplacement en introduisant des variables intégrales indéterminées avec seulement quatre variables. Sur la base du principe d'Hamilton, les équations de mouvement et les conditions aux limites sont obtenues pour résoudre les problèmes dynamiques des plaques simplement appuyées et en assurant les conditions des contraintes de cisaillement nulles dans les faces supérieures et inférieures de la plaque FGM sans avoir recours à un éventuel facteur de correction de cisaillement. Cette étude peut toutefois présenter des avantages remarquables dans l'industrie aérospatiale et aéronautique, les théories raffinées à quatre variables élaborées dans la littérature [93] [94] [95] où l'effet de la déformation normale transversale est négligé.

III.2 Modèle d'une plaque FGM

III.2.1 Configuration géométrique

Considérons une plaque rectangulaire en FGM de longueur a et largeur b et une épaisseur uniforme h (Figure III.1). Le système de coordonnées cartésiennes est utilisé de telle sorte que le plan x, y coïncide avec le plan médian de la plaque. La plaque est composée d'un matériau à gradation de propriété variant dans la direction de l'épaisseur (la direction z est prise positive dans la direction ascendante).

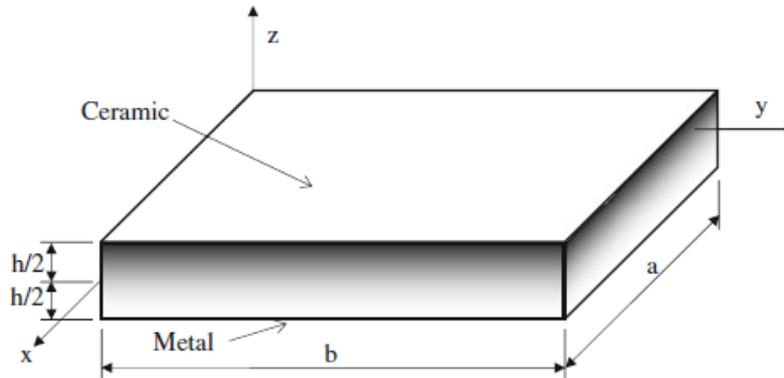


Figure III.1 : Géométrie d'une plaque à gradient de propriétés « FGM ».

III.2.2 Propriétés du matériau

La plaque FGM est composée d'un mélange de composants céramique et métal, dont les propriétés des matériaux sont considérées comme variant selon l'épaisseur de la plaque selon la distribution de la loi de puissance comme suit :

$$P(z) = P_m + (P_c - P_m) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p \quad (\text{III.1})$$

Où les indices m et c se réfèrent aux composants métalliques et céramiques sur les surfaces inférieure et supérieure de la plaque, respectivement. $P(z)$, représente la propriété matérielle effective comme le module de Young (E), le coefficient de Poisson (ν) et la masse volumique (ρ). Le paramètre (p) est appelé l'indice de loi de puissance.

III.2.3 Hypothèses de base de la nouvelle théorie

Pour la présente théorie on suppose les hypothèses suivantes :

- Les déplacements sont faibles par rapport à l'épaisseur de la plaque et, par conséquent, les déformations impliquées sont infinitésimales ;
- La contrainte normale transversale σ_z est négligeable par rapport aux contraintes normales dans le plan σ_x et σ_y ;
- Le déplacement transverse w contient une seule composante de flexion w_0 et Cette composante est en fonction des coordonnées x et y .

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad (\text{III.2})$$

- Le déplacement u dans la direction x est défini par superposition des déplacements dus aux effets d'extension, de flexion et de cisaillement.

$$u = u_0 + u_b + u_s, \quad v = v_0 + v_b + v_s \quad (\text{III.3})$$

- La composante de flexion u_b et v_b est supposée le même déplacement donné par la théorie classique des plaques. Donc, ces expressions peuvent être données comme suit :

$$u_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial x}, \quad v_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial y} \quad (\text{III.4})$$

- Les composantes de cisaillement u_s et v_s provoquent, conjointement avec w , les variations paraboliques des composantes de cisaillement γ_{xz}, γ_{yz} et donc des contraintes de cisaillement τ_{xz}, τ_{yz} à travers l'épaisseur de la plaque de telle manière que les contraintes de cisaillement τ_{xz}, τ_{yz} sont nuls sur les faces supérieure et inférieure de la plaque. Par conséquent, l'expression de u_s et v_s peut être donnée comme suit :

$$u_s = k_1 f(z) \int \theta(x, y, t) dx, \quad v_s = k_2 f(z) \int \theta(x, y, t) dy \quad (\text{III.5})$$

Avec :

$$f(z) = \frac{9}{8} z + \frac{3}{2} z \left(\frac{z}{h} \right)^2 \quad (\text{III.6a})$$

$$g(z) = \frac{df(z)}{dz} = \frac{9}{8} - \frac{9}{2} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \quad (\text{III.6b})$$

III.3 Formulation théorique

III.3.1 Champs de déplacement

Sur la base des hypothèses formulées dans la section précédente, le champ de déplacement de la nouvelle théorie proposée peut s'exprimer sous une forme plus simple en utilisant les relations (III.3), (III.4) et (III.5) comme :

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, y, t) dx \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 f(z) \int \theta(x, y, t) dy \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (\text{III.7})$$

Où u_0, v_0, w_0 et θ sont des composantes de déplacement de la fibre moyen de la plaque. k_1 et k_2 sont des coefficients qui dépendent de la géométrie de la plaque. $f(z)$ et $g(z)$ sont données par les équations (III.6a) et (III.6b).

III.3.2 Champs de déformation

On utilise les relations de la théorie d'élasticité linéaire (déformation-déplacement) pour déduire le champ de déformation

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix}, \quad (III.8a)$$

Où

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 \theta \\ k_2 \theta \\ k_1 \frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx + k_2 \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy \end{Bmatrix} \quad (III.8b)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_2 \int \theta dy \\ k_1 \int \theta dx \end{Bmatrix} \quad (III.8c)$$

Les termes d'intégrales peuvent être exprimés sous une autre forme, dans notre cas on utilise la méthode de Navier, soit :

$$\frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx = A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy = B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \int \theta dx = A' \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \int \theta dy = B' \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (III.9)$$

Où les paramètres A' et B' sont définis en fonction du type de solution employée, dans ce cas à travers la solution de Navier. Par conséquent, ils sont exprimés par :

$$A' = -\frac{1}{\alpha^2}, \quad B' = -\frac{1}{\beta^2}, \quad k_1 = \alpha^2, \quad k_2 = \beta^2 \quad (III.10)$$

Avec α and β sont définies par :

$$\alpha = \frac{m\pi}{a}, \quad \beta = \frac{n\pi}{b} \quad (III.11)$$

III.3.3 Equations constitutives

D'après la loi de comportement élastique linéaire, les relations constitutives linéaires d'une plaque FGM peuvent s'écrire comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.12})$$

Avec $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz})$ sont respectivement les composantes des contraintes et des déformations. Q_{ij} , sont les constantes de la matrice de rigidité en élasticité plane exprimé par :

$$\begin{aligned} Q_{11} = Q_{22} &= \frac{E(z)}{(1-\nu^2)}, \quad Q_{12} = \nu Q_{11}, \\ Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} &= \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \end{aligned} \quad (\text{III.13})$$

III.3.4 Equations de mouvement

Dans la présente étude, le principe d'Hamilton est utilisé pour déduire les équations du mouvement. Le principe peut être exprimé sous la forme analytique définie comme suit :

$$\int_0^t (\delta U - \delta K + \delta V) dt = 0 \quad (\text{III.14})$$

Avec :

δU : La variation de l'énergie de déformation,

δK : La variation de l'énergie cinétique,

δV : La variation du travail externe due à une charge transversale.

1. Variation de l'énergie de déformation

La variation de l'énergie de déformation de la plaque est définie par la relation suivante :

$$\delta U = \int_{-h/2}^{h/2} \int_A (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dA dz \quad (\text{III.15})$$

En remplaçant les équations (III.8) et (III.12) dans l'équation (III.15) et en intégrant à travers l'épaisseur de la plaque FGM, l'expression de l'énergie de déformation peut être réécrite sous la forme :

$$\begin{aligned} \delta U = \int_A \left\{ N_x \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} + N_y \frac{\partial \delta v_0}{\partial y} + N_{xy} \left(\frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} \right) - M_x^b \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2} - M_y^b \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial y^2} - 2M_{xy}^b \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x \partial y} \right. \\ \left. + k_1 M_x^s \delta \theta + k_2 M_y^s \delta \theta + (k_1 A' + k_2 B') M_{xy}^s \frac{\partial^2 \delta \theta}{\partial x \partial y} + k_1 A' S_{xz}^s \frac{\partial \delta \theta}{\partial x} + k_2 B' S_{yz}^s \frac{\partial \delta \theta}{\partial y} \right\} dA \end{aligned} \quad (III.16)$$

Où A est la surface supérieure de la plaque et N, M, S sont les contraintes résultantes définies comme :

$$\begin{Bmatrix} N_x, & N_y, & N_{xy} \\ M_x^b, & M_y^b, & M_{xy}^b \\ M_x^s, & M_y^s, & M_{xy}^s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{Bmatrix} dz, \quad (III.17a)$$

$$(S_{xz}^s, S_{yz}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) g(z) dz \quad (III.17b)$$

2. Variation du travail externe

La variation de travail due à une charge transversale peut être écrite comme suit :

$$\delta V = - \int_A q \delta w dA \quad (III.18)$$

Dans le cas d'un problème dynamique, nous admettons que les charges externes sont négligées, cela signifie que :

$$\delta V = 0 \quad (III.19)$$

3. Variation de l'énergie cinétique

La variation de l'énergie cinétique de la plaque peut être écrite comme :

$$\delta K = \int_{-h/2}^{h/2} \int_A \rho(z) (\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}) dA dz \quad (III.20)$$

En remplaçant les équations (III.7) dans l'équation (III.20) et en intégrant à travers l'épaisseur de la plaque FGM, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \delta K = & \int_A \left\{ I_1 (\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0) - I_2 \left(\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \delta \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \right. \\
 & + I_3 \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) + I_4 \left[k_1 A' \left(\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \delta \dot{u}_0 \right) + k_2 B' \left(\dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \right] \\
 & - I_5 \left[k_1 A' \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} \right) + k_2 B' \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) \right] \\
 & \left. + I_6 \left((k_1 A')^2 \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + (k_2 B')^2 \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} \right) \right\} dA
 \end{aligned} \tag{III.21}$$

