



FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES
DÉPARTEMENT DE GÉNIE CIVIL

Mémoire de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme de Master

Spécialité : Génie Civil

Option : Structures

Présenté par :

BENZAHERA BELHADJ ILYES
BOUSSEDJRA MOHAMED

Sujet du mémoire

Etude analytique de la propagation des ondes dans les plaques à gradient fonctionnel (FGM) en utilisant la théorie des plaques de déformation en cisaillement d'ordre supérieure.

Soutenu publiquement le 29/09/2020 devant le jury composé de :

Mr, Belmahi Samir

Mr, Chikh Abdelbaki

Mr, Khiloun Mokhtar

Mlle Ouazir Khatima

Président

Rapporteur

Examineur

Examinatrice

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

Remerciements

Toute notre gratitude, grâce et remerciement vont à dieu le tout puissant qui nous a donné la force, la patience, le courage et la volonté pour élaborer ce travail.

*C'est avec une profonde reconnaissance et considération particulière que nous remercions notre promoteur : **Mr, le Docteur CHIKH.** A pour la sollicitude avec laquelle il a suivi et guide ce travail.*

Dédicace

*J'ai le grand plaisir de dédier ce modeste
Travail, comme un geste de gratitude :
A celle qui m'a enfanté, mon symbole d'amour :*

Ma très chère mère

*A celui qui je chère et j'apprécie fort son
Soutien continu tout le long de mes études :*

Mon très cher père

*A mes frères et mes
Sœurs ainsi que
Toute ma famille BOUSSEDJRA.
A tous mes amis de près ou de loin*

Dédicace

Au terme et à l'issue de ce modeste travail, je le dédie.

*A ma **Mère** qui est à l'origine de ma réussite grâce à ces Conseils.*

*A mon **père** pour son soutien durant mes longues années d'étude.*

A mon frère Zine Elabidine et mes sœurs et les petits Mohamed, fatiha et Alaa, Maram et à toute la famille BENZAHRA

Et mon professeur Abd Elbaki Chikh.

A mes amis de près ou de loin.

A tous les enseignants et les travailleurs de faculté des Sciences et de la Technologie.

A la promotion Master G civil

Abstract

In This work an analysis of the propagation of waves of functionally graduated plates is presented by using a high order hyperbolic (HSDT) shear deformation theory. This theory has only four variables, which is less than the theory of first order shear deformation (FSDT). Therefore, a shear correction coefficient is not required. Unlike other conventional shear deformation theories, the present work includes a new field of displacement which introduces indeterminate integral variables.

The properties of materials are supposed classified in the direction of the thickness according to two simple distributions of a power law in terms of volume fractions of constituents. The governing equations of the wave propagation in the functionally graded plate are derived by employing the Hamilton's principle. The analytical dispersion relation of the functionally graded plate is obtained by solving an eigenvalue problem. The convergence and the validation of the proposed theoretical numerical model are performed to demonstrate the efficacy of the model.

Parametric studies will be presented to underline the influence of the various parameters (material power index , length thickness ratio , porosity index) on wave propagation .

Keywords: wave propagation; phase velocity; vibration; functionally graded plate; plate theory; porosity

Résumé

Dans cette mémoire, une analyse de la vibration et de la propagation des ondes des plaques fonctionnellement gradué est présentée en utilisant une théorie de la déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT). Cette théorie ne comporte que quatre variables, ce qui est inférieur à la théorie de la déformation par cisaillement de premier ordre (FSDT). Par conséquent, un coefficient de correction de cisaillement n'est pas requis. Contrairement aux autres théories classiques sur la déformation par cisaillement, le présent travail comprend un nouveau champ de déplacement qui introduit des variables intégrales indéterminées et un nouveau champ mathématique est développé par la reformulation de la règle de mélange pour incorporer la phase de porosité dans les propriétés du matériau, éventuellement survenant à l'intérieur des matériaux à gradient fonctionnel (FGM) lors de la fabrication.

Les propriétés des matériaux sont supposées être classées dans le sens de l'épaisseur selon deux distributions simples d'une loi du pouvoir en termes de fractions volumiques des constituants. Les équations qui régissent la propagation des ondes dans la plaque fonctionnellement graduée reposant sur des appuis simples sont dérivées en utilisant le principe de Hamilton. La relation de dispersion analytique de la plaque à gradation fonctionnelle est obtenue en résolvant un problème de valeur propre. La convergence et la validation du modèle proposé sont discutées en détail pour démontrer l'efficacité des modèles proposés.

Des études paramétriques seront présentées pour souligner l'influence des différents paramètres (indice de puissance matériel, rapport d'épaisseur longueur, indice de porosité) sur la propagation des ondes.

Mots clés : propagation des ondes ; plaques fonctionnellement gradués ; vibration libre ; porosité ; déformation de cisaillement d'ordre élevées .

الملخص

في هذه الأطروحة , يتم تقديم تحليل للأهتزاز الحر و انتشار الموجات في الصفائح المتدرجة وظيفيا باستخدام نظرية تشوه القص ذات رتبة عليا. هذه النظرية لديها أربعة متغيرات فقط , و هي أقل من نظرية تشوه القص العرضي من الدرجة الأولى و لذلك , فإن عوامل تصحيح القص غير مطلوبة . بخلاف نظريات التشوه الكلاسيكية الأخرى, تتضمن النظرية معادلات حركية جديدة بأربع متغيرات تكاملية غير محددة و تم تطوير نموذج رياضي جديد من خلال إعادة صياغة مبدأ الخلط لأخذ بعين الاعتبار طور المسامية في خصائص المواد , التي قد تحدث داخل المواد المتدرجة وظيفيا أثناء التصنيع.

المواد المكونة لهذه الهياكل تعتبر مدرجة بانتظام في إتجاه السمك تحت قانونين أسين بسيطين من حيث كسور حجم المكونات . يتم استنتاج المعادلات التي تحكم انتشار الموجات في صفيحة التدرج الوظيفي مسندة على دعائم بسيطة بأستخدام مبدأ هاملتون, يتم الحصول على معادلات الأنتشار التحليلية للوحة المتدرجة وظيفيا من خلال حل اشكالية القيم الذاتية , تم التحقق من دقة النماذج الحلية المقترحة من خلال مقارنتها بالتفصيل لإثبات فعاليتها .

سيتم عرض دراسات لتأثير متلف العوامل على إنتشار الموجات في الصفائح المتدرجة وظيفيا (مؤشر قوة المواد , ونسبة سمك/الطول , و مؤشر المسامية)

كلمات البحث: إنتشار الموجات , الصفائح المتدرجة وظيفيا , الإهتزاز الحر , المسامية , تشوه القص ذا رتبة عليا .

LISTE DES FIGURES

Figure I.1 : Concept des matériaux à gradient de propriétés.	08
Figure I.2 : Protection thermique.	09
Figure I.3 : Schéma montrant deux géométries : l'architecture sur la gauche est Discrète tandis que celle de droite est continue	11
Figure I.4 : Classification des matériaux FGM selon [6]	12
Figure I.5 : Principe de la méthode coulage en bande [Lostec, 1997]	15
Figure I.6 : Les principaux domaines d'application des FGM.....	17
Figure I.7 : Géométrie d'une plaque en FGM.....	18
Figure I.8 : Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.....	19
Figure I.9: Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.....	20
Figure I.10 : Variation du module de Young dans une plaque E-FGM.....	21
Figure II.1 : Illustration de la plaque de Love Kirchhoff [Reddy, 1997]	25
Figure II.2 : Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin [Reddy, 1997]	26
Figure II.3: Illustration de la plaque d'ordre élevé [Reddy, 1997].....	27
Figure III.1 : Coordonnées et géométrie de la fonction plaque graduée.....	35
Figure IV.1 : Les courbes de dispersion des différentes FGM plaques.....	46
Figure IV.2 : Les courbes de vitesse de phase des différentes FGM plaques	47
Figure IV.3 : Les courbes de dispersion des différentes plaques à gradation fonctionnelle imparfaites utilisant SSDT	48
Figure IV.4 : Les courbes de vitesse de phase des différentes plaques à gradation fonctionnelle imparfaites utilisant SSDT	49
Figure IV.5 : Les effets de l'indice de loi de puissance et de la porosité sur la fréquence de propagation des ondes dans les plaques FG parfaites et imparfaites en utilisant SSDT pour le nombre d'onde $k = 10 \text{ rad/m}$	50

LISTE DES TABLEAUX

Tableau I.1: comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.....07

Tableau II.1: Différentes fonctions de cisaillement utilisées dans les théories des plaques isotropes et FGM32

SOMMAIRE

Remerciements	I
Dédicace	II
Abstract	IV
Résumé	V
المخلص	VI
Liste des Figures	VII
Liste des Notations	VIII
Liste des Tableaux	X
Introduction général.....	01
Chapitre I : Généralités Sur Les Matériaux à Gradient De Propriétés	
I.1.Introduction :.....	06
I.2. Concept des matériaux à gradient de propriétés :.....	06
I.3. Histoire de développement des matériaux à gradient de propriétés :.....	09
I.4. Motivation.....	11
I.5. Classification.....	12
I.6. Champs d'utilisation.....	13
I .6. 1.Aéronautique.....	13
I.6. 2.Matières industrielles.....	13
I.6. 3.Optoélectronique	13
I.6. 4.Biomatériaux	14
I.6. 5.Autres	14
I.4. Méthodes d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés :.....	14
I.4.1. Coulage en bande (Tape Casting ou Doctor-Blade) :.....	15
I.4.2. Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting) :.....	15

I.4.3. Compaction sèche des Poudres :.....	16
I.4.4. Projection plasma :.....	16
I.4.5. Frittage et Infiltration :.....	16
I.5. Domaines d'applications des matériaux à gradient de propriétés :.....	17
I.6. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM :.....	19
I.6.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM :.....	20
I.6.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM :.....	21
I.6.3. Les propriétés matérielles de la plaque E-FGM :.....	22
I.7. Conclusion :	23

Chapitre II : Théorie des plaques

II.1. Introduction :.....	25
II.2. Les modèles analytiques des plaques FGM :.....	25
II.2.1 La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT) :.....	25
II.2.2 La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) :.....	26
II.2.3 La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT) :.....	28
II.3. Revue sur les différents modèles de la théorie d'ordre élevé :.....	30
II.4. Conclusion.....	33

Chapitre III : Analyse théorique de la propagation des ondes dans les plaques en FGM.

III.1. Introduction.....	35
III.2. Théorie et formulation	35
III.3. Equations fondamentales	37
III.3.1. Cinématique et déformations	37
III.3.2. Equations de mouvement	39
III.3.3. Relations de dispersion	42
III.4. Conclusion	44

Chapitre IV : Validation des résultats et discussion

IV.1. Introduction	46
IV.2. Résultats numériques et discussion.....	46
IV.3. Conclusion	52
Conclusion générale	54
Référence	55

INTRODUCTION
GENERALE

Introduction générale

Les matériaux composites sont obtenus par la combinaison artificielle de différents matériaux afin d'obtenir des propriétés que les composants individuels en eux-mêmes ne peuvent pas atteindre. Avec leurs hautes résistances et une rigidité combinée à une faible densité et leur capacité d'adaptation à des applications spécifiques, ces matériaux offrent des avantages par rapport aux matériaux traditionnels. Cependant, leur comportement sous des applications pratiques à haute température est une préoccupation ; ces matériaux composites stratifiés présentent une disparité entre les propriétés mécaniques à travers une interface en raison de la liaison de deux matériaux distincts. En conséquence, les constituants des composites matrice-fibres sont susceptibles de se désagréger à des charges thermiques extrêmement élevées. De plus, des fissures sont susceptibles de s'initier aux interfaces et de se transformer en sections de matériau plus faibles. Des problèmes supplémentaires incluent la présence de contraintes résiduelles dues à la différence entre les coefficients de dilatation thermique de la fibre et de la matrice dans les matériaux composites. Ces problèmes sont évités ou réduits par un concept de couche intermédiaire graduée dans lequel la contrainte thermique a effectivement été éliminée par une couche intermédiaire à gradient de composition. Ce concept, on lui a donné le nom de matériaux à gradient de propriétés FGM dans les structures en matériaux fonctionnellement gradué en faisant varier progressivement la fraction volumique des constituants plutôt qu'en les modifiant brusquement à travers une interface.

Les structures fonctionnellement graduées sont celles dans lesquelles les fractions volumiques de deux matériaux ou plus varient continuellement en fonction de la position le long de certaines dimensions de la structure afin de remplir les fonctions souhaitables pour des applications spécifiques en particulier les avions, les véhicules spatiaux, l'optique, la biomécanique, l'électronique, la chimie, la mécanique, la construction navale et autres ouvrages de génie civil, (Koizumi 1993, Ait Atmane 2011, Ould Larbi 2013, Tounsi 2013, Hebali et al, 2014 Al-Basyouni 2015 Bennai 2015, Ait Yahia. 2015, Larbi Chaht 2015, Boukhari 2016) Par exemple, des structures de plaque de barrière thermique pour des applications à haute température peuvent être formées à partir d'un mélange de céramique et du métal. La composition varie d'une surface riche en céramique à une surface riche en métal, avec une variation souhaitée des fractions volumiques des deux matériaux entre les deux surfaces. La céramique constituant le matériau assure la résistance aux températures élevées en raison de sa faible conductivité thermique. Le changement progressif des propriétés des matériaux peut être adapté à différentes applications et environnements de travail.

Les matériaux fonctionnellement gradué ont principalement été utilisés dans des environnements soumis à des températures élevées, notamment des chocs thermiques, une situation qui se produit lorsqu'un corps est soumis à un échauffement ou à un refroidissement transitoire élevé dans un court intervalle de temps.

Le développement de l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés dans les structures nécessite une bonne compréhension du comportement mécanique des structures FGM afin d'offrir un profil optimum aux concepteurs.

Actuellement, plusieurs travaux concernant l'étude du comportement mécanique des plaques FGM sont annoncés sur l'analyse de la vibration libre, le flambement et la flexion des plaques et sur l'étude de l'effet thermique sur le comportement non linéaire des plaques FGM. Reissner (1945), Cranch (1956), Ambartsumyan (1969) et Bresse (1859) ont été les innovateurs de la recherche dans l'étude du différent comportement des structures en matériaux isotropes sous différentes contraintes. Avec le développement du concept de FGM, de nombreux travaux ont été étudiés et publiés dans la littérature.

Reddy (2000) a développé des formulations théoriques et leurs modèles en éléments finis pour des plaques FGM épaisses en se basant sur une théorie de cisaillement des plaques d'ordre supérieur (HSDPT) pour étudier la réponse dynamique non linéaire sous l'effet d'une pression uniforme. Sur la base de la théorie des plaques de Reddy, Cheng et Batra (2000) présente les résultats de flambement et les vibrations d'une plaque FGM simplement appuyée polygonale. Ensuite la même analogie membranaire a été appliquée à l'analyse des plaques FGM et des coques sur la base d'une théorie de troisième ordre des plaques par Reedy (2002).

Vel et Batra (2004) ont proposé une solution exacte tridimensionnelle des vibrations libres et forcées, pour des plaques rectangulaires en FGM simplement appuyées. Zenkour (2006) a présenté une théorie généralisée de la déformation par cisaillement dans laquelle les déplacements de la membrane sont étendus sous forme de fonction trigonométrique sur toute l'épaisseur. Malek zadeh (2009) a étudié l'analyse des vibrations libres de plaques épaisses dans les FGM sur des fondations élastiques à deux paramètres. Par la suite, de nouvelles fonctions de forme ont été proposées par Ait Atmane et al. (2010) Benachour et al. (2011) et Ait Amar Meziane et al. (2014). Ait Atmane et al. (2015) ont présenté un modèle de déplacement en cisaillement calculé pour l'analyse vibratoire des plaques FG avec des porosités. Beldjelili et al. (2015) ont analysé la réponse en flexion hygro-thermo-mécanique de plaques S-FGM reposant sur des fondations élastiques variables en utilisant une théorie de plaque trigonométrique à quatre variables. Tounsi et al (2016) ont développé une nouvelle théorie non polynomiale à trois inconnus pour le flambement et les vibrations des plaques sandwich FG.

La propagation des ondes d'éléments structurels tels que les plaques ou les poutres a été étudiée dans différents secteurs tels que l'aéronautique, la médecine, l'acoustique des bâtiments, etc. Ait Yahia et al. (2015) ont discuté sur la propagation des ondes dans les plaques fonctionnellement graduées avec des porosités, en employant diverses théories des plaques de déformation par cisaillement d'ordre supérieur. Boukhari et al. (2016) ont introduit une théorie de la déformation par cisaillement pour la propagation des ondes de plaques FG. Ebrahimi (2016a) a étudié l'analyse de la propagation des ondes d'une quasi-3D nano poutre FG dans un environnement thermique en se basant sur la théorie de la contrainte gradué non locale. Ebrahimi (2016b) a introduit une théorie de contrainte gradué non locale pour l'analyse de la

propagation des ondes dans des nano plaques non homogènes. Han et al. (2001) ont proposé une méthode analytique-numérique pour analyser les caractéristiques des ondes dans les cylindres en FGM. Sun et Luo (2011a) ont également étudié la propagation des ondes et la réponse dynamique des plaques FG, de forme rectangulaire encadrée, soumis à une charge impulsive.

Pour tenir compte les effets thermiques et les propriétés du matériau dépendant de la température, Sun et Luo (2011b) ont étudié la propagation des ondes d'une plaque fonctionnellement gradué en utilisant une théorie de déformation par cisaillement d'ordre supérieur.

Lors de la fabrication des pièces FGM, des porosités peuvent apparaître dans ces éléments lors du processus de frittage. Ceci est dû à la grande différence de température de solidification ; Ces dernières années, certaines études sur l'effet de porosité dans les structures FG ont été publiées dans la littérature ; Wattanasakulpong et al. (2012) ont également donné une discussion sur les porosités qui se développent à l'intérieur des échantillons en FGM fabriqués par une technique d'infiltration séquentielle en plusieurs étapes. Wattanasakulpong et al. (2014) ont étudié les problèmes linéaires et non linéaires de la vibration des poutres

FGM

ayant des porosités. Şimşek et Aydın (2012) ont examiné la vibration forcée des microplaques FG avec des effets de porosité sur la base de la théorie de couple de contrainte modifiée. Jahwari et Naguib (2016) ont étudié les plaques poreuses FG viscoélastiques avec une théorie des plaques d'ordre supérieur et un modèle statistique de distribution cellulaire. Ait Yahia et al. (2015) ont étudié la propagation des ondes dans les plaques FG en prenant en compte l'effet de porosité. Mouaici et al. (2016) ont proposé une solution analytique pour la vibration des plaques FG présentant des porosités. L'analyse était basée sur la théorie de la déformation par cisaillement avec prise en compte de la position exacte de la surface neutre. Récemment, Ait Atmane et al. (2016) étudient l'effet de stretching et de la porosité sur la réponse mécanique d'une poutre FG reposant sur des fondations élastiques. Akbas SD (2017) a étudié les effets thermiques sur le comportement vibratoire des poutres FG avec porosité. Benadouda et al. (2017) ont présenté une théorie efficace de la déformation par cisaillement pour la propagation des ondes dans les poutres de matériaux FG avec des porosités.

