

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHESCIENTIFIQUE

UNIVERSITE IBN KHALDOUN TIARET
FACULTE DES SCIENCES APPLIQUEES
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL



MEMOIRE DE MASTER EN GENIE CIVIL

Spécialité : Travaux Public

Option : Voies et Ouvrages d'Art

Présentée par :
Sedjrari Asma
Saci Zohra

Sujet du mémoire

***Étude du comportement statique des plaques
fonctionnellement graduée reposant sur des
fondations élastique***

Soutenue le .. Juin ... devant le Jury composé de :

M^r. A. KRIM

Président

M^r.H.HEBALI

Rapporteur

M^r.A.CHEIKH

Examineur

M^r.S.BELMAHI

Examineur

M^r. M.KHILOUN

Examineur

Année Universitaire 2017/2018

Remerciement

Tout d'abord, nous tenons à remercier Allah, le clément et le miséricordieux de nous avoir donné la force et le courage de mener à bien ce modeste travail.

Nos parents qui nous ont suivis pendant nos études.

Nous adressons nos remerciements chaleureux à tous les professeurs qui nous ont enseignés au cours des études primaires jusqu'aux années du cursus universitaire pour l'obtention du diplôme de master.

Nous voudrions saisir cette occasion pour remercier notre encadreur

Mr : HEBALI HABIB pour l'aide et la précision conseils.

Ainsi qu'à tous nos enseignants "Les membres de jury" :

❖ *Mr. KRIM ABDELLEAH*

❖ *Mr. KHILOUN Mokhtar*

❖ *Mr. CHEIKH ABDELBAKI*

❖ *Mr. BELMAHI SAMIR*

Nous tenons à adresser nos sincères remerciements à tous les enseignants qui ont participé à notre formation.

Nous remercions également notre chef département :

❖ *Mr : Bouakkaz Khaled*

Et bien sûr, merci à tous les travailleurs d'université Ibn Khaldoun et à tous nos amis avec qui nous avons gardé des souvenirs très agréables des bons moments vécus ensemble.

Dédicace

À mon père qui m'a aidé à devenir ce que je suis aujourd'hui, que Dieu le garde et le protège ;

À ma mère qui m'a entouré d'amours, d'affection et qui fait tout pour ma réussite, que Dieu la garde et la protège ;

Merci à mes parents d'avoir fait de moi la femme que je suis.

À mon frère Houari, mes Sœurs Amina, Douaà, Rouaà et Asma.

À toute la famille SACI

À mes très chères amies (Ouahiba ; Nassira; Karima).

À notre collègues Zidar Hamza, Taibi Ahmed Abderrahmen ; Sellam

Mourad.

Spéciale dédicace à Mohammed, Nafisa et Djemel djeleledin.

À tous les étudiants de la promotion master II VOA (2017/2018) avec qui j'ai passé de très agréables moments et qui ont fait une belle étape de ma vie.

ZOËRA

Dédicace

À mon père qui m'a aidé à devenir ce que je suis aujourd'hui, que Dieu le garde et le protège.

À ma mère qui m'a entouré d'amours, d'affection et qui fait tout pour ma réussite, que Dieu la garde et la protège.

Merci à mes parents d'avoir fait de moi la femme que je suis.

À mes frères Mohamed Zakaria et Abdallah, mes Sœurs Ouissam, Zohra, Fatima et Amra.

À mon binôme SADI ZOHRÀ et sa famille.

Mon âme sœur Kadari Ahmed

À mon très cher ami SELLAM MOURAD.

À notre collègues Zidar Hamza, Djemeli Djaleddine, Mahmoud Yusef et Mahmoud Abdelkader.

À toute la famille SEDJARI.

À mes très chères amies (Menaour.B ; Djalal.B; Souhila.B; Manel.B; Fouzali).

Spéciale dédicace à mes oncles Benabdallah, Belkacem, Mohamed et Noureddine.

À tous les étudiants de la promotion master II VOA (2017/2018) avec qui j'ai passé de très agréables moments et qui ont fait une belle étape de ma vie.