Où la convention point-exposant indique la différenciation par rapport à la variable de temps, $\rho(z)$ est la masse volumique et $(I_i, i=1, \dots, 6)$ sont les inerties de masse exprimées par les relations suivantes :

$$(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6) = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) (1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z)) dz \tag{III.22}$$

En remplaçant les équations (III.16) et (III.21) dans l'Equation (III.14) et en intégrant par parties par rapport à x, y et la variable du temps, puis collectant les coefficients $\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0$ et $\delta \theta$, on obtient les équations de mouvement de la plaque suivantes :

$$\begin{aligned}
 \delta u_0 : & \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_1 \ddot{u}_0 - I_2 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} + k_1 A' I_4 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x} \\
 \delta v_0 : & \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = I_1 \ddot{v}_0 - I_2 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} + k_2 B' I_4 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial y} \\
 \delta w_0 : & \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + q = I_1 \ddot{w}_0 + I_2 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_3 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right) \\
 & + I_5 \left(k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right) \\
 \delta \theta : & -k_1 M_x^s - k_2 M_y^s - (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + k_1 A' \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} = -I_4 \left(k_1 A' \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) \\
 & + I_5 \left(k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right) - I_6 \left((k_1 A')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + (k_2 B')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right)
 \end{aligned} \tag{III.23}$$

En substituant l'équation (III.8) dans l'équation précédente (III.12), et les résultats subséquents en équations (III.17), les efforts résultants de la plaque peuvent être exprimés en termes de déformation sous la forme compacte suivante :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix}, \quad S = A^s \gamma \quad (\text{III.24a})$$

Avec :

$$\begin{aligned} N &= \{N_x, N_y, N_{xy}\}^{Tr}, \\ M^b &= \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^{Tr}, \\ M^s &= \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^{Tr}, \\ \varepsilon &= \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \varepsilon_{xy}^0\}^{Tr}, \\ k^b &= \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}^{Tr}, \quad k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\}^{Tr}, \\ S &= \{S_{yz}^s, S_{xz}^s\}^{Tr}, \quad S = \{\gamma_{yz}, \gamma_{xz}\}^{Tr} \end{aligned} \quad (\text{III.24b})$$

Les matrices de rigidité sont exprimées comme suit :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{21} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & E_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{III.25a})$$

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & 0 \\ F_{21} & F_{22} & 0 \\ 0 & 0 & F_{66} \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & 0 \\ H_{21} & H_{22} & 0 \\ 0 & 0 & H_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{III.25b})$$

$$A^s = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix} \quad (\text{III.25c})$$

Ainsi, les coefficients de rigidité sont donnés comme suit :

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & E_{11} & F_{11} & H_{11} \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & E_{12} & F_{12} & H_{12} \\ A_{13} & B_{13} & D_{16} & E_{16} & F_{16} & H_{16} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11}(1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z)) \begin{Bmatrix} 1 \\ \nu \\ (1-\nu)/2 \end{Bmatrix} dz \quad (\text{III.26a})$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{44} g^2(z) dz \quad (\text{III.26b})$$

En substituant l'équation (III.24) dans l'équation (III.23), les équations de mouvement peuvent être exprimées en termes de déplacements δu_0 , δv_0 , δw_0 et $\delta \theta$:

$$\begin{aligned} \delta u_0 : & A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \\ & - B_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} - 3B_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2 \partial y} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y^2} + (k_1 B_{11}^s + k_2 B_{12}^s) \frac{\partial \theta}{\partial x} + (k_1 B_{16}^s + k_2 B_{26}^s) \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ & + (k_1 A' + k_2 B') B_{16}^s \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^2 \partial y} + (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial y^2} = I_1 \ddot{u}_0 - I_2 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} + k_1 A' I_4 \frac{\partial \ddot{\theta}_0}{\partial x} \end{aligned} \quad (\text{III.27a})$$

$$\begin{aligned} \delta v_0 : & A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - B_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \\ & - B_{22} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} - 3B_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y^2} + (k_1 B_{16}^s + k_2 B_{26}^s) \frac{\partial \theta}{\partial x} + (k_1 B_{12}^s + k_2 B_{22}^s) \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ & + (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^2 \partial y} + (k_1 A' + k_2 B') B_{26}^s \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial y^2} = I_1 \ddot{v}_0 - I_2 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} + k_2 B' I_4 \frac{\partial \ddot{\theta}_0}{\partial y} \end{aligned} \quad (\text{III.27b})$$

$$\begin{aligned} \delta w_0 : & B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y^2} + B_{26} \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3} + 3B_{16} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y} + B_{16} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3} + B_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} + 3B_{26} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x \partial y^2} \\ & + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} - D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} - D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} - 4D_{26} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x \partial y^3} \\ & - 4D_{16} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3 \partial y} + 2(k_1 D_{12}^s + k_2 D_{26}^s) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} + (k_1 A' + k_2 B') D_{16}^s \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^3 \partial y} + (k_1 D_{11}^s + k_2 D_{12}^s) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \\ & + (k_1 D_{12}^s + k_2 D_{22}^s) \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + (k_1 A' + k_2 B') D_{26}^s \frac{\partial^4 \theta}{\partial x \partial y^3} + 2(k_1 A' + k_2 B') D_{66}^s \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial y^2} + q \\ & = I_1 \ddot{w}_0 + I_2 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_3 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right) + I_5 \left(k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}_0}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}_0}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.27c})$$

$$\begin{aligned}
 \delta\theta: & -\left(k_1 B_{11}^s + k_2 B_{12}^s\right) \frac{\partial u_0}{\partial x} - \left(k_1 B_{16}^s + k_2 B_{26}^s\right) \frac{\partial u_0}{\partial y} - \left(k_1 A' + k_2 B'\right) B_{16}^s \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y} - \left(k_1 A' + k_2 B'\right) B_{66}^s \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} \\
 & - \left(k_1 B_{16}^s + k_2 B_{26}^s\right) \frac{\partial v_0}{\partial x} - \left(k_1 B_{12}^s + k_2 B_{22}^s\right) \frac{\partial v_0}{\partial y} - \left(k_1 A' + k_2 B'\right) B_{66}^s \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} - \left(k_1 A' + k_2 B'\right) B_{26}^s \frac{\partial^3 v_0}{\partial x \partial y^2} \\
 & + \left(k_1 D_{11}^s + k_2 D_{12}^s\right) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \left(k_1 D_{12}^s + k_2 D_{22}^s\right) \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - 2\left(k_1 D_{16}^s + k_2 D_{26}^s\right) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \left(k_1 A' + k_2 B'\right) D_{26}^s \frac{\partial^4 w_0}{\partial x \partial y^3} \\
 & + \left(k_1 A' + k_2 B'\right) D_{16}^s \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3 \partial y} + 2\left(k_1 A' + k_2 B'\right) D_{66}^s \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} - \left(k_1^2 H_{11}^s - k_2^2 H_{22}^s - 2k_1 k_2 H_{12}^s\right) \theta \\
 & - \left(k_1^2 A' H_{16}^s + k_2^2 B' H_{26}^s\right) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} - k_1 k_2 \left(B' H_{16}^s + A' H_{26}^s\right) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} - \left(k_1^2 A' + k_1 k_2 B'\right) H_{16}^s \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} \\
 & - \left(k_2^2 B' + k_1 k_2 A'\right) H_{26}^s \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} - \left(k_1^2 A'^2 + k_2^2 B'^2 + 2k_1 k_2 A' B'\right) H_{66}^s \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial y^2} + k_1^2 A'^2 A_{55}^s \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \\
 & + k_2^2 B'^2 A_{44}^s \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + 2k_1 k_2 A' B' A_{45}^s \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} = -I_4 \left(k_1 A' \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) + I_5 \left(k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right) \\
 & - I_6 \left(\left(k_1 A'\right)^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + \left(k_2 B'\right)^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right) \tag{III.27d}
 \end{aligned}$$

III.3.5 Solutions analytiques des plaques FGM simplement appuyées

L'approche de Navier est utilisée pour déterminer les solutions analytiques de la vibration libre des plaques FGM simplement appuyées. Les fonctions des déplacements sont présentées comme produit des coefficients et des fonctions trigonométriques connues pour satisfaire les équations de mouvement ainsi que les conditions aux limites.

Les conditions aux limites prises en charge pour les plaques simplement appuyées sur les quatre bords, sont données par :

$$u_0 = w_0 = N_y = M_y^b = M_y^s = \theta = 0 \quad \text{Sur les bords } (y = 0, b) \tag{III.28a}$$

$$v_0 = w_0 = N_x = M_x^b = M_x^s = \theta = 0 \quad \text{Sur les bords } (x = 0, a) \tag{III.28b}$$

Les variables de déplacement qui satisfont automatiquement aux conditions aux limites de l'équation (III.28) peuvent être exprimées dans la série de Fourier suivante :

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega t} \\ V_{mn} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) e^{i\omega t} \\ W_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega t} \\ \Phi_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega t} \end{Bmatrix} \tag{III.29}$$

Où U_{mn}, V_{mn}, W_{mn} et Φ_{mn} sont les coefficients de Fourier inconnus à déterminer pour chaque valeur (m, n) . ω Est la fréquence des vibrations libres de la plaque, $\sqrt{-1}$ est l'unité imaginaire. En remplaçant l'équation (III.29) dans les équations (III.27), la solution analytique de la vibration libre de la plaque FGM peut être déterminée comme suit :

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{12} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{13} & K_{23} & K_{33} & K_{34} \\ K_{14} & K_{24} & K_{34} & K_{44} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{12} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{13} & M_{23} & M_{33} & M_{34} \\ M_{14} & M_{24} & M_{34} & M_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ \Phi_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.30})$$