L'objectif de ce travail est d'étudier le comportement vibratoire et la propagation des ondes dans des plaques FGM reposant sur des appuis simples en utilisant une nouvelle théorie de déformation par cisaillement d'ordre supérieur. Employant un nouveau champ de déplacement de variable intégrale à travers l'épaisseur de la plaque, l'addition du terme d'intégral dans le champ de déplacement mène à une réduction des nombres d'inconnus; pour tenir en compte l'effet de la porosité qui peuvent se produire à l'intérieur des matériaux à gradient de propriétés (FGM) au cours de leur fabrication, on a développé un nouveau modèle qui donne une nouvelle

forme de répartition de la porosité en fonction de l'épaisseur de la plaque ; ce modèle a été validé et comparé avec d'autres modèles de distribution de porosité. Les équations régissant la propagation des ondes dans la plaque FGM sont obtenues en utilisant le principe d'Hamilton. Les relations de dispersion analytiques des plaques FGM sont obtenues en résolvant un problème aux valeurs propres.

Le présent travail de thèse est organisé en quatre chapitres :

Dans le chapitre I, on présente les matériaux à gradient de propriétés, l'histoire de leur développement, leurs méthodes de fabrication, ainsi que leurs domaines d'application.

Le chapitre II, les différentes théories des plaques ont été étudiées et analysées.

Ensuite dans le chapitre III, on va procéder au développement de la solution analytique des plaques en FGM qui prend en considération l'effet de cisaillement transverse pour l'analyse du comportement vibratoire des plaques FG simplement appuyées en tenant compte l'effet de la porosité utilisant un champ de déplacement à quatre variables intégrales.

Dans le quatrième (IV) chapitre, une application numérique et une étude comparative des résultats de la propagation des ondes et du comportement vibratoire des plaques fonctionnellement graduées a été illustré afin de vérifier l'efficacité de la théorie utilisée, qui prend en considération l'effet de déformation par cisaillement transverse ainsi une étude paramétrique sera faite pour étudier l'effet de l'exposant de la fraction volumique et les autres paramètres sur les plaques FGM simplement appuyées, les propriétés matérielles varient selon l'épaisseur de la structure FGM seulement selon une distribution de puissance (P-FGM) et sigmoïde (S-FGM); une validation du modèle de porosité proposé, tout en le comparant avec ceux trouvés dans la littérature, L'effet de la fraction volumique de porosité sur les plaques FGM est présenté sous forme graphique.

Le présent travail se termine par une conclusion générale où l'on souligne l'efficacité de cette théorie dans la résolution des problèmes de la vibration libre et la propagation des ondes dans les plaques FGM ainsi par les perspectives envisagées pour des travaux futurs.

CHAPITRE I :
Généralités Sur
Les Matériaux à
Gradient De
Propriétés

I.1. Introduction :

De nombreux milieux naturels présentent des variations unidirectionnelles et continues de leurs propriétés élastiques. Les tissus vivants, la croûte terrestre, les océans ou encore l'os cortical en font partie. Tirant leur inspiration de la Nature qui les entoure, les scientifiques (chercheurs et ingénieurs), se sont penchés sur les avantages que présentent ce type de matériaux en terme de comportement mécanique et c'est ainsi que l'on vit apparaître, dans les années 1980, les matériaux à gradients de propriétés (Functionally Graded Materials « FGM »). Ils permettent par exemple de reproduire les propriétés structurales et matérielles des tissus biologiques tels que l'os à différentes étapes de son évolution (croissance, vieillissement ou pathologie).

Les matériaux à gradient de propriétés (FGM), sont considérés comme des matériaux composites, produits par un changement non interrompu de leurs fractions volumiques dans la direction de leur épaisseur. Ce type de matériau à récemment suscité un grand intérêt de la communauté scientifique, en raison des avantages qu'il offre, par la diminution de la disparité dans les propriétés réduisant ainsi les contraintes thermiques [Zhong, 2007]. La variation continue des propriétés mécaniques confère au matériau un comportement optimisé. Les FGM sont particulièrement utilisés dans les applications de haute technologique: aéronautique, aérospatiale, nucléaire, semi-conducteurs, et en Génie Civil et trouvent également leurs applications dans le domaine de la biomédicale [Baron, 2008].

I.2. Concept des matériaux à gradient de propriétés :

Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux (navettes spatiales ou des avions hypersoniques) sont souvent soumis à des températures élevées. Les pièces les plus exposées sont le cône d'entrée, les bords d'attaque des ailes ainsi que certaines surfaces inférieures. Pour cette raison les matériaux constituant les parois de ces pièces doivent être capables de supporter sur une dizaine de millimètres un chargement thermique induit par des températures d'atmosphère environnant les 1800°C. Il n'y a aucun matériaux monolithique capable de résister à une telle contrainte thermique [Koizumi, 1992].

La solution envisagée est la mise en œuvre de matériaux composites et notamment l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés. On peut imaginer un matériau dont la face exposée à très haute température posséderait des propriétés de résistance aux fortes sollicitations thermiques et à l'oxydation, tel que la céramique, et dont la face intérieure serait très bonne conductrice de la chaleur et posséderait une bonne résistance mécanique et une meilleure ténacité, comme le métal.

Cependant, si l'on considère un simple assemblage de ces deux matériaux, ils présentent immédiatement une rupture due aux contraintes thermiques exercées à l'interface entre les deux types de matériaux ayant des propriétés thermiques différentes. L'idéal serait de supprimer cette interface en créant une transition continue entre les deux faces.

C'est ainsi qu'est né le concept de matériau à gradient de fonction dans les années 1980 par un groupe de chercheurs au laboratoire national d'aérospatial (National Aerospace Laboratory, STA) au Japon. Le FGM consiste en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux.

Généralement, les « FGM » sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Les vides sont également considérés comme une composante des matériaux FGM [Kokini, 1990]. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes.

La plupart des « FGM » sont constitués des céramiques et des métaux dont les propriétés mécaniques sont comparés dans le tableau I.1.

La face à haute température	Céramique	- Bonne résistance thermique ; - Bonne résistance à l'oxydation ; - Faible conductivité thermique.
Continuité du matériau d'un point à l'autre « couches intermédiaires »	Céramique-métal	- Élimination des problèmes de l'interface ; - Relaxer les contraintes thermiques.
La face à basse température	Métal	- Bonne résistance mécanique ; - Conductivité thermique élevée, - Très bonne ténacité.

Tableau I.1: comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.

Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure d'un matériau « FGM » est illustré dans la figure I.1. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés des « FGM ». Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente [Boch, 1986].

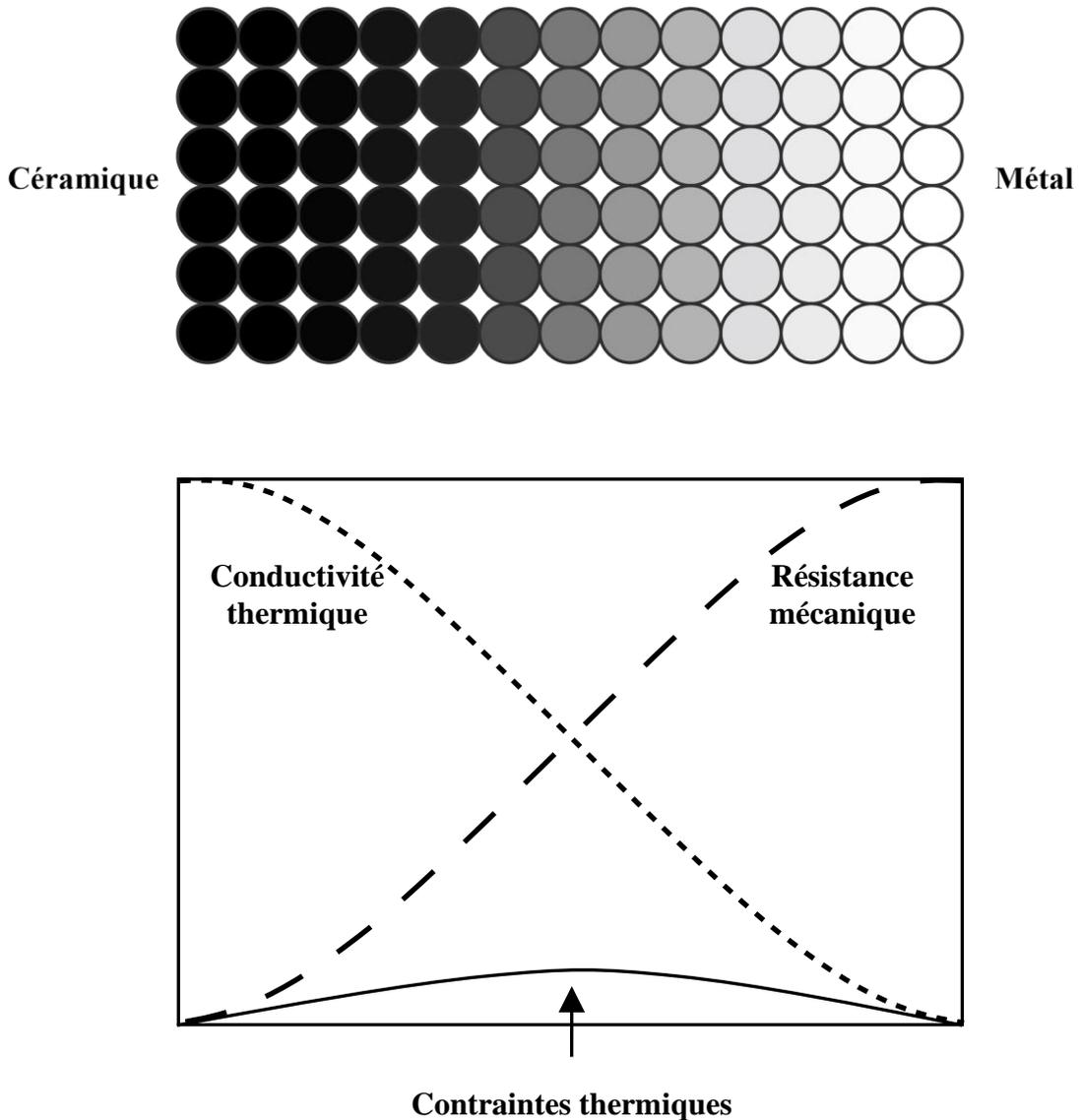


Figure I.1 : Concept des matériaux à gradient de propriétés.

La figure I.2 montre les concentrations de contraintes dans les panneaux de protection thermiques conventionnels au niveau des interfaces (changement brutale de composition). Il montre également comment un FGM peut alléger ces concentrations de contraintes en changeant graduellement les propriétés matérielles et assure toujours la protection thermique trouvée dans les barrières thermiques conventionnelles.

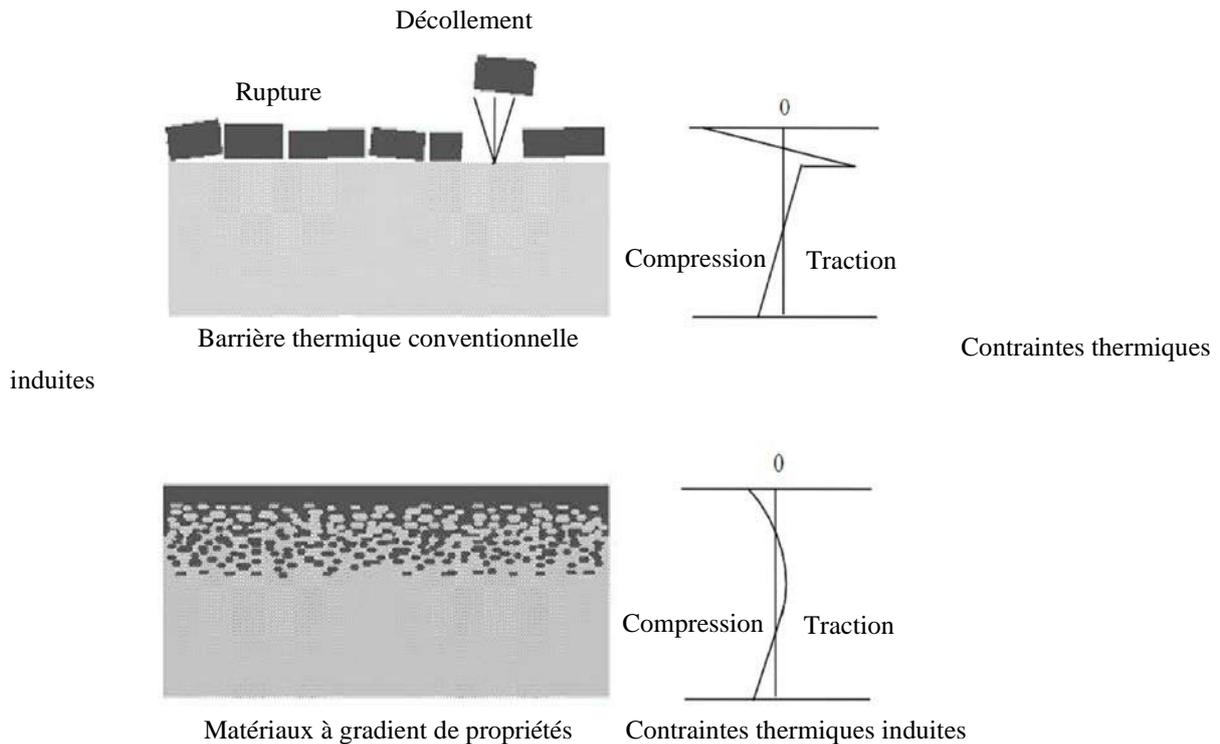


Figure I.2 : Protection thermique.

I.3. Histoire de développement des matériaux à gradient de propriétés :

Le concept de "Matériaux à Gradient de propriétés" a été développé dans le laboratoire national d'aérospatial du Japon en 1984 par M. Niino et ses collègues à Sendai. L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion [Koizumi, 1992]. Les changements continus dans la composition, dans la microstructure, et même dans la porosité de ces matériaux a comme conséquences des gradients des propriétés matérielles telles que la résistance mécanique et la conductivité thermique [Koizumi, 1997]. Cette nouvelle classe de matériaux composites peut être utilisés pour différentes applications, telles que les enduits des barrières thermiques pour les moteurs en céramique, turbines à gaz, couches minces optiques, [Croce, 2004].

En 1987, le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet intitulé "la recherche sur la technologie de base pour développement de Matériaux à Gradient de propriétés et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques". L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux. 17 laboratoires nationaux de recherche, des universités et des entreprises ont été engagées dans ce projet [Koizumi, 1997].

Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux et les murs thermiques spéciaux sont appelés à travailler à des températures de surface de 1800°C ainsi qu'à un gradient de température de l'ordre de 1300 °C. A cette année-là, aucun matériau industriel n'était connu pour supporter de telles sollicitations thermomécaniques [Koizumi, 1992].

Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux:

- Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau;
- Ténacité du matériau côté basse température.
- Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau.

Pour répondre à un tel cahier des charges, l'idée originale des F.G.M a été proposée pour élaborer un nouveau composite profitant à la fois des propriétés des céramiques (côté haute température) et des métaux (côté basse température).

À la fin de la première étape (1987-1989), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000K (température de surface) et à un gradient de température de 1000K. Quatre techniques ont été utilisées pour fabriquer les matériaux présentant un gradient de composition et de structure. Les techniques utilisées dans la fabrication de tels matériaux sont les suivantes : le système SiC/C par C.V.D., le système PSZ/Mo par la technique de la compaction sèche des poudres, le système TiB₂/Cu par synthèse par auto-propagation à haute température, et enfin le système (Ni-Cr-Al-Y)/(ZrO₂Y₂O₃) par projection plasma à double torches [Okamura, 1991].

Dans la seconde étape (1990-1991), le but était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première étape. Pendant les années 90, non seulement les champs d'applications des FGM s'est développé pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température, mais s'est aussi élargi à d'autres applications: biomécaniques, technologie de capteur, optique, [Okamura, 1991].

Le concept des matériaux à gradient de propriétés tient son intérêt non seulement dans l'élaboration des nouveaux matériaux réfractaires performants pour leurs éventuelles utilisations dans le domaine aérospatial, mais également dans le développement de divers matériaux fonctionnels, employés dans les domaines de l'optique et de l'électronique. A cet effet, un deuxième projet a été lancé pour la recherche et développement des matériaux FGM en qualité de matériaux fonctionnels « Recherche sur les matériaux de conservation d'énergie avec la structure à gradient de propriétés ». Ce programme vise développer la technologie des FGM dans le but d'améliorer leur efficacité énergétique pour des applications dans le nucléaire, photovoltaïque et thermoélectrique.

I.4. Motivation

Les avancées significatives dans les techniques de fabrication et de transformation au cours de la dernière décennie ont permis de produire FGM utilisant des procédés qui permettent d'offrir une grande latitude dans la confection de la microstructure et la composition matérielle. Dans l'avenir, les FGM avec des formes et des propriétés complexes, y compris deux et trois dimensions de gradient, seront produits à l'aide de la fabrication avec une technique qui nécessitant l'ordinateur. Ce potentiel signifie que le concepteur ne se limite plus à une palette de matériaux homogènes existants, bien que beaucoup de recherches ont été consacrées à l'analyse de ce matériau, les ingénieurs et autres professionnels sont engagés dans le processus de conception avec les FGM manque un cadre unifié pour la prise de décisions concernant la façon de faire les meilleurs choix possible, basé sur ce menu de matériel avec les composants disparates et les profils du matériel composé. L'objectif des recherches est de développer une méthodologie solide pour l'adaptation de la composition spatiale d'un matériau à gradient évalué lors de l'application d'une haute température ou haute flux de chaleur. La méthodologie proposée est prévue d'une manière significative de notre capacité de concevoir les composants du (FGM) pour une variété de la mécanique et les applications aérospatiales où les conditions de fonctionnement sont sévères.

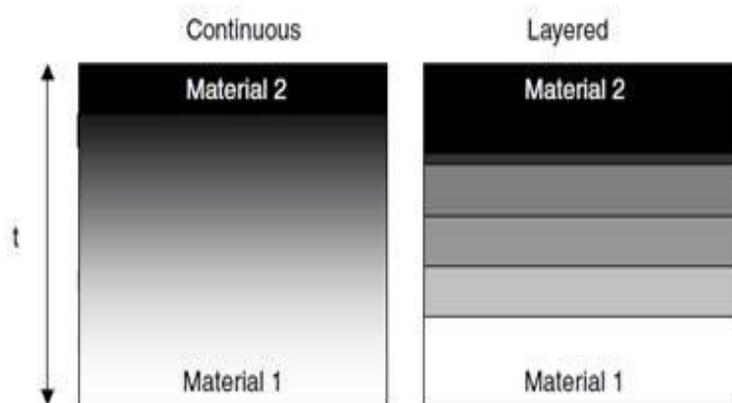


Figure I.3 – Schéma montrant deux géométries : l'architecture sur la gauche est discrète tandis que celle de droite est continue.

I.5. Classification

Peut-être les FGM sont mieux classifiés selon le traitement, comme illustré dans figure II-4, qui sépare les FGM en deux catégories : ceux par des processus constructifs et ceux produits par les processus transporter-basés [9]. En résumé, les processus constructifs se fondent sur le placement des phases dans une structure par l'ingénieur des méthodes. Les processus Transporter-basés se fondent sur des réactions ou des processus well-timed et sont conçus pendant la fabrication matérielle. Beaucoup de revêtements de protection (par exemple, revêtements d'isolation thermiques) se rangent dans l'ancienne catégorie. La carburation de l'acier se range dans la dernière catégorie. Naturellement, une approche de conception dans laquelle une gradation est formée in situ, par un processus transporterbasé, serait plus simple et généralement plus souhaitable qu'une approche constructive.