ASMA

Sommaire

المخلص.....	I
RESUME.....	II
ABSTRACT.....	III
Liste des figures.....	IV
Liste des tableaux.....	VI
Liste des notations.....	VIII

Introduction générale

Introduction générale.....	1
----------------------------	---

Chapitre I :

Généralités sur les matériaux à gradient de propriétés

I.1. Introduction	3
I.2. les matériaux à gradient de propriété FGM	5
I.2.1 Aperçu historique sur les matériaux à gradient de propriétés	5
I.2.2. La définition et le concept d'un matériau à gradient de propriété	5
I.3. L'intérêt d'utilisation d'un FGM	8
I.3.1. Différence entre FGM et les matériaux composites traditionnels	8
I.3.2.Procédés de fabrication FGM	10
I.4.méthodes Les d'élaboration des FGM	11
I.4.1.Coulage en Bande (Tape Casting Ou Doctor-Blade)	11
I.4.2.Coulage Séquentiel en Barbotine (Slip Casting)	12
I.4.3.Dépôt par Électrophorèse	13
I.4.4.Compaction Sèche des Poudres	13
I.4.5. Projection plasma	14

I.4.6 C. V. D. et P. V. D	14
I.4.7. Frittage et Infiltration	14
I.4.8. Frittage Laser Différentiel	14
I.4.9. Implantation Ionique (Sputtering)	15
I.4.10. Dépôt par Centrifugation	15
I.5. Propriétés matérielles effectives d'un matériau FGM	16
I.6. Revue sur les différentes lois qui régissent la variation des propriétés matérielles	17
I.6.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM	18
I.6.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM.....	19
I.6.3. Les propriétés matérielles de la poutre E-FGM	20
I.7. Propriétés physiques et mécaniques des FGM	21
I.7.1. Propriétés des alliages d'aluminium	22
I.7.2. Résistance à la corrosion	22
I.7.3. Propriété physique de céramique	23
I.7.4. Propriété mécanique de céramique	23
I.7.5. Propriété de céramique	23
I.8. Domaine d'application des FGM	24

Chapitre II

Les théories des plaques FGM

I.9. Conclusion	26
II.1. Introduction	27
II.2. Modèles analytiques des plaques	28
II.2.1 La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT)	28
II.2.2. Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)	29
II.2.3. Théorie de déformation en cisaillement D'ordre élève (HSDT)	30

II.3 Revue sur les différents modèles de la théorie d'ordre élevé	32
II.4. Les différents modèles des structures composites dans l'élasticité bidimensionnelles	34
II.4.1.Approche monocouche équivalente	34
II.4.2. Approche par couche	35
II.4.3. Approche développement asymptotique	36
II.5 Théorie de zig-zag	36
II.6 Conclusion	37

Chapitre III

Etude de la flexion des plaques FGM reposant sur des fondations élastiques en utilisant une théorie raffinée à ordre élevé

III.1.Introduction	38
III.2.Formulation du problème	38
III.2.1.Théorie de la plaque à ordre élevé	40
III.2.2.Présente théorie raffinée de déformation de cisaillement	41
III.2.2.1.Les hypothèses de la présente théorie des plaques (RHSDT)	42
III.2.2.2.Cinématique et équations constitutives	43
III.2.2.3. Les équations d'équilibres	44
III.3.Solutions exactes pour les plaques FGM simplement appuyées	47
III.4.Conclusion	50

Chapitre VI

Résultats et discussion

VI.1.Introduction	51
VI.2. Résultats numériques	51
VI.3.Conclusion	62

Conclusion générale

Conclusion générale	63
---------------------------	----

Références

Référence.....	
----------------	--

Résumé

Une théorie hyperbolique de déformation de cisaillement des plaques impliquant seulement quatre fonctions inconnues, contre cinq fonctions en cas d'autres théories de déformation de cisaillement est développée pour l'analyse de la flexion des plaques fonctionnellement graduée (FGM) reposant sur des fondations élastiques. La théorie présentée est vibrationnelle cohérente, à une forte similarité avec la théorie classique des plaques dans beaucoup d'aspects, n'exige pas de facteur de correction de cisaillement et donne lieu une variation parabolique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur et satisfaisant la condition de la contrainte nulle dans la surface supérieure et inférieure de plaque.

