

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN DE TIARET



FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES
DÉPARTEMENT DE GÉNIE CIVIL

Mémoire de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme de Master

Spécialité : Génie Civil

Option : V.O.A

Présenté par :

AISSET Moulay

BENSAID Ahmed

Sujet du mémoire

VIBRATION DES POUTRES FGM BIDIRECTIONNELLE

Soutenu publiquement le 07/10/2020. devant le jury composé de :

Mr, H. H. ABDELAZIZ

Président

Mr, Y. TLIDJI

Rapporteur

Mr, K. DRAICHE

Examineur

Mme, Z. KHELIFA

Examineur

RROMOTION : 2019-2020

Remerciement

Nous remercions ALLAH le tout puissant qui nous a guidés et qui nous a donné la force et la volonté de réaliser ce travail.

On doit particulièrement remercier notre encadreur Mr TLIDJI Youcef qui a été attentif à l'évolution de nos recherches et a apporté toute sa contribution pour mener à bien ce travail, pour les conseils qu'il nous a prodigués pour sa remarquable patience lors de la rédaction, Pour la confiance et l'attention qu'il nous accordées tout au long de ce travail.

Nos remerciements sincères s'adressent également à Monsieur CHEIKH Abdelbaki, pour leurs aides et conseils.

Nous voudrions remercier tous nos chers enseignants qui n'ont ménagé aucun effort pour nous éclairer durant toutes ces années d'études, nous leur sommes tous reconnaissants pour le savoir qu'ils nous ont appris. Merci du fond du cœur.

Sans oublier tous les employés du département du Génie Civil pour leur service.

Enfin, notre pensée va à tous nos frères et amis qui nous ont soutenus durant ces années de labeur sans oublier tous les étudiants de la promotion du Travaux Publics option Voie et ouvrages d'arts.

Dédicace

A Mes chers parents, pour tous leurs sacrifices, leur amour, leur tendresse, leur soutien et leurs prières tout au long de mes études, Aucun hommage ne pourrait être à la hauteur de l'amour Dont ils ne cessent de me combler. Que dieu leur procure bonne santé et longue vie.

A Mon très cher Père qui m'a aidé à devenir ce que je suis aujourd'hui: Aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour, l'estime, le dévouement et le respect que j'ai toujours pour toi. Rien au monde ne vaut les efforts fournis jour et nuit pour mon éducation et mon bien être. Ce travail est le fruit de tes sacrifices que tu as consentis pour mon éducation et ma formation le long de ces années, que dieu te garde et te protège.

A Ma tendre Mère qui m'a entouré d'amour, d'affection qui a fait tout pour ma réussite, Tu représentes pour moi la source de tendresse et l'exemple de dévouement qui n'a pas cessé de m'encourager. Tu as fait plus qu'une mère puisse faire pour que ses enfants suivent le bon chemin dans leur vie et leurs études, , que dieu te garde et te protège.

A Mon cher petit frère présent dans tous mes moments d'examens par son soutien moral et ses belles surprises sucrées., Je te souhaite un avenir plein de joie, de bonheur, de réussite et de sérénité, Je t'exprime à travers ce travail mes sentiments de fraternité et d'amour , que dieu te garde et te protège.

A Ma très chère sœur : En témoignage de l'attachement, de l'amour et de l'affection que je porte pour vous, Je vous remercie pour votre hospitalité sans égal et votre affection si sincère, Je vous dédie ce travail avec tous mes vœux de bonheur, de santé et de réussite, que dieu te garde et te protège.

A La femme de ma vie : Tes sacrifices, ton soutien moral et matériel m'ont permis de réussir mes études et en témoignage de l'attachement, de l'amour et de l'affection que je porte pour vous Ce travail soit témoignage de ma reconnaissance et de mon amour sincère et fidèle, Que dieu te garde et te protège.

A mes adorables petits bébés Yanis & Anaïs ; je vous aime énormément, vous êtes ma source d'espoir et de motivation, je vous dédie ce travail avec tous mes vœux de bonheur, de santé et de réussite, que dieu vous garde et vous protège. À tous ceux qui me sont chers....

AISSET Moulay

Dédicace

A mon père qui m'a aidé à devenir ce que je suis aujourd'hui, que dieu le garde et le protège ; Rien au monde ne vaut les efforts fournis jour et nuit pour mon éducation et mon bien être ;

A ma mère qui m'a entouré d'amour, d'affection et qui fait tout pour ma réussite, que dieu la garde et la protège.

Tu as fait plus qu'une mère puisse faire pour que ses enfants suivent le bon chemin dans leur vie et leurs études;

A tous les membres de ma famille, mes frères, mes sœurs, Veuillez trouver dans ce modeste travail l'expression de mon affection ;

À tous ceux qui me sont chers....

BENSAID Ahmed

Résumé

Ce travail présente une étude du comportement dynamique d'une poutre simplement appuyée en FGM bidirectionnelle par l'utilisation d'une théorie raffinée de déformation en cisaillement. Les propriétés matérielles de cette poutre varient dans les deux directions. Le principe d'Hamilton est utilisé pour dériver les équations du mouvement. Le résultat numérique montre l'effet de l'indice de puissance et le rapport longueur-épaisseur sur les fréquences de vibration d'une poutre en FGM bidirectionnelle.

Mots clés : Poutre, Vibration, FGM bidirectionnelle, Fréquences.

Abstract

This work presents the free vibration behavior of two directional functionally graded simply supported beams by employing a refined shear deformation theory. The material properties of the beam vary in both directions. In order to investigate the free vibration response, the equations of motion are derived by means of Hamilton principal. The results for extensive studies are provided to understand the influences of the different gradient indexes, various aspect ratios conditions on the free vibration responses of the two directional functionally graded beams.

Key words : Beam, Vibration, Two directional FGM; Frequencies.

ملخص

الهدف من هذا العمل هو دراسة السلوك الديناميكي لعارضة عادية الإرتكاز لمواد متغيرة وظيفيا في إتجاهين باستعمال نظرية مدققة لتشوه القص ، حيث أن خصائص المواد لهذه العارضة تتغير في كلا الإتجاهين و باستعمالنا مبدا هاميلتون لإشتقاق معادلات الحركة حيث أن النتائج الرقمية تبين لنا مدى تأثير مؤشر القوة و نسبة الطول و السمك على ترددات إهتزاز لعارضة المواد المتغيرة وظيفيا في إتجاهين..

الكلمات المفتاحية: العارضة، الإهتزاز، إتجاهين، المواد المتغيرة وظيفيا، ترددات.

Table des matières

Remerciement.....	i
Dédicace	ii
Dédicace	iii
Résumé	iv
Abstract	iv
ملخص.....	iv
Liste des figures	viii
Liste des tableaux	x
Liste des symboles	xi
Introduction générale.....	1
Chapitre 1. Généralité sur les matériaux à gradient de propriété.....	3
1.1 Introduction	3
1.2 Définition et le concept d'un matériau à gradient de propriétés :.....	4
1.3 Aperçu historique sur le développement architectural du concept FGM:	6
1.4 Pour des utilisations structurales (intégration du caractère réfractaire) :	8
1.5 l'intérêt d'utiliser les FGM :	11
1.6 Différence entre FGM et les matériaux composites traditionnels :	11
1.7 Propriétés matérielles effectives d'un matériau FGM :	12
1.8 Méthodes d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés:	13

Table des matières

1.9	Propriétés physiques de la céramique :.....	19
1.10	. Propriétés matérielles effectives d'un matériau FGM :.....	20
1.11	Propriétés matérielles de la poutre P-FGM :	20
1.12	Propriétés matérielles de la poutre S-FGM :	22
1.13	Propriétés matérielles de la poutre E-FGM :	23
1.14	Propriétés matérielles de la poutre bidirectionnelle P-FGM :	24
1.15	Conclusion :.....	25
Chapitre 2.	Théories des poutres	26
2.1	Introduction :	26
2.2	Historique des théories des poutres :	26
2.3	Le comportement des poutres composites :.....	26
2.4	Les différents types de poutres :	27
2.5	Les différentes théories des poutres:	28
2.6	Conclusion:.....	34
Chapitre 3.	Formulation mathématique	35
3.1	Introduction	35
3.2	Formulation théorique :	35
3.3	Hypothèses de base.....	36
3.4	Les relations constitutives :	36
3.5	Equations de mouvement :	37
3.6	Solutions analytiques	40

Table des matières

3.7	Conclusion	43
Chapitre 4.	Résultats et discussions	44
4.1	Introduction	44
4.2	Résultats numériques et discussion	44
4.3	Conclusions	52
	Conclusion générales.....	54
	Références	56

Liste des figures

Figure (1.1)	Un type d'un matériau FGM en céramique et métal.....	4
Figure (1.2)	Un FGM avec les fractions de volume de phases constitutives graduées dans la direction verticale [Yin et al., 2004].....	5
Figure (1.3)	Implant dentaire en FGM (Ti/20HAP). Aspect externe (gauche) et section transversale (droite).....	6
Figure (1.4)	Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels.....	8
Figure (1.5)	Résultats importants du programme de recherche de 1987-1991.....	10
Figure (1.6)	La distribution composante des matériaux	12
Figure (1.7)	Modèles analytiques pour une couche en FGM.	13
Figure (1.8)	Principe de la méthode coulage en bande [Boch. P et Al 1986].	14
Figure (1.9)	Disposition du procédé frittage laser différentiel.	16
Figure (1.10)	Schéma du procédé dépôt par centrifugation.....	17
Figure (1.11)	Dimensions de la poutre FGM.....	21
Figure (1.12)	Variation du module de Young dans une plaque P-FGM.....	22
Figure (1.13)	Variation du module de Young dans une poutre S-FGM	23
Figure (1.14)	Variation du module de Young de la poutre E-FGM	24
Figure (1.15)	Variation de la fraction volumique de la poutre 2D-FGM.....	24
Figure (2.1)	Cinématique d'Euler Bernoulli.	29
Figure (2.2)	Cinématique de Timoshenko.....	31

Figure (2.3)	Cinématique de la Théorie d'Ordre Elevé.....	32
Figure (3.1)	Géométrie et coordonnées de la poutre en FGM bidirectionnelle.....	35
Figure (4.1)	Variation des fréquences de vibration adimensionnelles d'une poutre 2D-PFGM $k_x = 1, k_z = 1$	48
Figure (4.2)	Variation des fréquences de vibration adimensionnelles d'une poutre 2D-PFGM $k_x = 1, k_z = 10$	49
Figure (4.3)	Variation des fréquences de vibration adimensionnelles d'une poutre 2D-PFGM $k_x = 10, k_z = 1$	49
Figure (4.4)	Variation des fréquences de vibration adimensionnelles d'une poutre 2D-PFGM $k_x = 10, k_z = 10$	50
Figure (4.5)	Variation des fréquences de vibration adimensionnelles en mode axiale et de cisaillement en fonction de k_x d'une poutre 2D-PFGM.....	51
Figure (4.6)	Variation des fréquences de vibration adimensionnelles en mode axiale et de cisaillement en fonction de k_z d'une poutre 2D-PFGM.....	52

Liste des tableaux

Tableau (4.1)	Fréquences de vibration adimensionnelles d'une poutre P-FGM, ($k_x = 0$).	45
Tableau (4.2)	Fréquences de vibration adimensionnelles d'une poutre 2D-PFGM $L/h = 5$	45
Tableau (4.3)	<i>Fréquences de vibration adimensionnelles d'une poutre 2D – PFGM $L/h = 20$</i>	46
Tableau (4.4)	Les trois modes de vibration en mode flexion $L/h = 5$	47
Tableau (4.5)	Les trois modes de vibration en mode flexion $L/h = 20$	47

Liste des symboles

$\{ \}$	Vecteur colonne
$[]$	Matrice
$\{ \sigma_{ij} \}$	Tenseur de contrainte
$\{ \varepsilon_{ij} \}$	Tenseur de déformation
E_{ij}	Module de Young
ν	Coefficient de poisson
G_{xz}	Module de cisaillement dans le plan (x, z)
u	Déplacement suivant X
w	Déplacement suivant Y ou bien la flèche
σ_x	Contrainte normal.
τ_{xz}	Contrainte de cisaillement
γ_{xz}	Déformation angulaire
h	Hauteur de la poutre
L	Longueur de la poutre
δ	Variation opérationnelle
δU	Variation de l'énergie de déformation interne de la poutre
δV	Variation de l'énergie de déformation due au chargement extérieure.

Liste des symboles

δT	Variation de l'énergie de déformation cinétique de la poutre
A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}	Coefficient de rigidités
M	Moment de flexion
Q_{11}, Q_{55}	Constantes de rigidité
ε_0	Déformation normale
U_m, W_m, Q_{xm}	Paramètres arbitraires
t	Temps
ω	Fréquence propre de la poutre
$I(x)$	Moment d'inertie de masse
φ_i, ψ_i	Les fonctions admissibles
$f(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)

Introduction générale

Les matériaux à gradient de propriétés (Functionally Graded Material "F.G.M"); initiés au Japon en 1984 durant un projet spatial sont utilisés comme des éléments structuraux dans l'industrie moderne comme (les structures aérospatiales). En raison de ses faibles contraintes de cisaillement transversales, haute résistance aux chocs de température et aucun problème d'interface entre les couches, les chercheurs ont examiné de manière approfondie les réponses statiques, vibratoire et de flambement de ces structures pendant la dernière décennie [Li, 2008, Simsek, 2010, Pradhan et Chakraverty, 2013 et Jing et al., 2016]. Cependant, les FGMs conventionnelles (ou 1D-FGM) dont les propriétés des matériaux varient dans un sens ne sont pas efficaces pour satisfaire les exigences techniques telles que la température et la distribution des contraintes dans différentes directions.

Cette inefficacité du FGM conventionnelle peut être éliminée en utilisant un nouveau type de FGM avec des propriétés matérielles variant dans les directions souhaitées. Les comportements mécaniques et thermiques des structures FGM bidirectionnel ont été étudiés par différents auteurs. La méthode de Galerkin sans élément est utilisée pour optimiser les fréquences propres des poutres bidirectionnelles en FGM par [Goupee et Vel, 2006]. Les déformations statiques et thermiques des FGMs bidirectionnel sont étudiées en employant la méthode de quadrature différentielle basée sur l'espace d'états pour obtenir une solution d'élasticité semi-analytiques [Lü et al., 2008]. Une solution d'élasticité symplectique pour les analyses de vibrations libres de 2D-FGM avec les propriétés du matériau variant suivant une loi exponentielle dans [Zhao et al., 2012]. Le comportement thermomécanique entièrement couplé des 2D-FGB est étudié à l'aide d'un modèle isogéométrique aux éléments finis dans [Nazargah, 2015]. La vibration libre et forcée de poutre en 2D-FGM de Timoshenko sous l'action d'une charge mobile est étudiée par [Simsek, 2015].

L'objectif du présent travail est d'étudier le comportement vibratoire d'une poutre en FGM bidirectionnelle.

Pour atteindre cet objectif, notre mémoire s'articule sur quatre chapitres. Le premier chapitre présente les matériaux fonctionnellement gradués, leurs propriétés, leurs principales méthodes de fabrication et leurs domaines d'application. Le deuxième chapitre est consacré pour la présentation des différentes théories de déformation des poutres, en commençant par les théories les plus anciennes telles que la théorie classique et la théorie du premier ordre, puis les plus utilisées et enfin les plus récentes.

Dans le troisième chapitre une formulation mathématique du problème de vibration libre des poutres FG bidirectionnelle en utilisant une théorie raffinée d'ordre élevée été développe. Les caractéristiques du matériau varient à travers l'épaisseur et la longueur de la poutre. Les équations de mouvement sont obtenues selon le principe d'Hamilton. Ces équations sont résolues par la solution de Navier.