Où $[K_{ij}]$ et $[M_{ij}]$ sont des éléments de matrice de rigidité et de matrice de masse, respectivement, définis comme suit :

$$\begin{aligned} K_{11} &= -\alpha^2 A_{11} - \beta^2 A_{66}, \\ K_{12} &= \alpha\beta A_{12} - \alpha\beta A_{66}, \\ K_{13} &= \alpha^3 B_{11} + \alpha\beta^2 B_{12} + 2\alpha\beta^2 B_{66}, \\ K_{14} &= -k_1\alpha E_{11} - k_2\alpha E_{12} + (k_1 A' + k_2 B')\alpha\beta^2 E_{66}, \\ K_{22} &= -\beta^2 A_{22} - \alpha^2 A_{66}, \\ K_{23} &= -\beta^3 B_{22} - \alpha^2\beta B_{12} - 2\alpha^2\beta B_{66}, \\ K_{24} &= -k_1\beta B_{12}^s - k_2\beta B_{22}^s + (k_1 A' + k_2 B')\alpha^2\beta B_{66}^s, \\ K_{33} &= -\alpha^4 D_{11} - 2\alpha^2\beta^2 D_{12} - \beta^4 D_{22} - 4\alpha^2\beta^2 D_{66}, \\ K_{34} &= k_1(\alpha^2 F_{11} + \beta^2 F_{12}) + k_2(\alpha^2 F_{12} + \beta^2 F_{22}) - 2(k_1 A' + k_2 B')\alpha^2\beta^2 F_{66}, \\ K_{44} &= (k_1 A' + k_2 B')^2 \alpha^2\beta^2 H_{66} - k_1(k_1 H_{11} + k_2 H_{12}) - k_2(k_1 H_{12} + k_2 H_{22}) \\ &\quad - (k_2 B')^2 \beta^2 A_{44}^s - (k_1 A')^2 \alpha^2 A_{55}^s, \end{aligned} \quad (\text{III.31})$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} M_{11} &= -I_1, \quad M_{12} = 0, \quad M_{13} = \alpha I_2, \quad M_{14} = -k_1 A' \alpha I_4, \\ M_{22} &= -I_1, \quad M_{23} = \beta I_2, \quad M_{24} = -k_2 B' \beta I_4, \\ M_{33} &= -I_1 - I_3(\alpha^2 + \beta^2), \quad M_{34} = (k_1 A' \alpha^2 + k_2 B' \beta^2) I_5, \\ M_{44} &= -(k_1^2 A'^2 \alpha^2 + k_2^2 B'^2 \beta^2) I_6 \end{aligned} \quad (\text{III.32})$$

III.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une solution pour l'analyse de la vibration libre des plaques en matériaux composites avancés (Matériau à Gradient Fonctionnel :FGM) simplement appuyées par l'utilisation d'une nouvelle théorie d'ordre élevé à quatre variables au lieu de

cinq ou plus dans le cas des autres théories de déformation en cisaillement. Ce modèle n'exige pas un facteur de correction de cisaillement, elle donne une distribution parabolique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque tout en remplissant les conditions de nullité des contraintes de cisaillement sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque.

Ce travail montre qu'il est possible de déterminer des solutions analytiques en se basant sur la méthode de Navier, et les fréquences fondamentales sont trouvées en résolvant le problème en valeurs propres.

Les études paramétriques présentées dans le chapitre suivant permettront d'apprécier clairement l'apport de la théorie proposée en le comparant les résultats obtenus avec ceux de la littérature.

CHAPITRE IV

RÉSULTATS ET DISCUSSIONS

Chapitre IV : Résultats et discussions

IV.1 Introduction

Dans le sens mécanique les fréquences propres d'une plaque en FGM est un gradient physique dépend de nombreux paramètres, telles que les conditions aux limites, les lois de constitution matérielle, l'épaisseur et l'allongement mais le plus important c'est le modèle cinématique choisie et le principe variationnel appliqué.

L'intérêt de ce chapitre est de présenter les résultats numériques de l'analyse dynamique des plaques rectangulaires ou carrées, simplement appuyées, épaisses ou avec forte épaisseur en utilisant une théorie simplifiée de déformation en cisaillement.

Quelques exemples illustratifs seront également présentés et comparés aux résultats trouvés par différentes théories de déformation pour vérifier l'exactitude et les performances de cette théorie, ainsi que l'influence du modèle cinématique choisie sur le comportement vibratoire des plaques en FGM.

IV.2 Propriétés des matériaux utilisés

Dans cette étude, les fréquences naturelles des plaques en matériaux composites avancés « FGM » simplement appuyées sont fournies et comparées avec les solutions existantes pour vérifier la précision du nouveau modèle analytique proposé sur la base d'une simple théorie parabolique d'ordre élevé. Deux types des plaques fonctionnellement graduées avec deux combinaisons de matériaux en métal et céramique : Al/Al₂O₃ et Al/ZrO₂ sont considérés [25] [96] [97]. Leurs propriétés matérielles sont respectivement illustrées dans le tableau IV.1. Pour tous les calculs, le facteur de correction de cisaillement et le coefficient de Poisson sont pris à 5/6 et 0.3, respectivement. Néanmoins, la variation du module d'Young dans la direction de l'épaisseur peut être évaluée par la loi de mélange en utilisant la fonction de loi de puissance définie comme suit :

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p \quad (\text{IV-1})$$

Où m et c sont des indices qui désignent les propriétés associées de la céramique et du métal, respectivement.

Tableau IV. 1: Propriétés des matériaux utilisés dans les plaques FGM.

Propriétés matérielles	Métal		Céramique	
	Aluminium (Al)	Alumina (Al_2O_3)	Zirconium (ZrO_2)	
$E(GPa)$	70	380	200	
$\rho(Kg / m^3)$	2702	3800	5700	
ν	0.3	0.3	0.3	

Dans cette partie, les résultats numériques calculés par la présente théorie de déformation en cisaillement à quatre variables sont présentés et comparés avec les autres théories pour diverses valeurs du rapport d'épaisseur, du rapport géométrique des plaques et de l'indice de loi de puissance. Pour plus de commodité, le paramètre adimensionnel de fréquence naturelle utilisé pour présenter les résultats numériques sous forme tabulaire et graphique est donné par les expressions suivantes :

$$\bar{\beta} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}, \quad \hat{\beta} = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c}, \quad \bar{\omega} = \omega a^2 / h \sqrt{\rho_c / E_c} \quad (IV-2)$$

IV.3 Résultats et discussions : Etudes comparatives

IV.3.1 Analyse dynamique des plaques carrées en FGM Al/ZrO₂

Le premier exemple est appliqué pour des plaques carrées Al/ZrO₂ avec différentes valeurs de rapport d'épaisseur a/h et de l'indice de loi de puissance p . Les paramètres de fréquence fondamentaux $\bar{\beta}$ sont obtenus en utilisant la présente théorie et la théorie classique de Kirchhoff "CPT" [98]. Les résultats obtenus sont illustrés dans le Tableau IV.2 et également comparés avec les solutions exactes 3-D de Vel et Batra [73], les solutions de la théorie 2-D d'ordre élevé de Matsunaga [99], la théorie HSDT avec des solutions de la méthode des éléments finis de Pradyumna et Bandyopadhyay [100], la théorie de Reddy avec des solutions de la méthode analytique de Hosseini-Hashemi *et al.* [25] et la théorie FSDT de Mindlin avec des solutions de la méthode analytique de Hosseini-Hashemi *et al.* [7]. On peut observer que pour une plaque avec $p = 0$, c'est-à-dire une plaque isotrope entièrement céramique, les résultats de la théorie actuelle sont en bon accord avec ceux des solutions 3-D, HSDT et FSDT. Cependant, pour une plaque FGM avec des valeurs de p non nulles, les résultats de la présente théorie et d'autres théories de déformation en cisaillement sont supérieurs à ceux obtenus par

des solutions exactes en 3-D de Vel et Batra [73]. La raison de cette caractéristique peut être due à la manière d'estimer les propriétés des matériaux des plaques fonctionnellement graduées.

Tableau IV. 2: Comparaison du paramètre de fréquence naturelle adimensionnelle $\bar{\beta}$ d'une plaque carrée simplement appuyée Al/ZrO₂.

Théories	p=0		p=1			a/h=5		
	a/h=√10	a/h=10	a/h=5	a/h=10	a/h=20	p=2	p=3	p=5
Présente	0.4623	0.0577	0.2277	0.0619	0.0158	0.2257	0.2263	0.2272
Thai <i>et al.</i> RPT [101]	0.4623	0.0577	0.2277	0.0619	0.0158	0.2257	0.2263	0.2272
Hashemi <i>et al.</i> HSDT [25]	0.4623	0.0577	0.2276	0.0619	0.0158	0.2256	0.2263	0.2272
Matsunaga HSDT [99]	0.4658	0.0578	0.2285	0.0619	0.0158	0.2264	0.2270	0.2281
Pradyumna HSDT [100]	0.4658	0.0578	0.2257	0.0613	0.0157	0.2237	0.2243	0.2253
Mindlin FSDT [7]	0.4618	0.0577	0.2276	0.0619	0.0158	0.2264	0.2276	0.2291
Kirchhoff CPT [98]	0.5535	0.0592	0.2479	0.0634	0.0159	0.2473	0.2497	0.2526
Exact 3-D [73]	0.4658	0.0578	0.2192	0.0596	0.0153	0.2197	0.2211	0.2225

Dans la théorie exacte [73], les propriétés du matériau en un point ont été estimées à partir des fractions volumiques locales en utilisant le schéma de Mori-Tanaka [102], alors que dans la présente étude et les références [7, 25, 99, 100], les propriétés du matériau sont supposées varier dans la direction de l'épaisseur de la plaque avec une loi de distribution de puissance des fractions volumiques des deux matériaux. Les solutions obtenues de la théorie CPT dans cette étude sont supérieures à celles prédites par les théories de déformation en cisaillement et les solutions exactes 3-D. La différence entre les théories CPT, de déformation en cisaillement et les solutions exactes 3-D est plus considérable pour les plaques épaisses. Par exemple, la différence entre les résultats calculés par CPT et 3-D, pour une plaque entièrement céramique, augmente de 2,42 à 18,82% lorsque le rapport d'épaisseur a/h est diminué de 10 à $\sqrt{10}$. On peut observer à partir du tableau IV.2 que les résultats de la théorie proposée et de Reddy [25] sont identiques. Il convient de noter que la présente théorie implique quatre inconnues contre cinq inconnues à la fois dans la théorie FSDT et de Reddy.

IV.3.2 Analyse dynamique des plaques carrées en FGM Al/Al₂O₃

Dans cet exemple, une plaque carrée Al/Al₂O₃ avec un rapport d'épaisseur varié de 5 à 20 et l'indice de loi de puissance varié de 0 à 10 est analysé en utilisant différentes théories de

plaque. La fréquence fondamentale et les paramètres de troisième fréquence la plus basse $\hat{\beta}$ sont présentés dans le Tableau IV.3.