Dans cette analyse, les deux paramètres de fondation élastique Winkler et Pasternak sont considérés. Les propriétés matérielles de la plaque sont variées graduellement dans la direction de l'épaisseur selon une simple distribution de la loi de puissance en terme de fraction volumique de constituant.

Les équations d'équilibres sont dérivées à partir le principe des travaux virtuels. L'exactitude de la présente théorie est démontrée par la comparaison des résultats obtenus avec les résultats des modèles d'ordre élevé présentés dans la littérature.

On peut conclure que la théorie proposée est précise et simple pour l'analyse le comportement statique à la flexion des plaques fonctionnellement graduée.

Mots-clés : Plaques fonctionnellement graduée, théorie de déformation de cisaillement, théorie à ordre élevée.

الملخص :

في هذه الدراسة قدمنا نظرية تشوه قص تحتوي على أربع معادلات مجهولة فقط مقابل خمسة في غيرها من النظريات الأخرى ذات تشوه القص من أجل تحليل انحناء الصفائح المتدرجة وظيفيا مسنودة على أساسات مرنة.

النظرية المقدمة تتوافق مع النظرية الكلاسيكية للصفائح في عدة مبادئ . حيث أنها لا تتطلب عامل تصحيح القص و تحقق شرط إجهاد القص بشكل قطع مكافئ في اتجاه السمك واستيفاء شروط اجتهادات القص المعدومة عند السطوح العلوي والسفلي للصفحة.

في هذا التحليل أخذنا بعين الاعتبار معاملات الأساسات المرنة Winkler و Pasternak.

نفترض أن خصائص المواد المكونة للصفحة تتغير تدريجيا باتجاه السمك وفقا لقانون أسي بسيط فيما يتعلق بالأجزاء الكمية للمكونات .

تم اشتقاق المعادلات من مبدأ العمل الافتراضي وتتجلى دقة هذه النظرية من خلال مقارنة النتائج مع حلول نظريات تشوه القص المعروضة مسبقا.

وبالتالي يمكن أن نستنتج أن النظرية المقترحة دقيقة وبسيطة في تحليل سلوك الانحناء الثابت للصفائح المتدرجة وظيفيا.

الكلمات المفتاحية: صفائح متدرجة وظيفيا ، نظرية تشوه القص، نظرية الترتيب العالي .

Abstract

A shear hyperbolic deformation plate theory involving only four unknown functions, as against five functions in case of other shear deformation theories, is developed for the flexural analysis of Functionally Graded Material (FGM) plates resting on an elastic foundation. The theory presented is variationally consistent, has strong similarity with classical plate theory in many aspects, does not require shearing correction factor, and gives rise to transverse shear stress variation such that the transverse shear stresses vary parabolically across the thickness satisfying shear stress free surface conditions. In the analysis, the two-parameter Pasternak and Winkler foundations are considered. Material properties of the plate are assumed to be graded in the thickness direction according to a simple power-law distribution in terms of the volume fractions of the constituents. The governing equations are derived from the principle of virtual displacements. The accuracy of the present theory is demonstrated by comparing the results with solutions derived from other higher-order models found in the literature. It can be concluded that the proposed theory is accurate and simple in solving the static bending behavior of functionally graded plates.