Le quatrième chapitre détail les résultats obtenus pour l'analyse de vibrations libre des poutres rectangulaires simplement appuyées en 2D-FGM. Ce travail s'achèvera par une conclusion générale qui résumera l'ensemble des travaux et permet aussi de revenir sur les résultats importants mis en avant ainsi que des perspectives.

Chapitre 1. Généralité sur les matériaux à gradient de propriété

1.1 Introduction

La technologie moderne essaie à plusieurs fois de concevoir aux matériaux de construction une bonne rigidité, une haute résistance mécanique, une ténacité élevée et une grande légèreté. Dans ce même contexte l'ingénieur désire, dans un grand nombre de situation, concevoir des structures présentant un rapport performance /masse, le plus élevé possible. Pour atteindre ces performances, il recherche toujours des matériaux ayant des caractéristiques spécifiques élevées. Les matériaux répondant à ce critère tels que le verre, le carbonesont très fragiles, un petit défaut suffit pour amorcer la rupture totale de la structure. Pour pouvoir réaliser des structures suffisamment tolérantes aux dommages, il est nécessaire d'utiliser des matériaux renforcés par des fibres qui sont liées entre elles par une résine. Aucun matériau classique ne permet de combiner ces caractéristiques d'où la nécessité de l'utilisation des matériaux composites.

Les matériaux à des gradients évalués FGM représentent un des derniers développements, la révolution et la conception de ces matériaux a été définit au 21ème siècle. Ils sont utilisés pour des emplois à une large variété d'applications.

Les matériaux composites multicouches sont largement utilisés dans diverses structures d'ingénierie grâce à leurs performances dominantes. Par exemple, une couche élastique homogène en céramique peut être collée sur la surface d'une structure métallique et agit en tant que barrière thermique dans un environnement à hautes températures. Cependant, en raison d'une interface distincte entre les deux matériaux (céramique et métallique), les propriétés matérielles à travers l'interface subissent un changement soudain, qui produit le saut d'effort et peut plus loin provoquer le décollement ou la rupture de l'interface.

Une solution envisageable pour ce problème est l'utilisation de matériaux à gradient de propriété FGM (Functionally Graded Materials) pour lesquels des propriétés matérielles, tel que module de Young, masse volumique et coefficient de poisson varient continuellement, conférant un avantage considérable par rapport aux matériaux homogènes et feuilletés dans le maintien de l'intégrité de la structure. Un tel fonctionnement leur permet d'être fabriqués comme des structures différentes dans l'accord aux exigences de services divers.

1.2 Définition et le concept d'un matériau à gradient de propriétés :

Un matériau à gradient de propriétés c'est un type de matériaux composites composé de deux ou plusieurs matériaux relatif a des fractions volumiques et microstructure qui sont conçus pour avoir une continuité spatiale des variables. Un FGM est produit en changeant sans interruption les fractions de volume dans la direction d'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminé.

Ces matériaux FGM sont généralement fait à partir d'un mélange de métaux et de céramique (figure 1.1) par un processus de métallurgie de poudre, le coté métal riche est typiquement placé dans les régions ou les propriétés mécaniques, comme la dureté, le besoin d'être élevés. En revanche, le céramique riche, ce qui a la conductivité faible et peut résister aux températures plus élevées, est place dans les régions de grands gradient de la température.

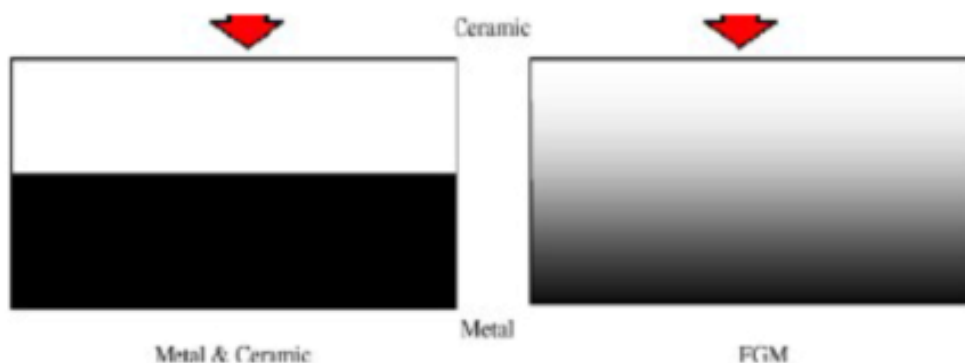


Figure (1.1) Un type d'un matériau FGM en céramique et métal.

Le concept de matériaux à gradient de propriétés a été développé dans le laboratoire national d'aérospatial en 1984 par un groupe de scientifiques au Japon (M. Niino et ses collègues à Sendai). L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique

dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion un exemple d'un tel matériau est montré sur la (figure .1.3) [Yin et al., 2004] ou des particules sphériques ou presque sphérique.

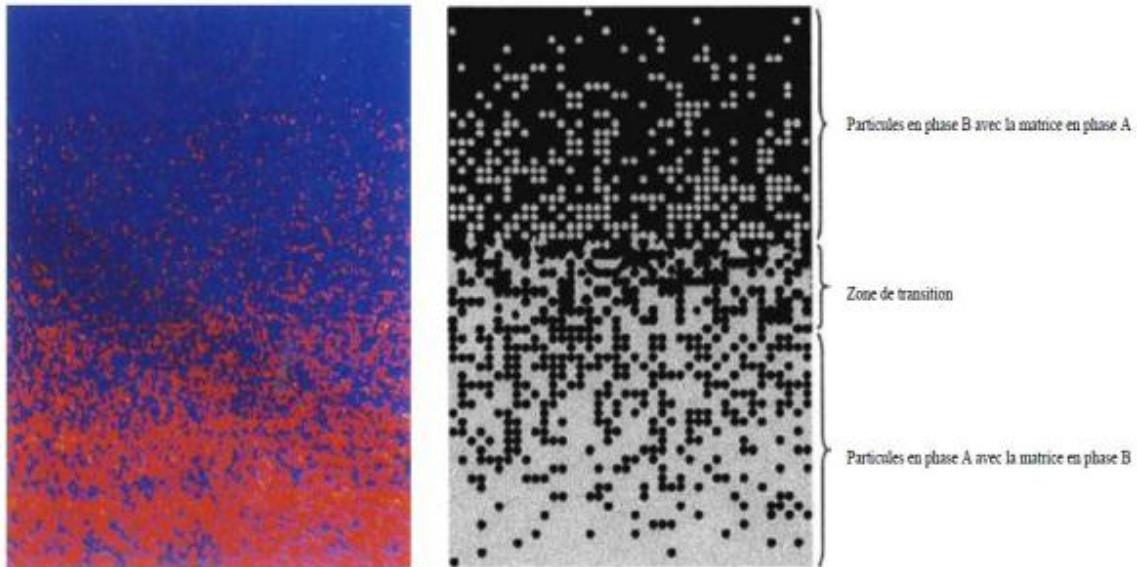


Figure (1.2) *Un FGM avec les fractions de volume de phases constitutives graduées dans la direction verticale [Yin et al., 2004]*

Les FGM peuvent être utilisés pour différentes applications, telles que couches en céramique comme barrières thermiques pour les moteurs, turbines à gaz, couches minces enoptiques, etc... D'autres Applications potentielles de ce matériau sont diverses et nombreuses. Elles ont été, récemment, rapporté dans la littérature ouverte ; par exemple, des sondes, des déclencheurs, des armures métal/céramique, des détecteurs photoélectriques et des implants dentaires.

Un certain nombre de revues traitant les différents aspects de ce matériau ont été édités pendant les deux dernières décennies [Markworth et al 1995]. Il a été montré dans ces revues que la majorité des recherches récentes en FGM sont concentrés sur l'analyse mécanique de la rupture ainsi que sur les contraintes thermiques.



Figure (1.3) *Implant dentaire en FGM (Ti/20HAP). Aspect externe (gauche) et section transversale (droite).*

Un aperçu complet sur l'analyse de la flexion, du flambement et de la vibration des plaques et des structures en coques faites en FGM a été présenté par Shen [Shen H et al 2004]

Récemment, Birman et Byrd ont présentés une étude sur les principaux développements dans ces matériaux en traitant plusieurs problèmes à savoir : le transfert de chaleur, la distribution des contraintes, la stabilité, l'analyse dynamique, les essais, la fabrication et la conception, la rupture et les différentes applications du matériau à gradient de propriétés.

1.3 Aperçu historique sur le développement architectural du concept FGM:

Généralement, les F.G.M sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes.

L'amélioration des performances des pièces structurelles peut conduire à rechercher au sein d'un même matériau, des propriétés différentes, souvent antagonistes, mais localement optimisées. Le développement des matériaux composites a permis d'associer des propriétés spécifiques à différents matériaux au sein d'une même pièce.

L'optimisation locale de ces propriétés, par association d'un matériau de haute dureté

à la surface d'un matériau tenace par exemple, pose alors le problème de l'interface. Par exemple, une couche d'un matériau céramique peut coller à la surface d'une structure métallique pour former un revêtement barrière thermique dans les applications à haute température, la transition brusque dans les propriétés des matériaux à travers l'interface entre les matériaux discrets peuvent entraîner une grande contrainte inter laminaire ou une forte concentration de contraintes qui conduit à la déformation plastique ou de fissuration, Une façon pour surmonter ces effets nuisibles on doit employer un matériau à gradient de propriétés «FGM».

Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue les F.G.M des matériaux composites conventionnels comme c'est illustré dans la (Figure.1.4). En résulte un gradient qui déterminera les propriétés matérielles des FGM. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente [Boch. P et al 1986]. Le concept FGM peut être appliqué dans divers domaines pour des usages structuraux et fonctionnels. Au Japon, plusieurs programmes de cinq ans ont été conduits au cours des années 80 et 90 afin de développer l'architecture des FGM, et d'étudier également ces matériaux pour les applications de hautes températures (par exemple, éléments pour navettes spatial hypersonique) ainsi que pour des applications fonctionnelles (par exemple, convertisseurs thermoélectriques et thermo-ioniques). Ces programmes ont conduit au développement de la conception architecturale du FGM et de ces perspectives.

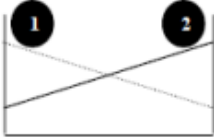

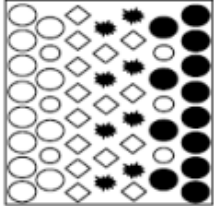
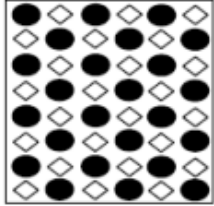
Propriétés	<p>1 Résistance mécanique</p> <p>2 Conductivité thermique</p>		
Structure	<p>Eléments constitutants:</p> <p>céramique ●</p> <p>métal ○</p> <p>microporosité ◊</p> <p>fibres *</p>		
Matériaux	exemple	FGM	NON-FGM

Figure (1.4) *Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels.*

Ces dernières années, les matériaux à gradients de propriétés ont été développés pour leurs excellentes propriétés mécaniques. Ces matériaux ont de grande performance et capables de résister aux températures ultra hautes. Un groupe de scientifiques, à Sendai (japon) a proposé pour la première fois le concept FGM en 1984, comme étant un nouveau matériau avec une barrière thermique ou des propriétés calorifuge (isolation thermique). Au début, les FGM ont été conçus en tant que matériaux thermiques de barrières dans les applications aéronautiques et les réacteurs.

C'est par la suite que les FGM ont été développé dans le domaine militaire, l'automobile, le biomédicale, l'industrie de semi-conducteur et toutes utilisations dans un environnement à hautes températures.

1.4 Pour des utilisations structurales (intégration du caractère réfractaire) :

La véritable lancée de ce matériau à commencer en 1987. À cette époque-là, le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet intitulé « étude fondamentale de la relaxation des contraintes thermiques des matériaux à hautes températures en utilisant des structures graduées » pour un budget total de 1.215 millions de Yens sous l'auspice de l'agence des sciences et technologie. L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des

structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux. Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux travaillent à des températures de surface de 1800°C ainsi qu'à un gradient de température de l'ordre de 1300°C.

A cette année-là, aucun matériau industriel n'était connu pour supporter de telles sollicitations thermomécaniques. Trente organisations de recherches entre instituts, universités et compagnies nationales ont participé au programme en tant que membres des trois importants ateliers « conception, traitement et évaluation ». Le souci était de développer l'architecture fondamentale des FGM ainsi que leurs applications.

Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux :

Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau;

Ténacité du matériau côté basse température;

Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau [AbdizadehH, 1997].

Pour répondre à un tel cahier des charges, l'idée originale des FGM a été proposée pour élaborer un nouveau composite profitant à la fois des propriétés des céramiques (côté hautes températures) et des métaux (côté basse température) (Figure. 1.4).

La (figure.1.5) montre les principaux résultats du programme de recherche. Par exemple, du côté de la conception et de la modélisation, ils ont développé un système de DAO utilisant un modèle de conception inverse qui peut donner une architecture de conception globale en choisissant des compositions et des microstructures tout en optimisant sur l'arrangement gradué. En vue d'une meilleure optimisation ils ont utilisé Des paramètres thermo-physiques mesurés ou calculés pour réduire au minimum la contrainte thermique sous les conditions des différents processus de fabrication ou de service. Une fonction aléatoire a été utilisée pour combiner différentes microstructures et propriétés. Ils ont établi une approche micromécanique pour corréler les microstructures graduées et leurs propriétés. Des théories fractales et de percolation ont été présentées pour l'analyse quantitative de la variation spatiale des microstructures graduées; la méthode FEM a été employée pour

modéliser la distribution des efforts internes.

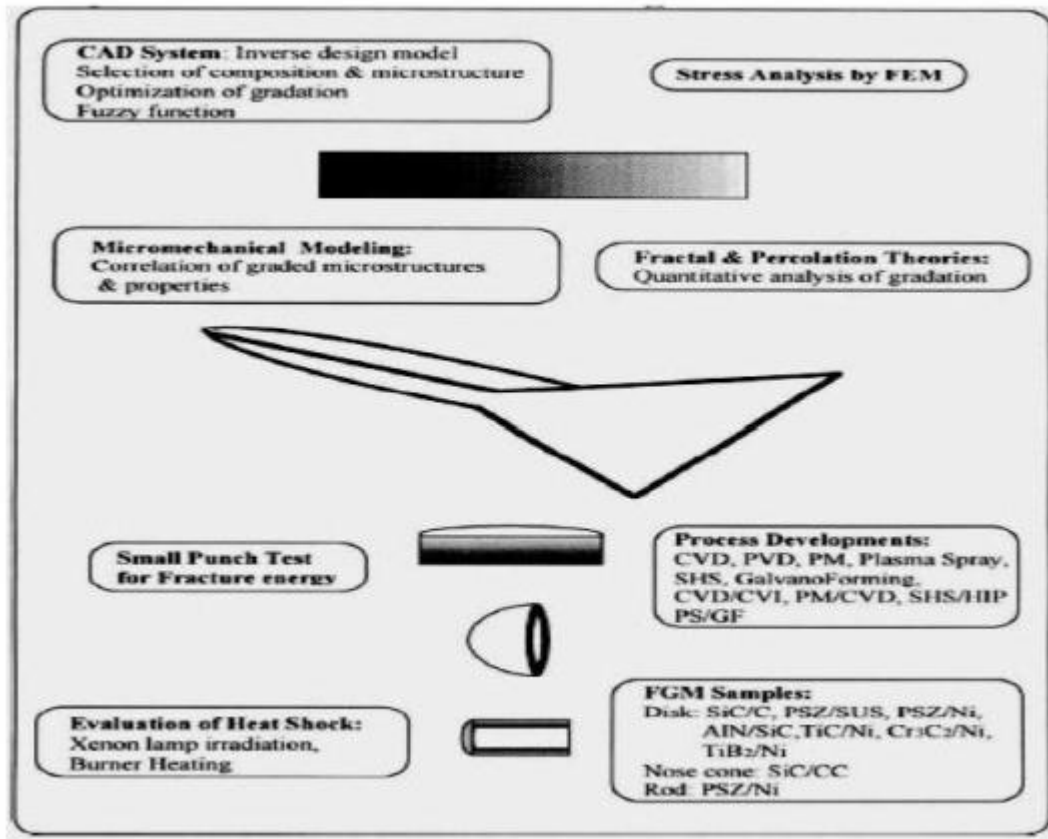


Figure (1.5) Résultats importants du programme de recherche de 1987-1991.