Tableau IV.3: Comparaison du paramètre de fréquence naturelle adimensionnelle $\hat{\beta}$ d'une plaque carrée simplement appuyée Al/Al_2O_3 .

a/h	Mode (m, n)	Théories	Indice de loi de puissance (p)				
			0	0.5	1	4	10
5	(1,1)	Présente	0.2113	0.1807	0.1631	0.1378	0.1301
		Thai <i>et al.</i> RPT [101]	0.2113	0.1807	0.1631	0.1378	0.1301
		Hashemi <i>et al.</i> HSDT [25]	0.2113	0.1807	0.1631	0.1378	0.1301
		Mindlin FSDT [7]	0.2112	0.1805	0.1631	0.1397	0.1324
		Kirchhoff CPT [98]	0.2314	0.1959	0.1762	0.1524	0.1467
	(1,2)	Présente	0.4623	0.3989	0.3607	0.2980	0.2771
		Thai <i>et al.</i> RPT [101]	0.4623	0.3989	0.3607	0.2980	0.2771
		Hashemi <i>et al.</i> HSDT [25]	0.4623	0.3989	0.3607	0.2980	0.2771
		Mindlin FSDT [7]	0.4618	0.3978	0.3604	0.3049	0.2856
		Kirchhoff CPT [98]	0.5535	0.4681	0.4198	0.3603	0.3481
	(2,2)	Présente	0.6688	0.5803	0.5254	0.4284	0.3948
		Thai <i>et al.</i> RPT [101]	0.6688	0.5803	0.5254	0.4284	0.3948
		Hashemi <i>et al.</i> HSDT [25]	0.6688	0.5803	0.5254	0.4284	0.3948
		Mindlin FSDT [7]	0.6676	0.5779	0.5245	0.4405	0.4097
		Kirchhoff CPT [98]	0.8504	0.7184	0.6425	0.5478	0.5306
10	(1,1)	Présente	0.0577	0.0490	0.0442	0.0381	0.0364
		Thai <i>et al.</i> RPT [101]	0.0577	0.0490	0.0442	0.0381	0.0364
		Hashemi <i>et al.</i> HSDT [25]	0.0577	0.0490	0.0442	0.0381	0.0364
		Mindlin FSDT [7]	0.0577	0.0490	0.0442	0.0382	0.0366
		Kirchhoff CPT [98]	0.0592	0.0502	0.0452	0.0392	0.0377
	(1,2)	Présente	0.1377	0.1174	0.1059	0.0903	0.0856
		Thai <i>et al.</i> RPT [101]	0.1377	0.1174	0.1059	0.0903	0.0856
		Hashemi <i>et al.</i> HSDT [25]	0.1377	0.1174	0.1059	0.0903	0.0856
		Mindlin FSDT [7]	0.1376	0.1173	0.1059	0.0911	0.0867
		Kirchhoff CPT [98]	0.1464	0.1239	0.1115	0.0966	0.0930
	(2,2)	Présente	0.2113	0.1807	0.1631	0.1378	0.1301
		Thai <i>et al.</i> RPT [101]	0.2113	0.1807	0.1631	0.1378	0.1301
		Hashemi <i>et al.</i> HSDT [25]	0.2113	0.1807	0.1631	0.1378	0.1301
		Mindlin FSDT [7]	0.2112	0.1805	0.1631	0.1397	0.1324
		Kirchhoff CPT [98]	0.2314	0.1959	0.1762	0.1524	0.1467
20	(1,1)	Présente	0.0148	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094
		Thai <i>et al.</i> RPT [101]	0.0148	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094
		Hashemi <i>et al.</i> HSDT [25]	0.0148	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094
		Mindlin FSDT [7]	0.0148	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094
		Kirchhoff CPT [98]	0.0149	0.0126	0.0114	0.0099	0.0095

On observe que les résultats obtenus par la présente théorie sont en excellent accord avec ceux rapportés par Hosseini-Hashemi *et al.* [25] basé sur la théorie de Reddy, et Hosseini-Hashemi *et al.* [7] basé sur FSDT. Les résultats indiquent également que la théorie classique "CPT" surestime la fréquence naturelle des plaques fonctionnellement graduées, en particulier pour les plaques épaisses à des modes de vibration plus élevés. Par exemple, les différences de valeurs prédites par CPT et le modèle proposé, pour une plaque épaisse entièrement céramique avec $a/h = 5$, sont de 9,51, 19,28 et 27,15% correspondant aux premier, deuxième et troisième mode de vibration, respectivement. Un tel comportement est dû à l'influence de l'inertie en rotation et de la déformation en cisaillement transversal d'une plaque épaisse. Par conséquent, afin d'obtenir des fréquences propres précises pour des plaques épaisses, il est nécessaire de prendre en compte les effets d'inertie rotative et de déformation en cisaillement transversal en utilisant des théories HSDTs.

IV.3.3 Analyse dynamique des plaques rectangulaires en FGM Al/Al₂O₃

Le dernier exemple est appliqué pour une plaque rectangulaire en FGM Al/Al₂O₃ ($b = 2a$) avec un rapport d'épaisseur varié de 5 à 20 et un indice de loi de puissance varié de 0 à 10. Dans le Tableau IV.4, les quatre paramètres de fréquence les plus bas $\bar{\omega}$ obtenus à partir de la théorie actuelle et de la théorie de Reddy sont comparés avec ceux rapportés par Hosseini-Hashemi *et al.* [7] basé sur FSDT. Encore une fois, la présente théorie et la théorie de Reddy donnent des résultats identiques. En revanche, FSDT [7] donne des résultats précis pour une plaque assez épaisse à des modes de vibration inférieurs. Cependant, pour les modes de vibration plus élevés, il existe une légère différence entre les résultats de FSDT et la théorie de Reddy. La différence maximale entre FSDT et HSDT est de 5,64% au quatrième mode de plaque épaisse ($a/h = 5$, $p = 10$).

Tableau IV.4 : Comparaison du paramètre de fréquence naturelle adimensionnelle $\bar{\omega}$ d'une plaque rectangulaire simplement appuyée Al/Al_2O_3 , ($b=2a$).

a/h	Mode (m, n)	Théories	Indice de loi de puissance (p)						
			0	0.5	1	2	5	8	10
5	1 (1,1)	Présente	3.4412	2.9347	2.6475	2.3949	2.2272	2.1697	2.1407
		Thai <i>et al.</i> RPT [101]	3.4412	2.9347	2.6475	2.3949	2.2272	2.1697	2.1407
		Reddy HSDT [14]	3.4412	2.9347	2.6475	2.3949	2.2272	2.1697	2.1407
		Mindlin FSDT [7]	3.4409	2.9322	2.6473	2.4017	2.2528	2.1985	2.1677
	2 (1,2)	Présente	5.2813	4.5180	4.0781	3.6805	3.3938	3.2964	3.2514
		Thai <i>et al.</i> RPT [101]	5.2813	4.5180	4.0781	3.6805	3.3938	3.2964	3.2514
		Reddy HSDT [14]	5.2813	4.5180	4.0781	3.6805	3.3938	3.2964	3.2514
		Mindlin FSDT [7]	5.2802	4.5122	4.0773	3.6953	3.4492	3.3587	3.3094
	3 (1,3)	Présente	8.0749	6.9366	6.2663	5.6390	5.1425	4.9758	4.9055
		Thai <i>et al.</i> RPT [101]	8.0749	6.9366	6.2663	5.6390	5.1425	4.9758	4.9055
		Reddy HSDT [14]	8.0749	6.9366	6.2663	5.6390	5.1425	4.9758	4.9055
		Mindlin FSDT [7]	8.0710	6.9231	6.2636	5.6695	5.2579	5.1045	5.0253
4 (2,1)	Présente	10.116	8.7138	7.8762	7.0751	6.4074	6.1846	6.0954	
	Thai <i>et al.</i> RPT [101]	10.116	8.7138	7.8762	7.0751	6.4074	6.1846	6.0954	
	Reddy HSDT [14]	10.116	8.7138	7.8762	7.0751	6.4074	6.1846	6.0954	
	Mindlin FSDT [7]	9.7416	8.6926	7.8711	7.1189	6.5749	5.9062	5.7518	
10	1 (1,1)	Présente	3.6517	3.0990	2.7937	2.5364	2.3916	2.3411	2.3110
		Thai <i>et al.</i> RPT [101]	3.6518	3.0990	2.7937	2.5364	2.3916	2.3411	2.3110
		Reddy HSDT [14]	3.6518	3.0990	2.7937	2.5364	2.3916	2.3411	2.3110
		Mindlin FSDT [7]	3.6518	3.0983	2.7937	2.5386	2.3998	2.3504	2.3197
	2 (1,2)	Présente	5.7694	4.9014	4.4192	4.0089	3.7682	3.6846	3.6368
		Thai <i>et al.</i> RPT [101]	5.7694	4.9014	4.4192	4.0090	3.7682	3.6846	3.6368
		Reddy HSDT [14]	5.7694	4.9014	4.4192	4.0090	3.7682	3.6846	3.6368
		Mindlin FSDT [7]	5.7693	4.8997	4.4192	4.0142	3.7881	3.7072	3.6580
	3 (1,3)	Présente	9.1880	7.8189	7.0515	6.3886	5.9765	5.8341	5.7575
		Thai <i>et al.</i> RPT [101]	9.1880	7.8189	7.0515	6.3886	5.9765	5.8341	5.7575
		Reddy HSDT [14]	9.1880	7.8189	7.0515	6.3886	5.9765	5.8341	5.7575
		Mindlin FSDT [7]	9.1876	7.8145	7.0512	6.4015	6.0247	5.8887	5.8086
4 (2,1)	Présente	11.832	10.081	9.0933	8.2309	7.6731	7.4813	7.3821	
	Thai <i>et al.</i> RPT [101]	11.832	10.081	9.0933	8.2309	7.6731	7.4813	7.3821	
	Reddy HSDT [14]	11.832	10.081	9.0933	8.2309	7.6731	7.4813	7.3821	
	Mindlin FSDT [7]	11.831	10.074	9.0928	8.2515	7.7505	7.5688	7.4639	
20	1 (1,1)	Présente	3.7123	3.1458	2.8352	2.5771	2.4403	2.3923	2.3619
		Thai <i>et al.</i> RPT [101]	3.7123	3.1458	2.8352	2.5771	2.4403	2.3923	2.3619
		Reddy HSDT [14]	3.7123	3.1458	2.8352	2.5771	2.4403	2.3923	2.3619
		Mindlin FSDT [7]	3.7123	3.1456	2.8352	2.5777	2.4425	2.3948	2.3642
	2 (1,2)	Présente	5.9199	5.0180	4.5228	4.1100	3.8884	3.8107	3.7622
		Thai <i>et al.</i> RPT [101]	5.9199	5.0180	4.5228	4.1100	3.8884	3.8107	3.7622
		Reddy HSDT [14]	5.9199	5.0180	4.5228	4.1100	3.8884	3.8107	3.7622
		Mindlin FSDT [7]	5.9198	5.0175	4.5228	4.1115	3.8939	3.8170	3.7681
	3 (1,3)	Présente	5.5669	8.1133	7.3132	6.6433	6.2760	6.1476	6.0690
		Thai <i>et al.</i> RPT [101]	9.5669	8.1133	7.3132	6.6433	6.2760	6.1476	6.0690
		Reddy HSDT [14]	9.5669	8.1133	7.3132	6.6433	6.2760	6.1476	6.0690
		Mindlin FSDT [7]	9.5668	8.1121	7.3132	6.6471	6.2903	6.1639	6.0843
4 (2,1)	Présente	12.456	10.568	9.5261	8.6509	8.1636	7.9934	7.8909	
	Thai <i>et al.</i> RPT [101]	12.456	10.568	9.5261	8.6509	8.1636	7.9934	7.8909	
	Reddy HSDT [14]	12.456	10.568	9.5261	8.6509	8.1636	7.9934	7.8909	
	Mindlin FSDT [7]	12.456	10.566	9.5261	8.6572	8.1875	8.0207	7.9166	