Keywords: *functionally graded plates, shear deformation theory, higher-order theory, Navier solution*

LISTE DES tableaux

Tableau I.1 : comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.....7

Tableau I.2 : Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les
matériaux composites conventionnels.....9

Tableau II.1 : Différentes fonctions de cisaillement utilisées dans les théories des plaques
isotropes et FGM.....34

Tableau. VI.1 : Effets du rapport côté-épaisseur et les paramètres des fondations élastiques sur
la flèche et les contraintes adimensionnelles d'une plaque FGM isotrope
carrée.....53

Tableau. VI.2 : Effets de l'exposant de la fraction volumique et les paramètres des fondations
élastiques sur la flèche et les contraintes adimensionnelles d'une plaque FGM
carrée ($a/h=10$)55

Listes des figures

Figure I.1: Un type d'un matériau FGM en céramique et métal6

Figure I.2: La variation de la composition d'un FGM7

Figure I.3: La distribution composante des matériaux9

Figure I.4 : Principe de la Méthode de Coulage en Bande.....12

Figure I.5 : Schématiquement la disposition du procédé utilisé par ces auteurs.....15

Figure I.6 : Schéma du procédé dépôt par centrifugation16

Figure .I.7 : Modèles analytiques pour une couche en FGM.....17

Figure I.8 : Les dimensions de la plaque FGM18

Figure I.9: Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.....19

Figure I.10: Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.....20

Figure I.11: Variation du module de Young dans une plaque E-FGM21

Figure .II.1 : Illustration de la plaque de Love-Kirchhoff.....28

Figure .II.2 : Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin (Reddy 1997).....29

Figure .II.3: Illustration de la plaque d'ordre élève.....30

Figure .II.4 : Champs de déplacements des modèles couches discrètes, approche cinématique35

Figure .II.5: Champs de déplacements des modèles zig-zag, approche cinématique.....36

Figure .II.6 : Champ de déplacements du modèle zig-zag d'ordre élevé.....37

Figure III.1 : Plaque FGM reposant sur fondation élastique.....39

Figure III.2 : Variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur de la plaque.....40

Figure. VI.1 : Variation de la flèche adimensionnelle \bar{w} en fonction de la variation du rapport
d'épaisseur a/h pour une plaque FGM carrée reposant sur des fondations
élastiques56

Figure. VI.2 : Variation de la contrainte adimensionnelle $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur d'une
plaque FGM carrée pour différentes valeurs de K_0 ($a/h=10, p=2, K_1 = 10$)56

Figure. VI.3 : Variation de la contrainte adimensionnelle $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur d'une
plaque FGM carrée pour différentes valeurs de K_1 ($a/h=10, p=2, K_0 = 10$).....57

Figure. VI.4 : Variation de la contrainte de cisaillement transversale $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur d'une
plaque FGM carrée pour différentes valeurs de K_0 ($a/h=10, p=2, K_1 = 10$)58

Listes des figures

- Figure. VI.5 : Variation de la contrainte de cisaillement transversale $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur d'une plaque FGM carrée pour différentes valeurs de K_1 ($a/h=10, p=2, K_0 = 10$).....58
- Figure. VI.6 : Variation de la contrainte de cisaillement longitudinale $\bar{\tau}_{xy}$ à travers l'épaisseur d'une plaque FGM carrée pour différentes valeurs de K_0 ($a/h=10, p=2, K_1 = 10$)59
- Figure. VI.7: Variation de la contrainte de cisaillement longitudinale $\bar{\tau}_{xy}$ à travers l'épaisseur d'une plaque FGM carrée pour différentes valeurs de K_1 ($a/h=10, p=2, K_0 = 10$)60
- Figure. VI.8: L'effet de l'anisotropie du matériau sur la flèche adimensionnelle \bar{w} d'une plaque FGM carrée pour différentes valeurs de K_0 ($a/h = 10, p = 2$ et $K_1 = 10$).....61
- Figure. VI.9: L'effet de l'anisotropie du matériau sur la flèche adimensionnelle \bar{w} d'une plaque FGM carrée pour différentes valeurs de K_1 ($a/h = 10, p = 2$ et $K_0 = 10$).....61