Cette première étape dure de 1987 à 1992 ; Plusieurs techniques ont été utilisées pour fabriquer les matériaux présentant un gradient de composition et de structure en site CVD,PVD, jet de plasma, poudre métallurgique, SHS et galvano formation. Les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000°K (température de surface)et à un gradient de température de 1000°K. Divers échantillons en FGM ont été fabriqués comme des disques en SiC/C, AlN/sic, PSZ /acier, PSZ/Ni, TiC/Ni, Cr3C2/Ni, TiB2/Cu ; des ogives en SiC/CC et des tiges de PSZ/Ni.

Un petit essai de poinçonnement a été conçu pour évaluer l'énergie à la rupture d'un disque mince en FGM. Deux méthodes ont été développées pour l'évaluation de la résistance au choc thermique jusqu'à 2000°K ; L'irradiation par une forte lampe en xénon et une

méthode basée sur le chauffage en utilisant un mélange de gaz d'oxygène/hydrogène comme flamme de brûleur. Les petites chambres de combustion pour des moteurs-fusées faites de SiC/CC par CVD/CVI et de ZrO₂/Ni par jet de plasma/galvano ont subi des essais de combustion au laboratoire aéronautique national.

Bien que ce programme ne soit pas prolongé au delà de la recherche fondamentale, il a établi l'orientation future pour continuer la recherche en FGM dans le monde entier. Plus tard le concept FGM a été appliqué dans plusieurs industries et même dans les productions en série. A nos jours, des outils de coupe de haute performance en TiCN/WC/Co, Ni et des lames de rasage faites de composés intermétalliques Al-Fe/ acier inoxydable ont été commercialisés. Cependant, d'autres applications commerciales sont encore limitées.

1.5 l'intérêt d'utiliser les FGM :

Il y a beaucoup d'intérêt pour la mise sur pied des structures ainsi les conditions fonctionnelles peuvent varier avec l'endroit. Dans la plupart des cas, ceci impliquera de varier les matériaux qui sont employés aux endroits spécifiques dans la structure ayant pour résultat les interfaces discrètes dans tout. A nous avons proposé des technologies manufacturières pour le traitement de FGM.

1.6 Différence entre FGM et les matériaux composites traditionnels :

Un modèle simple illustrant les différences entre les matériaux à gradient de propriétés (FGM) et les matériaux plus conventionnels est montré sur la Figure 1.6 (a) un matériau plan composé, (b) un matériau relié et (c) un matériau à gradient de propriété. Le matériau plan composé a une caractéristique plane, et le matériau relié a une frontière sur l'interface de deux matériaux. Les FGM ont de excellentes caractéristiques qui diffèrent de ceux des matériaux plans composés et reliés. Par conséquent, les FGM attirent l'attention en termes de leur application dans les domaines industriels. Puisque les FGM ont une double propriété des deux matières premières qui sont mélangées ensemble, et la distribution de la composition est graduée sans interruption.

Par exemple, l'un des FGM qui se composent du métal et en céramique a la caractéristique de la conductivité thermique et de la force métallique dans le côté en métal et la résistivité aux hautes températures dans le côté en céramique. [4]

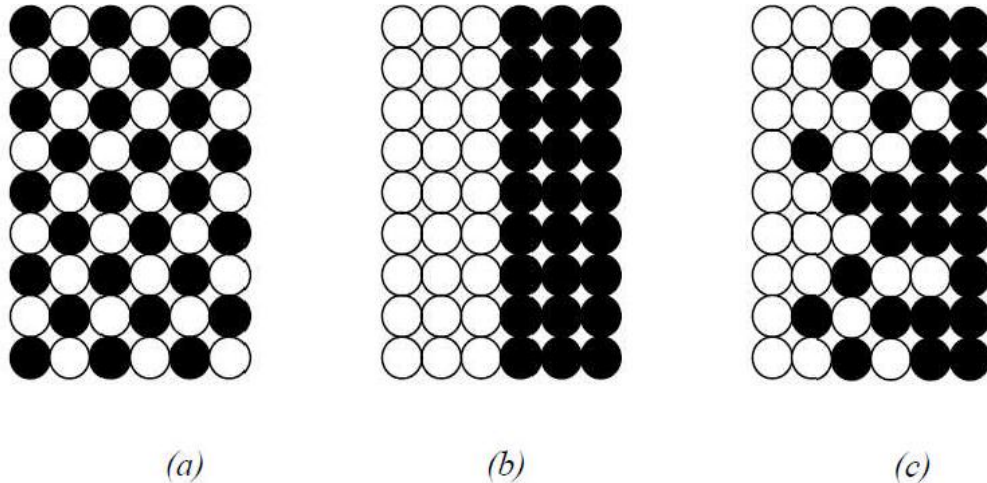


Figure (1.6) *La distribution composante des matériaux*

Matériau plan composé (a), Matériau relié (b), Matériau à gradient de propriété (c)

1.7 Propriétés matérielles effectives d'un matériau FGM :

Les matériaux à gradient de propriétés sont généralement fabriqués par deux phases matérielles avec des propriétés différentes. Une description détaillée des microstructures gradué réelles n'est pas disponible, excepté peut-être pour l'information sur la distribution de fraction volumique. Puisque la fraction de volume de chaque phase varie graduellement dans la direction de la graduation, les propriétés effectives des FGM changent le long de cette direction Par conséquent, nous avons deux approches possibles pour modéliser un FGM.

La première approche : une variation par tranche de fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée, et le FGM est pris pour être posé avec la même fraction de volume dans chaque région, c.-à-d., couches quasi homogènes de céramique-métal (figure1.7).

La deuxième approche : une variation continue de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée, et la fraction de volume en métal peut être représentée suivant une fonction dépendante de la coordonnée z (épaisseurs).

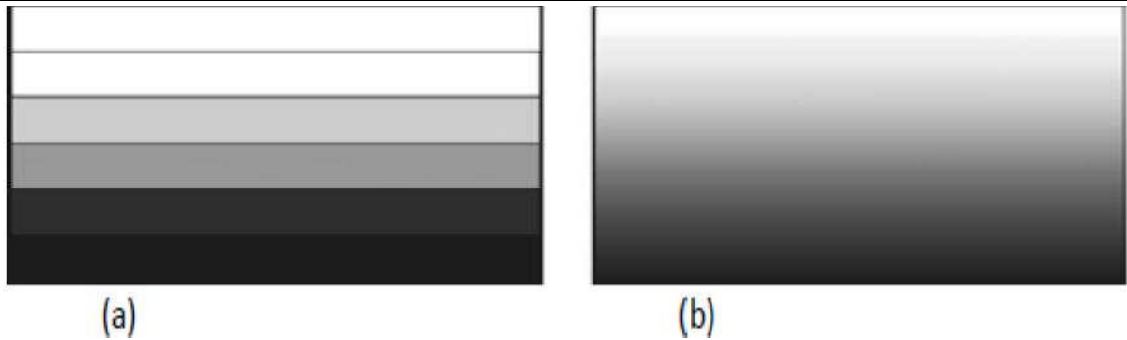


Figure (1.7) *Modèles analytiques de plusieurs couches en FGM.*

La plupart des chercheurs emploient la fonction de loi de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume. . Par conséquent, on considère dans notre travail des plaques FGM avec des variations de la fraction de volume qui suit des fonctions de la loi de puissance.

1.8 Méthodes d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés:

Le processus de fabrication des matériaux à gradient de propriétés peut être établi en divisant la structure dans l'espace non homogène « gradation » et la transformation de cette structure en matériau en bloc « consolidation ». Il existe de nombreux procédés d'élaboration des FGM, les paragraphes suivants s'attachent à décrire les principales méthodes d'élaboration des FGM utilisées dans l'industrie [Ait Atmane 2011].

1.8.1 Coulage en bande (Tape Casting ou Doctor-Blade) :

Le coulage en bande est une technique de mise en forme par voie liquide qui consiste à étaler une barbotine de poudres fines en suspension sur une surface plane en couches minces et régulières. L'étalement de la bande est obtenu par le mouvement relatif d'un réservoir ou sabot.

La suspension est ainsi laminée par son passage entre la lame du réservoir et le support (figure I.8), ce qui confère à la bande déposée une épaisseur uniforme sur toute sa longueur. La hauteur du couteau du réservoir par rapport au support détermine l'épaisseur de la bande.

Les produits obtenus sont des feuillets avec des épaisseurs contrôlées (25-1000 μm). Après un raffermissement de la pâte, les feuillets sont démoulés et ensuite découpés.

Le procédé de coulage en bande est largement utilisé pour réaliser des matériaux composites laminaires suivant deux méthodes : soit par réalisation directe de bandes multicouches grâce à un système de lames multiples, c'est le cas des tri-couches élaborés par Mistler ; soit par empilage de couches élaborées séparément, dont la cohésion est ensuite assurée par une étape de thermo-compression.

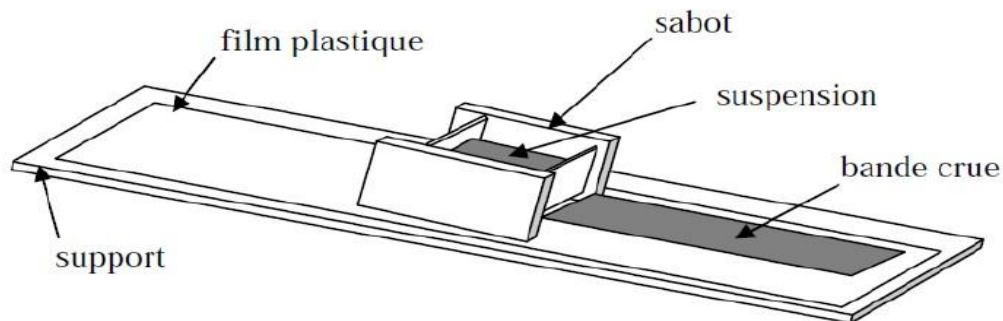


Figure (1.8) *Principe de la méthode coulage en bande [Boch. P et Al 1986].*

1.8.2 Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting) :

Le coulage en barbotine (slip casting) consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, laissant un tesson (couche de poudre compacte) sur la surface du moule. Après séchage, on obtient le corps en cru.

Donc le coulage se décompose en deux étapes essentielles:

- Formation du tesson ou "prise";
- Consolidation du tesson ou "raffermissement".

La filtration, c'est à dire la formation du tesson lors du coulage, peut être considéré comme un processus d'élimination d'une partie de l'eau de la barbotine; Cette eau migre à travers la couche de tesson déjà formée, sous l'effet:

- Du pouvoir de succion du plâtre (coulage classique);
- Ou d'une pression appliquée sur la barbotine (coulage sous pression).

Dans le cas de la fabrication de multicouches, après la formation du premier tesson, le dépôt de la deuxième couche s'effectue de manière telle que la barbotine ne pénètre pas dans le tesson formé. Ce procédé est successivement reproduit pour les autres couches.

1.8.3 Compaction sèche des Poudres :

Dans cette technique les poudres sont successivement versées dans un moule en acier. Chaque fois qu'une poudre est versée, une faible compression est exercée. Ensuite, la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Ce procédé est suivi, généralement, par une pression isostatique et un déliantage. La densification sera enfin l'étape finale.

Ce procédé peut être envisagé pour la fabrication de pièces de formes complexes. En effet il s'applique aussi avec la technique du pressage isostatique de façon industrielle.

1.8.4 Projection plasma :

Un gaz soumis à une forte température (par exemple celle d'un arc électrique), se transforme en un état ionisé (plasma). Cette transformation est accompagnée d'un dégagement de chaleur important. Si une particule de céramique se trouve dans cet environnement, elle se fond totalement ou superficiellement, ce qui permet de la situer sur un substrat.

La projection plasma des particules des divers matériaux est devenue une méthode très utilisée pour fabriquer des FGM. L'équipement relativement simple, le rendement élevé du dépôt des particules sur des substrats à géométrie compliquée, les performances des surfaces en fonctionnement et la compatibilité des céramiques avec les métaux sont les avantages essentiels de cette technique.

1.8.5 Frittage et Infiltration

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes. La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute

température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique.

Cette technique peut être généralement appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns des autres.

1.8.6 Frittage Laser Différentiel :

Le rayonnement thermique du laser permet le contrôle de la température et la focalisation du point à chauffer. La différence de l'intensité de l'irradiation sur différents points du matériau, provoque un frittage différentiel le long de la pièce, ce qui résulte en des microstructures différentes, dépendant de la position du point irradié. Cette technique a été utilisée pour élaborer un FGM de PSZ/Mo. La (figure 1.9) montre schématiquement la disposition du procédé utilisé par ces auteurs.

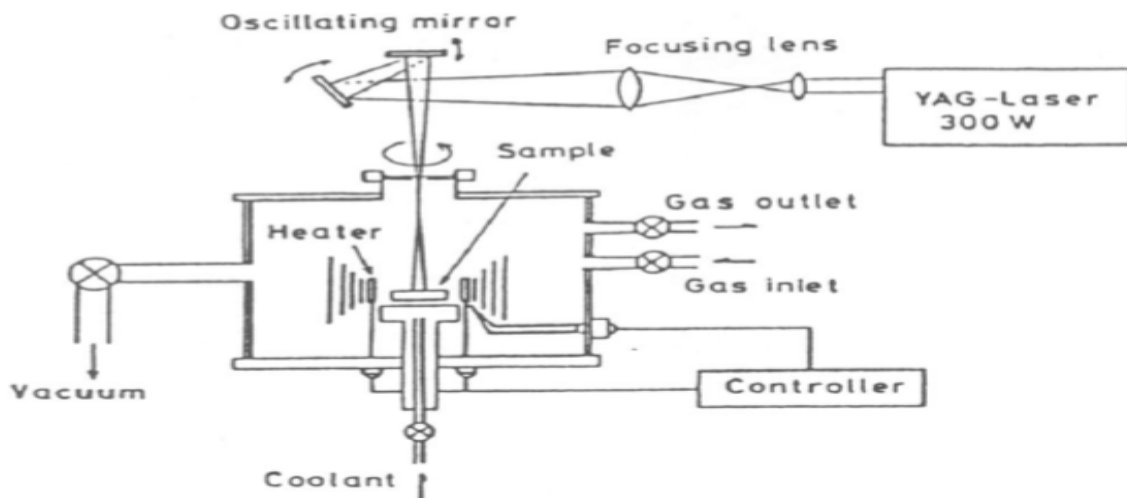


Figure (1.9) *Disposition du procédé frittage laser différentiel.*

1.8.7 Dépôt par Electrophorèse :

Le dépôt par électrophorèse est un procédé dans lequel une suspension colloïdale stable est placée dans une cellule contenant deux électrodes, le dépôt se fait par le mouvement des particules chargées au sein de la solution vers la cathode ou l'anode selon le signe de la

charge des particules due à un champ électrique. L'élaboration des FGM peut se faire donc par le dépôt séquentiel des matériaux.

