



FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES
DÉPARTEMENT DE GÉNIE CIVIL

Mémoire de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme de Master

Spécialité : Travaux publics

Option : Voies et Ouvrage d'Art (VOA)

Présenté par :

KHELIL Fatima Zahra

Sujet du mémoire

ÉTUDE VIBRATOIRE D'UNE PLAQUE
NANO-COMPOSITE

Soutenu publiquement le -28-/09/2020 à 14h00 .devant le jury composé de :

Mr, A. SAOULA	Président
Mr, T. BENSATTALAH	Rapporteur
Mr, M. ZIDOUR	Examineur
Mr, T.H. DAOUADJ	Examineur

PROMOTION : 2019_2020



REMERCIENNEMENT :

Je tiens à remercier dans le premier lieu le Dieu avoir aidé à mener jusqu'à la fin de travail, et mes parents respectés. pour leur un encouragement continu et un soutien sans fin.

je remercie aussi mes encadreur : Mr. BENSATALLAH Tayeb

Pour son aide et ses conseils.

Je voudrais également exprimer ma profonde gratitude aux membres du jury

DÉDICACE :

J'ai l'honneur de dédier ce travail

A Mes chers parents

A mes sœurs

A mes frères

A tous mes ami(e)s

Résumé :

Dans ce travail, deux nouvelles théories sont utilisées pour étudier le comportement vibratoire. L'une c'est la théorie (Méthode DTM) transformation différentielles résoudre le problème des équations de mouvement d'une nano-plaque composite, et l'autre c'est une nouvelle théorie non-local développée des nano-plaques basé sur l'équation différentielle de théorie de Love- Kirchhoff en fonction du déplacement. Ces dernières sont présentées pour étudier la vibration des nano-plaques composites avec différentes conditions aux limites. Ce modèle non local introduit le paramètre d'échelle qui traite l'effet des petites échelles. Les équations du mouvement sont obtenues à partir des relations différentielles constitutives non locales d'Eringen en collaboration avec la théorie de Love- Kirchhoff des plaques minces. Les effets du paramètre non local, les conditions aux limites, et l'influence de la fraction volumiques des fibres en nanotube de carbone et divers compositions matérielles sur la réponse dynamique des nano-plaques composites sont discutés.

Mots clés: Théorie non locale d'élasticité, nano-plaque, vibration libre, théorie des plaques, théorie (Méthode DTM) transformation différentielles.

Abstract :

In This work, two new theories are used to study vibrational behavior. One is the differential transformation theory (DTM Method) solving the problem of the equations of motion of a composite nano-plate, and the other is a new developed non-local theory of nano-plates based on the Love - Kirchhoff theory differential equation as a function of displacement. The latter are presented to study the vibration of composite nano-plates with different boundary conditions. This non-local model introduces the scale parameter which deals with the effect of small scales. The equations of motion are obtained from the non-local constitutive differential relations of Eringen in collaboration with the Love-Kirchhoff theory of thin plates. The effects of the non-local parameter, boundary conditions, and the influence of the volume fraction of carbon nanotube fibers and various material compositions on the dynamic response of composite nanoplates are discussed.

Keywords: Non-local theory of elasticity, nano-plate, free vibration, plate theory, differential transformation theory (DTM method).

ملخص:

في هذا العمل ، تم استخدام نظريتين جديدتين لدراسة السلوك الاهتزازي. الأول هو نظرية التحويل التفاضلي (DTM) التي تحل مشكلة معادلات الحركة للوحة النانو المركبة ، والأخر عبارة عن نظرية جديدة غير محلية مطورة للصفائح النانوية تعتمد على المعادلة نظرية الحب-كيرشوف التفاضلية كدالة للإزاحة. تم تقديم الأخير لدراسة اهتزاز الصفائح النانوية المركبة ذات الظروف الحدودية المختلفة. يقدم هذا النموذج غير المحلي معلمة المقياس التي تتعامل مع تأثير المقاييس الصغيرة. يتم الحصول على معادلات الحركة من العلاقات التفاضلية التأسيسية غير المحلية لإرينجن بالتعاون مع نظرية لوف-كيرشوف للألواح الرقيقة. تمت مناقشة تأثيرات المعلمة غير المحلية ، والظروف الحدودية ، وتأثير الجزء الحجمي لألياف الأنابيب النانوية الكربونية والتراكيب المادية المختلفة على الاستجابة الديناميكية للصفائح النانوية المركبة.

الكلمات المفتاحية: النظرية غير المحلية للمرونة ، الصفيحة النانوية ، الاهتزاز الحر ، نظرية الصفائح ، نظرية التحويل التفاضلي

Table des matières

Remerciements	i
Dédicace	ii
Résumé	iii
Abstract	iv
ملخص	v
Table des matières	vi
Liste des figures	ix
Liste des tableaux	x

Introduction générale	1
-----------------------------	---

Chapitre I

Généralités sur les matériaux composites et nano-composites

I-1. Introduction :	4
I-2. Définition :	4
I-3. Les constituants des matériaux composites :	5
I-3.1 Matrices :	5
I-3.1.1 Résine thermodurcissable :	6
I-3.1.2 Résine thermoplastique :	6
I-3.2 Renforts :	7
I-3.2.1. Fibres de verre :	7
I-3.2.2. Fibres de carbone :	7
I-3.2.3. Fibres aramides :	8
I-3.2.4. Fibres céramiques :	8
I-3.2.5. Caractéristiques mécaniques des fibres :	8
I-3.3. Charges et additifs :	9
I.3.3.1 Les charges :	9
I.3.3.2 Les additifs :	9
I-4. Les différents types des matériaux composites :	9
I-4.1 Composites à matrice organique (CMO) :	10

I-4.2 Composites à matrice céramique (CMC) :.....	10
I-4.3 Composites à matrice métallique (CMM) :.....	10
I-5. Structures composites :.....	11
I-5.1. Structures composites stratifiées :.....	11
I-5.1.1. Désignation des structures stratifiées :.....	11
I-5.1.2. Désignation des structures sandwiches :.....	11
I-5.2. Structures composites tissées multidirectionnelles :.....	11
I-6. Loi de mélange pour les matériaux composites :.....	12
I-7 Nano-composites :.....	13
I-7.1. Définitions :.....	13
I-7.2. Effet de taille : du micro au nano :.....	13
I-8 Conclusion :.....	14

Chapitre II

Méthode de transformation différentielle

II-1. Introduction :.....	15
II-2.Méthode de transformation différentielle :.....	15
II-2.1.Définition :	15
II-2.2 Propriétés d'opérations de la transformation différentielle :	15
II-3. Application de la DTM sur les vibrations des Nano-plaque composite de :.....	16
II-4. Les conditions aux limites par la méthode de transformation différentielle :.....	17
II-5. Conclusion :.....	17

Chapitre III

Les théories des plaques

III-1. Rappel sur La théorie des plaques :.....	18
III-1.1. Introduction :.....	18
III-1.2. Hypothèses de calcul :.....	18
III-2. Les différents Types des matériaux :.....	19
III-2.1. Matériaux orthotropes :.....	19
III-2.2. Matériaux transversalement isotropes :.....	22
III-2.3. Matériaux quasi isotropes transverses :.....	21
III-2.4. Matériaux quasi isotropes :.....	21

III-2.5. Matériaux isotropes :.....	21
III-3. Loi de Hooke Généralisée :.....	22
III-4. Théorie des plaques :.....	22
III-4.1. La théorie de Kirchhoff :.....	22
III-4.2. Domaine de validité :	22
III-4.3. Théorie des plaques minces :.....	22
III-5. Les plaques épaisses :.....	22
III-5.1. Introduction :.....	22
III-5.2. La théorie de Mindlin :.....	23
III-5.3. Champ de déplacement :.....	23
III-5.4. Relations contraintes – déformations :.....	24
III-5.5. Cas des Plaques Orthotropes :.....	24
III-6. Particularités des plaques orthotropes :.....	25
III-6.1. Equation différentielles de déplacements :.....	26
III-6.2. Validité des théories de la plaque :.....	26
III-6.3. Plaque mince :.....	26
III- 6.4. Relation déformation déplacement :.....	28

Chapitre IV

Modèle analytique vibratoire d'une nano-plaque composite

IV-1. Introduction :.....	31
IV-2. Vibration libre :	31
IV-3. Configuration géométrique :.....	31
IV-4. Équations de mouvement :.....	32
IV-5. Conclusion :.....	37

Chapitre V

Résultats et discussions

V-1. Introduction :.....	38
V-2. Résultats et discussions :.....	38
V.3 Conclusion :.....	40
Conclusion général :.....	41
Références bibliographiques	42

Liste des figures

Figure (I-1) : Matériaux composite.....	5
Figure (I-2) : Types de matrice.....	5
Figure (I-3): Types de renfort.....	7
Figure (I-4) : Les différents types des matériaux composites.....	10
Figure (I-5) : Stratifié constitué de couches parfaitement liées.....	11
Figure (I-6) Comparaison du renforcement à température ambiante d'une matrice nylon par une montmorillonite modifiée organiquement et par des fibres de verre	14
Figure (III-1) : matériau orthotrope.....	19
Figure (III-2) : Matériau transversalement isotrope.....	20
Figure (III-3) : Schéma des déplacements pour la théorie des plaques de Mindlin.....	24
Figure (III-4) : déformation de la plaque du point A au point A'	27
Figure (IV-1) : Nano-plaque composite, de dimensions a, b et d'épaisseur h.....	32
Figure (IV.2) : les charges et les sollicitations dans une plaque.....	34

Liste des Tableaux

Tableau (I.1) : Caractéristiques des résines thermodurcissables.....	6
Tableau (I.2) : Caractéristiques des résines thermoplastiques.....	6
Tableau (I.3) : Caractéristiques mécaniques des fibres.....	8
Tableau (I.4) : Comparaison des caractéristiques géométriques de différents renforts microniques et nanométriques	14
Tableau (II.1) : Théorèmes de base utilisés dans la DTM.....	16
Tableau (II.2) : Les conditions aux limites de la méthode de transformation différentielle....	17
Tableau (V.1) : L'effet des conditions aux limites et non-localité sur la fréquence en (nHz) des nano-plaque.....	39
Tableau (V.2) : L'effet de fraction volumique et non-localité sur la fréquence en (nHz) des nano-plaque SSCC.....	39
Tableau (V.3) : L'effet de fraction volumique et non-localité sur la fréquence en (nHz) des nano-plaque SSSS.....	39
Tableau (V.4) : L'effet de fraction volumique et non-localité sur la fréquence en (nHz) des nano-plaque SSCF.....	40
Tableau (V.5) : L'effet de fraction volumique et non-localité sur la fréquence en (nHz) des nano-plaque SFFF.....	40
Tableau (V.6) : L'effet de fraction volumique et non-localité sur la fréquence en (nHz) des nano-plaque SSCS.....	40
Tableau (V.7) : L'effet de fraction volumique et non-localité sur la fréquence en (nHz) des nano-plaque SSSF.....	41

Introduction Générale

Introduction Générale

Un matériau composite est constitué de plusieurs composants élémentaires, dont l'association confère un ensemble de propriétés qu'aucun des composants, pris séparément, ne possède. Le but que l'on recherche le plus souvent en substituant un matériau composite à un matériau traditionnel, est pour une même rigidité de structure, un gain de masse appréciable. Un matériau composite est constitué de deux phases [1] :

- La matrice.
- Le renfort ou la charge.

La nanotechnologie est apte de produire des nano- matériaux et des structures d'ingénierie à l'échelle nanométrique, ce qui génère une nouvelle catégorie des matériaux avec des propriétés plus élevées. Parmi ces structures, il existe les nano plaques qui grâce à leurs propriétés mécaniques, chimiques et électriques élevées, ils ont attiré l'attention de la communauté scientifique dans le domaine de la physique de l'état solide, la science des matériaux et la nano électronique.

Les nano-composites constituent une classe de matériaux à part entière: bien qu'ils aient la même composition que les composites classiques, notamment concernant la nature de la matrice, leur différence réside dans la taille des composants (matrice ou renfort) et dans le fait que certaines propriétés spécifiques n'apparaissent qu'à l'échelle du nanomètre

La compréhension du comportement mécanique des nano plaques est essentielle dans le développement d'autant de structures due à leurs grandes possibilités d'application dans l'ingénierie.

Les résultats de la simulation expérimentale sur ces structures ont prouvé une influence significative de leurs tailles sur leurs propriétés mécaniques lorsque leurs dimensions deviennent très petites, pour cette raison, l'influence de la taille à un effet considérable sur la réponse statique et dynamique des micro et nano structures et ne peut pas être ignorée.