LISTE DES NOTATIONS

$E(z)$	Module de Young en fonction de « z »
E_m	Module de Young du métal
E_c	Module de Young de céramique
$G(z)$	Module de cisaillement en fonction de « z »
$\nu(z)$	Coefficient de Poisson en fonction de « z »
ν	Coefficient de Poisson
$\rho(z)$	La densité du matériau en fonction de « z »
$V(z)$	Fraction volumique
k, p	Paramètre du matériau
a	Longueur de la plaque
b	Largeur de la plaque
h	Épaisseur de la plaque
u_0, v_0, w_0	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
u_b, v_b, w_b	Les composantes du champ de déplacement de flexion
u_s, v_s, w_s	Les composantes du champ de déplacement de cisaillement
u, v, w	Les déplacements dans les directions x, y, z .
φ_x, φ_y	Les rotations autour des axes x et y
$\Psi(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$f(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)

Liste des notations

$f'(z)$	La première dérivée de la fonction de gauchissement par rapport à z
f_e	La densité de la force de réaction de la fondation.
$g(z)$	$1-f'(z)$
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Contraintes normales
$\tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{xy}$	Contraintes de cisaillement
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Déformation dans la direction x, y et z
γ_{xz}, γ_{yz}	Déformations de distorsion
$\delta u, \delta v, \delta w$	Champ virtuel de déplacement
N_x, N_y, N_{xy}	Efforts normaux
M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b	Moments de flexion
M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse
θ_x, θ_y	Les rotations des plans yz et xz dues à la flexion
S_{xz}^s, S_{yz}^s	Effort de cisaillement
∂	Dérivée partielle
A_{ij}	Termes de rigidité de la matrice de membrane
B_{ij}	Termes de rigidité de la matrice de couplage
D_{ij}	Termes de la matrice de flexion
A_{ij}^s	Termes de rigidité de la matrice

Liste des notations

B_{ij}^s	Termes de rigidité de la matrice
D_{ij}^s	Termes de rigidité de la matrice
H_{ij}^s	Termes de rigidité de la matrice
(m,n)	nombres de mode
$q(x,y)$	Charge transversale
Ω	La surface supérieure
Q_{ij}	Les coefficients de rigidité
$[K]$	Matrice symétrique des valeurs propres
$[\Delta]$	Le vecteur de déplacement
\bar{w}	Les fréquences adimensionnelles
$\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y$	Les contraintes normales adimensionnelles
$\bar{\tau}_{xy}, \bar{\tau}_{xz}, \bar{\tau}_{yz}$	Les contraintes de cisaillement adimensionnel
$\{ \}$	Vecteur colonne
$[]$	Matrice

Introduction générale

Les plaques soutenues par des fondations élastiques ont été largement adoptées par de nombreux chercheurs pour modéliser divers problèmes d'ingénierie au cours des dernières décennies. De telles structures en plaques peuvent être trouvées dans divers types d'applications industrielles comme les fondations de radeaux, les réservoirs de stockage, les piscines et dans la plupart des constructions de génie civil. Des modèles à un et deux paramètres pour le sol sous la plaque sont introduits pour modéliser la fondation. Le modèle de Pasternak [1] ou le modèle à deux paramètres est largement adopté pour décrire le comportement mécanique des fondations, et le modèle bien connu de Winkler [2], est l'un de ses cas particuliers. En fait, le modèle des fondations élastiques à deux paramètres a été développé pour surmonter l'inadéquation du modèle de Winkler dans la description de la réponse réelle du sol et de la complexité mathématique du continuum tridimensionnel. Le modèle à deux paramètres (modèle Pasternak) prend en compte la déformation en cisaillement entre les ressorts sur le modèle à un paramètre, tandis que le modèle à un paramètre (modèle Winkler) peut être représenté par des ressorts continus. Par conséquent, le modèle de Winkler peut être considéré comme un cas particulier du modèle de Pasternak en réglant le module de cisaillement à zéro.

