



**FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES**  
**DÉPARTEMENT GÉNIE CIVIL**

**Mémoire de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme de Master**

Spécialité : Génie Civil

Option : Structure

Présenté par :

**FEKROUN AHMED**

**HASSI ABDELLAH**

*Sujet du mémoire*

**Analyse du flambement des plaques  
isotrope et orthotrope à l'aide de théories des  
plaques raffinées à deux variable**

*Soutenu publiquement le 29/09/2020 devant le jury composé de :*

Mr	Belmahi Samir	Président
Mr	Chikh Abdelbaki	Rapporteur
Mr	Khiloun Mokhtar	Examineur
mlle	Ouazir khatima	Examinatrice

PROMOTION: 2020

## *Remerciement*

*Avant tous, nous remercions ALLAH(Dieu) tout puissant qui nous a amené jusqu'à la fin de notre travail.*

*Nous sommes très heureux d'être encadré par Monsieur Chikfi Abdelbaki, qu'il veuille bien trouver ici l'expression de notre reconnaissance pour son dévouement, sa patience, ses conseils et son aide constant qu'il nous a apporté tout au long de ce travail.*

*Nous aimerons exprimer notre profonde gratitude à tous les enseignants de département de génie civil, qu'ils ont nous suivi le long de nos cursus.*

*Nous tenons à exprimer nos reconnaissances envers les membres du jury qui ont eu la gentillesse de lire et corriger ce travail.*

*Un grand merci à nos parents pour l'éducation qu'ils ont nous offerts et leurs appuis inconditionnels le long du cycle.*

*Enfin, nous adressons nos plus sincères remerciements à tous mes proches et amis, qui m'ont toujours soutenue et encouragée au cours de la réalisation de ce mémoire. Merci à tous et à toutes.*

## Dédicace

*Je rends grâce à Dieu le tout puissant et miséricordieux pour m'avoir donné la force et les moyens de suivre ce mémoire.*

*Je dédie ce travail*

- ✿ *A mes très chers parents, qui ont été toujours présent pour moi, pour leur amour et compréhension, et pour avoir su toujours me soutenir dans les moments difficiles.*
- ✿ *A mes chers frères.*
- ✿ *A mes chères sœurs.*
- ✿ *A mes amies pour avoir, dans les hauts et bas, pu m'aider à rebondir par leur amitié.*
- ✿ *A mon ami et mon binôme hassi abdellah qui a contribué à la réalisation de ce modeste travail.*
- ✿ *Enfin, à toute la promotion 2015/2016*

*f. ahmed*

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



# Dédicaces

*Je tiens à remercier le Bon Dieu qui nous a donné la foi et la sagesse afin de réussir et de choisir le bon chemin.*

*C'est avec un vif plaisir que je saisis à l'occasion de l'obtention du*

*Diplôme pour dédier ce modeste travail à :*

*Mes chers parents qui n'ont pas manqué durant toute ma vie scolaire et Universitaire à m'encourager de leurs précieux conseils, qu'ils soient remerciés pour leur sacrifice en trouvant ma gratitude et mon profond respect.*

*Atouts mon frère et mes sœurs qui n'ont pas manqué de m'encourager.*

*A mes amies et mon binôme hassi abdellah qui a contribué à la réalisation de ce modeste travail.*

*Et à mon encadreur : **Dr. Chikh Abdelbaki** et Je tiens à dresser tous nos remerciements à tous les enseignants de l'institut de génie civil qui ont contribué à notre formation*

*Sans oublier tous mes amis (e)....(s) et toute la promotion 2019/2020.*

***fekroun***



## *Abstract*

Buckling analysis of isotropic and orthotropic plates using the two variable refined plate theory is presented in this work. The theory takes account of transverse shear effects and parabolic distribution of the transverse shear strains through the thickness of the plate, hence it is unnecessary to use shear correction factors. Governing equations are derived from the principle of virtual displacements. The closed-form solution of a simply supported rectangular plate subjected to in-plane loading has been obtained by using the Navier method. Numerical results obtained by the present theory are compared with classical plate theory solutions, first-order shear deformable theory solutions, and available exact solutions in the literature. It can be concluded that the present theory, which does not require shear correction factor, is not only simple but also comparable to the first-order shear deformable theory.

**Keywords:** Refined plate theory, Buckling analysis, Isotropic plate, Orthotropic plate, Navier method

## *Résumé*

L'analyse du flambement des plaques isotropes et orthotropes en utilisant la théorie des plaques raffinées à deux variables est présentée dans ce travail.

La théorie tient compte des effets de cisaillement transversaux et de la distribution parabolique des déformations transversales de cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque, il n'est donc pas nécessaire d'utiliser des facteurs de correction de cisaillement.

Les équations gouvernantes sont dérivées du principe des déplacements virtuels. La solution de forme fermée d'une plaque rectangulaire simplement supportée soumise à un chargement dans le plan a été obtenue en utilisant la méthode de Navier.

Les résultats numériques obtenus par la présente théorie sont comparés aux solutions classiques de la théorie des plaques, aux solutions théoriques déformables par cisaillement du premier ordre et aux solutions exactes disponibles dans la littérature.

On peut conclure que la théorie actuelle, qui ne nécessite pas de facteur de correction de cisaillement, est non seulement simple mais également comparable à la théorie déformable par cisaillement du premier ordre.

**Mots clés :** théorie des plaques raffinées, analyse de flambement, plaque isotrope, plaque orthotrope, méthode de Navier

## الملخص

تم تقديم تحليل التواء الصفائح المتجانسة والغير متجانسة باستخدام نظرية الصفائح المكررة المتغيرة في هذا العمل. تأخذ النظرية في الاعتبار تأثيرات القص العرضي والتوزيع المكافئ للقص العرضي من خلال سماكة الصفيحة، وبالتالي ليس من الضروري استخدام عوامل تصحيح القص. المعادلات الحاكمة مشتقة من مبدأ الإزاحة الافتراضية. تم الحصول على الحل المغلق للوحة مستطيلة مدعومة بشكل بسيط ومعرضة للتحميل داخل الطائرة باستخدام طريقة Navier. تتم مقارنة النتائج العددية التي تم الحصول عليها بواسطة النظرية الحالية مع حلول نظرية الصفائح الكلاسيكية وحلول نظرية تشوه القص من الدرجة الأولى، والحلول الدقيقة المتوفرة في المراجع. يمكن الاستنتاج أن النظرية الحالية، التي لا تتطلب عامل تصحيح القص، ليست بسيطة فحسب، بل يمكن مقارنتها أيضًا بنظرية تشوه القص من الدرجة الأولى.

**الكلمات المفتاحية:** نظرية الصفيحة المكررة، تحليل الانثناء، صفيحة متجانسة، صفيحة غير متجانسة، طريقة Navier



## Table des matières

ملخص .....	i
Abstract .....	ii
Résumé .....	iii
Liste des notations .....	iv
Liste des abréviations .....	vi
Liste des figures .....	vii
Liste des tableaux .....	ix
<b>Introduction générale</b> .....	<b>1</b>
<b>Chapitre I Généralités sur les matériaux composites</b> .....	<b>6</b>
I.1 Introduction .....	6
I.2 Classification des matériaux composites .....	7
I.2.1 Composites à renforts de particules .....	8
I.2.2 Composites à renforts de fibres .....	8
I.2.3 Composites à renforts de paillettes.....	8
I.2.4 Composites stratifiés.....	8
I.3 Les constituants de base d'un matériau composite .....	9
I.3.1 La matrice .....	10
I.3.1.1 Matrices organiques ou résineuses .....	10
I.3.1.2 Matrices métalliques .....	12
I.3.1.3 Matrices céramiques .....	13
I.3.2 Les renforts .....	13
I.3.2.1 Les fibres de verre .....	13
I.3.2.2 Les fibres de carbone .....	14
I.3.2.3 Les fibres d'aramides (Kevlar) .....	15
I.3.2.4 Les fibres de bore .....	16
I.3.3 Charges et additifs .....	16
I.3.4 L'interface fibre-matrice .....	17
I.4 Les matériaux composites structuraux .....	18
I.4.1 Les monocouches .....	19
I.4.2 Les stratifiés .....	19
I.4.3 Les Sandwichs .....	20

I.5	Domaines d'Application des matériaux composites .....	21
I.5.1	Produits aéronautiques .....	21
I.5.2	Produits militaires .....	22
I.5.3	Produits spatiaux (satellites).....	22
I.5.4	Construction navale .....	22
I.5.5	Construction civile .....	23
I.6	Qualités générales des matériaux composites .....	24
I.7	Conclusion .....	24
<b>Chapitre II Endommagements et réparations des composites</b> .....		<b>25</b>

II.1	Introduction .....	25
II.2	Définition d'endommagement .....	25
II.3	Endommagement des composites stratifiés .....	26
II.4	Mécanismes d'endommagement et de rupture .....	26
II.4.1	Fissuration de la matrice .....	27
II.4.2	Décohésion fibre-matrice .....	28
II.4.3	Rupture des fibres .....	30
II.4.4	Délaminage .....	30
II.5	Source des dommages rencontrés en aéronautique .....	31
II.6	Les différents types de dommages en aéronautiques .....	32
II.7	Renforcement et réparations des composites aéronautiques .....	33
II.7.1	Réparation .....	34
II.7.1.1	Réparation par collage des patches externes .....	35
II.7.1.2	Réparation par collage des patches internes .....	37
II.7.2	Renforcement .....	39
II.7.3	Exemples d'applications .....	40
II.8	Conclusion .....	41

**Chapitre III Théories des plaques composites stratifiées** ..... **42**

III.1	Introduction .....	42
III.2	Définition d'un stratifié .....	43
III.3	Modélisation géométrique .....	45
III.4	Comportement mécanique des matériaux stratifiés .....	46
III.4.1	Champ des déplacements .....	47
III.4.2	Champ des déformations .....	47
III.4.3	Champs de contraintes .....	49
III.4.4	Comportement en membrane-flexion-torsion .....	50
III.4.4.1	Comportement en Membrane .....	50
III.4.4.2	Comportement en flexion et torsion .....	52

III.4.5	Equation constitutive de la théorie classique .....	53
III.5	Constantes de rigidité d'un stratifié orthotrope .....	54
III.5.1	Équations de mouvement des stratifiés orthotropes .....	55
III.5.1.1	Stratifié orthotrope dans ses axes .....	55
III.5.1.2	Stratifié orthotrope hors axes .....	56
III.6	Modèles de structures multicouches .....	57
III.6.1	Modèles de stratifiés de type monocouche équivalente .....	57
III.6.1.1	Théorie classique des plaques stratifiées (CLPT) .....	58
III.6.1.2	Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) .....	59
III.6.1.3	Théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT) .....	60
III.6.2	Approche par couche .....	63
III.6.3	Approche développement asymptotique .....	64
III.7	Conclusion .....	65
<b>Chapitre IV Étude analytique de la vibration libre d'une plaque stratifiée renforcée par patch</b>		<b>66</b>
IV.1	Introduction .....	66
IV.2	Théorie d'ordre élevé à quatre variables .....	67
IV.2.1	Configuration géométrique .....	67
IV.2.2	Hypothèses et Champ de déplacement de la nouvelle théorie .....	68
IV.2.3	Champs des déformations .....	69
IV.2.4	Champs des contraintes .....	69
IV.2.5	Energie de déformation .....	71
IV.2.6	Energie cinétique .....	73
IV.2.7	Solutions analytiques pour une plaque stratifiée simplement appuyée ...	74
IV.3	Conclusion .....	76
<b>Chapitre V Résultats et discussions</b>		<b>77</b>
V.1	Introduction .....	77
V.2	Choix des matériaux composites .....	78
V.3	Effet du rapport d'orthotropie $E_1/E_2$ (cas d'un stratifié croisé) .....	79
V.4	Effet de la géométrie de la plaque (cas d'un stratifié équilibré) .....	80
V.5	Effet de la présence de la masse du patch .....	81
V.6	Conclusion .....	85
<b>Conclusion générale et perspectives</b>		<b>87</b>
<b>Références bibliographiques</b> .....		<b>90</b>

## Liste des tableaux

<b>Chapitre I</b>		
<b>Tableau I.1</b>	Caractéristiques des matrices thermodurcissables	11
<b>Tableau I.2</b>	Caractéristiques des matrices thermoplastiques	12
<b>Tableau I.3</b>	Caractéristiques mécaniques principales des fibres de renfort	16
<b>Tableau I.4</b>	Caractéristiques mécaniques des fibres de bore	16
<b>Tableau I.5</b>	Liaisons interatomiques	18
<b>Chapitre II</b>		
<b>Tableau II.1</b>	Exemples de réparations par patches composites effectuées par la RAAF	40
<b>Chapitre V</b>		
<b>Tableau V.1</b>	propriétés matérielles sans dimension des matériaux utilisés	78
<b>Tableau V.2</b>	Fréquences fondamentales adimensionnelles d'une plaque carrée antisymétrique (Matériau 2) pour différentes valeurs du rapport d'orthotropie avec $a/h = 5$	79
<b>Tableau V.3</b>	Fréquences fondamentales adimensionnelles d'une plaque rectangulaire $[45/-45]_2$ , (Matériau 3) avec différents rapports $a/b$ et $a/h$	80
<b>Tableau V.4</b>	Fréquences fondamentales adimensionnelles d'une plaque carrée $[0/90]$ avec le rapport $a/h = 10$	81
<b>Tableau V.5</b>	Fréquence fondamentale adimensionnelle pour un stratifié équilibré $[45/-45]_2$ (Matériau 3)	82
<b>Tableau V.6</b>	Fréquence fondamentale adimensionnelle pour un stratifié équilibré $[30/-30]_2$ (Matériau 3)	82

# **Introduction générale**

## *Introduction générale*

Le flambage des plaques rectangulaires fait l'objet d'études en mécanique des solides depuis plus d'un siècle. De nombreuses solutions exactes pour les plaques isotropes et orthotropes ont été développées, la plupart d'entre elles peuvent être trouvées dans Timoshenko et Woinowsky-Krieger [1], Timoshenko et Gere [2], Bank et Jin [3], Kang et Leissa [4], Aydogdu et Ece [5] et Hwang et Lee [6]. En compagnie d'études sur le comportement de flambement des plaques, de nombreuses théories des plaques ont été développées. La plus simple est la théorie classique des plaques (CPT) qui néglige les contraintes transversales normales et de cisaillement.

Cette théorie n'est pas appropriée pour la plaque épaisse et orthotrope avec un rapport de module élevé. Afin de surmonter cette limitation, la théorie déformable en cisaillement qui tient compte des effets de cisaillement transverse est recommandée. Effets de cisaillement transversal par le biais de la variation linéaire des déplacements dans le plan à travers l'épaisseur. Cependant, les modèles se ne satisfont pas aux conditions aux limites de traction nulles sur les faces supérieure et inférieure de la plaque, et doivent utiliser le facteur de correction de cisaillement pour satisfaire les relations constitutives des contraintes de cisaillement transversales et des déformations de cisaillement. Pour ces raisons, de nombreuses théories d'ordre supérieur ont été développées pour améliorer la FSDT telles que Levinson [9] et Reddy [10]. Shimpi et Patel [11] ont présenté une théorie des plaques raffinées à deux variables (RPT) pour les plaques orthotropes. Cette théorie qui ressemble à une théorie d'ordre supérieur n'utilise que deux fonctions inconnues afin de dériver deux équations gouvernant les plaques orthotropes.

La caractéristique la plus intéressante de cette théorie est qu'elle ne nécessite pas de facteur de correction de cisaillement et présente de fortes similitudes avec le CPT dans certains aspects tels que l'équation de gouvernance, les conditions aux limites et les expressions de moment. La précision de cette théorie a été démontrée pour les comportements de flexion statique et de vibration libre des plaques par Shimpi et Patel [11], il semble donc important d'étendre cette théorie au comportement de flambement statique.

Dans ce travail, les deux RPT variables développés par Shimpi et Patel [11] ont été étendus au comportement de flambement de la plaque orthotrope soumise au chargement dans le plan. En utilisant la méthode de Navier, les solutions de forme fermée ont été obtenues.

Des exemples numériques impliquant le rapport côté / épaisseur et le rapport de module sont présentés pour illustrer la précision de la présente théorie dans la prédiction de la charge de flambement critique des plaques isotropes et orthotropes. Les résultats numériques obtenus par la présente théorie sont comparés avec des solutions CPT, des solutions FSDT avec une valeur différente du facteur de correction de cisaillement

**Chapitre I**  
**Généralités sur les matériaux**  
**composites avancés**



## Chapitre I

### Généralités sur les matériaux composites avancés

#### I.1. Introduction

Depuis le début du vingtième siècle, l'utilisation des matériaux composites multicouches dans différentes applications d'ingénierie a largement augmenté. Malgré les avantages que présentent ces matériaux "grande rigidité, résistance mécanique élevée, légèreté, réduction des coûts...etc.", ils apportent aussi des problèmes spécifiques liés principalement à leur hétérogénéité. Il est bien connu dans la littérature que la différence des propriétés mécaniques entre des couches adjacentes peut entraîner des contraintes très élevées aux interfaces. Ces contraintes inter-faciales élevées peuvent engendrer des fissurations au niveau des interfaces qu'on appelle délaminage, des fissures, et d'autre mécanisme d'endommagement en raison du changement brutal des propriétés mécaniques et thermiques d'une couche à l'autre. Ce problème a attiré beaucoup d'attention en raison de son influence significative sur la résistance et la rigidité des structures composites multicouches [24].

À la fin des années 80, une équipe de chercheurs japonais a proposé de surmonter ces difficultés par une solution d'une transition continue des propriétés recherchées, en concevant de nouveaux matériaux qui possèdent un gradient de composition permettant de diminuer les fortes concentrations de contrainte par l'utilisation d'une nouvelle classe de matériaux composites avancés connus sous le nom de matériaux à gradient de propriétés "*Functionally Graded Materials : FGM*" dont les propriétés mécaniques varient lentement et continuellement dans l'épaisseur de la structure [25].

Au début, les matériaux composites avancés ont été conçus en tant que matériaux thermiques de barrière dans les applications aéronautiques et les réacteurs. C'est par la suite que ces matériaux ont été développés dans le domaine militaire, l'automobile, le biomédicale, l'industrie de semi-conducteur et toutes utilisations dans un environnement à hautes températures. Ces types de matériaux, ont suscité beaucoup d'attention récemment

en raison des avantages de diminuer la disparité dans les propriétés matérielles et de réduire les contraintes thermiques.

## I.2. Concept des matériaux FGM

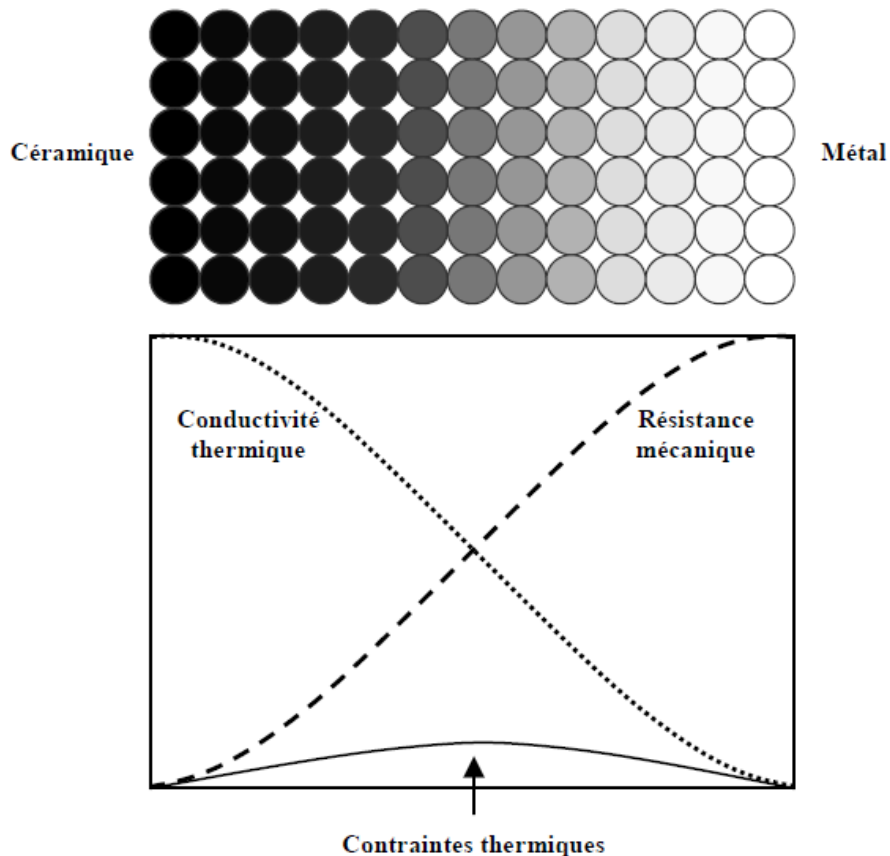
Le concept des matériaux à gradient de propriétés "FGM" fut proposé à la fin des années 1980 par un groupe de chercheurs au laboratoire national d'aérospatial "*National Aerospace Laboratory*" au Japon pour développer des pièces capables de résister aux sollicitations thermiques et mécaniques dans les systèmes de propulsion et le fuselage des navettes spatiales et comme un moyen de préparer les matériaux de barrière thermique pour l'isolation des chambres de nucléaires [26]. Une pièce peut être qualifiée de matériau FGM lorsqu'elle est composée d'au moins deux matériaux ou alliages primaires qui sont distribués continuellement ou dis-continuellement à l'intérieur de la structure. Lorsque la distribution est continue, on parle alors de matériaux à gradient continu [27]. Dans ce cas, la composition et la microstructure du matériau changent graduellement à l'intérieur de la pièce. Cette distribution des matériaux permet de modifier les propriétés à l'intérieur même de la pièce. Des gradients de propriétés peuvent ainsi être réalisés au niveau mécanique, physique, chimique, etc.

La variation continue des propriétés mécaniques confère au matériau un comportement optimisé. Les FGM sont particulièrement utilisés dans les applications de haute technologie: aéronautique, aérospatiale, nucléaire, semi-conducteurs, et en Génie Civil et trouvent également des applications biomédicales. La plupart des "FGM" sont constitués des céramiques et des métaux dont les propriétés mécaniques sont comparés dans le tableau I.1.

**Tableau I.1 :** Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.

Phase		Caractéristiques mécaniques
Céramique	La face à haute température	- Bonne résistance thermique ; - Bonne résistance à l'oxydation ; - Faible conductivité thermique.
Céramique-métal	Continuité du matériau d'un point à l'autre "couches intermédiaires"	- Élimination des problèmes de l'interface ; - Relaxer les contraintes thermiques
Métal	La face à basse température	- Bonne résistance mécanique ; - Conductivité thermique élevée, - Très bonne ténacité.

Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure d'un matériau "FGM" est illustré dans la figure I.1ci-après. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés des "FGM". Dans certains cas, on peut avoir un matériau composite avancé constitué d'un même matériau mais de microstructure différente [28].



+

**Figure I.1 :** Concept des matériaux à gradient de propriétés.

### I.3. Différences entre FGM et matériaux composites traditionnels

Les matériaux à gradient de propriétés attirent l'attention en termes de leurs applications dans les domaines industriels. Puisque les FGM ont une double propriété des deux matières premières qui sont mélangées ensemble et la distribution composante est graduée sans interruption (voir figure I.2). Par exemple, l'un des FGM qui se composent du métal et de céramique à la caractéristique de la conductivité thermique et de la force métallique dans le côté en métal et la résistivité aux hautes températures du côté céramique.

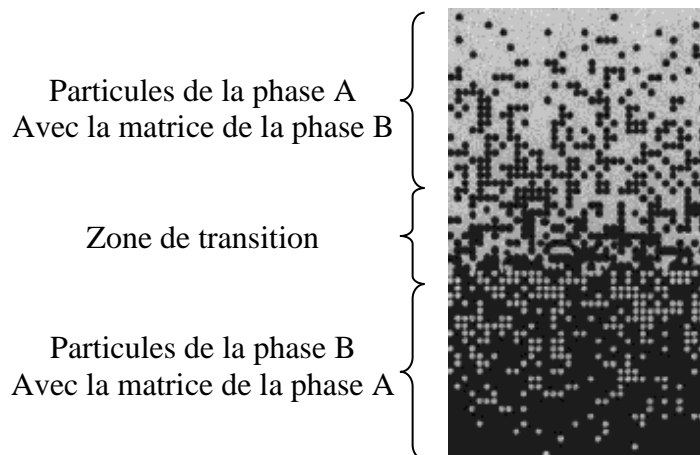


Figure I.2 : FGM "les fractions de volume graduées dans la direction verticale" [29].

Donc ces matériaux sont donc des matériaux composites avancés avec un caractère au microscope non homogène. Les changements continus de leur microstructure distinguent le FGM des matériaux composites conventionnels. Le changement continu de la composition a comme conséquence les gradients dans les propriétés de FGM. Les différences dans la microstructure et les propriétés entre FGM et matériaux composites conventionnels sont illustrées schématiquement sur la figure I.3.

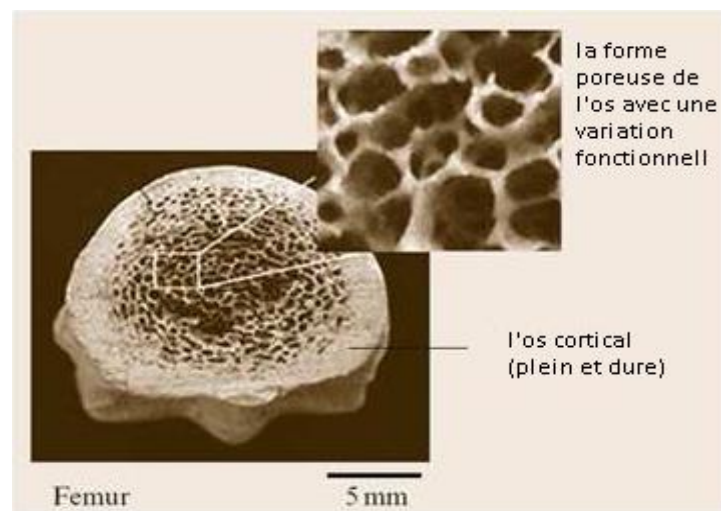
<b>Propriétés</b>	<p>1 Résistance mécanique</p> <p>2 Conductivité thermique</p>		
<b>Structure</b>	<b>Eléments constitutants:</b> Céramique ○ Métal ● Microporosité ○ Fibre ◇		
<b>Matériaux</b>	<b>Exemple</b>	<b>FGM</b>	<b>NON-FGM</b>

Figure I.3 : Caractéristiques des matériaux FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels [32].

#### I.4. Historique de développement des FGM

Le concept des matériaux fonctionnellement gradués a été aperçu dans la nature depuis des millions d'années. On peut les trouver dans les tissus des plantes, des animaux et même dans notre corps en citant à titre d'exemple les os (voir figure I.4), les coquilles, les noix de coco et les feuilles de certaines graminées comme les bambous.

Tous ces exemples, ouvrent la porte vers la biométrie qui tente d'appliquer les caractéristiques de la conception de la nature dans les sciences industrielles et médicales.



**Figure I.4 :** Vue microscopique d'une section transversale de l'os.

Le concept de FGM est né au milieu des années quatre-vingt dans le laboratoire national d'aérospatial au Japon, qui fût suivi par d'autres pays : l'Allemagne, la Suisse, Les Etats-Unis, la Chine et la Russie. En 1984 M. Niino et ses collègues à Sendai. Ont eu l'idée de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion [31]. Les changements continus dans la composition, dans la microstructure, et même dans la porosité de ces matériaux a comme conséquences des gradients des propriétés matérielles telles que les propriétés mécaniques et la conductivité thermique [32]. Cette nouvelle classe de matériaux composites peuvent être utilisés pour différentes applications, telles que les enduits des barrières thermiques pour les moteurs en céramique, turbines à gaz, couches minces optiques [33].

En 1987, le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet intitulé "la recherche sur la technologie de base pour développement de Matériaux à Gradient de propriétés et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques". L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux. 17 laboratoires nationaux de recherche, des universités et des entreprises ont été engagées dans ce projet [34].

Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux :

- Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau ;
- Ténacité du matériau côté basse température ;
- Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau.

Pour répondre à un tel cahier des charges, l'idée originale des FGM a été proposée pour élaborer un nouveau composite profitant à la fois des propriétés des céramiques "côté haute températures" et des métaux "côté basse température".

À la fin de la première étape (1987-1989), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales "1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre" pouvant résister à des températures maximales de 2000K "température de surface" et à un gradient de température de 1000K. Quatre techniques ont été utilisées pour fabriquer les matériaux présentant un gradient de composition et de structure. Les techniques utilisées dans la fabrication de tels matériaux sont les suivantes : le système SiC/C par C.V.D., le système PSZ/Mo par la technique de la compaction sèche des poudres, le système TiB<sub>2</sub>/Cu par synthèse par auto-propagation à haute température, et enfin le système (Ni-Cr-Al-Y)/ (ZrO<sub>2</sub>-Y<sub>2</sub>O<sub>3</sub>) par projection plasma à double torches [32].

Dans la seconde étape (1990-1991), le but était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première étape. Pendant les années 90, non seulement les champs d'applications des FGM s'est développé pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température, mais s'est aussi élargi à d'autres applications: biomécaniques, technologie de capteur et l'optique [35].

En 1992, c'est la période de l'amélioration de l'efficacité des FGM dans la conservation d'énergie photoélectrique, thermoélectrique, thermonucléaire [36].

### **I.5. Les méthodes de fabrication des FGM**

Les procédés de fabrication d'un matériau à gradient de propriétés "FGM" peuvent habituellement être divisés en construisant la structure dans un espace hétérogène "mélange graduel" et transformation de cette structure en matériau en bloc "solidification". Les processus de mélange graduel peuvent être classés dans les constituants, l'homogénéisation et la ségrégation. Les procédés élémentaires sont basés sur la fabrication par étape de structure en matériaux graduels précurseurs ou poudres. Les avancés en technologie d'automatisation pendant les dernières décennies ont rendu des processus élémentaire de progression technologiquement et économiquement durable. Dans la procédure d'homogénéisation qui traite une interface pointue entre deux matériaux est convertie dans un gradient par transport matériel. Les procédés d'homogénéisation et de ségrégation produit un gradient continu, mais ont des limitations au sujet des types de gradients qui peuvent être produits.

Habituellement le séchage et la solidification suivent les étapes du mélange graduel. Le besoin de ces processus de consolidation doit être adapté à FGMs: les conditions de ces procédures doivent être choisies pour que le gradient ne soit détruit ou altéré en mode non contrôlée. L'attention doit être également prêtée au rétrécissement inégal de FGMs pendant la consolidation [36].

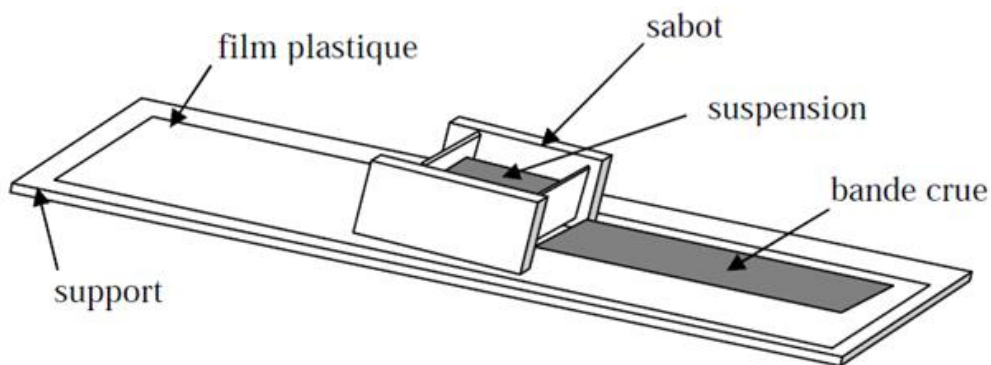
Ces dernières années, les travaux menés au laboratoire ont permis de développer une méthode originale pour élaborer des composites à gradient continu de composition. Cette méthode est basée sur une technique de Co-sédimentation de poudres en milieu aqueux. Chaque particule élémentaire de poudre sédimente avec une vitesse proportionnelle à la densité du matériau et au carré du diamètre de la particule "relation de Stokes". En contrôlant et en adaptant les répartitions granulométriques de chaque poudre, il est possible d'obtenir différents gradients de concentration dans le dépôt formé à l'issue de la sédimentation.

Il existe de nombreuses méthodes d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés, les techniques les plus employées sont brièvement expliquées ci-après.

### I.5.1. Coulage en bande "Tape Casting"

Le coulage en bande est une technique de mise en forme par voie liquide qui consiste à étaler une barbotine de poudres fines en suspension sur une surface plane en couches minces et régulières. L'étalement de la bande est obtenu par le mouvement relatif d'un réservoir ou sabot. La suspension est ainsi laminée par son passage entre la lame du réservoir et le support (figure I.5), ce qui confère à la bande déposée une épaisseur uniforme sur toute sa longueur. La hauteur du couteau du réservoir par rapport au support détermine l'épaisseur de la bande [39]. Les produits obtenus sont des feuillets avec des épaisseurs contrôlées. Après un raffermissement de la pâte, les feuillets sont démoulés et ensuite découpés.

Le procédé de coulage en bande est largement utilisé pour réaliser des matériaux composites laminaires suivant deux méthodes, soit par réalisation directe de bandes multicouches grâce à un système de lames multiples, c'est le cas des tri-couches élaborés par Mistler [38], soit par empilage de couches élaborées séparément, dont la cohésion est ensuite assurée par une étape de thermo-compression [28].



**Figure I.5 :** Principe de la méthode coulage en bande [39].

### I.5.2. Coulage séquentiel en barbotine "Slip Casting"

Le coulage en barbotine "slip casting" consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, laissant un tessou "couche de poudre compacte" sur la surface du moule. Après séchage, on obtient le corps en cru. Donc le coulage se décompose en deux étapes essentielles :

- ✓ Formation du tessou ou "prise",
- ✓ Consolidation du tessou ou "raffermissement".



La filtration, c'est à dire la formation du tesson lors du coulage, peut être considéré comme un processus d'élimination d'une partie de l'eau de la barbotine; Cette eau migre à travers la couche de tesson déjà formée, sous l'effet :

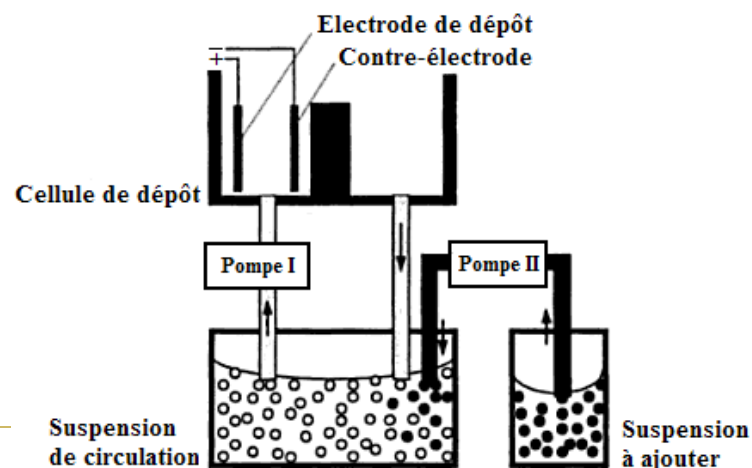
- ✓ Du pouvoir de succion du plâtre "coulage classique [39] ",
- ✓ Ou d'une pression appliquée sur la barbotine "coulage sous pression".

Dans le cas de la fabrication de multicouches, après la formation du premier tesson, le dépôt de la deuxième couche s'effectue de manière telle que la barbotine ne pénètre pas dans le tesson formé. Ce procédé est successivement reproduit pour les autres couches.

### I.5.3. Dépôt par Electrophorèse

Le dépôt par électrophorèse "EPD", est un processus assez rapide à faible coût, capable de produire les matériaux à gradient de propriétés changeant sans interruption avec la géométrie complexe. EPD se compose de deux processus, c'est-à-dire le mouvement des particules chargées en suspension dans un champ électrique entre deux électrodes "électrophorèse" et le dépôt de particules sur l'un des électrodes. EPD permet la conception des matériaux à gradient de propriétés en forme de plaque binaire en déposant d'une suspension de poudre à laquelle une deuxième suspension est sans interruption ajoutée pendant le processus [40]. Le dépôt est un contrat de poudre emballé étroit qui a besoin de l'agglomération pour réaliser les composants matériels entièrement denses.

Depuis lors, de nombreuses applications d'EPD ont été développées pour la fabrication de la céramique, y compris l'application des matériaux sans interruption à gradient de propriétés peut être obtenu tels que le céramique-céramique  $ZrO_2/Al_2O_3$  et le céramique-métal, WC/Co puisque la composition des couches déposantes est déterminée par la suite composition de la suspension au moment du dépôt. Une installation générale de ce principe est illustrée sur la (figure I.6).



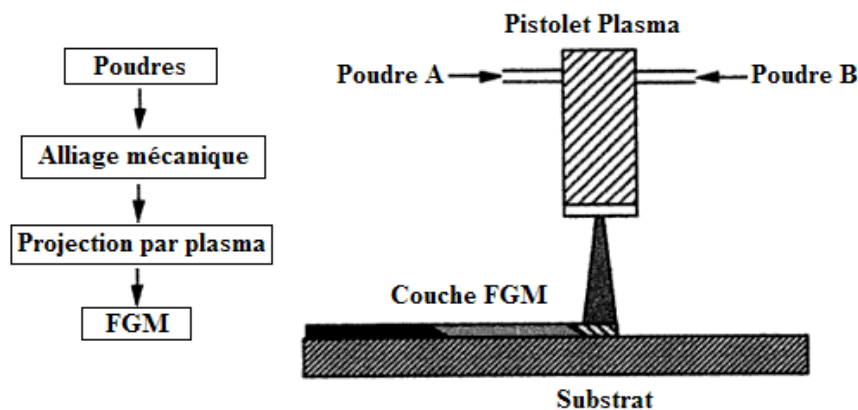
### I.5.4. Compaction sèche des Poudres

Dans cette technique les poudres sont successivement versées dans un moule en acier. Chaque fois qu'une poudre est versée, une faible compression est exercée. Ensuite, la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Ce procédé est suivi, généralement, par une pression isostatique et un délitage. La densification sera enfin l'étape finale.

Ce procédé peut être envisagé pour la fabrication de pièces de formes complexes. En effet il s'applique aussi avec la technique du pressage isostatique, et de façon industrielle [41].

### I.5.5. Projection plasma

La projection plasma consiste à introduire des particules solides "de taille inférieure à 100 $\mu$ m, environ" dans un jet de gaz, dont la température atteint couramment 1100°C et la vitesse 1000-1500m/s (figure I.7). Le dépôt est ainsi formé par l'empilement des lamelles solidifiées obtenues par l'impact des particules sur le substrat préalablement préparé [45]. Ce procédé est utilisé en particulier pour déposer des matériaux à haute température de fusion tels que des alliages réfractaires ou des céramiques. Les caractéristiques des dépôts réalisés par la projection plasma sont la résistance à l'usure et à la corrosion et ainsi à l'isolation thermique et électrique.



**Figure I.7 :** Méthode de projection plasma pour former un matériau thermoélectrique gradué. "La composition est graduée dans la direction plane "[42].

La projection plasma est devenue une méthode très utile pour fabriquer des FGM. Le rendement élevé du dépôt des particules sur des substrats à géométrie compliquée, les performances des surfaces en fonctionnement et la compatibilité des céramiques avec les métaux sont les avantages essentiels de cette technique.

### **I.5.6. Frittage et Infiltration**

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes. La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique [43].

Cette méthode peut être généralement appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres.