1.8.8 C. V. D. et P. V. D :

Les dépôts chimique ou physique en phase vapeur sont des techniques dans lesquelles les atomes du matériau sont déposés sur la surface du substrat. Les techniques de C.V.D. et P. V. D. peuvent être utilisées pour façonner un F.G.M sur des substrats de formes compliquées.

1.8.9 Implantation Ionique (Sputtering):

C'est une technique avancée pour la fabrication des FGM permettant de réaliser seulement des épaisseurs fines ($<1\mu\text{m}$) sur différents substrats (plastiques, céramiques, et métaux). Le traitement s'effectue par les faisceaux énergétiques d'ions ou via des gaz réactifs. Les couches fabriquées présenteront un gradient de composition qui peut être très finement contrôlé.

1.8.10 Dépôt par Centrifugation:

La technique consiste à verser une suspension colloïdale relativement diluée dans des flacons cylindriques, le tout est soumis à une centrifugation. La sédimentation s'opère et le liquide surnageant est retiré. Ce procédé est répété pour obtenir des multicouches (Figure 1.10).

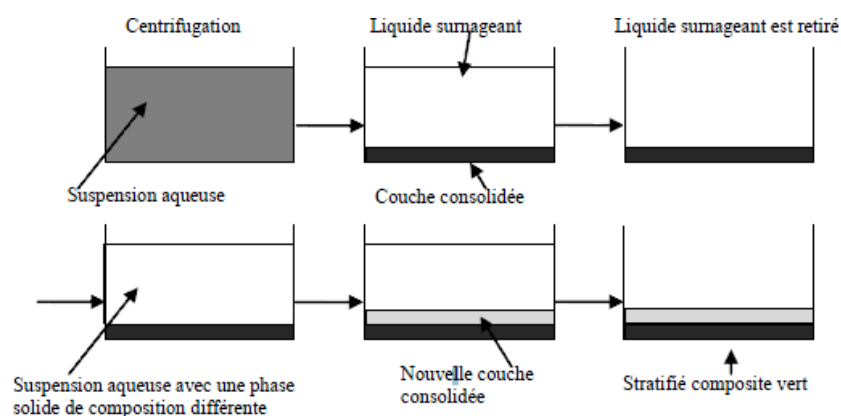


Figure (1.10) Schéma du procédé dépôt par centrifugation

1.8.11 Propriétés physiques et mécaniques des FGM :

Pour ce travail le matériau FGM choisi est (Aluminium-Céramique).

Propriétés physiques de l'aluminium.

a Définition :

L'Aluminium est un métal blanc qui après polissage peut devenir réfléchissant.

b Propriétés physiques :

L'Aluminium a une température de fusion relativement basse d'environ 660°. Il en résulte une facilité de fusion qui présente un avantage certain pour les opérations de fonderie. L'Aluminium est très ductile, on peut aisément le mettre en forme. La masse volumique de l'Aluminium est de 2700 kg/m³. L'utilisation de l'Aluminium s'impose donc dans les domaines aéronautiques et du transport.

c Propriétés mécaniques :

Les propriétés mécaniques des métaux présentent un grand intérêt dans la vie quotidienne, elles peuvent être classées en deux groupes :

Celles qui se rapportent à la résistance mécanique du métal :

Résistance à la traction

Résistance à la pénétration (dureté).

Celles qui concernent les modifications de forme que le métal peut subir sans se briser :

La malléabilité (mises en feuilles).

La ductilité (mise en fils).

Propriétés des alliages d'aluminium : L'Aluminium a pour propriétés une :

Température de travail élevée.

Très bonne résistance à la corrosion.

Légèreté.

Très bonnes solidités, dureté et rigidité.

Bon rapport force/poids.

Bonnes propriétés de protection contre les interférences électromagnétiques.

Bonne conductivité thermique.

Conductivité électrique élevée.

Bonnes caractéristiques de finition.

Entièrement recyclable.

Résistance à la corrosion : Grâce à la couche d'oxyde qui se forme en surface, les alliages d'Aluminium résistent à la corrosion. On peut rendre cette couche protectrice d'oxyde plus épaisse par galvanisation. L'Aluminium et ses alliages peuvent être utilisés sans protection supplémentaire comme revêtement extérieur de bâtiments. Par contre dans les milieux corrosifs, les alliages d'Aluminium peuvent subir les effets de la corrosion. Des piqures, de la corrosion sous contrainte, de la fatigue corrosion, voire de la corrosion généralisée peuvent se développer. Pour des conditions données, la sévérité de l'attaque dépend de l'alliage utilisé et de son état.

1.9 Propriétés physiques de la céramique :

a Définition :

La céramique résulte des terres et des roches broyées (matériaux géologiques) ou bien d'une argile qui sera modelée puis cuite sous haute température (transformation irréversible) ce qui fait perdre au matériau sa plasticité donc il ne peut plus se réhydrater.

b Propriétés physiques :

La céramique a une facilité de fusion qui présente un avantage certain pour les opérations de fonderie. La masse volumique de la céramique est de 3800 kg/m³. L'utilisation de la céramique s'impose dans les domaines de l'habitat et du design, l'industrie céramique et métallurgique, aéronautique et spatial, médicale et dans les revêtements.

c Propriétés mécaniques :

Les propriétés mécaniques du céramique dépendent des :

Matières première employées.

Méthodes de fabrication qui fixent les microstructures finales et déterminent la répartition des différentes phases en présence.

d Propriétés des céramiques :

Les propriétés de la céramique sont :

Un module de YOUNG élevé (Liaisons, covalente, ioniques).

Une dureté élevée (Abrasif, outils de coupe, surfaces de frottement qui doivent résister à l'usure, résistance mécanique élevée, bonne tenue à chaud, rigidité élevée).

Une très bonne résistance à la compression non à la traction (Résistance à la compression = 200 MPa).

1.10. Propriétés matérielles effectives d'un matériau FGM :

Les matériaux à gradient de propriétés sont généralement fabriqués par deux phases matérielles avec des propriétés différentes. Une description détaillée des microstructures graduée réelles n'est pas disponible, excepté peut-être pour l'information sur la distribution de fraction volumique. Puisque la fraction de volume de chaque phase varie graduellement dans la direction de la graduation, les propriétés effectives des FGM changent le long de cette direction.

1.11 Propriétés matérielles de la poutre P-FGM :

La fraction volumique dans les P-FGM est assurée par une loi de puissance sous la forme:

$$g(z) = \left(\frac{z + \frac{h}{2}}{h} \right)^p \quad (1.1)$$

Où p est un paramètre du matériau et h est l'épaisseur de la poutre. Une fois que la fraction de volume local $g(z)$ est définie, les propriétés matérielles d'une poutre P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges :

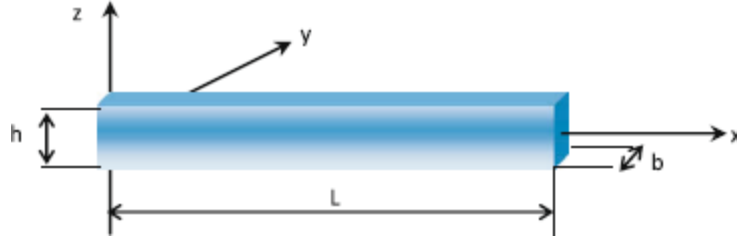


Figure (1.11) Dimensions de la poutre FGM

Où E_1 et E_2 et sont respectivement les propriétés matérielles (modules de Young ou densité) de la surface inférieure ($z = -h/2$) et de la surface supérieure ($z = h/2$) de la poutre FGM. La variation de ces propriétés dans la direction de l'épaisseur de la poutre P-FGM est représentée sur la figure 1.11, il apparaît clairement que le module de Young par exemple change rapidement près de la surface inférieure pour $p > 1$, et augmente rapidement près de la surface supérieure pour $p < 1$. Pour une résolution numérique, par éléments finis par exemples, Les propriétés matérielles effectives E de la couche de FGM, comme le module de Young E , et la densité et le coefficient de poisson ν peut alors être exprimé comme suit :

$$E = \sum_{j=1} E_j g_j \quad (1.2)$$

Là où E_j et g_j sont les propriétés matérielles et la fraction volumique de la couche jj (Figure. 1.12), et la somme des fractions de volume de tous les matériaux constitutifs fait l'unité :

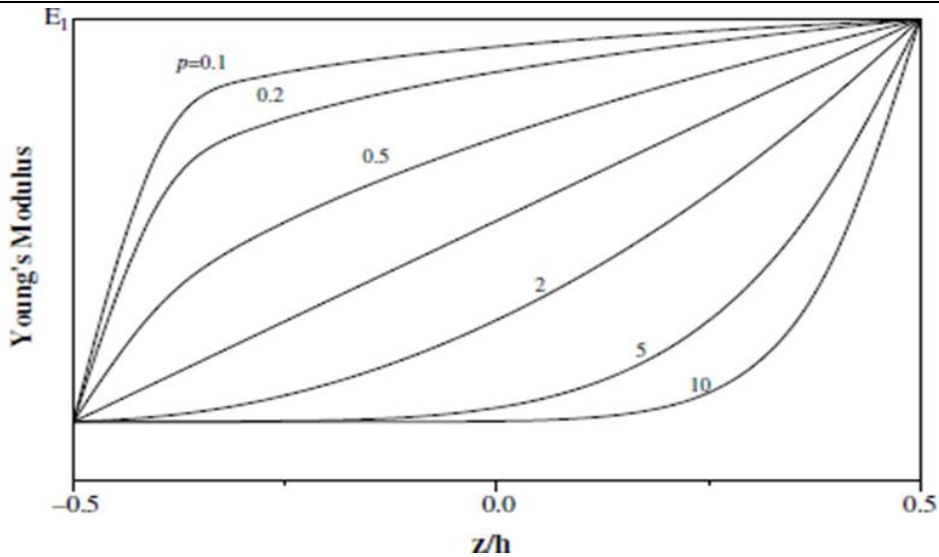


Figure (1.12) Variation du module de Young dans une plaque P-FGM

1.12 Propriétés matérielles de la poutre S-FGM :

Si l'on rajoute une poutre P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une poutre composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interface des deux matériaux. Par conséquent, Chung et chi ont défini la fraction de volume de la poutre FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces.

Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par:

$$g_1(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - z}{h/2} \right)^p \quad \text{pour : } 0 \leq z \leq h/2 \quad (1.3)$$

$$g_2(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 + z}{h/2} \right)^p \quad \text{pour : } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (1.4)$$

En utilisant la loi des mélanges, la propriété S de la poutre S-FGM peut être calculé par :

$$S(z) = g_1(z)S_1 + [1 - g_1(z)]S_2 \text{ pour: } 0 \leq z \leq h/2 \quad (1.5)$$

$$S(z) = g_2(z)S_1 + [1 - g_2(z)]S_2 \text{ pour: } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (1.6)$$

La figure montre que la variation du module de Young selon les équations avec des distributions sigmoïdes, donc la poutre FGM est ainsi appelée (poutre S-FGM).

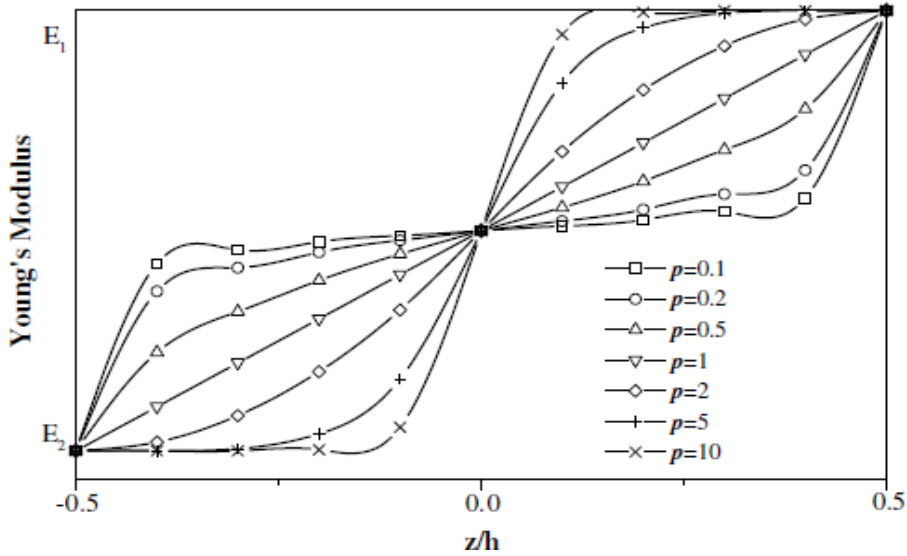


Figure (1.13) Variation du module de Young dans une poutre S-FGM

1.13 Propriétés matérielles de la poutre E-FGM :

Beaucoup de chercheurs utilisent la fonction exponentielle pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la fonction exponentielle est donnée par [Delale 1983] :

$$E(z) = Ae^{\beta(z+\frac{h}{2})} \quad (1.7)$$

Avec :

$$A = E_2 \text{ et: } \beta = \frac{1}{h} \ln \frac{E_1}{E_2}$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans la figure(1.14).

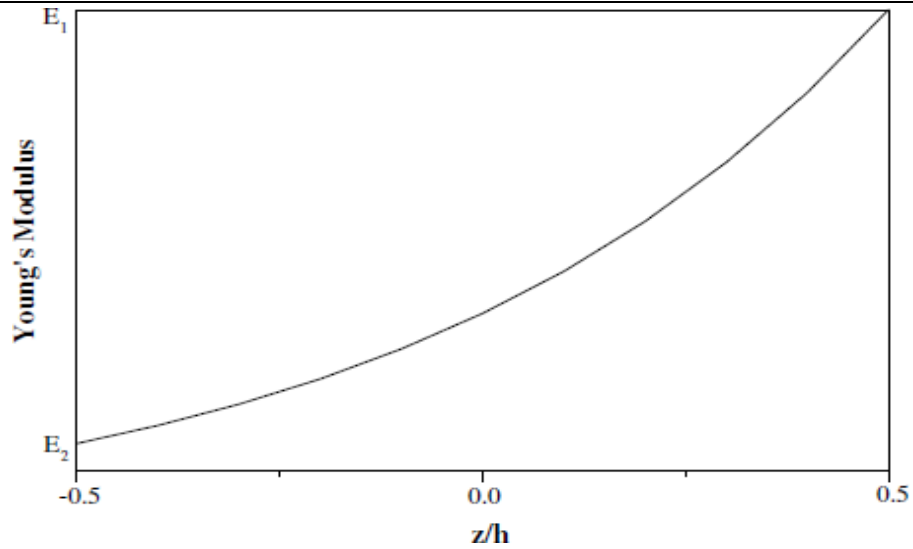


Figure (1.14) Variation du module de Young de la poutre E-FGM

1.14 Propriétés matérielles de la poutre bidirectionnelle P-FGM :

La fraction volumique dans les P-FGM bidirectionnelles est assurée par une loi de puissance sous la forme:

$$V(x, z) = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h}\right)^{k_z} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{l}{x}\right)^{k_x} \quad (1.8)$$

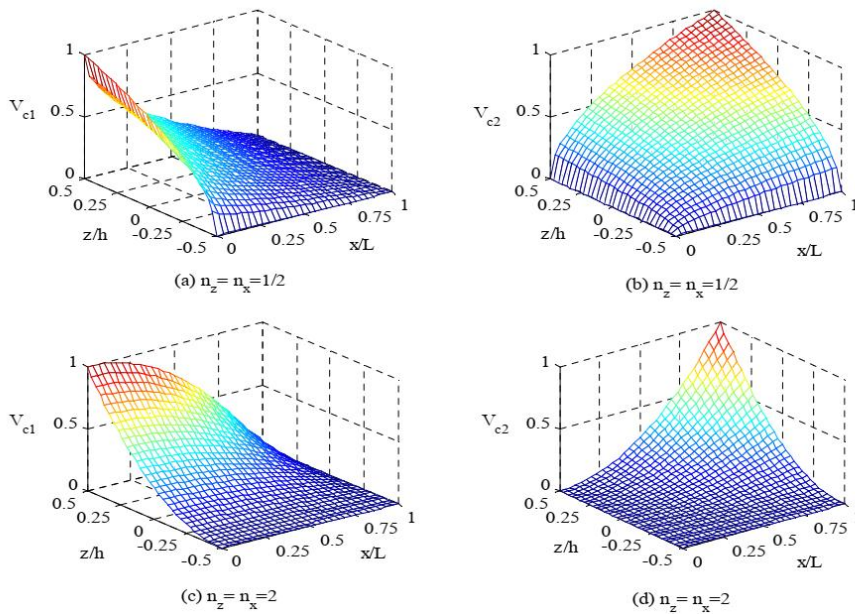


Figure (1.15) Variation de [a] fraction volumique de la poutre 2D-FGM

1.15 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous nous sommes attachés à présenter et à définir la notion d'un matériau FGM. Dans un premier temps, nous avons présenté l'historique de la fabrication des FGM dont les premiers pas de la naissance du FGM. Après nous avons cités les propriétés matérielles effectives d'un matériau FGM, et à la fin nous avons terminés par les différentes lois possibles qui servent à décrire la variation des propriétés matérielles du matériau FGM (module de Young, masse volumique et coefficient de poisson) suivant l'épaisseur d'une poutre, ces lois peuvent être de puissances, exponentielles ou même sigmoïde. Le chapitre suivant va porter sur les différentes théories des poutres.