D'autre part, les matériaux fonctionnellement gradués (FMG) Koizumi, 1993[3], Suresh et Mortensen, 1998[4], une nouvelle génération de matériaux composites non homogènes d'abord proposés pour les barrières thermiques. Koizumi, 1997[5], ont été de plus en plus appliqués pour des structures d'ingénierie modernes dans des environnements à température extrêmement élevée. De nombreuses recherches ont été menées concernant le comportement thermomécanique des FGMs Tanigawa, 1995[6], Suresh et Mortensen, 1997[7]. Cependant, les analyses de flexion et de vibration des FGMs sont assez limitées, en particulier de ceux qui reposent sur des fondations élastiques. Cheng et Kitipornchai (1999) [8] ont proposé une analogie membranaire pour obtenir des valeurs propres explicites exactes pour le flambement par compression, le flambement hygrothermique et la vibration des plaques FGM sur une fondation Winkler-Pasternak basée sur la théorie de la déformation de cisaillement du premier ordre. La même analogie membranaire a ensuite été appliquée aux analyses de plaques et de coques de FGM basées sur une théorie des plaques de troisième ordre Cheng et Batra, 2000[9], Reddy et Cheng, 2002[10]. Récemment, Ait Atmane et al.

Introduction générale

(2010)[11] ont mis au point une nouvelle théorie de la déformation de cisaillement à ordre élevé pour étudier l'analyse des vibrations libres des plaques fonctionnellement graduées simplement appuyées reposant sur une fondation élastique Winkler-Pasternak.

Ce travail vise à fournir une théorie trigonométrique de la déformation de cisaillement pour le comportement en flexion des plaques épaisses FGM reposant sur une fondation élastique Winkler-Pasternak. La théorie actuelle des plaques trigonométriques ne contient que quatre fonctions inconnues, contre cinq fonctions dans le cas de la théorie de la déformation de cisaillement parabolique de Reddy (PSDPT) [12], la théorie de la déformation de cisaillement sinusoidal de Touratier (SSDPT)[13], la théorie de la déformation de cisaillement exponentiel de Karama (ESDPT)[14] et la théorie de la déformation de cisaillement du premier ordre (FSDPT), mais permet de prédire avec plus de précision les déformations et les contraintes et de satisfaire aux conditions limites de la contrainte de cisaillement nulle sur les surfaces de la plaque. Cependant, la théorie actuelle et d'autres théories des plaques d'ordre élevé (HPT) n'exigent pas l'utilisation de facteurs de correction de cisaillement. En conclusion, la théorie actuelle donne des résultats plus précis, en particulier les contraintes transversales de cisaillement, que les autres théories des plaques d'ordre élevé (HPT).

Pour atteindre nos objectifs, ce travail de thèse est devisé en quatre chapitres.

- Le premier chapitre traite des généralités sur les matériaux fonctionnellement gradués FGM et leurs domaines d'application.
- Au second chapitre est consacré à différentes théories des plaques FGM.
- Dans le troisième chapitre on présente une étude de la flexion des plaque fonctionnellement graduée FGM reposant sur des fondations élastiques en utilisant une théorie raffiné à ordre élevée on suppose que les propriétés matérielles variant selon l'épaisseur de la plaque.
- Le quatrième chapitre contient une procédure de résolution, validation et comparaison des résultats.

Le présent travail se termine par une conclusion générale où on souligne cette nouvelle théorie et des perspectives envisagées pour des travaux futures.

I.1. Introduction

Les matériaux à gradient fonctionnel (**F**unctionally **G**raded **M**aterials : FGM) ou les matériaux fonctionnellement gradués sont une nouvelle classe de matériaux composites dont, la microstructure et la composition varient graduellement et continûment avec la position de manière à optimiser les performances mécaniques et thermiques de la structure qu'ils constituent. Ils sont considérés comme des matériaux intelligents dont les fonctions désirées sont intégrées, dès la conception, au cœur même de la matière. À chaque interface, le matériau est choisi selon les applications spécifiques et les charges environnementales. Ces matériaux possèdent de multiples avantages qui peuvent les rendre attractifs du point de vue de leur potentiel d'application. Il peut s'agir de l'amélioration de la rigidité, de la tenue à la fatigue, de la résistance à la corrosion ou de la conductivité thermique en plus d'avoir une gradation des propriétés permettant ainsi d'augmenter ou de moduler des performances telles que la réduction des contraintes locales [15] ou encore l'amélioration du transfert de chaleur [16]. Ce nouveau concept marque le commencement d'une révolution dans les domaines de la science et de la mécanique des matériaux. L'intérêt particulier et grandissant envers les matériaux à gradient fonctionnel, pensés et conçus pour la première fois au Japon, est mis en évidence par les innombrables conférences et publications de qualité dédiées à l'analyse, la conception et la fabrication de ces matériaux.