IV.4 Résultats et discussions : Etudes paramétriques

Après avoir vérifié la précision et l'efficacité de la présente solution, des études des paramètres sont effectuées pour analyser les effets des variations de l'indice de loi de puissance, du rapport d'épaisseur et du rapport géométrique sur la fréquence naturelle des plaques fonctionnellement graduées. Les paramètres de fréquence propre $\bar{\omega}$ des plaques Al/Al₂O₃ sont obtenus en utilisant la présente théorie et les théories CPT, FSDT et HSDT de Reddy.

La figure IV.1 illustre la variation des paramètres de fréquence fondamentale d'une plaque carrée en fonction de l'indice de loi de puissance. Le rapport d'épaisseur a/h est supposé être égal à 5 (correspondant à une plaque épaisse) et à 100 (correspondant à une plaque mince). On observe que le paramètre de fréquence fondamentale diminue à mesure que l'indice de loi de puissance augmente. Cela est dû au fait que l'augmentation de l'indice de loi de puissance augmente la fraction volumique du métal. En outre, les paramètres de fréquence des plaques entièrement en céramique sont considérablement plus élevés que ceux des plaques FGM. En outre, les résultats prédits par la présente théorie RPT et HSDT sont identiques, et la théorie classique CPT surestime le paramètre de fréquence des plaques fonctionnellement graduées. La différence entre la "CPT" et la théorie proposée est considérable pour les plaques épaisses, mais elle peut être négligée pour les plaques minces.

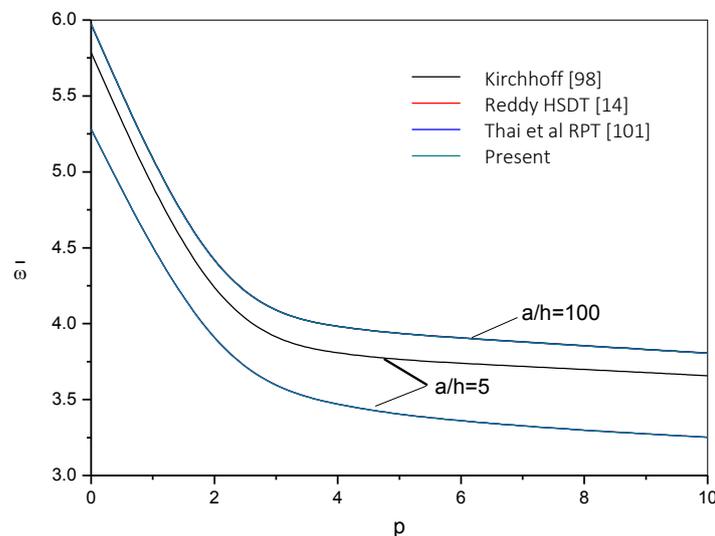


Figure IV.1: L'effet de l'indice de loi de puissance sur le paramètre de fréquence fondamentale $\bar{\omega}$ d'une plaque carrée en FGM.

La variation du paramètre de fréquence fondamentale $\bar{\omega}$ d'une plaque carrée en fonction du rapport d'épaisseur a/h est illustrée sur la Figure IV. 2. On observe que le paramètre de fréquence fondamentale augmente par l'augmentation du rapport d'épaisseur, et la variation de

la fréquence est remarquable lorsque le rapport d'épaisseur est inférieur à 5. De plus, la CPT surestime la fréquence des plaques FGM, et l'écart entre la CPT et les courbes présentes est négligeable lorsque le rapport d'épaisseur est supérieur à 10. Ainsi, l'effet du rapport géométrique b/a sur le paramètre de fréquence d'une plaque FGM avec ($a/h=10$) est présenté sur la Figure IV.3. On peut constater que le paramètre de fréquence diminue par l'augmentation du rapport géométrique.

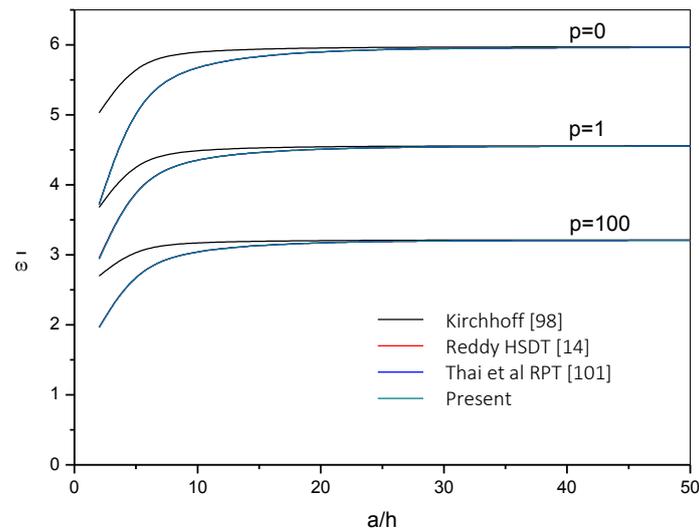


Figure IV.2: L'effet du rapport d'épaisseur sur le paramètre de fréquence fondamentale $\bar{\omega}$ d'une plaque carrée en FGM.

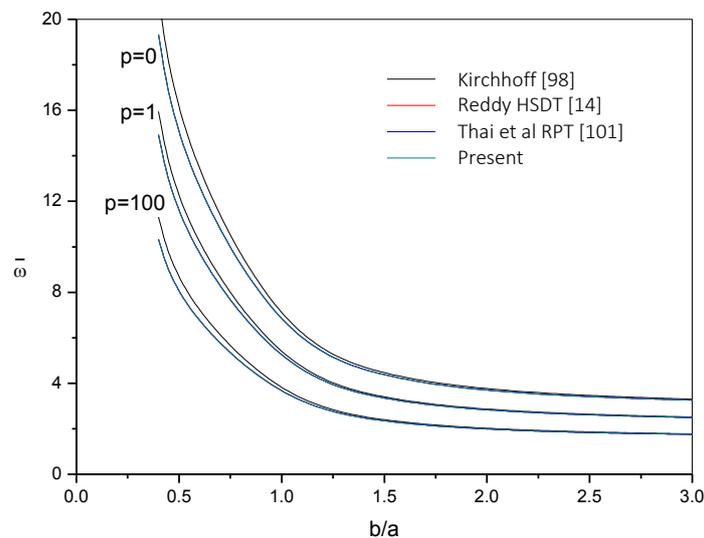


Figure IV.3: L'effet du rapport géométrique sur le paramètre de fréquence fondamentale d'une plaque rectangulaire en FGM. ($a/h=10$)

Tableau IV.5 : Les neuf premiers paramètres de fréquence naturelle adimensionnelle $\bar{\omega}$ d'une plaque carrée simplement appuyée Al/Al₂O₃.

a/h	Mode (m, n)	Indice de loi de puissance (p)						
		0	0.5	1	2	5	10	100
5	1 (1,1)	5.2813	4.5180	4.0781	3.6805	3.3938	3.2514	2.8204
	2 (2,1)	11.5563	9.9716	9.0166	8.0905	7.2944	6.9270	6.1369
	3 (1,2)	11.5563	9.9716	9.0166	8.0905	7.2944	6.9270	6.1369
	4 (2,2)	16.7207	14.5064	13.1354	11.7487	10.4507	9.8703	8.8508
	5 (3,1)	19.7648	17.1939	15.5813	13.9166	12.2984	11.5840	10.4464
	6 (1,3)	19.7648	17.1939	15.5813	13.9166	12.2984	11.5840	10.4464
	7 (3,2)	23.9024	20.8603	18.9239	16.8765	14.8013	13.8967	12.6124
	8 (2,3)	23.9024	20.8603	18.9239	16.8765	14.8013	13.8967	12.6124
	9 (4,1)	28.8270	25.2402	22.9251	20.4180	17.7735	16.6330	15.1878
10	1 (1,1)	5.7694	4.9014	4.4192	4.0090	3.7682	3.6368	3.0962
	2 (2,1)	13.7650	11.7387	10.5901	9.5795	8.9087	8.5628	7.3669
	3 (1,2)	13.7650	11.7387	10.5901	9.5795	8.9087	8.5628	7.3669
	4 (2,2)	21.1253	18.0719	16.3124	14.7221	13.5752	13.0054	11.2817
	5 (3,1)	25.7417	22.0607	19.9195	17.9547	16.4765	15.7556	13.7303
	6 (1,3)	25.7417	22.0607	19.9195	17.9547	16.4765	15.7556	13.7303
	7 (3,2)	32.2995	27.7465	25.0650	22.5558	20.5699	19.6221	17.2011
	8 (2,3)	32.2995	27.7465	25.0650	22.5558	20.5699	19.6221	17.2011
	9 (4,1)	40.4655	34.8553	31.5047	28.3003	25.6295	24.3817	21.5126
20	1 (1,1)	5.9199	5.0180	4.5228	4.1100	3.8884	3.7622	3.1821
	2 (2,1)	14.6071	12.3961	11.1747	10.1458	9.5664	9.2440	7.8452
	3 (1,2)	14.6071	12.3961	11.1747	10.1458	9.5664	9.2440	7.8452
	4 (2,2)	23.0777	19.6058	17.6769	16.0358	15.0729	14.5474	12.3847
	5 (3,1)	28.6115	24.3239	21.9332	19.8864	18.6555	17.9914	15.3467
	6 (1,3)	28.6115	24.3239	21.9332	19.8864	18.6555	17.9914	15.3467
	7 (3,2)	36.7522	31.2757	28.2060	25.5546	23.9059	23.0300	19.6991
	8 (2,3)	36.7522	31.2757	28.2060	25.5546	23.9059	23.0300	19.6991
	9 (4,1)	47.3260	40.3240	36.3733	32.9234	30.6926	29.5285	25.3443
100	1 (1,1)	5.9712	5.0575	4.5579	4.1445	3.9299	3.8058	3.2116
	2 (2,1)	14.9198	12.6375	11.3892	10.3558	9.8182	9.5076	8.0243
	3 (1,2)	14.9198	12.6375	11.3892	10.3558	9.8182	9.5076	8.0243
	4 (2,2)	23.8587	20.2099	18.2139	16.5605	15.6986	15.2010	12.8314
	5 (3,1)	29.8126	25.2541	22.7600	20.6934	19.6145	18.9921	16.0331
	6 (1,3)	29.8126	25.2541	22.7600	20.6934	19.6145	18.9921	16.0331
	7 (3,2)	38.7353	32.8141	29.5736	26.8873	25.4817	24.6718	20.8309
	8 (2,3)	38.7353	32.8141	29.5736	26.8873	25.4817	24.6718	20.8309
	9 (4,1)	50.6172	42.8826	38.6481	35.1357	33.2926	32.2319	27.2194