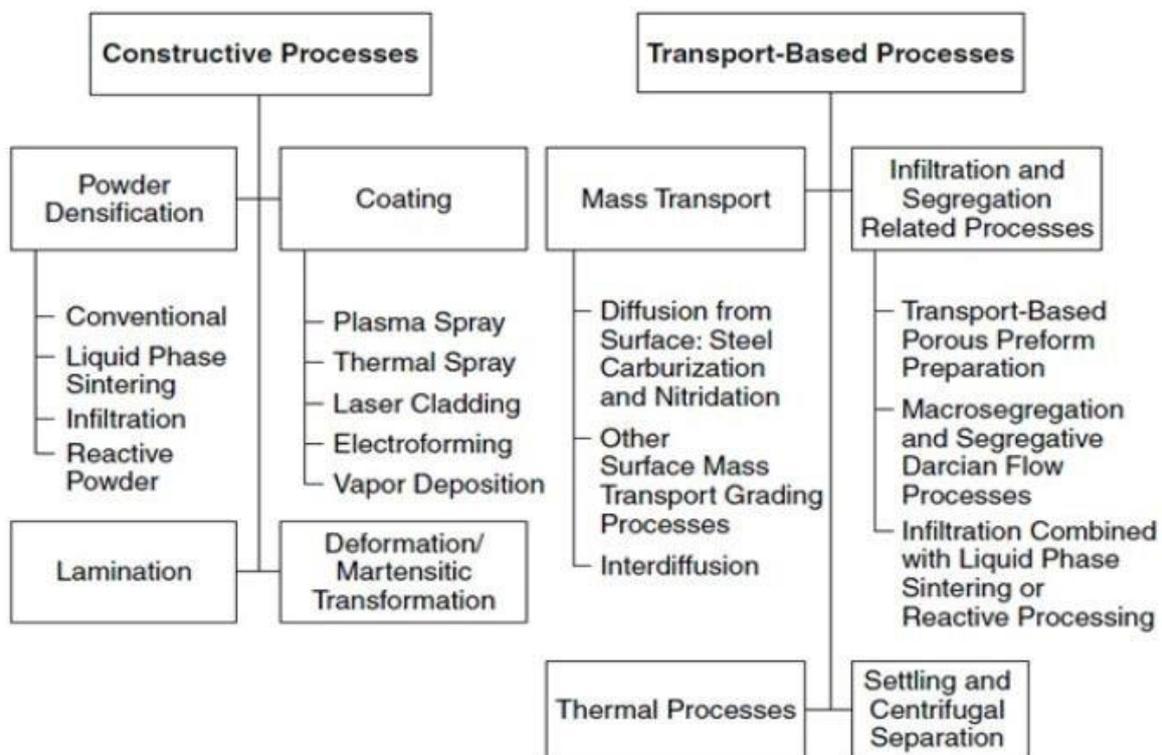


Figure I.4 : Classification des matériaux FGM selon [6].

I.6. Champs d'utilisation

I.6. 1.Aéronautique

Le concept de FGM a été initialement conçu pour ce champ. Possédant deux propriétés contradictoires, comme la conductivité thermique et de propriété barrière thermique dans un matériau, il permet de produire le poids-léger et des matériaux solides.

Surtout, ce sera une technologie indispensable pour la roquette et à la construction de station spatiale. Les FGM sont également applicables à un mur externe de l'avion spatial et des parties de moteur de fusée.

I.6. 2.Matières industrielles

De nombreuses applications de FGM ont été récemment réalisées pour les matériaux industriels. Comme les produits récents sont s'intensifier en raison d'une résistance accrue et la résistance thermique et énergiques de réduction et de la forme, la demande d'un nouveau matériau pour l'outil industriel sont en pleine croissance. Dans ce domaine, il est nécessaire d'avoir les deux résistances à l'usure et la ténacité ; ainsi, nous pouvons dire que la demande de la FGM est une solution. D'ailleurs, comme les besoins n'pour la coupe à sec et ne pas utiliser de liquide de coupe augmenter en contrepartie de l'environnement, le développement d'une autolubrifiant et outil de haute résistance thermique est attendu. Une production à l'essai de l'outil industriel a été menée avec succès à l'aide de diamants (à l'extérieur) et l'acier (à l'intérieur), et le développement est maintenant prévu pour un outil à grande vitesse dans n'importe quelle taille ou forme.

I.6. 3.Optoélectronique

Il y a tant de variations dans les moyens de communication. Maintenant, les outils de communication utilisant les fibres optiques ont besoins de nouveaux progrès ainsi que des informations de plus en plus de volume. Une idée est une lumière de longueur d'onde système multiplex de communication utilisant des filtres optiques, en particulier, en utilisant un indice de réfraction filer le classement. Il a une structure que l'indice de réfraction des ondes transmettant le sens varie avec la fréquence en continu le long longueur d'onde. Avec le filtre, la réfraction inutile peut être évitée dans une certaine mesure. Application des FGM aux fibres optiques plastiques peuvent assurer une transmission à haute vitesse. Par conséquent, il sera capable de se propager système de communication optique jusqu'au niveau des ménages.

I.6. 4. Biomatériaux

Notre corps est soutenu par 206 os couvrant le cerveau et d'autres organes. Si nous avons une douleur à un os ou une articulation, nous aurons des troubles dans notre vie. Pour résoudre ces problèmes, on a besoin d'un nouveau matériau qui peut remplacer les os et les articulations et a une longue vie a été souhaité. La technologie FGM est applicable aux os artificiels, des articulations et des dents. La technologie de classification de structure est utilisée dans la recherche pour la prévention du cancer aussi.

I.6. 5. Autres

Téléphone cellulaire est l'un des moyens d'outils de communication pratique. Il devient de plus mince et plus petit. La technologie FGM est applicable dans ce domaine aussi. Pour la minimisation de la taille et l'efficacité de transmission, une permittivité-technologie de classification peut être appliquée lors de la production des substrats. De même, dans d'autres domaines tels que le champ de l'électronique et domaine de la chimie, les FGM sont également applicables. Les fibres optiques entièrement faites de polymère fluoré ont été développées.

I.7. Méthodes d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés :

Le processus de fabrication des matériaux à gradient de propriétés peut être divisé en établissant la structure dans l'espace non homogène « gradation » et la transformation de cette structure en matériau en bloc « consolidation ». Il existe de nombreux procédés d'élaboration des FGM, les paragraphes suivants s'attachent à décrire les principales méthodes d'élaboration des FGM utilisées dans l'industrie.

I.7.1. Coulage en bande (Tape Casting ou Doctor-Blade) :

Le coulage en bande est une technique de mise en forme par voie liquide qui consiste à étaler une barbotine de poudres fines en suspension sur une surface plane en couches minces et régulières. L'étalement de la bande est obtenu par le mouvement relatif d'un réservoir ou sabot.

La suspension est ainsi laminée par son passage entre la lame du réservoir et le support (figure I.3), ce qui confère à la bande déposée une épaisseur uniforme sur toute sa longueur. La hauteur du couteau du réservoir par rapport au support détermine l'épaisseur de la bande [Lostec, 1997]. Les produits obtenus sont des feuillets avec des épaisseurs contrôlées (25-1000 μm). Après un raffermissement de la pâte, les feuillets sont démoulés et ensuite découpés.

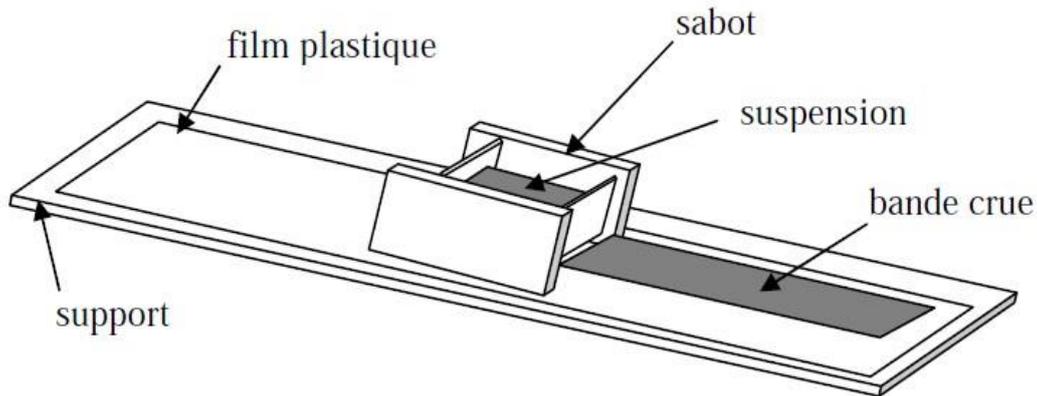


Figure I.5 : Principe de la méthode coulage en bande [Lostec, 1997].

Le procédé de coulage en bande est largement utilisé pour réaliser des matériaux composites laminaires suivant deux méthodes : soit par réalisation directe de bandes multicouches grâce à un système de lames multiples, c'est le cas des tri-couches élaborés par Mistler [Mistler, 1973] ; soit par empilage de couches élaborées séparément, dont la cohésion est ensuite assurée par une étape de thermo-compression [Boch, 1986].

I.7.2. Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting) :

Le coulage en barbotine (slip casting) consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, laissant un tesson (couche de poudre compacte) sur la surface du moule. Après séchage, on obtient le corps en cru.

Donc le coulage se décompose en deux étapes essentielles:

- formation du tesson ou "prise".
- consolidation du tesson ou "raffermissement".

La filtration, c'est à dire la formation du tesson lors du coulage, peut être considéré comme un processus d'élimination d'une partie de l'eau de la barbotine; Cette eau migre à travers la couche de tesson déjà formée, sous l'effet:

- du pouvoir de succion du plâtre (coulage classique [Moya, 1992]).
- ou d'une pression appliquée sur la barbotine (coulage sous pression).

Dans le cas de la fabrication de multicouches, après la formation du premier tesson, le dépôt de la deuxième couche s'effectue de manière telle que la barbotine ne pénètre pas dans le tesson formé. Ce procédé est successivement reproduit pour les autres couches.

I.7.3. Compaction sèche des Poudres :

Dans cette technique les poudres sont successivement versées dans un moule en acier. Chaque fois qu'une poudre est versée, une faible compression est exercée. Ensuite, la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Ce procédé est suivi, généralement, par une pression isostatique et un déliant âgé. La densification sera enfin l'étape finale [Bishop, 1993].

Ce procédé peut être envisagé pour la fabrication de pièces de formes complexes. En effet il s'applique aussi avec la technique du pressage isostatique, et de façon industrielle.

I.7.4. Projection plasma :

Un gaz soumis à une forte température (par exemple celle d'un arc électrique), se transforme en un état ionisé (plasma). Cette transformation est accompagnée d'un dégagement de chaleur important. Si une particule de céramique se trouve dans cet environnement, elle se fond totalement ou superficiellement, ce qui permet de la situer sur un substrat.

La projection plasma des particules des divers matériaux est devenue une méthode très utilisée pour fabriquer des FGM. L'équipement relativement simple, le rendement élevé du dépôt des particules sur des substrats à géométrie compliquée, les performances des surfaces en fonctionnement et la compatibilité des céramiques avec les métaux sont les avantages essentiels de cette technique [Steffens, 1990].

I.7.5. Frittage et Infiltration :

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes. La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique [Takahashi, 1990].

Cette technique peut être généralement appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres.

I.8. Domaines d'applications des matériaux à gradient de propriétés :

Le concept des matériaux à gradient de propriétés est applicable dans des nombreux domaines, comme il est illustré dans la figure I.4. Il a été initialement conçu pour l'industrie de l'aéronautique, où les FGM ont fournis deux propriétés contradictoires telles que la conductivité thermique et d'isolation thermique dans un matériau. Actuellement, elles permettent la production des matériaux légers, forts et durables, et elles sont applicables dans un large intervalle des domaines tels que les matériaux de construction, matériaux de conversion d'énergie, nucléaire et semi-conducteurs.

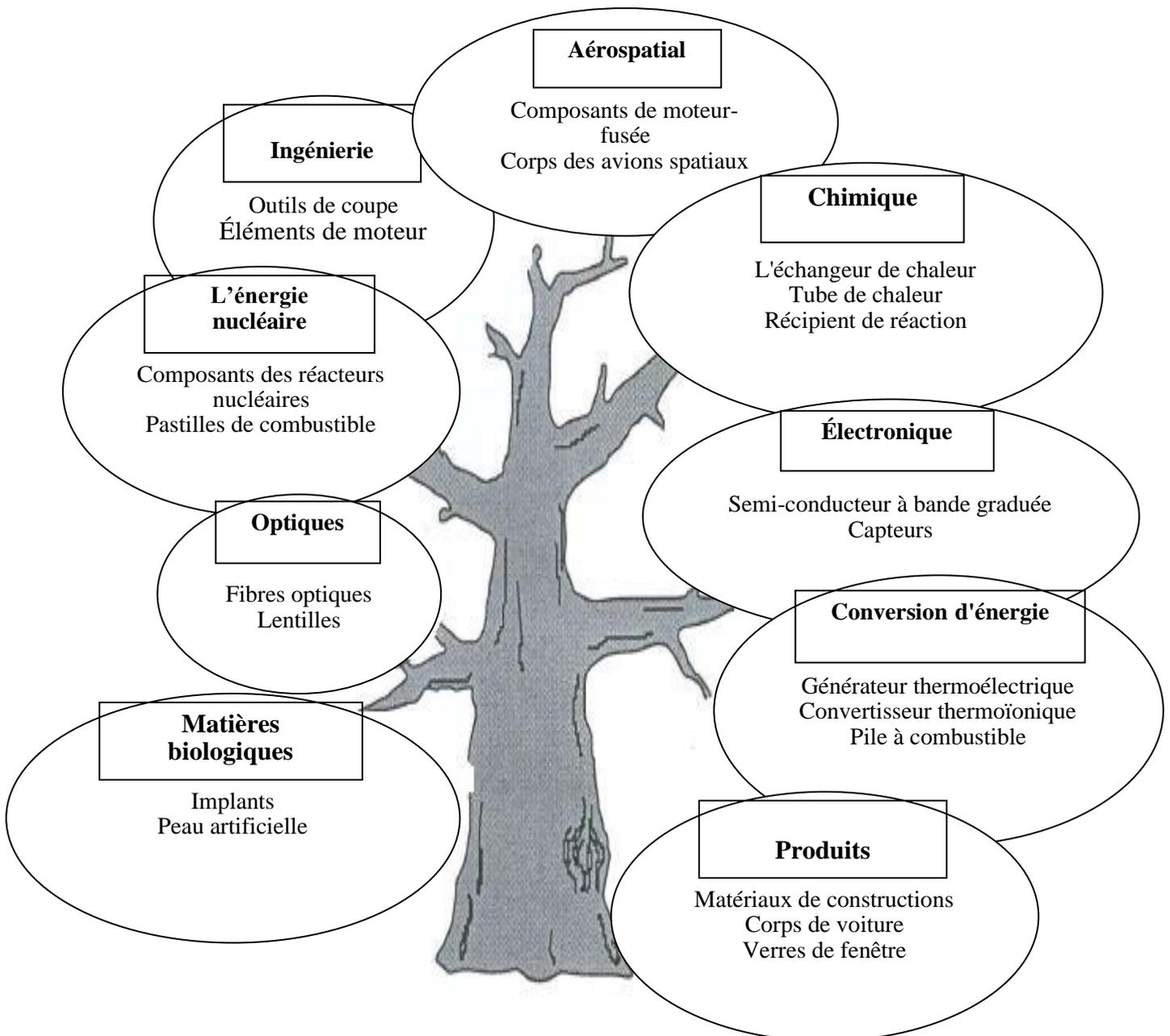


Figure I.6 : Les principaux domaines d'application des FGM.

I.9. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM :

Les matériaux à gradient de propriétés « FGM » consistent en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent.

Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non-uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace. Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume.

Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure.

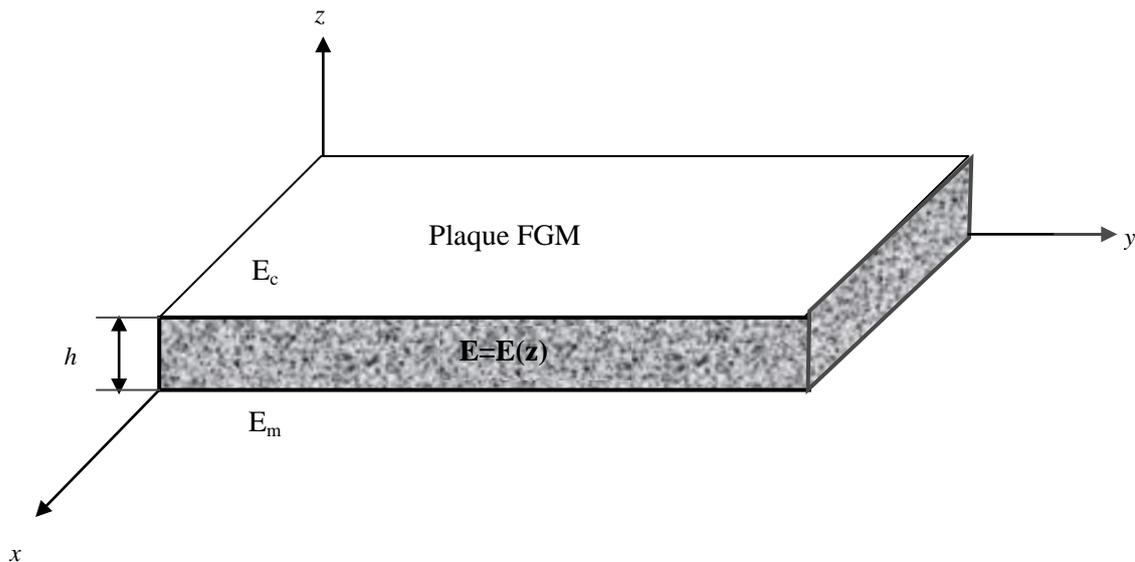


Figure I.7 : Géométrie d'une plaque en FGM.

Les coordonnées x et y définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe z perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque et dans la direction de l'épaisseur.

Les propriétés du matériau dont le module de Young et le coefficient de Poisson sur les surfaces supérieures et inférieures sont différentes mais sont déterminés selon les demandes d'exécution.

Toutefois le module de Young et le coefficient de Poisson varient de façon continue, dans le sens de l'épaisseur (l'axe z) soit: $E = E(z), \nu = \nu(z)$. Le module de Young dans le sens de l'épaisseur de la plaque FGM varie en fonction de la loi de puissance (P-FGM) ou la fonction exponentielle (E-FGM) ou avec la fonction sigmoïde (S-FGM).

I.9.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM :

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance.

$$V(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{z+h/2}{h} \right)^p \quad (\text{I.1})$$

Où p est un paramètre matériels et h est l'épaisseur de la plaque. Une fois la fraction volumique locale $V(z)$ à été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges [Bao, 1995] :

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)V(z) \quad (\text{I.2})$$

Où E_m et E_c sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure ($z = -h/2$) et de la surface supérieure ($z = h/2$) de la plaque FGM, la variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la figure I.6, il apparait clairement que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour $p < 1$, et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour $p > 1$.

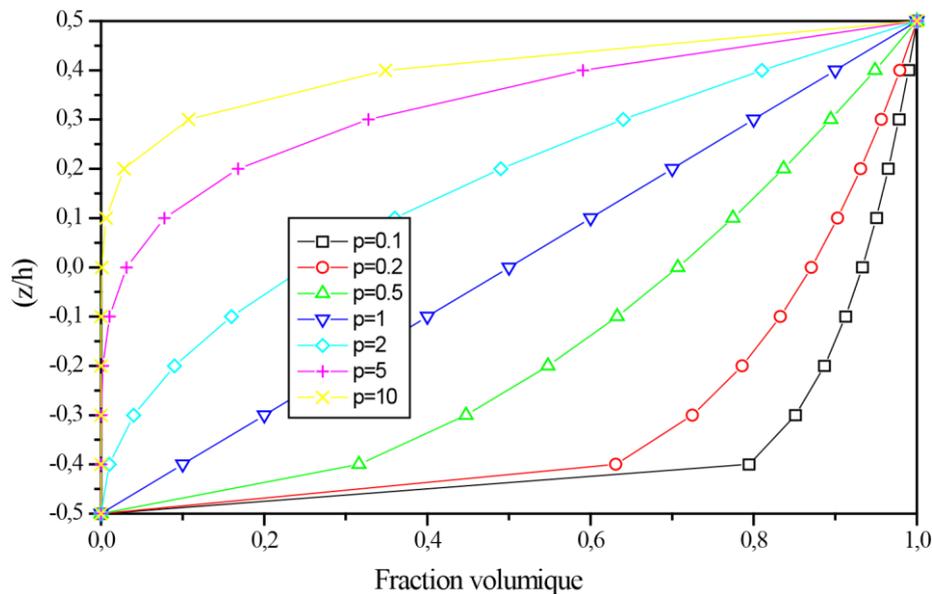


Figure I.8 : Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.