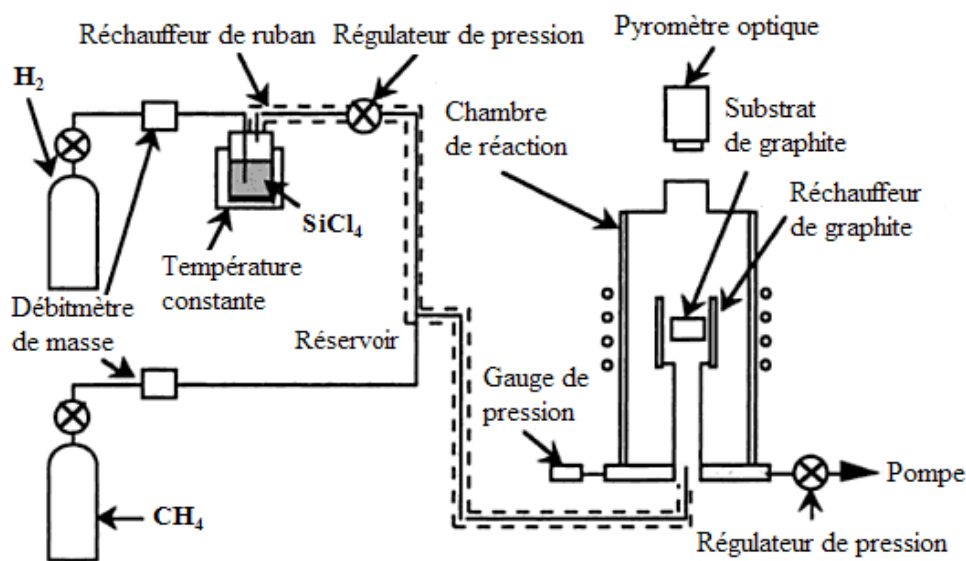
### **I.5.7. Dépôt physique en phase vapeur "PVD"**

La technique de dépôt physique en phase vapeur "*physical vapor deposition*" est une technologie prometteuse pour la production de revêtements de barrière thermique. Parmi les caractéristiques avantageuses de PVD que les revêtements fabriqués ont des surfaces lisses, sans exigence, enfin il n'y a pas de fermeture de trous de refroidissement. Toutefois, le principal avantage est leur résistance exceptionnelle aux chocs thermiques, ainsi que la durée de vie est considérablement plus longue. L'équipement utilisé pour déposer les revêtements d'isolation thermiques par l'intermédiaire de PVD, se compose de plusieurs récipients pour le chargement, le préchauffage et le dépôt plus un dispositif de rotation et la manipulation des échantillons ...etc.

Une autre approche pour obtenir une structure à gradients est d'utiliser un mélange d'aluminium, l'alumine et de zircone, chimiquement contrôlés peuvent être fabriqués facilement par vaporisation à partir de sources multiples en utilisant un ou plusieurs pistolets électroniques. En ajustant les paramètres de faisceau d'électrons, différents taux de dépôt peuvent être obtenus pour chaque source. Si les taux d'évaporation de deux composants, par exemple alumine et de zircone, sont changés sans interruption, un gradient défini de composition est obtenu, c'est le FGM.

### I.5.8. Dépôt chimique en phase vapeur "CVD"

Dans la technique de dépôt chimique en phase vapeur "*chemical vapor deposition*", représenté schématiquement à la (figure I.8), un dépôt est formé sur un substrat en soumettant la source des gaz "par exemple, des hydrures, bromures ou chlorures" qui occupent la chambre de réaction, à différents types d'énergie comme la chaleur, la lumière et le plasma. Les FGM peuvent être synthétisés à lent pour modérer des taux de dépôt en modifiant le rapport de mélange de la source des gaz, ou par le contrôle de la température de dépôt, la pression de gaz, ou le débit de gaz. En raison de son faible taux de dépôt, CVD est largement utilisé pour l'infiltration de piles ou pour la fabrication de couches minces [44].

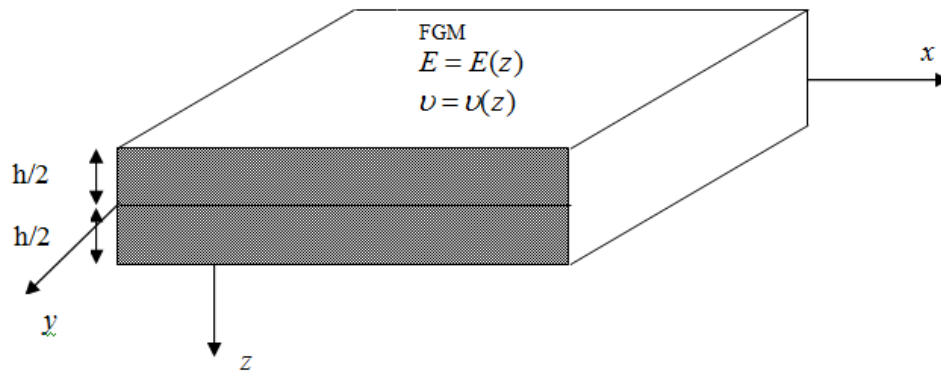


**Figure I.8 :** Technique de préparation d'un SiC/C FGM par le dépôt chimique en phase vapeur "CVD" [43].

### I.6. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM

Les matériaux à gradient de propriétés "FGM" peut être produit en changeant sans interruption les constituants des matériaux multiphasés dans un profil prédéterminé. Les dispositifs les plus distincts d'un FGM sont les microstructures avec des macros -propriétés graduées sans interruption. Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs utilisent la fonction de loi de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume.

Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure.



**Figure I.9 :** Géométrie d'une plaque en FGM.

Les coordonnées  $x$  et  $y$  définissent le plan de la plaque (figure I.9), tandis que la direction de l'axe  $z$  perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque et dans la direction de l'épaisseur.

Les propriétés du matériau dont le module de Young et le coefficient de Poisson sur les surfaces supérieures et inférieures sont différentes mais sont déterminés selon les demandes d'exécution.

Toutefois le module d'élasticité "Young" et le coefficient de Poisson varie de façon continue, dans le sens de l'épaisseur "l'axe  $z$ " soit :  $E = E(z), \nu = \nu(z)$ . Le module de Young dans le sens de l'épaisseur de la plaque en matériaux à gradient de propriétés varie en fonction de la loi de puissance "P-FGM" ou avec la fonction sigmoïde "S-FGM" ou bien la fonction exponentielle "E-FGM".

### I.6.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM

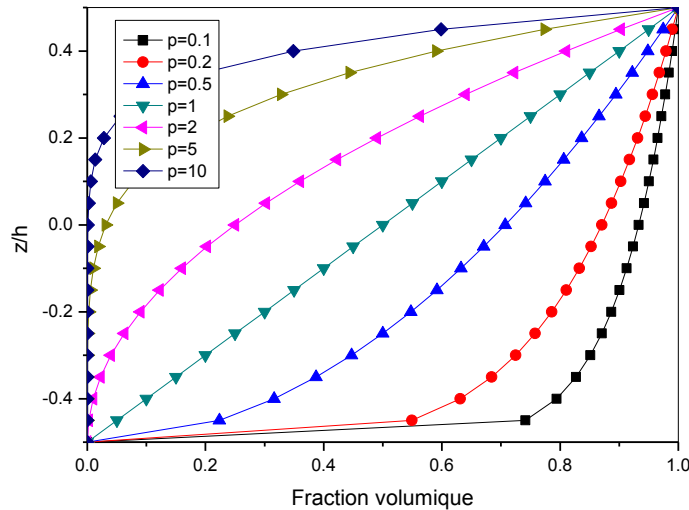
La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance.

$$V(z) = \left( \frac{z + h/2}{h} \right)^p \quad (\text{I.1})$$

Où  $p$  est un paramètre matériel et  $h$  est l'épaisseur de la plaque. Une fois la fraction volumique locale  $V(z)$  a été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges [45] :

$$E(z) = V(z)E_1 + [1 - V(z)]E_2 \quad (\text{I.2})$$

Où  $E_1$  et  $E_2$  sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure ( $z = h/2$ ) et de la surface supérieure ( $z = -h/2$ ) de la plaque FGM, la variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la (figure I.10), il apparaît clairement que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour  $p < 1$ , et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour  $p > 1$ .



**Figure I.10:** Variation de la fraction volumique dans une plaque "P-FGM".

### I.6.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

Dans le cas d'ajouter une plaque P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interfaces où le matériau est continu mais change rapidement [45]. Par conséquent, Chung et Chi [45] ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces.

Les deux fonctions de loi de puissance sont définis par :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{h/2 + z}{h/2} \right)^p \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.3a})$$

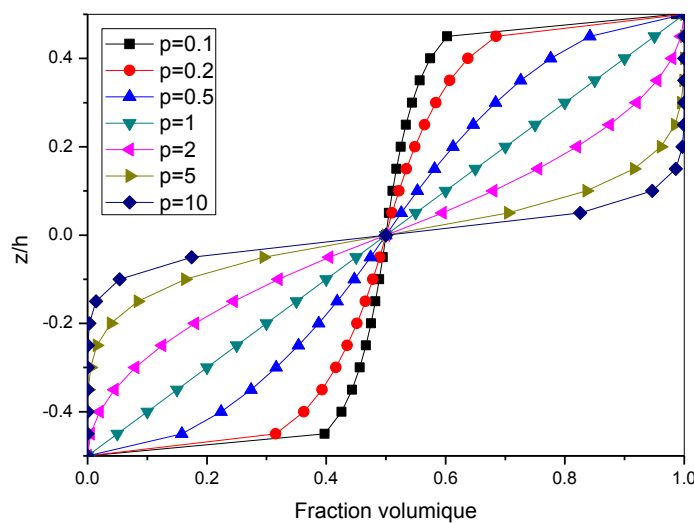
$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{h/2 - z}{h/2} \right)^p \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.3b})$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé en utilisant les relations suivantes :

$$E(z) = V_1(z) E_1 + [1 - V_1(z)] E_2 \text{ Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.4a})$$

$$E(z) = V_2(z) E_1 + [1 - V_2(z)] E_2 \text{ Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.4b})$$

La (figure I.11) montre que la variation de la fraction volumique dans les équations (I.4.a) et (I.4.b) représente les distributions sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée dans ce cas "Plaque S-FGM".



**Figure I.11:** Variation de la fraction volumique dans une plaque "S-FGM".

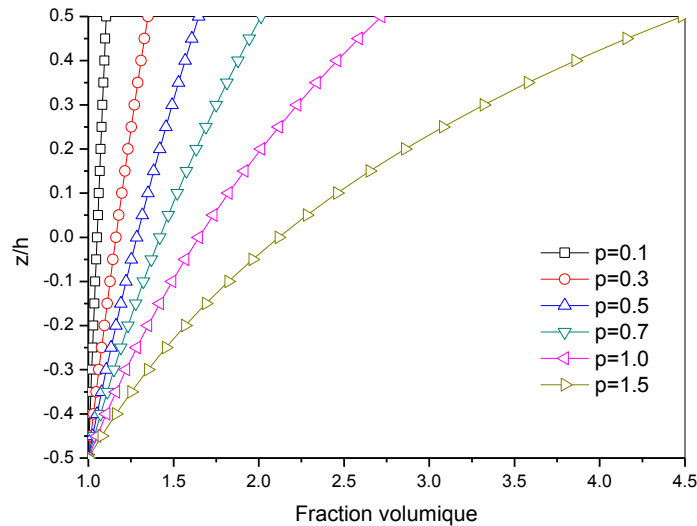
### I.5.3. Les propriétés matérielles de la poutre E-FGM

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle "E-FGM". En effet, cette fonction est impliquée dans ce présent travail, car les propriétés du matériau varient à travers l'épaisseur avec une distribution exponentielle. La fraction de volume des constituants s'écrit sous la forme (figure I.12) :

$$V(z) = e^{p\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)} \quad (\text{I.5a})$$

Et le module de Young de la plaque E-FGM peut être calculé en utilisant l'expression suivante :

$$E(z) = E_1 V(z) \quad (\text{I.5b})$$



**Figure I.12:** Variation de la fraction volumique dans une plaque "E-FGM".

## I.6. Domaines d'application des FGM

Le concept des matériaux à gradient de propriétés est applicable dans un large intervalle et dans différents domaines.

### I.6.1. Aéronautique

Les FGM permettent de produire un poids-léger des matériaux solides, durables et applicables dans différents domaines de structure. Ces derniers sont considérés d'une part, comme une technologie indispensable pour la roquette et à la construction de station spatiale, et d'autre part utilisables comme des barrières thermiques des avions spatiaux et des parties de moteur de fusée.

### I.6.2. Matières industrielles

De nombreuses applications de FGM ont été récemment apparues pour les matériaux industriels. Comme les produits récents sont intensifiés en raison d'une résistance mécanique et thermique accrue, la demande d'un nouveau matériau pour l'outil industriel est en pleine croissance. Dans ce domaine, il est nécessaire d'avoir les deux résistances donc la demande de la FGM est une solution.

### I.6.3. Biomatériaux

Notre corps est soutenu par 206 os, et certains d'entre eux couvrent un cerveau et des organes. Si nous avons une douleur à un os ou une articulation, nous aurons des troubles dans notre vie. Pour résoudre ce problème, un nouveau matériau nommé FGM est apparu et peut



remplacer les os et les articulations. Non seulement la dureté et une excellente résistance à la corrosion et la compatibilité, mais aussi au niveau biologique.

#### **I.6.4. Energie solaire**

Les cellules photovoltaïques des piles solaires ont une bande de fréquence propre de réponse à la lumière dépendant des matériaux. Ces piles solaires utilisent des FGM et présentent une réponse optimale sur une très large bande de fréquence. De plus la combinaison de la génération thermoélectrique avec la génération photovoltaïque sur une pile solaire permet la pleine utilisation de l'énergie lumineuse et thermique du rayonnement solaire et donc conduit à un meilleur rendement de conversion global.

Ces conversions thermoélectroniques utilisant les FGM laissent entrevoir la mise au point de générateurs à recharge de gaz ou kérosène compacts qui peuvent être utilisés dans des zones reculées en montagne ou dans les déserts froids ou chauds pour des instruments de mesure et de communication comme par exemple des stations météorologiques.

#### **I.6.5. Génie civil**

Les FGM peuvent être utilisés dans les chaussées rigides en béton avec une gradation obtenue par la variation de la fraction volumique des fibres, cette technique est visée d'être utilisée dans les autoroutes et les routes à très fort trafic où l'utilisation d'une chaussée souple en béton bitumineux est déconseillée, tels que les dallages industrielles, les pistes des aéroports, car elles offrent une résistance et une durabilité élevées, le but est d'optimiser l'épaisseur de la chaussée afin d'avoir un matériau rigide sur la surface de roulement et un matériau moins rigide sur la couche de fondation.

Les FGM peuvent être utilisés dans les chaussées souples pour supprimer les couches d'accrochage entre la couche de la Grave Bitume et la couche de roulement en Béton Bitumineux et éviter le glissement entre les deux couches et économiser les épaisseurs des couches tout en obtenant un comportement optimisé et augmentant la capacité portante de la chaussée et par la suite sa durabilité.

#### **I.7. Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons défini au premier lieu les matériaux composites avancés nommés "FGM", l'historique de leur développement, leurs propriétés, leurs principales méthodes de fabrication, et par la suite nous avons cité les différentes lois possibles qui

servent à décrire la variation spatiale et progressive des propriétés matérielles du matériau FGM "module de Young, masse volumique et coefficient de poisson" suivant l'épaisseur d'une plaque, ces lois peuvent être de puissance, sigmoïde et exponentielle. Ces matériaux permettent la construction des structures innovantes qui peuvent être exploitées dans de nombreux domaines d'application dans les structures spéciales et en génie civil.

# **Chapitre II**

## **Différentes théories des plaques**

## *Chapitre II*

### *Différentes théories des plaques*

#### **II.1. Introduction**

Les problématiques rencontrées concernent essentiellement des questions de dimensionnement ou de contrôle des vibrations et des contraintes. Pour mieux connaître, la réponse du comportement dynamique et statique de la structure, il est impératif d'approcher de la manière la plus correcte possible les phénomènes mis en jeu par les plaques qui sont plus ou moins complexes. Ainsi, un tablier d'un pont, un bâtiment, une caisse de voiture, une aile d'avion, un bateau... Parmi tous ces domaines d'application, on peut distinguer plusieurs types de plaques : des plaques membranaires, des plaques minces, modérées et épaisses dont les propriétés matérielles sont différentes. Dans cette étude nous nous intéresserons par les plaques hétérogènes en matériaux composites avancés, nommés les matériaux à gradient de propriétés qui sont généralement constitués par deux constituants différents.

Afin de résoudre les problèmes des structures ayant comme éléments structuraux des poutres et des plaques FGM dans le domaine élastique, il est nécessaire de choisir la bonne théorie décrivant correctement le comportement statique et dynamique de la structure ainsi que la méthode de résolution à appliquer. C'est en 1888 que Love utilisa les hypothèses de Gustav Kirchhoff, elles-mêmes inspirées des hypothèses d'Euler-Bernoulli pour fonder une théorie des plaques minces "également appelée théorie classique ou théorie de Kirchhoff-Love". La théorie des plaques semi-épaisses "théorie des déformations du premier ordre" a été consolidée par Mindlin à partir des travaux de Timoshenko [46] et Reissner [47]. Ensuite, des théories d'ordre supérieur sont venues améliorer les hypothèses des théories classiques et du premier ordre lorsque l'épaisseur de la plaque devient importante. Il existe aussi la théorie basée sur l'élasticité tridimensionnelle "théorie 3-D" qui ne fait aucune hypothèse restrictive sur les déplacements de la plaque.

Nous présentons dans ce chapitre quelques modèles sur les théories des plaques développées dans la littérature pour améliorer l'évolution de la variation du champ des déplacements à travers l'épaisseur des plaques.

## II.2. Définition d'une plaque

Une plaque est un solide élastique dont une dimension selon l'épaisseur, est petite en comparaison des deux autres, et qui généralement comporte un plan de symétrie au milieu de l'épaisseur que nous appellerons surface moyenne (Voir figure II.1). Par convention, cette surface sera le plan (x-y), l'axe (o-z) correspond à l'axe transversal selon l'épaisseur. Une plaque peut être constituée d'un matériau homogène, ou être obtenue par l'empilement de différentes couches de matériaux orthotropes.

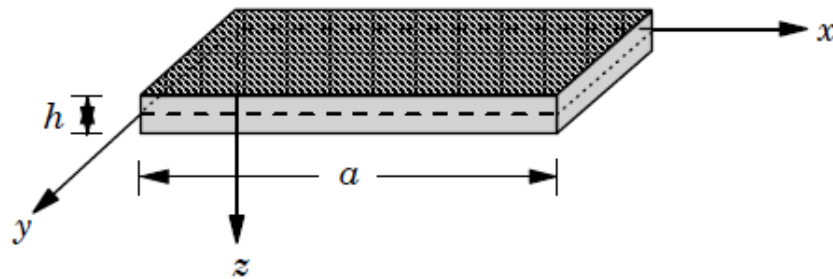


Figure II.1 : Géométrie d'une plaque de forme rectangulaire.

Afin de traiter des problèmes de plaques élastiques, des hypothèses doivent être imposées pour simplifier les équations générales de l'élasticité linéaire. Dans le cas d'un problème de plaques en flexion on applique des charges normales à la surface moyenne, dans la direction de z. Ces forces appliquées provoquent une flexion dans la plaque avec un déplacement du feuillet moyen dans la direction de z, ce déplacement vertical est habituellement appelé flèche et noté par  $w$ .

## II.3. Modèles analytiques des plaques FGM

L'ensemble de ces modèles sont basées sur les lois de comportement élastique de la théorie d'élasticité linéaire et les hypothèses fondamentales nécessaires pour caractériser le modèle analytique choisi. Il faut savoir que l'aspect géométrique de la plaque est défini par une surface de référence plane et par une épaisseur petite par rapport aux autres dimensions. Cette définition favorise le choix d'une cinématique spécifique par rapport à la cinématique générale d'un solide, le facteur de classification de ces théories est l'importance de l'épaisseur par rapport aux autres dimensions, cette particularité conduit à l'effet de cisaillement transversal à travers l'épaisseur, ce dernier est présenté dans la cinématique adaptée. Dans l'analyse des plaques en flexion, on peut utiliser trois théories fondamentales :

- ✓ Théorie classique des plaques de Love-Kirchhoff (CPT),
- ✓ Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT),
- ✓ Théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)

### II.3.1. Théorie classique des plaques de Love-Kirchhoff (CPT)

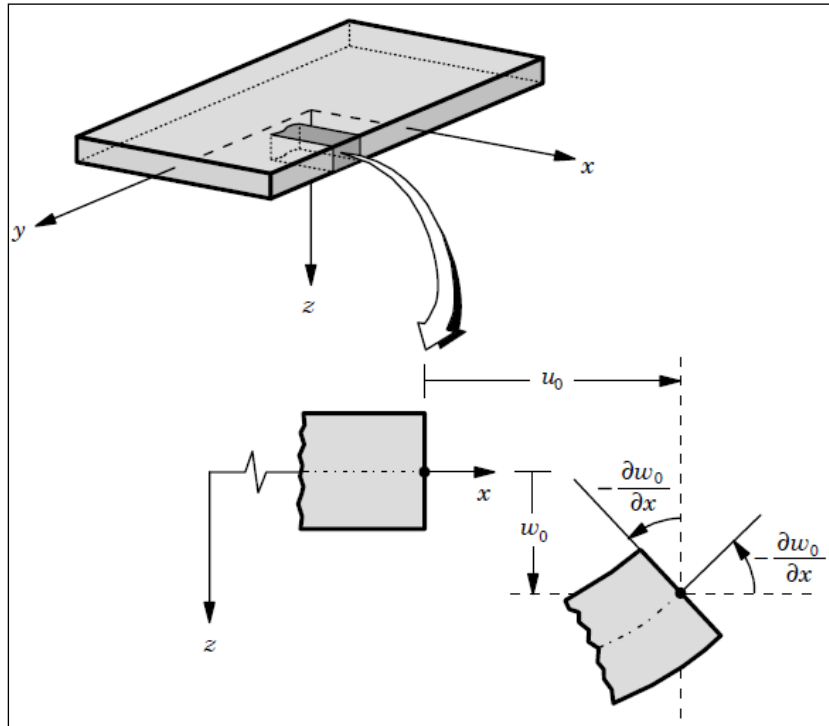
On parle d'une plaque mince, lorsque la flèche générée par les déformations de cisaillement reste négligeable devant la flèche générée par la courbure de la plaque. Dans le cas d'une plaque homogène isotrope, la part de cisaillement dans la flèche est directement reliée à l'élancement ( $Lh$ ).

La théorie classique des plaques minces (CPT) se base sur les hypothèses de Love-Kirchhoff, selon lesquelles une droite normale au plan moyen de la plaque reste perpendiculaire après déformation, ce qui revient à négliger les effets de déformation en cisaillement transverse. Le champ de déplacement associé à cette théorie est présenté dans l'équation (II.1). La cinématique ci-après (figure II.2) illustre l'état déformé d'une structure monocouche avec le modèle de Love-Kirchhoff : la section de la plaque déformée reste orthogonale à la surface neutre, les contraintes et déformations de cisaillement transverse sont nulles. Cette formulation a tendance à sous-estimer les flèches et surestimer les charge critique de flambement et les fréquences propres des structures modélisées, cette erreur étant encore plus grande pour les stratifiés fortement anisotropes. Cependant, ce modèle permet de décrire correctement le comportement de plaques simples fortement élancées ou avec une épaisseur faible par rapport à la longueur d'onde de flexion, d'où son appellation de modèle de "plaques minces". Ce modèle de plaque peut être référé en Timoshenko et Woinowsky-Krieger [48] ainsi que Reddy [49].

En se basant sur les hypothèses citées ci-dessus, le champ de déplacement de la théorie classique est exprimé sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z) &= \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - z \frac{\partial \mathbf{w}_0}{\partial \mathbf{x}}, \\
 \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z) &= \mathbf{v}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - z \frac{\partial \mathbf{w}_0}{\partial \mathbf{y}}, \\
 \mathbf{w}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z) &= \mathbf{w}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}),
 \end{aligned}
 \tag{II.1}$$

Avec  $u_0$  et  $v_0$  sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ( $z = 0$ ). Puisque ce modèle ne tient pas en compte l'effet de cisaillement transverse, il donne des résultats non précis pour les plaques épaisses.



**Figure II.2** : Cinématique de la plaque de Love Kirchhoff (CPT) [53].

### II.3.2. Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) est une extension de la cinématique de la théorie classique des plaques (CPT) par une déformation de cisaillement transversale de la plaque dans leur hypothèse cinématique (figure II.3), dans ce cas la distribution des contraintes et les déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque, ce qui oblige l'introduction d'un facteur de correction du cisaillement pour corriger cette forme de contraintes. Généralement ce coefficient est difficile à déterminer à cause de sa dépendance à la fois, de la géométrie, du coefficient de Poisson à travers l'épaisseur, des charges appliquées et des conditions aux limites. Les études sur la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) peuvent être trouvées dans les références de Reissner [47] et Mindlin [50] qui a mené au modèle de plaque de Reissner-Mindlin. Ce modèle a été utilisé par suite par Reddy pour l'analyse statique en flexion, la vibration libre et le flambement des plaques isotropes et multicouches [49, 51].

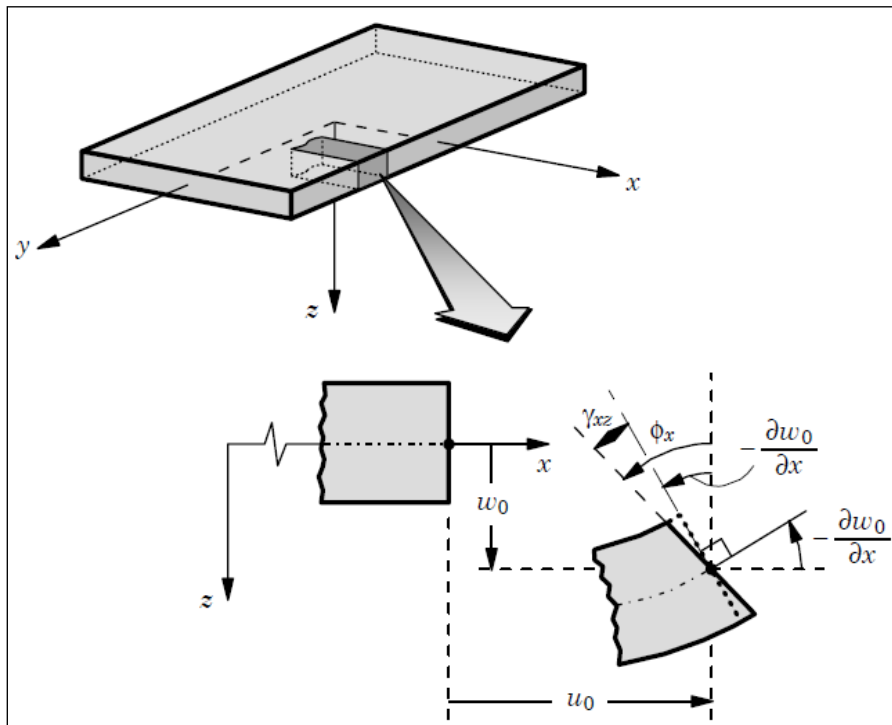
La théorie du premier ordre est basée sur le champ de déplacement suivant :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, y, z) &= \mathbf{u}_0(x, y) + z\phi_x(x, y), \\ \mathbf{v}(x, y, z) &= \mathbf{v}_0(x, y) + z\phi_y(x, y), \\ \mathbf{w}(x, y, z) &= \mathbf{w}_0(x, y), \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

Avec :  $(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{w}_0)$  et  $(\phi_x, \phi_y)$  sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes  $x$  et  $y$ , respectivement.

Le champ de déplacement définis dans l'expression ci-dessus permet de reprendre la théorie classique des plaques décrite dans la dernière section par le remplacement :

$$\phi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad \phi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (\text{II.3})$$



**Figure II.3** : Cinématique de la plaque de Reissner- Mindlin (FSDT) [49].

Avec ce choix de la forme des champs de déplacement, les déformations transversales sont constantes en  $(z)$ . Les contraintes de cisaillement sont donc uniformes dans chaque couche discontinue entre les couches. Cette mauvaise description oblige à introduire des coefficients correcteurs pour mieux prendre en compte dans l'écriture de l'énergie, les effets de cisaillement transversal [52]. Les résultats obtenus dépendent essentiellement du choix



empirique dans des situations complexes des coefficients correcteurs et l'étude du composite épais reste aléatoire par ce type d'approche cinématique. Pour éviter l'introduction d'un facteur de correction, des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevée ont été développées.

D'ailleurs pour éviter l'introduction d'un facteur de correction, des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevée ont été développées.

### II.3.3. Théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)

À la différence de la théorie CPT et la théorie FSDT avec les acceptations de la distribution linéaire du déplacement par l'épaisseur, la théorie d'ordre élevé est basée sur une distribution non linéaire des champs dans l'épaisseur (voir figure II.4). Par conséquent, on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et / ou de la déformation normale transversale. Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction. Les références sur de tels modèles peuvent être trouvées dans plusieurs références scientifiques [53, 54, 55, 56, 57].

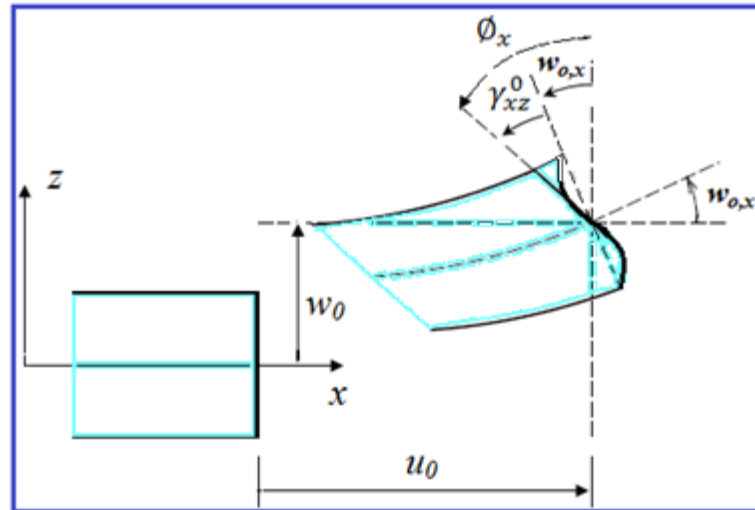
Nous avons introduit ici quelques modèles de plaques utilisés pour analyser le comportement des matériaux composites avancés (FGM).

Le champ de déplacement est généralement comme suit :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + f(z) \varphi_x(x, y), \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + f(z) \varphi_y(x, y), \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

Où  $u, v$  et  $w$  représentent les déplacements dans les directions  $x, y$  et  $z$ . Les composantes de déplacements  $u_0, v_0$  et  $w_0$  sont ceux d'un point du plan moyen ( $x, y, z = 0$ ).  $\varphi_x$  et  $\varphi_y$  sont les rotations due à la flexion des plans  $yz$  et  $xz$ . Cependant  $f(z)$  est la fonction de gauchissement qui représente la forme de distribution des contraintes et des déformations de cisaillement transverse dans l'épaisseur de la plaque. Ainsi le choix de cette fonction  $f(z)$  est basé sur les résultats de l'élasticité tridimensionnelle ou toute autre information sur la distribution des contraintes de cisaillement transverse.

En effet, les déplacements de la théorie classique de plaque CPT est obtenue par en prenant  $f(z) = 0$ , alors que la théorie de premier ordre FSDT peut être obtenue par  $f(z) = z$ .



**Figure II.4 :** Cinématique de la plaque d'ordre élevé (HSDT) [53].

#### II.4. Revue sur les différents modèles de la théorie d'ordre élevé (HSDT)

Pour franchir les limites des théories du premier ordre, plusieurs auteurs ont proposé quelques contributions importantes pour le développement de modèles d'ordre élevé qui se sont distingués dans la littérature par l'expression de la fonction de cisaillement  $f(z)$ . Les modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs de déplacement à travers l'épaisseur, et qui permettent de représenter le gauchissement de la section transversale dans la configuration déformée (Figure II.4) [52, 58, 59, 60]. Nous citons en particulier :

L'approche d'Ambartsumyan [61] avec :

$$f(z) = \frac{z}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad (\text{II.5})$$

L'approche de Reissner [51], Panc et Kaczkowski, avec :

$$f(z) = \frac{5}{4} z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.6})$$

L'approche de Levinson, Murthy [62] et Reddy [56] Avec ;

$$f(z) = z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.7})$$

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal  $w$ , est constant [56]. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle dans le cas homogène. La distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique à travers l'épaisseur (elle doit être parabolique par couche pour un multicouche). Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites. Les résultats du modèle de Reddy sont également très proches des deux modèles d'ordre élevé proposés par Kant et Swaminathan [57].

Touratier propose le modèle (sinus) qui est différent des autres modèles d'ordre élevés puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur [60]. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme suite :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) = \frac{h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi z}{h}\right)^{2n+1} \\ &= z \left( 1 - \frac{\pi^2}{3!} \frac{z^2}{h^2} + \frac{\pi^4}{5!} \frac{z^4}{h^4} - \frac{\pi^6}{7!} \frac{z^6}{h^6} + \dots \right) \end{aligned} \quad (\text{II.8})$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par le modèle (sinus) prennent une forme trigonométrique à travers l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de [Reddy 1984]. En se basant sur les travaux de Touratier, un élément fini triangulaire à six nœuds, est construit pour les structures multicouches non linéaires géométriques par Polit *et al.* [63] et Dau *et al.* [64].

Malgré le fait que les modèles d'ordre élevé assurent une continuité de déplacement et de déformation à l'interface, les contraintes de cisaillement inter laminaire et les contraintes d'interface, restent discontinues. Ceci présente un inconvénient lors de l'analyse locale de l'interface des structures multicouches dont les propriétés des couches sont très différentes.

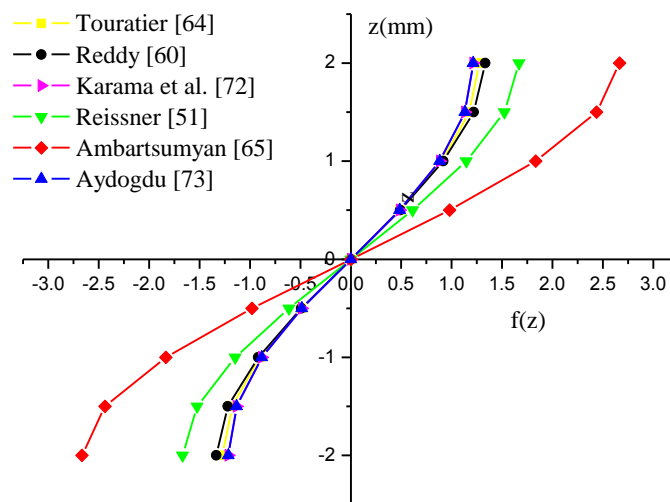
Nous regroupons dans le tableau suivant les différentes fonctions de cisaillement ainsi qu'une comparaison entre les différents modèles.

**Tableau II.1 :** Différentes fonctions de cisaillement utilisées dans les théories des plaques en matériaux composites avancés.

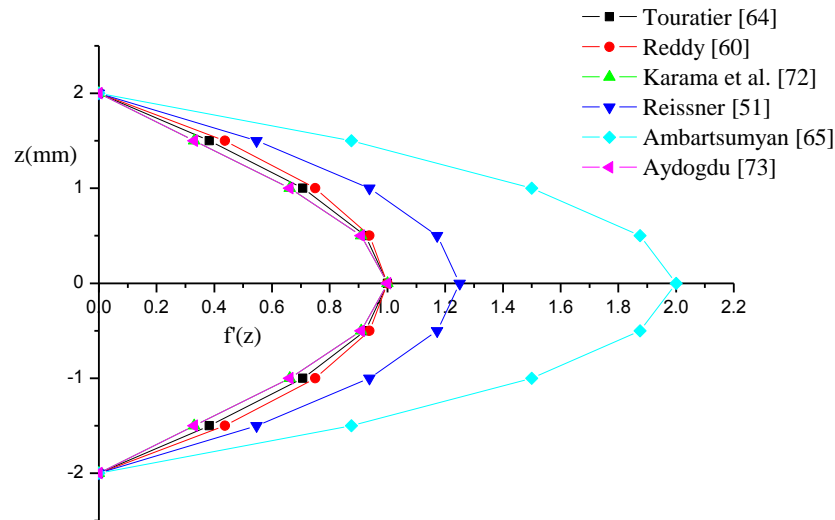
Théories	intitulé	Fonction de cisaillement $f(z)$	Coefficient de correction $k$	Domaine de validité
CPT Kirchhoff [69]	Théorie classique des plaques	0	---	Plaques minces
FSDT Mindlin [54]	Théorie de déformation en cisaillement du 1er ordre	$z$	Requis	Plaques minces et moyennement épaisses
Ambartsumyan [65]	Théorie d'ordre supérieur	$\frac{z}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right)$	Non Requis	Plaques minces et moyennement épaisses
Reissner [51]	Théorie d'ordre supérieur	$\frac{5}{4}z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$	Non Requis	Plaques minces et épaisses
PSDT Levinson [66], Reddy [60]	Théorie de déformation parabolique	$z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$	Non Requis	Plaques minces et épaisses
TSDT Touratier [64]	Théorie de déformation trigonométrique	$\frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$	Non Requis	Plaques minces et épaisses
Soldatos [70]	Théorie de déformation hyperbolique	$h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) - z \cosh\left(\frac{1}{2}\right)$	Non Requis	Plaques minces et épaisses
Shimpi [71]	Théorie raffinée	$h \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{z}{h} \right) - \frac{5}{3} \left( \frac{z}{h} \right)^3 \right]$	Non Requis	Plaques minces et épaisses
ESDT Karama et al. [72]	Théorie de déformation exponentielle	$z e^{-2(z/h)^2}$	Non Requis	Plaques minces et épaisses
Aydogdu [73]	Théorie de déformation exponentielle	$z \alpha \frac{2(z/h)^2}{\ln(\alpha)}, \alpha > 0$	Non Requis	Plaques minces et épaisses
El Meiche et al. [74]	Théorie raffinée	$\frac{(h/\pi) \sin(hz/\pi)}{\cosh(\pi/2 - 1)}$	Non Requis	Plaques minces et épaisses
Zenkour [75]	Théorie de déformation hyperbolique	$h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) - \frac{4z^3}{3h^2} \cosh\left(\frac{1}{2}\right)$	Non Requis	Plaques minces et épaisses

D'après les différents modèles proposés de la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé, on voit que l'approche d'Ambartsumyan [61] et l'approche de Reissner [47] (voir figures II.5 et II.6 ci-dessous), sont un peu loin des autres fonctions de forme présentées par Touratier [60], Reddy [56], Karama et al [68] et Aydogdu [69]. Elles sont servies comme bases pour développer les autres fonctions de cisaillement qui sont en principe plus proches de l'analyse 3D.

Il faut remarquer que les modèles issus d'une approche monocouche équivalente pressentent des contraintes de cisaillement transverse discontinues aux interfaces si les couches ont des propriétés différentes, même si la continuité du champ de déformation est assurée. Ceci présente un inconvénient sérieux lors de l'analyse locale à l'interface des structures multicouches (effets de bord sur les contraintes, contraintes inter-faciales, délaminage, ...etc.), mais pour le cas des matériaux à gradient de propriétés (FGM) cette approche paraît très appropriée, du fait que la variation des propriétés se fait continuellement selon l'épaisseur.



**Figure II.5 :** Variation de la fonction de forme  $f(z)$  des différents modèles en fonction de l'épaisseur  $z$ .



**Figure II.6 :** Variation de la fonction de forme  $f(z)$  des différents modèles en fonction de l'épaisseur  $z$ .

### II.5. Nouvelle théorie raffinée de déformation des plaques

Shimpi [67] a développé un modèle raffiné pour l'analyse des plaques isotropes (RPT : Refined Plate Theory). Les caractéristiques les plus intéressantes de cette méthode et qu'elle ne contient que quatre équations d'équilibre avec seulement quatre inconnus à trouver au lieu des cinq dans le cas des théories classiques. En plus, cette théorie n'exige pas de facteur de correction de cisaillement et donne une distribution parabolique de déformation en cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque. Aussi, elle présente beaucoup de similitudes avec la théorie classique des plaques quant aux équations du mouvement, les conditions aux limites et les expressions des moments. Plusieurs chercheurs ont adaptés cette théorie pour étudier le comportement statique et dynamique des plaques stratifiés, sandwichs et en matériaux à gradient de propriétés.

Récemment Thai et Kim [72, 73] ont adapté le modèle raffiné, avec succès, au flambement des plaques orthotropes et à la vibration libre des plaques composites stratifiées et sandwichs.

### II.6. Approche par couche

Ces approches sont destinées justement à mieux décrire les effets d'interface pour les matériaux composites conventionnels. Il est observé que cette approche est applicable pour les structures en matériaux FGM. Ainsi différents modèles issus de l'approche par couche ont été proposés par Carrera [74], Afaq et al. [75], Reddy [56] et Di Sciuva [76]. Le multicouche

est subdivisé en sous structures correspondant en fait à chaque couche ou chaque ensemble de couches. On applique à chaque sous structure une théorie du premier ordre ou un modèle d'ordre supérieur, imposant un champ de déplacement vérifiant la continuité aux interfaces entre les différentes couches.

Les modèles de ce type sont relativement coûteux (l'ordre des équations de comportement dépend du nombre de couche), mais ils permettent l'obtention de résultats plus précis, notamment en ce qui concerne le calcul des contraintes hors plan. D'une manière générale, les modèles issus de l'approche par couche peuvent être classés en deux groupes : les modèles couches discrètes où chaque couche est considérée comme une plaque en imposant les conditions de continuité en déplacements ou en contraintes aux interfaces et les modèles zig-zag où la cinématique satisfait a priori les conditions de contact est indépendante du nombre de couches.