Il est bien connu que la mécanique continue classique n'est pas considérée pour étudier les comportements des nano et micro structures. Pour vaincre ce problème, de nombreuses théories non locales qui considèrent l'effet d'échelle ont été proposées telles que la théorie de gradient de déformation [2], la théorie micro-polaire [3] et la théorie non locale d'élasticité

[4], ces théories prennent en compte l'influence de la taille en introduisant la longueur d'échelle intrinsèque dans les relations constitutives. Parmi les théories citées précédemment, la théorie non locale d'élasticité développée par Eringen [5] était employée pour explorer la dispersion latérale des ondes élastiques, la propagation des ondes dans les composites, la dislocation mécanique et la fracture mécanique et la traction des fluides. Ensuite, Peddieson [6] le premier qui a appliqué la théorie continue non locale dans la nano technologie ou les déformations statiques de la poutre sont obtenues en utilisant un modèle non local simplifié des poutres en se basant sur la théorie d'élasticité non locale d'Eringen [5]. Xu [7] a présenté l'approche de l'équation intégrée et la théorie d'élasticité non locale en introduisant la vibration libre des poutres à l'échelle nano métrique et micrométrique. Reddy [8] a reformulé la théorie locale des poutres en utilisant les relations différentielles constitutives non locales d'Eringen pour étudier la flexion, la vibration, et le flambement des nano poutres. Les solutions analytiques sont obtenues pour projeter l'effet du comportement non local des nano poutres. Il plusieurs chercheurs ont utilisé la théorie non-local des poutres Timoshenko [9-15], [16] a étudié le flambement thermique d'une, double et triple feuilles en nanotube de carbone (SWCNTs, DWCNTs et TWCNTs) pour analyser la vibration, la flexion et le flambement des nano poutres.

Les travaux de recherche présentés dans cette thèse portent sur l'analyse des vibrations des nano-plaques sont déterminées par la méthode de transformation différentielle (DTM).

Il existe de nombreuses méthodes éprouvées pour estimer les fréquences propres et modes propres : comme mes méthodes matricielles ou des éléments finis... etc. Mais nous avons tenu à choisir des méthodes très simples et rapide, il y a plusieurs travaux sont se basées sur cette méthode [17].

Dans ce travail, deux nouvelles théories sont utilisées pour étudier le comportement vibratoire. L'une c'est la théorie (Méthode DTM) transformation différentielles résoudre le problème des équations de mouvement d'une nano-plaque composite, et l'autre c'est une nouvelle théorie non-local développée des nano-plaques basé sur l'équation différentielle de théorie de Love - Kirchhoff en fonction du déplacement. Ces dernières sont présentées pour étudier la vibration des nano-plaques composites avec différentes conditions aux limites. Ce modèle non local introduit le paramètre d'échelle qui traite l'effet des petites échelles. Les équations du mouvement sont obtenues à partir des relations différentielles constitutives non locales d'Eringen en collaboration avec la théorie de Love- Kirchhoff des plaques

minces. Les effets du paramètre non local, les conditions aux limites, et l'influence de la fraction volumiques des fibres en nanotube de carbone et divers compositions matérielles sur la réponse dynamique des nano-plaques composites sont discutés.

Chapitre I :

**Généralité sur les matériaux
composites et nano-composite**

Chapitre I : Généralité sur les matériaux composites et nano-composites

I.1. Introduction :

Les matériaux composites et nano-composite sont couramment employés pour la réparation, renforcement et fabrication des nouveaux matériaux, et donc la mise en sécurité, d'ouvrages d'art (ponts, tunnels, ... etc.). Ils peuvent également être utilisés dès lors qu'il s'agit d'adapter les structures existantes à l'évolution des besoins d'utilisation de leurs gestionnaires ou à de nouvelles réglementations. « Initialement, leur emploi était réservé à pallier un éventuel déficit de ferrailage dans les structures en béton armé

A l'avenir, les matériaux composites pourraient être appliqués comme renforts non seulement sur les ponts et les tunnels, mais aussi sur d'autres types de structures, comme les ouvrages hydrauliques (barrages, digues, etc.). « Dans le bâtiment, il arrive qu'ils soient utilisés lorsque le changement de destination d'une pièce nécessite le renforcement de ses structures porteuses.

Les avantages des matériaux composites sont nombreux. D'abord, leur faible poids propre permet leur application sans surcharger les ouvrages, à la condition que ceux-ci soient sains et présentent une bonne planéité. Ils possèdent également des caractéristiques intrinsèques intéressantes.

I.2. Définition :

Un matériau composite est un assemblage d'au moins deux matériaux non miscibles, sont constitué d'une ossature appelée renfort (généralement constitué de fibres) qui assure la tenue mécanique, et d'un liant appelé matrice qui est la plupart du temps une matière plastique (résine thermoplastique ou thermodurcissable) assurant la cohésion de la structure et la transmission des efforts vers le renfort. Il existe aujourd'hui un grand nombre de matériaux composites que l'on classe généralement en trois familles en fonction de la nature de la matrice :

Les composites à matrice organique (CMO)

Les composites à matrice céramique (CMC)

Les composites à matrice métallique (CMM)

Chacune de ces familles possède des propriétés différentes et pour chacune d'entre elles, différents types de renforts sont employés

I.3. Les constituants des matériaux composites :

En général. Les constituants principaux d'un matériau composite sont :

- La matrice
- Le renfort
- Les Charges et les additifs

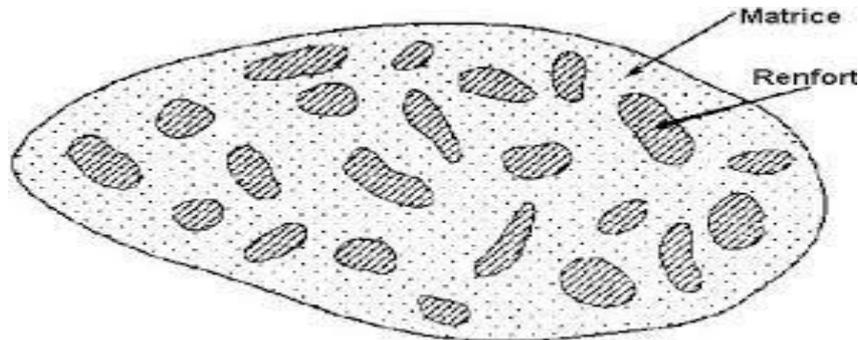


Figure (I.1) : Matériaux composite.

I.3.1 Matrices :

Dans un grand nombre de cas, la matrice constituant le matériau composite est une résine polymère. Les résines polymères existent en grand nombre et chacune à un domaine particulier d'utilisation. Dans les applications où une tenue de la structure aux très hautes températures est requise, des matériaux composites à matrice métallique, céramique ou carbone sont utilisés. Dans le cas des matériaux en carbone des températures de 2 200°C peuvent être atteintes. La classification des types de matrices couramment rencontrées est donnée sur la figure 1.2.

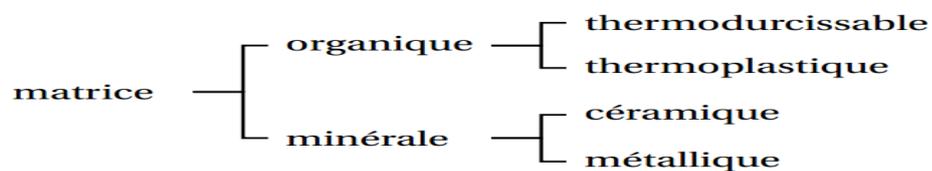


Figure (I.2) Types de matrice

Les résines les plus employées dans les matériaux composites sont les résines Thermodurcissables et les résines thermoplastiques

I.3.1.1 Résine thermodurcissable :

Les résines thermodurcissables ont des propriétés mécaniques élevées (traitement thermique ou physico-chimique). Ces résines ont donc la particularité de ne pouvoir être mises en forme qu'une seule fois. Les principales résines thermodurcissables utilisées dans la mise en œuvre des matériaux composites sont par ordre décroissant en tonnage : les résines polyesters insaturés, les résines de condensation, les résines époxydes. Ce sont des résines thermodurcissables. Les exemples de résines thermodurcissables classiquement rencontrés sont 914, 5208, 70, LY556.

Les matériaux les plus performants ont des caractéristiques mécaniques élevées et une masse volumique faible. Ces caractéristiques sont présentées dans le tableau (I.1).

Tableau I.1 : Caractéristiques des résines thermodurcissables [18].

résines	$T_f(^{\circ}\text{C})$	ρ (Kg/m ³)	$\varepsilon_t^R(\%)$	σ_t^R (MPa)	σ_c^R (MPa)	E (GPa)
polyesters	60 à 100	1 140	2 à 5	50 à 85	90 à 200	2,8 à 3,6
phénoliques	120	1 200	2,5	40	250	3 à 5
époxydes	290	1 100 à 1 500	2 à 5	60 à 80	250	3 à 5

I.3.1.2 Résine thermoplastique

Les résines thermoplastiques ont des propriétés mécaniques faibles. Ces résines sont solides et nécessitent une transformation à très haute température. Les polychlorures de vinyle (PVC), les polyéthylènes, polypropylène, polystyrène, polycarbonate polyamide sont quelques exemples de ces résines thermoplastiques. Les résines thermoplastiques classiquement rencontrés sont PEEK, K3B. De même que pour les résines thermodurcissables, les matériaux les plus performants ont des caractéristiques mécaniques élevées et une masse volumique faible : ces dernières sont présentées dans le tableau (I.2).

Tableau I.2 : Caractéristiques des résines thermoplastiques [18].

résines	$T_f(^{\circ}\text{C})$	ρ (kg/m ³)	$\varepsilon_t^R(\%)$	σ_t^R (MPa)	σ_c^R (MPa)	E (GPa)
polyamide	65 à 100	1 140		60 à 85		1,2 à 2,5
polypropylène	900	1 200		20 à 35		1,1 à 1,4

I.3.2 Renforts

Les renforts assurent les propriétés mécaniques du matériau composite et un grand nombre de fibres sont disponibles sur le marché en fonction des coûts de revient recherchés pour la structure réalisée. Les renforts constitués de fibres se présentent sous les formes suivantes : linéique (fils, mèches), tissus surfaciques (tissus, mats), multidirectionnelle (tresse, tissus complexes, tissage tri directionnel ou plus).

La classification des types de renforts couramment rencontrés est indiquée sur la figure I.2.

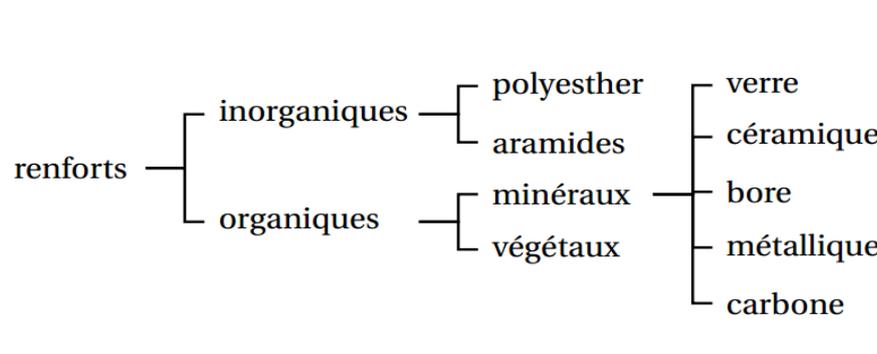


Figure (I.3) Types de renfort.

I.3.2.1. Fibres de verre

Les fibres de verre ont un excellent rapport performance–prix qui les placent de loin au premier rang des renforts utilisés actuellement dans la construction de structures composites

I.3.2.2. Fibres de carbone

Les fibres de carbone ont de très fortes propriétés mécaniques et sont élaborées à partir d'un polymère de base, appelé précurseur. Actuellement, les fibres précurseur utilisées sont des fibres acryliques élaborées à partir du polyacrylonitrile (PAN). La qualité des fibres de carbone finales dépend fortement des qualités du précurseur.

Le principe d'élaboration est de faire subir aux fibres acryliques une décomposition

thermique sans fusion des fibres aboutissant à une graphitisation. Le brai qui est un résidu de raffinerie issu du pétrole ou de la houille est également utilisé pour produire des fibres de carbone.

Quelques exemples de fibres de carbone classiquement rencontrées : T300, T800, MR40,

TR50, IM6, IM7, GY, M55J.

I.3.2.3. Fibres aramides

Les fibres aramides ont des propriétés mécaniques élevées en traction comme les carbones mais leurs résistances à la compression est faible. La faible tenue mécanique en compression est généralement attribuée à une mauvaise adhérence des fibres à la matrice dans le matériau composite. Pour y remédier, des enzymages des fibres peuvent être utilisé. L'utilisation de composites à fibres hybrides permet également de remédier aux faiblesses des composites à fibres aramides. Des renforts hybrides de type verre-kevlar ou carbone-kevlar sont largement utilisés dans le domaine des loisirs (ski, raquette de tennis).

Quelques exemples de fibres aramides : KEVLAR (Dupont de Nemours, USA), TWARON (Akzo, Allemagne-Hollande), TECHNORA (Teijin , Japon).

I.3.2.4. Fibres céramiques

Les matériaux composites de type céramiques sont souvent constitués de renforts et de matrice en céramique. Les fibres sont élaborées par dépôt chimique en phase vapeur sur un fil support. Ces fibres sont rencontrées dans des applications où la température est très élevée entre 500°C et 2 000°C. Ces matériaux sont utilisés notamment dans les parties chaudes des moteurs d'avions. Quelques exemples de fibres céramiques :

- fibres de Carbure de Silicium
- fibres de Bore
- fibres de Bore carbure de silicium

I.3.2.5. Caractéristiques mécaniques des fibres

Il existe différents types de fibres. Elles peuvent être scindées en deux groupes, les fibres à Haut module et les fibres à haute résistance. Les fibres à haut module ont une résistance Faible et celles à forte résistance ont un module faible.