I.9.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM :

Dans le cas d'ajouter une plaque P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interfaces où le matériau est continu mais change rapidement [Bao, 1995]. Par conséquent, Chung et chi [Shyang-ho, 2003] ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définis par :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2+z}{h/2} \right)^p \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.3.a})$$

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2-z}{h/2} \right)^p \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.3.b})$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V_1(z)E_c + [1 - V_1(z)]E_m \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.4.a})$$

$$E(z) = V_2(z)E_c + [1 - V_2(z)]E_m \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.4.b})$$

La figure I.7 montre que la variation de la fraction volumique dans les équations (I.4.a) et (I.4.b) représente les distributions sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée (Plaque S-FGM).

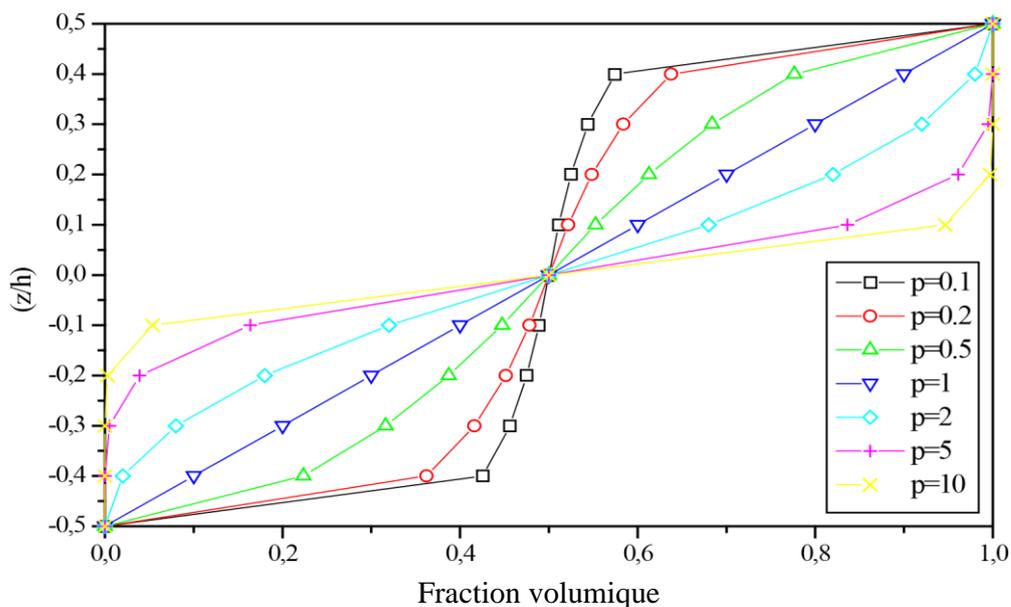


Figure I.9: Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.

I.9.3. Les propriétés matérielles de la plaque E-FGM :

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme, [Delale, 1983] :

$$E(z) = E_c e^{B(z+h/2)} \quad (\text{I.5.a})$$

Avec

$$B = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{E_m}{E_c} \right) \quad (\text{I.5.b})$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans la figure I.8.

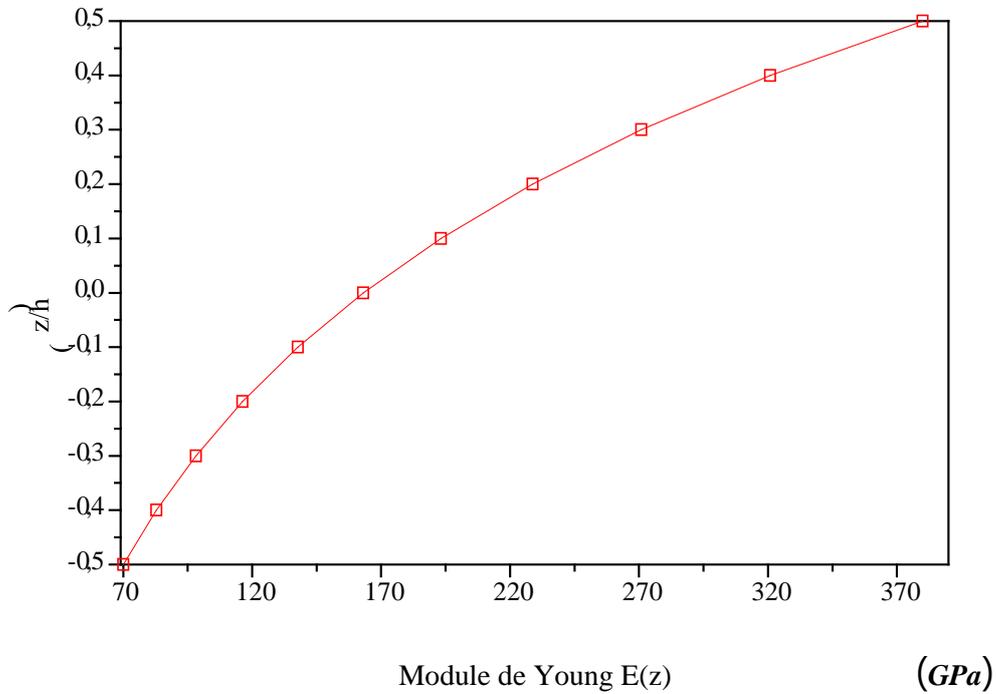


Figure I.10 : Variation du module de Young dans une plaque E-FGM.

I.10. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons défini les matériaux à gradient de propriétés « FGM », l'histoire de leur développement, leurs propriétés, leurs principales méthodes de fabrication et leurs domaines d'application

La variation spatiale et progressive des propriétés des matériaux à gradient de propriétés permet de créer des structures innovantes qui peuvent être exploitées dans de nombreux domaines d'application à savoir les structures spéciales et de génie civil.

Chapitre II :
Théorie des plaques

II.1. Introduction :

Afin de résoudre les problèmes des structures ayant comme éléments structuraux des poutres et des plaques FGM dans le domaine élastique, il est nécessaire de choisir la bonne théorie décrivant correctement le comportement statique et dynamique de la structure ainsi que la méthode de résolution à appliquer.

C'est en 1888 que Love utilisa les hypothèses de Gustav Kirchhoff, elles-mêmes inspirées des hypothèses d'Euler-Bernoulli pour fonder une théorie des plaques minces (également appelée théorie classique ou théorie de Kirchhoff-Love). La théorie des plaques semi-épaisses (théorie des déformations du premier ordre) a été consolidée par Mindlin à partir des travaux de Rayleigh (1877), Timoshenko (1921), Reissner (1945) et Uflyand (1948). Ensuite, des théories d'ordre supérieur sont venues améliorer les hypothèses des théories classiques et du premier ordre lorsque l'épaisseur de la plaque devient importante. Il existe aussi la théorie basée sur l'élasticité tridimensionnelle (théorie 3-D) qui ne fait aucune hypothèse restrictive sur les déplacements de la plaque.

Nous présentons dans ce chapitre quelques modèles sur les théories des plaques développées dans la littérature pour améliorer l'évolution de la variation du champ des déplacements à travers l'épaisseur des plaques.

II.2. Les modèles analytiques des plaques FGM :

II.2.1 La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT) :

On parle d'une plaque mince, lorsque la flèche générée par les déformations de cisaillement reste négligeable devant la flèche générée par la courbure de la plaque. Dans le cas d'une plaque homogène isotrope, la part de cisaillement dans la flèche est directement reliée à l'élancement (L/h).

La théorie classique des plaques minces (CPT) se base sur les hypothèses de Love-Kirchhoff, selon les quelles une droite normale au plan moyen de la plaque reste perpendiculaire après déformation (figure II.1), ce qui revient à négliger les effets de déformation en cisaillement transverse.

Ce modèle de plaque peut être référé en Timoshenko et Woinowsky-Krieger [Timoshenko, 1959], [Reddy, 1997], [Reddy, 1999],

En se basant sur les hypothèses ci-dessus, le champ de déplacement basé sur est donné par :

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (\text{II.1.a})$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (\text{II.1.b})$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad (\text{II.1.c})$$

Avec (u_0, v_0, w_0) sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ($z = 0$).

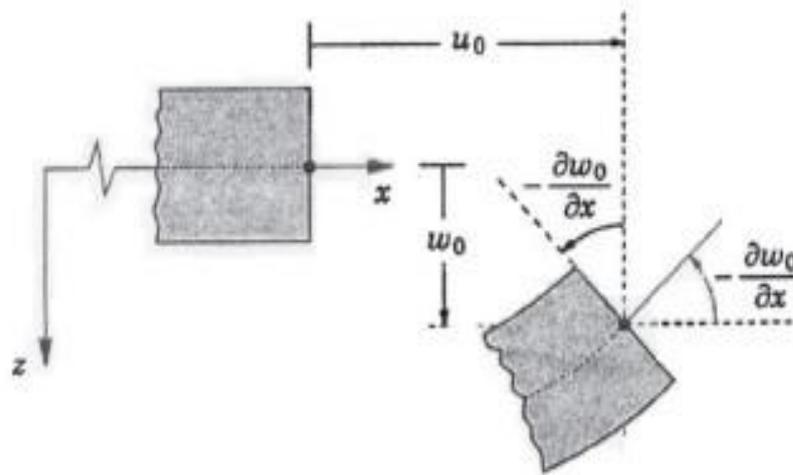


Figure II.1 : Illustration de la plaque de Love Kirchhoff [Reddy, 1997].

Puisque ce modèle ne tient pas en compte l'effet de cisaillement transverse, il donne des résultats imprécis pour les plaques épaisses.

II.2.2 La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)

⋮

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre a prolongé la théorie classique des plaques en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse, dans ce cas les contraintes et les déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque, ce qui oblige

l'introduction d'un du facteur de correction. Les études sur la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) peuvent être référées dans [Reissner, 1945], [Mindlin, 1951] qui a mené au modèle de plaque de Reissner-Mindlin. Ainsi que Timoshenko et Woinowsky-Krieger [Timoshenko, 1959], [Reddy, 1997], [Reddy, 1999]. La théorie du premier ordre est basé sur le champ de déplacement suivant :

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) + z \phi_x(x, y, t) \quad (\text{II.2.a})$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) + z \phi_y(x, y, t) \quad (\text{II.2.b})$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad (\text{II.2.c})$$

Avec : (u_0, v_0, w_0) et (ϕ_x, ϕ_y) sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y, respectivement.

Le champ de déplacement définis dans l'expression ci-dessus permet de reprendre la théorie classique des plaques décrite dans la dernière section par le remplacement

$$\phi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x} \quad ; \quad \phi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y}$$

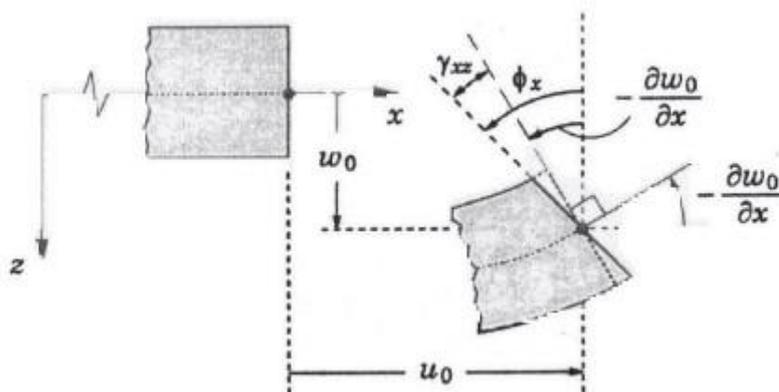


Figure II.2 : Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin [Reddy, 1997].

D'ailleurs pour éviter l'introduction d'un facteur de correction, des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevée ont été développées.

II.2.3 La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT) :

À la différence de la théorie CPT et la théorie FSDT avec les acceptations de la distribution linéaire du déplacement par l'épaisseur, la théorie d'ordre élevé est basée sur une distribution non linéaire des champs dans l'épaisseur. Par conséquent, on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et / ou de la déformation normale transversale. Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction. Les références sur de tels modèles peuvent être trouvées dans [Hildebrand, 1949], [Naghdi, 1957], [Reissner, 1975], [Reddy, 1984], et [Kant, 2002]). Nous avons introduit ici quatre modèles de plaque utilisés pour analyser le comportement des matériaux à gradient de propriétés.

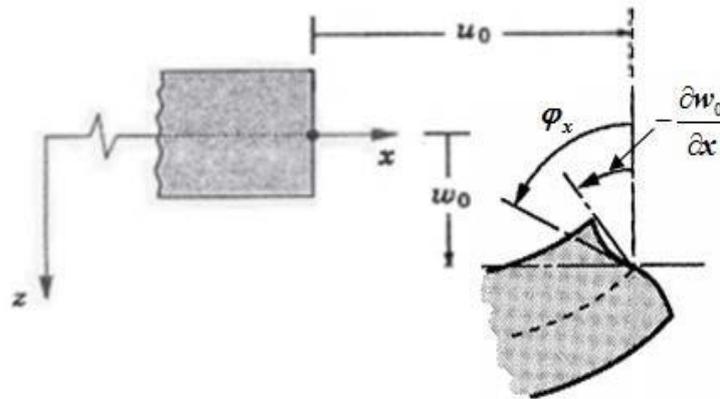


Figure II.3: Illustration de la plaque d'ordre élevé [Reddy, 1997].

Le champ de déplacement est généralement écrit comme suit :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - Z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + f(z) \varphi_x(x, y) \quad (\text{II.3.a})$$

$$V(x, y, z) = v_0(x, y) - Z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + f(z) \varphi_y(x, y) \quad (\text{II.3.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{II.3.c})$$

Avec : (u_0, v_0, w_0) et (ϕ_x, ϕ_y) sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y , respectivement, $f(z)$ est une fonction de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes. En effet, les déplacements de la théorie classique de plaque (CPT) est obtenue par en prenant $f(z) = 0$, alors que la théorie de premier ordre (FSDT) peut être obtenue par $f(z) = z$.

Les déplacements de théorie de déformation de cisaillement de la troisième de Reddy (TSDT) [Reddy, 1997], [Reddy, 1999] sont obtenus par :

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4}{3h^2} z^2\right) \quad (\text{II.4})$$

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement membranaire est cubique. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution d'élasticité tridimensionnelle.

La distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique dans l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites. [Touratier, 1991] propose le modèle sinus (SSDT) qui est différent des autres modèles d'ordre supérieurs puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoidale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme ci-dessous :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (\text{II.5})$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par les modèles (sinus) prennent une forme cosinusoidale dans l'épaisseur de la poutre. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy.

La version exponentielle de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The exponential shear deformation plate theory ESDPT) développée par Karama et al. [Pindera, 1994] est obtenue en prenant :

$$f(z) = ze^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad \text{Et } \phi_z = 0 \quad (\text{II.6})$$

La version hyperbolique de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The hyperbolic shear deformation plate theory HSDPT) développée par [Ait Atmane, 2010] est obtenue en prenant :

$$f(z) = \frac{\cosh(\frac{\pi}{2})}{\left[\cosh(\frac{\pi}{2})-1\right]} z - \frac{(h/\pi) \sinh(\frac{\pi}{h} z)}{\left[\cosh(\frac{\pi}{2})-1\right]} \text{ et } \phi_z = 0 \quad (\text{II.7})$$

II.3. Revue sur les différents modèles de la théorie d'ordre élevé :

Pour franchir les limites des théories du premier ordre, plusieurs auteurs ont proposé quelques contributions importantes pour le développement de modèles d'ordre élevé qui se sont distingués dans la littérature par l'expression de la fonction de cisaillement $\psi(z)$. Les modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs de déplacement à travers l'épaisseur, et qui permettent de représenter le gauchissement de la section transversale dans la configuration déformée (Figure II.3) [Whitney, 1973] ; [Nelson, 1974] ; [Lo, 1977]; [Touratier, 1991]. Nous citons en particulier :

- L'approche d'Ambartsumyan [Ambartsumyan, 1969] avec ;

$$f(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad (\text{II.8})$$

- L'approche de Reissner [Reissner, 1945] avec ;

$$f(z) = \frac{5}{2} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.9})$$

- L'approche de Levinson, Murthy [Murthy, 1981] et Reddy Avec ;

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.10})$$

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal w , est constant [Reddy, 1984]. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle dans le cas homogène [Duong, 2008].

La distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique à travers l'épaisseur (elle doit être parabolique par couche pour un multicouche). Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites. Les résultats du modèle de Reddy sont également très proches des deux modèles d'ordre élevé proposés par [Kan, 2002].

Touratier propose le modèle (sinus) qui est différent des autres modèles d'ordre élevés puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur [Touratier, 1991]. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme suite:

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) = \frac{h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi z}{h}\right)^{(2n+1)} \quad (\text{II.11})$$

$$= z \left(1 - \frac{\pi^2 z^2}{3! h^2} + \frac{\pi^4 z^4}{5! h^4} - \frac{\pi^6 z^6}{7! h^6} + \dots + \dots \right)$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par le modèle (sinus) prennent une forme Co sinusoïdale à travers l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de [Reddy, 1984]. En se basant sur les travaux de Touratier, un élément fini triangulaire à six nœuds, est construit pour les structures multicouches non linéaires géométriques par [Polit, 1997] et [Dau, 2006].

Récemment, [Afaq et al, 2003] proposent un modèle exponentiel avec une cinématique plus riche. La fonction de distribution de cisaillement transverse est de la forme Suivante:

$$f(z) = z e^{-2(z/h)^2} \quad (\text{II.12})$$

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance pair et impair de la variable z , alors que la fonction (sinus) de [Touratier, 1991] ne permet qu'un développement en puissance impair.

Malgré le fait que les modèles d'ordre élevé assurent une continuité de déplacement et de déformation à l'interface, les contraintes de cisaillement Inter-laminaire et les contraintes d'interface, restent discontinues. Ceci présente un inconvénient lors de l'analyse locale de l'interface des structures multicouches dont les propriétés des couches sont très différentes [Duong, 2008].

Nous regroupons dans le tableau suivant les différentes fonctions de cisaillement ainsi qu'une comparaison entre les différents modèles.