Chapitre 2. Théories des poutres

2.1 Introduction :

Le terme « poutre » désigne un objet dont la longueur est grande comparée aux dimensions transverses (section fine). Une poutre est un élément de structure utilisée dans la construction des bâtiments, des navires, autres véhicules et dans la fabrication de machines. Cependant, le modèle des poutres peut être utilisé pour des pièces très diverses à condition qu'elles respectent certaines normes.

2.2 Historique des théories des poutres :

La paternité de la théorie des poutres est attribuée à Galilée, mais des études récentes indiquent que Léonard De Vinci l'aurait précédé. De Vinci avait supposé que la déformation varie de manière linéaire en s'éloignant de la surface neutre, mais il ne pût finaliser ses calculs car il ne connaissait pas la loi de Hooke. De son côté, Galilée était parti sur une hypothèse incorrecte (il supposait que la contrainte était répartie uniformément en flexion), et c'est Antoine Parent qui obtint la distribution correcte. Ce sont Leonard Euler et Jacques Bernoulli qui émirent la première théorie utile vers les années 1750, alors que Daniel Bernoulli, le neveu du précédent, écrivit l'équation différentielle pour l'analyse vibratoire. À cette époque, le génie mécanique n'était pas reconnu comme une science, et on ne considérait pas que les travaux d'une académie des mathématiques puissent avoir des applications pratiques, et on continua à bâtir les ponts et les bâtiments de manière empirique. Ce n'est qu'au XIXe siècle, avec la Tour Eiffel et les grandes roues, qu'on démontra la validité de la théorie à grande échelle.

2.3 Le comportement des poutres composites :

L'analyse d'une structure composite est plus complexe que celle d'une structure en matériaux traditionnels, métalliques par exemple [Timoshenko et al 1970]. Cela est dû au caractère hautement anisotrope des propriétés mécaniques du matériau de base, tant sur les plans raideur que résistance, et qui sont concentrées dans la direction des fibres. L'importance

de développer une analyse sur le comportement des poutres est liée d'une part à l'utilisation des poutres comme éléments de base dans la réalisation des structures, d'autre part à la caractérisation des propriétés mécaniques des matériaux composites et ceci à partir des différents essais réalisés sur des éprouvettes en forme de poutres.

2.4 Les différents types de poutres :

La poutre est l'élément structural le plus répandu, puisqu'elle fait partie intégrante de la plupart des ouvrages de construction ou des pièces machines. En réaction aux charges appliquées, des forces et des moments internes se développent dans la poutre pour maintenir l'équilibre.

2.4.1 Poutre simple :

C'est une poutre reposant sur deux supports ; l'appui double et l'appui simple. Les points d'appui sont articulés de façon à ce que les extrémités puissent se mouvoir librement pendant la flexion.

2.4.2 Poutre console :

C'est une poutre encastrée dans un mur à une extrémité. L'extrémité encastrée ne bouge pas pendant la flexion, tandis que l'autre extrémité est entièrement libre. On appelle aussi cette poutre, poutre en porte-à-faux ou poutre encastrée à une extrémité.

2.4.3 Poutre avec porte-à-faux :

C'est une poutre sur deux appuis (un simple et l'autre double), elle a une ou deux extrémités qui dépassent de façon appréciable les appuis (porte-à-faux). Les poutres sont classées suivant leurs appuis. Ces trois précédents types de poutres entrent dans la catégorie des poutres statiquement déterminées (poutre isostatique), parce qu'elles possèdent trois inconnues reliées aux trois degrés de liberté et par le fait même des équations d'équilibre.

2.4.4 Poutre continue :

C'est une poutre supportée par l'un des deux supports, c'est donc une poutre en

équilibre hyperstatique

2.4.5 Poutre à double encastrement :

C'est une poutre supportée par deux encastrements, elle est donc une poutre en équilibre hyperstatique.

2.4.6 Poutre supportée à double encastrement :

C'est une poutre supportée par deux encastrements ayant un ou plusieurs supports. C'est donc une poutre en équilibre hyperstatique. Elle a plus de fixation ou support que nécessaire. Cependant, ces supports augmentent la capacité portante de la poutre mais les équations de la statique ne suffisent pas à analyser ces poutres. On aura donc recours à différentes méthodes.

2.5 Les différentes théories des poutres:

Les théories de poutres [Sellai 2011] impliquent essentiellement la réduction d'un problème en trois dimensions de la théorie de l'élasticité à un problème unidimensionnel. Elles s'appliquent sur des solides élancés [les prismes dont la longueur vaut 10 fois la plus grande dimension transversale]. Là où la détermination de la solution exacte pour les champs de contrainte et de déformation n'est pas possible, elle permet d'obtenir une solution approchée, qui donne une bonne idée sur les efforts et les déplacements.

2.5.1 Modèle d'Euler Bernoulli (Classical Beam Theory- CBT) :

Il est bien connu que la théorie d'Euler-Bernoulli est basée sur la théorie élémentaire de flexion des poutres qui ne tient pas compte des effets de la déformation de cisaillement. Il est également connu qu'elle n'est applicable qu'aux poutres fines.

Dans cette approche, le nombre d'équations ne dépend pas du nombre de couches puisque la poutre multicouche est homogénéisée, donc considérée comme une seule couche. Comme hypothèse de cette théorie, les déformations dues au cisaillement transversal sont négligées (pas de cisaillement sur la hauteur de la poutre), La section reste perpendiculaire à

la ligne moyenne de la poutre et la section reste plane. La fonction qui décrit la répartition de déplacement suivant l'épaisseur de la poutre est :

$$\phi(z) = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (2.1)$$

Pour le cas des poutres élancées et d'après la théorie classique des poutres, le déplacement d'un point M est donné par les deux composantes suivantes:

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u_0 - z u_{0,x}(x) \\ w(x, z) = w_0 \end{cases} \quad (2.2)$$

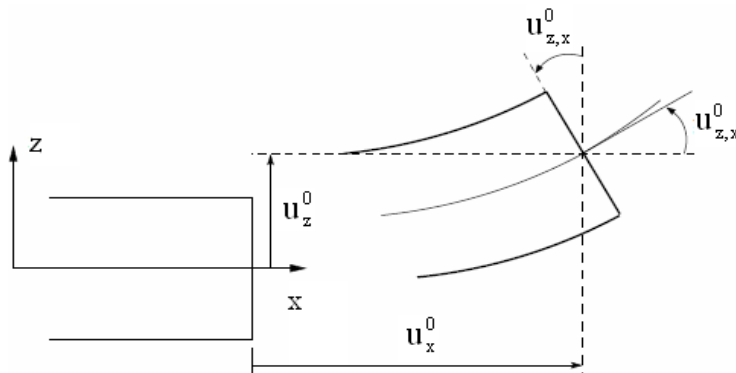


Figure (2.1) Cinématique d'Euler Bernoulli.

$u(x, z)$: C'est le déplacement suivant X et $w(x, z)$ est le déplacement dans la direction de Z ou bien la flèche.

La rotation autour de l'axe Y, provoquée par la flexion est tel que :

$$w_{0,x}(x) = \frac{\partial w_0}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (2.3)$$

$u_0(x)$ et $w_0(x)$ sont les composantes de déplacement au milieu de la section et sur la ligne moyenne de la poutre, respectivement le long des axes X et Z.

Lorsque cette théorie est utilisée pour l'analyse des fréquences naturelles des poutres,

les flèches sont sous-estimées. Ceci est la conséquence de négliger la déformation de transversal.

2.5.2 Modèle de Timoshenko (FSDBT) :

La théorie de Timoshenko est plus riche et plus générale que la théorie élémentaire des poutres au prix d'une fonction supplémentaire. Cette solution permet d'affiner les solutions analytiques issues de la théorie classique. Toutefois ces solutions sont entachées d'erreurs au voisinage des appuis et de la zone indentation où nous pouvons avoir des concentrations de contrainte et des champs de déplacement non homogènes.

Elle s'applique sur des poutres courtes, elle est basée sur le principe ; qu'après déformation, la section plane reste plane mais elle perd sa perpendicularité par rapport à la ligne moyenne de la poutre (Figure 2.2). Ceci est dû au cisaillement transversal, découvert par Timoshenko, sur l'épaisseur de la poutre. Cette théorie est analogue à la théorie de "Reissner-Mindlin" dans le cas des plaques épaisses. Dans le cas où nous avons un élancement faible, l'effet du cisaillement devient plus important sur la déformée. Dans ce cas, la fonction $\phi(z)$ est égale à Z . Il existe un cisaillement uniforme et les déformations dues au cisaillement transversal ne sont pas négligées. C'est la théorie de premier ordre (FSDBT).

Le déplacement d'après Timoshenko s'écrit comme suit :

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u_0(x) - w_0, x(x) + z\gamma_{xz}^0(x) \\ w(x, z) = w_0(x) \end{cases} \quad (2.4)$$

γ_{xz}^0 , c'est la distorsion ou la déformation angulaire mesurée sur la ligne moyenne de la poutre.

Tel que :

$$\gamma_{xz}^0 = w_x^0(x) - \phi^0(x) \quad (2.5)$$

$\phi^0(x)$, Etant la rotation totale de la section mesurée sur la ligne moyenne de la poutre.

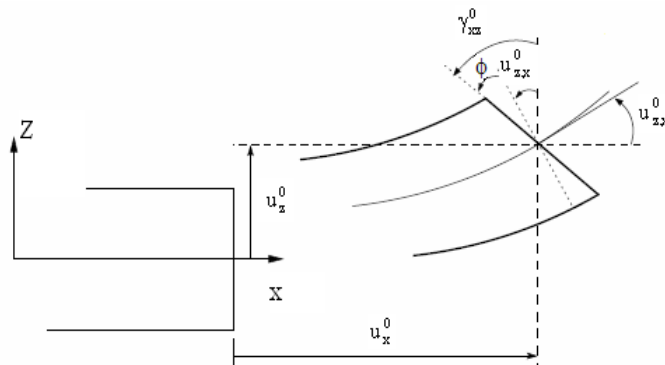


Figure (2.2) *Cinématique de Timoshenko.*

Par définition, la distorsion est donnée par la relation suivante :

$$\gamma_{xz}(x) = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -w_{0,x}(x) + \gamma_{xz}^0(x) + w_{0,x}(x) \quad (2.6)$$

Sachant que la contrainte de cisaillement est égale :

$$\tau_{xz} = G_{xz} \gamma_{xz} = G_{xz} \gamma_{xz}^0 \quad (2.7)$$

G_{xz} , est le module de cisaillement transversal qui est supposé constant

Avec cette théorie, les contraintes tangentielles de cisaillement sont constantes et uniformes sur toute l'épaisseur de la poutre ; cela veut dire qu'elles existent même sur les bords supérieurs et inférieurs de la poutre et pourtant il n'y a aucun chargement qui induit le cisaillement.

Cette contradiction mène à introduire des coefficients pour corriger et maintenir les contraintes et les déformations du cisaillement transversales constantes à travers l'épaisseur de la poutre. Ce facteur a été calculé pour la variété de sections de poutres. Cowper et Murtyont ont donné de nouvelles expressions de ce coefficient pour différentes sections de la poutre. La théorie de Timoshenko est plus riche et plus générale que la théorie élémentaire

des poutres au prix d'une fonction supplémentaire. Cette solution permet d'affiner les solutions analytiques. Bien qu'issues de la théorie classique, ces solutions sont toutefois entachées d'erreurs au voisinage des appuis et de la zone indentation où nous pouvons avoir des concentrations de contrainte et des champs de déplacement non homogènes.

Les non nullité des contraintes tangentielles sur les bords extrêmes de la poutre et l'introduction des coefficients de correction de cisaillement ont menés d'autres chercheurs à essayer de trouver une autre théorie pouvant tenir compte de ces facteurs ; c'est "la théorie d'ordre élevé".

2.5.3 Théorie d'Ordre Elevé :

Dans cette théorie la distribution des champs de déplacement est non linéaire selon l'épaisseur de la poutre. Elle est plus précise que la théorie du premier ordre puisqu'elle introduit une fonction qui tient compte du phénomène de "gauchissement". Ce phénomène apparaît lorsque la section transversale de la poutre perd sa planéité (figure 2.3). La fonction $\theta^0(x)$ représente le gauchissement et sa dérivée $\phi'(x)$ représente le cisaillement.

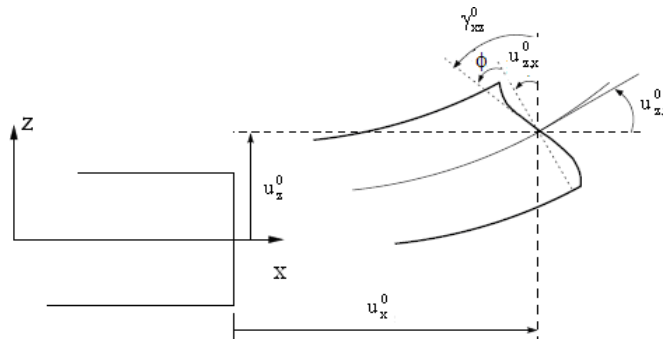


Figure (2.3) Cinématique de la Théorie d'Ordre Elevé.

Dans ce cas, le champ de déplacement devient :

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u_0(x) - z w_0, x(x) + \phi(z) \gamma_{xz}^0(x) \\ w(x, z) = w_0(x) \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\gamma_{xz(x)} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} = -w^x(x) + \phi'(z)\gamma_{xz}^0(z) + w_{0,x}(x) \quad (2.9)$$

$$\gamma_{xz(x)} = \phi'(z)\gamma_{xz}^0(z) \quad (2.10)$$

Pour que les contraintes tangentielles soient nulles sur les bords extrêmes de la poutre, on doit avoir :

$$\phi'(z) \Big|_{z = \pm \frac{h}{2}} = 0 \quad (2.11)$$

C'est la condition qui nous permet d'avoir une répartition parabolique des contraintes de cisaillement sur l'épaisseur de la poutre d'une part et de choisir correctement des fonctions cubiques qui répondent à la condition (2.10).