Tableau IV.6 : Les neuf premiers paramètres de fréquence naturelle adimensionnelle $\bar{\omega}$ d'une plaque rectangulaire simplement appuyée Al/Al_2O_3 . ($a = 1.5b$)

a/h	Mode (m, n)	Indice de loi de puissance (p)						
		0	0.5	1	2	5	10	100
5	1 (1,1)	8.0749	6.9366	6.2663	5.6390	5.1425	4.9055	4.3003
	2 (2,1)	13.8117	11.9477	10.8101	9.6850	8.6769	8.2191	7.3234
	3 (1,2)	19.7648	17.1939	15.5813	13.9166	12.2984	11.5840	10.4464
	4 (3,1)	21.5440	18.7687	17.0163	15.1875	13.3756	12.5805	11.3781
	5 (2,2)	23.9024	20.8603	18.9239	16.8765	14.8013	13.8967	12.6124
	6 (3,2)	29.9748	26.2631	23.8607	21.2462	18.4659	17.2690	15.7879
	7 (4,1)	30.2572	26.5149	24.0911	21.4502	18.6362	17.4255	15.9355
	8 (1,3)	33.5185	29.4251	26.7560	23.8095	20.6036	19.2305	17.6405
	9 (2,3)	36.5740	32.1558	29.2594	26.0268	22.4479	20.9200	19.2381
10	1 (1,1)	9.1880	7.8189	7.0515	6.3886	5.9765	5.7575	4.9248
	2 (2,1)	16.9009	14.4328	13.0236	11.7688	10.9037	10.4651	9.0366
	3 (1,2)	25.7417	22.0607	19.9195	17.9547	16.4765	15.7556	13.7303
	4 (3,1)	28.5242	24.4705	22.0998	19.9056	18.2171	17.4015	15.2040
	5 (2,2)	32.2995	27.7465	25.0650	22.5558	20.5699	19.6221	17.2011
	6 (3,2)	42.4174	36.5587	33.0488	29.6759	26.8336	25.5116	22.5416
	7 (4,1)	42.9002	36.9803	33.4311	30.0163	27.1312	25.7906	22.7961
	8 (1,3)	48.5442	41.9154	37.9072	33.9996	30.6021	29.0412	25.7685
	9 (2,3)	53.9350	46.6398	42.1953	37.8114	33.9055	32.1277	28.6040
20	1 (1,1)	9.5669	8.1133	7.3132	6.6433	6.2760	6.0690	5.1407
	2 (2,1)	18.1620	15.4200	13.9016	12.6171	11.8808	11.4745	9.7511
	3 (1,2)	28.6115	24.3239	21.9332	19.8864	18.6555	17.9914	15.3467
	4 (3,1)	32.0262	27.2384	24.5627	22.2635	20.8607	20.1088	17.1731
	5 (2,2)	36.7522	31.2757	28.2060	25.5546	23.9059	23.0300	19.6991
	6 (3,2)	49.9221	42.5486	38.3818	34.7338	32.3535	31.1166	26.7289
	7 (4,1)	50.5682	43.1025	38.8819	35.1844	32.7666	31.5114	27.0735
	8 (1,3)	58.2353	49.6803	44.8220	40.5338	37.6589	36.1832	31.1595
	9 (2,3)	65.7484	56.1357	50.6530	45.7794	42.4370	40.7388	35.1593
100	1 (1,1)	9.7010	8.2167	7.4051	6.7333	6.3844	6.1826	5.2176
	2 (2,1)	18.6455	15.7936	14.2336	12.9419	12.2693	11.8809	10.0279
	3 (1,2)	29.8126	25.2541	22.7600	20.6934	19.6145	18.9921	16.0331
	4 (3,1)	33.5316	28.4050	25.5998	23.2750	22.0601	21.3596	18.0328
	5 (2,2)	38.7353	32.8141	29.5736	26.8873	25.4817	24.6718	20.8309
	6 (3,2)	53.5850	45.3976	40.9148	37.1960	35.2431	34.1197	28.8150
	7 (4,1)	54.3268	46.0262	41.4814	37.7110	35.7306	34.5915	29.2138
	8 (1,3)	63.2230	53.5658	48.2769	43.8871	41.5764	40.2486	33.9964
	9 (2,3)	72.1097	61.0981	55.0658	50.0567	47.4144	45.8976	38.7735

Les neuf premiers paramètres de fréquence $\bar{\omega}$ ont été présentés dans les Tableaux IV.5 et IV.6 pour les plaques carrées et rectangulaires, respectivement. Les plaques FGM sont en Al/Al₂O₃. Dans chaque tableau, quatre valeurs différentes du rapport d'épaisseur sont examinées, 5 (correspondant à une plaque épaisse), 10 (correspondant à une plaque moyennement épaisse) et 20 à 100 (correspondant à une plaque mince). De plus, sept valeurs arbitraires de l'indice de loi de puissance ($p = 0, 0.5, 1, 2, 5, 10, 100$) sont considérées. Les points suivants peuvent être remarqués dans les Tableaux IV.5 et IV.6 :

1. Indépendamment du nombre de mode et de l'indice de loi de puissance, le paramètre de fréquence augmente en augmentant le rapport d'épaisseur. L'effet du rapport d'épaisseur devient plus significatif pour un mode plus élevé de fréquences naturelles. Un tel comportement est dû à l'influence de l'inertie en rotation et des déformations de cisaillement ;
2. Indépendamment du nombre de mode et du rapport d'épaisseur, le paramètre de fréquence augmente en diminuant l'indice de loi de puissance.

IV.5 Conclusion

Dans cette étude, la théorie développée est une théorie d'ordre élevé, basé sur des hypothèses simplifiées et une nouvelle cinématique à quatre variables indépendantes, ainsi qu'elle satisfait la condition de la nullité des contraintes de cisaillement dans les faces supérieure et inférieure de la plaque FGM, cette condition est vérifiée par l'emploi d'une fonction de cisaillement parabolique.

L'objectif souligné dans ce chapitre était d'éprouver à travers des exemples qui montre l'efficacité et la précision de notre nouveau modèle développé dans le cadre de ce modeste travail, donc on peut dire que cette théorie à justifier leur efficacité et simplicité pour résoudre les problèmes de la vibration des plaque FGMs, on peut conclure que :

- La présente théorie n'exige pas de facteur de correction de cisaillement comme dans le cas de la théorie FSDT,
- La présente théorie ne comporte que quatre inconnues contre cinq inconnues dans le cas de la théorie de Reddy et FSDT,
- Les fréquences naturelles trouvées par la présente théorie sont identiques à celles obtenues par le modèle de Reddy, qui est le plus couramment utilisé pour l'étude des plaques fonctionnellement graduées.

CONCLUSION GENERALE

Conclusion générale

Les besoins de recherche dans le domaine des matériaux sont nombreux et variés, et ils sont en évolution rapide. Les matériaux composites avancés « FGMs » promettent des avantages potentiels importants qui justifient la nécessité des efforts importants. L'élaboration et la conception de ces matériaux nécessitent le développement d'outils d'analyse adaptés à leurs spécificités matérielles et géométriques.

L'objectif principal de notre travail est de développer un modèle analytique basé sur une nouvelle théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé pour analyser la vibration libre des plaques simplement appuyées en FGM. Cette théorie intègre un nouveau champ de déplacement qui introduit des variables intégrales indéterminées. Le coût de calcul peut donc être réduit grâce au nombre réduit d'inconnues et aux équations de mouvement utilisées pour ce type de plaques, et par conséquent, cette théorie est beaucoup plus favorable aux formulations mathématiques.

Plusieurs exemples numériques ont été présentés et comparés avec les autres théories (CPT, FSDT, HSDT, RPT et la solution exacte 3-D) pour prouver l'efficacité et la précision du nouveau modèle proposé. Cependant, toutes les études comparatives effectuées dans cette analyse ont montré que les résultats obtenus pour l'analyse du comportement dynamique des plaques FGM sont identiques à ceux obtenus avec les solutions basées sur les théories de déformation en cisaillement, même dans le cas des plaques épaisses. Différents paramètres ont été considérés dans cette étude afin de montrer ces effets sur la variation des fréquences naturelles, tels que le rapport d'épaisseur, le rapport géométrique, l'indice de loi de puissance et le nombre de mode. Finalement, cette étude comparative montre que la présente théorie est très efficace pour prédire les fréquences naturelles des plaques fonctionnellement graduées avec plus de précision que les autres théories HSDT.

En perspective à ce travail, nous envisagerons d'étudier le comportement statique (flexion et stabilité) des structures en matériaux composites avancés avec différentes conditions d'appuis et sous différents types de chargement (mécanique, thermique...etc.) à travers le présent modèle de déformation en cisaillement.