Théorie	intitulé	Fonction de cisaillement $f(z)$	Distribution de γ_{xz} et γ_{yz} suivant z	Coefficient de correction de cisaillement	Domaine de validité
CPT.Kirchoff [Kirchoff, 1850a] et [Kirchoff, 1850b]	Théorie classique des plaques	0	Plaques minces
FSDT Midlin [Midlin, 1951]	Théorie de déformation des plaques du 1er ordre	z	constante	Requis	Plaques minces et moyennement épaisses
Ambartsumian [Ambartsumian, 1958]	Théorie d'ordre supérieur	$\frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right)$	Quadratiques	Non Requis	Plaques minces et moyennement épaisses
Reissner [Reissner, 1975]	Théorie d'ordre supérieur	$\frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$	Paraboliques	Non Requis	Plaques minces et épaisses
TSDPT, Touratier [Touratier, 1991]	Théorie de déformation trigonométrique des plaques	$\frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right)$	Paraboliques	Non Requis	Plaques minces et épaisses
ESDPT Karama et al. [Karama, 2003]	Théorie de déformation exponentielle des plaques	$z e^{-2(z/h)^2}$	Paraboliques	Non Requis	Plaques minces et épaisses
PSDPT, Levinson [Levinson, 1980], Reddy [Reddy, 1984]	Théorie de déformation parabolique des plaques	$z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$	Paraboliques	Non Requis	Plaques minces et épaisses
Aydogdu [Aydogdu, 2009]	Théorie de déformation exponentielle des plaques	$z \alpha^{-\frac{2(z/h)^2}{\ln(\alpha)}}, \alpha > 0$	Paraboliques	Non Requis	Plaques minces et épaisses
Elmeiche, Tounsi et al [Elmeiche, 2011]	Théorie raffinée des plaques	$\frac{\left(\frac{h}{\pi}\right) \sin\left(\frac{hz}{\pi}\right) z}{\cosh\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)}$	Paraboliques	Non Requis	Plaques minces et épaisses

Aite atmane et al [Aite atmane, 2010]	Théorie raffinée des plaques	$\frac{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1} z$ $-\frac{\frac{h}{\pi} \sinh\left(\frac{\pi z}{h}\right)}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1}$	Paraboliques	Non Requis	Plaques minces et épaisses
Shimpi [Shimpi, 2002]	Théorie raffinée des plaques	$h\left[\frac{1}{4}\left(\frac{z}{h}\right) - \frac{5}{3}\left(\frac{z}{h}\right)^3\right]$	Paraboliques	Non Requis	Plaques minces et épaisses

Tableau II.1 : Différentes fonctions de cisaillement utilisées dans les théories des plaques isotropes et FGM

II.4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons donné un aperçu sur la théorie des plaques ainsi que les modèles analytiques des plaques FGM à savoir la théorie classique des plaques (CPT), la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) et la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT). Sa formulation est basée sur les hypothèses de chaque théorie dans une approche bidimensionnelle d'élasticité suivie par les équations cinématiques d'un point quelconque dans la plaque en fonction des déplacements généralisés. Le tenseur de déformation de Von Karman dans le cas des grands déplacements est utilisé pour obtenir les relations déformation déplacement. Le tenseur de contraintes pour les plaques en matériau à gradient de propriétés est obtenu en introduisant le champ de déformation dans la loi de Hooke généralisée et enfin pour terminer la définition du principe des travaux virtuel et l'énergie potentielle totale minimum.

III.1. Introduction :

Nous expliquerons ensuite un autre phénomène important qui se produit normalement dans les structures mécaniques en raison de l'interaction de plusieurs ondes et en particulier l'interaction entre l'incident et les ondes réfléchies. Ce phénomène conduit à la génération de nouvelles ondes, normalement appelées ondes stationnaires. La caractéristique de base d'une onde stationnaire est que pour différentes fréquences d'onde, l'onde résultante sera axée en position spatiale et seule son amplitude change avec la fréquence de l'onde.

Les ondes stationnaires sont très courantes dans les structures mécaniques ou métalliques. Par exemple, dans les structures en bâtonnets métalliques, lorsqu'une onde incidente interagit avec une frontière libre, elle génère une onde réfléchie, dont l'amplitude est la même que celle de l'onde incidente. En revanche, si cette onde interagit avec une frontière axée, alors l'onde réfléchie est négative par rapport à l'onde incidente. Cette interaction va également générer une onde stationnaire. Cependant, son profil de l'onde sera assez différent par rapport au cas précédent.

La propagation des ondes dans de tels milieux 2D ou de dimension supérieure est classée différemment en fonction de la nature et de la direction de la propagation des ondes et celles-ci sont expliquées en détail dans la partie suivant.

III.2. Théorie et formulation :

La plaque à gradation fonctionnelle (FG) est composée d'un mélange de composants en céramique et en métal comme indiqué sur la Fig.1.

Les caractéristiques des matériaux de cette plaque changent à travers l'épaisseur de la plaque avec différentes distributions de loi de puissance des fractions volumiques des constituants des deux matériaux comme :

- Distribution de la loi de puissance :

$$P(z) = P_m + (P_c - P_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p \quad (\text{III.1})$$

- La distribution de la loi sigmoïde est définie comme deux fonctions de loi de puissance :

$$g_1(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{h}{2} - z}{\frac{h}{2}} \right)^P \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{III.2a})$$

$$g_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{h}{2} + z}{\frac{h}{2}} \right)^P \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{III.2b})$$

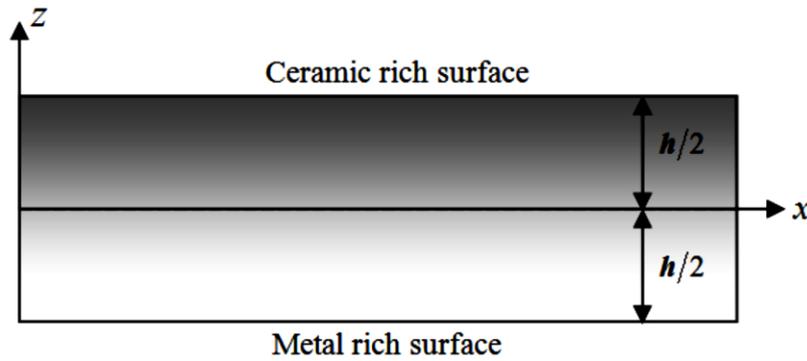


Fig III.1 Coordonnées et géométrie de la fonction plaque graduée.

$$P(z) = g_1(z)P_c + [1-g_1(z)]P_m \quad \text{pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{III.3a})$$

$$P(z) = g_2(z)P_c + [1-g_2(z)]P_m \quad \text{pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{III.3b})$$

Où P désigne la caractéristique effective du matériau telle que le module de Young E et la densité de masse ρ les indices m et c désignent respectivement les composants métalliques et céramiques ; et p est l'exposant de la loi de puissance. La valeur de p égale à zéro indique une plaque entièrement en céramique, tandis que p infini représente une plaque entièrement métallique. Étant donné que les influences de la variation du coefficient de Poisson ν sur le comportement des plaques FG sont très faibles, il est supposé constant pour des raisons de commodité.

III.3. Equations fondamentales :

III.3.1. Cinématique et déformations :

Dans cet article, des suppositions simplificatrices supplémentaires sont faites au HSDT conventionnel afin que le nombre d'inconnues soit réduit. Le champ de déplacement du HSDT conventionnel est donné par (Mahi et al.2015, Bakhadda et al.2018).

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z)\varphi_x(x, y, t) \quad (\text{III.4a})$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z)\varphi_y(x, y, t) \quad (\text{III.4b})$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad (\text{III.4c})$$

Où u_0 , v_0 , w_0 , φ_x , φ_y sont cinq déplacements inconnus du plan médian de la plaque, $f(z)$ désigne la fonction de forme représentant la variation des déformations et contraintes transversales de cisaillement dans l'épaisseur. En considérant que

$$\varphi_x = \int \theta(x, y)dx \quad \text{and} \quad \varphi_y = \int \theta(x, y)dy \quad (\text{III.5})$$

Le champ de déplacement du présent modèle peut être exprimé sous une forme plus simple comme (Bourada et al. 2016, Besseghier et al. 2017, Khetir et al. 2017, Sekkal et al. 2017a, Menasria et al. 2017, Yazid et al. 2018)

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, y, t)dx \quad (\text{III.6a})$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 f(z) \int \theta(x, y, t)dy \quad (\text{III.6b})$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad (\text{III.6c})$$

Dans ce travail, une étude comparative entre différentes théories de déformation par cisaillement d'ordre supérieur est réalisée, les différentes fonctions de forme sont présentées ci-dessous. Il convient de noter qu'il n'est pas nécessaire d'utiliser le facteur de correction de cisaillement dans la théorie (Youcef et al.2018, Zamanian et al.2017, Shokravi 2017c, d, Zarei et al.2017, Arani et Kolahchi 2016, Kolahchi et al.2016b , Madani et al.2016, Boudarba et al.2016, Bellifa et al.2016).

On peut voir que le champ de déplacement dans l'Eq. (5) n'introduit que quatre inconnues (u_0, v_0, w_0 et θ). Les déformations non nulles associées au champ de déplacement dans l'Eq. (5) sont :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{pmatrix} + f(z) \begin{pmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{yx} \end{pmatrix} = g(z) \begin{pmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{yx}^0 \end{pmatrix} \quad (\text{III.7})$$

Où :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} \quad (\text{III.8a})$$

$$\begin{pmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \theta \\ k_2 \theta \\ k_1 \frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx + k_2 \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{yx}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_2 \int \theta dy \\ k_1 \int \theta dx \end{pmatrix}$$

$$g(z) = \partial f(z) / \partial z \quad (\text{III.8b})$$

Et les intégrales définies dans les équations ci-dessus doivent être résolues par une méthode de type Navier et peuvent être écrites comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx = A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy = B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \int \theta dx = A' \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \int \theta dy = B' \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (\text{III.9a})$$

$$A' = -1/\kappa_1^2, \quad B' = -1/\kappa_2^2, \quad k_1 = \kappa_1^2, \quad k_2 = \kappa_2^2 \quad (\text{III.9b})$$

Où κ_1 et κ_2 sont les nombres d'ondes de propagation des ondes respectivement dans les directions des axes x et y.

Pour les FGM élastiques et isotropes, les relations constitutives peuvent être exprimées comme :

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix} \quad (\text{III.10})$$

Où $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz})$ sont les composantes de contrainte et de déformation, respectivement. Utilisation des propriétés du matériau définies dans les équations.

(1) - (2), les coefficients de rigidité, C_{ij} , peuvent être donnés comme :

$$\begin{aligned} C_{11} = C_{22} &= \frac{E(z)}{1 + \nu^2} \\ C_{12} &= \frac{\nu E(z)}{1 + \nu^2} \\ C_{44} = C_{55} = C_{66} &= \frac{E(z)}{2(1 + \nu)} \end{aligned} \quad (\text{III.11})$$

III.3.2. Equations de mouvement :

Le principe de Hamilton est utilisé ici pour déterminer les équations du mouvement (Zemri et al. 2015, Mouffoki et al. 2017, Sekkal et al. 2017b, Meksi et al. 2018, Bouhadra et al. 2018, Belabed et al. 2018)

$$\int_0^t (\delta U + \delta V - \delta K) dt = 0 \quad (\text{III.12})$$

Où δU est la variation de l'énergie de déformation ; δV est la variation du travail externe effectué par la charge externe appliquée à la plaque ; et δK est la variation de l'énergie cinétique. La variation de l'énergie de déformation de la plaque est donnée par :

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_V [\sigma_z \delta \varepsilon_z + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}] dV \\ &= \int_A [N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b + M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s \\ &\quad + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^s + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^s] dA = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.13})$$

Où A est la surface supérieure et les résultantes des contraintes N , M et S sont définies par :

$$\begin{aligned} (N_i, M_i^b, M_i^s) &= \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, f) \sigma_i dz, \quad (i = x, y, xy) \\ (S_{xz}^s, S_{yz}^s) &= \int_{-h/2}^{h/2} g(\tau_{xz} \tau_{yz}) dz \end{aligned} \quad (\text{III.14})$$

La variation du travail externe peut être exprimée comme :

$$\delta V = - \int_A q \delta w_0 dA - \int_A \left(N_x^0 \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} + N_y^0 \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} \right) dA \quad (\text{III.15})$$

Où q et (N_x, N_y, N_{xy}) sont transverses et dans le plan charges appliquées, respectivement. Pour les problèmes de vibration libre et de propagation des ondes, le travail externe est nul. La variation de l'énergie cinétique de la plaque peut être exprimée comme :

$$\begin{aligned} \delta K &= \int_V [\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}] \rho(z) dV & (III.16) \\ \delta K &= \int_A \{ I_0 [\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0] \\ &- I_1 \left(\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \\ &+ J_1 \left((k_1 A') \left(\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \delta \dot{u}_0 \right) + (k_2 B') \left(\dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \right) \\ &+ I_2 \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) + k_2 \left((k_1 A') \left(\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} \right) + (k_2 B') \left(\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} \right) \right) \\ &- J_2 \left((k_1 A') \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} \right) + (k_2 B') \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) \right) \} dA \end{aligned}$$

Où la convention point-exposant indique la différenciation par rapport à la variable temporelle t ; $\rho(z)$ est la densité de masse donnée par les équations. (1) - (2); et (I_i, J_i, K_i) sont des inerties de masse exprimées par :

$$(I_0, I_1, I_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) \rho(z) dz \quad (III.17)$$

$$(J_1, J_2, k_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (f, z, f, f^2) \rho(z) dz$$

En remplaçant les égaliseurs. (13), (15) et (16) dans Eq. (12), on peut déduire ce qui suit :

$$\begin{aligned} \delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} + K_1 A' J_1 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x} \\ \delta v_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} + K_2 B' J_1 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial y} \\ \delta w_0 : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} \\ &= I_0 \ddot{w}_0 + J_2 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_0 + J_2 \left(k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (III.18)$$

$$\begin{aligned}
\delta\theta : & -k_1 M_x^s - k_2 M_y^s - (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + k_1 A' \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial x \partial y} \\
& = -J_1 \left(k_1 A' \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - k_2 \left((k_1 A')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + (k_2 B')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right) \\
& + J_2 \left(k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right)
\end{aligned}$$

Remplacer l'équation. (6) dans l'Eq. (10) et les résultats ultérieurs dans l'équation. (14), les résultantes des contraintes sont obtenues en termes de déformations sous la forme compacte suivante :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix}, S = A^s \gamma \quad (\text{III.19})$$

Dans lequel :

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t, M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t \quad (\text{III.20a})$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}^t, k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}^t, k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\}^t \quad (\text{III.20b})$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{III.20c})$$

$$B^s = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix}, D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix}, H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix} \quad (\text{III.20d})$$

$$S = \{S_{xz}^s, S_{yz}^s\}^t, \gamma = \{\gamma_{xz}^0, \gamma_{yz}^0\}^t, A^s = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix} \quad (\text{III.20e})$$

et les composants de rigidité sont donnés comme :

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} C_{11}(1, z, z^2, f(z), z f^2(z)) \begin{Bmatrix} 1 \\ v \\ \frac{1-v}{2} \end{Bmatrix} dz \quad (\text{III.21a})$$

$$(A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s) = (A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s) \quad (\text{III.21b})$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \int_{-h/2}^{h/2} C_{44}[g(z)]^2 dz \quad (\text{III.21c})$$

Présentation de l'Eq. (19) dans Eq. (18), les équations du mouvement peuvent être exprimées en termes de déplacements (u_0, v_0, w_0, θ) et les équations appropriées prennent la forme

$$\begin{aligned} & A_{11}d_{11}u_0 + A_{66}d_{22}u_0 + (A_{12} + A_{66})d_{12}u_0 - B_{11}d_{111}w_0 - (B_{12} + 2B_{66})d_{122}w_0 \\ & + (B_{66}^s(k_1 A' + K_2 B'))d_{122}\theta + (B_{11}^s k_1 + B_{12}^s k_2)d_1\theta \\ & = I_0\ddot{v}_0 - I_1d_1\ddot{w}_0 + J_1A'k_2d_2\ddot{\theta} \end{aligned} \quad (\text{III.22a})$$

$$\begin{aligned} & A_{22}d_{22}v_0 + A_{66}d_{11}v_0 + (A_{12} + A_{66})d_{12}u_0 - B_{22}d_{222}w_0 - (B_{12} + 2B_{66})d_{122}w_0 \\ & + (B_{66}^s(k_1 A' + k_2 B'))d_{122}\theta + (B_{22}^s k_2 + B_{12}^s k_1)d_2\theta \\ & = I_0\ddot{v}_0 - I_1d_2\ddot{w}_0 + J_1B'k_2d_2\ddot{\theta} \end{aligned} \quad (\text{III.22b})$$

$$\begin{aligned} & B_{11}d_{111}u_0 + (B_{12} + 2B_{66})d_{122}u_0 + (B_{12} + 2B_{66})d_{112}v_0 + B_{22}d_{222}v_0 - D_{11}d_{1111}w_0 - \\ & 2(D_{12} + 2D_{66})d_{1122}w_0 - D_{22}d_{2222}w_0 + (D_{11}^s k_1 + D_{11}^s k_2)d_{11}\theta + 2(D_{66}^s(k_1 A' + \\ & k_2 B'))d_{1122}\theta + (D_{12}^s k_1 + D_{22}^s k_2)d_{22}\theta \\ & = I_0\ddot{w}_0 + I_1(d_1\ddot{u}_0 + d_2\ddot{v}_0) - I_2(d_{11}\ddot{w}_0 + d_{22}\ddot{w}_0) + J_2(k_1 A' d_{11}\ddot{\theta} + k_2 B' d_{22}\ddot{\theta}) \end{aligned} \quad (\text{III.22c})$$

$$\begin{aligned} d_{ij} &= \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m} \\ d_i &= \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (i, j, l, m = 1, 2) \end{aligned} \quad (\text{III.23})$$

III.3.3. Relations de dispersion :

Nous supposons des solutions pour $(u_0, v_0, w_0 \text{ et } \theta_0)$ représentant des ondes se propageant dans le plan $(x - y)$ avec la forme :

$$\begin{cases} u_0(x, y, t) \\ v_0(x, y, t) \\ w_0(x, y, t) \\ \theta_0(x, y, t) \end{cases} = \begin{cases} U \cdot e^{[i(\kappa_1 x + \kappa_2 y - \omega t)]} \\ V \cdot e^{[i(\kappa_1 x + \kappa_2 y - \omega t)]} \\ W \cdot e^{[i(\kappa_1 x + \kappa_2 y - \omega t)]} \\ X \cdot e^{[i(\kappa_1 x + \kappa_2 y - \omega t)]} \end{cases} \quad (\text{III.24})$$

Où :

$U; V; W \text{ et } X$ Sont les coefficients de l'amplitude des ondes, κ_1 et κ_2 sont les nombres d'onde de propagation des ondes respectivement le long des axes x et y , ω est la fréquence, $\sqrt{-1}$ l'unité imaginaire. Remplacer l'équation. (24) dans Eq. (23), le problème suivant est obtenu

$$\left(\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & m_{14} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{34} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \\ X \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.25})$$

Où :

$$\begin{aligned}
S_{11} &= -(A_{11}\kappa_1^2 + A_{66}\kappa_2^2) \\
S_{12} &= -\kappa_1\kappa_2(A_{12} + A_{66}) \\
S_{13} &= \kappa_1 \cdot i(B_{11}\kappa_1^2 + B_{12}\kappa_2^2 + 2B_{66}\kappa_2^2) \\
S_{14} &= \kappa_1 \cdot i(k_1B_{11}^s + k_2B_{12}^s + (k_1A' + k_2B')B_{66}^s\kappa_2^2) \\
S_{22} &= -(A_{66}\kappa_1^2 + A_{22}\kappa_2^2) \\
S_{23} &= \kappa_2 \cdot i(B_{22}\kappa_2^2 + B_{12}\kappa_1^2 + 2B_{66}\kappa_1^2) \\
S_{24} &= \kappa_2 \cdot i(k_2B_{22}^s + k_1B_{12}^s + (k_1A' + k_2B')B_{66}^s\kappa_1^2) \\
S_{33} &= -(D_{11}\kappa_1^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\kappa_1^2\beta^2 + D_{22}\beta^4) \\
S_{34} &= -k_1(D_{11}^s\kappa_1^2 + D_{12}^s\kappa_2^2) + 2(k_1A' + k_2B')D_{66}^s\kappa_1^2\kappa_2^2 - k_2(D_{11}^s\kappa_2^2 - D_{12}^s\kappa_1^2) \quad (\text{III.26}) \\
S_{44} &= -k_1(H_{11}^s\kappa_1 + H_{12}^s\kappa_2) - (k_1A' + k_2B')H_{66}^s\kappa_1^2\kappa_2^2 - k_2(H_{12}^s\kappa_1 - H_{22}^s\kappa_2) \\
&\quad - (k_1A')A_{55}^s\kappa_1^2 - (k_2B')A_{44}^s\kappa_2^2 \\
m_{11} &= -I_0, m_{13} = i \cdot \kappa_1 I_1, m_{14} = -i \cdot J_1 k_1 A' \kappa_1 \\
m_{22} &= -I_0, m_{23} = i \cdot \kappa_2 I_1, m_{24} = -i \cdot J_1 k_2 B' \kappa_2 \\
m_{31} &= -i \cdot \kappa_1 I_1, m_{32} = -i \cdot \kappa_2 I_1 \\
m_{33} &= -I_0 - I_2(\kappa_1^2 + \kappa_2^2) \\
m_{34} &= J_2(k_1 A' \kappa_1^2 + k_2 B' \kappa_2^2), m_{41} = i \cdot J_1 k_1 A' \kappa_1 \\
m_{42} &= i \cdot J_1 k_2 B' \kappa_2, m_{43} = J_2(k_1 A' \kappa_1^2 + k_2 B' \kappa_2^2) \\
m_{44} &= -K_2((k_1 A')^2 \kappa_1^2 + (k_2 B')^2 \kappa_2^2)
\end{aligned}$$

Les relations de dispersion de la propagation des ondes dans le faisceau à gradation fonctionnelle sont données par :

$$|[K] - \omega^2[M]| = 0 \quad (\text{III.27})$$

Les racines de l'Eq. (27) peut être exprimé comme :

$$\omega_1 = W_1(\kappa), \omega_2 = W_2(\kappa), \omega_3 = W_3(\kappa), \omega_4 = W_4(\kappa) \quad (\text{III.28})$$

Ils correspondent respectivement aux modes d'onde M_1, M_2, M_3 et M_4 . Les modes d'onde M_1 et M_4 correspondent à l'onde de flexion, les modes d'onde M_2 et M_3 correspondent à l'onde d'extension.