### II.6.1. Les modèles couches discrètes

Les modèles couches discrètes adoptent une approximation plus fine des champs suivant l'épaisseur du multicouche que les modèles de plaque d'ordre supérieur ou Zig-zag puisqu'ils proposent une cinématique par couche plutôt qu'une cinématique globale. En fait avec les modèles couches discrètes le multicouche est représenté par un ensemble de plaques (structures 2D) couplées par des efforts d'interface les conditions de continuité aux interfaces sont assurées. Le nombre de paramètres inconnus dépend du nombre de couche de la plaque composite. Dans les travaux de Srinivas [77] et Reddy [49] on postule une cinématique du premier ordre ou d'ordre supérieur par couche les équations fondamentales par couche sont obtenues en utilisant le principe des travaux virtuels les conditions aux limites sont également données couche par couche.

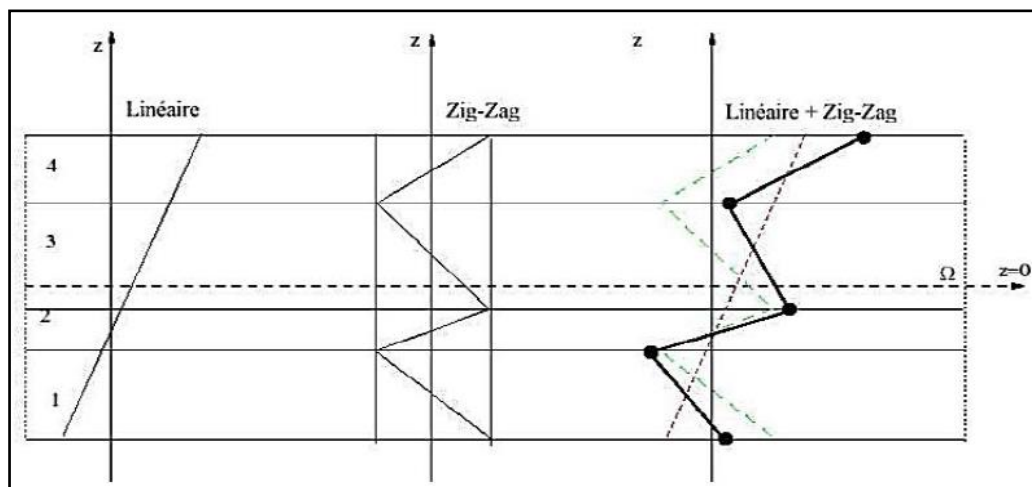
D'une manière alternative les travaux de Ren [78] et Yin [79] utilisent une approximation des champs de contraintes par couche ou une mixte contrainte cinématique ainsi Ren [78] utilise un champ de contrainte dont la composante de cisaillement transversal est quadratique par couche et les déplacements sont considérés cubiques par couche et continus aux interfaces. Dans la référence [80], le champ de contrainte est construit sous la forme d'un produit de fonctions à variables séparées par couche à partir de l'équilibre des forces et moments les contraintes planes sont supposées constantes suivant l'épaisseur dans Yin [79],

les fonctions de contraintes sont utilisées par couche pour déterminer les contraintes inters laminaires elles sont approximées de façons polynomiales dans l'épaisseur.

### II.6.2. Les modèles zig-zag

Afin de réduire le nombre de paramètres inconnus, Di Sciuva [74] est le premier à proposer le modèle zig-zag du premier ordre. Dans ce modèle, les déplacements membranaires sont les résultats de la superposition du champ de déplacement global d'une théorie du premier ordre et d'une fonction zig-zag. La cinématique des modèles zig-zag satisfait a priori les conditions de contact et elle est indépendante du nombre de couches.

Toutefois, la fonction zig-zag donne une contribution des déplacements membranaires qui est continue en  $z$  mais sa dérivée première est discontinue à l'interface (voir figure II.7). Les déformations transversales sont donc discontinues et la continuité des contraintes de cisaillement transverse aux interfaces est assurée.



**Figure II.7 :** Champ de déplacement des modèles zig-zag du premier ordre [81].

### II.7. Approche quasi-3D

Pour éviter de recourir à une analyse tridimensionnelle et de l'introduction de l'effet de déformation normale transverse cette particularité devient importante pour définir un état de contraintes correct et évaluer exactement les fréquences propres en analyse vibratoire de façon générale toutes les contributions et les recherches récentes sur cette approche basées sur la jonction d'une fonction non linéaire de la coordonnée de l'épaisseur  $z$  de telle sorte que le



déplacement transversal sera exprimé et dépend d'une variation non linéaire à travers L'épaisseur de la plaque.

En générale les théories d'ordre élevé de déformation en cisaillement transversal et la déformation normale suivant l'épaisseur considèrent l'effet de l'étirement de l'épaisseur (stretching effect) peuvent être numériquement appliquées en utilisant la formulation unifiée initialement proposée par Carrera [82] et récemment évoluée par Demasi [83].

De nombreux travaux basant sur la théorie d'ordre élevé avec effet d'étirement ont été proposés dans les littératures pour analyser le comportement statiques et dynamiques des structures en matériaux composites multicouches et en FGM (plaques, poutres, coques, ...etc.), Talha [84], Carrera [85], Reddy [86], Mantari et Guedes Soares [87], Draiche et al. [88], Benbakhti et al. [89] et Benahmed et al. [90]. Ces théories sont assez complexes en termes de formulations, néanmoins elles sont très intéressantes du point de vue précision.

## II.8. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons donné un aperçu sur les différents modèles analytiques de calcul des plaques épaisses en FGM, ainsi que les travaux effectués par plusieurs chercheurs dans ce domaine, à savoir la théorie classique des plaques (CPT), la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT), la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT), la théorie des plaques raffinée (RPT) et la théorie quasi-3D de déformation en cisaillement d'ordre élevé avec effet d'étirement de l'épaisseur.

A travers notre lecture de la littérature en matière de théories d'ordre élevé, il apparaît que celles-ci sont certes intéressantes du point de vue précision, néanmoins devient assez complexes en termes de formulations. Le chapitre qui se suivra portera sur la présentation d'étude du comportement statique des plaques en matériaux composites avancés dans les propriétés matérielles varient selon une fonction exponentielles à travers l'épaisseur de la plaque (E-FGM).

**Chapitre III**  
**Modèle Mathématique &**  
**Développements**

## II.1. Introduction :

Dans ce chapitre on va faire une modélisation analytique du comportement statique et des plaques composites orthotrope et isotrope utilisant la théorie raffinée (RPT), la théorie de déformation en cisaillement de premier ordre (FSDT) et la théorie classique des plaques (CPT). À l'aide de principe d'Hamilton et la solution de Navier on a pu arriver aux équations d'équilibre de la poutre en FGM.

## II.2. RPT pour plaques orthotropes :

Hypothèses de base de RPT :

Les hypothèses du RPT sont les suivantes :

- Les déplacements sont faibles par rapport à l'épaisseur de la plaque  $h$  et, par conséquent, les déformations impliquées sont infinitésimales.
- Le déplacement transversal  $w$  comprend deux composantes de flexion  $w_b$  et de cisaillement  $w_s$ . Ces deux composants sont uniquement fonction des coordonnées  $x$ ,  $y$  et du temps  $t$ .

$$w(x, y, t) = w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t) \quad (\text{III.1})$$

- La contrainte transversale normale  $\sigma_z$  est négligeable par rapport aux contraintes dans le plan  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$ .
- Les déplacements  $u$  dans la direction  $x$  et  $v$  dans la direction  $y$  consistent en composants d'extension, de flexion et de cisaillement.

$$u = u_0 + u_b + u_s; v = v_0 + v_b + v_s \quad (\text{III.2})$$

- Les composantes de flexion  $u_b$  et  $v_b$  sont supposées être similaires aux déplacements donnés par la théorie classique des plaques. Par conséquent, l'expression de  $u_b$  et  $v_b$  peut être donnée comme :

$$u_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial x}; v_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial y} \quad (\text{III.3})$$

Les composants de cisaillement  $u_s$  et  $v_s$  donnent, en conjonction avec  $w_s$ , les variations paraboliques des déformations de cisaillement  $\sigma_{xz}$ ,  $\sigma_{yz}$  et donc des contraintes de cisaillement  $\sigma_{xz}$ ,  $\sigma_{yz}$  à travers l'épaisseur de la plaque,  $h$ , de sorte que les contraintes de cisaillement  $\sigma_{xz}$ ,  $\sigma_{yz}$  sont nulles à les faces supérieure et inférieure de la plaque. Par conséquent, l'expression pour nous et  $v_s$  peut commencer.

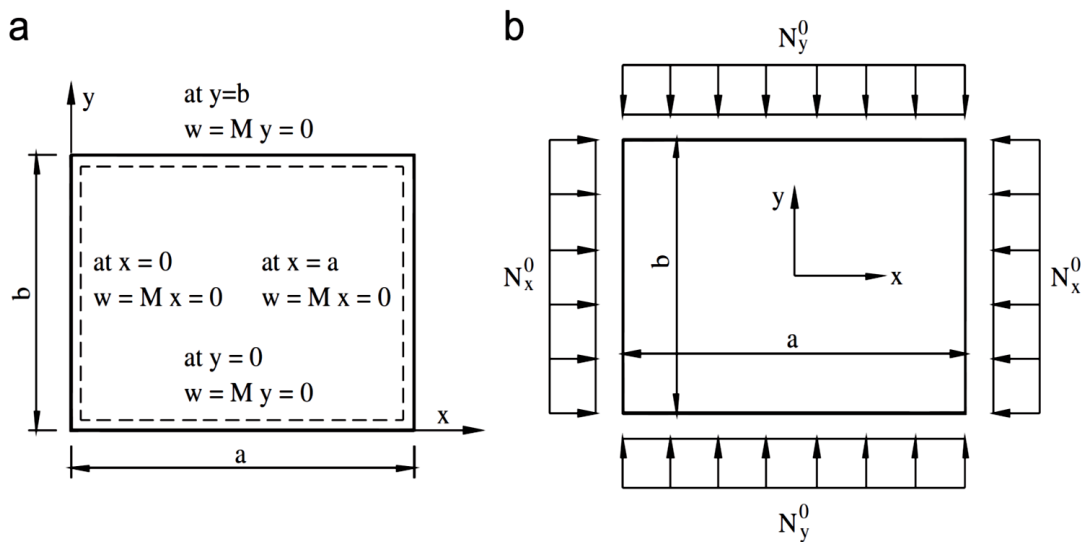
$$u_s = \left[ \frac{1}{4}z - \frac{5}{3}z \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right] \frac{\partial w_s}{\partial x}, v_s = \left[ \frac{1}{4}z - \frac{5}{3}z \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right] \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (\text{III.4})$$

**II.3. Cinématique**

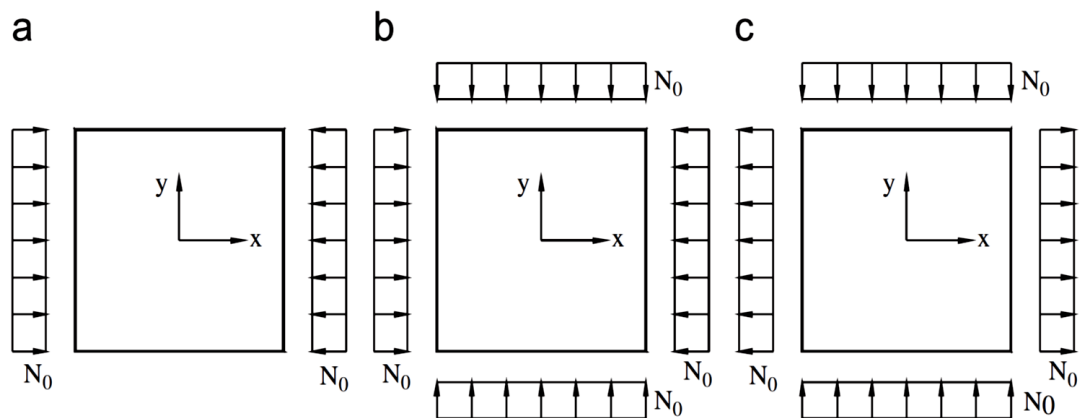
Sur la base des hypothèses formulées dans la section précédente, le champ de déplacement peut être obtenu en utilisant les équations. (III.1) - (III.4) comme :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} + z \left[ \frac{1}{4} - \frac{5}{3} \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right] \frac{\partial w_s}{\partial x} \\
 v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} + z \left[ \frac{1}{4} - \frac{5}{3} \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right] \frac{\partial w_s}{\partial y} \\
 w(x, y, z, t) &= w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t)
 \end{aligned}
 \tag{III.5}$$

Ce champ de déplacement explique une traction nulle sur les conditions aux limites sur les faces supérieure et inférieure de la plaque, et la variation quadratique des déformations de cisaillement transversales (et donc des contraintes) à travers l'épaisseur. Ainsi, il n'est pas nécessaire d'utiliser des facteurs de correction de cisaillement.



**Figure III.1 :** Plaque rectangulaire : (a) condition aux limites et (b) forces dans le plan.



**Figure III.2** : Les conditions de chargement de la plaque carrée pour (a) la compression uni-axiale, (b) la compression biaxiale et (c) la tension dans la direction x et la compression dans la direction y.

Le champ de déformation obtenu en utilisant les relations déformation-déplacement peut être donné comme :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + zk_x^b + fk_x^{-s} \\
 \varepsilon_y &= \varepsilon_y^0 + zk_y^b + fk_y^{-s} \\
 \varepsilon_z &= 0 \\
 \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^0 + zk_{xy}^b + fk_{xy}^s \\
 \gamma_{yz} &= \left[ \frac{5}{4} - 5 \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right] \frac{\partial w_s}{\partial y} \\
 \gamma_{xz} &= \left[ \frac{5}{4} - 5 \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right] \frac{\partial w_s}{\partial x}
 \end{aligned} \tag{III.6}$$

Où :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x}, k_x^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}, k_x^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\
 \varepsilon_y^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial y}, k_y^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}, k_y^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\
 \gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}, k_{xy}^b = -2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y}, \\
 k_{xy}^s &= -2 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y}, f = -\frac{1}{4}z + \frac{5}{3}z \left( \frac{z}{h} \right)^2
 \end{aligned} \tag{III.7}$$

#### II.4. Constitutive équations :

Les équations constitutives d'une plaque orthotrope peuvent s'écrire

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \end{Bmatrix} \tag{III.8}$$

Où  $Q_{ij}$  sont les constantes élastiques réduites des contraintes planes dans les axes du matériau de la plaque, et sont définies comme :

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, Q_{22} = \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \\ Q_{66} &= G_{12}, Q_{44} = G_{23}, Q_{55} = G_{31} \end{aligned} \quad (\text{III.9})$$

Dans laquelle  $E_1, E_2$  sont le module de Young,  $G_{12}, G_{23}, G_{31}$  sont le module de cisaillement et  $\nu_{12}, \nu_{21}$  sont les ratios de Poisson. Pour la plaque isotrope, ces propriétés de matériau ci-dessus se réduisent à  $E_1 = E_2 = E, G_{12} = G_{23} = G_{31} = G, \nu_{12} = \nu_{21} = \nu$ . Les indices 1, 2, 3 correspondent respectivement aux directions x, y, z du système de coordonnées cartésiennes.

## II.5. Équation des mouvements

L'énergie de déformation de la plaque peut s'écrire :

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_{xy} \gamma_{xy} + \sigma_{yz} \gamma_{yz} + \sigma_{xz} \gamma_{xz}) \quad (\text{III.10})$$

Substitution des égaliseurs. (III.6) jusqu'au (III.9) dans l'équation (III.10) et en intégrant à travers l'épaisseur de la plaque, l'énergie de déformation de la plaque peut être réécrite comme :

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_A (N_x \varepsilon_x^0 + N_y \varepsilon_y^0 + N_{xy} \gamma_{xy}^0 + M_x^b K_x^b + M_y^b K_y^b + M_{xy}^b K_{xy}^b) dx dy \\ &+ \frac{1}{2} \int_A (Q_{yz} \gamma_{yz} + Q_{xz} \gamma_{xz} + M_x^s K_x^s + M_y^s K_y^s + M_{xy}^s K_{xy}^s) dx dy \end{aligned} \quad (\text{III.11})$$

Où les résultantes des contraintes  $N, M$  et  $Q$  sont définies par :

$$\begin{aligned} (M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) z dz \\ (M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) f dz \\ (Q_{-xz}, Q_{-yz}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xz}, \sigma_{yz}) dz \end{aligned} \quad (\text{III.12})$$

En substituant les équations (III.11) et (III.12) à l'équation (III.10) et en intégrant à travers l'épaisseur de la plaque, les résultantes de contraintes sont liées aux déplacements généralisés ( $u_0, v_0, w_b, w_s$ ) par les relations :

$$\begin{aligned}
(N_x, N_y, N_{xy}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) dz \\
\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial u_0 / \partial x \\ \partial v_0 / \partial y \\ \partial u_0 / \partial y + \partial v_0 / \partial x \end{Bmatrix} \\
\begin{Bmatrix} M_x^b \\ M_y^b \\ M_{xy}^b \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\partial^2 w_b / \partial x^2 \\ -\partial^2 w_b / \partial y^2 \\ -2\partial^2 w_b / \partial x \partial y \end{Bmatrix} \\
\begin{Bmatrix} M_x^s \\ M_y^s \\ M_{xy}^s \end{Bmatrix} &= \frac{1}{84} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\partial^2 w_s / \partial x^2 \\ -\partial^2 w_s / \partial y^2 \\ -2\partial^2 w_s / \partial x \partial y \end{Bmatrix} \\
\begin{Bmatrix} Q_{yz} \\ Q_{xz} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{44} & 0 \\ 0 & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial w_s / \partial y \\ \partial w_s / \partial x \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{III.13}$$

Où  $A_{ij}$  et  $D_{ij}$  sont appelées respectivement rigidité extensionnelle et flexion et sont définies en termes de rigidité  $Q_{ij}$  comme :

$$\begin{aligned}
(A_{ij}, D_{ij}) &= \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} (1, z^2) dz \quad (i, j = 1, 2, 6) \\
A_{ij} &= \frac{5}{6} Q_{ij} h \quad (i, j = 4, 5)
\end{aligned} \tag{III.14}$$

Le travail effectué sur la plaque par les forces appliquées peut s'écrire

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{2} \int_A \left[ N_x^0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x^2} + N_y^0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial y^2} \right. \\
&\quad \left. + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x \partial y} \right] dxdy - \int_A q (w_b + w_s) dxdy
\end{aligned} \tag{III.15}$$

Où  $q$  et  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_{xy}$  sont des forces réparties transverses et dans le plan, respectivement. L'énergie cinétique de la plaque peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} \int_V \rho \ddot{u}_i \ddot{u}_i dV = \frac{1}{2} \int_A I_0 (\ddot{u}_0^2 + \ddot{v}_0^2 + \ddot{w}_b^2 + \ddot{w}_s^2 + 2\ddot{w}_b \ddot{w}_s) dxdy \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_A \left\{ I_2 \left[ \left( \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{I_2}{84} \left[ \left( \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} dxdy
\end{aligned} \tag{III.16}$$

Où  $\rho$  est la masse volumique de la plaque et  $I_i$  ( $i = 0, 2$ ) sont les inerties définies par :

$$(I_0, I_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z^2) \rho dz \tag{III.17}$$

Le principe de Hamilton est utilisé ici pour dériver les équations de mouvement appropriées au champ de déplacement et l'équation constitutive. Le principe peut être énoncé sous forme analytique

$$0 = \int_0^t \delta(U + V - T) dt \quad (\text{III.18})$$

Où  $\delta$  indique une variation par rapport à  $x$  et  $y$ . En remplaçant les équations (III.13) jusqu'à (III.17) dans l'équation (III.18) et en intégrant l'équation par parties, en collectant les coefficients de  $\delta u_0$ ,  $\delta v_0$ ,  $\delta w_b$  et  $\delta w_s$ , les équations de mouvement pour la plaque orthotrope sont obtenues comme suit :

$$\begin{aligned} \delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= I_0 \ddot{u}_0 \\ \delta v_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= I_0 \ddot{v}_0 \\ \delta w_b : \left[ \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} \right] + q \\ &\left[ N_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] = I_0 \ddot{w} - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_b \\ \delta w_s : \left[ \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} \right] + q \\ &+ \left[ N_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] = I_0 \ddot{w} - \frac{I_2}{84} \nabla^2 \ddot{w}_s \end{aligned} \quad (\text{III.19})$$

Avec :

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (\text{III.20})$$

Les conditions aux limites d'une plaque (de longueur  $a$  et de largeur  $b$ ) sont données comme suit :

- **Limites encadrées- encadrées :**

Sur les bords  $x = 0$  et  $a$

$$w_b = w_s = \frac{\partial w_b}{\partial x} = \frac{\partial w_s}{\partial x} = 0 \quad (\text{III.21})$$

Sur les bords  $y = 0$  et  $b$

$$w_b = w_s = \frac{\partial w_b}{\partial y} = \frac{\partial w_s}{\partial y} = 0 \quad (\text{III.22})$$

- **Limites simplement appuyer :**



Sur les bords  $x = 0$  et  $a$

$$w_b = w_s = -\left(D_{11} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}\right) = -\frac{1}{84} \left(D_{11} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}\right) = 0 \quad (\text{III.23})$$

Sur les bords  $y = 0$  et  $b$

$$w_b = w_s = -\left(D_{12} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}\right) = -\frac{1}{84} \left(D_{12} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}\right) = 0 \quad (\text{III.24})$$

- **Limites libres-libres :**

Sur les bords  $x = 0$  et  $a$

$$\begin{aligned} & -\left(D_{11} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}\right) = -\frac{1}{84} \left(D_{11} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}\right) = 0 \\ & -\left[D_{11} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} + (D_{12} + 4D_{66}) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial y^2}\right] \quad (\text{III.25}) \\ & = A_{55} \frac{\partial w_s}{\partial x} - \frac{1}{84} \left[D_{11} \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} + (D_{12} + 4D_{66}) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial y^2}\right] = 0 \end{aligned}$$

Sur les bords  $y = 0$  et  $b$

$$\begin{aligned} & -\left(D_{12} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}\right) = -\frac{1}{84} \left(D_{12} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}\right) = 0 \\ & -\left[(D_{12} + 4D_{66}) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^2 \partial y} + D_{22} \frac{\partial^3 w_b}{\partial y^3}\right] \quad (\text{III.26}) \\ & = A_{44} \frac{\partial w_s}{\partial y} - \frac{1}{84} \left[(D_{12} + 4D_{66}) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^2 \partial y} + D_{22} \frac{\partial^3 w_s}{\partial y^3}\right] = 0 \end{aligned}$$

## II.6. Flambement d'une plaque rectangulaire simplement supportée sous des charges de compression :

Lorsqu'une plaque est soumise à des forces de compression dans le plan (**Figure III.2**), et si les forces sont faibles, l'équilibre de la plaque est stable et la plaque reste plate jusqu'à ce qu'une certaine charge soit atteinte. À cette charge, appelée charge de flambage, l'état stable de la plaque est perturbé et la plaque cherche une configuration d'équilibre alternative accompagnée d'un changement dans le comportement de déflexion de la charge. Les charges critiques de flambage d'une plaque rectangulaire orthotrope simplement supportée seront déterminées dans cet article en utilisant la solution Navier. Les équations régissant la plaque en cas de flambement statique sont données par :

$$\begin{aligned}
& D_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} \\
& = -N_0 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{1}{84} \left[ D_{11} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + 2(D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} \right. \\
& \quad \left. + D_{22} \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} \right] - \left[ A_{44} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + A_{55} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \right] \\
& = -N_0 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)
\end{aligned} \tag{III.27}$$

La méthode Navier n'est appliquée que pour des conditions aux limites simplement prises en charge sur les quatre bords de la plaque rectangulaire, comme le montre la figure 1a. Les conditions aux limites simplement prises en charge sur les quatre bords de la plaque rectangulaire peuvent être exprimées comme suit :

$$w(x, 0) = w(x, b) = w(0, y) = w(a, y) = 0 \tag{III.28}$$

$$M_x(0, y) = M_x(a, y) = M_y(x, 0) = M_y(x, b) = 0 \tag{III.29}$$

Les fonctions de déplacement  $w_b$  et  $w_s$  suivantes sont choisies pour satisfaire automatiquement les conditions aux limites dans les équations (III.21) jusqu'au (III.26)

$$\begin{aligned}
w_b &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{bmn} \sin \alpha x \sin \beta y \\
w_s &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{smn} \sin \alpha x \sin \beta y
\end{aligned} \tag{III.30}$$

Où  $\alpha = m\pi/a$ ,  $\beta = n\pi/b$  et  $W_{bmn}$ ,  $W_{smn}$  sont des coefficients. En remplaçant l'équation (III.30) par l'équation (III.27), le système suivant est obtenu :

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{bmn} \\ w_{smn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{III.31}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
k_{11} &= [D_{11}\alpha^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2\beta^2 + D_{22}\beta^4] - N_0(\alpha^2 + \gamma\beta^2) \\
k_{12} &= -N_0(\alpha^2 + \gamma\beta^2) \\
k_{22} &= \frac{1}{84} [D_{11}\alpha^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2\beta^2 \\
& \quad + D_{22}\beta^4] A_{55}\alpha^2 + A_{44}\beta^2 - N_0(\alpha^2 + \gamma\beta^2)
\end{aligned} \tag{III.32}$$

Pour une solution non triviale, le déterminant de la matrice des coefficients dans l'équation (III.31) doit être nul, ce qui donne l'expression suivante pour la charge de flambement :

$$N_0 = \frac{D}{\alpha^2 + \gamma\beta^2} \frac{(D/84 + A_{55}\alpha^2 + A_{44}\beta^2)}{D + (D/84 + A_{55}\alpha^2 + A_{44}\beta^2)} \quad (\text{III.33})$$

Avec :

$$D = D_{11}\alpha^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2\beta^2 + D_{22}\beta^4 \quad (\text{III.34})$$

De toute évidence, lorsque l'effet de la déformation de cisaillement transverse est négligé, l'équation (III.33) donne le résultat obtenu en utilisant la théorie classique des plaques. Elle indique que la déformation de cisaillement transverse a pour effet de réduire la charge de flambement. Pour chaque choix de  $m$  et  $n$ , il existe une valeur unique correspondante de  $N_0$ . La charge critique de flambement est la plus petite valeur de  $N_0(m, n)$ .

### II.7. Conclusion :

Dans ce chapitre une approche analytique a été développée pour l'étude de la charge critique de flambement des plaques orthotrope et isotrope simplement appuyée ou nous avons utilisé des formulations ci-dessus pour étudier l'effet de certains paramètres sur l'analyse de flambement des plaques à l'aide de la théorie des plaques à deux variables raffinées

# **Chapitre IV**

## **Résultats & discussions**

### IV.1. Introduction :

Dans ce chapitre les solutions analytiques obtenues dans le chapitre précédent pour le l'analyse et prédire la charge critique de flambement pour les plaques isotropes et orthotropes ont été obtenues par la solution de Navier. Les résultats numériques obtenus par les nouveaux modèles de cisaillement sont présentés, et comparés à ceux disponibles dans la littérature pour voir l'influence de la variation matérielle sur la charge critique de flambement.

### IV.2. Résultats numériques et discussion :

À des fins de vérification, une plaque rectangulaire simplement supportée soumise aux conditions de chargement, comme le montre la figure IV.2, est considérée pour illustrer la précision de la présente théorie dans la prédiction du comportement de flambage de la plaque. Afin d'étudier les effets du rapport côté / épaisseur et du rapport module, le premier exemple est appliqué pour les plaques carrées isotropes et orthotropes. De nombreux facteurs de correction de cisaillement ( $k = 2/3$ ,  $k = 5/6$  et  $k = 1$ ) sont également utilisés pour le FSDT en comparaison avec la théorie actuelle. Les constantes d'ingénierie suivantes sont utilisées [12]

$$E_1/E_2 \text{ Variable}$$

$$G_{12}/E_2 = G_{13}/E_2 = 0.5, \quad G_{23}/E_2 = 0.2, \quad \nu_{12} = 0.25$$

Pour plus de commodité, la charge de flambement non dimensionnelle suivante est utilisée :

$$\bar{N} = \frac{N_{cr} a^2}{E_2 h^3}$$

Où  $a$  est la longueur de la plaque carrée et  $h$  est l'épaisseur de la plaque.

Les résultats de la charge de flambement critique d'une plaque carrée simplement supportée sont présentés dans les Tableaux (IV.1-IV.3) et les Fig. (IV.3–IV.6).

Dans le cas de la plaque isotrope (Fig. IV.3a), les résultats obtenus par RPT et FSDT sont en excellent accord même si la plaque est très épaisse. Dans le cas d'une plaque carrée ( $a = b = 5h$ ), la différence maximale de RPT et FSDT avec le facteur de correction de cisaillement 5/6 est de 0,24%, comme indiqué dans le tableau 3.

Lorsque la plaque orthotrope est utilisée, la différence entre RPT et FSDT augmentera par rapport à l'augmentation du rapport côté / épaisseur (Fig. IV.3) et du rapport de module (Fig. IV.4– IV.6).

Comme présenté dans le tableau (IV.1), les différences entre RPT et FSDT ( $k = 5/6$ ) et RPT et FSDT ( $k = 1$ ) sont respectivement de 16,14% et 2,24% pour le même cas de plaque carrée ( $a = b = 5h$  et  $E1 / E2 = 40$ ). Les tableaux 1 à 3 montrent que la différence de charge critique de flambement entre RPT et FSDT dépend non seulement des rapports côté / épaisseur et module, mais aussi des conditions de charge dans le plan (Fig. IV.2). En cas de plaque carrée ( $a = b = 10h$ ), la différence entre RPT et FSDT ( $k = 5/6$ ) est de 9,62% pour la compression uni-axiale (Fig. IV.4 et Tableau IV.1), 9,36% pour la compression biaxiale (Fig. IV.5 et Tableau IV.2), et 2,92% pour la tension dans la direction  $x$  et la compression dans la direction  $y$  (Fig. IV.6 et Tableau IV.3).

Tableau IV.1 : Comparaison de la charge de flambement critique non dimensionnelle de plaques carrées soumises à une compression uni-axiale

a/h	Théories	Isotrope $\nu=0.3$		Orthotrope	
5	RPT	2.9512	6.3478	9.1039	10.5785
	FSDT ( $k = 2/3$ )	2.8200	5.5679	7.1122	7.7411
	FSDT ( $k = 5/6$ )	2.9498	6.1804	8.2199	9.1085
	FSDT ( $k = 1$ )	3.0432	6.6715	9.1841	10.3463
10	ORPT	3.4224	9.3732	16.7719	22.2581
	FSDT ( $k = 2/3$ )	3.3772	8.8988	14.7011	18.3575
	FSDT ( $k = 5/6$ )	3.4222	9.2733	15.8736	20.3044
	FSDT ( $k = 1$ )	3.4530	9.5415	16.7699	21.8602
20	RPT	3.5650	10.6534	21.3479	31.0685
	FSDT ( $k = 2/3$ )	3.5526	10.4926	20.4034	28.8500
	FSDT ( $k = 5/6$ )	3.5650	10.6199	20.9528	30.0139
	FSDT ( $k = 1$ )	3.5733	10.7066	21.3363	30.8451
50	RPT	3.6071	11.0780	23.1225	34.9717
	FSDT ( $k = 2/3$ )	3.6051	11.0497	22.9366	34.4886
	FSDT ( $k = 5/6$ )	3.6071	11.0721	23.0461	34.7487
	FSDT ( $k = 1$ )	3.6085	11.0871	23.1197	34.9244
100	RPT	3.6132	11.1415	23.4007	35.6120
	FSDT ( $k = 2/3$ )	3.6127	11.1343	23.3527	35.4852
	FSDT ( $k = 5/6$ )	3.6132	11.1400	23.3810	35.5538
	FSDT ( $k = 1$ )	3.6135	11.1438	23.3999	35.5996
	CPT	3.6152	11.1628	23.4949	35.8307

Tableau IV.2 : Comparaison de la charge critique de flambement non dimensionnelle de plaques carrées soumises à une charge de compression biaxiale

a/h	Théories	Isotrope $\nu=0.3$	Orthotrope		
			$E_1/E_2=10$	$E_1/E_2=25$	$E_1/E_2=40$
5	RPT	1.4756	2.8549 <sup>a</sup>	3.3309 <sup>a</sup>	3.4800 <sup>a</sup>
	FSDT (k = 2/3)	1.4100	2.5042 <sup>a</sup>	2.7332 <sup>a</sup>	2.8303 <sup>a</sup>
	FSDT (k = 5/6)	1.4749	2.8319 <sup>a</sup>	3.1422 <sup>a</sup>	3.2822 <sup>a</sup>
	FSDT (k = 1)	1.5216	3.1027 <sup>a</sup>	3.4933 <sup>a</sup>	3.6793 <sup>a</sup>
10	RPT	1.7112	4.6718 <sup>a</sup>	6.0646 <sup>a</sup>	7.2536 <sup>a</sup>
	FSDT (k = 2/3)	1.6886	4.4259	5.4351 <sup>a</sup>	6.0797 <sup>a</sup>
	FSDT (k = 5/6)	1.7111	4.6367	5.8370 <sup>a</sup>	6.6325 <sup>a</sup>
	FSDT (k = 1)	1.7265	4.7708	6.1425 <sup>a</sup>	7.0690 <sup>a</sup>
20	RPT	1.7825	5.3267	7.6643 <sup>a</sup>	9.6614 <sup>a</sup>
	FSDT (k = 2/3)	1.7763	5.2463	7.3701 <sup>a</sup>	8.9895 <sup>a</sup>
	FSDT (k = 5/6)	1.7825	5.3100	7.5546 <sup>a</sup>	9.3049 <sup>a</sup>
	FSDT (k = 1)	1.7866	5.3533	7.6834 <sup>a</sup>	9.5297 <sup>a</sup>
50	RPT	1.8036	5.5390	8.2784 <sup>a</sup>	10.6576 <sup>a</sup>
	FSDT (k = 2/3)	1.8025	5.5249	8.2199 <sup>a</sup>	10.5111 <sup>a</sup>
	FSDT (k = 5/6)	1.8036	5.5361	8.2566 <sup>a</sup>	10.5810 <sup>a</sup>
	FSDT (k = 1)	1.8042	5.5436	8.2812 <sup>a</sup>	10.6282 <sup>a</sup>
100	RPT	1.8066	5.5707	8.3744 <sup>a</sup>	10.8172 <sup>a</sup>
	FSDT (k = 2/3)	1.8063	5.5672	8.3593 <sup>a</sup>	10.7788 <sup>a</sup>
	FSDT (k = 5/6)	1.8066	5.5700	8.3687 <sup>a</sup>	10.7972 <sup>a</sup>
	FSDT (k = 1)	1.8068	5.5719	8.3751 <sup>a</sup>	10.8095 <sup>a</sup>
	CPT	1.8076	5.5814	8.4069	10.8715 <sup>a</sup>

<sup>a</sup> Le mode pour la plaque est (m, n) = (1,2).

Tableau IV.3 : Comparaison de la charge de flambement critique non dimensionnelle de plaques carrées soumises à une tension dans la direction x et à une compression dans la direction y

a/h	Théories	Isotrope $\nu=0.3$	Orthotrope		
			$E_1/E_2=10$	$E_1/E_2=25$	$E_1/E_2=40$
5	RPT	4.8274 <sup>a</sup>	4.0258 <sup>b</sup>	4.1044 <sup>c</sup>	4.1525 <sup>c</sup>
	FSDT (k = 2/3)	4.4175 <sup>a</sup>	3.2849 <sup>d</sup>	3.3001 <sup>e</sup>	3.3053 <sup>e</sup>
	FSDT (k = 5/6)	4.8158 <sup>a</sup>	3.9241 <sup>c</sup>	3.9794 <sup>c</sup>	4.0075 <sup>d</sup>
	FSDT (k = 1)	5.1237 <sup>a</sup>	4.4488 <sup>b</sup>	4.5691 <sup>c</sup>	4.6073 <sup>c</sup>
10	RPT	6.6024 <sup>a</sup>	7.7863 <sup>a</sup>	8.5471 <sup>b</sup>	9.1638 <sup>b</sup>
	FSDT (k = 2/3)	6.4032 <sup>a</sup>	7.2656 <sup>a</sup>	7.7820 <sup>b</sup>	8.1208 <sup>b</sup>
	FSDT (k = 5/6)	6.6010 <sup>a</sup>	7.7748 <sup>a</sup>	8.4774 <sup>b</sup>	8.9039 <sup>b</sup>
	FSDT (k = 1)	6.7398 <sup>a</sup>	8.0651 <sup>a</sup>	9.0153 <sup>b</sup>	9.5197 <sup>b</sup>
20	RPT	7.2754 <sup>a</sup>	9.2811 <sup>a</sup>	11.6347 <sup>b</sup>	12.8031 <sup>b</sup>
	FSDT (k = 2/3)	7.2139 <sup>a</sup>	9.1310 <sup>a</sup>	11.2544 <sup>b</sup>	12.1990 <sup>b</sup>
	FSDT (k = 5/6)	7.2753 <sup>a</sup>	9.2782 <sup>a</sup>	11.6015 <sup>b</sup>	12.6339 <sup>b</sup>
	FSDT (k = 1)	7.3168 <sup>a</sup>	9.3790 <sup>a</sup>	11.8453 <sup>b</sup>	12.9428 <sup>b</sup>
50	RPT	7.4895 <sup>a</sup>	9.8101 <sup>a</sup>	12.9531 <sup>b</sup>	14.4177 <sup>b</sup>
	FSDT (k = 2/3)	7.4790 <sup>a</sup>	9.7830 <sup>a</sup>	12.8751 <sup>b</sup>	14.2839 <sup>b</sup>
	FSDT (k = 5/6)	7.4895 <sup>a</sup>	9.8097 <sup>a</sup>	12.9463 <sup>b</sup>	14.3789 <sup>b</sup>
	FSDT (k = 1)	7.4965 <sup>a</sup>	9.8275 <sup>a</sup>	12.9942 <sup>b</sup>	14.4430 <sup>b</sup>
100	RPT	7.5211 <sup>a</sup>	9.8907 <sup>a</sup>	13.1666 <sup>b</sup>	14.6827 <sup>b</sup>
	FSDT (k = /3)	7.5185 <sup>a</sup>	9.8838 <sup>a</sup>	13.1463 <sup>b</sup>	14.6474 <sup>b</sup>
	FSDT (k = 5/6)	7.5211 <sup>a</sup>	9.8906 <sup>a</sup>	13.1648 <sup>b</sup>	14.6724 <sup>b</sup>
	FSDT (k = 1)	7.5229 <sup>a</sup>	9.8951 <sup>a</sup>	13.1772 <sup>b</sup>	14.6891 <sup>b</sup>
	CPT	7.5317 <sup>a</sup>	9.9179 <sup>a</sup>	13.2393 <sup>b</sup>	14.7732 <sup>b</sup>

<sup>a</sup> Le mode pour la plaque est (m, n) = (1,2).