Tableau 1.3 : Caractéristiques mécaniques des fibres [18].

renforts	ρ (Kg/m ³)	σ_t^R (MPa)	σ_c^R (MPa)	E (GPa)
AS4	1800		3599	235
T300	1700	1.2	3654	231
IM6		0,88	1460	
IM8	1800		5171	310
kevlar 49	1440	2,5	3620	124
verre E	2580	3,5	3450	69

I.3.3. Charges et additifs [19]:**I.3.3.1 Les charges :****➤ Charges renforçantes :**

L'objet de l'incorporation de charges renforçantes est d'améliorer les caractéristiques mécaniques de la résine. Ces charges peuvent être classées suivant leur forme géométrique en

- Charges sphériques
- Charges non sphériques

➤ Charges non renforçantes :

Les charges non renforçantes ont pour rôle soit de diminuer le coût des résines en

Conservant les performances des résines, soit d'améliorer certaines propriétés des résines.

Parmi ces classes on trouve :

- Charges de faible coût.
- Charges ignifugeantes.
- Charges conductrices et antistatiques

I.3.3.2 Les additifs :

Les additifs se trouvent en faible quantité (quelques % et moins) et interviennent comme :

- Lubrifiants et agents de démoulage,
- Pigments et colorants,
- Agents anti-retrait,
- Agents anti-ultraviolets

I.4. Les différents types des matériaux composites :

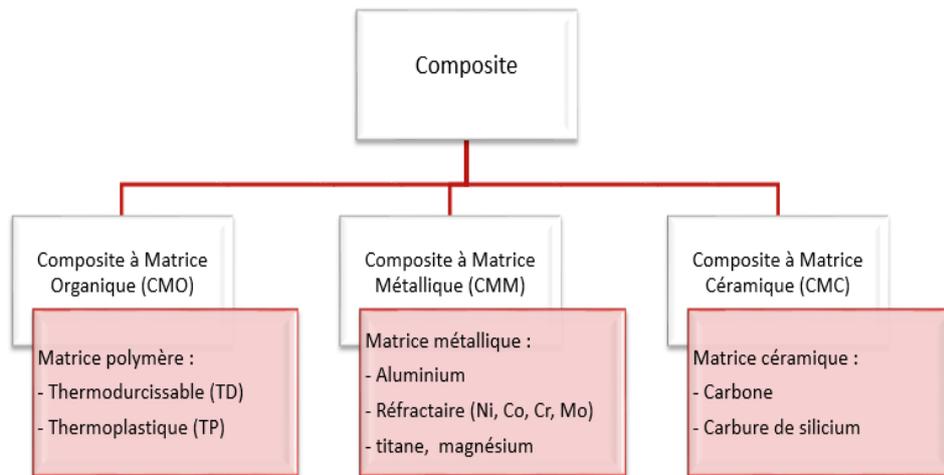


Figure (I.4) Les différents types des matériaux composites.

Ont actuellement un usage industriel, d'autres faisant l'objet d'un développement dans les laboratoires de recherche. Parmi ces composites, nous pouvons citer :

I.4.1 Composites à matrice organique (CMO) (résine, charges), avec [20] :

- des fibres minérales : verre, carbone, etc.
- des fibres organiques : Kevlar, polyamides, etc.
- des fibres métalliques : bore, aluminium, etc.

I.4.2. Composites à matrice céramique (CMC) (minérales), avec [20]:

- des fibres métalliques : bore,
- des particules métalliques : cermets,
- des particules minérales : carbures, nitrures, etc.

I.4.3. Composites à matrice métallique (CMM) (alliages légers et ultra-légers d'aluminium, de magnésium, de titane), avec [20]:

- des fibres minérales : carbone, carbure de silicium (SiC),
- des fibres métalliques : bore,
- des fibres métal-minérales : fibres de bore revêtues de carbure de silicium (BorSiC).

Les matériaux composites à matrice organique ne peuvent être utilisés que dans le domaine des températures ne dépassant pas 200 à 300 °C, alors que les matériaux composites à matrices métallique ou minérale sont utilisés au-delà : jusqu'à 600 °C pour une matrice métallique, jusqu'à 1000 °C pour une matrice céramique.

I.5. Structures composites :

Les structures des matériaux composites peuvent être classées en trois types :

I.5.1. Structures composites stratifiées :

I.5.1.1. Désignation des structures stratifiées :

On appelle stratifié un matériau composé d'un ensemble ordonné de couches d'orientation et d'épaisseur données, constituées de divers matériaux (Figure I.5) Une couche d'un stratifié est souvent appelée une strate. Le type de stratifié est défini généralement par sa séquence d'empilement, information qui fournit de manière synthétique l'orientation des diverses couches d'un stratifié. L'avantage que présentent les composites stratifiés est de permettre de créer des matériaux aux propriétés mécaniques orientées de manière optimale afin de mieux répondre aux sollicitations de la structure.

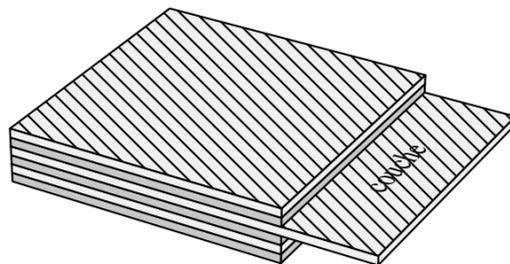


Figure (I.5)- Stratifié constitué de couches parfaitement liées.

I.5.1.2. Désignation des structures sandwichs :

Matériaux composés de deux semelles (ou peaux) de grande rigidité et de faible épaisseur enveloppant une âme (ou cœur) de forte épaisseur et faible résistance. L'ensemble forme une structure d'une grande légèreté. Le matériau sandwich possède une grande légèreté isolant en flexion et c'est un excellent thermique.

I.5.2. Structures composites tissées multidirectionnelle :

Il est possible de créer des pièces en matériaux composites de type tridimensionnelles massives ou des formes de révolution. Des tissages volumiques de type 2D (deux directions de renfort), 3D-Evolutif (deux directions de renfort et un piquage dans la troisième direction), 3D (trois directions de renfort), 4D (quatre directions de renfort), ou plus sont élaborés dans l'industrie aérospatiale. Il est également possible de tisser des cylindres ou des cônes afin de réaliser des réservoirs ou des tuyères. Dans ces derniers cas, les fils de renforts s'entrecroisent en hélice.

I.6 Loi de mélange pour les matériaux composites :

Les déformations des matériaux homogènes et isotropiques peuvent être décrites assez simplement à l'aide des modules d'élasticité et des contraintes de déformation, qui sont les propriétés de base des matériaux bruts. Dans le cas des composites, chaque élément joue un rôle différent et c'est l'association de ces propriétés qui confère au matériau final ses caractéristiques propres. Bien que ces caractéristiques finales soient le résultat d'interactions complexes entre le renfort et la matrice, il est possible d'en donner une estimation simple à l'aide de la Loi des Mélanges [21] appliquée aux composites stratifiés :

$$P_c = \rho_c * V_c = \rho_f * V_f + \rho_m * V_m \quad \text{où } (V_f + V_m) = 1 \dots \dots (1-1)$$

Avec :

V_f = fraction volumique de fibres

V_m = fraction volumique de matrice

P_c = poids estimé du composite

ρ_f = masse volumique de la fibre

ρ_m = masse volumique de la matrice

Il s'agit de valeurs théoriques, en réalité la présence de vides fait que $V_f + V_m \leq 1$. Par exemple, le module d'élasticité en traction peut être estimé en se basant sur les modules respectifs de la fibre et de la matrice. Cette équation peut être modélisée par un système de ressorts associés en parallèle Figure (I - 6).

$$E_c = E_f * V_f + E_m * V_m \dots \dots \dots (1-2)$$

Avec :

E_c = module d'élasticité en traction estimé du composite

E_f = module d'élasticité en traction de la fibre

E_m = module d'élasticité en traction de la matrice

V_f = fraction volumique de fibres

V_m = fraction volumique de matrice

I.7 Nano-composites :

I.7.1. Définitions :

Un nano-composite sera défini comme un composite dont l'une des phases aura au moins une dimension de l'ordre du nanomètre.

I.7.2. Effet de taille : du micro au nano :

L'introduction de particules de taille nanométrique dans une matrice polymère présente plusieurs avantages directs comparés aux charges micro niques classiques.

Tout d'abord, du fait du faible prix au kg des nano-renforts et d'un procédé de fabrication très peu modifié, le coût global de revient d'un nano-composite diffère très peu en général de celui de la matrice et ce, pour des améliorations de propriétés potentiellement importantes. Ensuite, la taille du renfort rend l'utilisation des nano-composites intéressante pour de nombreuses applications qui nécessitent la transparence du matériau, un bon aspect de surface et une bonne tenue en température, comme par exemple dans l'optoélectronique et dans l'emballage alimentaire.

L'utilisation de nano-charges permet également la combinaison d'un faible poids avec de hautes performances. En effet, les grandes surfaces développées par les nano-charges (cf. Tableau (1.4) confèrent aux nano-composites un rapport poids/performance meilleur que celui des matériaux composites classiques. Par exemple, Formes [23] montre qu'il faut deux fois moins d'argile que de renforts à fibres de verre, pour un même module élastique (cf. Figure 1.6). Lors de l'ajout de renfort dans une matrice polymère, de nombreux paramètres géométriques (taille, distribution du renfort,...), moléculaires (longueur des chaînes, motif de constitution, ...), ou encore d'interactions entre le renfort et la matrice, jouent un rôle sur le comportement macroscopique du composite.

Tableau I.4. Comparaison des caractéristiques géométriques de différents renforts micro- et nanométriques [22].

Géométrie	Renfort	Dimensions caractéristiques	Facteur de forme (L/ϕ , L/e)	Surface spécifique (m^2/g)
Sphérique	Noir de carbone	250 nm	1	7-12
	Silice pyrogénée	$\phi=5-40$ nm		50-400
Tubulaire	Nanotube de carbone	$\phi=1-50$ nm $L=10-100\mu m$	>1000	100-400
Lamellaire	Talc	$L=1-20\mu m$	5-20	2-35
	Montmorillonite	$L=0.6-1\mu m$	600-1000	700-800

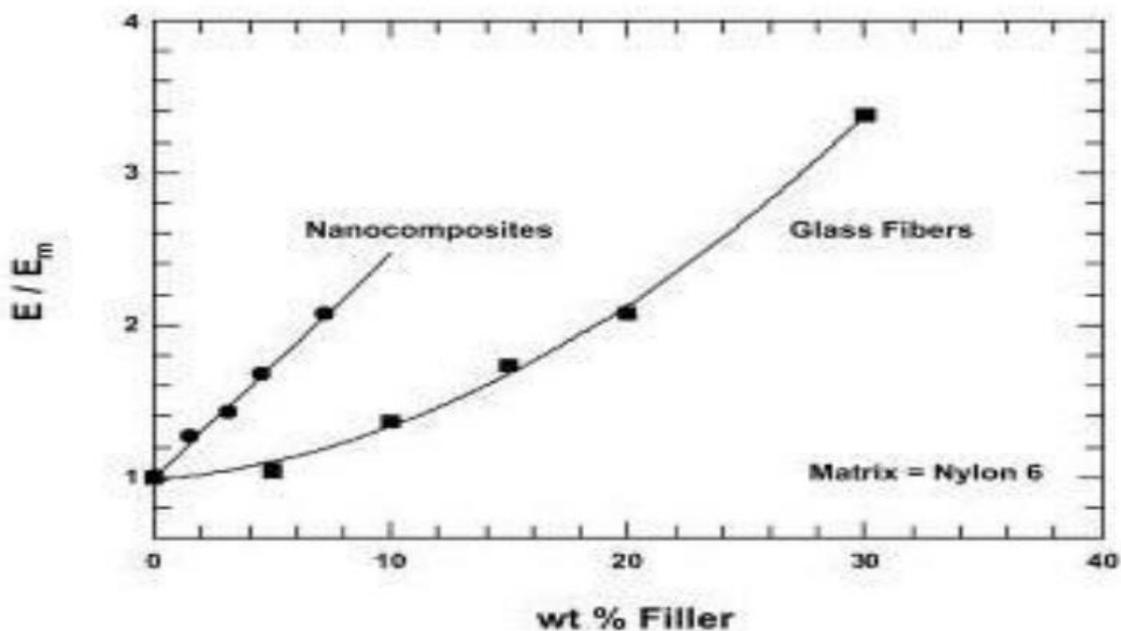


Figure I.6. Comparaison du renforcement à température ambiante d'une matrice nylon 6 par une montmorillonite modifiée organiquement et par des fibres de verre [23].

I.8 Conclusion :

Ce chapitre a fait l'objet de généralités sur les matériaux composites et nano-composite, leurs propriétés physiques et mécaniques, le mode de fabrication des pièces en matériaux composites tel que le moulage, leur utilisation dans le secteur industriel tel que l'automobile, le sport et l'aéronautique...etc.