La vitesse de phase de propagation des ondes dans la plaque à gradation fonctionnelle peut être exprimée comme :

$$C_i = \frac{W_i(\kappa)}{\kappa}, (i = 1, 2, 3, 4) \quad (\text{III.29})$$

III.4. Conclusion :

L'analyse de propagation des ondes implique d'effectuer une analyse spectrale, qui fournit la nature du comportement des ondes. Il fournit également les gammes de fréquences dans certains matériaux où les réponses d'onde sont retardées ou même bloquées. De nombreux métamatériaux acoustiques sont conçus sur la base d'une analyse de propagation des ondes.

L'analyse dynamique en génie des structures relève de deux classes différentes : l'une impliquant un chargement basse fréquence et l'autre impliquant un chargement haute fréquence. Les problèmes de basse fréquence sont classés comme des problèmes de *dynamique structurale* tandis que ceux impliquant une charge à haute fréquence entre dans la catégorie des problèmes de *propagation des ondes*.

Dans les problèmes de dynamique structurelle, le contenu fréquentiel de la charge dynamique est de l'ordre de quelques centaines de hertz et le concepteur sera surtout intéressé par les effets à long terme (ou en régime permanent) de la charge dynamique sur les structures, Par conséquent, les premiers modes normaux et les fréquences propres sont suffisants pour évaluer les performances de la structure.

La plupart des problèmes de structure dynamiques relèveront de cette catégorie. En revanche, pour les problèmes de propagation des ondes, le contenu fréquentiel de la charge d'entrée est très élevé (de l'ordre du kilohertz ou plus) et donc les effets à court terme (réponse transitoire) deviennent très critiques. De nombreux modes d'ordre supérieur participeront à l'amplification de la réponse dynamique. Le type de charge d'impact et de souffle appartient à cette catégorie. Le phénomène multimodal de propagation des ondes rend un paramètre très important : les informations de phase.

Une bonne discussion de l'analyse spectrale du mouvement pour la propagation des ondes est donnée dans le chapitre suivant.

Chapitre IV :
Validation des
résultats et
discussion

IV.1. Introduction :

Les plaques font partie des éléments structurels les plus couramment utilisés. L'utilisation de plus en plus importante, montre la nécessité impérative de l'étude de leur comportement statique et dynamique et devient donc d'une grande importance et aide les ingénieurs à concevoir de meilleures structures. C'est pour cette raison que le comportement des plaques est, depuis plus de cent ans, le sujet de recherches exhaustives.

Ce travail de mémoire de fin d'étude a pour but l'analyse de la propagation des ondes dans des plaques fonctionnellement graduées simplement appuyées. Dans la présente analyse on tient en compte l'effet de déformation de cisaillement transversal à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres, plusieurs variations où la distribution des contraintes de cisaillement est considérée selon la forme de la fonction utilisée, à savoir la variation sinusoïdale, de troisième ordre, hyperbolique, exponentielle, ...etc. Il apparaît clairement que les courbes de dispersion des différentes plaques FG parfaites et imparfaites est présentée en utilisant différentes théories de plaques de déformation par cisaillement.

IV.2. Résultats numériques et discussion :

Dans ce chapitre, une plaque FG en Si₃N₄ / SUS304 ; dont les propriétés des matériaux sont : $E = 348,43 \text{ GPa}$, $\rho = 2370 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 0,3$ pour Si₃N₄ et $E = 201,04 \text{ GPa}$, $\rho = 8166 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 0,3$ pour SUS304 ; sont choisis pour ce travail.

L'épaisseur de la plaque FG est de 0,02 m. Les analyses basées sur les TSDT, SSDT, HSDT et ESDT actuels sont effectuées en utilisant MAPLE.

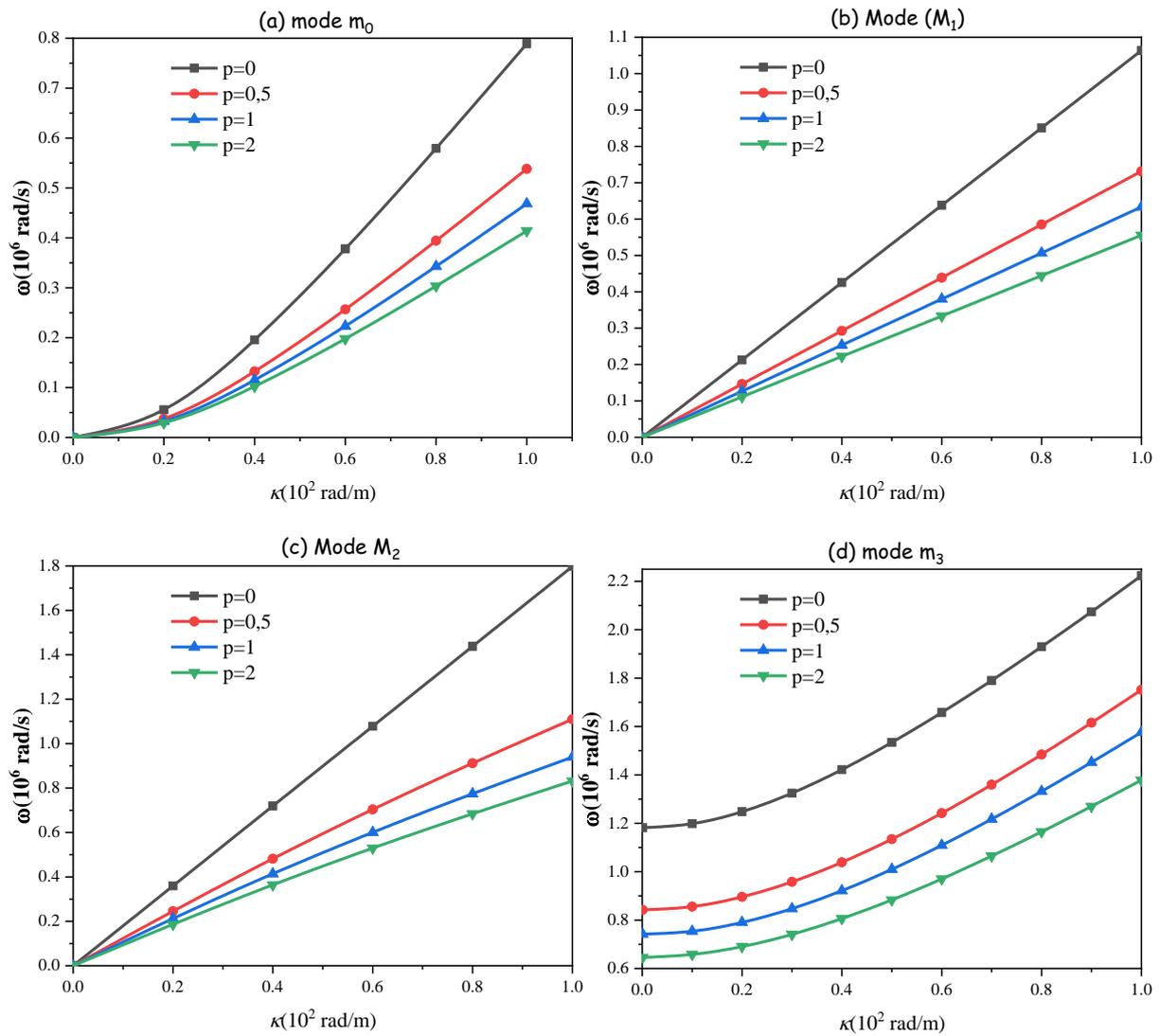


Fig.1 Les courbes de dispersion des différentes FGM plaques.

La **figure 1** trace les courbes de dispersion des différentes plaques FG parfaites en utilisant la théorie des plaques de déformation par cisaillement Sinusoïdale. On peut voir que les fréquences de dispersion prédites par la théorie des plaques proposée augmentent à mesure que le nombre de propagation des ondes augmente.

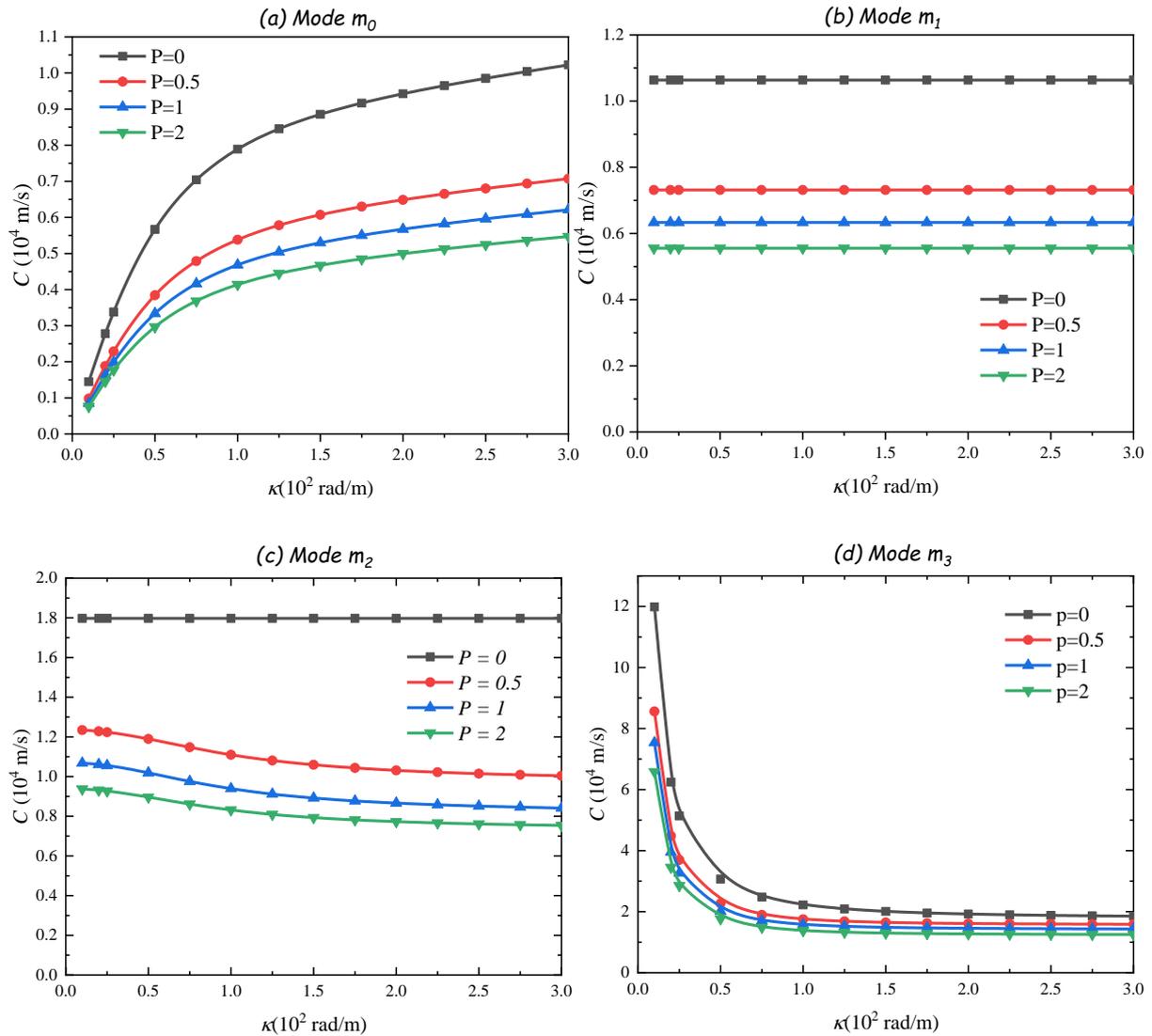


Fig.2 Les courbes de vitesse de phase des différentes FGM plaques.

La **figure 2** montre les courbes de vitesse de phase des différentes plaques FG parfaites prédites en utilisant la théorie des plaques de déformation en cisaillement sinusoïdale.

On peut voir que la vitesse de phase de la propagation des ondes dans la plaque FG parfaite diminue lorsque l'indice de loi de puissance p augmente pour le même nombre d'onde k .

La vitesse de phase pour les modes d'onde d'extension M_1 et M_2 de la plaque ($p = 0$) est une constante, mais ce n'est pas une constante pour la plaque ($p \neq 0$).

Dans le cas de la plaque homogène ($p = 0$), la vitesse de phase prend le maximum parmi celles de toutes les plaques FG.

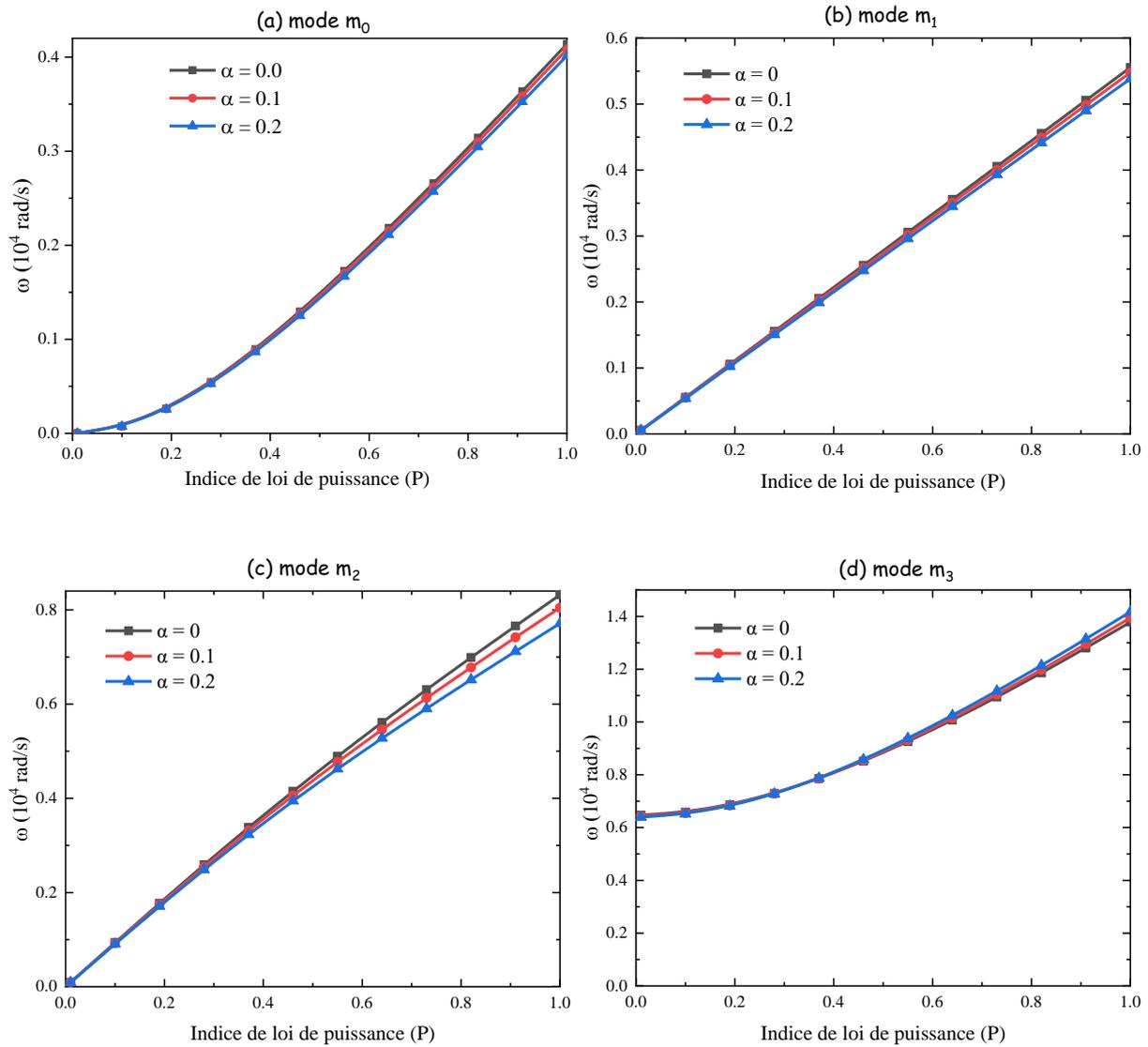


Fig.3 Les courbes de dispersion des différentes plaques à gradation fonctionnelle imparfaites utilisant SSDT

La **figure 3** montre les courbes de dispersion de différentes plaques FG imparfaites avec ($p = 2$). On voit que la porosité a un effet sur la fréquence de propagation des ondes en plaque FG pour les grands nombres d'ondes (k) et surtout pour le mode d'onde d'extension M_2 . En effet, les fréquences sont réduites lorsque la porosité augmente.