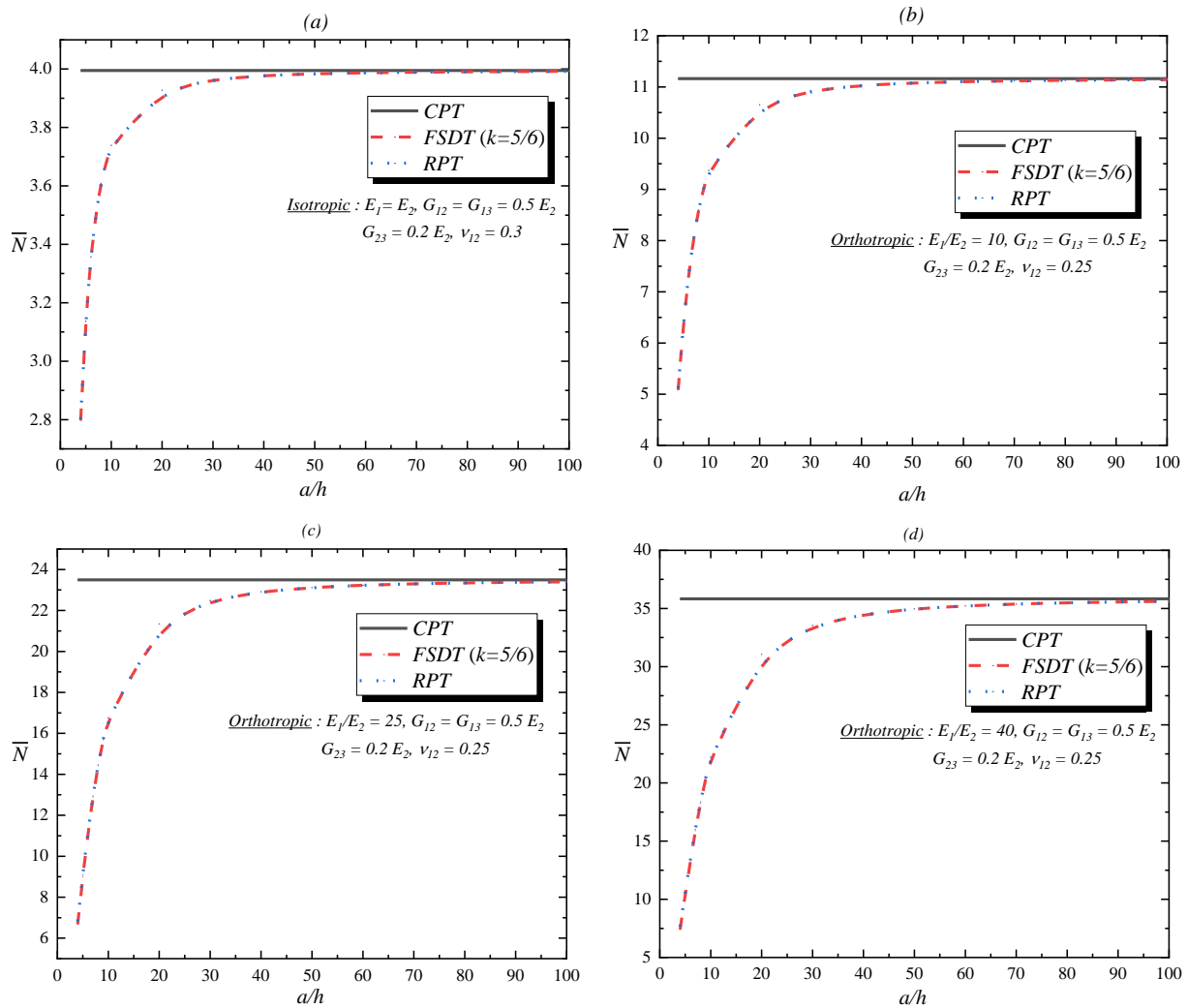
<sup>b</sup> Le mode pour la plaque est (m, n) = (1,3).

<sup>c</sup> Le mode pour la plaque est (m, n) = (1,4).

<sup>d</sup> Le mode pour la plaque est (m, n) = (1,5).

<sup>e</sup> Le mode pour la plaque est (m, n) = (1,6).





**Fig. IV.3.** L'effet des rapports côté / épaisseur et module sur la charge critique de flambement d'une plaque carrée soumise à une compression uni-axiale : (a) isotrope, (b)  $E_1/E_2 = 10$ , (c)  $E_1/E_2 = 25$  et (d)  $E_1/E_2 = 40$ .

D'après la figure IV.3 la charge critique de flambement augmente avec l'augmentation du rapport  $a/h$  en passant d'une plaque épaisse à une plaque mince. Le rapport  $a/h$  n'influe pas sur la théorie classique c'est pour ça la courbe de cette dernière reste plane.

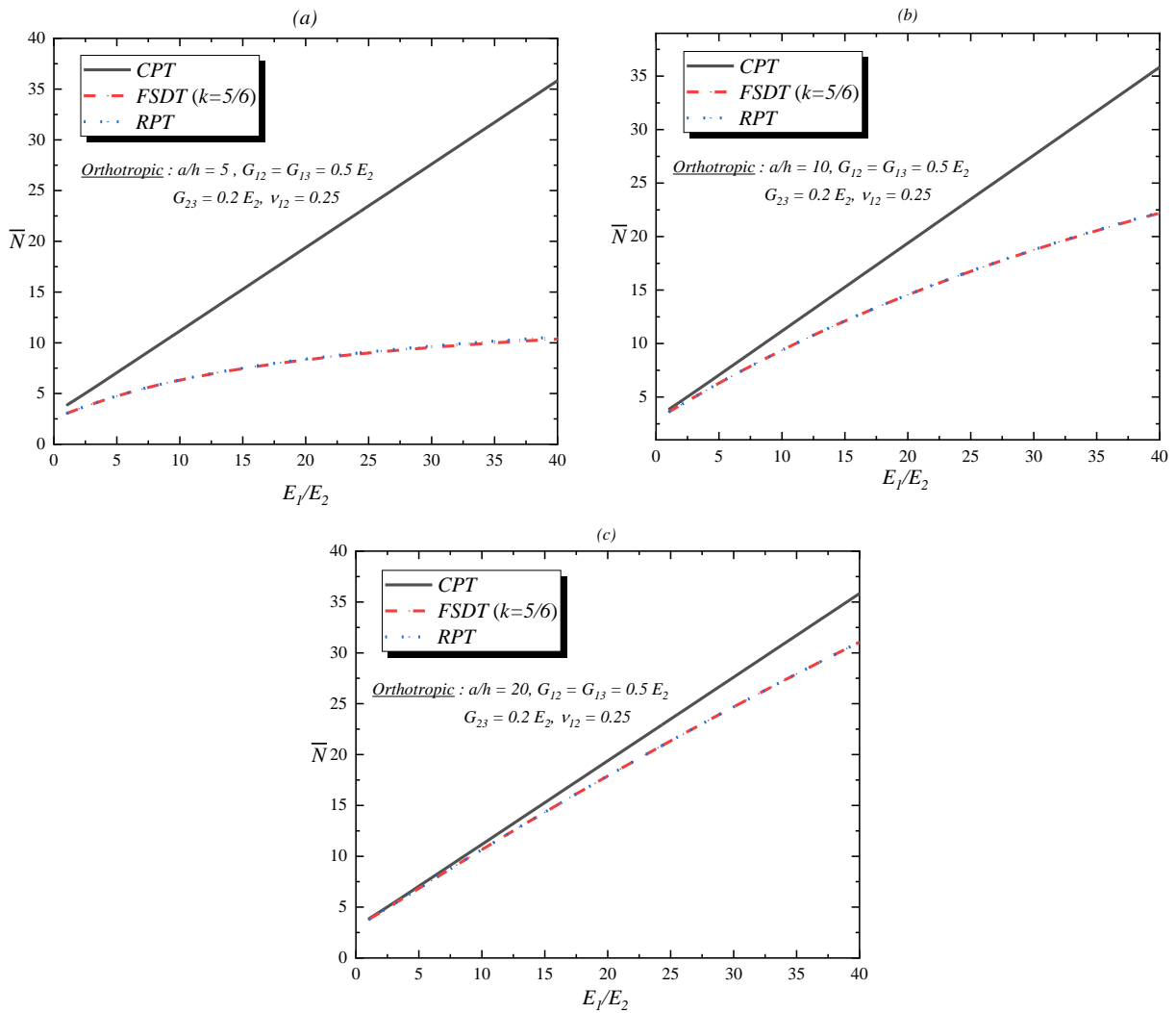


Fig. IV.4. L'effet du rapport de module sur la charge critique de flambement d'une plaque carrée soumise à une compression uni-axiale : (a)  $a = 10 h$  et (b)  $a = 20 h$ .

La figure IV.4 représente la variation de la charge critique de flambement en fonction du rapport  $E_1/E_2$ , on peut remarquer que la charge critique de flambement pour une plaque carrée soumise à une compression uni-axiale augmente avec l'augmentation du rapport de module.

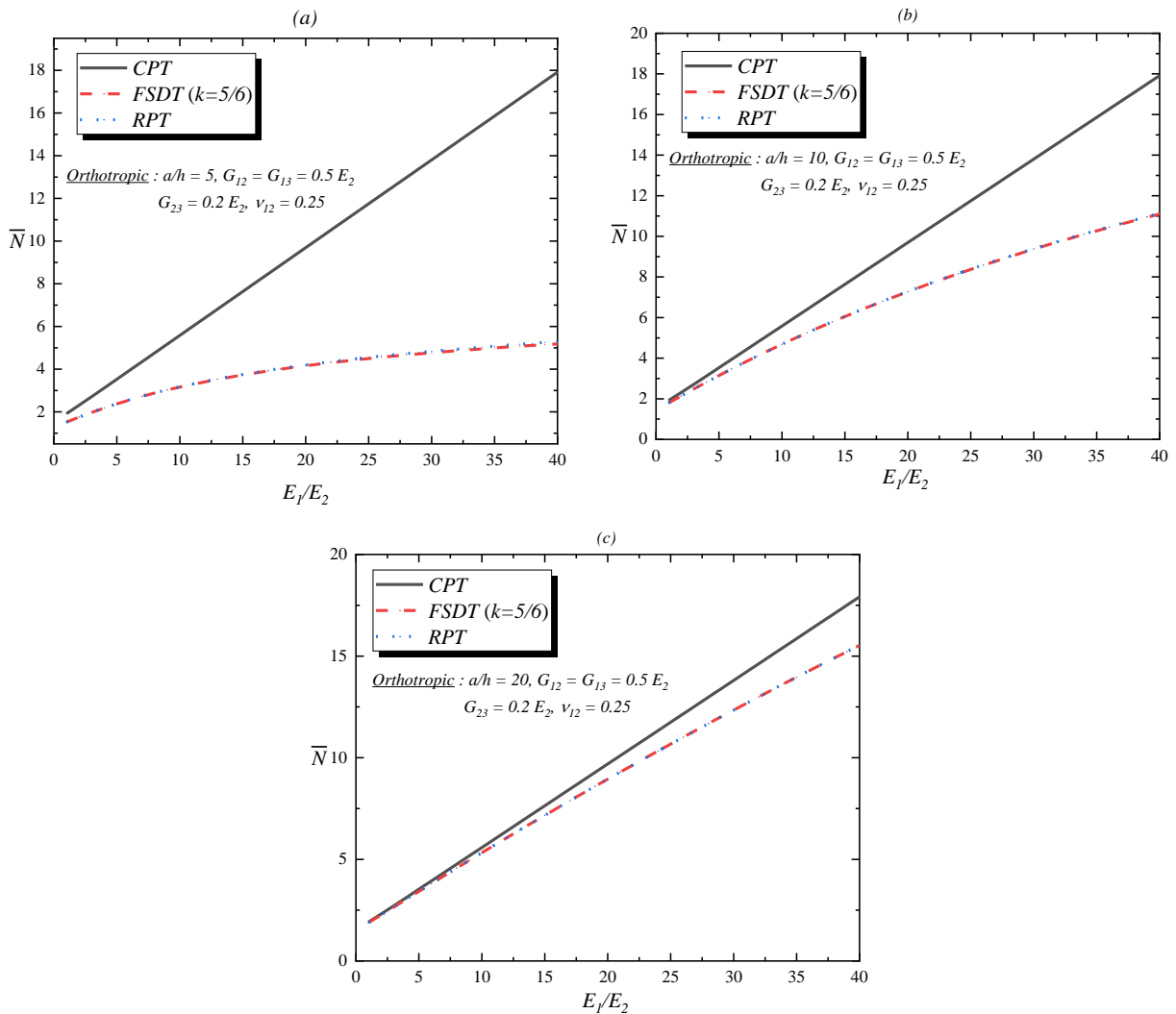


Fig. IV.5. L'effet du rapport de module sur la charge critique de flambement d'une plaque carrée soumise à une compression biaxiale : (a)  $a = 10 h$  et (b)  $a = 20 h$ .

La comparaison suivante est effectuée pour l'orthotrope plaques rectangulaires soumises à une compression uni-axiale avec variation du rapport d'aspect et du rapport côté / épaisseur. Une théorie efficace des deux plaques raffinées à deux variables proposées par Shimpi et Patel [11] a été appliquée dans cet article pour le comportement au flambement des plaques isotropes et orthotropes.

La théorie tient compte des effets de cisaillement transverse et de la distribution parabolique des déformations de cisaillement transverse à travers l'épaisseur de la plaque, il n'est donc pas nécessaire d'utiliser des facteurs de correction de cisaillement.

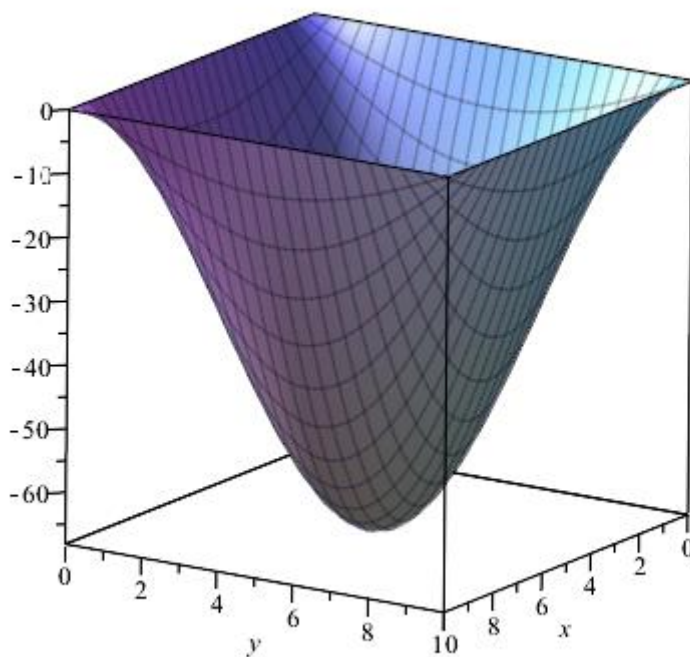


Figure. IV.7. Formes de mode de flambement de la plaque carrée orthotrope (mode (1,1)).

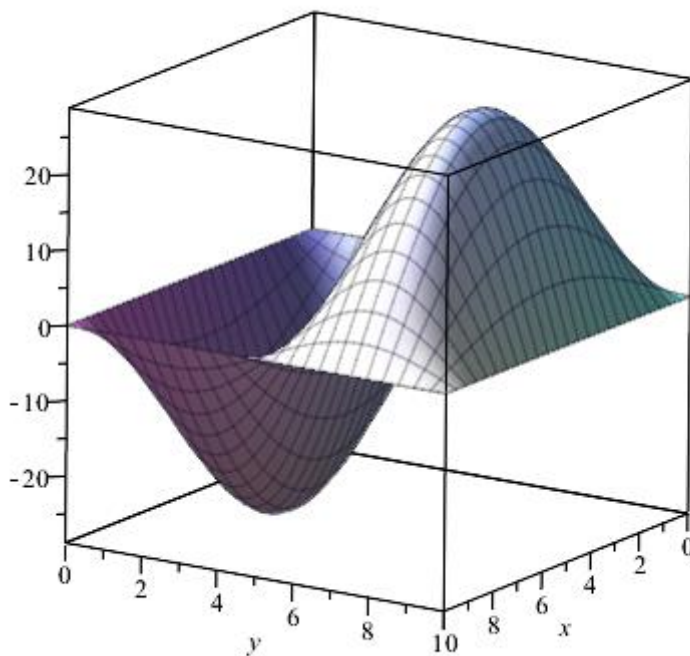


Figure. IV.7. Formes de mode de flambement de la plaque carrée orthotrope (mode (1,2)).

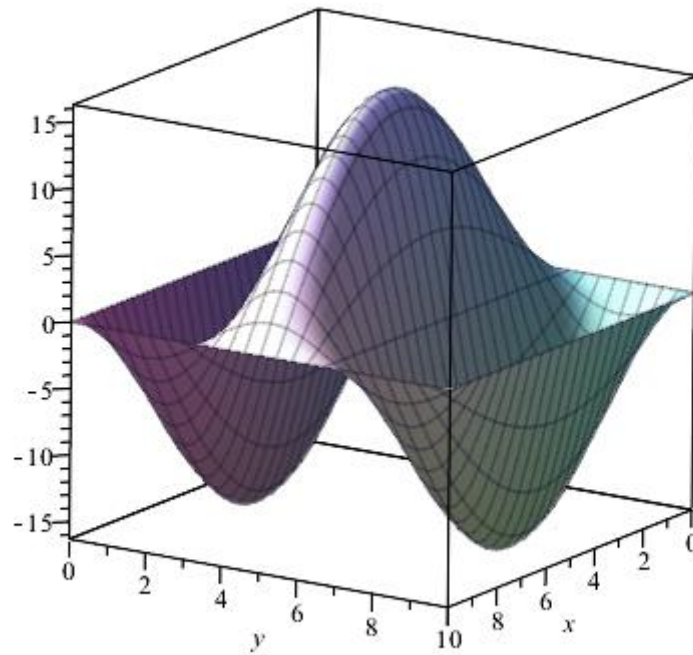


Figure. IV.7. Formes de mode de flambement de la plaque carrée orthotrope (mode (1,3)).

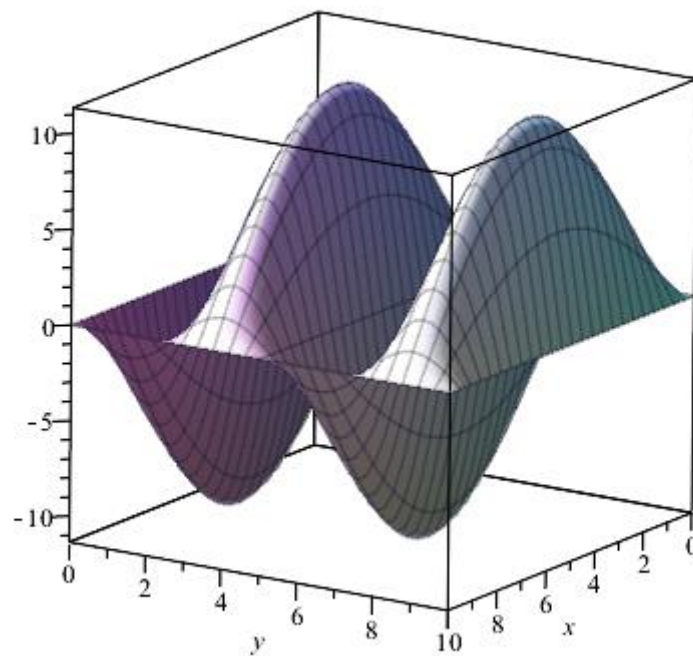


Figure. IV.7. Formes de mode de flambement de la plaque carrée orthotrope (mode (1,4)).

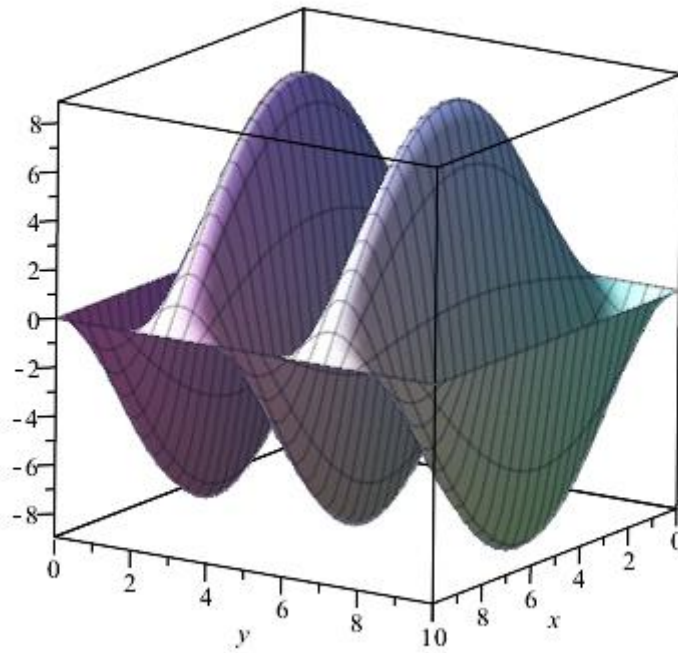


Figure. IV.7. Formes de mode de flambement de la plaque carrée orthotrope (mode (1,5)).

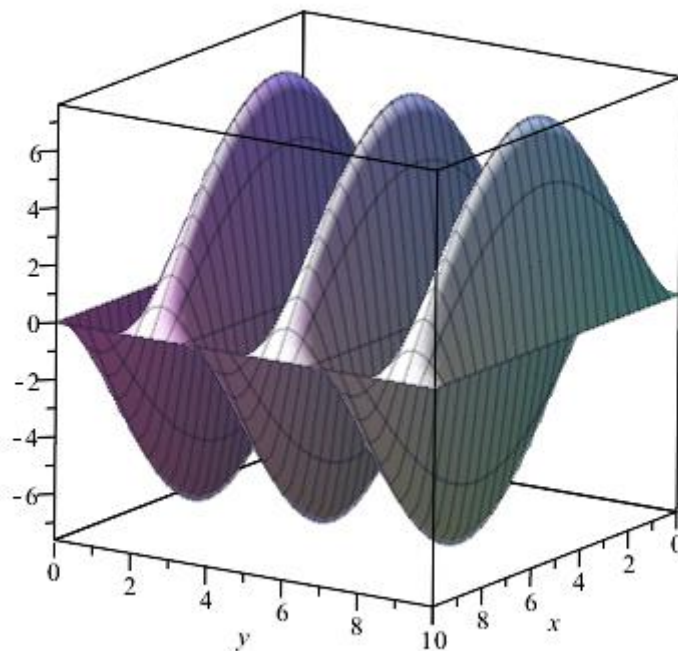


Figure. IV.7. Formes de mode de flambement de la plaque carrée orthotrope (mode (1,6)).

Les équations gouvernantes présentent une forte similitude avec la théorie classique des plaques à bien des égards. On peut conclure que la théorie des deux plaques à raffinement variable peut prédire avec précision les charges critiques de flambement des plaques isotropes

### **IV.3. Conclusion :**

Une théorie efficace des deux plaques raffinées à deux variables proposées par Shimpi et Patel [11] a été appliquée dans cet article pour le comportement au flambage des plaques isotropes et orthotropes.

La théorie tient compte des effets de cisaillement transverse et la distribution parabolique des déformations de cisaillement transverse à travers l'épaisseur de la plaque, il n'est donc pas nécessaire d'utiliser des facteurs de correction de cisaillement. On peut conclure que la présente théorie raffinée (RPT) des plaques et peut prédire avec précision les charges critiques de flambement des plaques isotropes et orthotrope.

## **Conclusion générale**



## *Conclusion générale*

Une théorie efficace des plaques raffinées à deux variables proposée par Shimpi et Patel [11] a été appliquée dans cet article pour le comportement de flambement des plaques isotropes et orthotropes. Il n'est donc pas nécessaire d'utiliser des facteurs de correction de cisaillement. Les équations dominantes présentent une forte similitude avec la théorie classique des plaques dans de nombreux aspects. On peut conclure que la théorie des plaques raffinées à deux variables peut prédire avec précision les charges critiques de flambement des plaques isotropes.

## **Références bibliographiques**

## Références bibliographiques

<i>Indices</i>	<i>Références</i>
[1]	Koizumi, M. (1993), "The concept of FGM, ceramic transactions", <i>Funct Grad Mater</i> , <b>34</b> , 3–10.
[2]	Vel, S.S., Batra, R.C. (2004), "Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates", <i>J Sound Vib.</i> , <b>272</b> , 703–730.
[3]	Tauchert, TR. (1991), " Thermally induced flexure, buckling and vibration of plates", <i>ASME Appl Mech Rev</i> , <b>44</b> , 347–60.
[4]	Reddy, JN, Chin, CD. (1998), " Thermomechanical analysis of functionally graded cylinders and plates", <i>J Thermal Stress</i> , <b>21</b> ,593–626.
[5]	Reddy, JN. (2000), "Analysis of functionally graded plates", <i>Int J Numer Methods Eng</i> , <b>47</b> ,663–84.
[6]	Erdogan, F. (1995), " Fracture mechanics of functionally graded materials", <i>Compos Eng</i> , <b>5</b> ,770–3.
[7]	Jin, JH, Batra, RC. (1996), "Some basic fracture mechanics concepts of functionally graded materials", <i>J Mech Phys Solids</i> , <b>44</b> ,1221–35.
[8]	Praveen, GN, Reddy, JN. (1998), " Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic–metal plates", <i>Int J Solids Struct</i> , <b>35</b> (33),4457–76.
[9]	Birman V, Byrd LW. (2007), " Modeling and analysis of functionally graded materials and structures", <i>ASME Appl Mech Rev</i> , <b>60</b> ,195–216.
[10]	Zenkour, AM. (2007), "Benchmark trigonometric and 3-D elasticity solutions for an exponentially graded thick rectangular plate", <i>Appl Math Model</i> , <b>77</b> ,197–214.
[11]	Sladek, J, Sladek, V, Hellmich, CH, Eberhardsteiner, J. (2007), "Analysis of thick functionally graded plates by local integral equation", <i>Commun Numer Meth Eng</i> , <b>23</b> ,733–54.
[12]	Sladek, J, Sladek, V, Solek, P, Wen, PH, Atluri, SN. (2008), " Thermal analysis of Reissner– Mindlin shallow shells with FGM properties by the MLPG", <i>CMES – Comput Model Eng Sci</i> , <b>30</b> ,77–97.
[13]	Bo, Y, Hao-jiang, D, Wei-qiu, C. (2008), "Elasticity solutions for functionally graded plates in cylindrical bending", <i>Appl Math Mech</i> , <b>29</b> (8),999–1004.
[14]	Matsunaga, H. (2008),"Free vibration and stability of functionally graded plates according to 2-D higher-order deformation theory", <i>Compos Struct</i> , <b>82</b> ,256–70.
[15]	Matsunaga, H. (2009), "Stress analysis of functionally graded plates subjected to thermal and mechanical loadings", <i>Compos Struct</i> , <b>87</b> ,344–57.

[16]	Khabbaz, RS, Manshadi, BD, Abedian, A. (2009), " Nonlinear analysis of fgm plates under pressure loads using the higher-order shear deformation theories", <i>Compos Struct</i> , <b>89</b> ,333–44.
[17]	Zenkour, AM, Alghamdi, NA. (2010), "Thermo-mechanical bending response of functionally graded non symmetric sandwich plates", <i>J Sandwich Struct Mater</i> , <b>12</b> ,7–46.
[18]	Talha ,M, Singh, BN.( 2010)," Static response and free vibration analysis of fgm plates using higher order shear deformation theory", <i>Appl Math Model</i> , <b>34</b> ,3991–4011.
[19]	Vaghefi, R, Baradaran ,GH, Koohkan, H.( 2010), " Three-dimensional static analysis of thick functionally graded plates by using meshless local Petrov–Galerkin (MLPG) method", <i>Eng Anal Bound Elem</i> , <b>43</b> ,564–73.
[20]	Benachour, A, Tahar ,HD, Atmane, HA, Tounsi ,A, Ahmed ,MS. (2011), " A four variable refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates with arbitrary gradient". <i>Composites: Part B</i> , <b>42</b> ,1386–94.
[21]	Thai, HT, Choi, DH. " A refined shear deformation theory for free vibration of functionally graded plates on elastic foundation", <i>Composites</i> ,Part B 2011.
[22]	Reddy, JN, Kim ,J. " A nonlinear modified couple stress-based third-order theory of functionally graded plates". <i>Compos Struct</i> 2012; 94:1128–43.
[23]	Mantari, JL, Guedes Soares, C.( 2012), " Bending analysis of thick exponentially graded plates using a new trigonometric higher order shear deformation theory", <i>Compos Struct</i> , <b>94</b> ,1991–2000.
[24]	Navid, S. (2012), "Une approche très efficace pour l’analyse du dé laminage des plaques stratifiées infiniment longues", Thèse de PhD, Université de Paris Est, France.
[25]	Baron, C., Naili, S. (2008), "Propagation d’ondes élastiques au sein d’un guide d’ondes élastiques anisotrope à gradient unidirectionnel sous chargement fluide", <i>Compte Rendue Mécanique</i> , <b>336</b> (9), 722–730.
[26]	Yamanoushi, M., Koizumi, M., Hiraii T., Shoita, I. (1990), "Proceedings of the first international symposium on functionally gradient materials", editors, Japan.
[27]	Kawasaki, A., Watanabe, R. (1997)," Concept and P/M fabrication of functionally gradient materials". <i>Ceramics International</i> , <b>8842</b> (95),73–83.
[28]	Boch, P., Chartier, T., Huttepain ,M. (1986), " Tape casting of Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> /ZrO <sub>2</sub> laminated Composites", <i>J. Am. Ceram. Soc</i> ; <b>69</b> (8),191-192.
[29]	Yin H.M., Sun L.Z. and Paulino, G.H., (2004), "Micromechanics-based elastic model for functionally graded materials with particle interactions", <i>Acta Materialia</i> , Vol. <b>52</b> , 3535-3543.
[30]	Koizumi, M.(1991), " FGM activities in Japan, Department of Materials Chemistry", <i>Ryukoku University, Ohtsu Japan</i> 520-21.
[31]	Koizumi, M., (1992), " Recent Progress of functionally graded materials in Japan. <i>Ceram. Eng</i> ", <i>Sci. Proc</i> , <b>13</b> (7-8),333-347.

[32]	Koizumi M., (1997), " FGM activities in Japan", <i>Composites</i> , <b>28</b> (1-2),1– 4.
[33]	Nguyen, T.K., Sab, K., Bonnet, G., (2007), " Shear correction factors of functionally graded plates". <i>Mech. Advanced Mater. Struct</i> ; <b>14</b> (8), 567-575.
[34]	Shen H.S., (2009), " Functionally Graded Materials: Nonlinear Analysis of Plates and Shells", <i>CRC Press</i> ,280 pages.
[35]	Miyamoto, Y., Nakanishi, H., Tanaka, I., Okamoto, T. and Yamada, O. Gas Pressure Combustion Sintering of TiC-Ni FGM. 'Proceedings of the First Int. Symp., FGM', Sendai, 1990, Functionally Gradient Materials Forum and the Society of Non-traditional Technology, Tokyo, 257-262.
[36]	Kieback, B., Neubrand, A., Riede, H. (2003)," Processing techniques for functionally graded materials", <i>Materials Science and Engineering A</i> , <b>362</b> (1-2),81–106.
[37]	Lostec, L., (1997)," Elaboration par coulage en bande et caractérisation microstructurale et mécanique de composite SiC/MAS-L, <i>Thèse de l'université de Limoges</i> .
[38]	Mistler R.E.,( 1973), "High strength alumina substrates produced by a multiple layer casting technique", <i>Am. Ceram. Soc. Bull</i> , <b>52</b> (11), 850-854.
[39]	MOYA, J. S., SANCHEZ-HERENCIA, A. J., REQUENA, J. & MORENO, R., (1992), "Functionally Gradient Ceramics by Sequential Slip Casting", <i>Materials Letters</i> , Vol, <b>14</b> , p,333-35.
[40]	Draiche, K. (2010), "Détermination des contraintes résiduelles dans les structures en matériaux à gradient de propriétés «FGM», mémoire de magistère en génie civil, Université de mascara".
[41]	BISHOP, A, LIN, C. Y., NAVARATNAM, M., RAWLINGS, R.D., & McSHANE, H.B, A,(1993)," Functionally Gradient Material Produced by a Powder Metallurgical Process, <i>Journal of Materials Science Letters</i> ", Vol. 12, p.1516-18.
[42]	Watre Metz, B.,( 2006)," Modèle thermomécanique 3D d'un matériau à gradient de propriétés à l'aide de techniques multigrilles. Application aux moules d'injection de polymères, Thèse de doctorat, Ecole doctorale des sciences pour l'ingénieur de Lyon".
[43]	TAKAHASHI, M., ITOH, Y. & KASHIWAYA, H., (1990), "Fabrication and Evaluation of W/Cu Gradient Material by Sintering and Infiltration Technique, in Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90"- <i>Sendai-Japan</i> , p,129-34.
[44]	KAWAI, C., WAKAMATSU, S., SAKAGAMI, S., & IGARASHI, T., Oxidation Resistant Coating with TiC-SiC Gradient Composition on Carbon Fiber Reinforced Composites by CVD, in Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90"- <i>Sendai-Japan</i> , 1990, p. 77-82.
[45]	G. Bao., L. Wang, (1995), " Multiple cracking in functionally graded

	ceramic/metal coatings", <i>Int. J; Solids Structures</i> , <b>32 (19)</b> , 2853–2871.
[46]	Timoshenko, S. (1921), "On the correction of transverse shear deformation of the differential equations for transverse vibrations of prismatic bars", <i>Philosophical Magazine</i> , Vol. <b>41</b> (series 46) p,744–746.
[47]	Reissner.E, (1945), "The effect of transverse shears deformation on the bending of elastic plates", <i>J. Appl. Mech.</i> , vol, <b>12</b> , pages, 69-77.
[48]	Timoshenko, S.P., Woinowsky-Krieger, S. (1959), " Theory of Plates and Shells". <i>McGraw-Hill, New York</i> .
[49]	Reddy, J.N. (1997), " Mechanics of Laminated Composites Plates: Theory and Analysis". <i>CRC Press, Boca Raton</i> .
[50]	Mindlin. R.D, (1951), "Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates" , <i>Journal of Applied Mechanics</i> , vol. <b>18</b> , pages, 31-38.
[51]	J.N. Reddy,( 1999), " Theory and Analysis of Elastic plates ", <i>Taylor &amp; Francis, Philadelphia</i> .
[52]	Whitney, J. M., and Sun, C. T.,( 1973), "A Higher Order Theory for Extensional Motion of Laminated Composites," <i>J. Sound and Vibration</i> , Vol. 30, Sept. , pp,85-97.
[53]	Hildebrand. F.B, E. Reissner, G.G. Thomas, (1949), " —Notes on the foundations of theory of small displacements of orthotropic shells", NACA T. N. N°:1833.
[54]	Naghdi. P. M, (1957). "On the theory of thin elastic shells", <i>Quarterly Appl. Math</i> , <b>14</b> , 369- 380.
[55]	Reissner. E, (1975), "On transverse bending of plates, including the effects of transverse shear deformation", <i>Int. J. Solids Structures</i> , <b>25 (5)</b> ,495-502.
[56]	Reddy. J.N, (1984), "A simple higher-order theory for laminated composite plates", <i>Journal of Applied Mechanics</i> , <b>51 (4)</b> ,745-752.
[57]	Kant.T, K. Swaminathan, (2002), "Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory", <i>Composite Structure</i> , <b>56 (4)</b> , 329-344.
[58]	Nelson. R.B & D.R.Lorch, (1974), "A refined theory for laminated orthotropic plates", <i>ASME Journal of Applied Mechanics</i> , Vol. <b>41</b> , pages 177-183.
[59]	Lo. K.H & R.M. Christensen, (1977), "A higher order theory of plate deformation", Part1: homogeneous plate'sl .journal of applied mechanics, Vol.44, N° 4, pages 669-676.
[60]	Touratier. M, (1991), "An efficient standard plate theory", <i>Engng Sci</i> , vol. 29, no 8, pages 901-916.
[61]	Ambartsumian. S.A, (1969), "Theory of anisotropic plate", <i>Technomic Publishing Co</i> .
[62]	Murthy. M.V.V, (1981), "An improved transverse shear deformation theory for laminated anisotropic plate. Rapport technique, NASA".

[63]	Dau. F, O. Polit, and M.c 2006), "Touratier: Plaque de C1 et shell éléments finis pour l'analyse géométriquement non linéaire de structures multicouche", <i>Computers and Structures</i> , <b>84</b> ,1264-1274.
[64]	Polit. O and M, (1997), "Touratier: Un nouvel élément triangulaire Interface fini laminé pour assurer la continuité des déplacements et stresses", <i>Composite Structures</i> , <b>38</b> (1-4) ,37-44.
[65]	Kirchhoff, G.R, (1850), " Sur la balance et le mouvement d'un disque élastique. J. Reine Angew", <i>Math. (Crelle)</i> , <b>40</b> , 51-88 .
[66]	Soldatos,K.P., (1992),"A transverse shear deformation theory for homogeneous" <i>monoclinic plates.ActaMech</i> , <b>94</b> (3), 195–220 .
[67]	Shimpi, R.P,( 2002),"Théorie des plaques raffinée et ses variantes", <i>AIAA Journal</i> , 137–146.
[68]	Karama,. M, K.S. Afaq., S. Mistou, (2003), "Comportement mécanique de la poutre composite stratifiée par le nouveau modèle de structures composites multicouches stratifiés avec cisaillement transversal de stress continuité", <i>Int. J. Solids Structures</i> , <b>40</b> (6), 1525-1546.
[69]	Aydogdu, M., (2005) , "Vibration analysis of cross-ply laminated beams with general boundary conditions by Ritz method", <i>International Journal of Mechanical Sciences</i> , <b>47</b> ,1740–1755 .
[70]	El Meiche, N, Tounsi, A., Ziane, N., Mechab, I. et Adda Bedia , (2011), " Une nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique pour le flambement et la vibration de plaque sandwich gradation fonctionnelle", <i>International Journal of Mechanical Sciences</i> , 237–247.
[71]	Zenkour, AM, (2013), "A simple four-unknown refined theory for bending analysis of functionally graded plates", <i>Appl Math Model</i> , <b>37</b> ,9041–51.
[72]	Thai, H.T., Kim, S.E, (2012) , "Analytical solution of a two variable refined plate theory for bending analysis of orthotropic Levy-type plates", <i>International Journal of Mechanical Sciences</i> , <b>54</b> , 269–276
[73]	Thai, H-T, Choi, DH, (2012), "An efficient and simple refined theory for buckling analysis of functionally graded plate", <i>Appl Math Model</i> , <b>36</b> , 1008–1022.
[74]	Carrera, E., (2000). "An assessment of mixed and classical theories on global and local response of multilayered orthotropic plates", <i>composite structures</i> , vol, <b>50</b> , pages 183, 198.
[75]	Afaq et al, (2003), K.S. Afaq M. Karama & Mistou S. "Un nouveau modèle raffine pour les structures multicouches", <i>Comptes-rendus des 13èmes Journées Nationales sur les Composites</i> , pages 289-292.
[76]	Di Sciuva, M,( 1987), "An improved shear deformation theory for moderately thick multilayered anisotropic shells and plates", <i>journal of applied mechanics</i> , vol. <b>54</b> , pages 589-596.
[77]	Srinivas, S, (1973),"A refined analysis of composite laminates", <i>Journal of sound and vibration</i> , Vol <b>30</b> , No 4, pages 495,507.