Chapitre II :
**Méthode de transformation
différentielle**

Chapitre II : Méthode de transformation différentielle

II.1. Introduction :

Avec le développement de l'outil informatique et le calcul symbolique les méthodes de résolution analytique sont devenues très pratique, parmi les techniques et les approches on trouve la méthode de la transformation différentielle qui permet d'analyser des systèmes très complexes.

II-2 Méthode de transformation différentielle

II-2.1 Définition :

Soit $f(x)$ une fonction analytique dans un domaine D , soit un point quelconque du domaine D . La fonction $f(x)$ est représenté par une série de centre x_0 . La transformation différentielle de $f(x)$ est donnée par [24] :

$$F(x) = \frac{1}{k!} \left(\frac{d^k f(x)}{dx^k} \right)_{x=x_0} \quad (2.1)$$

Où $F(x)$ est la fonction transformée de la fonction originale $f(x)$.

La transformation inverse est définie par

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (x - x_0)^k F(x) \quad (2.2)$$

En injectant l'équation (2.1) dans (2.2), on obtient

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (x - x_0)^k \frac{1}{k!} \left(\frac{d^k f(x)}{dx^k} \right)_{x=x_0} \quad (2.3)$$

D'après cette équation on remarque que le concept de la transformation Différentielle est basée sur le développement en série de Taylor de la fonction $f(x)$.

L'équation (2.3) peut être écrite comme suite si on limite le nombre de séries à N séries.

$$f(x) = \sum_{k=0}^N (x - x_0)^k \frac{1}{k!} \left(\frac{d^k f(x)}{dx^k} \right)_{x=x_0} \quad (2.4)$$

Le nombre N est défini en fonction du critère de convergence de la solution.

II-2.2. Propriétés d'opérations de la transformation différentielle :

Soit $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions quelconques et soit $F(k)$ et $G(k)$ les fonctions Transformées des deux fonctions originales, les Propriétés d'opérations de la Transformation différentielle sont donnée par tableaux (II.1)

Tableaux II.1: Théorèmes de base utilisés dans la DTM [25]

Fonction originale	DTM
$f(x) = h(x) \pm g(x)$	$F(k) = H(k) \pm G(k)$
$f(x) = h(x).g(x)$	$F(k) = \beta G(k)$
$f(x) = \beta g(x)$	$F(k) = H(k) \sum_{l=0}^k (k-l)G(l)$
$f(x) = \left[\frac{dg(x)^n}{d(x)^n} \right]$	$F(k) = [(k+n)!]G(k+n).$
$f(x) = x^n$	$F(k) = \delta(k-n) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ 1 & \text{si } k = 0 \end{cases}$

II-3 Application de la DTM sur les vibrations des Nano-plaque composite :

En utilisant les propriétés de la DTM pour prédire et analyser la vibration d'une nano-plaque composite, y compris l'effet d'échelle, nous nous basons sur le modèle non-local de la plaque de Kirchoff-Love (les plaques minces) avec les différents types de conditions aux limites. Elle est l'équivalent de la théorie d'Euler-Bernoulli des poutres et néglige également les déformations dues au cisaillement et les effets de l'inertie de rotation. À cause de ces approximations, elle est valable pour les plaques minces (quand l'épaisseur est très petite devant les dimensions de la plaque et la longueur d'onde flexion) c'est-à-dire pour le domaine basse fréquence des plaques isotropes. La théorie plus complète, c'est l'équivalente de la théorie des poutres de Timoshenko, est la théorie de Mindlin (1951). Influence de tous les paramètres tels que les effets à petite échelle non-local, changement de la fraction volumique des fibres et le mode de vibration sur la fréquence de vibration sont analysés et discutés. La Méthode de Transformation Différentielle est brièvement présentée. Elle peut facilement être appliquée aux problèmes linéaires, non linéaires et réduit la taille du travail de calcul. Avec cette méthode, les solutions exactes peuvent être obtenues sans aucun besoin de travail lourd. Elle est un outil utile et efficace pour les solutions analytiques et numériques.

II-4. Les conditions aux limites par la méthode de transformation différentielle:

Les conditions aux limites sont présentées dans le tableau (II.2).

Table II.2: Les conditions aux limites de la méthode de transformation différentielle:

$x=0$		$x=b$	
C.L Originale	C.L Transformée	C.L Originale	C.L Transformée
$w(0) = 0$	$W(0) = 0$	$w(b) = 0$	$\sum_K^n W(K).b^K = 0$
$\frac{\partial w(0)}{\partial x} = 0$	$W(1) = 0$	$\frac{\partial w(b)}{\partial x} = 0$	$\sum_K^n K.W(K).b^{K-1} = 0$
$\frac{\partial^2 w(0)}{\partial^2 x} = 0$	$W(2) = 0$	$\frac{\partial^2 w(b)}{\partial^2 x} = 0$	$\sum_K^n K.(K-1)W(K).b^{K-2} = 0$
$\frac{\partial^3 w(0)}{\partial^3 x} = 0$	$W(3) = 0$	$\frac{\partial^3 w(b)}{\partial^3 x} = 0$	$\sum_K^n K.(K-1)(K-2)W(K).b^{K-3} = 0$

II.5 Conclusion :

Les équations différentielles apparaissent dans presque tous les domaines de la physique, des sciences appliquées et des sciences de l'ingénieur. Afin de mieux comprendre ces phénomènes physiques et de les appliquer mieux à la recherche scientifique pratique, il est important de trouver les solutions exactes. La solution exacte de ces équations est intéressante et importante. A cet effet, la méthode de transformation différentielle est une méthode analytique, basée sur le développement en série de Taylor utilisée pour résoudre ces équations différentielles. Elle va utiliser ici pour résoudre le problème de la vibration d'une nano-plaque composite.

Chapitre III :
Les théories des plaques

Chapitre III : Les théories des plaques

III-1. Rappel sur La théorie des plaques :

III-1.1. Introduction :

La théorie classique des plaques, basée sur l'hypothèse de Kirchhoff, permet de décrire avec une bonne précision les champs des contraintes et des déformations dans les nano-plaques composite, excepté dans les régions peu étendues près des bords des plaques. La validité de la théorie des plaques a pu être établie en comparant les résultats obtenus à partir de cette théorie aux solutions exactes des équations l'élasticité. Par contre, dans le cas des plaques épaisses, la théorie classique devient assez mal adaptée à la description du comportement mécanique (la flèche de la plaque, répartition des contraintes). Une première amélioration consiste à tenir compte du cisaillement transverse avec une théorie des plaques du premier ordre. Les charges appliquées aux plaques sont supposées être de force et des moments résultants, des forces élémentaires par unité de longueur des plaque l'équation constitutive d'une plaque stratifiée exprime les résultantes et moments en fonctions des déformations en membrane et des courbures et tenant compte du cisaillement transverse [26].

Dans ce chapitre, nous examinons de quelle manière sont modifiées les équations des plaques, dans le cas où l'on tient compte de ces phénomènes de dilatation, et les conséquences induites sur le comportement mécaniques des plaques.

III-1.2. Hypothèses de calcul :

Les hypothèses de calcul sont celles d'un solide qui possède un plan moyen et dont l'épaisseur t est faible vis-à-vis des deux autres dimensions. Celles qui sont vérifiées dans cette étude sont les suivantes :

1- La plaque est d'épaisseur petite devant les autres dimensions latérales. Elle possède un plan moyen aussi appelé plan feuillet moyen.

2- Les sections droites, initialement normales au plan neutre, restent planes et normales à celui-ci. Les points situés sur une normale à la surface moyenne avant déformation restent sur cette normale au cours de la déformation. Cette hypothèse permet de supposer que le mouvement de tous les point se trouvant sur la normale au feuillet moyen est le même, c'est-à-dire que : $w(x, y, z) = w(x, y)$.

Ceci revient à négliger l'effet de cisaillement transverse.

On a dans ce cas :

$$\varepsilon_{zx} = \varepsilon_{zy} = 0$$

3- Les termes non linéaires du déplacement sont négligés, en particulier, l'inertie de rotation est négligée. Seul le déplacement transversal w est considéré.

4- Les contraintes σ_{zz} normales dans la direction transversale sont négligeables par rapport aux composantes de contraintes, du fait que la plaque est mince, il est naturel d'admettre qu'elle est nulle en tout point z donc $\sigma_{zz} = 0$

5- la plaque est symétrique par rapport à son feuillet moyen lors de sa fabrication.

III-2. Les différents Types des matériaux :

III-2.1. Matériaux orthotropes :

Sont des matériaux qui possèdent 3 plans de symétrie orthogonaux, ces derniers ont les mêmes propriétés ou caractéristiques mécanique.

Ce qui réduit le nombre des coefficients indépendants à 9 Fig. III.1.

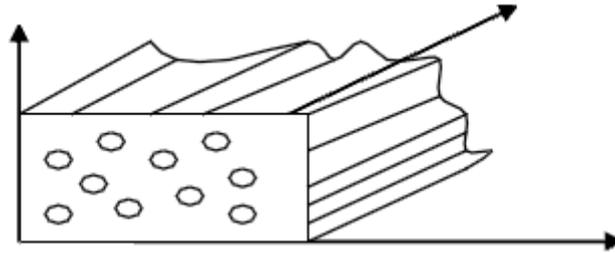


Figure (III.1) : matériau orthotrope.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & sym & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

En inversant le système (3.1) on obtient

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & S_{44} & 0 & 0 \\ & sym & & & S_{55} & 0 \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

Les coefficients de souplesse sont définis par:

$$S_{11} = \frac{1}{E_1}; S_{22} = \frac{1}{E_2}; S_{33} = \frac{1}{E_3}; S_{22} = \frac{1}{E_2}; S_{44} = \frac{1}{E_4}; S_{55} = \frac{1}{G_{13}}; S_{12} = \frac{-\nu_{12}}{E_2};$$

$$S_{23} = \frac{-\nu_{23}}{E_3}; S_{13} = \frac{-\nu_{13}}{E_3}; S_{66} = \frac{1}{G_{12}}$$

Avec :

E_{ij} et G_{ij} sont le module d'Young et Coulomb respectivement.

ν_{ij} est le coefficient de Poisson

A cause de la symétrie: $\frac{\nu_{21}}{E_{22}} = \frac{\nu_{12}}{E_{11}}; \frac{\nu_{21}}{E_{22}} = \frac{\nu_{12}}{E_{11}}$

III-2.2. Matériaux transversalement isotropes

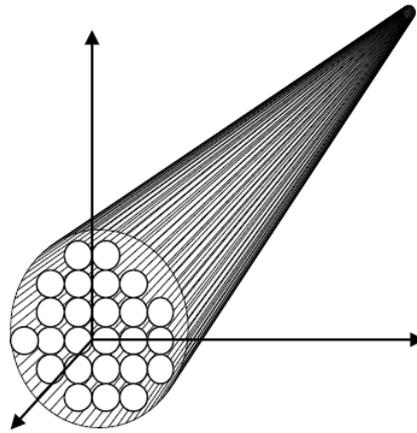


Figure (III.2) : Matériau transversalement isotrope.

Un matériau isotrope transverse est un matériau orthotrope qui comporte un axe ou un plan d'isotropie. Les propriétés suivant les axes 2 et 3 sont identiques, donc:

- $C_{22} = C_{33}$
- $C_{12} = C_{13}$
- $C_{55} = C_{66}$

Le nombre de coefficients indépendants se réduit à 5 coefficients. La loi de comportement s'écrit:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ & sym & & & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

III-2.3. Matériaux quasi isotropes transverses :

Le nombre de coefficients indépendants se réduit à 6 coefficients.

Et la loi de comportement s'écrit:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & sym & & & C_{44} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

III-2.4. Matériaux quasi isotropes :

Le nombre de coefficients indépendants se réduit à 3 coefficients. La loi de comportement s'écrit:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & sym & & & C_{44} & 0 \\ & & & & & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

III-2.5. Matériaux isotropes

Matériaux dont les propriétés physiques ou mécaniques sont identiques dans toutes les directions :

$$\begin{cases} V_{1_2} = V_{1_3} = V_{2_3} = V \\ G_{1_2} = G_{1_3} = G_{2_3} = G \\ E_1 = E_2 = E_3 = E \end{cases} \quad (3.6)$$

Ce qui réduit le nombre des coefficients élastiques indépendants à 2 (C_{11} , C_{12}).

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ & sym & & & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

En termes de constantes techniques:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ & sym & & & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

$$\text{avec : } G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

III-3. Loi de Hooke Généralisée :

Est une loi de dépendance entre les contraintes et les déformations donc c'est une proportionnalité entre les déplacements élastique d'un corps et les efforts auxquels il est soumis.

III-4. Théorie des plaques :

III-4.1. La théorie de Kirchhoff :

Historiquement, le premier modèle des plaques minces a été développé par Lagrange, Poisson, et Kirchhoff.

Aujourd'hui on l'appelle le modèle de Kirchhoff ou simplement plaque de Kirchhoff. C'est le modèle le plus simple pour décrire le champ de déplacement d'une plaque mince. Dans cette théorie, on néglige les effets de cisaillement transverse.