On peut également proposer des études comparatives avec des modèles numériques basés sur la méthode des éléments finis. En effet, cette approche permet de résoudre des formes plus complexes de structures en FGM.

REFERENCES
BIBLIOGRAPHIQUES

Références bibliographiques

- [1] Koizumi.M, "FGM activities in Japan," *Composite Part B Eng*, vol. 28, no. 1–2, p. 1–4, 1997.
- [2] Leissa.W, "The free vibration of rectangular plates," *The free vibration of rectangular plates. J. Sound Vib*, vol. 31, no. 3, p. 257–293, 1973.
- [3] Chen.C.S, Chen.T.J and Chien.R.D, "Nonlinear vibration of initially stressed functionally graded plates," *Thin-Walled structures*, vol. 44, no. 8, p. 844–851, 2006.
- [4] Ebrahimi.F and Rastgo.A, "An analytical study on the free vibration of smart circular thin FGM plate based on classical plate theory," *Thin-Walled Structures*, vol. 46, no. 12, p. 1402–1408, 2008.
- [5] brahimi.F and Rastgoo.A, "Nonlinear vibration of smart circular functionally graded plates coupled with piezoelectric layers," *International Journal Mech. Mater. Des.*, vol. 5, no. 2, p. 157–165, 2009.
- [6] Baferani.A.H, Jomehzadeh.E and Saidi.A.R, "An exact solution for free vibration of thin functionally graded rectangular," *Proc. Inst. of Mech. Eng. Part C J. Mech. Eng. Sci.*, vol. 225, no. 3, p. 526–536, 2011.
- [7] Hosseini-Hashemi.S, Fadaee.M and Atashipour.S.R, "A new exact analytical approach for free vibration of Reissner–Mindlin functionally graded rectangular plates.," *Int. J. Mech. Sci*, vol. 53, no. 1, p. 11–22, 2011.
- [8] Zhao.X, Lee.Y.Y and Liew.K.M, "Free vibration analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method," *method. J. Sound Vib.*, vol. 319, no. 3-5, p. 918–939, 2009.
- [9] Della Croce.L and Venini.P, "Finite elements for functionally graded Reissner–Mindlin plates," *Comput.Methods Appl.Mech.*, vol. 193, no. 9-11, pp. 705-725, 2004.
- [10] Hosseini-Hashemi.S, R. D. Taher.H, Akhavan.H and Omid.M, "Free vibration of functionally graded rectangular plates using first-order shear deformation plate theory," *Appl. Math. Model.*, vol. 34, no. 5, p. 1276–1291, 2010.
- [11] Nelson.R.B and Lorch.D.R, "A refined theory for laminated orthotropic plates," *J. Appl. Mech.*, vol. 41, no. 177, 1974.
- [12] Lo.K.H, Christensen.R.M. and Wu.E.M, "Lo, K.H., Christensen, R.M., Wu, E.M.: A high-order theory of plate deformation-Part 2: Laminated plates.," *J. Appl.Mech.*, vol. 44, p. 669, 1977.

- [13] Bhimaraddi.A and Stevens, "A higher order theory for free vibration of orthotropic, homogeneous, and laminated rectangular plates," *plates. J.Appl. Mech.*, vol. 51, no. 1, p. 195–198, 1984.
- [14] Reddy.J.N, "A simple higher-order theory for laminated composite plates," *J. Appl. Mech.*, vol. 51, no. 4, p. 745, 1984.
- [15] P. Kant.T, "A simple finite element formulation of a higher-order theory for unsymmetrically laminated composite," *plates. Compos. Struct*, vol. 9, no. 3, p. 215–246, 1988.
- [16] Kant.T and Khare.R.K, "A higher-order facet quadrilateral composite shell element," *Int. J. Numer. Methods Eng*, vol. 40, no. 24, p. 4477–4499, 1997.
- [17] Talha.M, and Singh.B.N, "Static response and free vibration analysis of FGM plates using higher order shear deformation theory," *theory. Appl. Math. Model*, vol. 34, no. 12, pp. 3991-4011, 2010.
- [18] Yang.J, Liew.K.M and Kitipornchai.S, "Dynamic stability of laminated FGM plates based on higher-order shear deformation theory," *Comput. Mech*, vol. 33, no. 4, pp. 305-315, 2004.
- [19] Reddy.J.N, "plates, Analysis of functionally graded," *Int. J. Numer. Methods Eng*, vol. 47, no. 1-3, pp. 663-684, 2000.
- [20] Ferreira.A.J.M, Batra.R.C, Roque, C.M.C., Qian.L.F and P.A.L.S., "Static analysis of functionally graded plates using third-order shear deformation theory and a meshless method," *Compos. Struct*, vol. 69, no. 4, pp. 449-457, 2005.
- [21] A. B. R. R. C. Q. L. J. R. Ferreira, "Natural frequencies of functionally graded plates by a meshless method," *Compos. Struct.*, vol. 75, no. 1-4, p. 593–600, 2006.
- [22] Cheng.Z.Q and Batra.R.C, "Exact correspondence between eigenvalues of membranes and functionally graded simply supported," *polygonal plates. J. Sound Vib.*, vol. 229, no. 4, p. 879–895, 2000.
- [23] Abrate.S, "Functionally graded plates behave like homogeneous plates.," *Compos. Part B Eng*, vol. 39, no. 1, pp. 151-158, 2008.
- [24] Hosseini-Hashemi.S, RokniDamavandi Taher and Fadaee.M, "Exact solutions for free flexural vibration of Lévy-type rectangular thick plates via third-order shear deformation plate theory," *Appl. Math. Model.*, vol. 35, no. 2, p. 708–727, 2011.
- [25] Hosseini-Hashemi.S, Fadaee.M and Atashipour.S.R, "Study on the free vibration of thick functionally graded rectangular plates according to a new exact closed-form procedure," *Compos. Struct.*, vol. 93, no. 2, p. 722–735, 2011.
- [26] Niino.M, Suzuki.A, Hirai.T, Watanabe.R, Hirano.T and Uroishi, "Method of producing a functionally gradient material," *U.S. Patent*, vol. 457, p. 1099, 1988.
- [27] Koizumi, "Recent Progress of functionally graded materials in Japan," *Engineering Sci. Proc*, vol. 13, pp. 333-347, 1992.

- [28] Okamura, "State of the art of material design projects for severe service applications.," *Materials Science and Engineering A*, vol. 143, pp. 4-9, 1991.
- [29] Kieback .B, Neubrand.A and Riedel.H, "Processing techniques for functionally graded materials," *Materials Science and Engineering*, vol. 362, p. 81–105, 2003.
- [30] BESSAIM.A, M. S. Ahmed.H, MEGUENI.A, TOUNSI.A et BEDIA.E, «Analyse statique de la flexion des poutres ZrO₂/ Ti-6Al-4V en P-FGM,» *ture & Technologie*, vol. 5, n° %12, pp. 28-36, 2013.
- [31] Birman.V, Hosder.S and Keil.T, "Functionally graded materials in engineering", *Structural interfaces and attachments in biology*, New York: Springer, 2013, p. 19–41.
- [32] Shinohara.Y, "Handbook of Advanced Ceramics (Second Edition)," in *Functionally Graded Materials*, 2013, pp. 1179-87.
- [33] Bansal.N.P, Singh.J. P, Lamon.J and Choi.S.R., "Processing and Properties of Advanced Ceramics and Composites III," *Technology & Engineering*, vol. 225, p. 218, 2011.
- [34] R. M.M, IAENG, M. Shukla, Pityana.S and Member, Esther T. Akinlabi, "Functionally Graded Material: An Overview," *Proceedings of the World Congress on Engineering*, vol. 3, 2012.
- [35] Lostec, «Elaboration par coulage en bande et caractérisation microstructurale et mécanique de composite SiC/MAS-L,» l'université de Limoges, Limoges, 1997.
- [36] Mistler, "High strength alumina substrates produced by a multiple-layer casting technique," *American Ceramic Society Bulletin*, vol. 52, no. 11, pp. 850-854, 1973.
- [37] Philippe Boch , Thierry Chartie et Muriel Huttepain, «Tape Casting of Al₂O₃/ZrO₂ Laminated Composites,» *The american ceramic society*, vol. 69, n° %18, pp. 191-192, August 1986.
- [38] Steffens. H.D, Dvorak.M and Wewel.M, "Plasma sprayed functionally gradient materials-processing and applications, in Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90," *Sendai-Japan*, pp. 139-143, 1990.
- [39] Abdizadeh.H, «élaboration et caractérisation de composites « composites laminaires tri-couches à base d'alumine,» élaboration et cara thèse de doctorat INSA, Lyon, 1997.
- [40] J.S. Moya, A.J. Sgnchez-Herencia et J. Requena and R, «Functionally gradient ceramics by sequential slip casting,» *Materials Letters* , vol. 14 , pp. 333-335, 1992.
- [41] A. Bishop, C. -Y. Lin, M. Navaratnam, Rees Rawlings and H. B. McShane, "A functionally gradient material produced by a powder metallurgical," *Journal of Materials Science Letters* , vol. 12, no. 19, pp. 1516-1518, April 1993.
- [42] Shen.Hui-Shen, *Functionally Graded Materials Nonlinear Analysis of Plates and Shells*, Pu: CRC Press, September 26, 2019, p. 280 Pages.