[78]	Ren, J.G, (1986),"A new theory of lamina ted plate ", <i>composite science and technology</i> vol <b>26</b> , pages 225, 239.
[79]	Yin, W.L,(1994) " Interlaminar stress analysis of composite laminates using a sub-laminate layer ", <i>model international journal of solids and structures</i> vol <b>31</b> , no <b>11</b> , pages 1549, 1564.
[80]	Kassapoglou, C. el al, (1987),"Closed form solutions for the interlaminar stress field in angle-ply and cross-ply laminates", <i>journal of composite materials</i> vol <b>27</b> , pages 292,308.
[81]	Nguyen, Tung, v, (2004), "Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis d e plaques ", <i>thèse de doctorat de l'école nationale des ponts et chaussées</i> .
[82]	Carrera, E. (2001), " Developments ideas and evaluations base d upon Reissner's mixed variational theorem in the modeling of multilayered plates and shells", <i>Appl. Mech. Revs.</i> <b>54</b> , 301-329.
[83]	Demasi, L. (2009), "Mixed plate theories based on the generalized unified formulation Part I", <i>governing equations, Compos. Struct.</i> <b>87</b> , 1-11.
[84]	Talha, M, Singh, B.N. (2010), "Static response and free vibration analysis of FGM plates using higher order shear deformation theory appl", <i>Math. Model.</i> <b>34</b> , 3991-4011.
[85]	Carrera, E., Brischetto, S., Nali, P. (2011), "Plates and shells for smart structures classical and advanced theories for modeling and analysis", <i>Wiley New York, Usa</i> .
[86]	Reddy, J.N. (2011), "A general nonlinear third order theory of functionally graded plates", <i>Int. j. aerospace Lightweight Structures</i> , <b>1</b> , 1-21.
[87]	Mantari, J.L., Guedes Soares, C. (2013), " A novel higher order shear deformation theory with stretching effect for functionally graded plates" <i>Comp Part B, Eng</i> <b>45</b> , 268-281.
[88]	Draiche, K., Tounsi, A., Mahmoud, S.R, (2016), "A refined theory with stretching effect for the flexure analysis of laminated composite plates", <i>Geomechanics and Eng.</i> , <b>11</b> (5), 671–690.
[89]	Benbakhti, A., Bachir Bouiadjra, M., Retiel, N., and Tounsi, A. (2016), "A new five unknown quasi-3D type HSDT for thermo-mechanical bending analysis of FGM sandwich plates", <i>Steel and Compos. Struct</i> , <b>22</b> (5), 975–999.
[90]	Benahmed, A., Houari, M.S.A., Benyoucef, S., Belakhdar, K. and Tounsi, A. (2017), "A novel quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for functionally graded thick rectangular plates on elastic foundation", <i>Geomechanics and Eng</i> , <b>12</b> (1), 9–34.
[91]	Levy, M, (1877),"Mémoire sur la théorie des plaques élastique planes", <i>J Math Pures Appl</i> , <b>30</b> ,219–306.
[92]	Stein, M, (1986), "Nonlinear theory for plates and shells including the effects of transverse shearing", <i>AIAA</i> , <b>24</b> (9):1537–44.
[93]	Zenkour, AM, (2006), "Generalized shear deformation theory for bending analysis



	of functionally graded plates", <i>Appl Math Model</i> , <b>30</b> ,67–84.
--	--



**FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES**  
**DÉPARTEMENT GÉNIE CIVIL**

**Mémoire de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme de Master**

Spécialité : Génie Civil

Option : Structure

Présenté par :

**FEKROUN AHMED**

**HASSI ABDELLAH**

*Sujet du mémoire*

**Analyse du flambement des plaques  
isotrope et orthotrope à l'aide de théories des  
plaques raffinées à deux variable**

*Soutenu publiquement le .....devant le jury composé de :*

Mr	Belmahi Samir	Président
Mr	Chikh Abdelbaki	Rapporteur
Mr	Khiloun Mokhtar	Examineur
mlle	Ouazir khatima	Examinatrice

PROMOTION: 2020

## *Remerciement*

*Avant tous, nous remercions ALLAH(Dieu) tout puissant qui nous a amené jusqu'à la fin de notre travail.*

*Nous sommes très heureux d'être encadré par Monsieur Chikfi Abdelbaki, qu'il veuille bien trouver ici l'expression de notre reconnaissance pour son dévouement, sa patience, ses conseils et son aide constant qu'il nous a apporté tout au long de ce travail.*

*Nous aimerons exprimer notre profonde gratitude à tous les enseignants de département de génie civil, qu'ils ont nous suivi le long de nos cursus.*

*Nous tenons à exprimer nos reconnaissances envers les membres du jury qui ont eu la gentillesse de lire et corriger ce travail.*

*Un grand merci à nos parents pour l'éducation qu'ils ont nous offerts et leurs appuis inconditionnels le long du cycle.*

*Enfin, nous adressons nos plus sincères remerciements à tous mes proches et amis, qui m'ont toujours soutenue et encouragée au cours de la réalisation de ce mémoire. Merci à tous et à toutes.*

## Dédicace

*Je rends grâce à Dieu le tout puissant et miséricordieux pour m'avoir donné la force et les moyens de suivre ce mémoire.*

*Je dédie ce travail*

- ✿ *A mes très chers parents, qui ont été toujours présent pour moi, pour leur amour et compréhension, et pour avoir su toujours me soutenir dans les moments difficiles.*
- ✿ *A mes chers frères.*
- ✿ *A mes chères sœurs.*
- ✿ *A mes amies pour avoir, dans les hauts et bas, pu m'aider à rebondir par leur amitié.*
- ✿ *A mon ami et mon binôme hassi abdellah qui a contribué à la réalisation de ce modeste travail.*
- ✿ *Enfin, à toute la promotion 2015/2016*

*f. ahmed*

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



# Dédicaces

*Je tiens à remercier le Bon Dieu qui nous a donné la foi et la sagesse afin de réussir et de choisir le bon chemin.*

*C'est avec un vif plaisir que je saisis à l'occasion de l'obtention du*

*Diplôme pour dédier ce modeste travail à :*

*Mes chers parents qui n'ont pas manqué durant toute ma vie scolaire et Universitaire à m'encourager de leurs précieux conseils, qu'ils soient remerciés pour leur sacrifice en trouvant ma gratitude et mon profond respect.*

*Atouts mon frère et mes sœurs qui n'ont pas manqué de m'encourager.*

*A mes amies et mon binôme Hassi Abdellah qui a contribué à la réalisation de ce modeste travail.*

*Et à mon encadreur : **Dr. Chikh Abdelbaki** et Je tiens à dresser tous nos remerciements à tous les enseignants de l'institut de génie civil qui ont contribué à notre formation*

*Sans oublier tous mes amis (e)....(s) et toute la promotion 2019/2020.*

***fekroun***



## *Abstract*

Buckling analysis of isotropic and orthotropic plates using the two variable refined plate theory is presented in this work. The theory takes account of transverse shear effects and parabolic distribution of the transverse shear strains through the thickness of the plate, hence it is unnecessary to use shear correction factors. Governing equations are derived from the principle of virtual displacements. The closed-form solution of a simply supported rectangular plate subjected to in-plane loading has been obtained by using the Navier method. Numerical results obtained by the present theory are compared with classical plate theory solutions, first-order shear deformable theory solutions, and available exact solutions in the literature. It can be concluded that the present theory, which does not require shear correction factor, is not only simple but also comparable to the first-order shear deformable theory.

**Keywords:** Refined plate theory, Buckling analysis, Isotropic plate, Orthotropic plate, Navier method

## *Résumé*

L'analyse du flambement des plaques isotropes et orthotropes en utilisant la théorie des plaques raffinées à deux variables est présentée dans ce travail.

La théorie tient compte des effets de cisaillement transversaux et de la distribution parabolique des déformations transversales de cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque, il n'est donc pas nécessaire d'utiliser des facteurs de correction de cisaillement.

Les équations gouvernantes sont dérivées du principe des déplacements virtuels. La solution de forme fermée d'une plaque rectangulaire simplement supportée soumise à un chargement dans le plan a été obtenue en utilisant la méthode de Navier.

Les résultats numériques obtenus par la présente théorie sont comparés aux solutions classiques de la théorie des plaques, aux solutions théoriques déformables par cisaillement du premier ordre et aux solutions exactes disponibles dans la littérature.

On peut conclure que la théorie actuelle, qui ne nécessite pas de facteur de correction de cisaillement, est non seulement simple mais également comparable à la théorie déformable par cisaillement du premier ordre.

**Mots clés :** théorie des plaques raffinées, analyse de flambement, plaque isotrope, plaque orthotrope, méthode de Navier



## الملخص

تم تقديم تحليل التواء الصفائح المتجانسة والغير متجانسة باستخدام نظرية الصفائح المكررة المتغيرة في هذا العمل. تأخذ النظرية في الاعتبار تأثيرات القص العرضي والتوزيع المكافئ للقص العرضي من خلال سماكة الصفيحة، وبالتالي ليس من الضروري استخدام عوامل تصحيح القص. المعادلات الحاكمة مشتقة من مبدأ الإزاحة الافتراضية. تم الحصول على الحل المغلق للوحة مستطيلة مدعومة بشكل بسيط ومعرضة للتحميل داخل الطائرة باستخدام طريقة Navier. تتم مقارنة النتائج العددية التي تم الحصول عليها بواسطة النظرية الحالية مع حلول نظرية الصفائح الكلاسيكية وحلول نظرية تشوه القص من الدرجة الأولى، والحلول الدقيقة المتوفرة في المراجع. يمكن الاستنتاج أن النظرية الحالية، التي لا تتطلب عامل تصحيح القص، ليست بسيطة فحسب، بل يمكن مقارنتها أيضًا بنظرية تشوه القص من الدرجة الأولى.

**الكلمات المفتاحية:** نظرية الصفيحة المكررة، تحليل الانثناء، صفيحة متجانسة، صفيحة غير متجانسة، طريقة Navier

## Table des matières

ملخص .....	i
Abstract .....	ii
Résumé .....	iii
Liste des notations .....	iv
Liste des abréviations .....	vi
Liste des figures .....	vii
Liste des tableaux .....	ix

### Introduction générale 1

### Chapitre I Généralités sur les matériaux composites 6

I.1	Introduction .....	6
I.2	Classification des matériaux composites .....	7
	I.2.1 Composites à renforts de particules .....	8
	I.2.2 Composites à renforts de fibres .....	8
	I.2.3 Composites à renforts de paillettes.....	8
	I.2.4 Composites stratifiés.....	8
I.3	Les constituants de base d'un matériau composite .....	9
	I.3.1 La matrice .....	10
	I.3.1.1 Matrices organiques ou résineuses .....	10
	I.3.1.2 Matrices métalliques .....	12
	I.3.1.3 Matrices céramiques .....	13
	I.3.2 Les renforts .....	13
	I.3.2.1 Les fibres de verre .....	13
	I.3.2.2 Les fibres de carbone .....	14
	I.3.2.3 Les fibres d'aramides (Kevlar) .....	15
	I.3.2.4 Les fibres de bore .....	16
	I.3.3 Charges et additifs .....	16
	I.3.4 L'interface fibre-matrice .....	17
I.4	Les matériaux composites structuraux .....	18
	I.4.1 Les monocouches .....	19
	I.4.2 Les stratifiés .....	19
	I.4.3 Les Sandwichs .....	20

I.5	Domaines d'Application des matériaux composites .....	21
I.5.1	Produits aéronautiques .....	21
I.5.2	Produits militaires .....	22
I.5.3	Produits spatiaux (satellites).....	22
I.5.4	Construction navale .....	22
I.5.5	Construction civile .....	23
I.6	Qualités générales des matériaux composites .....	24
I.7	Conclusion .....	24

**Chapitre II Endommagements et réparations des composites 25**

II.1	Introduction .....	25
II.2	Définition d'endommagement .....	25
II.3	Endommagement des composites stratifiés .....	26
II.4	Mécanismes d'endommagement et de rupture .....	26
II.4.1	Fissuration de la matrice .....	27
II.4.2	Décohésion fibre-matrice .....	28
II.4.3	Rupture des fibres .....	30
II.4.4	Délaminage .....	30
II.5	Source des dommages rencontrés en aéronautique .....	31
II.6	Les différents types de dommages en aéronautiques .....	32
II.7	Renforcement et réparations des composites aéronautiques .....	33
II.7.1	Réparation .....	34
II.7.1.1	Réparation par collage des patchs externes .....	35
II.7.1.2	Réparation par collage des patchs internes .....	37
II.7.2	Renforcement .....	39
II.7.3	Exemples d'applications .....	40
II.8	Conclusion .....	41

**Chapitre III Théories des plaques composites stratifiées 42**

III.1	Introduction .....	42
III.2	Définition d'un stratifié .....	43
III.3	Modélisation géométrique .....	45
III.4	Comportement mécanique des matériaux stratifiés .....	46
III.4.1	Champ des déplacements .....	47
III.4.2	Champ des déformations .....	47
III.4.3	Champs de contraintes .....	49
III.4.4	Comportement en membrane-flexion-torsion .....	50
III.4.4.1	Comportement en Membrane .....	50
III.4.4.2	Comportement en flexion et torsion .....	52

III.4.5	Equation constitutive de la théorie classique .....	53
III.5	Constantes de rigidité d'un stratifié orthotrope .....	54
III.5.1	Équations de mouvement des stratifiés orthotropes .....	55
III.5.1.1	Stratifié orthotrope dans ses axes .....	55
III.5.1.2	Stratifié orthotrope hors axes .....	56
III.6	Modèles de structures multicouches .....	57
III.6.1	Modèles de stratifiés de type monocouche équivalente .....	57
III.6.1.1	Théorie classique des plaques stratifiées (CLPT) .....	58
III.6.1.2	Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) .....	59
III.6.1.3	Théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT) .....	60
III.6.2	Approche par couche .....	63
III.6.3	Approche développement asymptotique .....	64
III.7	Conclusion .....	65
<b>Chapitre IV Étude analytique de la vibration libre d'une plaque stratifiée renforcée par patch</b>		<b>66</b>
IV.1	Introduction .....	66
IV.2	Théorie d'ordre élevé à quatre variables .....	67
IV.2.1	Configuration géométrique .....	67
IV.2.2	Hypothèses et Champ de déplacement de la nouvelle théorie .....	68
IV.2.3	Champs des déformations .....	69
IV.2.4	Champs des contraintes .....	69
IV.2.5	Energie de déformation .....	71
IV.2.6	Energie cinétique .....	73
IV.2.7	Solutions analytiques pour une plaque stratifiée simplement appuyée ...	74
IV.3	Conclusion .....	76
<b>Chapitre V Résultats et discussions</b>		<b>77</b>
V.1	Introduction .....	77
V.2	Choix des matériaux composites .....	78
V.3	Effet du rapport d'orthotropie $E_1/E_2$ (cas d'un stratifié croisé) .....	79
V.4	Effet de la géométrie de la plaque (cas d'un stratifié équilibré) .....	80
V.5	Effet de la présence de la masse du patch .....	81
V.6	Conclusion .....	85
<b>Conclusion générale et perspectives</b>		<b>87</b>
<b>Références bibliographiques</b> .....		<b>90</b>

## Liste des tableaux

Chapitre I		
Tableau I.1	Caractéristiques des matrices thermodurcissables	11
Tableau I.2	Caractéristiques des matrices thermoplastiques	12
Tableau I.3	Caractéristiques mécaniques principales des fibres de renfort	16
Tableau I.4	Caractéristiques mécaniques des fibres de bore	16
Tableau I.5	Liaisons interatomiques	18
Chapitre II		
Tableau II.1	Exemples de réparations par patches composites effectuées par la RAAF	40
Chapitre V		
Tableau V.1	propriétés matérielles sans dimension des matériaux utilisés	78
Tableau V.2	Fréquences fondamentales adimensionnelles d'une plaque carrée antisymétrique (Matériau 2) pour différentes valeurs du rapport d'orthotropie avec $a/h = 5$	79
Tableau V.3	Fréquences fondamentales adimensionnelles d'une plaque rectangulaire $[45/-45]_2$ , (Matériau 3) avec différents rapports $a/b$ et $a/h$	80
Tableau V.4	Fréquences fondamentales adimensionnelles d'une plaque carrée $[0/90]$ avec le rapport $a/h = 10$	81
Tableau V.5	Fréquence fondamentale adimensionnelle pour un stratifié équilibré $[45/-45]_2$ (Matériau 3)	82
Tableau V.6	Fréquence fondamentale adimensionnelle pour un stratifié équilibré $[30/-30]_2$ (Matériau 3)	82

# **Introduction générale**

## *Introduction générale*

Le flambage des plaques rectangulaires fait l'objet d'études en mécanique des solides depuis plus d'un siècle. De nombreuses solutions exactes pour les plaques isotropes et orthotropes ont été développées, la plupart d'entre elles peuvent être trouvées dans Timoshenko et Woinowsky-Krieger [1], Timoshenko et Gere [2], Bank et Jin [3], Kang et Leissa [4], Aydogdu et Ece [5] et Hwang et Lee [6]. En compagnie d'études sur le comportement de flambement des plaques, de nombreuses théories des plaques ont été développées. La plus simple est la théorie classique des plaques (CPT) qui néglige les contraintes transversales normales et de cisaillement.

Cette théorie n'est pas appropriée pour la plaque épaisse et orthotrope avec un rapport de module élevé. Afin de surmonter cette limitation, la théorie déformable en cisaillement qui tient compte des effets de cisaillement transverse est recommandée. Effets de cisaillement transversal par le biais de la variation linéaire des déplacements dans le plan à travers l'épaisseur. Cependant, les modèles se ne satisfont pas aux conditions aux limites de traction nulles sur les faces supérieure et inférieure de la plaque, et doivent utiliser le facteur de correction de cisaillement pour satisfaire les relations constitutives des contraintes de cisaillement transversales et des déformations de cisaillement. Pour ces raisons, de nombreuses théories d'ordre supérieur ont été développées pour améliorer la FSDT telles que Levinson [9] et Reddy [10]. Shimpi et Patel [11] ont présenté une théorie des plaques raffinées à deux variables (RPT) pour les plaques orthotropes. Cette théorie qui ressemble à une théorie d'ordre supérieur n'utilise que deux fonctions inconnues afin de dériver deux équations gouvernant les plaques orthotropes.

La caractéristique la plus intéressante de cette théorie est qu'elle ne nécessite pas de facteur de correction de cisaillement et présente de fortes similitudes avec le CPT dans certains aspects tels que l'équation de gouvernance, les conditions aux limites et les expressions de moment. La précision de cette théorie a été démontrée pour les comportements de flexion statique et de vibration libre des plaques par Shimpi et Patel [11], il semble donc important d'étendre cette théorie au comportement de flambement statique.

Dans ce travail, les deux RPT variables développés par Shimpi et Patel [11] ont été étendus au comportement de flambement de la plaque orthotrope soumise au chargement dans le plan. En utilisant la méthode de Navier, les solutions de forme fermée ont été obtenues.

Des exemples numériques impliquant le rapport côté / épaisseur et le rapport de module sont présentés pour illustrer la précision de la présente théorie dans la prédiction de la charge de flambement critique des plaques isotropes et orthotropes. Les résultats numériques obtenus par la présente théorie sont comparés avec des solutions CPT, des solutions FSDT avec une valeur différente du facteur de correction de cisaillement



**Chapitre I**  
**Généralités sur les matériaux**  
**composites avancés**

## Chapitre I

### Généralités sur les matériaux composites avancés

#### I.1. Introduction

Depuis le début du vingtième siècle, l'utilisation des matériaux composites multicouches dans différentes applications d'ingénierie a largement augmenté. Malgré les avantages que présentent ces matériaux "grande rigidité, résistance mécanique élevée, légèreté, réduction des coûts...etc.", ils apportent aussi des problèmes spécifiques liés principalement à leur hétérogénéité. Il est bien connu dans la littérature que la différence des propriétés mécaniques entre des couches adjacentes peut entraîner des contraintes très élevées aux interfaces. Ces contraintes inter-faciales élevées peuvent engendrer des fissurations au niveau des interfaces qu'on appelle délaminage, des fissures, et d'autre mécanisme d'endommagement en raison du changement brutal des propriétés mécaniques et thermiques d'une couche à l'autre. Ce problème a attiré beaucoup d'attention en raison de son influence significative sur la résistance et la rigidité des structures composites multicouches [24].

À la fin des années 80, une équipe de chercheurs japonais a proposé de surmonter ces difficultés par une solution d'une transition continue des propriétés recherchées, en concevant de nouveaux matériaux qui possèdent un gradient de composition permettant de diminuer les fortes concentrations de contrainte par l'utilisation d'une nouvelle classe de matériaux composites avancés connus sous le nom de matériaux à gradient de propriétés "*Functionally Graded Materials : FGM*" dont les propriétés mécaniques varient lentement et continuellement dans l'épaisseur de la structure [25].

Au début, les matériaux composites avancés ont été conçus en tant que matériaux thermiques de barrière dans les applications aéronautiques et les réacteurs. C'est par la suite que ces matériaux ont été développés dans le domaine militaire, l'automobile, le biomédicale, l'industrie de semi-conducteur et toutes utilisations dans un environnement à hautes températures. Ces types de matériaux, ont suscité beaucoup d'attention récemment

en raison des avantages de diminuer la disparité dans les propriétés matérielles et de réduire les contraintes thermiques.

## I.2. Concept des matériaux FGM

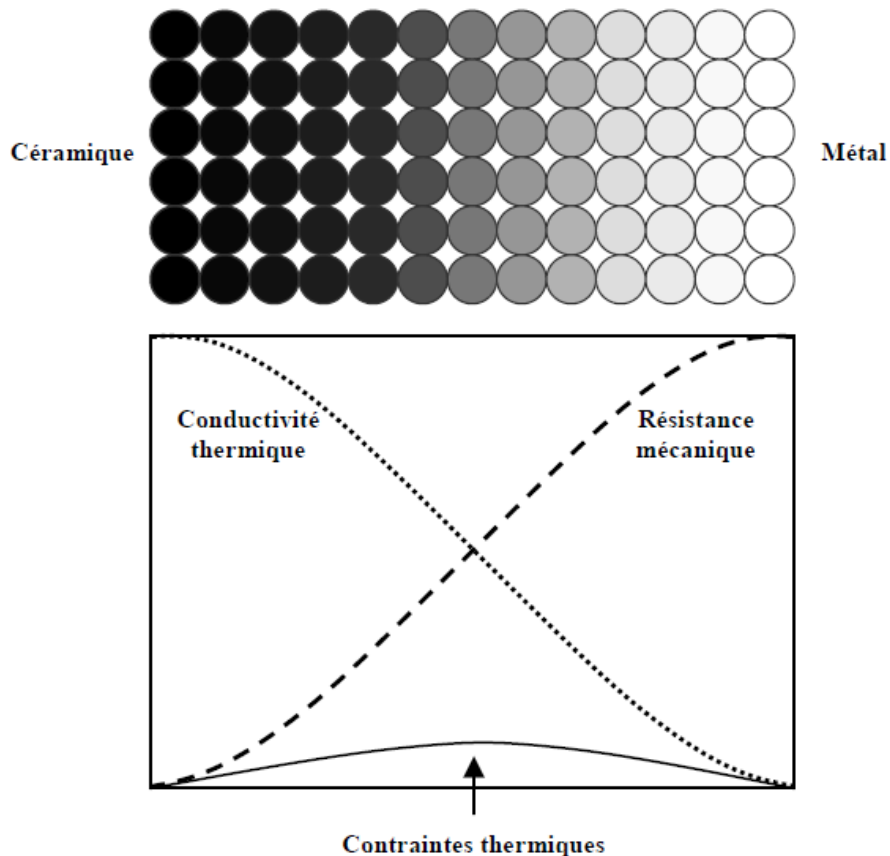
Le concept des matériaux à gradient de propriétés "FGM" fut proposé à la fin des années 1980 par un groupe de chercheurs au laboratoire national d'aérospatial "*National Aerospace Laboratory*" au Japon pour développer des pièces capables de résister aux sollicitations thermiques et mécaniques dans les systèmes de propulsion et le fuselage des navettes spatiales et comme un moyen de préparer les matériaux de barrière thermique pour l'isolation des chambres de nucléaires [26]. Une pièce peut être qualifiée de matériau FGM lorsqu'elle est composée d'au moins deux matériaux ou alliages primaires qui sont distribués continuellement ou dis-continuellement à l'intérieur de la structure. Lorsque la distribution est continue, on parle alors de matériaux à gradient continu [27]. Dans ce cas, la composition et la microstructure du matériau changent graduellement à l'intérieur de la pièce. Cette distribution des matériaux permet de modifier les propriétés à l'intérieur même de la pièce. Des gradients de propriétés peuvent ainsi être réalisés au niveau mécanique, physique, chimique, etc.

La variation continue des propriétés mécaniques confère au matériau un comportement optimisé. Les FGM sont particulièrement utilisés dans les applications de haute technologie: aéronautique, aérospatiale, nucléaire, semi-conducteurs, et en Génie Civil et trouvent également des applications biomédicales. La plupart des "FGM" sont constitués des céramiques et des métaux dont les propriétés mécaniques sont comparés dans le tableau I.1.

**Tableau I.1 :** Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.

Phase		Caractéristiques mécaniques
Céramique	La face à haute température	- Bonne résistance thermique ; - Bonne résistance à l'oxydation ; - Faible conductivité thermique.
Céramique-métal	Continuité du matériau d'un point à l'autre "couches intermédiaires"	- Élimination des problèmes de l'interface ; - Relaxer les contraintes thermiques
Métal	La face à basse température	- Bonne résistance mécanique ; - Conductivité thermique élevée, - Très bonne ténacité.

Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure d'un matériau "FGM" est illustré dans la figure I.1ci-après. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés des "FGM". Dans certains cas, on peut avoir un matériau composite avancé constitué d'un même matériau mais de microstructure différente [28].



+

**Figure I.1 :** Concept des matériaux à gradient de propriétés.

### I.3. Différences entre FGM et matériaux composites traditionnels

Les matériaux à gradient de propriétés attirent l'attention en termes de leurs applications dans les domaines industriels. Puisque les FGM ont une double propriété des deux matières premières qui sont mélangées ensemble et la distribution composante est graduée sans interruption (voir figure I.2). Par exemple, l'un des FGM qui se composent du métal et de céramique à la caractéristique de la conductivité thermique et de la force métallique dans le côté en métal et la résistivité aux hautes températures du côté céramique.

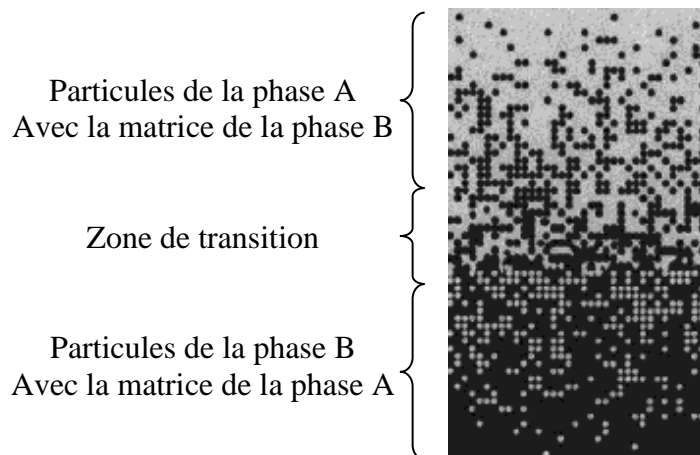


Figure I.2 : FGM "les fractions de volume graduées dans la direction verticale" [29].

Donc ces matériaux sont donc des matériaux composites avancés avec un caractère au microscope non homogène. Les changements continus de leur microstructure distinguent le FGM des matériaux composites conventionnels. Le changement continu de la composition a comme conséquence les gradients dans les propriétés de FGM. Les différences dans la microstructure et les propriétés entre FGM et matériaux composites conventionnels sont illustrées schématiquement sur la figure I.3.

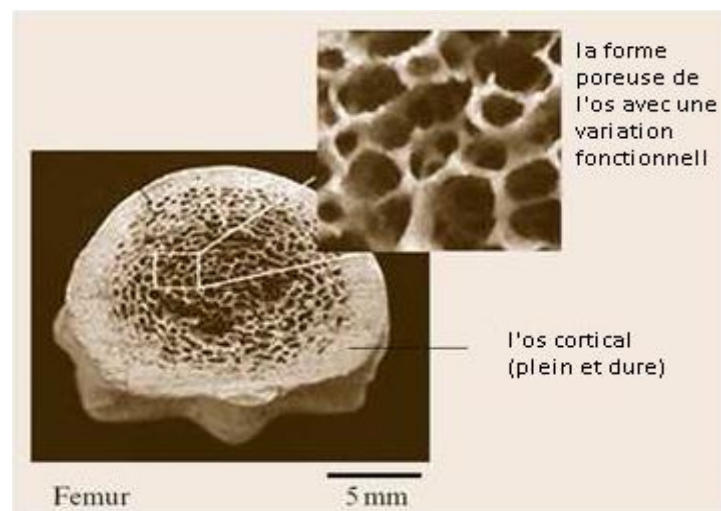
<b>Propriétés</b>	<p>1 Résistance mécanique</p> <p>2 Conductivité thermique</p>		
<b>Structure</b>	<b>Eléments constitutants:</b> Céramique ○ Métal ● Microporosité ○ Fibre ◇		
<b>Matériaux</b>	<b>Exemple</b>	<b>FGM</b>	<b>NON-FGM</b>

Figure I.3 : Caractéristiques des matériaux FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels [32].

#### I.4. Historique de développement des FGM

Le concept des matériaux fonctionnellement gradués a été aperçu dans la nature depuis des millions d'années. On peut les trouver dans les tissus des plantes, des animaux et même dans notre corps en citant à titre d'exemple les os (voir figure I.4), les coquilles, les noix de coco et les feuilles de certaines graminées comme les bambous.

Tous ces exemples, ouvrent la porte vers la biométrie qui tente d'appliquer les caractéristiques de la conception de la nature dans les sciences industrielles et médicales.



**Figure I.4 :** Vue microscopique d'une section transversale de l'os.

Le concept de FGM est né au milieu des années quatre-vingt dans le laboratoire national d'aérospatial au Japon, qui fût suivi par d'autres pays : l'Allemagne, la Suisse, Les Etats-Unis, la Chine et la Russie. En 1984 M. Niino et ses collègues à Sendai. Ont eu l'idée de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion [31]. Les changements continus dans la composition, dans la microstructure, et même dans la porosité de ces matériaux a comme conséquences des gradients des propriétés matérielles telles que les propriétés mécaniques et la conductivité thermique [32]. Cette nouvelle classe de matériaux composites peuvent être utilisés pour différentes applications, telles que les enduits des barrières thermiques pour les moteurs en céramique, turbines à gaz, couches minces optiques [33].

En 1987, le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet intitulé "la recherche sur la technologie de base pour développement de Matériaux à Gradient de propriétés et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques". L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux. 17 laboratoires nationaux de recherche, des universités et des entreprises ont été engagées dans ce projet [34].

Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux :

- Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau ;
- Ténacité du matériau côté basse température ;
- Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau.

Pour répondre à un tel cahier des charges, l'idée originale des FGM a été proposée pour élaborer un nouveau composite profitant à la fois des propriétés des céramiques "côté haute températures" et des métaux "côté basse température".

À la fin de la première étape (1987-1989), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales "1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre" pouvant résister à des températures maximales de 2000K "température de surface" et à un gradient de température de 1000K. Quatre techniques ont été utilisées pour fabriquer les matériaux présentant un gradient de composition et de structure. Les techniques utilisées dans la fabrication de tels matériaux sont les suivantes : le système SiC/C par C.V.D., le système PSZ/Mo par la technique de la compaction sèche des poudres, le système TiB<sub>2</sub>/Cu par synthèse par auto-propagation à haute température, et enfin le système (Ni-Cr-Al-Y)/ (ZrO<sub>2</sub>-Y<sub>2</sub>O<sub>3</sub>) par projection plasma à double torches [32].

Dans la seconde étape (1990-1991), le but était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première étape. Pendant les années 90, non seulement les champs d'applications des FGM s'est développé pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température, mais s'est aussi élargi à d'autres applications: biomécaniques, technologie de capteur et l'optique [35].

En 1992, c'est la période de l'amélioration de l'efficacité des FGM dans la conservation d'énergie photoélectrique, thermoélectrique, thermonucléaire [36].

### **I.5. Les méthodes de fabrication des FGM**

Les procédés de fabrication d'un matériau à gradient de propriétés "FGM" peuvent habituellement être divisés en construisant la structure dans un espace hétérogène "mélange graduel" et transformation de cette structure en matériau en bloc "solidification". Les processus de mélange graduel peuvent être classés dans les constituants, l'homogénéisation et la ségrégation. Les procédés élémentaires sont basés sur la fabrication par étape de structure en matériaux graduels précurseurs ou poudres. Les avancés en technologie d'automatisation pendant les dernières décennies ont rendu des processus élémentaire de progression technologiquement et économiquement durable. Dans la procédure d'homogénéisation qui traite une interface pointue entre deux matériaux est convertie dans un gradient par transport matériel. Les procédés d'homogénéisation et de ségrégation produit un gradient continu, mais ont des limitations au sujet des types de gradients qui peuvent être produits.

Habituellement le séchage et la solidification suivent les étapes du mélange graduel. Le besoin de ces processus de consolidation doit être adapté à FGMs: les conditions de ces procédures doivent être choisies pour que le gradient ne soit détruit ou altéré en mode non contrôlée. L'attention doit être également prêtée au rétrécissement inégal de FGMs pendant la consolidation [36].

Ces dernières années, les travaux menés au laboratoire ont permis de développer une méthode originale pour élaborer des composites à gradient continu de composition. Cette méthode est basée sur une technique de Co-sédimentation de poudres en milieu aqueux. Chaque particule élémentaire de poudre sédimente avec une vitesse proportionnelle à la densité du matériau et au carré du diamètre de la particule "relation de Stokes". En contrôlant et en adaptant les répartitions granulométriques de chaque poudre, il est possible d'obtenir différents gradients de concentration dans le dépôt formé à l'issue de la sédimentation.

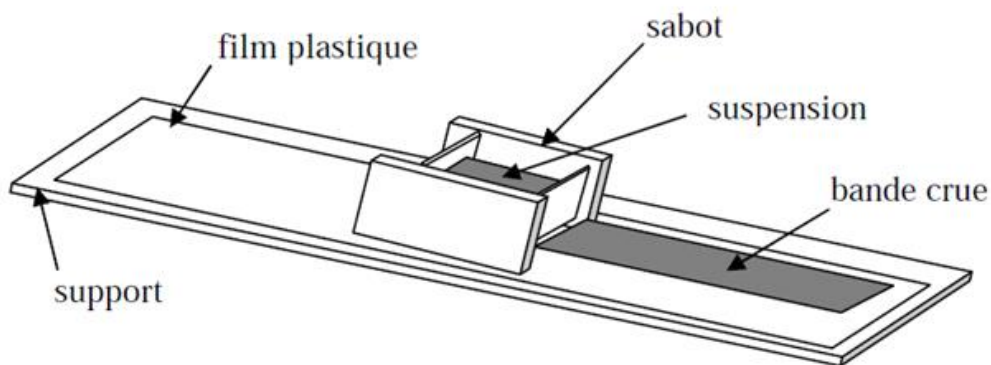
Il existe de nombreuses méthodes d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés, les techniques les plus employées sont brièvement expliquées ci-après.



### I.5.1. Coulage en bande "Tape Casting"

Le coulage en bande est une technique de mise en forme par voie liquide qui consiste à étaler une barbotine de poudres fines en suspension sur une surface plane en couches minces et régulières. L'étalement de la bande est obtenu par le mouvement relatif d'un réservoir ou sabot. La suspension est ainsi laminée par son passage entre la lame du réservoir et le support (figure I.5), ce qui confère à la bande déposée une épaisseur uniforme sur toute sa longueur. La hauteur du couteau du réservoir par rapport au support détermine l'épaisseur de la bande [39]. Les produits obtenus sont des feuillets avec des épaisseurs contrôlées. Après un raffermissement de la pâte, les feuillets sont démoulés et ensuite découpés.

Le procédé de coulage en bande est largement utilisé pour réaliser des matériaux composites laminaires suivant deux méthodes, soit par réalisation directe de bandes multicouches grâce à un système de lames multiples, c'est le cas des tri-couches élaborés par Mistler [38], soit par empilage de couches élaborées séparément, dont la cohésion est ensuite assurée par une étape de thermo-compression [28].



**Figure I.5 :** Principe de la méthode coulage en bande [39].

### I.5.2. Coulage séquentiel en barbotine "Slip Casting"

Le coulage en barbotine "slip casting" consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, laissant un tessou "couche de poudre compacte" sur la surface du moule. Après séchage, on obtient le corps en cru. Donc le coulage se décompose en deux étapes essentielles :

- ✓ Formation du tessou ou "prise",
- ✓ Consolidation du tessou ou "raffermissement".

La filtration, c'est à dire la formation du tesson lors du coulage, peut être considéré comme un processus d'élimination d'une partie de l'eau de la barbotine; Cette eau migre à travers la couche de tesson déjà formée, sous l'effet :

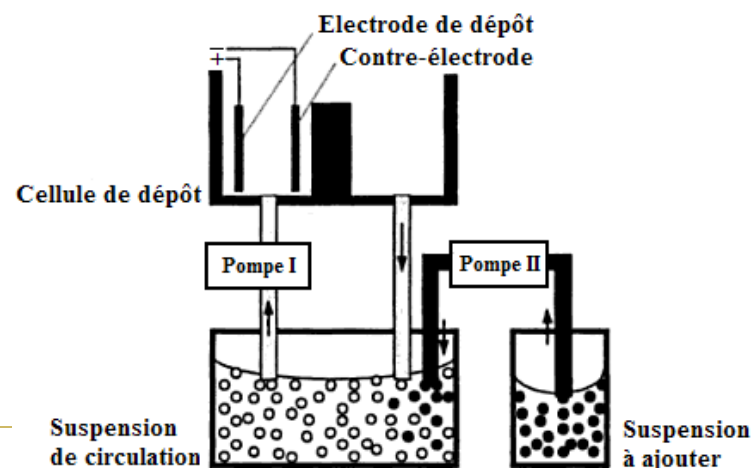
- ✓ Du pouvoir de succion du plâtre "coulage classique [39] ",
- ✓ Ou d'une pression appliquée sur la barbotine "coulage sous pression".

Dans le cas de la fabrication de multicouches, après la formation du premier tesson, le dépôt de la deuxième couche s'effectue de manière telle que la barbotine ne pénètre pas dans le tesson formé. Ce procédé est successivement reproduit pour les autres couches.

### I.5.3. Dépôt par Electrophorèse

Le dépôt par électrophorèse "EPD", est un processus assez rapide à faible coût, capable de produire les matériaux à gradient de propriétés changeant sans interruption avec la géométrie complexe. EPD se compose de deux processus, c'est-à-dire le mouvement des particules chargées en suspension dans un champ électrique entre deux électrodes "électrophorèse" et le dépôt de particules sur l'un des électrodes. EPD permet la conception des matériaux à gradient de propriétés en forme de plaque binaire en déposant d'une suspension de poudre à laquelle une deuxième suspension est sans interruption ajoutée pendant le processus [40]. Le dépôt est un contrat de poudre emballé étroit qui a besoin de l'agglomération pour réaliser les composants matériels entièrement denses.

Depuis lors, de nombreuses applications d'EPD ont été développées pour la fabrication de la céramique, y compris l'application des matériaux sans interruption à gradient de propriétés peut être obtenu tels que le céramique-céramique  $ZrO_2/Al_2O_3$  et le céramique-métal, WC/Co puisque la composition des couches déposantes est déterminée par la suite composition de la suspension au moment du dépôt. Une installation générale de ce principe est illustrée sur la (figure I.6).



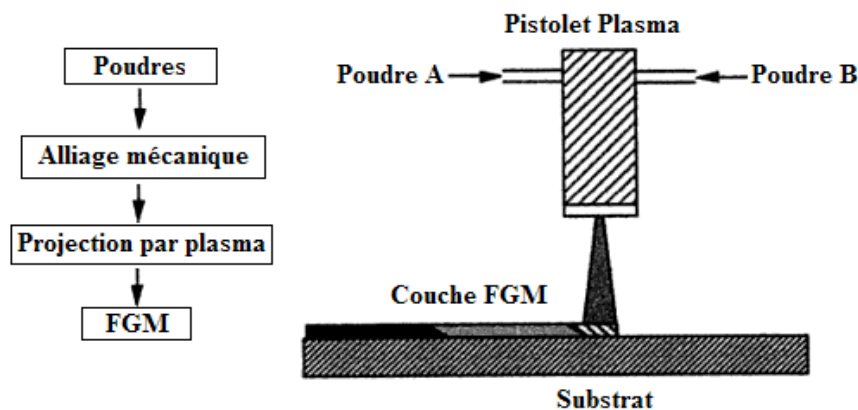
#### I.5.4. Compaction sèche des Poudres

Dans cette technique les poudres sont successivement versées dans un moule en acier. Chaque fois qu'une poudre est versée, une faible compression est exercée. Ensuite, la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Ce procédé est suivi, généralement, par une pression isostatique et un délitage. La densification sera enfin l'étape finale.

Ce procédé peut être envisagé pour la fabrication de pièces de formes complexes. En effet il s'applique aussi avec la technique du pressage isostatique, et de façon industrielle [41].

#### I.5.5. Projection plasma

La projection plasma consiste à introduire des particules solides "de taille inférieure à 100 $\mu\text{m}$ , environ" dans un jet de gaz, dont la température atteint couramment 1100°C et la vitesse 1000-1500m/s (figure I.7). Le dépôt est ainsi formé par l'empilement des lamelles solidifiées obtenues par l'impact des particules sur le substrat préalablement préparé [45]. Ce procédé est utilisé en particulier pour déposer des matériaux à haute température de fusion tels que des alliages réfractaires ou des céramiques. Les caractéristiques des dépôts réalisés par la projection plasma sont la résistance à l'usure et à la corrosion et ainsi à l'isolation thermique et électrique.



**Figure I.7 :** Méthode de projection plasma pour former un matériau thermoélectrique gradué. "La composition est graduée dans la direction plane "[42].

La projection plasma est devenue une méthode très utile pour fabriquer des FGM. Le rendement élevé du dépôt des particules sur des substrats à géométrie compliquée, les performances des surfaces en fonctionnement et la compatibilité des céramiques avec les métaux sont les avantages essentiels de cette technique.

### I.5.6. Frittage et Infiltration

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes. La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique [43].

Cette méthode peut être généralement appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres.

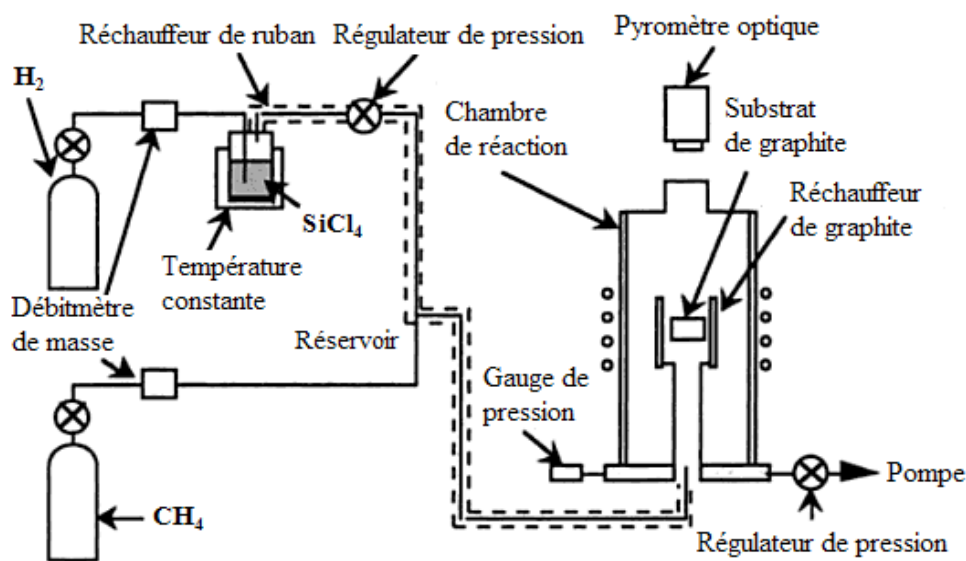
### I.5.7. Dépôt physique en phase vapeur "PVD"

La technique de dépôt physique en phase vapeur "*physical vapor deposition*" est une technologie prometteuse pour la production de revêtements de barrière thermique. Parmi les caractéristiques avantageuses de PVD que les revêtements fabriqués ont des surfaces lisses, sans exigence, enfin il n'y a pas de fermeture de trous de refroidissement. Toutefois, le principal avantage est leur résistance exceptionnelle aux chocs thermiques, ainsi que la durée de vie est considérablement plus longue. L'équipement utilisé pour déposer les revêtements d'isolation thermiques par l'intermédiaire de PVD, se compose de plusieurs récipients pour le chargement, le préchauffage et le dépôt plus un dispositif de rotation et la manipulation des échantillons ...etc.