III-4.2. Domaine de validité :

La théorie de Kirchhoff est généralement admise comme étant la théorie des plaques minces dont la caractéristique principale est de permettre l'expression de la déformation et des contraintes en fonction de la flèche w de la surface moyenne. La validité de la théorie des plaques de **Kirchhoff** dépend du facteur de l'élancement de la plaque. Une plaque est dite mince si son facteur d'élancement est $(b/h > 20)$ où b est la dimension caractéristique et h l'épaisseur de la plaque.

III-4.3. Théorie des plaques minces :

La théorie des plaques minces énoncée par Love [27] sur les hypothèses de Kirchhoff s'inspire de celle des poutres minces de Euler-Bernoulli.

Dans une plaque mince, lorsque l'effet de cisaillement transversal est négligeable, la théorie Kirchhoff donne des résultats très satisfaisants.

III-5. Les plaques épaisses :

III-5.1. Introduction :

La principale limitation de la théorie classique de **love-kirchhoff** est que l'on néglige les effets dus aux efforts tranchants et à l'inertie de rotation, or dans la pratique les plaques ont des

épaisseurs significatives et il devient nécessaire de tenir compte de ces effets pour décrire leur comportement dynamique. D'autre part, la théorie classique ne peut rendre compte des problèmes de contact incluant des plaques et des problèmes de plaques laminées. Ces limitations ont conduit plusieurs auteurs à proposer des modèles plus raffinés [28]. L'un des premiers fut **Reissner**, suivi par **Mindlin** et par d'autre. Ces nouvelles théories sont généralement obtenues à partir des équations de l'élasticité tridimensionnelle soit par intégration de ces équations sur l'épaisseur, C'est-à-dire le long des fibres de la plaque, soit par des hypothèses, sur les déplacements et les contraintes faites à l'intérieure de la plaque.

Toutes ces théories découplent toujours les effets de flexion et de contrainte plane.

III-5.2. La théorie de Mindlin :

Cette théorie proposée par **Mindlin** [28], en 1951, prend en compte les déformations dues à l'effort tranchant et l'effet dû à l'inertie de rotation. Cette approche plus fine du problème des plaques repose également sur une autre cinématique de la déformation, et donc une autre expression des conditions aux limites.

Pour les hypothèses de **Mindlin**, reprennent les points (1) et (4) celle de **Kirchhoff**, les points 2 et 3 des précédentes hypothèses ne sont plus retenus afin de prendre en compte les deux nouveaux effets. [29].

III-5.3. Champ de déplacement

Dans la théorie des plaques de **Reissner-Mindlin** les composants des champs de déplacement sont définies comme :

$$u(x, y, z) = -z(\partial w / \partial x) \quad (3.9)$$

$$v(x, y, z) = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.10)$$

$$v(x, y, z) = w(x, y) \quad (3.11)$$

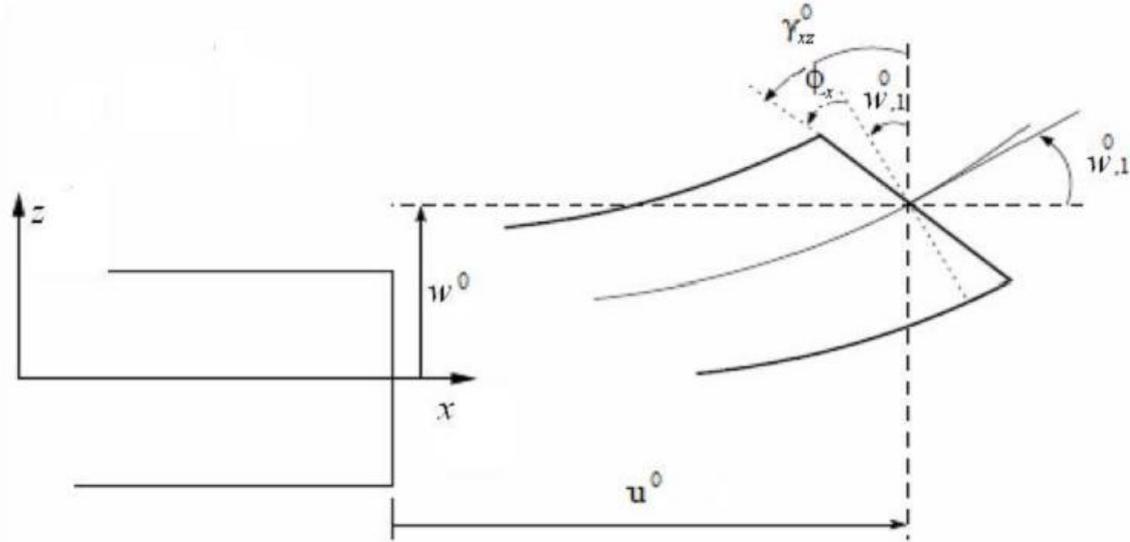


Figure (III.3) : Schéma des déplacements pour la théorie des plaques de Mindlin

III-5.4. Relations contraintes – déformations :

Les expressions linéaires des déformations sont

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \cdot \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \quad (3.12a)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \cdot \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \quad (3.12b)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (3.12c)$$

$$\tau_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -z \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \quad (3.12d)$$

$$\tau_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = -\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.12e)$$

$$\tau_{yz} = 2\varepsilon_{yz} = \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = -\theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.12f)$$

III-5.5. Cas des Plaques Orthotropes :

Une plaque orthotrope possède des paramètres de rigidité différents selon deux axes perpendiculaires, ces axes étant dans notre problème parallèle aux bords de la plaque. Il existe plusieurs types d'orthotropie : une orthotropie de géométrie où la géométrie de la plaque entraîne, l'orthotropie à module d'Young constant, une orthotropie de matériau où la plaque possède deux modules d'Young différents selon les deux directions. Les plaques orthotropes en flexion présentent une coïncidence entre les axes d'orthotropie et les directions principales x, y . Pour un état de contrainte plane $\sigma_{zz} = \sigma_{yz} = \sigma_{xz} = 0$

La relation entre le tenseur de déformation et le tenseur de contrainte sous forme matricielle est la suivante :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.13)$$

$$\text{Avec : } S_{11} = \frac{1}{E_x} \quad S_{12} = \frac{-\nu_{xy}}{E_x} = \frac{-\nu_{yx}}{E_y} \quad S_{22} = \frac{1}{E_y} \quad S_{66} = \frac{1}{G_{xy}}$$

Pour obtenir la relation des contraintes en fonction des déformations on peut inverser la relation précédente qui donne

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

$$\text{Avec : } C_{11} = \frac{E_x}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} \quad C_{12} = \frac{\nu_{xy}E_y}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} = \frac{\nu_{yx}E_x}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}}$$

$$C_{22} = \frac{E_y}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} \quad C_{66} = G_{xy}$$

Si on prend en considération qu'il y a un cisaillement transversal La relation devienne

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{44} & 0 & 0 \\ \text{sym} & & & C_{55} & 0 \\ & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.15)$$

$$\text{Avec: } C_{44} = G_{yz} \quad , \quad C_{55} = G_{xz}$$

III-6. Particularités des plaques orthotropes :

L'expression de l'énergie potentielle fait intervenir les déformations et les contraintes de ces parois. La loi de Hooke relie les contraintes aux déformations par l'intermédiaire d'une matrice de rigidité dans le cadre des déformations élastiques. Nous étudions ici une plaque mince, pour laquelle les composantes des contraintes et des déformations suivant la direction Z sont prises comme nulles.

Dans le cas d'une plaque isotrope, la matrice de rigidité s'écrit

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & \frac{\nu E}{(1-\nu^2)} & 0 \\ \frac{\nu E}{(1-\nu^2)} & E & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Dans le cas d'une plaque orthotrope, la matrice de rigidité s'écrit

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_x & \frac{v_{xy}E_y}{(1-v_{xy}v_{yx})} & 0 \\ \frac{v_{yx}E_x}{(1-v_{xy}v_{yx})} & E_x & 0 \\ 0 & 0 & G_{xy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

III-6.1. Equation différentielles de déplacements :

La théorie des plaques est associée au nom de rassure/ **Mindlin** (plaques épaisse) et de love Kirchhoff (plaque mince). La théorie de **Mindlin** est basée sur l'hypothèse cinématique des sections droites où planes, L'influence des déformations de cisaillement transversal est prise en compte, C'Elle de Kirchhoff est basée sur l'hypothèse de conservation des normales (négligeant l'influence des déformations de cisaillement transversal. La théorie de Kirchhoff peut être interpréter comme un cas particulier de la théorie de Raissner / Mindlin. Si l'influence de cisaillement transversal est faible un bon modèle d'élément fini basé sur la théorie de Mindlin devra donner des résultats en accord avec la théorie de Kirchhoff.

III-6.2. Validité des théories de la plaque :

La validité de la théorie des plaques isotropes dépend des caractéristiques géométriques Les hypothèses de Mindlin seront appliquées Si $4 < L/h < 20$ et celles de Kirchhoff Si $L/h > 20$ où L est une dimension caractéristique dans le plan XY. Le rôle des déformations de cisaillement transversal dans les plaques orthotropes dépend non seulement des caractéristiques géométrique(L/h), mais également des caractéristique mécaniques représentées par le rapport E/KG (ou E est un module caractéristique intervenant dans la flexion, G un module de cisaillement transversal et K un facteur de correction de cisaillement transversal. Pour évaluer l'influence de cisaillement transversal on peut utiliser le coefficient. $=(h/l)^2 (E/KG)$ [30]

III-6.3.Plaque mince :

Les plaques sont des milieux continus plus compliqués que les poutres. La plus grande complexité vient du fait que la description des vibrations des plaques introduites des fonctions à deux variables d'espace. On a donc affaire à un milieu bidimensionnel (2D). Nous montrerons en particulier que l'équation généralement utilisée est le résultat d'hypothèses simplificatrices très fortes, et qu'on emploie souvent cette équation en dehors (le son domaine de validité. La plaque étant bidimensionnelle, on a quelques fois intérêt à utiliser les coordonnées polaires plutôt que les coordonnées cartésiennes, nous décrivons le passage entre les deux descriptions et aboutirons ainsi aux équations de plaque de **Love Kirchhoff** en

coordonnées polaires. Si les déplacements sont très petits par rapport à l'épaisseur de la plaque on peut faire les suppositions suivantes

1) les plans perpendiculaires au plan moyen avant déformation restent perpendiculaires à ce plan après déformation.

2) La contrainte normale σ_z est petite par rapport aux autres composantes de contrainte et peut être négligée.

3) Le plan moyen ne subit pas de déformation après la flexion. Considérons une section de la plaque parallèle au plan xz (Figure III.4) après déformation de la plaque le point A se déplacera en A' d'une quantité x . D' après première supposition, le point qui se trouve sur une normale au plan moyen distante de z de ce dernier avant déformation conservera, sa position par rapport au plan moyen après déformation, la nouvelle position de b sera b' . Le déplacement de b dans la direction x est: $U = -z \cdot \theta$. Le déplacement étant petit alors :

$$\theta \approx \alpha = \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{ainsi} \quad U = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.6)$$

De même le déplacement du point B dans la direction Y sera:

$$V = -z \frac{\partial w}{\partial y}$$

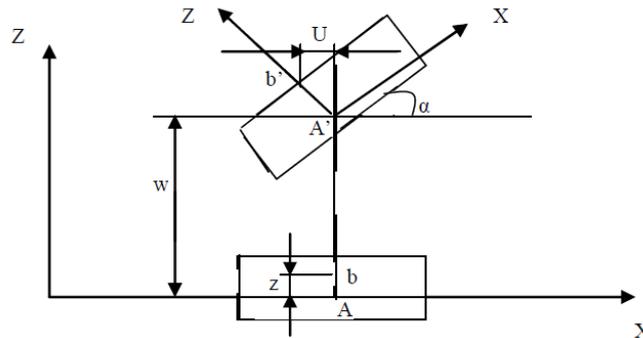


Figure (III.4) : déformation de la plaque du point A au point A' .

Il est à remarquer que la première supposition implique que les déformations angulaires sont nulles. Les relations déplacements déformation seront:

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.18a)$$

$$\varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (3.18b)$$

$$\varepsilon_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.18c)$$

En tenant compte de la deuxième supposition les relations déformations –contraintes seront :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E(\sigma_x - \nu\sigma_y)} \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E(\sigma_y - \nu\sigma_x)} \\ \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} \end{cases} \quad (3.19)$$

Les équations (3.19) peuvent être sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{((1-\nu^2))(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y)} \\ \sigma_y = \frac{E}{((1-\nu^2))(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x)} \\ \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} \end{cases} \quad (3.20)$$

Les équations (3.20) peuvent être sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

III- 6.4. Relation déformation déplacement :

$$\begin{cases} u = -Z \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \\ v = -Z \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \\ w = w(x, y) \end{cases} \quad (3.22)$$

Alors la déformation sera:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -Z \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{Z}{r_x} \\ \sigma_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -Z \frac{d^2 w}{dy^2} = \frac{Z}{r_y} \\ \tau_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2 \cdot Z \frac{d^2 w}{dxdy} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Avec : $\frac{1}{r_x}$ c'est la courbure.