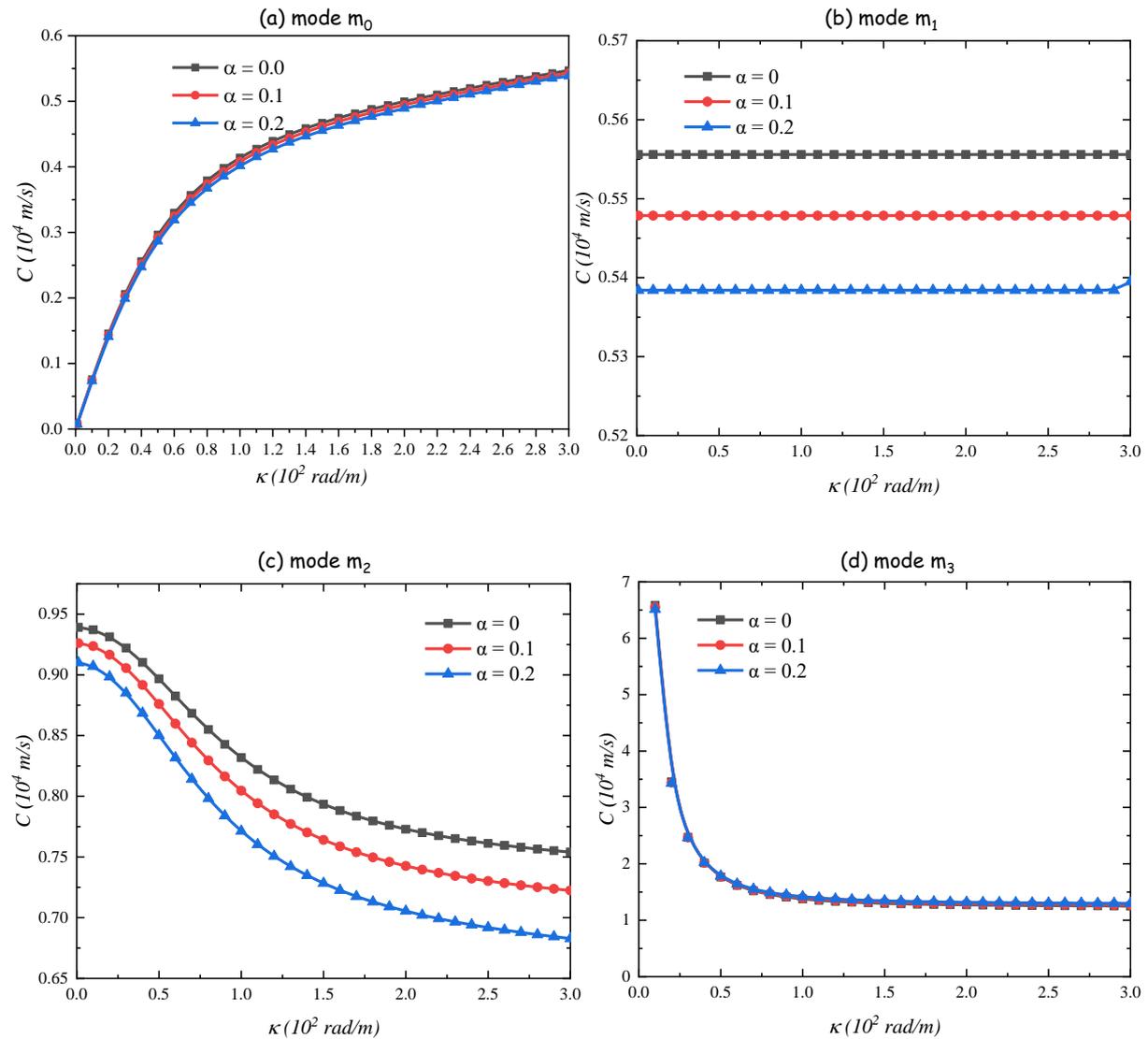


Fig.4 Les courbes de vitesse de phase des différentes plaques à gradation fonctionnelle imparfaites utilisant SSDT

La **figure 4** montre les courbes de vitesse de phase de différentes plaques FG imparfaites avec $p = 2$. On peut voir sur la **figure 4** que la vitesse de phase de la plaque FG diminue à mesure que la porosité augmente, sauf pour le mode d'onde de flexion M_3 , où un comportement opposé est observé.

De plus, on voit que l'influence de la porosité sur la vitesse de phase pour les modes M_1 et M_2 est également évidente à un nombre d'onde plus faible. L'influence de la porosité sur la vitesse de phase pour les modes d'onde de flexion M_0 et M_3 est très faible à un nombre d'onde plus faible, mais l'influence est évidente lorsque le nombre d'onde augmente.

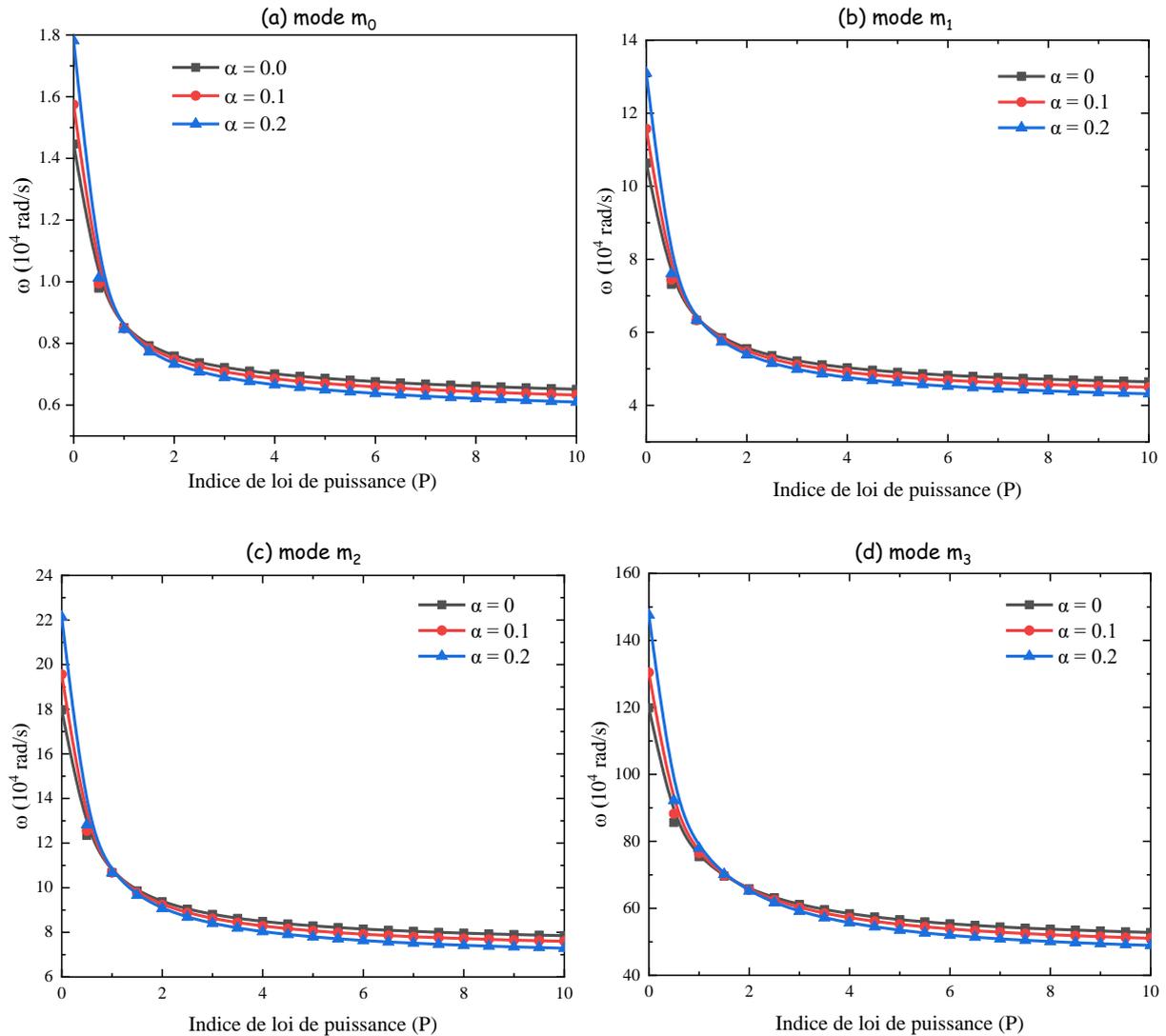


Fig.5 Les effets de l'indice de loi de puissance et de la porosité sur la fréquence de propagation des ondes dans les plaques FG parfaites et imparfaites en utilisant SSDT pour le nombre d'onde $k = 10 \text{ rad/m}$

Pour étudier les influences de l'indice de loi de puissance des constituants du matériau (p) et de l'indice de volume de porosité (α) sur la fréquence et la vitesse de phase, les résultats des plaques FG parfaites et imparfaites sont présentés sur les **Fig. 5**, respectivement, en utilisant SSDT pour le nombre d'onde $k = 10 \text{ rad/m}$.

On voit que lorsque l'indice de loi de puissance $p > 1$, à la fois la fréquence et la vitesse de phase diminuent avec l'augmentation de la porosité contrairement au cas où l'indice de loi de puissance est inférieur à 1. Cependant, on observe que l'augmentation de la puissance l'indice

de loi conduit à réduire la fréquence et la vitesse de phase et ce quelle que soit la valeur de la porosité.

IV.3. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présenté les résultats numériques de l'analyse de la propagation des ondes dans les plaques fonctionnellement graduées en utilisant diverses théories d'ordre élevé. Ces théories, n'exigent pas de facteur de correction de cisaillement, et donnent une description (TSDT, SSDT, HSDT, ...etc.) de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres des plaques FGM.

CONCLUSION

Conclusion générale

Une nouvelle théorie de la déformation par cisaillement d'ordre supérieur est utilisée pour analyser la propagation des ondes d'une plaque fonctionnellement graduée à l'aide de diverses théories de la plaque de déformation par cisaillement d'ordre supérieur. Cette théorie intègre un nouveau champ de déplacement qui introduit des variables intégrales indéterminées. Le coût de calcul peut donc être réduit grâce au nombre réduit d'inconnues et aux relations de dispersion de la propagation des ondes dans la plaque FG.

La fréquence propre et la propagation des ondes d'une plaque FG poreuse avec un nouveau modèle de distribution de la porosité, La loi du mélange modifiée couvrant les phases de porosité est utilisée pour décrire approximativement les propriétés des plaques FGM imparfaites ; pour traiter un tel problème de plaque FGM en vibration avec des conditions aux frontières sous forme d'appui simple sur tous les côtés, Les équations du mouvement sont obtenues en appliquant le principe d'Hamilton. Les solutions apparaissent en utilisant les relations de la dispersion, et les fréquences fondamentales et les vitesses de phase sont trouvées en résolvant un problème aux valeurs propres. Les propriétés du matériau sont supposées varier selon la direction de l'épaisseur de la plaque et la règle du mélange qui a été reformulée afin d'évaluer les caractéristiques des matériaux avec les phases de porosité. Dans ce travail, Toutes les études comparatives effectuées dans cette étude ont montré que les résultats obtenus pour l'analyse de comportement des plaques FGM parfaits et poreuses sont presque identiques à ceux obtenus avec d'autres théories de déformation par cisaillement. il peut être conclu que la théorie utilisée a montré sa précision pour la détermination des caractéristiques vibratoires et de propagation des ondes dans les plaques FGM ainsi le nouveau modèle mathématique qui a été développé par la reformulation de la règle de mélange pour incorporer la phase de porosité dans les propriétés du matériau couvre très bien les phases de porosité dans les plaques FG imparfaits. Et que l'influence de l'indice de la fraction volumique du matériau, le rapport d'épaisseur, le nombre d'onde et l'indice de volume de porosité sur les fréquences et la propagation des ondes dans la plaque FG sont significatifs.

En effet, on constate que pour un même nombre d'ondes, les fréquences de la propagation des ondes et les vitesses de phase dans les plaques parfaites sont maximales pour les plaques homogènes en céramique et réduites quand la plaque est en FGM quel que soit le mode de

vibration, On peut conclure que les fréquences naturelles augmentent quand la raideur du matériau augmente, ceci est expliqué par la variation de l'indice de puissance matérielle. - Pour les modes d'ondes d'extension pour une plaque en céramique ($p=0$) La vitesse de phase est constante,

- La fréquence naturelle et la vitesse de phase du mode fondamentale diminue avec l'augmentation de l'indice de puissance matériel et augmentation du rapport épaisseur et la plaque devient mince ;
- Pour le mode fondamental les fréquences et les vitesses de phase d'une plaque S-FGM sont supérieurs à ceux de la plaque P-FGM avec un indice de puissance matériel ($p=2$).

La fréquence de la propagation d'ondes est largement affectée par la présence de la porosité lorsque l'indice de porosité (λ) soit élevée et surtout pour le mode d'onde fondamentale. En effet, les fréquences sont augmentées lorsque la porosité augmente ; de même pour la vitesse de phase que soit l'indice matériel ; Par contre, pour le 4^{ème} mode de vibration c'est tout à fait le contraire ; pour le mode d'onde de flexion, on constate aussi que lorsque l'indice de loi de puissance est supérieur à 1 ($p>1$), la fréquence et la vitesse de phase diminuent avec l'augmentation de la porosité contrairement au cas où l'indice de loi de puissance est inférieur à 1.

En perspective à ce travail, nous envisageons d'appliquer la présente théorie :

- Tenir compte l'effet de l'étirement de l'épaisseur
- Introduisant l'effet des différentes approches des fondations élastiques.
- Étude de l'effet d'hygrothermique sur le comportement mécanique des structures FGM - développe un modèle élément fini pour étudier le comportement des structures FG en introduisant des théories de déformation par cisaillement et l'effet de stretching.

- Aboudi 2000 Aboudi, J. Pindera, M.J. and Arnold, S.M. Higher-order theory for functionally graded materials, in Research and Technology 2000, Glenn Research Center at Lewis Field, Cleveland, Ohio, 128-9, 2000.
- Afaq 2003 Karama. M, K.S. Afaq., S. Mistou, (2003). —Mechanical behavior of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity, *Int. J. Solids Structures*; 40 (6): 1525-1546.
- Ait Amar et al. 2014 Ait Amar Meziane, M., Abdelaziz, H.H. and Tounsi, A. (2014), —An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions, *J. Sandw. Struct. Mater.*, 16(3), 293-318.
- Ait Atmane et al. 2010 Ait Atmane, H., Tounsi, A., Mechab, I., Adda Bedia, E.A. (2010), "Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory", *Int J Mech Mater Des*, 6, 113– 121.
- Ait Atmane et al. 2015 Ait Atmane, H., Tounsi, A., Bernard, F. and Mahmoud, S.R.(2015), —A computational shear displacement model for vibrational analysis of functionally graded beams with porosities, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 19(2), 369-384.
- Ait Atmen 2011 Ait Atmane Hassen .2011. Vibration des structures composites en tenant compte de l'effet du cisaillement Thèse de doctorat de l'Universite Djillali Liabes De Sidi Bel Abbes 2004
- Ait yahia, 2015 Ait Yahia, S., Ait Atmane, H., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2015), —Wave propagation in functionally graded plates with porosities using various higherorder shear deformation plate theories, *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, 53(6),1143-1165.
- Akavci, 2014 Akavci, S.S. (2015), —An efficient shear deformation theory for free vibration of functionally graded thick rectangular plates on elastic foundation, *Compos. Struct.*, 108, 667-676.
- Akbas SD (2017) Akbas SD. Vibration and static analysis of functionally graded porous plates. *Journal of Applied and Computational Mechanics* 2017; 3(3): 199-207
- Al-Basyouni 2015 Al-Basyouni, K.S., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2015), —Size dependent bending and vibration analysis of functionally graded micro beams based on modified couple stress theory and neutral surface position, *Compos. Struct.*, 125, 621-630.
- Ambartsumyan 1969 S.A. Ambartsumyan. Theory of anisotropic plate. Technomic Publishing Co, 1969.
- Arnold 2001 Arnold, S.M. Higher-order-theory-structural/microanalysis code (HOT-SMAC) developed, in Research and Technology 2000, Glenn Research Center at Lewis Field, Cleveland, Ohio, 128-9, 2001.

- Baron et Naili 2008 Baron. C, Naili. S. (2008), —Propagation d'ondes élastiques au sein d'un guide d'ondes élastiques anisotrope à gradient unidirectionnel sous chargement fluide, *Compte Rendue Mécanique* ; 336 (9) : 722–730.
- Beldjelili et al. 2015 Beldjelili, Y., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2016), —Hygrothermo-mechanical bending of SFGM plates resting on variable elastic foundations using a four-variable trigonometric plate theory”, *Smart Struct. Syst., Int. J.*, **18**(4), 755-786
- Benachour et al. 2011 Benachour, A., Daouadji, H.T., Ait Atmane, H., Tounsi, A. and Meftah, S.A. (2011), —A four variable refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates with arbitrary gradient, *Compos. Part B*, 42(6), 1386-1394.
- Benadouda et al. 2017 Benadouda, M., Ait Atmane, H., Tounsi, A., Bernard, F., Mahmoud, S.R. (2017), —An efficient shear deformation theory for wave propagation in functionally graded material beams with porosities, *Earthquakes and Structures*, 13(3),255-265.
- Bennai 2015 Bennai, R., Ait Atmane, H. and Tounsi, A. (2015), —A new higher-order shear and normal deformation theory for functionally graded sandwich beams, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 19(3), 521-546

- Bhatt 2000 Bhatt, R.T. Feasibility of actively cooled silicon nitride airfoil for turbine applications demonstrated, in Research and Technology 2000, Glenn Research Center at Lewis Field, Cleveland, Ohio, 34, 2000.
- Boukhari 2016 Boukhari, A., Ait Atmane, H., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2016), —An efficient shear deformation theory for wave propagation of functionally graded material plates, *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, 57(5), 837-859
- Boukli. H, 2015 Cours «ondes mécaniques» Université Hassiba Benbouali De Chlef 2014 /2015
- Bowles, 1992 K.J. Bowles and S. Frimpong, 'Voids effects on the interlaminar shear strength of unidirectional graphite-fiber reinforced composites', *Journal of Composite Materials*, Vol 26, pp 1487-1509, 1992.
- Bréard, 1997 J. Bréard, 'Matériaux composites à matrice polymère, modélisation numérique de la phase de remplissage du procédé R.T.M. et détermination expérimentale de la perméabilité d'un renfort fibreux', *Thèse de doctorat*, Université du Havre, 1997.
- Bresse, 1859 Bresse, J.A.C. (1859), —Cours de Mécanique Appliquée, MalletBachelier, Paris, France
- Brovarone 2001 Brovarone, Vitale, C. Verne, E. Krajewski, A and Ravagliolo, A. Graded coatings on ceramic substrates for biomedical applications, *Journal of the European Ceramic Society*, Elsevier Science Limited, 21, 2855-62, 2001.
- Bui 1999 V.Q. Bui, E. Marechal, and H. Nguyen-Dang. Imperfect interlaminar interfaces in laminated composites : bending, buckling and transient responses. *Composites Science and Technology*, 59 :2269–2277, 1999.
- Bui 2000 V.Q. Bui, E. Marechal & H. Nguyen-Dang. Imperfect interlaminar interfaces in laminated composites : interlaminar stresses and strain-energy release rates. *Composites Science and Technology*, vol. 60, pages 131,143,2000.
- Carrera 2000 E. Carrera .An assessment of mixed and classical theories on global and local response of multilayered orthotropic plates. *Composite structures*, vol.50, pages 183,198, 2000.
- Chabot 1997 A. Chabot. Analyse des efforts a l'interface entre les couches des matériaux composites à l'aide de modèles multiparticulaires de matériaux multicouches. PhD thesis, ENPC, 1997.
- Cheng et Batra 2000 Cheng, Z.Q. and Batra, B.C. (2000), —Exact correspondence between eigenvalues of membranes and functionally graded simply supported polygonal plates, *J. Sound Vib.*, 229(4), 879-895.
- Chu 1999 Chu, C. Zhu, J. Yin, Z. and Wang, S. Hydroxyapatite-Ti functionally graded biomaterial fabricated by powder metallurgy, *Materials Science and Engineering*, A217, 95-100, Elsevier Science Limited, 1999.
- Chung et chi, 2003 Chi. Shyang-ho., Chung Yen-Ling. (2003), —Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings, *Engineering Fracture Mechanics*; 70 (10), 1227–1243.