Selon l'expression de la fonction de gauchissement $\phi(z)$, quelques modèles sont présentés dans la littérature des poutres en FGM :

Le modèle Euler-Bernoulli (la théorie des poutres classiques) (CBT):

$$\phi(z) = 0 \quad (2.12)$$

Le modèle de Timoshenko ou bien la théorie du premier ordre (FSDBT):

$$\phi(z) = z \quad (2.13)$$

Le modèle de puissance avec l'approche de (PSDBT) [Levinson, 1980], [Murthy, 1981] et :

$$\phi(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (2.14)$$

Le modèle exponentiel proposé par (ESDBT) [14] :

$$\phi(z) = ze^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (2.15)$$

Le modèle trigonométrique :

$$\phi(z) = \frac{h}{\pi} \sin \frac{\pi z}{h} \quad (2.16)$$

Avec, h : étant l'épaisseur de la poutre.

2.6 Conclusion:

Dans ce chapitre, nous sommes attachés à présenter les théories des poutres. une démonstration des différentes théories des poutres telles que la théorie classique (CBT), la théorie de déformation en cisaillement de premier ordre (FSDBT) et les théories des poutres d'ordre élevé HSDBT a été donnée. Le chapitre suivant portera sur la présentation de l'analyse statique et dynamique des poutres FGM en se basant sur le concept de la surface médiane.

Chapitre 3. Formulation mathématique

3.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à la formulation mathématique du problème de vibration de poutre en FGM bidirectionnelle. Les propriétés mécaniques et physiques des poutres varient selon une distribution de loi de puissance en termes de la fraction volumique, à travers son épaisseur et sa longueur. Dans l'analyse vibratoire les équations de mouvement sont déterminées à l'aide du principe d'Hamilton.

3.2 Formulation théorique :

La formulation théorique de la poutre FGM est basée sur des hypothèses cinématiques et physiques. La poutre est considérée qu'elle occupe le domaine : $-\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2}$, $-\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}$, $-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}$. Les propriétés matériels E , ρ varient à travers l'épaisseur et la longueur de la poutre, suivant la lois de puissance suivante :

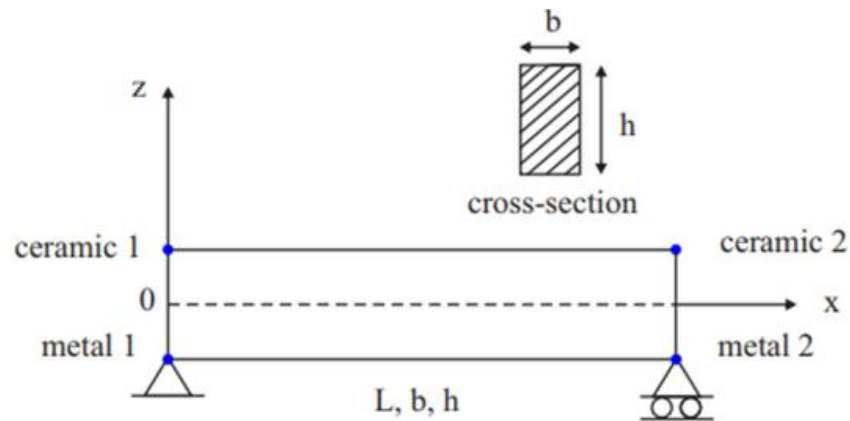


Figure (3.1) Géométrie et coordonnées de la poutre en FGM bidirectionnelle

$$P(x, z) = P_m + (P_c - P_m)V_c \quad (3.3)$$

Avec:

$V_c = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h}\right)^{k_z} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{l}{x}\right)^{k_x}$ La fraction volumique de la phase céramique, et k_x et k_z

sont les indices de puissance qui déterminent les propriétés de la poutre à travers l'épaisseur 'h' et la longueur 'L'.

3.3 Hypothèses de base

Le champ de déplacement, dans la direction des « x » est $u(x, z, t)$, et dans celle des « z » est $w(x, z, t)$, peut être définis, comme suit :

$$u(x, z, t) = u(x, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} + f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (3.1)$$

$$u(x, z, t) = w_b(x, t) + w_s(x, t) \quad (3.2)$$

tel que u_0 est le déplacement de la fibre médiane ; w_b et w_s est la flèche due à la flexion et au cisaillement, respectivement ; $f(z) = \frac{4z^3}{3h^2}$ est la fonction de gauchissement. Le champ de déformation s'écrit comme suit :

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + ZK_x^b + f(z)K_x^s \text{ et } \gamma_{xz} = g(z)\gamma_{xz}^s$$

Ou :

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u}{\partial x}, K_x^b = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, K_x^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}, f = \frac{4Z^3}{(3h^2)}, g = 1 - \frac{\partial f(z)}{\partial z}$$

3.4 Les relations constitutives :

Les relations linéaires constitutives de la poutre en FGM sont écrites sous la forme

$$\sigma_x = Q_{11}(x, z)\varepsilon_x \quad (3.4)$$

$$\sigma_{xz} = Q_{55}(x, z)\gamma_{xz} \quad (3.5)$$

Avec:

$$Q_{11}(x, z) = E(x, z)$$

$$Q_{55}(x, z) = \frac{E(x, z)}{2[1 + \nu(x, z)]}$$

3.5 Equations de mouvement :

En utilisant la version dynamique du principe des travaux virtuels, l'équation différentielle pour la poutre fonctionnellement graduée est obtenue. Le principe des travaux virtuels appliqué sur la poutre nous amène à:

La variation de l'énergie de déformation peut être exprimée comme suit

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_A (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dA dx \\ &= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} (N \frac{d\delta u}{dx} - M_b \frac{d^2 \delta w_b}{dx^2} - M_s \frac{d^2 \delta w_s}{dx^2} + Q \frac{d\delta w_s}{dx^2}) dx \end{aligned} \quad (3.6)$$

Avec:

$$N = \int_A \sigma_x dA$$

$$M_b = \int_A z \sigma_x dA$$

$$M_s = \int_A f \sigma_x dA$$

$$Q = \int_A g \sigma_{xz} dA$$

La variation de l'énergie cinétique peut être exprimée comme suit :

$$\delta K = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_A \rho [\ddot{u} \delta u + (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) \delta (w_b + w_s)] dA dx = 0 \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left\{ I_0 \left[\dot{u} \delta \dot{u} + (\dot{w}_b + \dot{w}_s) \delta (\dot{w}_b + \dot{w}_s) \right] - I_1 \left(\dot{u} \frac{d \delta \dot{w}_b}{dx} + \frac{d \dot{w}_b}{dx} \delta \dot{u} \right) \right. \\
 &+ I_2 \frac{d \dot{w}_b}{dx} \frac{d \delta \dot{w}_b}{dx} - J_1 \left(\dot{u} \frac{d \delta \dot{w}_s}{dx} + \frac{d \delta \dot{w}_s}{dx} \delta \dot{u} \right) + K_2 \frac{d \dot{w}_s}{dx} \frac{d \delta \dot{w}_s}{dx} \\
 &\left. + J_2 \left(\frac{d \delta \dot{w}_b}{dx} \frac{d \delta \dot{w}_s}{dx} + \frac{d \delta \dot{w}_s}{dx} \frac{d \delta \dot{w}_b}{dx} \right) \right\} dx
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Avec :

$$I_0 = \int_A \rho(x, z) dA$$

$$I_1 = \int_A z \rho(x, z) dA$$

$$J_1 = \int_A f \rho(x, z) dA$$

$$I_2 = \int_A z^2 \rho(x, z) dA$$

$$J_2 = \int_A z f \rho(x, z) dA$$

$$K_2 = \int_A f^2 \rho(x, z) dA$$

En collectant les coefficients de δu , δw_b et δw_s de l'équation (3.7) et (3.8), les équations de mouvement sont :

$$\delta u : \frac{dN}{dx} = I_0 \ddot{u} - I_1 \frac{d\ddot{w}_b}{dx} - J_1 \frac{d\ddot{w}_s}{dx} \tag{3.9}$$

$$\delta w_b : \frac{d^2 M_b}{dx^2} = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_1 \frac{d\ddot{u}}{dx} - I_2 \frac{d^2 \ddot{w}_b}{dx^2} - J_2 \frac{d^2 \ddot{w}_s}{dx^2} \tag{3.10}$$

$$\delta w_s : \frac{d^2 M_s}{dx^2} + \frac{dQ}{dx} = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + J_1 \frac{d\ddot{u}}{dx} - J_2 \frac{d^2 \ddot{w}_b}{dx^2} - K_2 \frac{d^2 \ddot{w}_s}{dx^2} \tag{3.11}$$

Les conditions aux limites sont sous la forme, spécifier u ou N :

$$w_b \text{ or } Q_b \equiv \frac{dM_b}{dx} - I_1 \ddot{u} + I_2 \frac{d\ddot{w}_b}{dx} + J_2 \frac{d\ddot{w}_s}{dx} \tag{3.12}$$

$$w_s \text{ or } Q_s \equiv \frac{dM_s}{dx} + Q - J_1 \ddot{u} + J_2 \frac{d\ddot{w}_b}{dx} + K_2 \frac{d\ddot{w}_s}{dx} \quad (3.13)$$

$$\frac{dw_b}{dx} \text{ ou } M_b \quad (3.14)$$

$$\frac{dws}{dx} \text{ ou } M_s \quad (3.15)$$

Quand on néglige l'effet de cisaillement $w_s = 0$, les équations d'équilibre coïncident avec celles trouvées par la théorie de poutre d'Euler Bernoulli. En substituant eq (3.5) dans eq(3.6) et les résultats ultérieurs dans eq(3.9) il en résulte les efforts internes :

$$N = A \frac{du}{dx} - B \frac{d^2 w_b}{dx^2} - B_s \frac{d^2 w_s}{dx^2} \quad (3.17)$$

$$M_b = B \frac{du}{dx} - D \frac{d^2 w_b}{dx^2} - D_s \frac{d^2 w_s}{dx^2} \quad (3.18)$$

$$M_s = B_s \frac{du}{dx} - D_s \frac{d^2 w_b}{dx^2} - H_s \frac{d^2 w_s}{dx^2} \quad (3.19)$$

$$Q = A_s \frac{dw_s}{dx} \quad (3.20)$$

Avec :

$$A = \int_A Q_{11}(x, z) dA$$

$$B = \int_A z Q_{11}(x, z) dA$$

$$B_s = \int_A f Q_{11}(x, z) dA$$

$$D = \int_A z^2 Q_{11}(x, z) dA$$

$$D_s = \int_A z f Q_{11}(x, z) dA$$

$$H_s = \int_A f^2 Q_{11}(x, z) dA$$

$$A_s = \int_A g^2 Q_{55}(x, z) dA$$

Les équations de mouvement en termes de déplacement :

$$A \frac{d^2 u}{dx^2} - B \frac{d^3 w_b}{dx^3} - B_s \frac{d^3 w_s}{dx^3} = I_0 \ddot{u} - I_1 \frac{d\ddot{w}_b}{dx} - J_1 \frac{d\ddot{w}_s}{dx} \quad (3.21)$$

$$B \frac{d^3 u}{dx^3} - D \frac{d^4 w_b}{dx^4} - D_s \frac{d^4 w_s}{dx^4} = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_1 \frac{d\ddot{u}}{dx} - I_2 \frac{d^2 \ddot{w}_b}{dx^2} - J_2 \frac{d^2 \ddot{w}_s}{dx^2} \quad (3.22)$$

$$B_s \frac{d^3 u}{dx^3} - D_s \frac{d^4 w_b}{dx^4} - H_s \frac{d^4 w_s}{dx^4} + A_s \frac{d^2 w_s}{dx^2} = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + J_1 \frac{d\ddot{u}}{dx} - J_2 \frac{d^2 \ddot{w}_b}{dx^2} - K_2 \frac{d^2 \ddot{w}_s}{dx^2} \quad (3.23)$$

3.6 Solutions analytiques

La représentation suivante des variables inconnus est choisée [Sayyad et Ghugal, 2018].

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} u_m \frac{\partial X_m(x)}{\partial x} e^{i\omega t} \quad (3.24)$$

$$w_b = \sum_{m=1}^{\infty} w_{bm} X_m(x) e^{-i\omega t} \quad (3.25)$$

$$w_s = \sum_{m=1}^{\infty} w_{sm} X_m(x) e^{-i\omega t} \quad (3.26)$$

Avec : u_m , w_{bm} et w_{sm} sont des inconnus à déterminer

$X_m(x) = \sin(\lambda_m x)$, pour les conditions simplement appuyée

$$\lambda_m = m\pi/L$$

Substituons les expressions de u , w_b et w_s dans les équations de mouvement, les solutions analytique peuvent être obtenues à partir des équations suivant

$$\left(\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{12} & m_{22} & m_{23} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} U_n \\ W_{bn} \\ W_{sn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.27)$$

Avec :

$$s_{11} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{d^3 X_m}{dx^3} \frac{\partial X_m}{\partial x} A dx$$

$$s_{12} = - \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{d^3 X_m}{dx^3} \frac{\partial X_m}{\partial x} B dx$$

$$s_{13} = - \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{d^3 X_m}{dx^3} \frac{\partial X_m}{\partial x} B_s dx$$

$$s_{21} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{d^4 X_m}{dx^4} X_m B dx$$

$$s_{22} = - \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{d^4 X_m}{dx^4} X_m D dx$$

$$s_{23} = - \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{d^4 X_m}{dx^4} X_m D dx$$

$$s_{33} = - \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{d^4 X_m}{dx^4} X_m H_s dx + \frac{d^2 X_m}{dx^2} X_m A_s dx$$

$$m_{11} = - \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} I_0 \frac{d X_m}{dx} \frac{\partial X_m}{\partial x} dx$$

$$m_{12} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} I_1 \frac{dX_m}{dx} \frac{\partial X_m}{\partial x} dx$$

$$m_{13} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} J_1 \frac{dX_m}{dx} \frac{\partial X_m}{\partial x} dx$$

$$m_{21} = - \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} I_1 \frac{d^2 X_m}{dx^2} X_m dx$$

$$m_{22} = - \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} I_0 X_m + I_2 \left(\frac{d^2 X_m}{dx^2} X_m \right) dx$$

$$m_{23} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left(-I_0 X_m + J_2 \frac{d^2 X_m}{dx^2} \right) X_m dx$$

$$m_{31} = - \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} J_1 \frac{d^2 X_m}{dx^2} X_m dx$$

$$m_{32} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left(-I_0 X_m + J_2 \frac{d^2 X_m}{dx^2} \right) X_m dx$$

$$m_{33} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left(-I_0 X_m + k_2 \frac{d^2 X_m}{dx^2} \right) X_m dx$$

Une solution non nulle est obtenue lorsque le déterminant de l'équation 3.27 est nul :

$$\text{Det} \left(\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{12} & m_{22} & m_{23} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{bmatrix} \right) = 0 \quad (3.28)$$

Pour obtenir les équations du mouvement de la théorie FBT, il suffit de remplacer la fonction de gauchissement $f(z)$ par z dans l'expression de déplacement. Et l'introduire un

coefficients de correction de cisaillement dans ce cas égale a $k = 5/6$ (poutre de section rectangulaire).

En mettant $f(z) = 0$, nous obtenons le système à résoudre de la théorie classique (CBT) :

$$\left(\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.29)$$

3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, a été développée une formulation mathématique du problème de vibration libre des poutres FGM bidirectionnelle en utilisant une théorie raffinée d'ordre élevée. Les caractéristiques du matériau varient à travers l'épaisseur et la longueur de la poutre suivant une loi de puissance (P-FGM). Les équations de mouvement sont obtenues selon le principe d'Hamilton. Les résultats obtenus de ce travail seront présentés et interprétés dans le quatrième chapitre

Chapitre 4. Résultats et discussions

4.1 Introduction

Le présent chapitre illustre la vibration libre d'une poutre rectangulaire en FGM. Les propriétés matérielles sont estimées par une loi de distribution bidirectionnelle 2DPFGM. Cette poutre est composée du métal (Al) et de céramique (Al₂O₃), les deux phases (métal et la céramique) varient à travers l'épaisseur et la longueur de la poutre.