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x \cdot Z \cdot dZ \cdot 1 \quad (3.24)$$

$$\sigma_x = \frac{E}{((1-\nu^2))(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y)} \quad (3.25a)$$

$$\sigma_x = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left(-Z \frac{d^2 w}{dx^2} - \nu \cdot Z \frac{d^2 w}{dy^2} \right) \quad (3.25b)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left(-Z \frac{d^2 w}{dy^2} - \nu \cdot Z \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \quad (3.25c)$$

$$\tau_{xy} = \frac{-E}{(1+\nu)} \cdot Z \cdot \frac{d^2 w}{dxdy} \quad (3.25d)$$

Et on a :

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x \cdot Z \cdot dZ \cdot 1 \quad (3.26)$$

$$M_x = \frac{E}{(1-\nu^2)} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} -Z^2 \cdot \frac{d^2w}{\partial x^2} dZ - \nu \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Z^2 \cdot \frac{d^2w}{\partial y^2} dZ$$

$$M_x = \frac{-Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[\frac{d^2w}{\partial x^2} + \nu \frac{d^2w}{\partial y^2} \right]$$

$$M_x = -D \left[\frac{d^2w}{\partial x^2} + \nu \frac{d^2w}{\partial y^2} \right] \quad (3.27)$$

$$\text{Avec } D = \frac{-Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$M_y = \frac{-Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[\frac{d^2w}{\partial y^2} + \nu \frac{d^2w}{\partial x^2} \right]$$

$$M_y = -D \left[\frac{d^2w}{\partial y^2} + \nu \frac{d^2w}{\partial x^2} \right] \quad (3.28)$$

$$M_{xy} = -M_{yx} = \frac{-Eh^3}{12(1-\nu^2)} (1-\nu) \cdot \frac{d^2w}{dxdy}$$

$$M_{xy} = -D \cdot (1-\nu) \cdot \frac{d^2w}{dxdy} \quad (3.29)$$

Alors les formules des moments sont :

$$M_{xy} = -D \cdot (1-\nu) \cdot \frac{d^2w}{dxdy} \quad (3.30)$$

$$M_y = -D \left[\frac{d^2w}{\partial y^2} + \nu \frac{d^2w}{\partial x^2} \right] \quad (3.31)$$

$$M_x = -D \left[\frac{d^2w}{\partial x^2} + \nu \frac{d^2w}{\partial y^2} \right] \quad (3.32)$$

Dans les équations d'équilibres pour une plaque soumise à une charge statique p on a :

Équilibre des moments suivant x :

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} = Q_y \quad (3.34)$$

Équilibre des moments suivant y :

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} = Q_x \quad (3.35)$$

Équilibre des forces en dynamique suivant z :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + P = 0 \quad (3.36)$$

En remplaçant les équations (3.30, 3.31 et 3.33) dans les équations d'équilibres (3.34,3.35 et 3.36) on aura :

$$\varphi_x = \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} = -D \left(\frac{d^3 w}{\partial x^3} + \frac{d^3 w}{dx dy^2} \right) \quad (3.37)$$

$$\varphi_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = -D \left(\frac{d^3 w}{\partial y^3} + \frac{d^3 w}{dy dx^2} \right) \quad (3.38)$$

Chapitre IV :

**Modèle analytique vibratoire d'une
nano-plaque composite**

Chapitre IV : Modèle analytique vibratoire d'une nano-plaque composite

IV-1. Introduction

Les problèmes liés aux vibrations des structures sont parmi les plus étudiés dans les bureaux d'études, quels que soient leurs domaines d'activité. Les vibrations sont à l'origine de nombreux Accidents ou incidents, que l'on parle de Génie Civil, d'Aéronautique, de Spatial ou de tout autre Secteur industriel. Pour les uns, il s'agira d'éviter une résonance, pour d'autres, d'optimiser un coût et donc nécessairement une masse, ce qui aura une influence sur la réponse à d'autres sollicitations, d'origine thermique par exemple, Il existe de nombreuses méthodes éprouvées pour estimer les fréquences propres et modes propres : comme les méthodes matricielles ou la méthode des éléments finis...cte.

Ce travail permet d'étudier plusieurs modèles de plaques avec des différentes combinaisons d'appuis aux bords en vue de calculer les fréquences et les modes propres en vibration libre. Les éléments de plaque en flexion jouent un rôle très important dans l'analyse de nombreux types de structures.

IV-2. Vibration libre :

Les vibrations naturelles sont des vibrations inhérentes aux propriétés propres de la structure en l'absence des forces extérieures. Dans tous les cas, les vibrations mettent en jeu un échange permanent entre l'énergie cinétique et l'énergie de déformation des éléments de la plaque. L'énergie cinétique est associée à la vitesse vibratoire et la masse des éléments déformés. Alors que la déformation est associée aux contraintes dynamiques liées à la rigidité des éléments déformés par le mouvement vibratoire .La vibration des plaques est un cas particulier du problème plus général des vibrations mécaniques. Les équations régissant le mouvement des plaques sont plus [31].

IV-3. Configuration géométrique

On considère une nano-plaque composite, dont l'épaisseur h est faible devant la longueur a et la largeur b , et l'on supposera dans tout le projet que l'hypothèse des petites perturbations (H.P.P : petits déplacements et petites déformations) est vérifiée.

La plaque est située dans le plan (x, y) , et le déplacement transverse qui est l'inconnue du problème, est noté $w(x, y, t)$ [32].

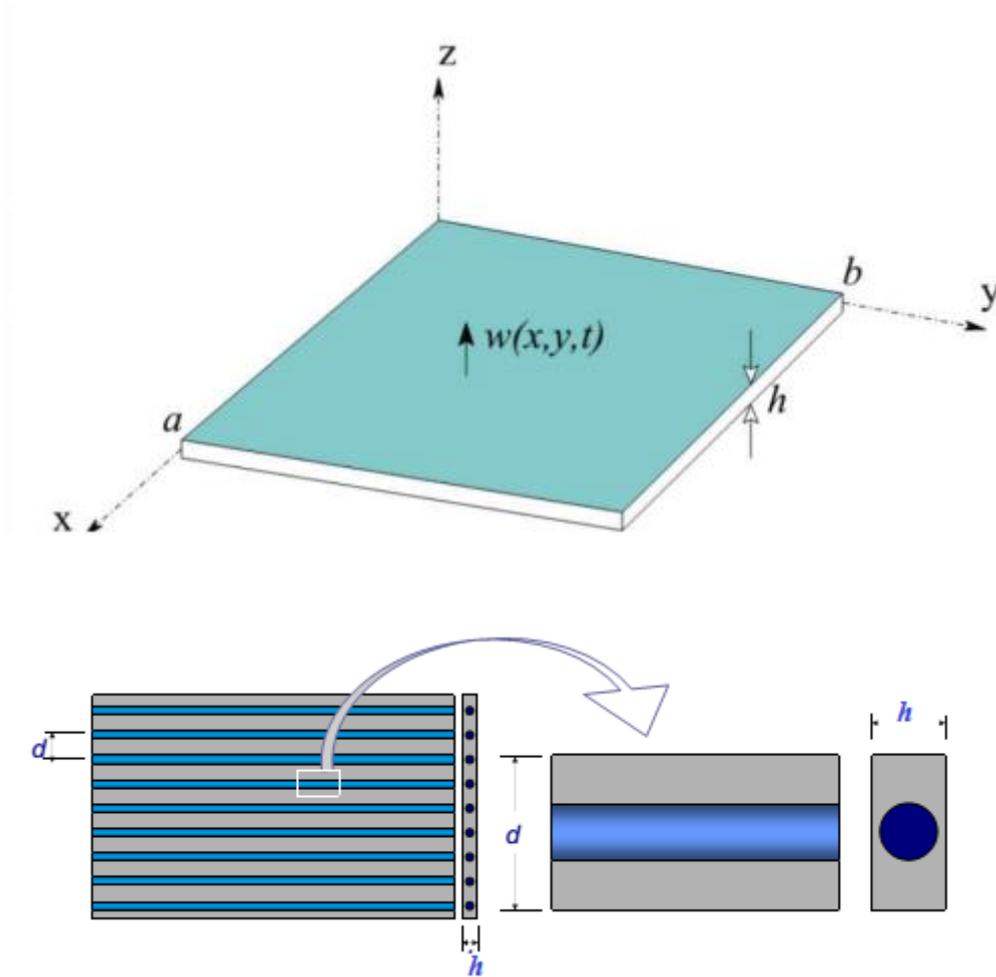


Figure (IV.1): Nano-plaque composite, de dimensions a , b et d'épaisseur h

IV-4 Équations de mouvement :

Pour décrire le comportement vibratoire des nano-plaques composite. La théorie des plaques de déformation par cisaillement de premier ordre (FSDT) a été utilisée pour produire les équations de mouvement utilisées. Le champ de déplacement basé sur la théorie d'un point situé en (x, y, z) dans les nano-plaques composite est donné ci-dessous:

$$u = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} ; \quad v = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} ; \quad w = w_0(x, y) \quad (\text{IV.1})$$

Dans lequel u_0 , v_0 et w_0 sont les déplacements suivant les directions x , y et z dans le plan médian de la plaque.

Déformations linéaires dans le plan et transversales sont données par :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} ; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} ; \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \quad (\text{IV.2})$$

Dans la théorie d'élasticité non locale [33], la contrainte au niveau d'un point de référence (x) est considérée comme une fonction du champ de déformation estimée à chaque point dans le corps. Cette observation est conforme au modèle atomique et aux observations expérimentales sur la dispersion des photons. En outre, quand l'effet des contraintes aux autres points que (x) est négligé, la théorie non local d'élasticité se conforme à la théorie (locale) classique d'élasticité ceci en mettant ($e0a=0$). Par conséquent, la théorie non locale fournit une description plus précise du comportement matériel comparée à la théorie (locale) classique d'élasticité.

Les équations de base pour un solide élastique non local, linéaire, homogène et isotrope, n'a pas soumis par une force extérieure sont données par:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij,j} &= 0 \\ \sigma_{ij}(x) &= \int \alpha(|x - x'|, \tau) C_{ijkl} \varepsilon_{kl}(x') dV(x') \quad \forall x \in V \\ \sigma_{ij} &= \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})\end{aligned}\tag{IV.3}$$

Où (C_{ijkl}) est le tenseur de module d'élasticité de l'élasticité isotrope classique, (σ_{ij} et ε_{ij}) sont les tenseurs des contraintes et déformations respectivement, et (u_i) est le vecteur de déplacement.

($\alpha(|x - x'|, \tau)$) Est le module non local ou la fonction d'atténuation incorporant aux équations constitutives qui caractérisent l'effet non local au point de référence (x) produit par la déformation locale de la source. ($x' = |x - x'|$) est la distance entre le point de référence (x) et le point (x'), et ($\tau = e0a/l$) [34], où ($e0$) est une constante appropriée à chaque matériel, (a) est la longueur interne qui caractérise le matériel (par exemple longueur de lien (C-C), de distance granulaire), et (l) est une longueur externe qui caractérise le matériel (par exemple longueur, longueur d'onde).

La loi de Hooke pour un état uni-axial de contrainte a été déterminée par cette équation:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx}^{nl} \\ \sigma_{yy}^{nl} \\ \sigma_{xy}^{nl} \end{bmatrix} - e0a \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^{nl} \\ \sigma_{yy}^{nl} \\ \sigma_{xy}^{nl} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{(1-\nu^2)} & \frac{\nu E}{(1-\nu^2)} & 0 \\ \frac{\nu E}{(1-\nu^2)} & \frac{E}{(1-\nu^2)} & 0 \\ 0 & 0 & 2G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix}\tag{IV.4}$$

Où E, ν sont le module de Young du matériau et le coefficient de poisson respectivement. Ainsi, le coefficient $(e0a)$ représente l'effet de petite taille, et $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ le module de cisaillement.