- [43] Bao.G and Wang.L, "Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 32, no. 19, pp. 2853-2871, October 1995.
- [44] chi and Chung , "Cracking in coating–substrate composites with multi-layered and FGM coatings," *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 70, no. 10, pp. 1227-1243, 2003.
- [45] Delale and Erdoga, "The Crack Problem for a Nonhomogeneous Plane," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 50, no. 3, pp. 609-14, 1983.
- [46] Mahamood and Akinlabi, *Topics in Mining, Metallurgy and Materials Engineering*, Springer., 2012.
- [47] E. Muller, C. Drasar, J. Schilz and W.A. Kaysser, "functionally graded materials for sensor and energy applications," *Materials Science and Engineering*, vol. 362, pp. 17-30, 2003.
- [48] I. Yadroitsev, L. Thivillon, Ph. Bertrand and I. Smur, "Strategy of manufacturing components with designed internal," *Science direct*, vol. 254 , p. 980–983, 2007.
- [49] Lu.C.F, Lim.C.W and Chen.W.Q, "Exact solutions for free "Exact solutions for free foundations," *Mech Advan Mater Struct*, vol. 16, p. 576–584., 2009.
- [50] Tebboune.W, «Contribution à l'étude de la stabilité thermique des structures composites,» l'Université Djillali Liabè, Sidi Bel Abbes., 2015.
- [51] Stephen P. Timoshenko and Woinowsky Krieger, *Theory of Plates and Shells* Second Edition, New York: Mc Graw-Hill, 1959.
- [52] Shyang-HoChi and Yen-LingChung, "Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load—Part I: Analysis," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 43, no. Issue 13, pp. 3657-3674, 2006.
- [53] E. Reissner, "The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates," *ASME Journal of Applied Me-chanics*, vol. 12, pp. A68-A77, 1945.
- [54] R. Shimpi, "Refined plate theory and its variants," *AIAA* , vol. 40, no. 137-146, pp. 137-146, January 2002.
- [55] A. Atmane.H, Tounsi.A, Adda.E et Mechab.I.; «Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory,» *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, vol. 6, p. 113–121, 2010.
- [56] Whitney, "Shear Correction Factors for Orthotropic Laminates Under Static Load," *applied mechanics*, vol. 40, no. 1, pp. 302-304, March 1, 1973.
- [57] Touratier.M, "An efficient standard plate theory," *engineering science*, vol. 29, no. 8, pp. 901-916, 1991.
- [58] Rameshchandra Shimpi, "Refined plate theory and its variants," *AIAA Journal*, vol. 40, no. 1, pp. 137-146, January 2002 .

- [59] Seung-Eock Kim, Huu-Tai Thai and Jaehong Lee, "Buckling analysis of plates using the two variable refined plate theory," *Thin-Walled Structures*, vol. 47, no. 4, pp. 455-462, April 2009.
- [60] Huu-Tai Thai and Seung-Eock Kim, "Levy-type solution for buckling analysis of orthotropic plates based on two," *Composite Structures*, vol. 93, no. 7, pp. 1738-1746, 2011.
- [61] M. Sobhy, "Buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates resting on elastic foundations under various boundary conditions," *Compos. Struct*, vol. 99, p. 76-87, 2013.
- [62] Merdaci.S, Tounsi.A, Houari.MSA, Mechab.I, Hebali.H and Benyoucef.S., "Two new refined shear displacement models for functionally graded sandwich plates," *Arch Appl Mech*, vol. 81, no. 11, p. 1507-1522, 2011.
- [63] Tounsi.A, Houari.MSA, Benyoucef.S and A. Bedia.EA., "A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates," *Aerosp. Sci. Technol*, vol. 24, no. 1, pp. 209-220, 2013.
- [64] Thai.HT and Vo.TP., "A new sinusoidal shear deformation theory for bending buckling, and vibration of functionally graded plates," *Appl Math Model*, vol. 37, no. 5, p. 3269-3281, 2013.
- [65] Draiche.K, Tounsi.A and Mahmoud.S.R., "A refined theory with stretching effect for the flexure analysis of laminated composite plates," *Geomech. Eng*, vol. 11, no. 5, pp. 671-690, 2016.
- [66] Thai.HT and Choi.DH, "Improved refined plate theory accounting for effect of thickness stretching in functionally graded plates," *Compos B Eng*, vol. 56, p. 705-716, 2014.
- [67] Hebali.H, Tounsi.A, Houari.MSA, Bessaim.A and Bedia.EAA, "New Quasi-3D Hyperbolic Shear Deformation Theory," *JOURNAL OF ENGINEERING MECHANICS*, Vols. 374-383, no. 2, pp. 374-383, FEBRUARY 2014.
- [68] M. Benchohra, H. Driz, Tounsi.A and Bakora.A, "A new quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for functionally graded plates," *Structural Engineering & Mechanics*, vol. 65, no. 1, pp. 19-31, 2018.
- [69] Zenkour and Ashraf.M, "Bending analysis of functionally graded sandwich plates using a simple four-unknown shear and normal deformations theory," *Journal of Sandwich Structures and Materials*, vol. 15, no. 6, pp. 629-656, August 29, 2013.
- [70] Zenkour.M and Ashraf, "A simple four-unknown refined theory for bending analysis of functionally graded plates," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 37, no. 20-21, pp. 9041-9051, 2013.
- [71] Ashraf et Zenkour.M, «Thermal bending of layered composite plates resting on elastic foundations using four-unknown shear and normal deformations theory,» *Composite Structures*, vol. 122, pp. 260-270, April 2015.

- [72] Mantari.C and Guedes.S, "Four-unknown quasi-3D shear deformation theory for advanced composite plates," *Composite Structures*, vol. 109, pp. 231-239, March 2014.
- [73] V. .S.S and Batra.R.C., "Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plate," *J. Sound Vib*, vol. 272, p. 703–730, 2004.
- [74] Uymaz.B and Aydogdu.M, "Three-dimensional vibration analyses of functionally graded plates under various boundary conditions," *J. Reinf. Plast. Compos*, vol. 26, no. 18, p. 1847–1863, 2007.
- [75] Li.Q, Lu.V.P and Kou.K.P., "Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material sandwich plates," *J. Sound Vib.*, vol. 311, p. 498–515, 2008.
- [76] S. Ambartsumian, "Principal equations and correlations in different modulus theory of elasticity of anisotropic bodies," *Izvestija ANSSSR, MTT*, 1969.
- [77] Kaczkowski.Z, "Plates-statistical calculations," *Warsaz: Arkady*, 1968.
- [78] Panc.V., *Theories of elastic plates*, Springer, 1975.
- [79] Reissner.E., "On Transverse Bending of Plates, Including the Effects of Transverse Shear Deformation," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 569–573, p. 11, 1975.
- [80] Levinson.M, "Mech Res Commun," *An accurate simple theory of the statics and dynamics of elastic plates*, vol. 7, no. 6, p. 343–350, 1980.
- [81] Levy.M., "Mémoire sur la théorie des plaques élastiques planes," *J Math Pures Appl*, p. 219–306, 1877.
- [82] Arya.H, Shimpi.RP and Naik.NK, "A zigzag model for laminated composite beams," *Composite structure*, vol. 56, no. 1, p. 21–4, 2002.
- [83] Mantari.J.L, Oktem..A.S and G. Soares.C, "A new trigonometric shear deformation theory for isotropic, laminated composite and sandwich plates," *Int. J. Solids Struct.*, vol. 49, no. 1, p. 43–53, 2012a.
- [84] guyen.V.H, Nguyen.T.K, Thai.H.T and Vo.T.P., "A new inverse trigonometric shear deformation theory for isotropic and functionally graded sandwich plates," *Compos. Part B:Eng*, vol. 66, p. 233–246, 2014.
- [85] K. (. Soldatos, "A transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates," *Acta Mech*, vol. 94, no. 3, p. 195–220, 1992.
- [86] T. A. Akavci SS, "Buckling and free vibration analyses of laminated composite plates by using two new hyperbolic shear-deformation theories," *Mech Compos Mater*, vol. 44, no. 2, p. 145–154, 2008.
- [87] N. M. D. S. B. Grover, "A new inverse hyperbolic shear deformation theory for static and buckling analysis of laminated composite and sandwich plates," *Compos Struct*, vol. 95, p. 667–675, 2013.

- [88] Mahi.A, A. E., Bedia and T. A. a, "A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates," *Appl. Math. Model*, vol. 39, no. 9, p. 2489–2508, 2015.
- [89] Karama.M, Afaq.K.S. and Mistou.S, "Mechanical behavior of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity," *international Journal of Solids and Structures*, vol. 40, no. 6, pp. 1525-1546, March 2003.
- [90] Aydogdu.M, "a new shear deformation theory for laminated composite plates," *Composite Structure*, vol. 89, no. 1, pp. 94-101, 2009.
- [91] J. O. A. G. S. C. Mantari, "A new trigonometric shear deformation theory for isotropic, laminated composite and sandwich plates," *Int. J. Solids Struct*, vol. 49, no. 1, p. 43–53, 2012c.
- [92] M. JL, Guedes.Soaes and C., "Bending analysis of thick exponentially graded plates using a new trigonometric higher order shear deformation theory," *Compos. Struct*, vol. 94, no. 6, p. 1991–2000, 2012b.
- [93] Abdelaziz.H.H, Atmane.H.A, Mechab.I, Boumia.L and T. a. Adda.EA, "Static analysis of functionally graded sandwich plates using an efficient and simple theory," *J. Aero*, vol. 24, p. 434 – 448, 2011.
- [94] Boudierba.B, Houari.M.S.A and Tounsi.A, "Thermomechanical bending response of FGM thick plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations," *Steel Comp. Struct*, vol. 14, p. 85 – 104, 2013.
- [95] Z. H. a. T. Hamidi.A, "A new four variable refined plate theory for bending response of functionally graded sandwich plates under thermomechanical loading," *Composite: Part B*, 2012.
- [96] Sh.Hosseini-Hashemi, M.Fadaee and S.R.Atashipour, "new exact analytical approach for free vibration of Reissner–Mindlin functionally graded rectangular plates," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 1, no. 53, pp. 11-22, 2011.
- [97] S. K. H.T. Thai, "A simple higher-order shear deformation theory for bending and free vibration analysis of functionally graded plates," *Composite Structure*, vol. 96, pp. 165-173., 2013.
- [98] G. Kirchhoff, "Über das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheibe," *J. for Pure and App. Math*, vol. 40, p. 51–88, 1850.
- [99] Matsunaga.H, "Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2-D higher-order deformation theory," *Composite Structures*, vol. 82, p. 499–512, 2008. .
- [100] Pradyumna, "Free vibration analysis of functionally graded curved panels using a higher-order finite element formulation," *J. Sound Vib*, vol. 318, no. 1-2, p. 176–192, 2008 .

- [101] Thai.H.T, Park.T and Choi.D.H, "An efficient shear deformation theory for vibration of functionally graded plates," *Arch Appl Mech*, vol. 83, p. 137–149, 2013.
- [102] Mori.T and Tanaka.K, "Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions," *Acta Metallurgica*, vol. 21, no. 5, p. 571–574, 1973.
- [103] Reddy.J. N., *Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells*, 2007.
- [104] BOUANATI.S, «Présentation d’une nouvelle formulation analytique des structures épaisses non homogènes,» Département de Génie Civil & travaux publics, Algérie,SBA, 2019/2020.
- [105] Houari.MSA, «Analyse des contraintes thermo-élastiques: lois des,» l’Université Djillali Liabès, Sidi Bel Abbes, 2011.