4.2 Résultats numériques et discussion

Dans cette partie, l'exactitude de la formulation développée dans ce travail est montrée, nos résultats seront validés par des comparaisons avec les solutions disponibles dans la littérature. Une poutre fonctionnellement graduée simplement appuyée composée de Al/Al₂O₃, $E_m = 70$ GPa, $\rho_m = 2702$ kg/m³, $\nu_m = 0.3$ and $E_c = 380$ GPa, $\rho_c = 3960$ kg/m³, $\nu_c = 0.3$, Deux rapport longueur- épaisseur sont considérés ($L/h = 5, 20$). La fréquence naturelle de vibration est normalisée par l'expression suivante:

$$\bar{w} = w \frac{L^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}} \quad (4.1)$$

Les fréquences fondamentales de vibration adimensionnelle d'une poutre PFGM sont représentées dans le tableau 4.1 pour un indice de puissance k_z variables et $k_x = 0$ et deux rapports ($L/h = 5, 20$). Nous observons que nos résultats sont en excellent accord avec ceux publiés par [Sayyad et Ghugal, 2018]. Les légères différences observées sont dues aux théories des poutres utilisées.

Il convient de noter que la fréquence adimensionnelle diminue avec l'augmentation de l'indice de puissance k_z . Les résultats de la théorie raffinée se situent entre ceux de la théorie classique (CBT) et du premier ordre (FBT).

Tableau (4.1) *Fréquences de vibration adimensionnelles d'une poutre P-FGM, ($k_x = 0$).*

L/h	Théorie	$k_z = 0$	$k_z = 1$	$k_z = 2$	$k_z = 5$	$k_z = 10$
5	CBT	5.39533131	4.14835147	3.77930990	3.59487212	3.49208273
	FBT	5.15247847	3.99024091	3.63438622	3.43119989	3.31343543
	RHBT	5.15274785	3.99041893	3.62643963	3.40120448	3.28160474
	Sayyad et Ghugal, 2018	5.15423	3.99140	3.62671	3.40000	3.28135
20	CBT	5.47773410	4.21634364	3.84719089	3.66283321	3.55465004
	FBT	5.46031881	4.20505401	3.83676155	3.65088300	3.54156467
	RHBT	5.46032013	4.20505486	3.83613405	3.64848639	3.53898908
	Sayyad et Ghugal, 2018	5.46043	4.20513	3.83614	3.64830	3.53895

Tableau (4.2) *Fréquences de vibration adimensionnelles d'une poutre 2D-PFGM $L/h = 5$*

Théorie	k_x	$k_z = 0$	$k_z = 1$	$k_z = 2$	$k_z = 5$	$k_z = 10$
CBT	0	5.395331311	4.148351479	3.779309908	3.594872129	3.492082737
	1	4.526659796	3.666569521	3.463707124	3.340736831	3.235537388
	2	4.243160880	3.541516083	3.392029993	3.277865390	3.168634362
	5	3.866972923	3.375148993	3.277392893	3.171985033	3.129753883
	10	3.544848034	3.203106320	3.135633507	3.055199598	2.982422542
FBT	0	5.152478472	3.990240917	3.634386229	3.431199893	3.313435439
	1	4.322907303	3.516331708	3.316080173	3.179989602	3.072320874
	2	4.052169148	3.391341751	3.241086259	3.117313360	3.009702013
	5	3.692914037	3.225919083	3.125518510	3.016183983	2.920781103
	10	3.385288526	3.059446780	2.989992847	2.908261549	2.839505768
RHBT	0	5.152747853	3.990418938	3.626439630	3.401204483	3.281604745
	1	4.323133316	3.516499826	3.310224528	3.163325845	3.058104772
	2	4.052381004	3.391509281	3.235966521	3.104294252	2.999387461
	5	3.693107109	3.226084908	3.121658935	3.007712147	2.914581801
	10	3.385465516	3.059606190	2.987449662	2.903151564	2.835913344

Dans les tableaux 4.2 et 4.3, la variation des fréquences fondamentales adimensionnelles d'une poutre 2DP-FGM est illustrée pour deux rapports ($L/h = 5, 20$)

respectivement. Pour le mêmes indices de puissance k_x , et k_z variable, nous constatons que les fréquences de vibration adimensionnelles diminuent avec l'augmentation de l'indice k_z . Les fréquences de vibration diminuent aussi avec l'augmentation de l'indice k_x , pour k_z constant.

Tableau (4.3) Fréquences de vibration adimensionnelles d'une poutre 2D – PFGM $L/h = 20$

Théorie	k_x	$k_z = 0$	$k_z = 1$	$k_z = 2$	$k_z = 5$	$k_z = 10$
CBT	0	5.477734105	4.216343643	3.847190896	3.662833216	3.554650048
	1	4.595795386	3.725749446	3.522202109	3.397323189	3.288364307
	2	4.307966596	3.598084488	3.447724928	3.331336458	3.219041476
	5	3.926033129	3.427619697	3.328842375	3.221668509	3.119675411
	10	3.598988432	3.252207509	3.183941059	3.102367874	3.028366992
FBT	0	5.460318819	4.205054012	3.836761557	3.650883002	3.541564674
	1	4.581184033	3.714991992	3.511569460	3.385653350	3.276510725
	2	4.294270333	3.587318650	3.436849044	3.319701185	3.207526596
	5	3.913551142	3.416916217	3.317908751	3.210410147	3.108757180
	10	3.587546215	3.241905066	3.173469245	3.091776587	3.018069741
RHBT	0	5.460320139	4.205054869	3.836134052	3.648486392	3.538989086
	1	4.581185145	3.714992809	3.511102219	3.384324114	3.275367901
	2	4.294271373	3.587319467	3.436438086	3.318661045	3.206695886
	5	3.913552089	3.416917028	3.317595814	3.209731184	3.108254774
	10	3.587547085	3.241905848	3.173259703	3.091364482	3.017775025

Les tableaux 4.4 - 4.5, représentent les fréquences de vibration des trois modes de vibration d'une poutre en FGM, les deux indices de puissance k_x et k_z prennent les valeurs 0,5,1,2,5 et 10 le rapport $\frac{l}{h}$ les valeurs de 5 et 20. On observe que, les trois fréquences de vibration diminuent avec l'augmentation des deux indices de puissance

Les figures 4.1- 4.4 montrent la variation des fréquences de vibration adimensionnelles en fonction du rapport $\frac{L}{h}$ pour la théorie raffinée. Elles sont tracées pour deux indices des

puissances k_x et $k_z = 1$ et 10.

Tableau (4.4) Les trois modes de vibration en mode flexion $L/h = 5$.

l/h	k_x	Mode	$k_z = 0$	$k_z = 1$	$k_z = 2$	$k_z = 5$	$k_z = 10$
5	0	1	5.460320139	4.205054869	3.836134052	3.648486392	3.538989086
		2	17.88120947	14.00995550	12.64053852	11.54311712	11.02400431
		3	34.20968146	27.09791479	24.31515078	21.71584006	20.55608667
	1	1	4.581185145	3.714992809	3.511102219	3.384324114	3.275367901
		2	15.00225794	12.28173162	11.47212987	10.78146886	10.39929767
		3	28.70177581	23.64080344	21.94309774	20.33163801	19.56890255
	2	1	4.294271373	3.587319467	3.436438086	3.318661045	3.206695886
		2	13.48216763	11.43421304	10.86772266	10.36689542	10.07442837
		3	26.12515332	22.17382629	20.92673101	19.72052881	19.12455048
	5	1	3.913552089	3.416917028	3.317595814	3.209731184	3.108254774
		2	11.42372516	10.34653193	10.07338490	9.820434361	9.665008882
		3	22.89514916	20.42853160	19.69737338	18.96481360	18.58219156
	10	1	3.587547085	3.241905848	3.173259703	3.091364482	3.017775025
		2	10.14607660	9.703879539	9.597341600	9.496638559	9.433673446
		3	21.24819613	19.57457925	19.08867633	18.58611393	18.31635848

Tableau (4.5) Les trois modes de vibration en mode flexion $L/h = 20$

l/h	k_x	Mode	$k_z = 0$	$k_z = 1$	$k_z = 2$	$k_z = 5$	$k_z = 10$
20	0	1	5.460320139	4.205054869	3.836134052	3.648486392	3.538989086
		2	21.57372326	16.63440920	15.16190523	14.37458358	13.92626187
		3	34.20968146	27.09791479	24.31515078	21.71584006	20.55608667
	1	1	4.581185145	3.714992809	3.511102219	3.384324114	3.275367901
		2	18.09984954	14.68759381	13.86896174	13.34214566	12.90940548
		3	28.70177581	23.64080344	21.94309774	20.33163801	19.56890255
	2	1	4.294271373	3.587319467	3.436438086	3.318661045	3.206695886
		2	16.26589855	13.71700411	13.15902790	12.75106911	12.39643578
		3	26.12515332	22.17382629	20.92673101	19.72052881	19.12455048
	5	1	3.913552089	3.416917028	3.317595814	3.209731184	3.108254774
		2	13.78243912	12.45525074	12.19263224	11.96587083	11.76736656
		3	22.89514916	20.42853160	19.69737338	18.96481360	18.58219156
	10	1	3.587547085	3.241905848	3.173259703	3.091364482	3.017775025
		2	12.24098803	11.69922024	11.59732237	11.50214205	11.42041940
		3	21.24819613	19.57457925	19.08867633	18.58611393	18.31635848

On observe des fréquences de vibration adimensionnelles augmente avec l'augmentation du rapport $\frac{L}{h}$. Sa variation est remarquable lorsque le rapport est inférieur a 5. Elle est

indépendante du rapport longueur-épaisseur lorsque $\frac{L}{h} > 20$

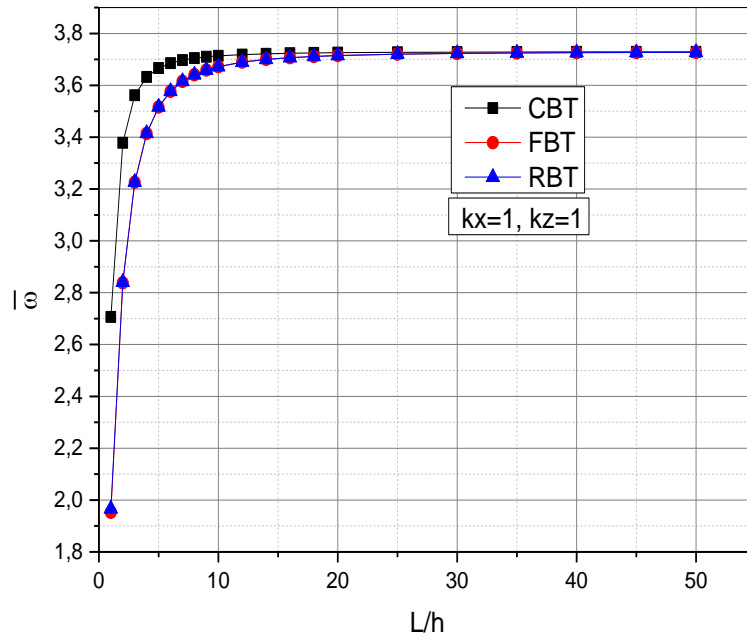


Figure (4.1) Variation des fréquences de vibration adimensionnelles d'une poutre 2D-PFGM $k_x = 1, k_z = 1$

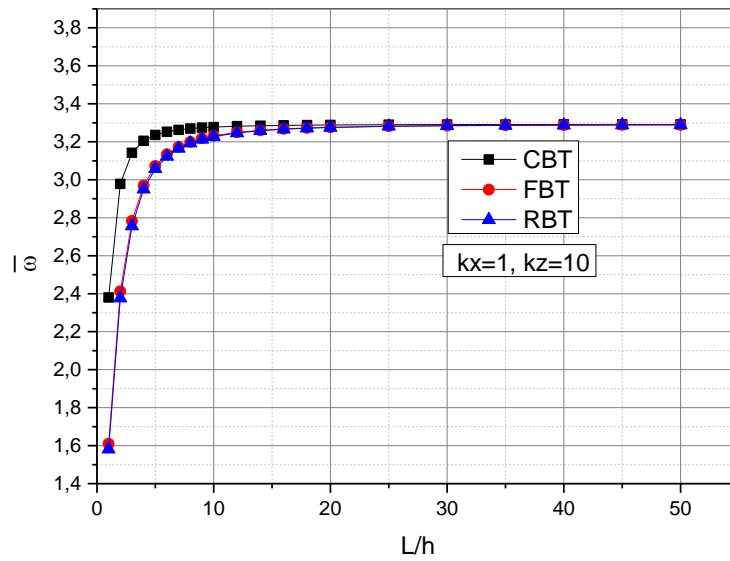


Figure (4.2) *Variation des fréquences de vibration adimensionnelles d'une poutre 2D-PFGM $k_x = 1, k_z = 10$*

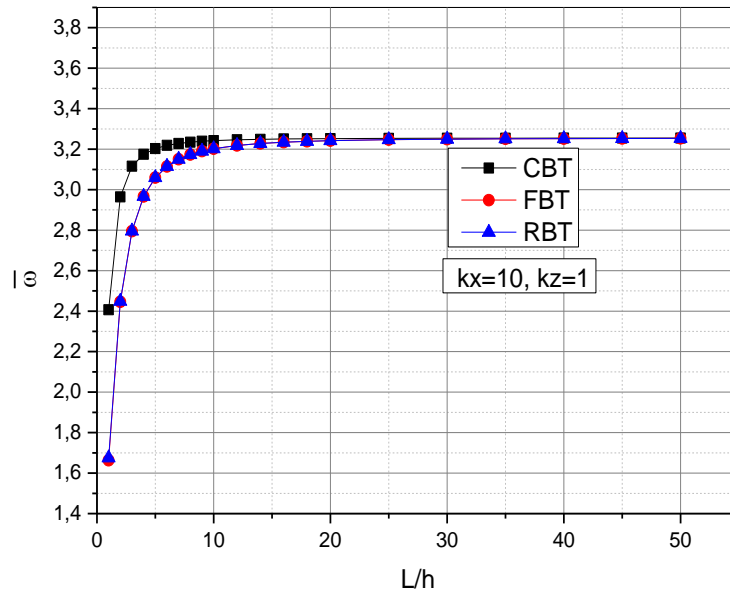


Figure (4.3) *Variation des fréquences de vibration adimensionnelles d'une poutre 2D-PFGM $k_x = 10, k_z = 1$.*

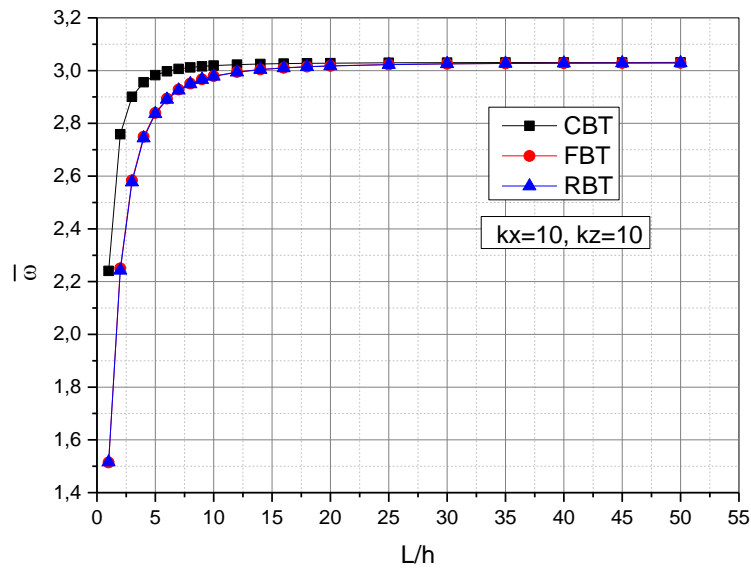


Figure (4.4) *Variation des fréquences de vibration adimensionnelles d'une poutre 2D-PFGM $k_x = 10, k_z = 10$*

Les figures qui suivent se concentrent uniquement sur les fréquences propres en mode axiales et en mode de cisaillement et visent à mieux comprendre la relation entre les fréquences propres et les indices de puissance k_x et k_z . La figure ci-dessous illustre les courbes des fréquences propres des trois premiers modes en fonction de k_x pour deux valeurs de $k_z = 1$ et 10 et deux rapport $\frac{L}{h} = 5, 20$.