Une autre approche pour obtenir une structure à gradients est d'utiliser un mélange d'aluminium, l'alumine et de zircone, chimiquement contrôlés peuvent être fabriqués facilement par vaporisation à partir de sources multiples en utilisant un ou plusieurs pistolets électroniques. En ajustant les paramètres de faisceau d'électrons, différents taux de dépôt peuvent être obtenus pour chaque source. Si les taux d'évaporation de deux composants, par exemple alumine et de zircone, sont changés sans interruption, un gradient défini de composition est obtenu, c'est le FGM.

### I.5.8. Dépôt chimique en phase vapeur "CVD"

Dans la technique de dépôt chimique en phase vapeur "*chemical vapor deposition*", représenté schématiquement à la (figure I.8), un dépôt est formé sur un substrat en soumettant la source des gaz "par exemple, des hydrures, bromures ou chlorures" qui occupent la chambre de réaction, à différents types d'énergie comme la chaleur, la lumière et le plasma. Les FGM peuvent être synthétisés à lent pour modérer des taux de dépôt en modifiant le rapport de mélange de la source des gaz, ou par le contrôle de la température de dépôt, la pression de gaz, ou le débit de gaz. En raison de son faible taux de dépôt, CVD est largement utilisé pour l'infiltration de piles ou pour la fabrication de couches minces [44].

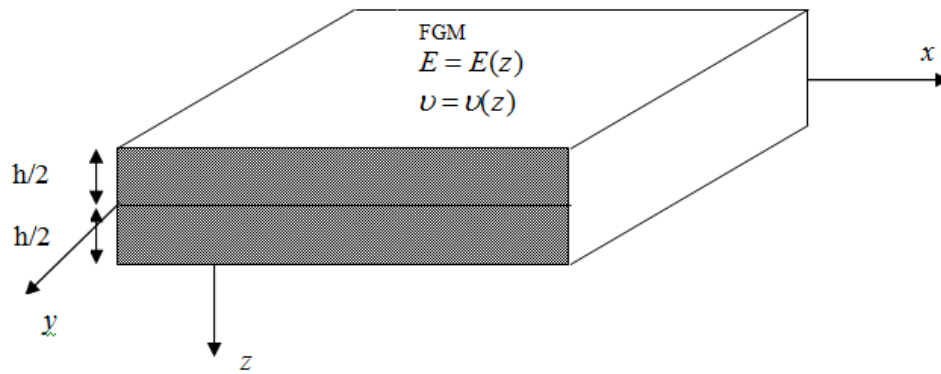


**Figure I.8 :** Technique de préparation d'un SiC/C FGM par le dépôt chimique en phase vapeur "CVD" [43].

### I.6. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM

Les matériaux à gradient de propriétés "FGM" peut être produit en changeant sans interruption les constituants des matériaux multiphasés dans un profil prédéterminé. Les dispositifs les plus distincts d'un FGM sont les microstructures avec des macros -propriétés graduées sans interruption. Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs utilisent la fonction de loi de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume.

Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure.



**Figure I.9 :** Géométrie d'une plaque en FGM.

Les coordonnées  $x$  et  $y$  définissent le plan de la plaque (figure I.9), tandis que la direction de l'axe  $z$  perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque et dans la direction de l'épaisseur.

Les propriétés du matériau dont le module de Young et le coefficient de Poisson sur les surfaces supérieures et inférieures sont différentes mais sont déterminés selon les demandes d'exécution.

Toutefois le module d'élasticité "Young" et le coefficient de Poisson varient de façon continue, dans le sens de l'épaisseur "l'axe  $z$ " soit :  $E = E(z), \nu = \nu(z)$ . Le module de Young dans le sens de l'épaisseur de la plaque en matériaux à gradient de propriétés varie en fonction de la loi de puissance "P-FGM" ou avec la fonction sigmoïde "S-FGM" ou bien la fonction exponentielle "E-FGM".

### I.6.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM

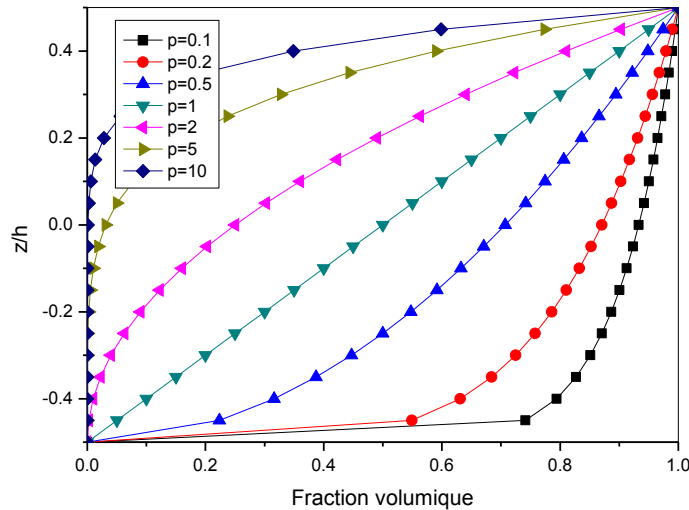
La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance.

$$V(z) = \left( \frac{z + h/2}{h} \right)^p \quad (\text{I.1})$$

Où  $p$  est un paramètre matériel et  $h$  est l'épaisseur de la plaque. Une fois la fraction volumique locale  $V(z)$  a été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges [45] :

$$E(z) = V(z)E_1 + [1 - V(z)]E_2 \quad (\text{I.2})$$

Où  $E_1$  et  $E_2$  sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure ( $z = h/2$ ) et de la surface supérieure ( $z = -h/2$ ) de la plaque FGM, la variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la (figure I.10), il apparaît clairement que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour  $p < 1$ , et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour  $p > 1$ .



**Figure I.10:** Variation de la fraction volumique dans une plaque "P-FGM".

### I.6.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

Dans le cas d'ajouter une plaque P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interfaces où le matériau est continu mais change rapidement [45]. Par conséquent, Chung et Chi [45] ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces.

Les deux fonctions de loi de puissance sont définis par :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{h/2 + z}{h/2} \right)^p \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.3a})$$

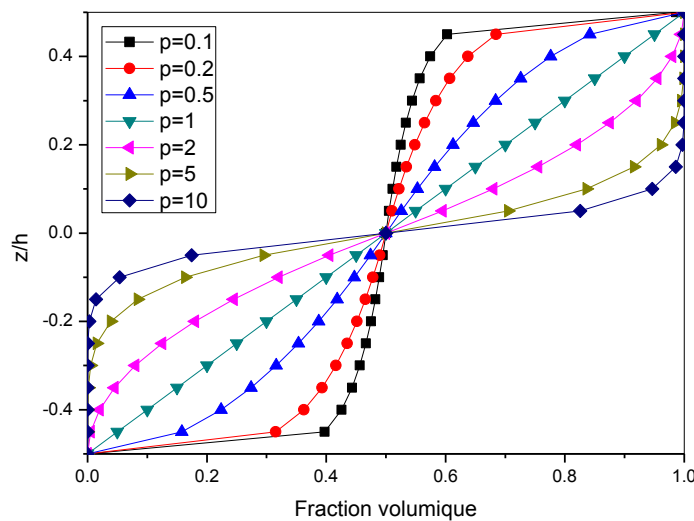
$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{h/2 - z}{h/2} \right)^p \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.3b})$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé en utilisant les relations suivantes :

$$\mathbf{E}(z) = V_1(z) \mathbf{E}_1 + [1 - V_1(z)] \mathbf{E}_2 \text{ Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.4a})$$

$$\mathbf{E}(z) = V_2(z) \mathbf{E}_1 + [1 - V_2(z)] \mathbf{E}_2 \text{ Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.4b})$$

La (figure I.11) montre que la variation de la fraction volumique dans les équations (I.4.a) et (I.4.b) représente les distributions sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée dans ce cas "Plaque S-FGM".



**Figure I.11:** Variation de la fraction volumique dans une plaque "S-FGM".

### I.5.3. Les propriétés matérielles de la poutre E-FGM

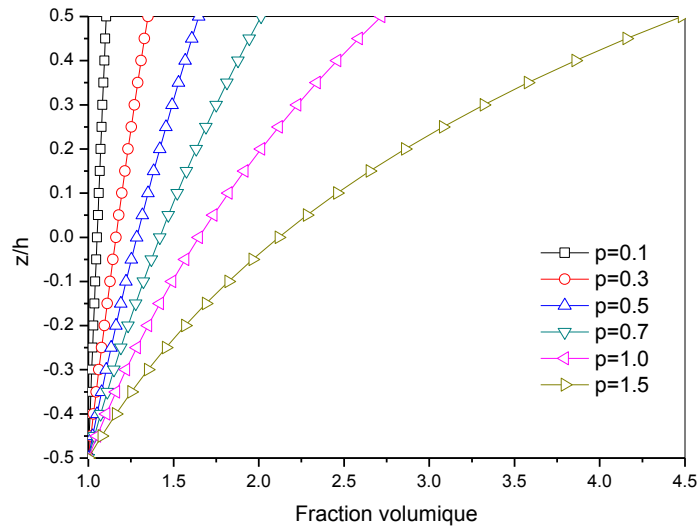
Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle "E-FGM". En effet, cette fonction est impliquée dans ce présent travail, car les propriétés du matériau varient à travers l'épaisseur avec une distribution exponentielle. La fraction de volume des constituants s'écrit sous la forme (figure I.12) :

$$V(z) = e^{p\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)} \quad (\text{I.5a})$$

Et le module de Young de la plaque E-FGM peut être calculé en utilisant l'expression suivante :

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{E}_1 V(z) \quad (\text{I.5b})$$





**Figure I.12:** Variation de la fraction volumique dans une plaque "E-FGM".

## I.6. Domaines d'application des FGM

Le concept des matériaux à gradient de propriétés est applicable dans un large intervalle et dans différents domaines.

### I.6.1. Aéronautique

Les FGM permettent de produire un poids-léger des matériaux solides, durables et applicables dans différents domaines de structure. Ces derniers sont considérés d'une part, comme une technologie indispensable pour la roquette et à la construction de station spatiale, et d'autre part utilisables comme des barrières thermiques des avions spatiaux et des parties de moteur de fusée.

### I.6.2. Matières industrielles

De nombreuses applications de FGM ont été récemment apparues pour les matériaux industriels. Comme les produits récents sont intensifiés en raison d'une résistance mécanique et thermique accrue, la demande d'un nouveau matériau pour l'outil industriel est en pleine croissance. Dans ce domaine, il est nécessaire d'avoir les deux résistances donc la demande de la FGM est une solution.

### I.6.3. Biomatériaux

Notre corps est soutenu par 206 os, et certains d'entre eux couvrent un cerveau et des organes. Si nous avons une douleur à un os ou une articulation, nous aurons des troubles dans notre vie. Pour résoudre ce problème, un nouveau matériau nommé FGM est apparu et peut

remplacer les os et les articulations. Non seulement la dureté et une excellente résistance à la corrosion et la compatibilité, mais aussi au niveau biologique.

#### **I.6.4. Energie solaire**

Les cellules photovoltaïques des piles solaires ont une bande de fréquence propre de réponse à la lumière dépendant des matériaux. Ces piles solaires utilisent des FGM et présentent une réponse optimale sur une très large bande de fréquence. De plus la combinaison de la génération thermoélectrique avec la génération photovoltaïque sur une pile solaire permet la pleine utilisation de l'énergie lumineuse et thermique du rayonnement solaire et donc conduit à un meilleur rendement de conversion global.

Ces conversions thermoélectroniques utilisant les FGM laissent entrevoir la mise au point de générateurs à recharge de gaz ou kérosène compacts qui peuvent être utilisés dans des zones reculées en montagne ou dans les déserts froids ou chauds pour des instruments de mesure et de communication comme par exemple des stations météorologiques.

#### **I.6.5. Génie civil**

Les FGM peuvent être utilisés dans les chaussées rigides en béton avec une gradation obtenue par la variation de la fraction volumique des fibres, cette technique est visée d'être utilisée dans les autoroutes et les routes à très fort trafic où l'utilisation d'une chaussée souple en béton bitumineux est déconseillée, tels que les dallages industrielles, les pistes des aéroports, car elles offrent une résistance et une durabilité élevées, le but est d'optimiser l'épaisseur de la chaussée afin d'avoir un matériau rigide sur la surface de roulement et un matériau moins rigide sur la couche de fondation.

Les FGM peuvent être utilisés dans les chaussées souples pour supprimer les couches d'accrochage entre la couche de la Grave Bitume et la couche de roulement en Béton Bitumineux et éviter le glissement entre les deux couches et économiser les épaisseurs des couches tout en obtenant un comportement optimisé et augmentant la capacité portante de la chaussée et par la suite sa durabilité.

#### **I.7. Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons défini au premier lieu les matériaux composites avancés nommés "FGM", l'historique de leur développement, leurs propriétés, leurs principales méthodes de fabrication, et par la suite nous avons cité les différentes lois possibles qui

servent à décrire la variation spatiale et progressive des propriétés matérielles du matériau FGM "module de Young, masse volumique et coefficient de poisson" suivant l'épaisseur d'une plaque, ces lois peuvent être de puissance, sigmoïde et exponentielle. Ces matériaux permettent la construction des structures innovantes qui peuvent être exploitées dans de nombreux domaines d'application dans les structures spéciales et en génie civil.

# **Chapitre II**

## **Différentes théories des plaques**

## Chapitre II

### Différentes théories des plaques

#### II.1. Introduction

Les problématiques rencontrées concernent essentiellement des questions de dimensionnement ou de contrôle des vibrations et des contraintes. Pour mieux connaître, la réponse du comportement dynamique et statique de la structure, il est impératif d'approcher de la manière la plus correcte possible les phénomènes mis en jeu par les plaques qui sont plus ou moins complexes. Ainsi, un tablier d'un pont, un bâtiment, une caisse de voiture, une aile d'avion, un bateau... Parmi tous ces domaines d'application, on peut distinguer plusieurs types de plaques : des plaques membranaires, des plaques minces, modérées et épaisses dont les propriétés matérielles sont différentes. Dans cette étude nous nous intéresserons par les plaques hétérogènes en matériaux composites avancés, nommés les matériaux à gradient de propriétés qui sont généralement constitués par deux constituants différents.

Afin de résoudre les problèmes des structures ayant comme éléments structuraux des poutres et des plaques FGM dans le domaine élastique, il est nécessaire de choisir la bonne théorie décrivant correctement le comportement statique et dynamique de la structure ainsi que la méthode de résolution à appliquer. C'est en 1888 que Love utilisa les hypothèses de Gustav Kirchhoff, elles-mêmes inspirées des hypothèses d'Euler-Bernoulli pour fonder une théorie des plaques minces "également appelée théorie classique ou théorie de Kirchhoff-Love". La théorie des plaques semi-épaisses "théorie des déformations du premier ordre" a été consolidée par Mindlin à partir des travaux de Timoshenko [46] et Reissner [47]. Ensuite, des théories d'ordre supérieur sont venues améliorer les hypothèses des théories classiques et du premier ordre lorsque l'épaisseur de la plaque devient importante. Il existe aussi la théorie basée sur l'élasticité tridimensionnelle "théorie 3-D" qui ne fait aucune hypothèse restrictive sur les déplacements de la plaque.

Nous présentons dans ce chapitre quelques modèles sur les théories des plaques développées dans la littérature pour améliorer l'évolution de la variation du champ des déplacements à travers l'épaisseur des plaques.

## II.2. Définition d'une plaque

Une plaque est un solide élastique dont une dimension selon l'épaisseur, est petite en comparaison des deux autres, et qui généralement comporte un plan de symétrie au milieu de l'épaisseur que nous appellerons surface moyenne (Voir figure II.1). Par convention, cette surface sera le plan (x-y), l'axe (o-z) correspond à l'axe transversal selon l'épaisseur. Une plaque peut être constituée d'un matériau homogène, ou être obtenue par l'empilement de différentes couches de matériaux orthotropes.

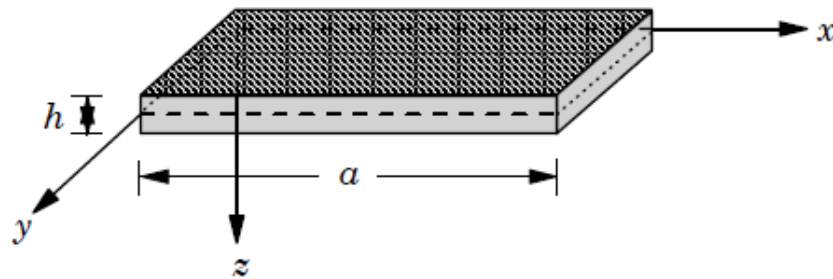


Figure II.1 : Géométrie d'une plaque de forme rectangulaire.

Afin de traiter des problèmes de plaques élastiques, des hypothèses doivent être imposées pour simplifier les équations générales de l'élasticité linéaire. Dans le cas d'un problème de plaques en flexion on applique des charges normales à la surface moyenne, dans la direction de z. Ces forces appliquées provoquent une flexion dans la plaque avec un déplacement du feuillet moyen dans la direction de z, ce déplacement vertical est habituellement appelé flèche et noté par  $w$ .

## II.3. Modèles analytiques des plaques FGM

L'ensemble de ces modèles sont basées sur les lois de comportement élastique de la théorie d'élasticité linéaire et les hypothèses fondamentales nécessaires pour caractériser le modèle analytique choisi. Il faut savoir que l'aspect géométrique de la plaque est défini par une surface de référence plane et par une épaisseur petite par rapport aux autres dimensions. Cette définition favorise le choix d'une cinématique spécifique par rapport à la cinématique générale d'un solide, le facteur de classification de ces théories est l'importance de l'épaisseur par rapport aux autres dimensions, cette particularité conduit à l'effet de cisaillement transversal à travers l'épaisseur, ce dernier est présenté dans la cinématique adaptée. Dans l'analyse des plaques en flexion, on peut utiliser trois théories fondamentales :

- ✓ Théorie classique des plaques de Love-Kirchhoff (CPT),
- ✓ Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT),
- ✓ Théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)

### II.3.1. Théorie classique des plaques de Love-Kirchhoff (CPT)

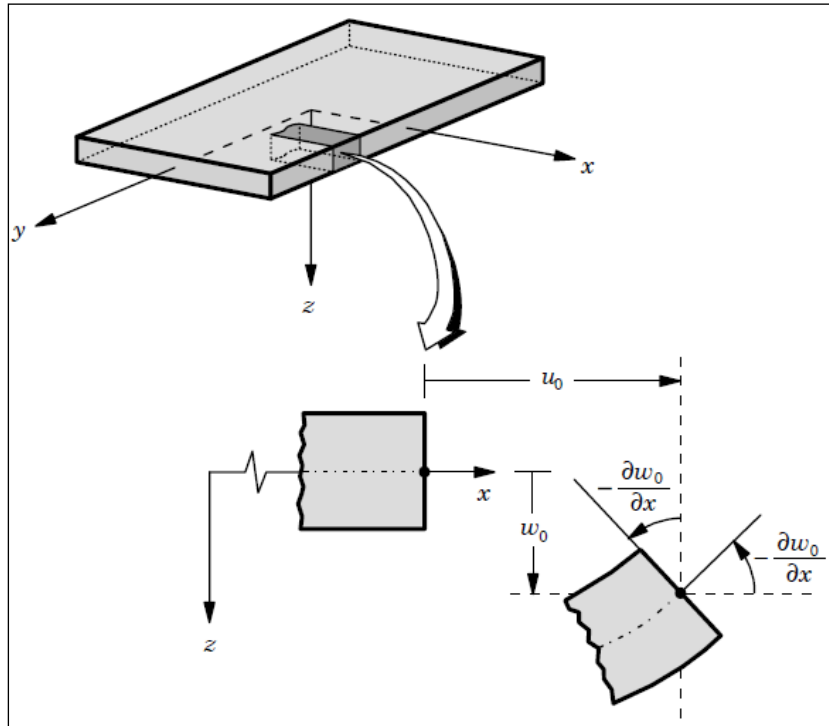
On parle d'une plaque mince, lorsque la flèche générée par les déformations de cisaillement reste négligeable devant la flèche générée par la courbure de la plaque. Dans le cas d'une plaque homogène isotrope, la part de cisaillement dans la flèche est directement reliée à l'élancement ( $L/h$ ).

La théorie classique des plaques minces (CPT) se base sur les hypothèses de Love-Kirchhoff, selon lesquelles une droite normale au plan moyen de la plaque reste perpendiculaire après déformation, ce qui revient à négliger les effets de déformation en cisaillement transverse. Le champ de déplacement associé à cette théorie est présenté dans l'équation (II.1). La cinématique ci-après (figure II.2) illustre l'état déformé d'une structure monocouche avec le modèle de Love-Kirchhoff : la section de la plaque déformée reste orthogonale à la surface neutre, les contraintes et déformations de cisaillement transverse sont nulles. Cette formulation a tendance à sous-estimer les flèches et surestimer les charge critique de flambement et les fréquences propres des structures modélisées, cette erreur étant encore plus grande pour les stratifiés fortement anisotropes. Cependant, ce modèle permet de décrire correctement le comportement de plaques simples fortement élancées ou avec une épaisseur faible par rapport à la longueur d'onde de flexion, d'où son appellation de modèle de "plaques minces". Ce modèle de plaque peut être référé en Timoshenko et Woinowsky-Krieger [48] ainsi que Reddy [49].

En se basant sur les hypothèses citées ci-dessus, le champ de déplacement de la théorie classique est exprimé sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z) &= \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - z \frac{\partial \mathbf{w}_0}{\partial \mathbf{x}}, \\
 \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z) &= \mathbf{v}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - z \frac{\partial \mathbf{w}_0}{\partial \mathbf{y}}, \\
 \mathbf{w}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z) &= \mathbf{w}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}),
 \end{aligned}
 \tag{II.1}$$

Avec  $u_0$  et  $v_0$  sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ( $z = 0$ ). Puisque ce modèle ne tient pas en compte l'effet de cisaillement transverse, il donne des résultats non précis pour les plaques épaisses.



**Figure II.2** : Cinématique de la plaque de Love Kirchhoff (CPT) [53].

### II.3.2. Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) est une extension de la cinématique de la théorie classique des plaques (CPT) par une déformation de cisaillement transversale de la plaque dans leur hypothèse cinématique (figure II.3), dans ce cas la distribution des contraintes et les déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque, ce qui oblige l'introduction d'un facteur de correction du cisaillement pour corriger cette forme de contraintes. Généralement ce coefficient est difficile à déterminer à cause de sa dépendance à la fois, de la géométrie, du coefficient de Poisson à travers l'épaisseur, des charges appliquées et des conditions aux limites. Les études sur la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) peuvent être trouvées dans les références de Reissner [47] et Mindlin [50] qui a mené au modèle de plaque de Reissner-Mindlin. Ce modèle a été utilisé par suite par Reddy pour l'analyse statique en flexion, la vibration libre et le flambement des plaques isotropes et multicouches [49, 51].



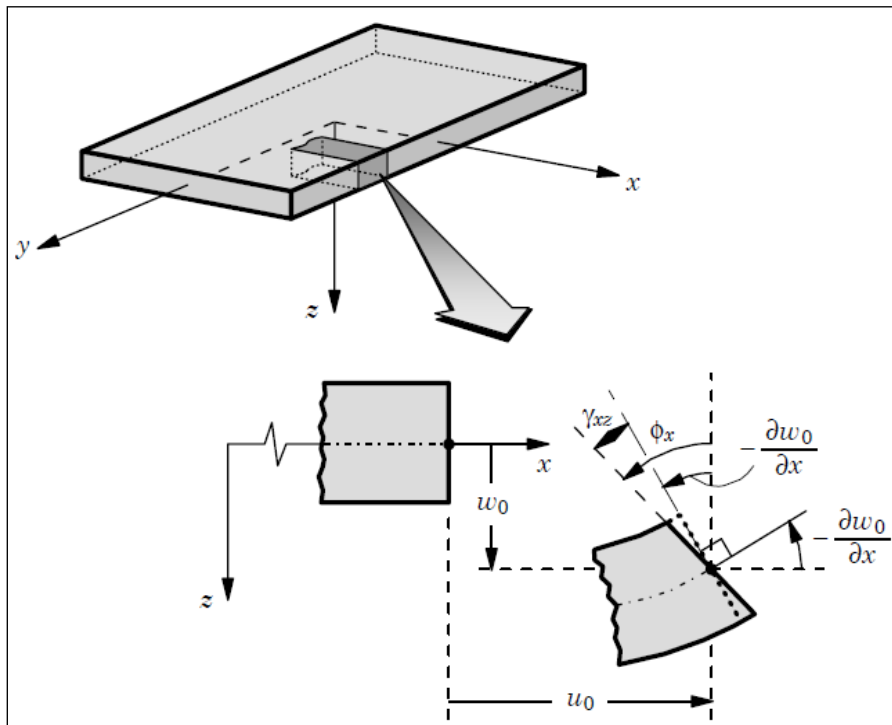
La théorie du premier ordre est basée sur le champ de déplacement suivant :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, y, z) &= \mathbf{u}_0(x, y) + z\phi_x(x, y), \\ \mathbf{v}(x, y, z) &= \mathbf{v}_0(x, y) + z\phi_y(x, y), \\ \mathbf{w}(x, y, z) &= \mathbf{w}_0(x, y), \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

Avec :  $(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{w}_0)$  et  $(\phi_x, \phi_y)$  sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes  $x$  et  $y$ , respectivement.

Le champ de déplacement définis dans l'expression ci-dessus permet de reprendre la théorie classique des plaques décrite dans la dernière section par le remplacement :

$$\phi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad \phi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (\text{II.3})$$



**Figure II.3** : Cinématique de la plaque de Reissner- Mindlin (FSDT) [49].

Avec ce choix de la forme des champs de déplacement, les déformations transversales sont constantes en  $(z)$ . Les contraintes de cisaillement sont donc uniformes dans chaque couche discontinue entre les couches. Cette mauvaise description oblige à introduire des coefficients correcteurs pour mieux prendre en compte dans l'écriture de l'énergie, les effets de cisaillement transversal [52]. Les résultats obtenus dépendent essentiellement du choix

empirique dans des situations complexes des coefficients correcteurs et l'étude du composite épais reste aléatoire par ce type d'approche cinématique. Pour éviter l'introduction d'un facteur de correction, des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevée ont été développées.

D'ailleurs pour éviter l'introduction d'un facteur de correction, des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevée ont été développées.

### II.3.3. Théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)

À la différence de la théorie CPT et la théorie FSDT avec les acceptations de la distribution linéaire du déplacement par l'épaisseur, la théorie d'ordre élevé est basée sur une distribution non linéaire des champs dans l'épaisseur (voir figure II.4). Par conséquent, on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et / ou de la déformation normale transversale. Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction. Les références sur de tels modèles peuvent être trouvées dans plusieurs références scientifiques [53, 54, 55, 56, 57].

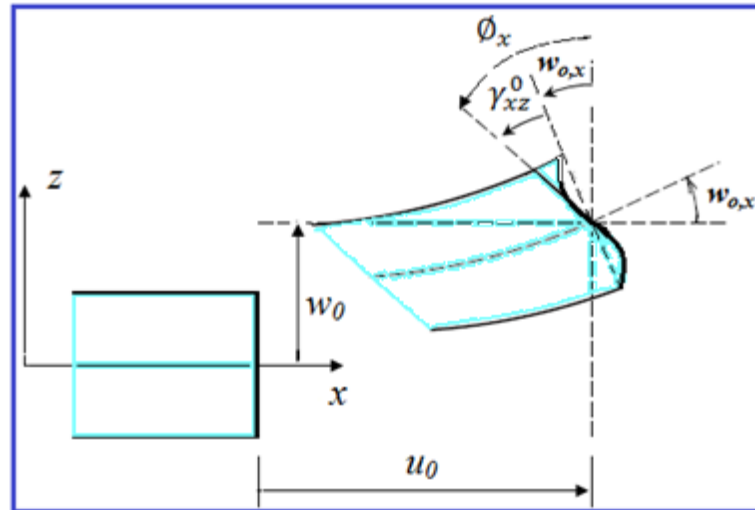
Nous avons introduit ici quelques modèles de plaques utilisés pour analyser le comportement des matériaux composites avancés (FGM).

Le champ de déplacement est généralement comme suit :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + f(z) \varphi_x(x, y), \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + f(z) \varphi_y(x, y), \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

Où  $u, v$  et  $w$  représentent les déplacements dans les directions  $x, y$  et  $z$ . Les composantes de déplacements  $u_0, v_0$  et  $w_0$  sont ceux d'un point du plan moyen ( $x, y, z = 0$ ).  $\varphi_x$  et  $\varphi_y$  sont les rotations due à la flexion des plans  $yz$  et  $xz$ . Cependant  $f(z)$  est la fonction de gauchissement qui représente la forme de distribution des contraintes et des déformations de cisaillement transverse dans l'épaisseur de la plaque. Ainsi le choix de cette fonction  $f(z)$  est basé sur les résultats de l'élasticité tridimensionnelle ou toute autre information sur la distribution des contraintes de cisaillement transverse.

En effet, les déplacements de la théorie classique de plaque CPT est obtenue par en prenant  $f(z) = 0$ , alors que la théorie de premier ordre FSDT peut être obtenue par  $f(z) = z$ .



**Figure II.4** : Cinématique de la plaque d'ordre élevé (HSDT) [53].

#### II.4. Revue sur les différents modèles de la théorie d'ordre élevé (HSDT)

Pour franchir les limites des théories du premier ordre, plusieurs auteurs ont proposé quelques contributions importantes pour le développement de modèles d'ordre élevé qui se sont distingués dans la littérature par l'expression de la fonction de cisaillement  $f(z)$ . Les modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs de déplacement à travers l'épaisseur, et qui permettent de représenter le gauchissement de la section transversale dans la configuration déformée (Figure II.4) [52, 58, 59, 60]. Nous citons en particulier :

L'approche d'Ambartsumyan [61] avec :

$$f(z) = \frac{z}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad (\text{II.5})$$

L'approche de Reissner [51], Panc et Kaczkowski, avec :

$$f(z) = \frac{5}{4} z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.6})$$

L'approche de Levinson, Murthy [62] et Reddy [56] Avec ;

$$f(z) = z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.7})$$

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal  $w$ , est constant [56]. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle dans le cas homogène. La distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique à travers l'épaisseur (elle doit être parabolique par couche pour un multicouche). Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites. Les résultats du modèle de Reddy sont également très proches des deux modèles d'ordre élevé proposés par Kant et Swaminathan [57].

Touratier propose le modèle (sinus) qui est différent des autres modèles d'ordre élevés puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur [60]. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme suite :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) = \frac{h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi z}{h}\right)^{2n+1} \\ &= z \left( 1 - \frac{\pi^2}{3!} \frac{z^2}{h^2} + \frac{\pi^4}{5!} \frac{z^4}{h^4} - \frac{\pi^6}{7!} \frac{z^6}{h^6} + \dots \right) \end{aligned} \quad (\text{II.8})$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par le modèle (sinus) prennent une forme trigonométrique à travers l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de [Reddy 1984]. En se basant sur les travaux de Touratier, un élément fini triangulaire à six nœuds, est construit pour les structures multicouches non linéaires géométriques par Polit *et al.* [63] et Dau *et al.* [64].

Malgré le fait que les modèles d'ordre élevé assurent une continuité de déplacement et de déformation à l'interface, les contraintes de cisaillement inter laminaire et les contraintes d'interface, restent discontinues. Ceci présente un inconvénient lors de l'analyse locale de l'interface des structures multicouches dont les propriétés des couches sont très différentes.

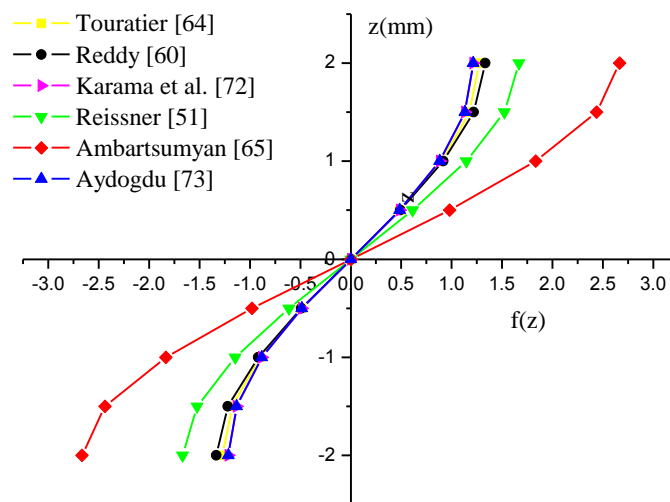
Nous regroupons dans le tableau suivant les différentes fonctions de cisaillement ainsi qu'une comparaison entre les différents modèles.

**Tableau II.1 :** Différentes fonctions de cisaillement utilisées dans les théories des plaques en matériaux composites avancés.

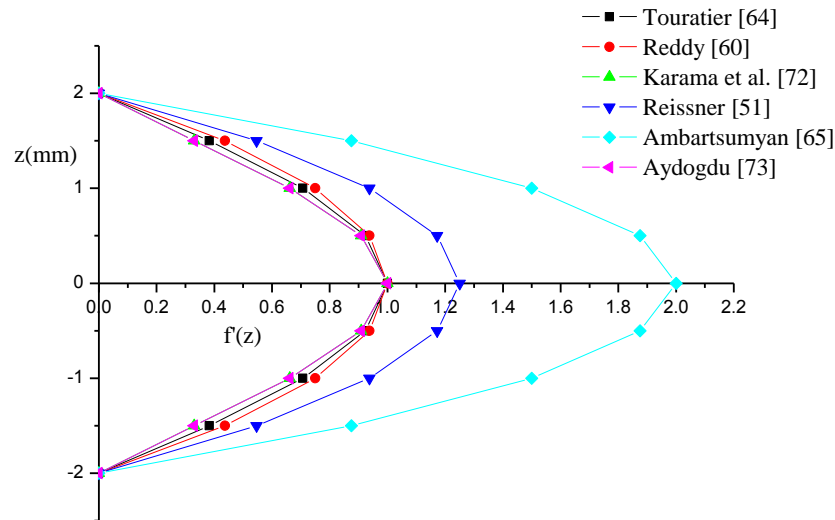
Théories	intitulé	Fonction de cisaillement $f(z)$	Coefficient de correction $k$	Domaine de validité
CPT Kirchhoff [69]	Théorie classique des plaques	0	---	Plaques minces
FSDT Mindlin [54]	Théorie de déformation en cisaillement du 1er ordre	$z$	Requis	Plaques minces et moyennement épaisses
Ambartsumyan [65]	Théorie d'ordre supérieur	$\frac{z}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right)$	Non Requis	Plaques minces et moyennement épaisses
Reissner [51]	Théorie d'ordre supérieur	$\frac{5}{4} z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$	Non Requis	Plaques minces et épaisses
PSDT Levinson [66], Reddy [60]	Théorie de déformation parabolique	$z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$	Non Requis	Plaques minces et épaisses
TSDT Touratier [64]	Théorie de déformation trigonométrique	$\frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$	Non Requis	Plaques minces et épaisses
Soldatos [70]	Théorie de déformation hyperbolique	$h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) - z \cosh\left(\frac{1}{2}\right)$	Non Requis	Plaques minces et épaisses
Shimpi [71]	Théorie raffinée	$h \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{z}{h} \right) - \frac{5}{3} \left( \frac{z}{h} \right)^3 \right]$	Non Requis	Plaques minces et épaisses
ESDT Karama et al. [72]	Théorie de déformation exponentielle	$z e^{-2(z/h)^2}$	Non Requis	Plaques minces et épaisses
Aydogdu [73]	Théorie de déformation exponentielle	$z \alpha \frac{2(z/h)^2}{\ln(\alpha)}, \alpha > 0$	Non Requis	Plaques minces et épaisses
El Meiche et al. [74]	Théorie raffinée	$\frac{(h/\pi) \sin(hz/\pi)}{\cosh(\pi/2) - 1}$	Non Requis	Plaques minces et épaisses
Zenkour [75]	Théorie de déformation hyperbolique	$h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) - \frac{4z^3}{3h^2} \cosh\left(\frac{1}{2}\right)$	Non Requis	Plaques minces et épaisses

D'après les différents modèles proposés de la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé, on voit que l'approche d'Ambartsumyan [61] et l'approche de Reissner [47] (voir figures II.5 et II.6 ci-dessous), sont un peu loin des autres fonctions de forme présentées par Touratier [60], Reddy [56], Karama et al [68] et Aydogdu [69]. Elles sont servies comme bases pour développer les autres fonctions de cisaillement qui sont en principe plus proches de l'analyse 3D.

Il faut remarquer que les modèles issus d'une approche monocouche équivalente pressentent des contraintes de cisaillement transverse discontinues aux interfaces si les couches ont des propriétés différentes, même si la continuité du champ de déformation est assurée. Ceci présente un inconvénient sérieux lors de l'analyse locale à l'interface des structures multicouches (effets de bord sur les contraintes, contraintes inter-faciales, délaminage, ...etc.), mais pour le cas des matériaux à gradient de propriétés (FGM) cette approche paraît très appropriée, du fait que la variation des propriétés se fait continuellement selon l'épaisseur.



**Figure II.5 :** Variation de la fonction de forme  $f(z)$  des différents modèles en fonction de l'épaisseur  $z$ .



**Figure II.6 :** Variation de la fonction de forme  $f(z)$  des différents modèles en fonction de l'épaisseur  $z$ .

### II.5. Nouvelle théorie raffinée de déformation des plaques

Shimpi [67] a développé un modèle raffiné pour l'analyse des plaques isotropes (RPT : Refined Plate Theory). Les caractéristiques les plus intéressantes de cette méthode et qu'elle ne contient que quatre équations d'équilibre avec seulement quatre inconnus à trouver au lieu des cinq dans le cas des théories classiques. En plus, cette théorie n'exige pas de facteur de correction de cisaillement et donne une distribution parabolique de déformation en cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque. Aussi, elle présente beaucoup de similitudes avec la théorie classique des plaques quant aux équations du mouvement, les conditions aux limites et les expressions des moments. Plusieurs chercheurs ont adaptés cette théorie pour étudier le comportement statique et dynamique des plaques stratifiés, sandwichs et en matériaux à gradient de propriétés.

Récemment Thai et Kim [72, 73] ont adapté le modèle raffiné, avec succès, au flambement des plaques orthotropes et à la vibration libre des plaques composites stratifiées et sandwichs.

### II.6. Approche par couche

Ces approches sont destinées justement à mieux décrire les effets d'interface pour les matériaux composites conventionnels. Il est observé que cette approche est applicable pour les structures en matériaux FGM. Ainsi différents modèles issus de l'approche par couche ont été proposés par Carrera [74], Afaq et al. [75], Reddy [56] et Di Sciuva [76]. Le multicouche

est subdivisé en sous structures correspondant en fait à chaque couche ou chaque ensemble de couches. On applique à chaque sous structure une théorie du premier ordre ou un modèle d'ordre supérieur, imposant un champ de déplacement vérifiant la continuité aux interfaces entre les différentes couches.

Les modèles de ce type sont relativement coûteux (l'ordre des équations de comportement dépend du nombre de couche), mais ils permettent l'obtention de résultats plus précis, notamment en ce qui concerne le calcul des contraintes hors plan. D'une manière générale, les modèles issus de l'approche par couche peuvent être classés en deux groupes : les modèles couches discrètes où chaque couche est considérée comme une plaque en imposant les conditions de continuité en déplacements ou en contraintes aux interfaces et les modèles zig-zag où la cinématique satisfait a priori les conditions de contact est indépendante du nombre de couches.