Les moments fléchissant sont obtenus par l'intégration des contraintes sur l'épaisseur de la plaque h

$$M_{xx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} \cdot Z \cdot dZ ; M_{yy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yy} \cdot Z \cdot dZ ; M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xy} \cdot Z \cdot dZ \quad (\text{IV.5})$$

Remplaçant eq 2 et 4 dans l'eq 5 on aura :

$$\begin{aligned} M_{xx} - e0a \cdot \nabla^2 M_{xx} &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_{yy} - e0a \cdot \nabla^2 M_{yy} &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} - e0a \cdot \nabla^2 M_{xy} &= -D(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \end{aligned} \quad (\text{IV.6})$$

Avec :

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12(1-\nu^2)}$$

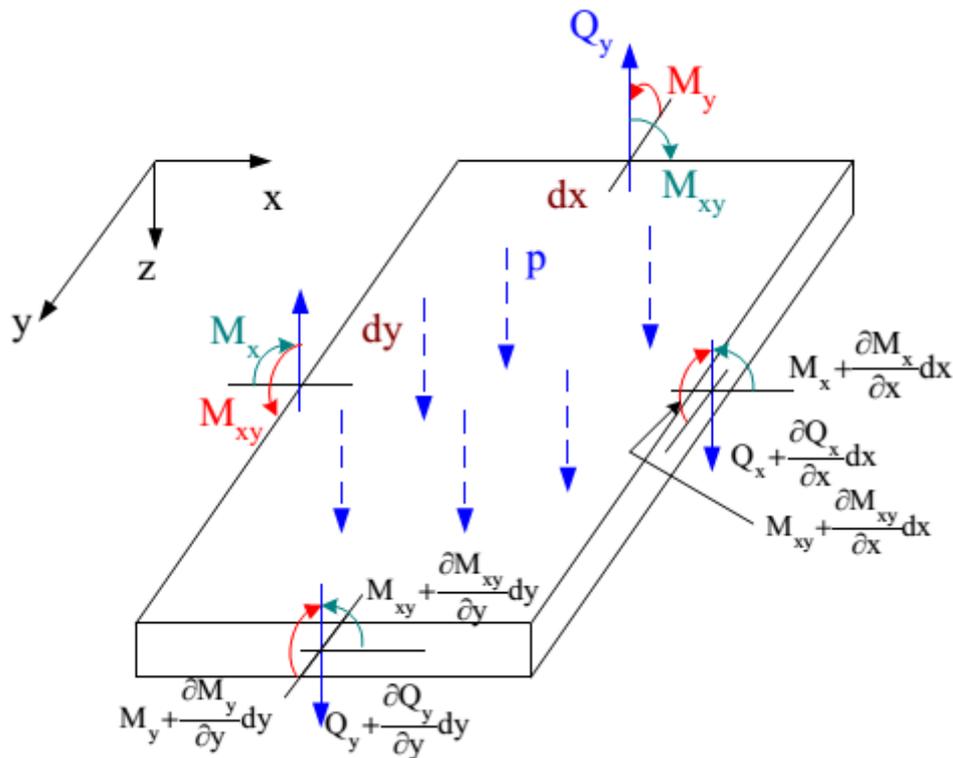


Figure (IV.2) : les charges et les sollicitations dans une plaque

Équilibre des moments suivant x :

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} = Q_y \quad (\text{IV.7})$$

Équilibre des moments suivant y :

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} = Q_x \quad (\text{IV.8})$$

Équilibre des forces en dynamique suivant z :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + P = m \cdot \gamma \quad (\text{IV.9})$$

Avec :

$$m \cdot \gamma = p \cdot h \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

Pour étudier la vibration libre on va négliger la charge p (p=0).

En substituant Eq. 7 et 8 dans Eq. 9, puis dans l'eq 6, on obtient l'équation différentielle de mouvement (dynamique) d'une nano-plaque.

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = \rho \cdot h \cdot \omega^2 (1 - e0a\nabla^2) w \quad (\text{IV.10})$$

Les conditions aux limites :

Pour une nano-plaque simplement appuyées à $y = 0$, $y = b$ sont :

$$M_{yy} = w = 0 \quad (\text{IV.11})$$

Et à $x = 0$, $x = a$ libre :

$$M_{xx} = M_{yx} = 0 \quad (\text{IV.12})$$

Si à $x = 0$, $x = a$ simplement appuyées :

$$M_{xx} = w = 0 \quad (\text{IV.13})$$

Si à $x = 0$, $x = a$ encastés :

$$\frac{\partial w}{\partial x} = w = 0 \quad (\text{IV.14})$$

On suppose que notre plaque est simplement appuyées à $y = 0$ et $y = b$, l'un parmi les solutions de l'équation (IV.10) est :

$$w = w(x) \cdot \sin\left(\frac{N\pi y}{b}\right) \quad (\text{IV.15})$$

Donc l'eq IV.10 devenir :

$$D \left[\frac{\partial^4 w(x)}{\partial x^4} - 2 \frac{N^2 \pi^2}{b^2} + \frac{N^4 \pi^4}{b^4} w(x) \right] = p.h.\omega^2 \left[w(x) - e0a \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{N^2 \pi^2}{b^2} w(x) \right) \right] \quad (IV.16)$$

En utilisant la méthode de Transformation différentielle voir chapitre de l'éq IV.16 on aura:

$$(K + 4). (K + 3). (K + 2). (K + 1). W(K + 4) - \left(\frac{p.h.\omega^2}{D} + \frac{e0a.N^2\pi^2 p.h.\omega^2}{D.b^2} - \frac{N^4\pi^4}{b^4} \right). W(K) + \left(\frac{e0a.p.h.\omega^2}{D} + 2 \frac{N^4\pi^4}{b^4} \right). (K + 2). (K + 1). W(K + 2) = 0 \quad (IV.17)$$

Aussi on a utilisé la loi de mélange pour déterminer les caractéristiques des nano-plaque composites. Donc les propriétés matérielles du CNTRC, du mélange de NTC et d'un polymère isotrope peuvent être estimées selon la règle du mélange [36]. Dans la présente étude, selon la règle du mélange en introduisant les paramètres d'efficacité du CNT (n_1, n_2, n_3), le module de Young effectif et le module de cisaillement de la couche CNTRC peuvent être exprimés par [37].

$$E_{xx} = n_1 V_{cnt} E_{xx}^{cnt} + V_p E^p$$

$$\frac{n_2}{E_{yy}} = \frac{V_{cnt}}{E_{yy}^{cnt}} + \frac{V_p}{E^p} \quad (IV.18)$$

$$\frac{n_3}{G_{xy}} = \frac{V_{cnt}}{G_{xy}^{cnt}} + \frac{V_p}{E^p}$$

Où $E_{xx}^{cnt}, E_{yy}^{cnt}, G_{xy}^{cnt}$ indiquer les modules de Young et le module de cisaillement des SWCNT, respectivement, et (E^p et G^p) représentent les propriétés de la matrice isotrope.

(n_1, n_2, n_3) sont les paramètres d'efficacité de matrice / CNT, sont les fractions volumiques des nanotubes de carbone et de la matrice, respectivement, et il est à noter que la somme des fractions volumiques des deux constituants est égale à l'unité. Pour d'autres propriétés en termes de coefficient de Poisson (ν) et de masse volumique (ρ), celles-ci peuvent être écrites comme suit:

$$\nu_{12} = V_{cnt} \nu_{12}^{cnt} + V_p \nu^p, \quad \rho = V_{cnt} \rho^{cnt} + V_p \rho^p \quad (IV.19)$$

Les équations de fréquence peuvent être dérivées en incorporant les conditions aux limites transformées dans l'Eq. (17):

$$A_{j1}^{(n)}(\omega)c_1 + A_{j2}^{(n)}(\omega)c_2 = 0 \quad j = 1,2,3, \dots, n \quad (20)$$

Voici A_j les polynômes en termes ω de correspondance au n^{th} terme. Lors de la résolution de l'Eq. (17) sous forme matricielle et l'étude de la condition d'existence des solutions non triviales donne le déterminant caractéristique suivant:

Où $A_{j1}^{(n)}(\omega), A_{j2}^{(n)}(\omega)$ sont les polynômes correspondant au n^{th} terme. Lorsque Eq. (17) est écrit sous forme matricielle, on obtient

$$\begin{bmatrix} A_{11}^{(n)}(\omega) & A_{12}^{(n)}(\omega) \\ A_{21}^{(n)}(\omega) & A_{22}^{(n)}(\omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (21)$$

L'équation des valeurs propres est obtenue à partir de l'Eq. (21) comme suit :

$$\begin{bmatrix} A_{11}^{(n)}(\omega) & A_{12}^{(n)}(\omega) \\ A_{21}^{(n)}(\omega) & A_{22}^{(n)}(\omega) \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (22)$$

Résolution de l'équation (22), on arrive $\omega = \omega_j^{(n)}$ où $j = 1,2,3, \dots, n$. Ici, $\omega_j^{(n)}$ est la valeur propre j^{th} estimée correspondant à n . La valeur n est obtenue par l'équation suivante:

$$\left| \omega_j^{(n)} - \omega_j^{(n-1)} \right| \leq \varepsilon_0 \quad (23)$$

Avec :

où ε_0 est le paramètre de tolérance.

IV-5 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présenté un développement d'un modèle analytique d'une nano-plaque composite, et nous avons pris en compte l'effet de l'échelle (e_0a). Les équations du mouvement sont obtenues par la deuxième loi de Newton et ensuite les équations différentielles générales de la flexion et de la vibration transversale d'une nano-plaque composite de distribution (UD) sont obtenues. En suite par la méthode (DTM) résoudre ces équations différentielles.

Chapitre V :

Résultats et discussions

Chapitre V : Résultats et discussions

V-1. Introduction

Dans ce chapitre on va interpréter les résultats numériques obtenus au cours de ce travail analytique concernant la vibration libre des nano- plaques composites avec distribution (UD) par la méthode transformation différentielle, nous avons pris en compte l'effet de non-localité et avec différentes conditions aux limites.

V-2 Résultats et discussions

Les résultats numériques des comportements vibratoire libre des nano-plaques composites sont présentés et discutés. Les caractéristiques matérielles effectives des nano-plaques composites utilisées tout au long de ce travail sont indiquées ci-après.

Le polymère (PMPV) est utilisé comme matrice dans laquelle les propriétés des matériaux sont:

$v^p = 0.34, \rho^p = 1150 \text{ kg/m}^3$ et $E^p = 2.1 \text{ Gpa}$ Pour le matériau de renforcement, des nanotubes de carbone type Armchair (10,10) (SWCNT) ont choisi avec les propriétés suivantes selon l'étude Zhu et al [37] :

$$v_{12}^{cnt} = 0.175; \rho^{cnt} = 1400 \text{ kg/m}^3 ; E_{xx}^{cnt} = 5.6466 \text{ Tpa} ; E_{yy}^{cnt} = 7.08 \text{ Tpa}$$

Les différentes valeurs de fraction volumique de nanotube de carbone sont :

$$V_{cnt}^* = 0.11 ; V_{cnt}^* = 0.14 ; V_{cnt}^* = 0.17$$

Et les conditions aux limites étudiées sont :

Le **1^{er} cas** : Simple-simple-simple-simple (SSSS).

Le **2^{ème} cas** : Simple-simple-clamped-clamped (SSCC).

Le **3^{ème} cas** : Simple-simple-Free-Free (SSFF).

Le **4^{ème} cas** : Simple-simple-Clamped-Free (SSCF).

Le **5^{ème} cas** : Simple-simple-Clamped-Simple (SSCS).

Le **6^{ème} cas** : Simple-simple-Simple-Free (SSSF).

Tableau V.1 : L'effet des conditions aux limites et non-localité sur la fréquence en (nHz) des nano-plaques

N,M	e0a	$V_{cnt}^* = 0.14$		
		SSSS	SSCC	SSFF
1,1	0	0.8972221469	0.9884614057	0.7553477845
	1	0.6141462832	0.6510544251	0.6916010907
	2	0.5648940194	0.5984329419	0.6351301200

Dans le tableau (V.1), on peut constater que les fréquences de nano-plaque SSCC plus grandes que les deux d'autres nano-plaques, et ça signifie que les conditions aux limites jouent un rôle très important vis-à-vis le phénomène de la vibration d'une part, et que les nano-plaques SSCC plus stables par rapport aux autres cas et elles nécessitent un moins du temps pour stabiliser cas la période $T = \frac{1}{f}$ d'autre part. En plus, on peut aussi remarquer que l'effet non-local influence sur la fréquence des nano-plaques.