- Costa, 2001 M.L. Costa, S.F. Müller de Almeida, M.C. Rezende, 'The influence of porosity on the ILSS of carbon/epoxy and carbon/bismaleimide fabric laminates', *Composites Science and Technology*, Vol. 61; pp 2101-2108; 2001
- Cranch , 1956 Cranch, E.T. and Adler, A.A. (1956), —Bending vibration of variable section beams, *J. Appl. Mech.*, 23(1), 103-108
- Cugnoni 2004 J.cugnoni. Identification par recalage modale et fréquentiel des propriétés constitutives de coques en matériaux composites. These de doctorat de l'école polytechnique fédérale de Lausanne ,2004.
- D. A. Davids 1989 D. A. Davids, P. Y. Wu, and D. Chizhik, Restricted Aperture Acoustic Microscope Lens for Rayleigh Wave Imaging, *Appl. Phys. Lett.*, 54, (1989), p. 1639.
- Dan Israël Cours «Ondes Mécaniques et Lumineuses» Université Pierre et Marie Curie
- Delale et Erdogan 1983 Delale. F, Erdogan. F. (1983), —The crack problem for a non-homogeneous planel. *ASME Journal of Applied Mechanics*; 50 (3): 609-614.
- Di Sciuva 1987 M. Di Sciuva. An improved shear-deformation theory for moderately thick multilayered anisotropic shells and plates. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 54, pages 589(596, 1987).
- Djelouah.h,2007 cours« ondes & vibrations» université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène 2006 /2007.
- Duong, 2008 Van Anh DUONG Développement en dynamique d'un élément fini multicouche avec interfaces imparfaites Thèse de doctorat de l'école national des ponts et chaussées, 2008.
- Ebrahimi , 2016a Farzad, E. and Reza Barati, M. (2016a), —Wave propagation analysis of quasi-3D FG nanobeams in thermal environment based on nonlocal strain gradient theory, *Appl. Phys. A*, 122(9), 843. DOI: doi.org/10.1007/s0033
- Ebrahimi , 2016b Farzad, E., Barati, R.M. and Dabbagh, A. (2016b), —A nonlocal strain gradient theory for wave propagation analysis in temperature-dependent inhomogeneous nanoplates, *Int. J. Eng. Sci.*, 107, 169-182.
- Ganapathi 1997 M. Ganapathi & M. Touratier. A study on thermal post buckling behavior of laminated composite plates using a shear-exible _nite element. *Finite element in Analysis and Design*, vol. 28, pages 115,135, 1997.
- H. Sazdjian, 2013 Cours «Ondes» Université Paris-Sud 11 Orsay 2012-2013
- Han et al. 2001 Han, X., Liu, G.R., Xi, Z.C. and Lam, K.Y. (2001), —Transient responses in a functionally graded cylinder, *Int. J. Solids Struct.*, 38, 3021-3037.
- Harper et al., 1987 B.D. Harper, G.H. Staab and R.S. Chen, —A note on the effects of voids upon the hygral and mechanical properties of AS4/3502 Graphite/Epoxy', *Journal of Composite Materials*, Vol. 21, pp 280-289, March 1987.

- Hebali et al, 2014 Hebali, H., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Bessaim, A., Adda Bedia, E.A. (2014), —New quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates, *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, 140, 374 – 383
- Henky 1947 Hencky, H. Über die Berücksichtigung der Schubverzerrung in ebenen Platten. *Ingenieur-Archiv*, 16 (1), 72–76, 1947.
- Hildebrand 1949 Hildebrand. F.B, E. Reissner, G.G. Thomas, (1949). —Notes on the foundations of theory of small displacements of orthotropic shells. *NACA T. N. N°:1833*.
- Hirai 1996 Hirai, T. (1996), "Functional gradient materials", *Processing of ceramics—Part 2*, Weinheim, Germany: VCH Verlagsgesellschaft mbH Publishers; p. 293–341.
- Hopkinson 2006 Hopkinson, N. Hague, R.J.M. and Dickens, P.M. *Rapid Manufacturing: An Industrial Revolution for the Digital Age*. John Wiley and Sons, Ltd, 2006.
- Jahwari et Naguib, 2016 Jahwari F and Naguib HE. Analysis and homogenization of functionally graded viscoelastic porous structures with a higher order plate theory and statistical based model of cellular distribution. *Applied Mathematical Modelling* 2016;40(3):2190- 2205.
- Jian, Hashida *et al.* 1995 Jian. C.Y., Hashida. T, Takahashi. H and Saito. M. (1995), "Thermal shock and fatigue resistance evaluation of functionally graded coatings for gas turbine blades by laser heating method", *Composites Engineering*, (1995), 879–889.
- Kant et Swaminathan 2002 Kant.T, K. Swaminathan, (2002). —Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory. *Composite Structure*; 56 (4): 329-344.
- Kardos et al., 1983 J.L. Kardos, M.P. Dudukovic, E.L. Mc Kagne and M.W. Lehman, *Void formation and transport during composite laminate processing: an initial model Framework*, *Composite Materials: Quality Assurance and Processing*, ASTM STP 797, American Society for Testing and Materials, Philadelphia, PA, pp 96-109, 1983.
- Kardos et al., 1986 J.L. Kardos and M.P. Dudukovic, *Void growth and resin transport during processing of thermosetting – matrix composites*, *Advances in Polymer Science*, Vol.80, p 101123, 1986.
- Kassapoglou 1986 C. Kassapoglou & P.A. Lagace. Closed form solutions for the interlaminar stress field in angle-ply and cross-ply laminates. *Journal of Composite Materials*, vol. 27, pages 292,308, 1987
- Kawasaki et Watanabe 1997 Kawasaki. A and Watanabe. R (1997), "Evaluation of thermo mechanical performance for thermal barrier type of sintered functionally graded materials", *Composites Part B, Engineering*, 29–35
- Khare, 2004 R.K. Khare, T. Kant & A.K. Garg. Free vibration of composite and sandwich laminates with a higher-order facet shell element. *Composite Structures*, vol. 65, pages 405-418, 2004.

- Kingery et al., 1975 W.D. Kingery, .K. Bowen, D.R. Uhlmann, *Introduction to ceramics*, WileyInterscience publication, 2nd Edition, ISBN 0-471-47860-1, 1032 p, 1975.
- Kirchhoff 1950 G.Kirchhoff .uber das gleichgewicht und die bewegungeiner elastischen scheid. Journal fur reine und angewandte Mathematik, Vol.40, pages 51-88,1950.
- Koizumi 1993 —The concept of FGM Ceramic transactions, Funct Grad Mater, 34, 3–10
- Kumar et Maruno 2002 Kumar, Roop R. and Marino, S. Functionally graded coatings of HA-G-Ti composites and their in vivo studies, Materials Science and Engineering, A334, 15662, Elsevier Science Limited, 2002.
- Kwak et al., 1998 H.Y. Kwak and Y.W. Kim, *Homogeneous nucleation and macroscopic growth of gas bubble in organic solutions*, *International Journal of Heat mass transfer*; Vol. 41 N°4-5; pp 757-767; 1998.
- Larbi Chaht 2015 Larbi Chaht, F., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Anwar Bég, O. and Mahmoud, S.R. (2015), —Bending and buckling analyses of functionally graded material (FGM) size-dependent nanoscale beams including the thickness stretching effect, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 18(2), 425-442.
- Ledru, 2009 Y. Ledru *Etude de la porosité dans les matériaux composites stratifiés aéronautiques* *Thèse de doctorat*, Université Paul Sabatier, Toulouse, France, 242p, 2009.
- Lee et al., 1996 J.G. Lee and R.W. Flumerfelt, *A refined approach to bubble nucleation and polymer foaming process : dissolved gas and cluster size effects*, *Journal of Colloid and Interface Science*, Vol 184, pp 335-348, 1996.
- Liu et al., 2004 L. Liu, B. Zhang, D. Wang, *Void content in carbon/epoxy composites and its effects on flexural properties*, *49th International Sampe Symposium and Exhibition*, pp 254261, 2004.
- Liu et al., 2006 (a) L. Liu, B. Zhang, D. Wang, Z. Wu, *Effects of cure cycles on void content and mechanical properties of composite laminates*, *Composite Structure*, Vol. 73, pp 303-309, 2006.
- Malek zadeh , 2009 Malekzadeh, P. (2009), —Three-dimensional free vibration analysis of thick functionally graded plates on elastic foundations, *Compos Struct*, 89, 367–373.
- Menail 2009 Menail 2009Analyse de l'effet du vieillissement à l'air, dans l'eau douce et dans l'eau salée, sur la tenue en fatigue de composites à matrice organique, renforcée par des fibres de verre, thèse de doctorat UBMA naba Menail Younès 2009.
- Mindlin 1951 Mindlin. R.D, (1951). —Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 18, pages 31-38.
- Miyamoto et al. 1999 Miyamoto, M., Kaysser, W.A., Rabin, B.H. et al. (1999), "Functionally Graded Materials Design". Processing and Applications.

- Mouaici et al. 2016 Mouaici, F., Benyoucef, S., Ait Atmane, H. and Tounsi, A. (2016), "Effect of porosity on vibrational characteristics of non-homogeneous plates using hyperbolic shear deformation theory", *Wind Struct.*, 22(4), 429-454
- Murthy 1981 M.V.V. Murthy. An improved transverse shear deformation theory for laminated anisotropic plate. Rapport technique, NASA, 1981.
- Naghdi 1957 Naghdi. P. M, (1957). —On the theory of thin elastic shells. *Quarterly Appl. Math.*, 14: 369-380.
- Nguyen 2004 Viet.Tung. Nguyen. « Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaques ». Thèse de doctorat de l'école nationale des ponts et chaussées ,2004.
- Nicolas , 2010 cours« ondes & vibrations» polytech Marseille 2009 /2010.
- O. Xeridat 2011 Olivier Xeridat, Etude expérimentale de la propagation, de la diffusion et de la localisation des ondes de Lamb. Thèse de doctorat, Université Nice Sophia Antipolis, France2011.
- Ochoa. 1992 Ochoa, O.O., Reddy, J.N. Finite Element Analysis of Composite Laminates. Solid mechanics and its applications. Dordrecht: Springer, 1992
- Öchsner et al. 2008 Öchsner, A., Murch, G.E. et de Lemos, M.J.S. (2008), "Cellular and Porous Materials", WILEY-VCH, 398-417.
- Olivier et al., 1995 P. Olivier, J.P. Cottu et B. Ferret, _Effects of cure cycle pressure and voids on some mechanical properties of carbon/epoxy laminates', *Composites*, Vol. 26 N°7, p 509, 1995.
- Olivier, 1994 P. Olivier, _Etude des contraintes résiduelles de cuisson dans les stratifiés carbone / époxy en relation avec les cycles de polymérisation', *Thèse de doctorat*, Université Paul Sabatier, Toulouse, France, 270p, 1994.
- Ould Larbi 2013 Ould Larbi, L., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2013), —An efficient shear deformation beam theory based on neutral surface position for bending and free vibration of functionally graded beams, *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 41, 421 – 433
- P. Puzo. 2012 Notes de cours d'électromagnétisme classique
- Pitchoumani et al., 1996 R. Pitchumani, S. Ranganathan, R.C. Don, J.W. Gillespie, M.A. Lamontia, _Analysis of transport phenomena governing interfacial bonding and void dynamics during thermoplastic tow placement', *International Journal of Heat Mass Transfer*, Vol. 39, N°9, pp 1883-1897, 1996.
- Polit,1997 O. Polit & M. Touratier. A new laminated triangular finite element assuring interface continuity for displacements and stresses. *Composite Structures*, vol. 38, pages 37-44, 1997.
- Raju, 1981 I.S. Raju & J.H. Crews. Interlaminar stress singularities at a straight free edge in composite laminates. *Comput. Struct.*, vol. 14, page 21, 1981.
- Ranganathan et al.1995 S. Ranganathan, S.G. Advani, M.A. Lamontia, _A nonisothermal process model for consolidation and void reduction during in-situ tow

- placement of thermoplastic composites', *Journal of composite materials*, Vol. 29, N°8, pp 1040-1062, 1995.
- Rasheedat 2017 Rasheedat Modupe Mahamood Esther Titilayo Akinlabi, "Functionally Graded Materials"© Springer International Publishing AG 2017
- Reddy 1980 J.N. Reddy. A penalty plate-bending element for the analysis of laminated anisotropic composite plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 15, pages 1187,1206, 1980.
- Reddy 1984 Reddy. J.N, (1984). —A simple higher-order theory for laminated composite plates, *Journal of Applied Mechanics*; 51 (4): 745-752.
- Reddy 1984 J.N.Reddy. A simple higher order theory for laminated composite plates. *Journal of Applied Mechanics* .Vol.51, pages 745-752, 1984.
- Reddy 1997 Reddy. J.N., Wang. C.M., Lee. K.H. Relationships between bending solutions of classical and shear deformation beam theories. *International Journal of Solids and Structures* 34 (26), 3373–338, 1997.
- Reddy 1999 J.N. Reddy, *Theory and Analysis of Elastic plates*. Taylor & Francis, Philadelphia, 1999.
- Reddy 2004 Reddy JN. *Mechanics of laminated composite plates and shells; theory and analysis (second edition)*. CRC Press; 2004.
- Reddy, 2000 Reddy, J.N. (2000), —Analysis of functionally graded plates, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 47, 663-684
- Reddy1997 Reddy. J.N, (1997). —*Mechanics of Laminated Composites Plates: Theory and Analysis*, CRC Press, Boca Raton.
- Reddy, 2002 Reddy, J.N. and Cheng, Z.Q. (2002), —Frequency correspondence between membranes and functionally graded spherical shallow shells of polygonal planform, *Int. J. Mech. Sci.*, 44(5), 967-985.
- Reissner , 1945 Reissner.E (1945).||The effect of transverse shears deformation on the bending of elastic plates||*J. Appl. Mech.*, vol. 12, pages 69/77.
- Reissner, 1975 Reissner. E, (1975). —On transverse bending of plates, including the effects of transverse shear deformation, *Int. J. Solids Structures*; 25 (5):495-502.
- S. Bouhedja, 2000 Bouhedja S. *Etude des vitesses des ondes de surface et de l'atténuation du mode de rayleigh via un capteur fonctionnant en champ noir ; Thèse de doctorat d'état en physique, Université mentouri constantine(2000)*.
- Saiyath, 2015 Saiyathibrahim, A. Mohamed, Nazirudeen, S.S. Dhanapal, P. *Processing techniques of tunctionally graded materials- Areview. International conference on systems, sciences, control, communication, enginnering and technology, 2015.*
- Schaefer, 1994 D.W. Schaefer, _Engineered porous materials', A publication of the Materials Research Society : *Bulletin MRS*, Vol 19, N°4, pp 14-17, 1994.
- Schoeller, 1955 H. Schoeller, _Hydrogéologie'. *Ecole Nationale Supérieur du Pétrole, Technip, Paris, 2 vol, 443 p, 1955.*

- Shankara ,1996 C.A. Shankara & N.G.R. Iyengar. A Co element for the free vibration analysis of laminated composite plates. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 191, no. 5, pages 721-738, 1996.
- Shen, 2009 Shen, H.-S. "Functionally Graded Materials - Nonlinear Analysis of Plates and Shells", New York: CRC Press, Taylor & Francis Group. 2009
- Şimşek et Aydın ,2012) Simsek, M, Kocatürk, T and Akbas, SD. (2012), "Dynamic behavior of an axially functionally graded beam under action of a moving harmonic load", *Composite Structures*, 94(8), 2358-2364.
- Sun et Luo ,2011a Sun, D. and Luo, S.N. (2011a), —The wave propagation and dynamic response of rectangular functionally graded material plates with completed clamped supports under impulse load, *Eur. J. Mech. – A/Solids*, 30, 396-408.
- Sun et Luo ,2011b Sun, D. and Luo, S.N. (2011b), —Wave propagation of functionally graded material plates in thermal environments, *Ultrasonics*, 51, 940-952
- Suresh et Mortensen 1998 Suresh, S., Mortensen, A. (1998), —Fundamentals of Functionally Graded Materials, (IOM Communications Ltd., London).
- Tang et al., 1987 J.M. Tang, W.I. Lee and G.S. Springer, 'Effects of cure pressure on resin flow, voids and mechanical properties', *Journal of Composite Materials*, Vol 21, p 421- 440, May 1987.
- Timoshenko et S.P. Timoshenko., S.Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*. McGraw-Hill, New York, 1959.
- WoinowskyKrieger 1959
- Tounsi 2013 Tounsi, A., Houari, M.S.A., Benyoucef, S. and Adda Bedia, E.A. (2013), —A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates, *Aerosp. Sci. Technol.*, 24(1), 209-220.
- Tounsi et al ,2016 Tounsi, A., Houari, M.S.A. and Bessaim, A. (2016), —A new 3-unknowns nonpolynomial plate theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate, *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, 60(4), 547 - 565
- Touratier 1991 Touratier. M, (1991). —An efficient standard plate theory, *Engng Sci*, vol. 29, no 8, pages 901-916.
- Trochu et al., 2006 F. Trochu, E. Ruiz, V. Achim, S. Soukane, 'Advanced numerical simulation of liquid composite molding for process analysis and optimization', *Composites:Part A*, Vol 37, pp 890-902, 2006.
- Veesler et al. S. Veesler, D. Mangin, F. Puel, 'Cristallisation', *Technique de l'ingénieur*, Ch Nucléation, J2710.
- Vel et Batra, 2004 Vel, S.S. and Batra, R.C. (2004), —Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates, *J. Sound Vib.*, 272, 703-730.
- W.L.Bond 1975 W. L. Bond, C. C. Culter, R. A. Lemons and C. F. Quate, Dark Field and Stereo Viewing with the Acoustic Microscope, *Appl. Phys. Lett.*, 27, (1975), p. 270

- Watari 2003 Watari, F. Kondo, H. Matsuo, S. Miyao, R. Yokoyama, A. Omori, M.Hirai, T. Tamura, Y. Uoa, M. Ohara, N. Kawasaki, T. Development of functionally graded implant and dental post, for bio-medical application. *Mater. Sci. Forum*, 423425:321-326, 2003.
- Wattanasakulponget al. 2012 Wattanasakulpong, N., Prusty, B.G., Kelly, D.W. and Hoffman, M. (2012), —Free vibration analysis of layered functionally graded beams with experimental validation, *Mater. Des.*, 36, 182-190.
- Wattanasakulponget al. 2014 Wattanasakulpong, N. and Ungbhakorn, V. (2014), —Linear and nonlinear vibration analysis of elastically restrained ends FGM beams with porosities, *Aerosp. Sci. Technol.*,32(1), 111-120.
- Wisnom et al., 1996 M.R. Wisnom, T. Reynolds and N. Gwilliam, —Reduction in ILSS by discrete and distributed Voids’, *Composites Science and Technology*, 56, pp 93-101, 1996.
- Yin 1987 W.L. Yin. Interlaminar stress analysis of composite laminates using a sublaminar/layer model. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 31, no. 11, pages 1549, 1564, 1994.
- Yokota,1978 M.J. Yokota, —Process controlled curing of resin matrix composites’, *Sample Journal*, p11-17, July/Augus, 1978.
- Yoshida et al., 1986 H. Yoshida, T. Ogasa and R. Hayashi, —Statistical approach to the relationship between ILSS and void content of CFRP’, *Composites Science and Technology*, Vol 25, pp 3-18, 1986.
- Zenkour 2006 Zenkour, A.M. (2006), —Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates, *Appl. Math. Model.*, 30(1), 67-84.