### II.6.1. Les modèles couches discrètes

Les modèles couches discrètes adoptent une approximation plus fine des champs suivant l'épaisseur du multicouche que les modèles de plaque d'ordre supérieur ou Zig-zag puisqu'ils proposent une cinématique par couche plutôt qu'une cinématique globale. En fait avec les modèles couches discrètes le multicouche est représenté par un ensemble de plaques (structures 2D) couplées par des efforts d'interface les conditions de continuité aux interfaces sont assurées. Le nombre de paramètres inconnus dépend du nombre de couche de la plaque composite. Dans les travaux de Srinivas [77] et Reddy [49] on postule une cinématique du premier ordre ou d'ordre supérieur par couche les équations fondamentales par couche sont obtenues en utilisant le principe des travaux virtuels les conditions aux limites sont également données couche par couche.

D'une manière alternative les travaux de Ren [78] et Yin [79] utilisent une approximation des champs de contraintes par couche ou une mixte contrainte cinématique ainsi Ren [78] utilise un champ de contrainte dont la composante de cisaillement transversal est quadratique par couche et les déplacements sont considérés cubiques par couche et continus aux interfaces. Dans la référence [80], le champ de contrainte est construit sous la forme d'un produit de fonctions à variables séparées par couche à partir de l'équilibre des forces et moments les contraintes planes sont supposées constantes suivant l'épaisseur dans Yin [79],

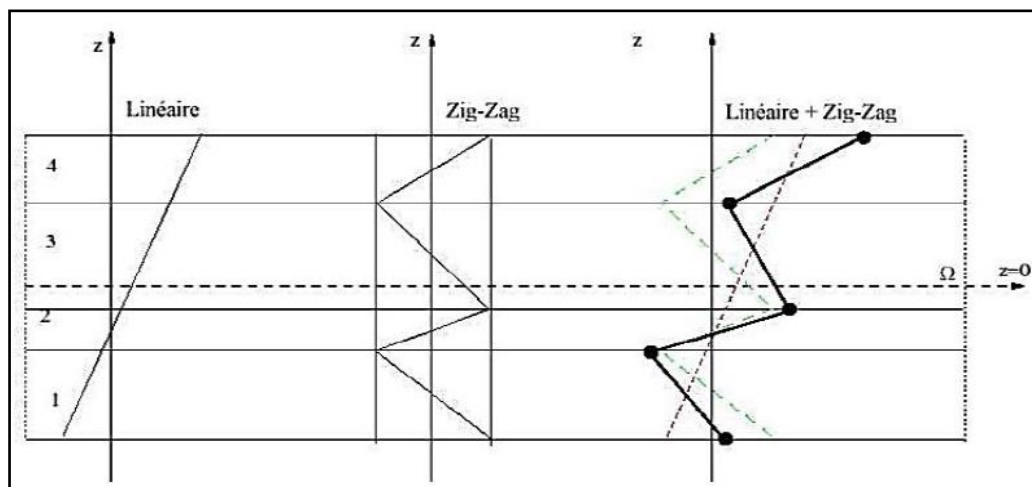


les fonctions de contraintes sont utilisées par couche pour déterminer les contraintes inters laminaires elles sont approximées de façons polynomiales dans l'épaisseur.

### II.6.2. Les modèles zig-zag

Afin de réduire le nombre de paramètres inconnus, Di Sciuva [74] est le premier à proposer le modèle zig-zag du premier ordre. Dans ce modèle, les déplacements membranaires sont les résultats de la superposition du champ de déplacement global d'une théorie du premier ordre et d'une fonction zig-zag. La cinématique des modèles zig-zag satisfait a priori les conditions de contact et elle est indépendante du nombre de couches.

Toutefois, la fonction zig-zag donne une contribution des déplacements membranaires qui est continue en  $z$  mais sa dérivée première est discontinue à l'interface (voir figure II.7). Les déformations transversales sont donc discontinues et la continuité des contraintes de cisaillement transverse aux interfaces est assurée.



**Figure II.7 :** Champ de déplacement des modèles zig-zag du premier ordre [81].

### II.7. Approche quasi-3D

Pour éviter de recourir à une analyse tridimensionnelle et de l'introduction de l'effet de déformation normale transverse cette particularité devient importante pour définir un état de contraintes correct et évaluer exactement les fréquences propres en analyse vibratoire de façon générale toutes les contributions et les recherches récentes sur cette approche basées sur la jonction d'une fonction non linéaire de la coordonnée de l'épaisseur  $z$  de telle sorte que le

déplacement transversal sera exprimé et dépend d'une variation non linéaire à travers L'épaisseur de la plaque.

En générale les théories d'ordre élevé de déformation en cisaillement transversal et la déformation normale suivant l'épaisseur considèrent l'effet de l'étirement de l'épaisseur (stretching effect) peuvent être numériquement appliquées en utilisant la formulation unifiée initialement proposée par Carrera [82] et récemment évoluée par Demasi [83].

De nombreux travaux basant sur la théorie d'ordre élevé avec effet d'étirement ont été proposés dans les littératures pour analyser le comportement statiques et dynamiques des structures en matériaux composites multicouches et en FGM (plaques, poutres, coques, ...etc.), Talha [84], Carrera [85], Reddy [86], Mantari et Guedes Soares [87], Draiche et al. [88], Benbakhti et al. [89] et Benahmed et al. [90]. Ces théories sont assez complexes en termes de formulations, néanmoins elles sont très intéressantes du point de vue précision.

## II.8. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons donné un aperçu sur les différents modèles analytiques de calcul des plaques épaisses en FGM, ainsi que les travaux effectués par plusieurs chercheurs dans ce domaine, à savoir la théorie classique des plaques (CPT), la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT), la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT), la théorie des plaques raffinée (RPT) et la théorie quasi-3D de déformation en cisaillement d'ordre élevé avec effet d'étirement de l'épaisseur.

A travers notre lecture de la littérature en matière de théories d'ordre élevé, il apparaît que celles-ci sont certes intéressantes du point de vue précision, néanmoins devient assez complexes en termes de formulations. Le chapitre qui se suivra portera sur la présentation d'étude du comportement statique des plaques en matériaux composites avancés dans les propriétés matérielles varient selon une fonction exponentielles à travers l'épaisseur de la plaque (E-FGM).

**Chapitre III**  
**Modèle Mathématique &**  
**Développements**

### II.1. Introduction :

Dans ce chapitre on va faire une modélisation analytique du comportement statique et des plaques composites orthotrope et isotrope utilisant la théorie raffinée (RPT), la théorie de déformation en cisaillement de premier ordre (FSDT) et la théorie classique des plaques (CPT). À l'aide de principe d'Hamilton et la solution de Navier on a pu arriver aux équations d'équilibre de la poutre en FGM.

### II.2. RPT pour plaques orthotropes :

Hypothèses de base de RPT :

Les hypothèses du RPT sont les suivantes :

- Les déplacements sont faibles par rapport à l'épaisseur de la plaque  $h$  et, par conséquent, les déformations impliquées sont infinitésimales.
- Le déplacement transversal  $w$  comprend deux composantes de flexion  $w_b$  et de cisaillement  $w_s$ . Ces deux composants sont uniquement fonction des coordonnées  $x$ ,  $y$  et du temps  $t$ .

$$w(x, y, t) = w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t) \quad (\text{III.1})$$

- La contrainte transversale normale  $\sigma_z$  est négligeable par rapport aux contraintes dans le plan  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$ .
- Les déplacements  $u$  dans la direction  $x$  et  $v$  dans la direction  $y$  consistent en composants d'extension, de flexion et de cisaillement.

$$u = u_0 + u_b + u_s; v = v_0 + v_b + v_s \quad (\text{III.2})$$

- Les composantes de flexion  $u_b$  et  $v_b$  sont supposées être similaires aux déplacements donnés par la théorie classique des plaques. Par conséquent, l'expression de  $u_b$  et  $v_b$  peut être donnée comme :

$$u_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial x}; v_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial y} \quad (\text{III.3})$$

Les composants de cisaillement  $u_s$  et  $v_s$  donnent, en conjonction avec  $w_s$ , les variations paraboliques des déformations de cisaillement  $\sigma_{xz}$ ,  $\sigma_{yz}$  et donc des contraintes de cisaillement  $\sigma_{xz}$ ,  $\sigma_{yz}$  à travers l'épaisseur de la plaque,  $h$ , de sorte que les contraintes de cisaillement  $\sigma_{xz}$ ,  $\sigma_{yz}$  sont nulles à les faces supérieure et inférieure de la plaque. Par conséquent, l'expression pour nous et  $v_s$  peut commencer.

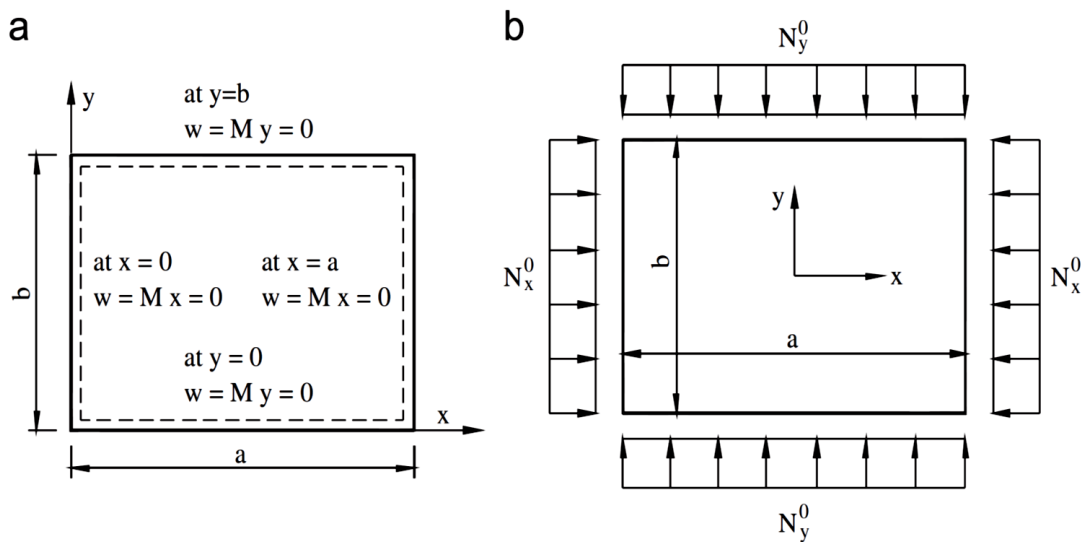
$$u_s = \left[ \frac{1}{4}z - \frac{5}{3}z \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right] \frac{\partial w_s}{\partial x}, v_s = \left[ \frac{1}{4}z - \frac{5}{3}z \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right] \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (\text{III.4})$$

**II.3. Cinématique**

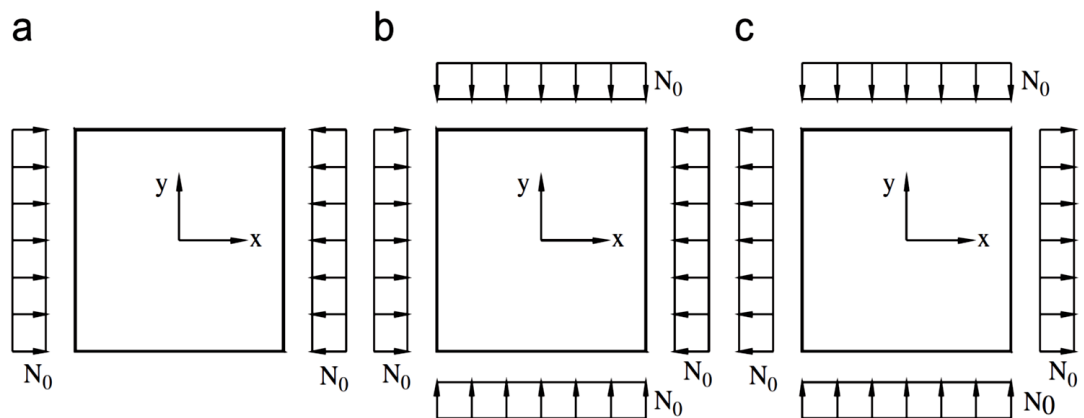
Sur la base des hypothèses formulées dans la section précédente, le champ de déplacement peut être obtenu en utilisant les équations. (III.1) - (III.4) comme :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} + z \left[ \frac{1}{4} - \frac{5}{3} \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right] \frac{\partial w_s}{\partial x} \\
 v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} + z \left[ \frac{1}{4} - \frac{5}{3} \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right] \frac{\partial w_s}{\partial y} \\
 w(x, y, z, t) &= w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t)
 \end{aligned}
 \tag{III.5}$$

Ce champ de déplacement explique une traction nulle sur les conditions aux limites sur les faces supérieure et inférieure de la plaque, et la variation quadratique des déformations de cisaillement transversales (et donc des contraintes) à travers l'épaisseur. Ainsi, il n'est pas nécessaire d'utiliser des facteurs de correction de cisaillement.



**Figure III.1 :** Plaque rectangulaire : (a) condition aux limites et (b) forces dans le plan.



**Figure III.2** : Les conditions de chargement de la plaque carrée pour (a) la compression uni-axiale, (b) la compression biaxiale et (c) la tension dans la direction x et la compression dans la direction y.

Le champ de déformation obtenu en utilisant les relations déformation-déplacement peut être donné comme :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + zk_x^b + fk_x^{-s} \\
 \varepsilon_y &= \varepsilon_y^0 + zk_y^b + fk_y^{-s} \\
 \varepsilon_z &= 0 \\
 \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^0 + zk_{xy}^b + fk_{xy}^s \\
 \gamma_{yz} &= \left[ \frac{5}{4} - 5 \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right] \frac{\partial w_s}{\partial y} \\
 \gamma_{xz} &= \left[ \frac{5}{4} - 5 \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right] \frac{\partial w_s}{\partial x}
 \end{aligned} \tag{III.6}$$

Où :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x}, k_x^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}, k_x^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\
 \varepsilon_y^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial y}, k_y^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}, k_y^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\
 \gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}, k_{xy}^b = -2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y}, \\
 k_{xy}^s &= -2 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y}, f = -\frac{1}{4}z + \frac{5}{3}z \left( \frac{z}{h} \right)^2
 \end{aligned} \tag{III.7}$$

#### II.4. Constitutive équations :

Les équations constitutives d'une plaque orthotrope peuvent s'écrire

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \end{Bmatrix} \tag{III.8}$$

Où  $Q_{ij}$  sont les constantes élastiques réduites des contraintes planes dans les axes du matériau de la plaque, et sont définies comme :

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, Q_{22} = \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \\ Q_{66} &= G_{12}, Q_{44} = G_{23}, Q_{55} = G_{31} \end{aligned} \quad (\text{III.9})$$

Dans laquelle  $E_1, E_2$  sont le module de Young,  $G_{12}, G_{23}, G_{31}$  sont le module de cisaillement et  $\nu_{12}, \nu_{21}$  sont les ratios de Poisson. Pour la plaque isotrope, ces propriétés de matériau ci-dessus se réduisent à  $E_1 = E_2 = E$ ,  $G_{12} = G_{23} = G_{31} = G$ ,  $\nu_{12} = \nu_{21} = \nu$ . Les indices 1, 2, 3 correspondent respectivement aux directions x, y, z du système de coordonnées cartésiennes.

## II.5. Équation des mouvements

L'énergie de déformation de la plaque peut s'écrire :

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_{xy} \gamma_{xy} + \sigma_{yz} \gamma_{yz} + \sigma_{xz} \gamma_{xz}) \quad (\text{III.10})$$

Substitution des égaliseurs. (III.6) jusqu'au (III.9) dans l'équation (III.10) et en intégrant à travers l'épaisseur de la plaque, l'énergie de déformation de la plaque peut être réécrite comme :

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_A (N_x \varepsilon_x^0 + N_y \varepsilon_y^0 + N_{xy} \gamma_{xy}^0 + M_x^b K_x^b + M_y^b K_y^b + M_{xy}^b K_{xy}^b) dx dy \\ &+ \frac{1}{2} \int_A (Q_{yz} \gamma_{yz} + Q_{xz} \gamma_{xz} + M_x^s K_x^s + M_y^s K_y^s + M_{xy}^s K_{xy}^s) dx dy \end{aligned} \quad (\text{III.11})$$

Où les résultantes des contraintes  $N, M$  et  $Q$  sont définies par :

$$\begin{aligned} (M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) z dz \\ (M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) f dz \\ (Q_{-xz}, Q_{-yz}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xz}, \sigma_{yz}) dz \end{aligned} \quad (\text{III.12})$$

En substituant les équations (III.11) et (III.12) à l'équation (III.10) et en intégrant à travers l'épaisseur de la plaque, les résultantes de contraintes sont liées aux déplacements généralisés ( $u_0, v_0, w_b, w_s$ ) par les relations :

$$\begin{aligned}
(N_x, N_y, N_{xy}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) dz \\
\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial u_0 / \partial x \\ \partial v_0 / \partial y \\ \partial u_0 / \partial y + \partial v_0 / \partial x \end{Bmatrix} \\
\begin{Bmatrix} M_x^b \\ M_y^b \\ M_{xy}^b \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\partial^2 w_b / \partial x^2 \\ -\partial^2 w_b / \partial y^2 \\ -2\partial^2 w_b / \partial x \partial y \end{Bmatrix} \\
\begin{Bmatrix} M_x^s \\ M_y^s \\ M_{xy}^s \end{Bmatrix} &= \frac{1}{84} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\partial^2 w_s / \partial x^2 \\ -\partial^2 w_s / \partial y^2 \\ -2\partial^2 w_s / \partial x \partial y \end{Bmatrix} \\
\begin{Bmatrix} Q_{yz} \\ Q_{xz} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{44} & 0 \\ 0 & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial w_s / \partial y \\ \partial w_s / \partial x \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{III.13}$$

Où  $A_{ij}$  et  $D_{ij}$  sont appelées respectivement rigidité extensionnelle et flexion et sont définies en termes de rigidité  $Q_{ij}$  comme :

$$\begin{aligned}
(A_{ij}, D_{ij}) &= \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} (1, z^2) dz \quad (i, j = 1, 2, 6) \\
A_{ij} &= \frac{5}{6} Q_{ij} h \quad (i, j = 4, 5)
\end{aligned} \tag{III.14}$$

Le travail effectué sur la plaque par les forces appliquées peut s'écrire

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{2} \int_A \left[ N_x^0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x^2} + N_y^0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial y^2} \right. \\
&\quad \left. + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x \partial y} \right] dxdy - \int_A q (w_b + w_s) dxdy
\end{aligned} \tag{III.15}$$

Où  $q$  et  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_{xy}$  sont des forces réparties transverses et dans le plan, respectivement. L'énergie cinétique de la plaque peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} \int_V \rho \ddot{u}_i \ddot{u}_i dV = \frac{1}{2} \int_A I_0 (\ddot{u}_0^2 + \ddot{v}_0^2 + \ddot{w}_b^2 + \ddot{w}_s^2 + 2\ddot{w}_b \ddot{w}_s) dxdy \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_A \left\{ I_2 \left[ \left( \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{I_2}{84} \left[ \left( \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} dxdy
\end{aligned} \tag{III.16}$$

Où  $\rho$  est la masse volumique de la plaque et  $I_i$  ( $i = 0, 2$ ) sont les inerties définies par :

$$(I_0, I_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z^2) \rho dz \tag{III.17}$$



Le principe de Hamilton est utilisé ici pour dériver les équations de mouvement appropriées au champ de déplacement et l'équation constitutive. Le principe peut être énoncé sous forme analytique

$$0 = \int_0^t \delta(U + V - T) dt \quad (\text{III.18})$$

Où  $\delta$  indique une variation par rapport à  $x$  et  $y$ . En remplaçant les équations (III.13) jusqu'à (III.17) dans l'équation (III.18) et en intégrant l'équation par parties, en collectant les coefficients de  $\delta u_0$ ,  $\delta v_0$ ,  $\delta w_b$  et  $\delta w_s$ , les équations de mouvement pour la plaque orthotrope sont obtenues comme suit :

$$\begin{aligned} \delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= I_0 \ddot{u}_0 \\ \delta v_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= I_0 \ddot{v}_0 \\ \delta w_b : \left[ \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} \right] + q \\ &\left[ N_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] = I_0 \ddot{w} - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_b \\ \delta w_s : \left[ \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} \right] + q \\ &+ \left[ N_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] = I_0 \ddot{w} - \frac{I_2}{84} \nabla^2 \ddot{w}_s \end{aligned} \quad (\text{III.19})$$

Avec :

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (\text{III.20})$$

Les conditions aux limites d'une plaque (de longueur  $a$  et de largeur  $b$ ) sont données comme suit :

- **Limites encadrées- encadrées :**

Sur les bords  $x = 0$  et  $a$

$$w_b = w_s = \frac{\partial w_b}{\partial x} = \frac{\partial w_s}{\partial x} = 0 \quad (\text{III.21})$$

Sur les bords  $y = 0$  et  $b$

$$w_b = w_s = \frac{\partial w_b}{\partial y} = \frac{\partial w_s}{\partial y} = 0 \quad (\text{III.22})$$

- **Limites simplement appuyer :**

Sur les bords  $x = 0$  et  $a$

$$w_b = w_s = -\left(D_{11} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}\right) = -\frac{1}{84} \left(D_{11} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}\right) = 0 \quad (\text{III.23})$$

Sur les bords  $y = 0$  et  $b$

$$w_b = w_s = -\left(D_{12} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}\right) = -\frac{1}{84} \left(D_{12} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}\right) = 0 \quad (\text{III.24})$$

- **Limites libres-libres :**

Sur les bords  $x = 0$  et  $a$

$$\begin{aligned} & -\left(D_{11} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}\right) = -\frac{1}{84} \left(D_{11} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}\right) = 0 \\ & -\left[D_{11} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} + (D_{12} + 4D_{66}) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial y^2}\right] \quad (\text{III.25}) \\ & = A_{55} \frac{\partial w_s}{\partial x} - \frac{1}{84} \left[D_{11} \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} + (D_{12} + 4D_{66}) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial y^2}\right] = 0 \end{aligned}$$

Sur les bords  $y = 0$  et  $b$

$$\begin{aligned} & -\left(D_{12} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}\right) = -\frac{1}{84} \left(D_{12} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}\right) = 0 \\ & -\left[(D_{12} + 4D_{66}) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^2 \partial y} + D_{22} \frac{\partial^3 w_b}{\partial y^3}\right] \quad (\text{III.26}) \\ & = A_{44} \frac{\partial w_s}{\partial y} - \frac{1}{84} \left[(D_{12} + 4D_{66}) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^2 \partial y} + D_{22} \frac{\partial^3 w_s}{\partial y^3}\right] = 0 \end{aligned}$$

## II.6. Flambement d'une plaque rectangulaire simplement supportée sous des charges de compression :

Lorsqu'une plaque est soumise à des forces de compression dans le plan (**Figure III.2**), et si les forces sont faibles, l'équilibre de la plaque est stable et la plaque reste plate jusqu'à ce qu'une certaine charge soit atteinte. À cette charge, appelée charge de flambage, l'état stable de la plaque est perturbé et la plaque cherche une configuration d'équilibre alternative accompagnée d'un changement dans le comportement de déflexion de la charge. Les charges critiques de flambage d'une plaque rectangulaire orthotrope simplement supportée seront déterminées dans cet article en utilisant la solution Navier. Les équations régissant la plaque en cas de flambement statique sont données par :

$$\begin{aligned}
& D_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} \\
& = -N_0 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{1}{84} \left[ D_{11} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + 2(D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} \right. \\
& \quad \left. + D_{22} \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} \right] - \left[ A_{44} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + A_{55} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \right] \\
& = -N_0 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)
\end{aligned} \tag{III.27}$$

La méthode Navier n'est appliquée que pour des conditions aux limites simplement prises en charge sur les quatre bords de la plaque rectangulaire, comme le montre la figure 1a. Les conditions aux limites simplement prises en charge sur les quatre bords de la plaque rectangulaire peuvent être exprimées comme suit :

$$w(x, 0) = w(x, b) = w(0, y) = w(a, y) = 0 \tag{III.28}$$

$$M_x(0, y) = M_x(a, y) = M_y(x, 0) = M_y(x, b) = 0 \tag{III.29}$$

Les fonctions de déplacement  $w_b$  et  $w_s$  suivantes sont choisies pour satisfaire automatiquement les conditions aux limites dans les équations (III.21) jusqu'au (III.26)

$$\begin{aligned}
w_b &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{bmn} \sin \alpha x \sin \beta y \\
w_s &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{smn} \sin \alpha x \sin \beta y
\end{aligned} \tag{III.30}$$

Où  $\alpha = m\pi/a$ ,  $\beta = n\pi/b$  et  $W_{bmn}$ ,  $W_{smn}$  sont des coefficients. En remplaçant l'équation (III.30) par l'équation (III.27), le système suivant est obtenu :

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{bmn} \\ w_{smn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{III.31}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
k_{11} &= [D_{11}\alpha^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2\beta^2 + D_{22}\beta^4] - N_0(\alpha^2 + \gamma\beta^2) \\
k_{12} &= -N_0(\alpha^2 + \gamma\beta^2) \\
k_{22} &= \frac{1}{84} [D_{11}\alpha^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2\beta^2 \\
& \quad + D_{22}\beta^4] A_{55}\alpha^2 + A_{44}\beta^2 - N_0(\alpha^2 + \gamma\beta^2)
\end{aligned} \tag{III.32}$$

Pour une solution non triviale, le déterminant de la matrice des coefficients dans l'équation (III.31) doit être nul, ce qui donne l'expression suivante pour la charge de flambement :

$$N_0 = \frac{D}{\alpha^2 + \gamma\beta^2} \frac{(D/84 + A_{55}\alpha^2 + A_{44}\beta^2)}{D + (D/84 + A_{55}\alpha^2 + A_{44}\beta^2)} \quad (\text{III.33})$$

Avec :

$$D = D_{11}\alpha^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2\beta^2 + D_{22}\beta^4 \quad (\text{III.34})$$

De toute évidence, lorsque l'effet de la déformation de cisaillement transverse est négligé, l'équation (III.33) donne le résultat obtenu en utilisant la théorie classique des plaques. Elle indique que la déformation de cisaillement transverse a pour effet de réduire la charge de flambement. Pour chaque choix de  $m$  et  $n$ , il existe une valeur unique correspondante de  $N_0$ . La charge critique de flambement est la plus petite valeur de  $N_0(m, n)$ .

### II.7. Conclusion :

Dans ce chapitre une approche analytique a été développée pour l'étude de la charge critique de flambement des plaques orthotrope et isotrope simplement appuyée ou nous avons utilisé des formulations ci-dessus pour étudier l'effet de certains paramètres sur l'analyse de flambement des plaques à l'aide de la théorie des plaques à deux variables raffinées

# **Chapitre IV**

## **Résultats & discussions**

### IV.1. Introduction :

Dans ce chapitre les solutions analytiques obtenues dans le chapitre précédent pour le l'analyse et prédire la charge critique de flambement pour les plaques isotropes et orthotropes ont été obtenues par la solution de Navier. Les résultats numériques obtenus par les nouveaux modèles de cisaillement sont présentés, et comparés à ceux disponibles dans la littérature pour voir l'influence de la variation matérielle sur la charge critique de flambement.

### IV.2. Résultats numériques et discussion :

À des fins de vérification, une plaque rectangulaire simplement supportée soumise aux conditions de chargement, comme le montre la figure IV.2, est considérée pour illustrer la précision de la présente théorie dans la prédiction du comportement de flambage de la plaque. Afin d'étudier les effets du rapport côté / épaisseur et du rapport module, le premier exemple est appliqué pour les plaques carrées isotropes et orthotropes. De nombreux facteurs de correction de cisaillement ( $k = 2/3$ ,  $k = 5/6$  et  $k = 1$ ) sont également utilisés pour le FSDT en comparaison avec la théorie actuelle. Les constantes d'ingénierie suivantes sont utilisées [12]

$$E_1/E_2 \text{ Variable}$$

$$G_{12}/E_2 = G_{13}/E_2 = 0.5, \quad G_{23}/E_2 = 0.2, \quad \nu_{12} = 0.25$$

Pour plus de commodité, la charge de flambement non dimensionnelle suivante est utilisée :

$$\bar{N} = \frac{N_{cr} a^2}{E_2 h^3}$$

Où  $a$  est la longueur de la plaque carrée et  $h$  est l'épaisseur de la plaque.

Les résultats de la charge de flambement critique d'une plaque carrée simplement supportée sont présentés dans les Tableaux (IV.1-IV.3) et les Fig. (IV.3–IV.6).

Dans le cas de la plaque isotrope (Fig. IV.3a), les résultats obtenus par RPT et FSDT sont en excellent accord même si la plaque est très épaisse. Dans le cas d'une plaque carrée ( $a = b = 5h$ ), la différence maximale de RPT et FSDT avec le facteur de correction de cisaillement 5/6 est de 0,24%, comme indiqué dans le tableau 3.

Lorsque la plaque orthotrope est utilisée, la différence entre RPT et FSDT augmentera par rapport à l'augmentation du rapport côté / épaisseur (Fig. IV.3) et du rapport de module (Fig. IV.4– IV.6).

Comme présenté dans le tableau (IV.1), les différences entre RPT et FSDT ( $k = 5/6$ ) et RPT et FSDT ( $k = 1$ ) sont respectivement de 16,14% et 2,24% pour le même cas de plaque carrée ( $a = b = 5h$  et  $E1 / E2 = 40$ ). Les tableaux 1 à 3 montrent que la différence de charge critique de flambement entre RPT et FSDT dépend non seulement des rapports côté / épaisseur et module, mais aussi des conditions de charge dans le plan (Fig. IV.2). En cas de plaque carrée ( $a = b = 10h$ ), la différence entre RPT et FSDT ( $k = 5/6$ ) est de 9,62% pour la compression uni-axiale (Fig. IV.4 et Tableau IV.1), 9,36% pour la compression biaxiale (Fig. IV.5 et Tableau IV.2), et 2,92% pour la tension dans la direction  $x$  et la compression dans la direction  $y$  (Fig. IV.6 et Tableau IV.3).

Tableau IV.1 : Comparaison de la charge de flambement critique non dimensionnelle de plaques carrées soumises à une compression uni-axiale

a/h	Théories	Isotrope $\nu=0.3$		Orthotrope	
5	RPT	2.9512	6.3478	9.1039	10.5785
	FSDT ( $k = 2/3$ )	2.8200	5.5679	7.1122	7.7411
	FSDT ( $k = 5/6$ )	2.9498	6.1804	8.2199	9.1085
	FSDT ( $k = 1$ )	3.0432	6.6715	9.1841	10.3463
10	ORPT	3.4224	9.3732	16.7719	22.2581
	FSDT ( $k = 2/3$ )	3.3772	8.8988	14.7011	18.3575
	FSDT ( $k = 5/6$ )	3.4222	9.2733	15.8736	20.3044
	FSDT ( $k = 1$ )	3.4530	9.5415	16.7699	21.8602
20	RPT	3.5650	10.6534	21.3479	31.0685
	FSDT ( $k = 2/3$ )	3.5526	10.4926	20.4034	28.8500
	FSDT ( $k = 5/6$ )	3.5650	10.6199	20.9528	30.0139
	FSDT ( $k = 1$ )	3.5733	10.7066	21.3363	30.8451
50	RPT	3.6071	11.0780	23.1225	34.9717
	FSDT ( $k = 2/3$ )	3.6051	11.0497	22.9366	34.4886
	FSDT ( $k = 5/6$ )	3.6071	11.0721	23.0461	34.7487
	FSDT ( $k = 1$ )	3.6085	11.0871	23.1197	34.9244
100	RPT	3.6132	11.1415	23.4007	35.6120
	FSDT ( $k = 2/3$ )	3.6127	11.1343	23.3527	35.4852
	FSDT ( $k = 5/6$ )	3.6132	11.1400	23.3810	35.5538
	FSDT ( $k = 1$ )	3.6135	11.1438	23.3999	35.5996
	CPT	3.6152	11.1628	23.4949	35.8307

Tableau IV.2 : Comparaison de la charge critique de flambement non dimensionnelle de plaques carrées soumises à une charge de compression biaxiale

a/h	Théories	Isotrope $\nu=0.3$	Orthotrope		
			$E_1/E_2=10$	$E_1/E_2=25$	$E_1/E_2=40$
5	RPT	1.4756	2.8549 <sup>a</sup>	3.3309 <sup>a</sup>	3.4800 <sup>a</sup>
	FSDT (k = 2/3)	1.4100	2.5042 <sup>a</sup>	2.7332 <sup>a</sup>	2.8303 <sup>a</sup>
	FSDT (k = 5/6)	1.4749	2.8319 <sup>a</sup>	3.1422 <sup>a</sup>	3.2822 <sup>a</sup>
	FSDT (k = 1)	1.5216	3.1027 <sup>a</sup>	3.4933 <sup>a</sup>	3.6793 <sup>a</sup>
10	RPT	1.7112	4.6718 <sup>a</sup>	6.0646 <sup>a</sup>	7.2536 <sup>a</sup>
	FSDT (k = 2/3)	1.6886	4.4259	5.4351 <sup>a</sup>	6.0797 <sup>a</sup>
	FSDT (k = 5/6)	1.7111	4.6367	5.8370 <sup>a</sup>	6.6325 <sup>a</sup>
	FSDT (k = 1)	1.7265	4.7708	6.1425 <sup>a</sup>	7.0690 <sup>a</sup>
20	RPT	1.7825	5.3267	7.6643 <sup>a</sup>	9.6614 <sup>a</sup>
	FSDT (k = 2/3)	1.7763	5.2463	7.3701 <sup>a</sup>	8.9895 <sup>a</sup>
	FSDT (k = 5/6)	1.7825	5.3100	7.5546 <sup>a</sup>	9.3049 <sup>a</sup>
	FSDT (k = 1)	1.7866	5.3533	7.6834 <sup>a</sup>	9.5297 <sup>a</sup>
50	RPT	1.8036	5.5390	8.2784 <sup>a</sup>	10.6576 <sup>a</sup>
	FSDT (k = 2/3)	1.8025	5.5249	8.2199 <sup>a</sup>	10.5111 <sup>a</sup>
	FSDT (k = 5/6)	1.8036	5.5361	8.2566 <sup>a</sup>	10.5810 <sup>a</sup>
	FSDT (k = 1)	1.8042	5.5436	8.2812 <sup>a</sup>	10.6282 <sup>a</sup>
100	RPT	1.8066	5.5707	8.3744 <sup>a</sup>	10.8172 <sup>a</sup>
	FSDT (k = 2/3)	1.8063	5.5672	8.3593 <sup>a</sup>	10.7788 <sup>a</sup>
	FSDT (k = 5/6)	1.8066	5.5700	8.3687 <sup>a</sup>	10.7972 <sup>a</sup>
	FSDT (k = 1)	1.8068	5.5719	8.3751 <sup>a</sup>	10.8095 <sup>a</sup>
	CPT	1.8076	5.5814	8.4069	10.8715 <sup>a</sup>

<sup>a</sup> Le mode pour la plaque est (m, n) = (1,2).



Tableau IV.3 : Comparaison de la charge de flambement critique non dimensionnelle de plaques carrées soumises à une tension dans la direction x et à une compression dans la direction y

a/h	Théories	Isotrope $\nu=0.3$	Orthotrope		
			$E_1/E_2=10$	$E_1/E_2=25$	$E_1/E_2=40$
5	RPT	4.8274 <sup>a</sup>	4.0258 <sup>b</sup>	4.1044 <sup>c</sup>	4.1525 <sup>c</sup>
	FSDT (k = 2/3)	4.4175 <sup>a</sup>	3.2849 <sup>d</sup>	3.3001 <sup>e</sup>	3.3053 <sup>e</sup>
	FSDT (k = 5/6)	4.8158 <sup>a</sup>	3.9241 <sup>c</sup>	3.9794 <sup>c</sup>	4.0075 <sup>d</sup>
	FSDT (k = 1)	5.1237 <sup>a</sup>	4.4488 <sup>b</sup>	4.5691 <sup>c</sup>	4.6073 <sup>c</sup>
10	RPT	6.6024 <sup>a</sup>	7.7863 <sup>a</sup>	8.5471 <sup>b</sup>	9.1638 <sup>b</sup>
	FSDT (k = 2/3)	6.4032 <sup>a</sup>	7.2656 <sup>a</sup>	7.7820 <sup>b</sup>	8.1208 <sup>b</sup>
	FSDT (k = 5/6)	6.6010 <sup>a</sup>	7.7748 <sup>a</sup>	8.4774 <sup>b</sup>	8.9039 <sup>b</sup>
	FSDT (k = 1)	6.7398 <sup>a</sup>	8.0651 <sup>a</sup>	9.0153 <sup>b</sup>	9.5197 <sup>b</sup>
20	RPT	7.2754 <sup>a</sup>	9.2811 <sup>a</sup>	11.6347 <sup>b</sup>	12.8031 <sup>b</sup>
	FSDT (k = 2/3)	7.2139 <sup>a</sup>	9.1310 <sup>a</sup>	11.2544 <sup>b</sup>	12.1990 <sup>b</sup>
	FSDT (k = 5/6)	7.2753 <sup>a</sup>	9.2782 <sup>a</sup>	11.6015 <sup>b</sup>	12.6339 <sup>b</sup>
	FSDT (k = 1)	7.3168 <sup>a</sup>	9.3790 <sup>a</sup>	11.8453 <sup>b</sup>	12.9428 <sup>b</sup>
50	RPT	7.4895 <sup>a</sup>	9.8101 <sup>a</sup>	12.9531 <sup>b</sup>	14.4177 <sup>b</sup>
	FSDT (k = 2/3)	7.4790 <sup>a</sup>	9.7830 <sup>a</sup>	12.8751 <sup>b</sup>	14.2839 <sup>b</sup>
	FSDT (k = 5/6)	7.4895 <sup>a</sup>	9.8097 <sup>a</sup>	12.9463 <sup>b</sup>	14.3789 <sup>b</sup>
	FSDT (k = 1)	7.4965 <sup>a</sup>	9.8275 <sup>a</sup>	12.9942 <sup>b</sup>	14.4430 <sup>b</sup>
100	RPT	7.5211 <sup>a</sup>	9.8907 <sup>a</sup>	13.1666 <sup>b</sup>	14.6827 <sup>b</sup>
	FSDT (k = /3)	7.5185 <sup>a</sup>	9.8838 <sup>a</sup>	13.1463 <sup>b</sup>	14.6474 <sup>b</sup>
	FSDT (k = 5/6)	7.5211 <sup>a</sup>	9.8906 <sup>a</sup>	13.1648 <sup>b</sup>	14.6724 <sup>b</sup>
	FSDT (k = 1)	7.5229 <sup>a</sup>	9.8951 <sup>a</sup>	13.1772 <sup>b</sup>	14.6891 <sup>b</sup>
	CPT	7.5317 <sup>a</sup>	9.9179 <sup>a</sup>	13.2393 <sup>b</sup>	14.7732 <sup>b</sup>

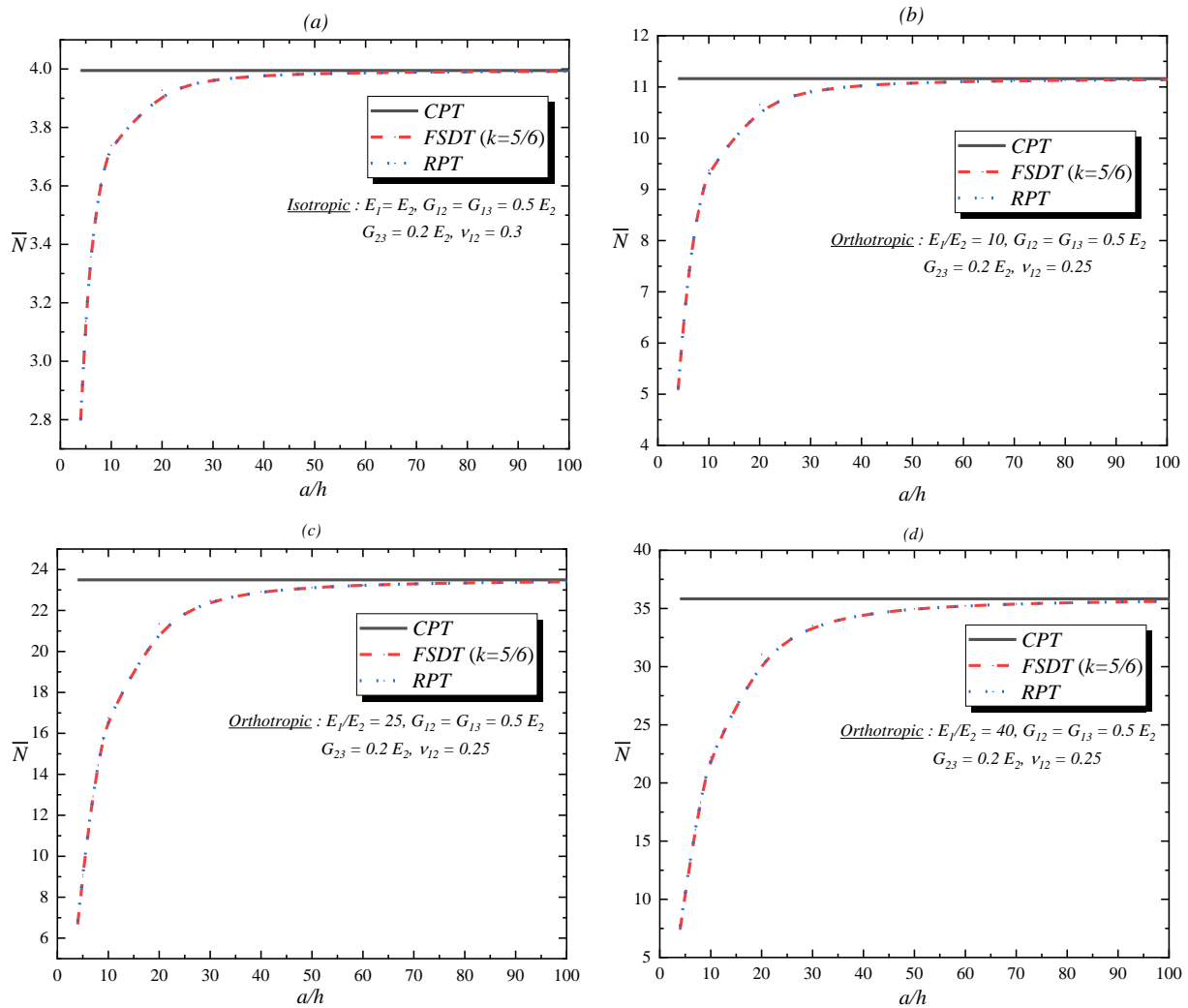
<sup>a</sup> Le mode pour la plaque est (m, n) = (1,2).