Les fréquences propres de vibration diminuent avec l'augmentation des indices de puissance k_x et k_z et augmentent avec le numéro de mode. De manière générale, les fréquences propres en mode de cisaillement sont plus grandes que celles en mode de flexion et en mode axiale. Les mêmes remarques quand k_z est variable et k_x prend les valeurs 1 et 10.

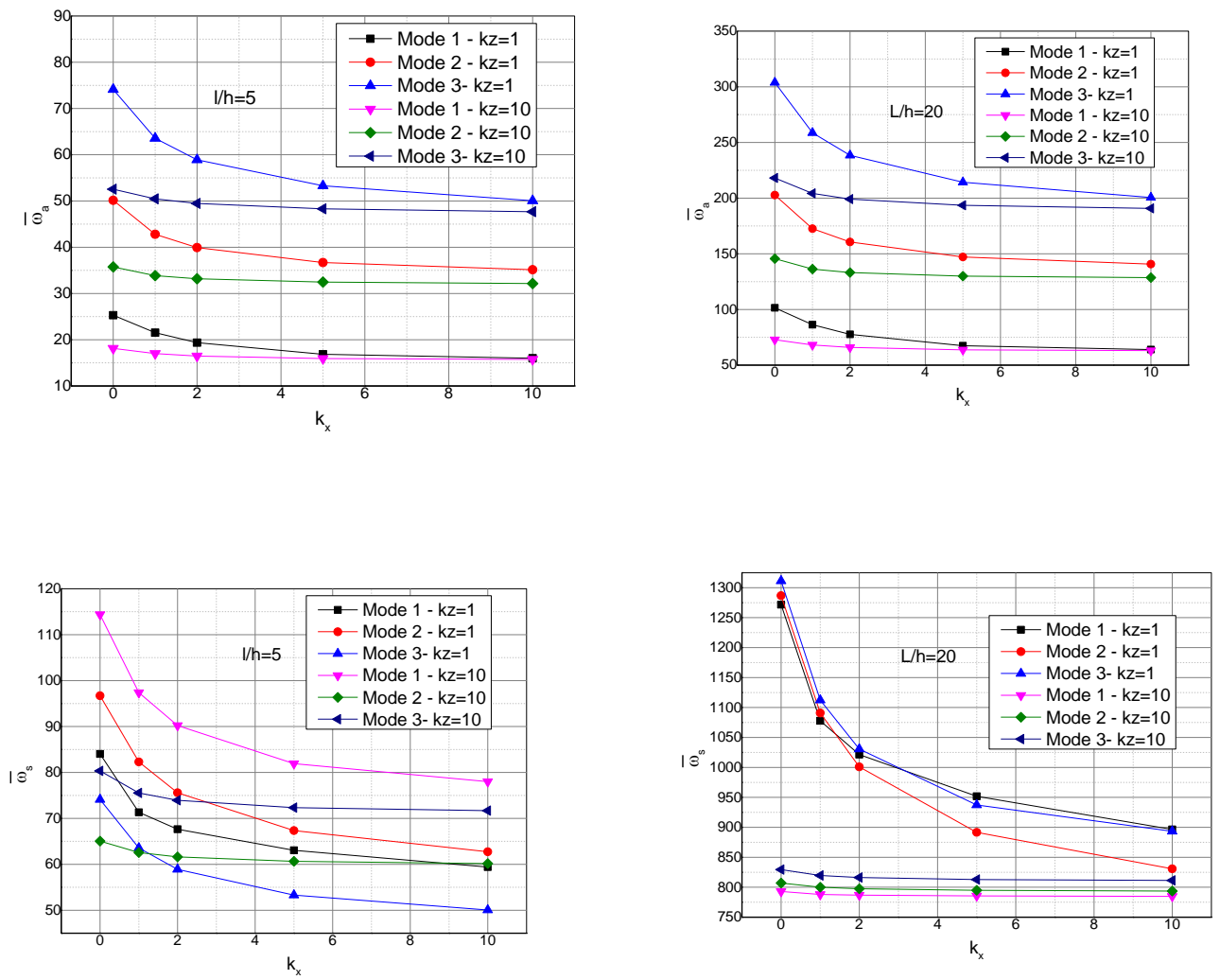


Figure (4.5) Variation des fréquences de vibration adimensionnelles en mode axiale et de cisaillement en fonction de k_x d'une poutre 2D-PFGM

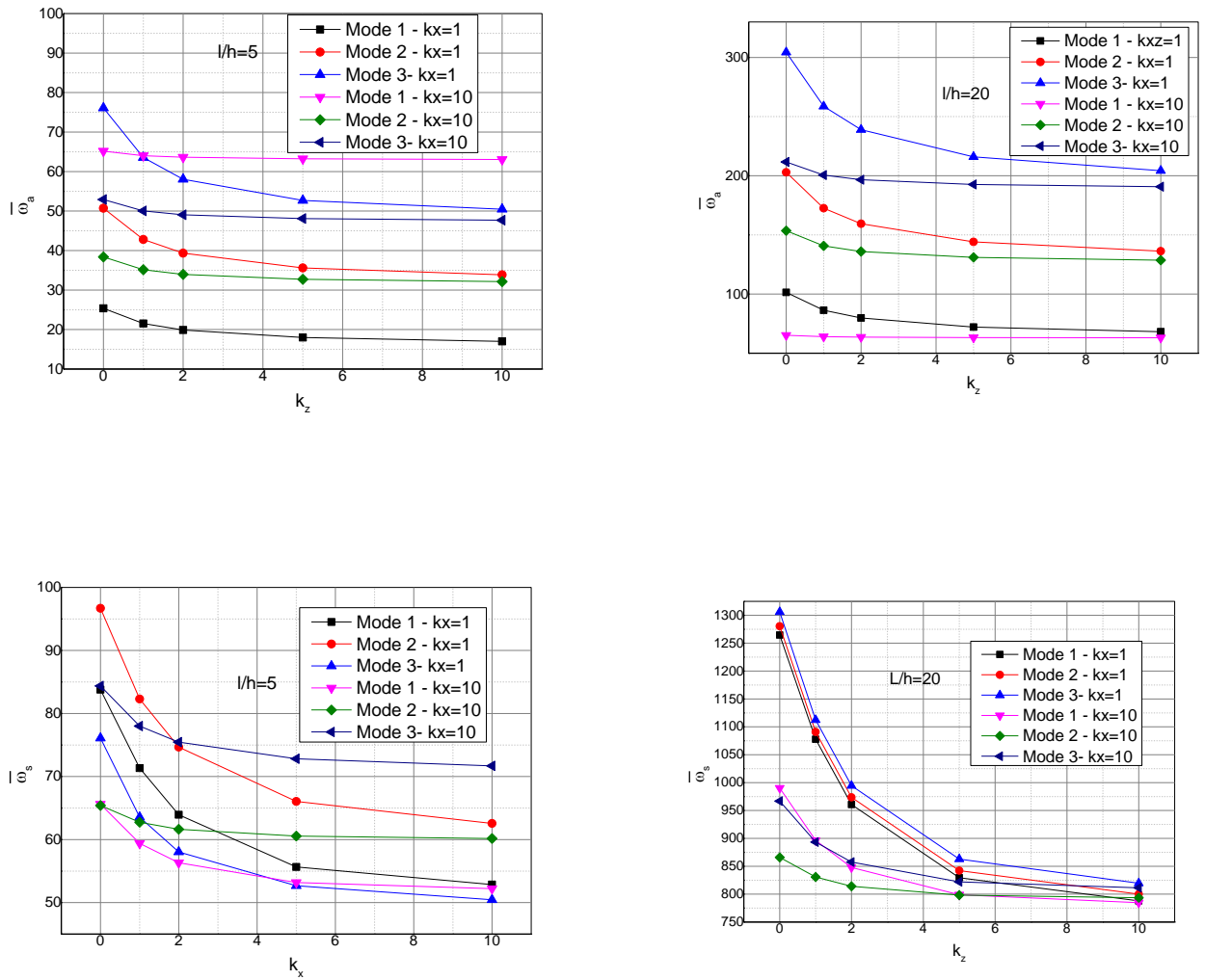


Figure (4.6) Variation des fréquences de vibration adimensionnelles en mode axiale et de cisaillement en fonction de k_z d'une poutre 2D-PFGM

4.3 Conclusions

Une analyse de la vibration libre d'une poutre simplement appuyée en FGM a été présentée dans ce travail de fin d'étude. La variation de propriétés matérielle à travers l'épaisseur et la longueur de cette poutre est supposée suite à une loi puissance (2DP-FGM). Les équations de mouvement sont obtenues par le principe d'Hamilton. Les résultats sont validés par des

comparaisons avec les études précédentes. Les résultats numériques montrent l'effet des indices de puissance et le rapport longueur - épaisseur sur les fréquences de vibration.

A travers ces résultats, on peut conclure que les fréquences fondamentales adimensionnelles de vibration diminuent quand les deux indices de puissance k_x , k_z augmentent. Les fréquences de vibration sont sensibles à la variation du rapport $\frac{L}{h}$, quand il est inférieur à 5 et elles sont indépendantes du rapport longueur-épaisseur lorsque $\frac{L}{h} > 20$.

Les fréquences propres de la poutre Timoshenko sont systématiquement plus faibles que les fréquences correspondantes d'Euler-Bernoulli et la théorie raffinée. Ceci est en accord avec la littérature (Sayyad et Ghugal, 2018).

Les fréquences propres de vibrations obtenues quand les propriétés matérielles varient à travers la longueur de la poutre sont supérieures à celles obtenues lorsque les propriétés varient à travers l'épaisseur de la poutre.

Conclusion générales.

L'objectif de ce mémoire été à l'étude de la vibration libre des poutres en FGM bidirectionnelles.

Les premières modes propres de vibration d'une poutre composées du métal et la céramique, rectangulaire simplement appuyée dont la variation des propriétés matériels de celle-ci, varient en suivant à travers la longueur et l'épaisseur. Nos résultats sont obtenus pour différentes valeurs de l'indice de puissance et le rapport longueur-épaisseur. Les résultats ont été comparés avec les résultats de la littérature.

A travers ces résultats, les conclusions suivantes sont formulées. Les fréquences fondamentales adimensionnelle de vibration diminuent quand les deux indices de puissance k_x , k_z augmentent. Les fréquences de vibration sont sensibilité a la variation du rapport $\frac{L}{h}$, quand il est inferieur a 5 et Elles sont indépendante du rapport longueur-épaisseur lorsque $\frac{L}{h} > 20$.

Les fréquences propres de la poutre Timoshenko sont systématiquement plus faibles que les fréquences correspondantes d'Euler-Bernoulli et la théorie raffinée. Ceci est en accord avec la littérature.

Les fréquences propres de vibrations obtenues quand les propriétés matérielles varient à travers la longueur de la poutre sont supérieures à celles obtenus lorsque les propriétés sont variables à travers l'épaisseur de la poutre.

Le travail présenté dans le cadre de ce projet de fin d'étude peut être développé et enrichi par l'étude du comportement statique et du flambement. Nous envisageons, par exemple, en perspective, d'analyse le flambement et la flexion des différentes formes de structures (poutres sandwichs, plaque) épaisses et modérément épaisses avec les différentes

conditions aux limite en utilisant l'utilisation des méthodes numérique.

Références

Abdizadeh H, élaboration et caractérisation de composites « composites laminaires tricouches à base d'alumine » thèse de doctorat INSA de Lyon 212 p 1997

Afaq, K.S., M. Karama & S. Mistou. Un nouveau modèle raffiné pour les structures multicouches. In Comptes-rendus des 13 emes Journées Nationales sur les Composites, pages 289-292. Strasbourg, March 2003.

Ait Atmane « Vibration des structures composites en tenant compte de l'effet du cisaillement. » Thèse de Doctorat de l'université de Djillali Liabes de Sidi bel abbes, 2011.

Boch. P Chartier. Huttepain. M Tapa casting of AL2O3/ZrO2 laminated composites,1986.

F. Delale, F. erdogan. The crack problem for a non-homogeneous plane.ASME Journal of Applied Mechanics 50, 609 –614, 1983 similaire aux plaques homogènes. Mémoire de magister en génie civil de l'université Djillali Liabes de Sidi Bel Abbes 2009

Goupee AJ, Vel SS. Optimization of natural frequencies of bidirectional functionally graded beams. Struct Multidisc Optim 2006;32:473–84.

Jing LL, Ming PJ, Zhang WP, Fu LR, Cao YP. Static and free vibration analysis of functionally graded beams by combination Timoshenko theory and finite volume method. Compos Struct 2016;138:192–213.

Li XF. A unified approach for analyzing static and dynamic behaviors of functionally graded Timoshenko and Euler-Bernoulli beams. J Sound Vib 2008;318:1210–29.

Lü CF, Chen WQ, Xu RQ, Lim CW. Semi-analytical elasticity solutions for bidirectional functionally graded beams. Int J Solids Struct 2008;45:258–75.

Markworth A.J., Ramesh K.S., and Parks W.P., *Review: modeling studies applied to functionally graded materials*, *Journal of Material Sciences*, 30, 2183–2193, 1995.

Nazargah M. *Fully coupled thermo-mechanical analysis of bi-directional FGM beams using NURBS isogeometric finite element approach*. *AerospSciTechnol* 2015;45:154–64.

Pradhan KK, Chakraverty S. *Free vibration of Euler and Timoshenko functionally graded beams by Rayleigh-Ritz method*. *Composites Part B* 2013;51:175–84.

Sellai « *Etude et analyse des structures en FGM, comparaison entre E-FGM, PFGM et SFGM* ». *Thèse de Doctorat de l'université Djilali Liabes de Sidi Bel Abbes* 2011.

Shen H.-S, *Bending, buckling and vibration of functionally graded plates and shells (in Chinese)*, *Advances in Mechanics*, 34, 53–60, 2004.

Simsek M. *Bi-Directional functionally graded materials (BDFGMs) for free and forced vibration of Timoshenko beams with various boundary conditions*. *Compos Struct* 2015;141:968–78.

Simsek M. *Fundamental frequency analysis of functionally graded beams by using different higher-order beam theories*. *NucEng Des* 2010;240:697–705.

Timoshenko, S.P. Goodier, J.N.: *Theort of elasticity*, 3rd end. McGraw-Hill, New York (1970).

Yin H.M., Sun L.Z., and Paulino G.H., *Micromechanics-based elastic model for functionally graded materials with particle interactions*, *Acta Materialia*, 52, 3535–3543. (2004).

Zhao L, Chen WQ, Lü CF. *Symplectic elasticity for two-directional functionally graded materials*. *Mech Mater* 2012;54:32–42.