Tableau V.2 : L'effet de fraction volumique et non-localité sur la fréquence en (nHz) des nano-plaques SSCC

N,M	e0a	$V_{cnt}^* = 0.11$	$V_{cnt}^* = 0.14$	$V_{cnt}^* = 0.17$
1,1	0	0.8695737814	0.9884614057	1.010284432
	1	0.6323578239	0.6510544251	0.6821521816
	2	0.5812474938	0.5984329419	0.6272229044
1,2	0	1.079647651	1.111569007	1.136110007
	1	0.6866402663	0.7069423457	0.7225493560
	2	0.6304083805	0.6490470065	0.6633763214
1,3	0	1.029809793	1.060257660	1.083665782
	1	0.7278076292	0.7493273179	0.7658655466
	2	0.6682355927	0.6879874572	0.7031840686

Tableau V.3 : L'effet de fraction volumique et non-localité sur la fréquence en (nHz) des nano-plaques SSSS

N,M	e0a	$V_{cnt}^* = 0.11$	$V_{cnt}^* = 0.14$	$V_{cnt}^* = 0.17$
1,1	0	0.8714562418	0.8972221469	0.9170308098
	1	0.5965095867	0.6141462832	0.6277052631
	2	0.5486717209	0.5648940194	0.5773656195
1,2	0	1.096850586	1.129280606	1.154212601
	1	0.6720613904	0.6919318714	0.7072081894
	2	0.6170523551	0.6352964170	0.6493223615
1,3	0	1.304558566	1.343129784	1.372783086
	1	0.7339007615	0.7555996569	0.7722816023
	2	0.6734132459	0.6933235348	0.7086306547

Tableau V.4 : L'effet de fraction volumique et non-localité sur la fréquence en (nHz) des nano-plaque SSCF

N, M	e0a	$V_{cnt}^* = 0.11$	$V_{cnt}^* = 0.14$	$V_{cnt}^* = 0.17$
1,1	0	0.9600753562	0.9884614162	1.010284436
	1	0.6482505857	0.6674171211	0.6821522044
	2	0.5960512169	0.6136743300	0.6272228881
1,2	0	1.079647651	1.111569065	1.136110017
	1	0.6866417229	0.7069421047	0.7225496694
	2	0.6304081868	0.6490467817	0.6633772066
1,3	0	1.029809711	1.060257566	1.083665685
	1	0.7278162774	0.7493274659	0.7658698417
	2	0.6682409851	0.6879972007	0.7031854615

Tableau V.5 : L'effet de fraction volumique et non-localité sur la fréquence en (nHz) des nano-plaque SSFF

N,M	e0a	$V_{cnt}^* = 0.11$	$V_{cnt}^* = 0.14$	$V_{cnt}^* = 0.17$
1,1	0	0.8075683958	0.7553477845	0.7720218979
	1	0.5261533036	0.6916010907	0.5729332465
	2	0.4834004488	0.6351301200	0.6491523837
1,2	0	1.037546691	1.069578377	1.091804820
	1	0.5926900078	0.6102137727	0.6874558023
	2	0.5438557263	0.5599356301	0.6874558023
1,3	0	1.270730960	0.9472536614	0.6313782792
	1	0.4765238822	0.4906130247	1.337182393
	2	0.4371153407	0.4500393075	0.6993432140

Tableau V.6 : L'effet de fraction volumique et non-localité sur la fréquence en (nHz) des nano-plaque SSSC

N, M	e0a	$V_{cnt}^* = 0.11$	$V_{cnt}^* = 0.14$	$V_{cnt}^* = 0.17$
1,1	0	0.7336595033	0.7553512417	0.7720277119
	1	0.5444623208	0.5605601622	0.5729360799
	2	0.5022217585	0.5170706945	0.5284864619
1,2	0	1.016665434	1.046724664	1.069834010
	1	0.6480046406	0.6671638656	0.6818933577
	2	0.5951869521	0.6127845435	0.6263134582
1,3	0	1.269859008	1.307404336	1.336268892
	1	0.7239949947	0.7454009922	0.7618578022
	2	0.6643704549	0.6840136088	0.6991150343

Tableau V.7 : L'effet de fraction volumique et non-localité sur la fréquence en (nHz) des nano-plaque SSSF

N, M	e0a	$V_{cnt}^* = 0.11$	$V_{cnt}^* = 0.14$	$V_{cnt}^* = 0.17$
1,1	0	0.7552123954	0.7262335045	0.8696274031
	1	0.7551654923	0.5667002273	0.5415172152
	2	0.5676178461	0.5659098104	0.4717887079
1,2	0	1.371409696	1.102406803	1.270533772
	1	0.6157753691	0.6599602080	0.6784405011
	2	0.5372887920	0.5616081236	0.6314217811
1,3	0	1.107989969	1.170395426	1.315469189
	1	0.4650373715	0.7399965574	0.5860835181
	2	0.6335129079	0.5861813784	0.6007492360

Les tableaux V(2-7) présentent les fréquences des nano-plaque composites avec différentes valeurs de fraction volumique en nanotubes de carbone et l'effet de non-local. D'après les résultats, il est clair que la théorie locale surestime les valeurs de fréquences des nano-plaques à cause de l'omission de l'influence des atomes entre eux, et devient plus significatif si le paramètre à petite échelle plus élevé. En plus, il est clairement que la fréquence augmente lorsque le nombre de mode de vibration augmente (N, M) .

V-3 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présenté les résultats numériques de l'analyse de la vibration des nano- plaques composites en utilisant la méthode de transformation différentielle pour résoudre facilement l'équation de mouvement avec différentes conditions aux limites et nous avons pris en compte le paramètre à petite échelle. D'après les résultats, il est clair que la théorie locale surestime les valeurs de fréquences des nano-plaques à cause de l'omission de l'influence des atomes entre eux, et devient plus significatif si le paramètre à petite échelle plus élevé. En plus, il est clairement que la fréquence augmente lorsque le nombre de mode de vibration augmente (N,M) et que Les conditions aux limites la fraction volumique des fibres de carbones sont très importantes pour augmenter ou diminuer la fréquence d'une nano-plaque composite.

Conclusion Générale

Conclusion générale

Un modèle a été développé dans le cadre de ce mémoire. Il permet d'analyser le comportement vibratoire d'une nano-plaque composite de distribution uniforme (UD) avec différentes conditions aux bords et nous avons pris en compte l'effet de l'échelle (e_0a). En plus, pour résoudre le problème de la vibration d'une nano-plaque composite. Nous avons utilisé la Méthode de Transformation Différentielle (DTM). Avec cette méthode, les solutions exactes peuvent être obtenues sans aucun besoin de travail lourd. Elle est un outil utile et efficace pour les solutions analytiques et numériques.

En utilisant les propriétés de la DTM pour prédire et analyse la vibration d'une nano-plaque composite, y compris l'effet d'échelle, nous nous basons sur le modèle non-local de la plaque de Kirchhoff-Love (les plaques minces) avec les différents types de conditions aux limites. Elle est l'équivalent de la théorie d'Euler-Bernoulli des poutres et néglige également les déformations dues au cisaillement et les effets de l'inertie de rotation. A cause de ces approximations, elle est valable pour les plaques minces (quand l'épaisseur est très petite devant les dimensions de la plaque et la longueur d'onde flexion). La théorie plus complète, c'est l'équivalente de la théorie des poutres de Timoshenko, est la théorie de Mindlin (1951). Influence de tous les paramètres tels que les effets à petite échelle non-local, changement de la fraction volumique des fibres et le mode de vibration sur la fréquence de vibration sont analysés et discutés, et a été clarifié Les caractéristiques matérielles effectives des nano-plaques composites utilisées tout au long de ce travail.

Les résultats obtenus ont permis de mettre en évidence que :

- La théorie locale ($e_0a = 0$) surestime les valeurs de fréquences des nano-plaques à cause de l'omission de l'influence des atomes entre eux et devient plus significatif si le paramètre à petite échelle plus élevé.
- La fréquence de la nano-plaque composite augmente lorsque le nombre de mode de vibration augmente (N, M).
- Les conditions aux limites la fraction volumique des fibres de carbones sont très importantes pour augmenter ou diminuer la fréquence d'une nano-plaque composite

En perspective, il est intéressant d'étudier des autres phénomènes comme : voilement la flexion et torsion des nano-plaques composites avec d'autres types de distribution des nanotubes de carbone, le type de chargement et peut avoir aussi l'influence des conditions aux limites.

Références

- [1] A. Kelly, W.R. Tyson, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 13 (1965) 329-350
- [2] Aifantis, E.C. (1999), “Strain gradient interpretation of size effects”, *Int J Fract.*, 95, 1-4
- [3] Eringen, A.C. (1967), “Theory of micropolar plates”, *Z Angew Math Phys*, 18, 12–30.
- [4] Eringen, A.C. (1972), “Nonlocal polar elastic continua”, *Int J Eng Sci*, 10, 1–16.
- [5] Eringen, A.C. (1983), “On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves”, *J Appl Phys*, 54, 4703–4710.
- [6] Peddieson, J, Buchanan, G.R., McNitt, R.P. (2003), “Application of nonlocal continuum models to nanotechnology”, *Int J Eng Sci*, 41, 305–312
- [7] Xu, M. (2006), “Free transverse vibrations of nano-to-micronscale beams”, *Proceedings of the Royal Society*, 462, 2977–2995.
- [8] Reddy JN 2007, *Theory and analysis of elastic plates and shells*, Book second edition ; Taylor & francis group 2007.

- [9] Heireche, H., Tounsi, A., Benzair, A., Maachou, M., Adda Bedia, E.A. (2008a) “Sound wave propagation in single-walled carbon nanotubes using nonlocal elasticity”, *Physica E.*, 40, 2791–2799
- [10] Heireche, H., Tounsi, A., Benzair, A. (2008b), “Scale Effect on wave propagation of double-walled carbon nanotubes with initial axial loading”, *Nanotechnology*, 19, 185703.
- [11] Heireche, H., Tounsi, A., Benzair, A., Mechab, I. (2008c), “Sound Wave Propagation in Single – Carbon Nanotubes with Initial Axial Stress”, *Journal of Applied Physics*, 104,014301
- [12] Tounsi, A., Benguediab, S., Adda Bedia, E.A., Semmah, A., Zidour. M. (2013a), “Nonlocal effects on thermal buckling properties of double-walled carbon nanotubes”,
- [13] Tounsi, A., Semmah, A., Bousahla, A.A. (2013b), “Thermal buckling behavior of nanobeam usin an efficient higher-order nonlocal beam theory”, *Journal of Nanomechanics and Micromechanics (ASCE)*, 3, 37 – 42. *Advances in Nano Research*, 1(1), 1 – 11.

- [14] T Bensattalah, M Zidour, MAA Meziane, TH Daouadji, A Tounsi, 2018a « Critical buckling load of carbon nanotube with non-local Timoshenko beam using the differential transform method. *International Journal of Civil and Environmental Engineering* 12 (6), 637-644
- [15] T Bensattalah, M Zidour, TH Daouadji (2019) A new nonlocal beam model for free vibration analysis of chiral single-walled carbon nanotubes. *Compos. Mater. Eng* 1 (1), 21-31
- [16] T Bensattalah, A Hamidi, K Bouakkaz, M Zidour, TH Daouadji 2020 “Critical Buckling Load of Triple-Walled Carbon Nanotube Based on Nonlocal Elasticity Theory. *Journal of Nano Research* 62, 108-119.
- [17] T Bensattalah, K Bouakkaz, M Zidour, TH Daouadji, 2018b Critical buckling loads of carbon nanotube embedded in Kerr's medium . *Advances in Nano Research* 6 (4), 339.
- [18] Laurent Gornet. Généralités sur les matériaux composites. Engineering school France. 2008. cel-00470296v2ff
- [19] V.Pauchard, H.Boulharts, F.Grosjeani, P.Odru, A.Chateau Minois, « Développement d'un modèle de durabilité de poutres composites unidirectionnelles renforcées par des fibres de verre », *Rev, IFP, Vol.56, No.6*, pp.581-595, 2001.
- [20] Jean Marie. Berthelot, *Matériaux composites « comportement mécanique et analyse des Structures »*, édition TEC et DOC, 1999.
- [21] GURIT, « Guide to Composites, » 1 Janvier 2013. <http://www.gurit.com/guide-to-composites.aspx>. [Accès le 1 Novembre 2013].
- [22] Wypuch G. *Handbook of fillers*, Chem.Tec. Publishing edition, 2nd ed., Toronto,(1999)
- [23] Fornes T.D. Paul D.R., *Modeling properties of nylon 6/clay nanocomposites using composite theories*, *Polymer*, 44: 4993–5013, (2003)
- [24] Y.M.Huang, M.L.Yang *Dynamic analysis of a rotating beam subjected to repeating axial and transverse forces for simulating a lathing process* *International Journal of Mechanical Sciences* 51(2009)256-268.
- [25] C. Bervillier, *Status of the differential transformation method* *Applied Mathematics and Computation* 218 (2012) 10158-10170.
- [26] “*Mechanics of laminated composite plate: theory and analysis*”, New York: CRC Press.
- [27] A. E. H. Love, *On the small free vibrations and deformations of elastic shells*, *Philosophical trans. of the Royal Society (London)*, 1888, Vol. série A, N° 17 p. 491–549.

-
- [28].Philippe Mestat "Etude critique des modelisations de plaques encastrées en vibration" ,Travail de fin d'etudes (Memoire de DEA) , 2juin 1981
- [29] Juc Jaouen:"Vibration de flexion des plaques" , Rapport de recherché/ Université de Sherbrooke, 2002
- [30] Uflyand, Ya. S.,1948, Wave Propagation by Transverse Vibrations of Beams and Plates, PMM: Journal of Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 12, 287-300 (in Russian)
- [31] AIDE-MÉMOIRE MÉCANIQUE DES STRUCTURES et Résistance des matériaux Arnaud Delaplace Chargé de recherche au CNRS, agrégé de Génie civil Fabrice Gatuingt , Frédéric Ragueneau , Dunod, Paris, 2008
- [32] G. Kirchhoff, "Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer Elastischen Scheibe", Journal für reine und angewandte Mathematik, no. 40, pp. 51-88, (1850).
- [33] Eringen AC. Nonlocal polar elastic continua. Int. J. Eng. Sci. 1972; 101-6.
- [34] Eringen AC. On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves. J. Appl. Phys. 1983; 54: 4703.
- [35] P. Zhu, Z.X. Lei, K.M. Liew, "Static and free vibration analyses of carbon nanotube reinforced composite plates using finite element method with first order shear deformation plate theory", Compos. Struct. 94, (2012), 1450-1460.
- [36] ESAWI.A.M.K 2007. "Carbon nanotube reinforced composites: potential and current challenges" Materials & design 28 (9), 2394-2401
- [37] SHEN.H.S 2009. "Nonlinear bending of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates in thermal environments" Composite Structures Volume 91, Issue 1, November 2009, Pages 9-19.