<sup>b</sup> Le mode pour la plaque est (m, n) = (1,3).

<sup>c</sup> Le mode pour la plaque est (m, n) = (1,4).

<sup>d</sup> Le mode pour la plaque est (m, n) = (1,5).

<sup>e</sup> Le mode pour la plaque est (m, n) = (1,6).



**Fig. IV.3.** L'effet des rapports côté / épaisseur et module sur la charge critique de flambement d'une plaque carrée soumise à une compression uni-axiale : **(a)** isotrope, **(b)**  $E_1/E_2 = 10$ , **(c)**  $E_1/E_2 = 25$  et **(d)**  $E_1/E_2 = 40$ .

D'après la figure IV.3 la charge critique de flambement augmente avec l'augmentation du rapport  $a/h$  en passant d'une plaque épaisse à une plaque mince. Le rapport  $a/h$  n'influe pas sur la théorie classique c'est pour ça la courbe de cette dernière reste plane.

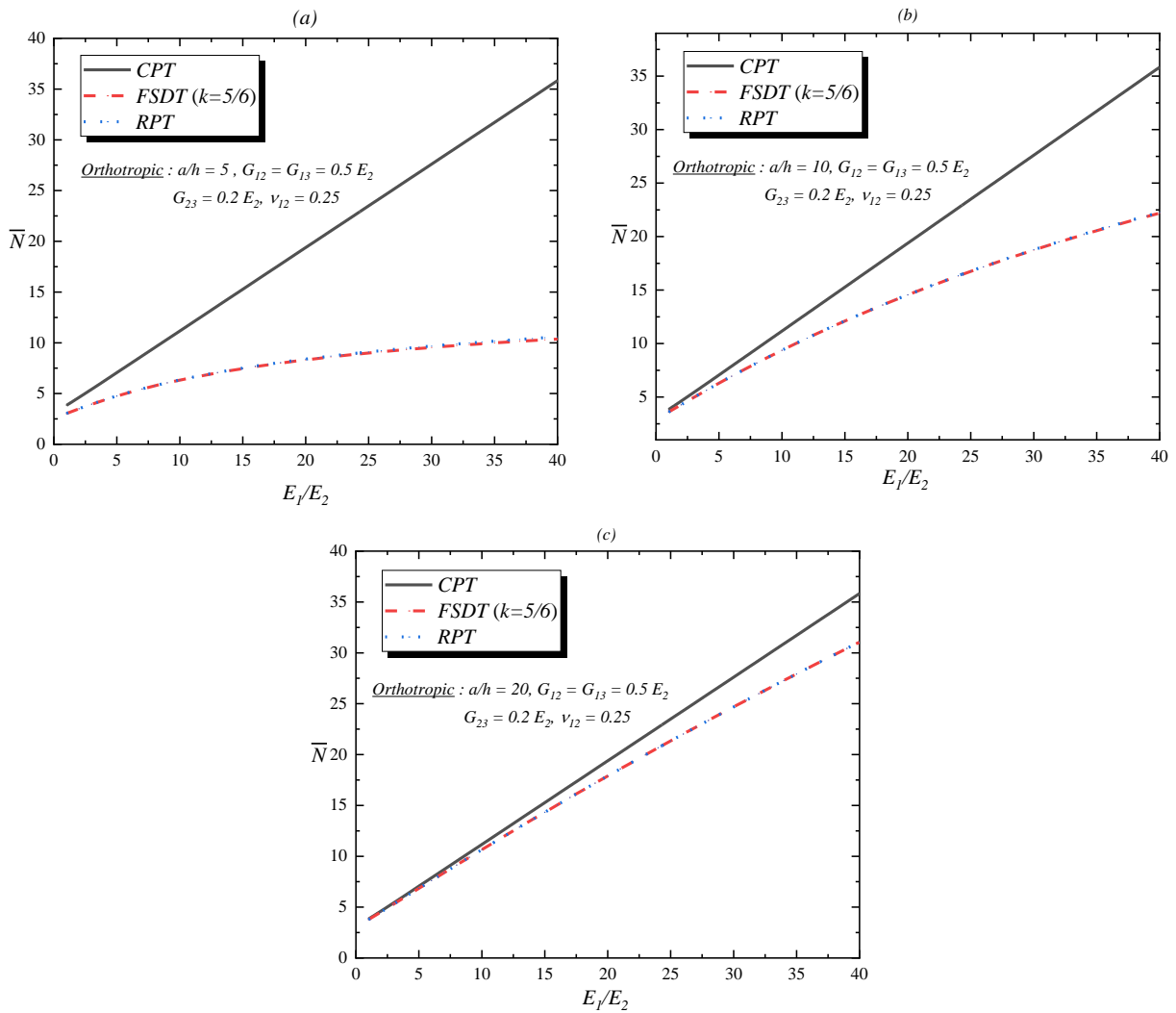


Fig. IV.4. L'effet du rapport de module sur la charge critique de flambement d'une plaque carrée soumise à une compression uni-axiale : (a)  $a = 10 h$  et (b)  $a = 20 h$ .

La figure IV.4 représente la variation de la charge critique de flambement en fonction du rapport  $E_1/E_2$ , on peut remarquer que la charge critique de flambement pour une plaque carrée soumise à une compression uni-axiale augmente avec l'augmentation du rapport de module.

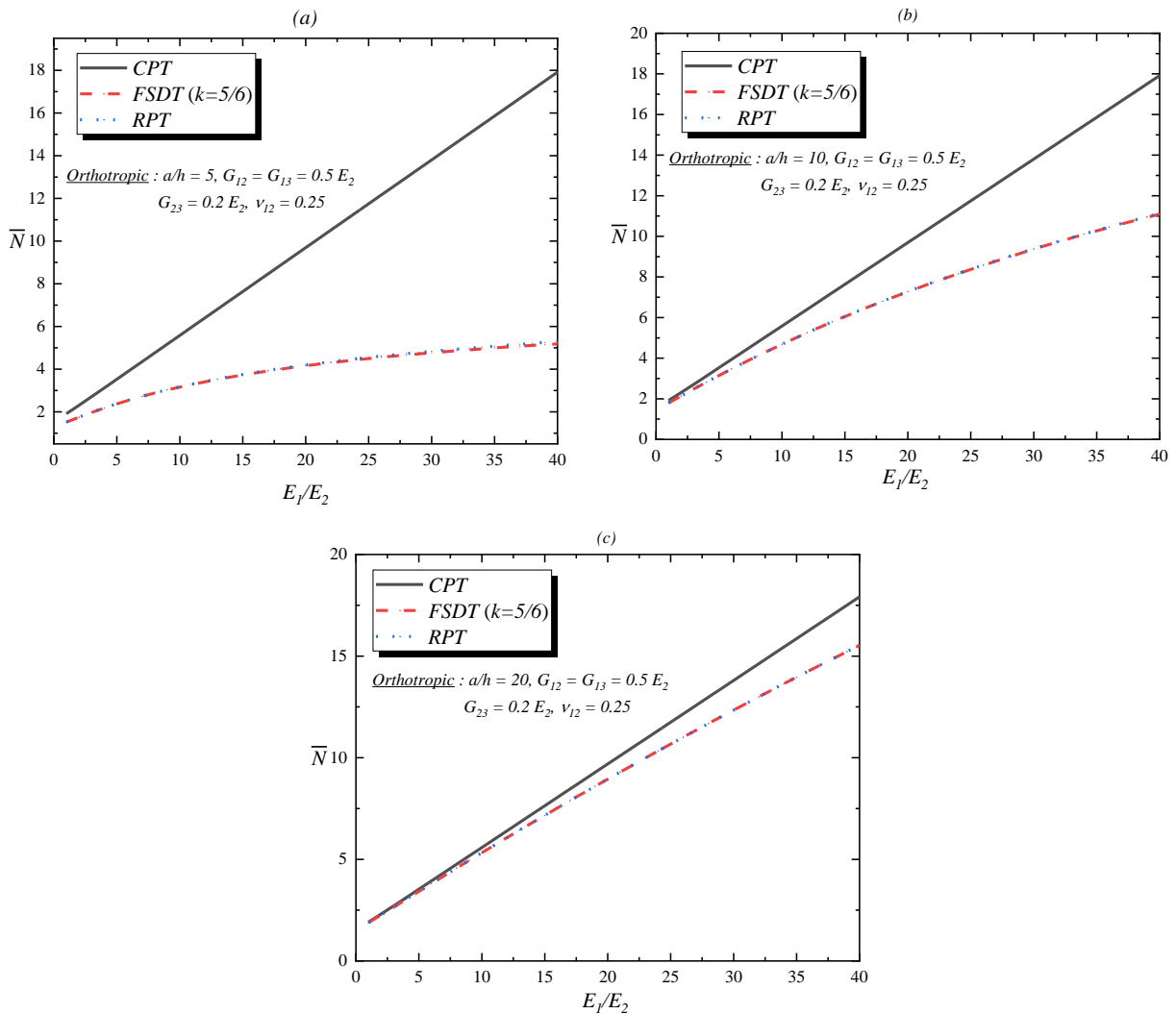


Fig. IV.5. L'effet du rapport de module sur la charge critique de flambement d'une plaque carrée soumise à une compression biaxiale : (a)  $a = 10 h$  et (b)  $a = 20 h$ .

La comparaison suivante est effectuée pour l'orthotrope plaques rectangulaires soumises à une compression uni-axiale avec variation du rapport d'aspect et du rapport côté / épaisseur. Une théorie efficace des deux plaques raffinées à deux variables proposées par Shimpi et Patel [11] a été appliquée dans cet article pour le comportement au flambement des plaques isotropes et orthotropes.

La théorie tient compte des effets de cisaillement transverse et de la distribution parabolique des déformations de cisaillement transverse à travers l'épaisseur de la plaque, il n'est donc pas nécessaire d'utiliser des facteurs de correction de cisaillement.

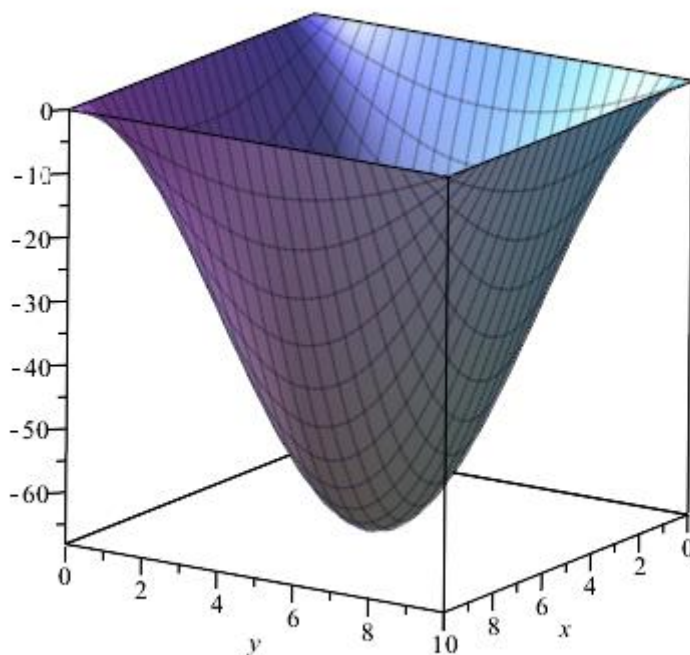


Figure. IV.7. Formes de mode de flambement de la plaque carrée orthotrope (mode (1,1)).

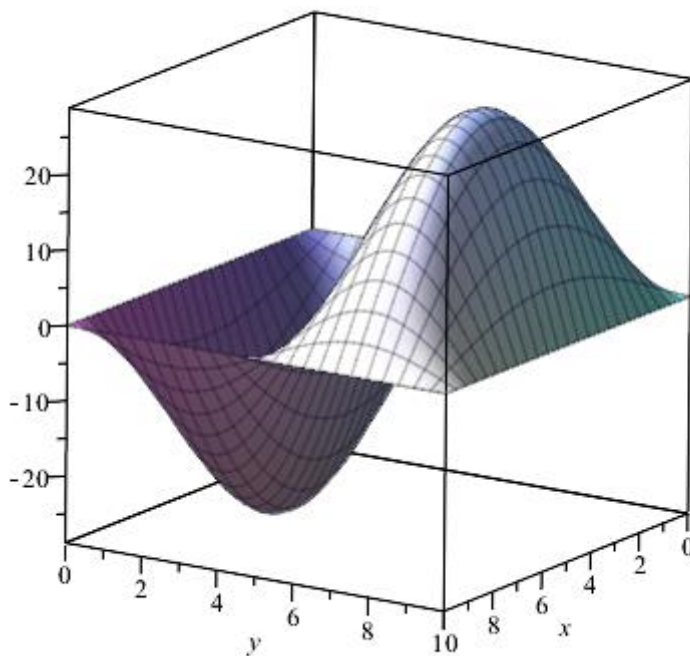


Figure. IV.7. Formes de mode de flambement de la plaque carrée orthotrope (mode (1,2)).

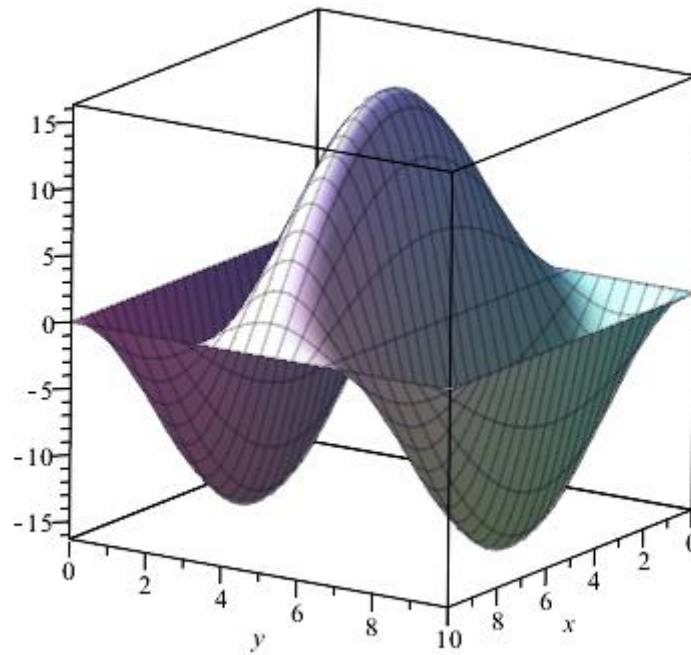


Figure. IV.7. Formes de mode de flambement de la plaque carrée orthotrope (mode (1,3)).

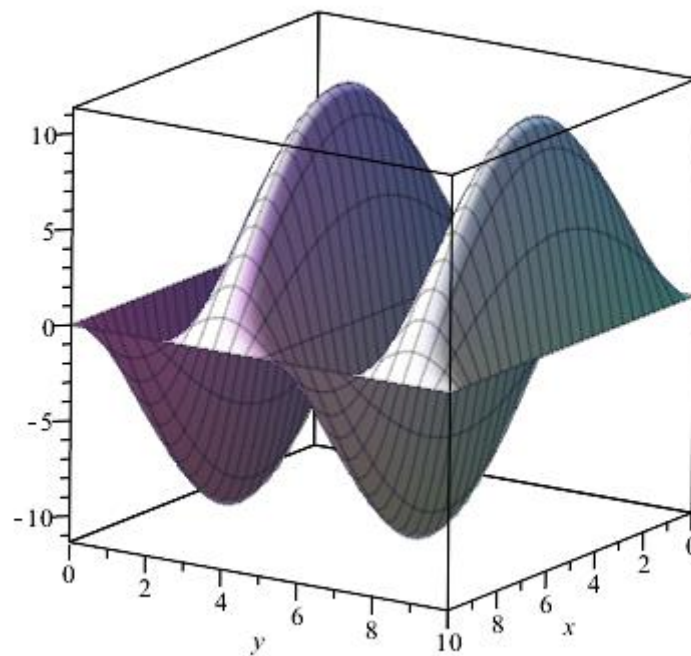


Figure. IV.7. Formes de mode de flambement de la plaque carrée orthotrope (mode (1,4)).

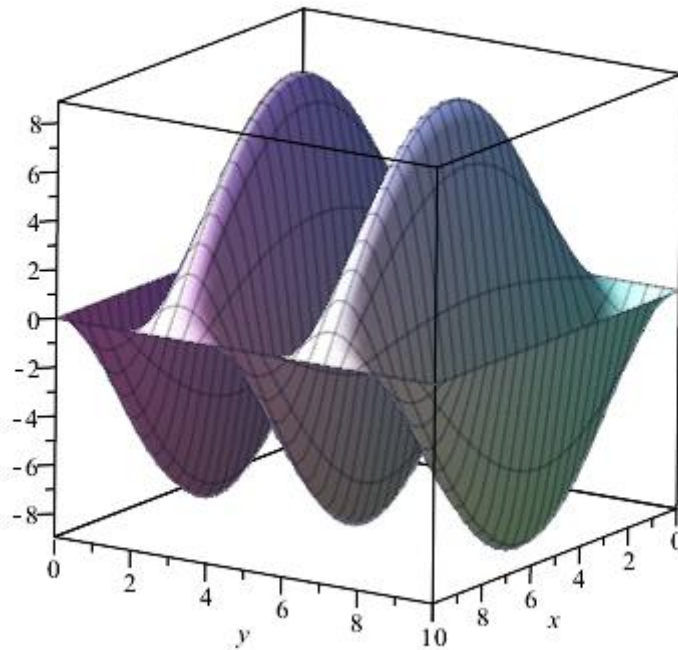


Figure. IV.7. Formes de mode de flambement de la plaque carrée orthotrope (mode (1,5)).

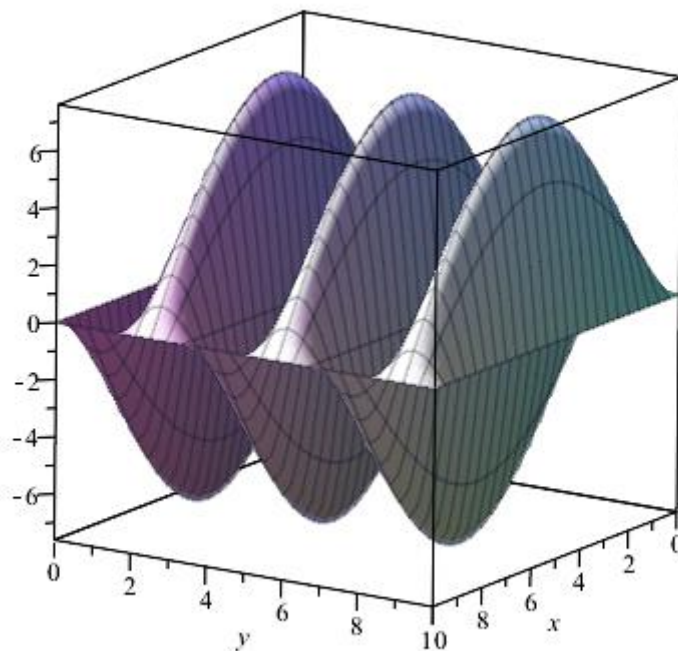


Figure. IV.7. Formes de mode de flambement de la plaque carrée orthotrope (mode (1,6)).

Les équations gouvernantes présentent une forte similitude avec la théorie classique des plaques à bien des égards. On peut conclure que la théorie des deux plaques à raffinement variable peut prédire avec précision les charges critiques de flambement des plaques isotropes

### **IV.3. Conclusion :**

Une théorie efficace des deux plaques raffinées à deux variables proposées par Shimpi et Patel [11] a été appliquée dans cet article pour le comportement au flambage des plaques isotropes et orthotropes.

La théorie tient compte des effets de cisaillement transverse et la distribution parabolique des déformations de cisaillement transverse à travers l'épaisseur de la plaque, il n'est donc pas nécessaire d'utiliser des facteurs de correction de cisaillement. On peut conclure que la présente théorie raffinée (RPT) des plaques et peut prédire avec précision les charges critiques de flambement des plaques isotropes et orthotrope.



## **Conclusion générale**

## *Conclusion générale*

Une théorie efficace des plaques raffinées à deux variables proposée par Shimpi et Patel [11] a été appliquée dans cet article pour le comportement de flambement des plaques isotropes et orthotropes. il n'est donc pas nécessaire d'utiliser des facteurs de correction de cisaillement. Les équations dominantes présentent une forte similitude avec la théorie classique des plaques dans de nombreux aspects. On peut conclure que la théorie des plaques raffinées à deux variables peut prédire avec précision les charges critiques de flambement des plaques isotropes.

## **Références bibliographiques**

## Références bibliographiques

<i>Indices</i>	<i>Références</i>
[1]	Koizumi, M. (1993), "The concept of FGM, ceramic transactions", <i>Funct Grad Mater</i> , <b>34</b> , 3–10.
[2]	Vel, S.S., Batra, R.C. (2004), "Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates", <i>J Sound Vib.</i> , <b>272</b> , 703–730.
[3]	Tauchert, TR. (1991), " Thermally induced flexure, buckling and vibration of plates", <i>ASME Appl Mech Rev</i> , <b>44</b> , 347–60.
[4]	Reddy, JN, Chin, CD. (1998), " Thermomechanical analysis of functionally graded cylinders and plates", <i>J Thermal Stress</i> , <b>21</b> ,593–626.
[5]	Reddy, JN. (2000), "Analysis of functionally graded plates", <i>Int J Numer Methods Eng</i> , <b>47</b> ,663–84.
[6]	Erdogan, F. (1995), " Fracture mechanics of functionally graded materials", <i>Compos Eng</i> , <b>5</b> ,770–3.
[7]	Jin, JH, Batra, RC. (1996), "Some basic fracture mechanics concepts of functionally graded materials", <i>J Mech Phys Solids</i> , <b>44</b> ,1221–35.
[8]	Praveen, GN, Reddy, JN. (1998), " Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic–metal plates", <i>Int J Solids Struct</i> , <b>35</b> (33),4457–76.
[9]	Birman V, Byrd LW. (2007), " Modeling and analysis of functionally graded materials and structures", <i>ASME Appl Mech Rev</i> , <b>60</b> ,195–216.
[10]	Zenkour, AM. (2007), "Benchmark trigonometric and 3-D elasticity solutions for an exponentially graded thick rectangular plate", <i>Appl Math Model</i> , <b>77</b> ,197–214.
[11]	Sladek, J, Sladek, V, Hellmich, CH, Eberhardsteiner, J. (2007), "Analysis of thick functionally graded plates by local integral equation", <i>Commun Numer Meth Eng</i> , <b>23</b> ,733–54.
[12]	Sladek, J, Sladek, V, Solek, P, Wen, PH, Atluri, SN. (2008), " Thermal analysis of Reissner– Mindlin shallow shells with FGM properties by the MLPG", <i>CMES – Comput Model Eng Sci</i> , <b>30</b> ,77–97.
[13]	Bo, Y, Hao-jiang, D, Wei-qiu, C. (2008), "Elasticity solutions for functionally graded plates in cylindrical bending", <i>Appl Math Mech</i> , <b>29</b> (8),999–1004.
[14]	Matsunaga, H. (2008),"Free vibration and stability of functionally graded plates according to 2-D higher-order deformation theory", <i>Compos Struct</i> , <b>82</b> ,256–70.
[15]	Matsunaga, H. (2009), "Stress analysis of functionally graded plates subjected to thermal and mechanical loadings", <i>Compos Struct</i> , <b>87</b> ,344–57.

[16]	Khabbaz, RS, Manshadi, BD, Abedian, A. (2009), " Nonlinear analysis of fgm plates under pressure loads using the higher-order shear deformation theories", <i>Compos Struct</i> , <b>89</b> ,333–44.
[17]	Zenkour, AM, Alghamdi, NA. (2010), "Thermo-mechanical bending response of functionally graded non symmetric sandwich plates", <i>J Sandwich Struct Mater</i> , <b>12</b> ,7–46.
[18]	Talha ,M, Singh, BN.( 2010)," Static response and free vibration analysis of fgm plates using higher order shear deformation theory", <i>Appl Math Model</i> , <b>34</b> ,3991–4011.
[19]	Vaghefi, R, Baradaran ,GH, Koohkan, H.( 2010), " Three-dimensional static analysis of thick functionally graded plates by using meshless local Petrov–Galerkin (MLPG) method", <i>Eng Anal Bound Elem</i> , <b>43</b> ,564–73.
[20]	Benachour, A, Tahar ,HD, Atmane, HA, Tounsi ,A, Ahmed ,MS. (2011), " A four variable refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates with arbitrary gradient". <i>Composites: Part B</i> , <b>42</b> ,1386–94.
[21]	Thai, HT, Choi, DH. " A refined shear deformation theory for free vibration of functionally graded plates on elastic foundation", <i>Composites</i> ,Part B 2011.
[22]	Reddy, JN, Kim ,J. " A nonlinear modified couple stress-based third-order theory of functionally graded plates". <i>Compos Struct</i> 2012; 94:1128–43.
[23]	Mantari, JL, Guedes Soares, C.( 2012), " Bending analysis of thick exponentially graded plates using a new trigonometric higher order shear deformation theory", <i>Compos Struct</i> , <b>94</b> ,1991–2000.
[24]	Navid, S. (2012), "Une approche très efficace pour l’analyse du dé laminage des plaques stratifiées infiniment longues", Thèse de PhD, Université de Paris Est, France.
[25]	Baron, C., Naili, S. (2008), "Propagation d’ondes élastiques au sein d’un guide d’ondes élastiques anisotrope à gradient unidirectionnel sous chargement fluide", <i>Compte Rendue Mécanique</i> , <b>336</b> (9), 722–730.
[26]	Yamanoushi, M., Koizumi, M., Hiraii T., Shoita, I. (1990), "Proceedings of the first international symposium on functionally gradient materials", editors, Japan.
[27]	Kawasaki, A., Watanabe, R. (1997)," Concept and P/M fabrication of functionally gradient materials". <i>Ceramics International</i> , <b>8842</b> (95),73–83.
[28]	Boch, P., Chartier, T., Huttepain ,M. (1986), " Tape casting of Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> /ZrO <sub>2</sub> laminated Composites", <i>J. Am. Ceram. Soc</i> ; <b>69</b> (8),191-192.
[29]	Yin H.M., Sun L.Z. and Paulino, G.H., (2004), "Micromechanics-based elastic model for functionally graded materials with particle interactions", <i>Acta Materialia</i> , Vol. <b>52</b> , 3535-3543.
[30]	Koizumi, M.(1991), " FGM activities in Japan, Department of Materials Chemistry", <i>Ryukoku University, Ohtsu Japan</i> 520-21.
[31]	Koizumi, M., (1992), " Recent Progress of functionally graded materials in Japan. <i>Ceram. Eng</i> ", <i>Sci. Proc</i> , <b>13</b> (7-8),333-347.

[32]	Koizumi M., (1997), " FGM activities in Japan", <i>Composites</i> , <b>28</b> (1-2),1– 4.
[33]	Nguyen, T.K., Sab, K., Bonnet, G., (2007), " Shear correction factors of functionally graded plates". <i>Mech. Advanced Mater. Struct</i> ; <b>14</b> (8), 567-575.
[34]	Shen H.S., (2009), " Functionally Graded Materials: Nonlinear Analysis of Plates and Shells", <i>CRC Press</i> ,280 pages.
[35]	Miyamoto, Y., Nakanishi, H., Tanaka, I., Okamoto, T. and Yamada, O. Gas Pressure Combustion Sintering of TiC-Ni FGM. 'Proceedings of the First Int. Symp., FGM', Sendai, 1990, Functionally Gradient Materials Forum and the Society of Non-traditional Technology, Tokyo, 257-262.
[36]	Kieback, B., Neubrand, A., Riede, H. (2003)," Processing techniques for functionally graded materials", <i>Materials Science and Engineering A</i> , <b>362</b> (1-2),81–106.
[37]	Lostec, L., (1997)," Elaboration par coulage en bande et caractérisation microstructurale et mécanique de composite SiC/MAS-L, <i>Thèse de l'université de Limoges</i> .
[38]	Mistler R.E.,( 1973), "High strength alumina substrates produced by a multiple layer casting technique", <i>Am. Ceram. Soc. Bull</i> , <b>52</b> (11), 850-854.
[39]	MOYA, J. S., SANCHEZ-HERENCIA, A. J., REQUENA, J. & MORENO, R., (1992), "Functionally Gradient Ceramics by Sequential Slip Casting", <i>Materials Letters</i> , Vol, <b>14</b> , p,333-35.
[40]	Draiche, K. (2010), "Détermination des contraintes résiduelles dans les structures en matériaux à gradient de propriétés «FGM», mémoire de magistère en génie civil, Université de mascara".
[41]	BISHOP, A, LIN, C. Y., NAVARATNAM, M., RAWLINGS, R.D., & McSHANE, H.B, A,(1993)," Functionally Gradient Material Produced by a Powder Metallurgical Process, <i>Journal of Materials Science Letters</i> ", Vol. 12, p.1516-18.
[42]	Watre Metz, B.,( 2006)," Modèle thermomécanique 3D d'un matériau à gradient de propriétés à l'aide de techniques multigrilles. Application aux moules d'injection de polymères, Thèse de doctorat, Ecole doctorale des sciences pour l'ingénieur de Lyon".
[43]	TAKAHASHI, M., ITOH, Y. & KASHIWAYA, H., (1990), "Fabrication and Evaluation of W/Cu Gradient Material by Sintering and Infiltration Technique, in Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90"- <i>Sendai-Japan</i> , p,129-34.
[44]	KAWAI, C., WAKAMATSU, S., SAKAGAMI, S., & IGARASHI, T., Oxidation Resistant Coating with TiC-SiC Gradient Composition on Carbon Fiber Reinforced Composites by CVD, in Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90"- <i>Sendai-Japan</i> , 1990, p. 77-82.
[45]	G. Bao., L. Wang, (1995), " Multiple cracking in functionally graded

	ceramic/metal coatings", <i>Int. J; Solids Structures</i> , <b>32 (19)</b> , 2853–2871.
[46]	Timoshenko, S. (1921), "On the correction of transverse shear deformation of the differential equations for transverse vibrations of prismatic bars", <i>Philosophical Magazine</i> , Vol. <b>41</b> (series 46) p,744–746.
[47]	Reissner.E, (1945), "The effect of transverse shears deformation on the bending of elastic plates", <i>J. Appl. Mech.</i> , vol, <b>12</b> , pages, 69-77.
[48]	Timoshenko, S.P., Woinowsky-Krieger, S. (1959), " Theory of Plates and Shells". <i>McGraw-Hill, New York</i> .
[49]	Reddy, J.N. (1997), " Mechanics of Laminated Composites Plates: Theory and Analysis". <i>CRC Press, Boca Raton</i> .
[50]	Mindlin. R.D, (1951), "Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates" , <i>Journal of Applied Mechanics</i> , vol. <b>18</b> , pages, 31-38.
[51]	J.N. Reddy,( 1999), " Theory and Analysis of Elastic plates ", <i>Taylor &amp; Francis, Philadelphia</i> .
[52]	Whitney, J. M., and Sun, C. T.,( 1973), "A Higher Order Theory for Extensional Motion of Laminated Composites," <i>J. Sound and Vibration</i> , Vol. 30, Sept. , pp,85-97.
[53]	Hildebrand. F.B, E. Reissner, G.G. Thomas, (1949), " —Notes on the foundations of theory of small displacements of orthotropic shells", NACA T. N. N°:1833.
[54]	Naghdi. P. M, (1957). "On the theory of thin elastic shells", <i>Quarterly Appl. Math</i> , <b>14</b> , 369- 380.
[55]	Reissner. E, (1975), "On transverse bending of plates, including the effects of transverse shear deformation", <i>Int. J. Solids Structures</i> , <b>25 (5)</b> ,495-502.
[56]	Reddy. J.N, (1984), "A simple higher-order theory for laminated composite plates", <i>Journal of Applied Mechanics</i> , <b>51 (4)</b> ,745-752.
[57]	Kant.T, K. Swaminathan, (2002), "Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory", <i>Composite Structure</i> , <b>56 (4)</b> , 329-344.
[58]	Nelson. R.B & D.R.Lorch, (1974), "A refined theory for laminated orthotropic plates", <i>ASME Journal of Applied Mechanics</i> , Vol. <b>41</b> , pages 177-183.
[59]	Lo. K.H & R.M. Christensen, (1977), "A higher order theory of plate deformation", Part1: homogeneous plate'sl .journal of applied mechanics, Vol.44, N° 4, pages 669-676.
[60]	Touratier. M, (1991), "An efficient standard plate theory", <i>Engng Sci</i> , vol. 29, no 8, pages 901-916.
[61]	Ambartsumian. S.A, (1969), "Theory of anisotropic plate", <i>Technomic Publishing Co</i> .
[62]	Murthy. M.V.V, (1981), "An improved transverse shear deformation theory for laminated anisotropic plate. Rapport technique, NASA".

[63]	Dau. F, O. Polit, and M.c 2006), "Touratier: Plaque de C1 et shell éléments finis pour l'analyse géométriquement non linéaire de structures multicouche", <i>Computers and Structures</i> , <b>84</b> ,1264-1274.
[64]	Polit. O and M, (1997), "Touratier: Un nouvel élément triangulaire Interface fini laminé pour assurer la continuité des déplacements et stresses", <i>Composite Structures</i> , <b>38</b> (1-4) ,37-44.
[65]	Kirchhoff, G.R, (1850), " Sur la balance et le mouvement d'un disque élastique. J. Reine Angew", <i>Math. (Crelle)</i> , <b>40</b> , 51-88 .
[66]	Soldatos,K.P., (1992),"A transverse shear deformation theory for homogeneous" <i>monoclinic plates.ActaMech</i> , <b>94</b> (3), 195–220 .
[67]	Shimpi, R.P,( 2002),"Théorie des plaques raffinée et ses variantes", <i>AIAA Journal</i> , 137–146.
[68]	Karama,. M, K.S. Afaq., S. Mistou, (2003), "Comportement mécanique de la poutre composite stratifiée par le nouveau modèle de structures composites multicouches stratifiés avec cisaillement transversal de stress continuité", <i>Int. J. Solids Structures</i> , <b>40</b> (6), 1525-1546.
[69]	Aydogdu, M., (2005) , "Vibration analysis of cross-ply laminated beams with general boundary conditions by Ritz method", <i>International Journal of Mechanical Sciences</i> , <b>47</b> ,1740–1755 .
[70]	El Meiche, N, Tounsi, A., Ziane, N., Mechab, I. et Adda Bedia , (2011), " Une nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique pour le flambement et la vibration de plaque sandwich gradation fonctionnelle", <i>International Journal of Mechanical Sciences</i> , 237–247.
[71]	Zenkour, AM, (2013), "A simple four-unknown refined theory for bending analysis of functionally graded plates", <i>Appl Math Model</i> , <b>37</b> ,9041–51.
[72]	Thai, H.T., Kim, S.E, (2012) , "Analytical solution of a two variable refined plate theory for bending analysis of orthotropic Levy-type plates", <i>International Journal of Mechanical Sciences</i> , <b>54</b> , 269–276
[73]	Thai, H-T, Choi, DH, (2012), "An efficient and simple refined theory for buckling analysis of functionally graded plate", <i>Appl Math Model</i> , <b>36</b> , 1008–1022.
[74]	Carrera, E., (2000). "An assessment of mixed and classical theories on global and local response of multilayered orthotropic plates", <i>composite structures</i> , vol, <b>50</b> , pages 183, 198.
[75]	Afaq et al, (2003), K.S. Afaq M. Karama & Mistou S. "Un nouveau modèle raffine pour les structures multicouches", <i>Comptes-rendus des 13èmes Journées Nationales sur les Composites</i> , pages 289-292.
[76]	Di Sciuva, M,( 1987), "An improved shear deformation theory for moderately thick multilayered anisotropic shells and plates", <i>journal of applied mechanics</i> , vol. <b>54</b> , pages 589-596.
[77]	Srinivas, S, (1973),"A refined analysis of composite laminates", <i>Journal of sound and vibration</i> , Vol <b>30</b> , No 4, pages 495,507.



[78]	Ren, J.G, (1986),"A new theory of lamina ted plate ", <i>composite science and technology</i> vol <b>26</b> , pages 225, 239.
[79]	Yin, W.L,(1994) " Interlaminar stress analysis of composite laminates using a sub-laminate layer ", <i>model international journal of solids and structures</i> vol <b>31</b> , no <b>11</b> , pages 1549, 1564.
[80]	Kassapoglou, C. el al, (1987),"Closed form solutions for the interlaminar stress field in angle-ply and cross-ply laminates", <i>journal of composite materials</i> vol <b>27</b> , pages 292,308.
[81]	Nguyen, Tung, v, (2004), "Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis d e plaques ", <i>thèse de doctorat de l'école nationale des ponts et chaussées</i> .
[82]	Carrera, E. (2001), " Developments ideas and evaluations base d upon Reissner's mixed variational theorem in the modeling of multilayered plates and shells", <i>Appl. Mech. Revs.</i> <b>54</b> , 301-329.
[83]	Demasi, L. (2009), "Mixed plate theories based on the generalized unified formulation Part I", <i>governing equations, Compos. Struct.</i> <b>87</b> , 1-11.
[84]	Talha, M, Singh, B.N. (2010), "Static response and free vibration analysis of FGM plates using higher order shear deformation theory appl", <i>Math. Model.</i> <b>34</b> , 3991-4011.
[85]	Carrera, E., Brischetto, S., Nali, P. (2011), "Plates and shells for smart structures classical and advanced theories for modeling and analysis", <i>Wiley New York, Usa</i> .
[86]	Reddy, J.N. (2011), "A general nonlinear third order theory of functionally graded plates", <i>Int. j. aerospace Lightweight Structures</i> , <b>1</b> , 1-21.
[87]	Mantari, J.L., Guedes Soares, C. (2013), " A novel higher order shear deformation theory with stretching effect for functionally graded plates" <i>Comp Part B, Eng</i> <b>45</b> , 268-281.
[88]	Draiche, K., Tounsi, A., Mahmoud, S.R, (2016), "A refined theory with stretching effect for the flexure analysis of laminated composite plates", <i>Geomechanics and Eng.</i> , <b>11</b> (5), 671–690.
[89]	Benbakhti, A., Bachir Bouiadjra, M., Retiel, N., and Tounsi, A. (2016), "A new five unknown quasi-3D type HSDT for thermo-mechanical bending analysis of FGM sandwich plates", <i>Steel and Compos. Struct</i> , <b>22</b> (5), 975–999.
[90]	Benahmed, A., Houari, M.S.A., Benyoucef, S., Belakhdar, K. and Tounsi, A. (2017), "A novel quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for functionally graded thick rectangular plates on elastic foundation", <i>Geomechanics and Eng</i> , <b>12</b> (1), 9–34.
[91]	Levy, M, (1877),"Mémoire sur la théorie des plaques élastique planes", <i>J Math Pures Appl</i> , <b>30</b> ,219–306.
[92]	Stein, M, (1986), "Nonlinear theory for plates and shells including the effects of transverse shearing", <i>AIAA</i> , <b>24</b> (9):1537–44.
[93]	Zenkour, AM, (2006), "Generalized shear deformation theory for bending analysis

	of functionally graded plates", <i>Appl Math Model</i> , <b>30</b> ,67–84.
--	--