Une question s'impose : comment ce concept a-t-il germé, et comment l'étude des FGM a-t-elle été lancée ? Aux environs de 1984-1985, dans une université Japonaise, deux chercheurs l'un dans le domaine de l'aéronautique et l'autre dans le domaine des sciences des matériaux rêvent de concevoir un engin spatial dont le revêtement pourrait résister à un environnement thermique très sévère. Il n'existe alors pas de matériau métallique ni de matériau composite capable de répondre à la fois aux exigences environnementales telles que décrites tout en gardant d'excellentes propriétés mécaniques. Ils échangent alors l'idée du concept FGM, autrement dit d'un matériau avec une gradation continue dans la direction de l'épaisseur, passant d'une face totalement métallique vers une face totalement céramique. En 1987, le programme national de recherche et de développement sur les FGM a vu le jour au Japon. Beaucoup de chercheurs des institutions publiques et de l'industrie ont uni leurs efforts pour créer un nouveau type de matériau, principalement pour permettre de construire l'enveloppe extérieure d'une navette intercontinentale commerciale. Le problème principal à résoudre était le flux de chaleur énorme frappant la majorité des surfaces qui sont exposées à

la friction par l'air lors de la période de rentrée de la navette dans l'atmosphère terrestre et en même temps, de protéger l'intérieur contre un surchauffement. Certes, un revêtement céramique aurait pu protéger le fuselage contre les températures qui se développent à la surface, mais on a dû craindre l'action des très grandes contraintes thermo-élastiques aux interfaces entre fuselage métallique et sa protection céramique, se rendant compte des différences entre les modules de Young et les conductivités thermiques des deux matériaux.

L'idée fut alors de produire une transition douce, donc graduelle entre métal pur et céramique pure appelée matériau à gradient fonctionnel (functionally graded material : FGM). En 1990 a eu lieu la première conférence internationale sur les FGM à Sendai-city au Japon. En 1992, les matériaux à gradient fonctionnel ont été sélectionnés parmi les dix premières technologies de pointe au Japon et actuellement dans le monde entier.

La réussite dans le domaine des matériaux intelligents ne sera possible que par une forte synergie entre les différents secteurs industriels et scientifiques. Certes, le concept FGM a été proposé à l'origine pour répondre aux exigences du domaine de l'aéronautique et de l'aérospatial mais ces matériaux sont utilisés dans la fabrication des outils industriels qui exige une grande rigidité, une grande dureté et une résistance thermique importante. Ils ont également des applications en optoélectronique, particulièrement dans la fabrication des fibres optiques capables de transmettre l'information à de très grandes vitesses. Leur application dans les systèmes de conversion de l'énergie solaire en énergie électrique sera probablement effective dans un futur proche dans notre pays qui a un potentiel énorme dans ce domaine. Les FGM sont également les biomatériaux idéaux pour réparer ou combler les déficiences osseuses éventuelles de notre squelette. Cette technique est aussi applicable dans les centrales nucléaires où la température peut atteindre des valeurs considérables. Actuellement, des lanceurs en FGM sont testés et les résultats sont prometteurs. Outre les applications citées précédemment, les FGM trouvent aussi leurs applications dans les semi-conducteurs et en génie civil [17].

Les poutres et les plaques constituent des éléments de base dans les structures aérospatiales, marines et terrestres, c'est pourquoi un intérêt particulier leur est porté, et bien comprendre leur comportement sous diverses sollicitations est une étape cruciale dans l'analyse structurale. Étant donné que les matériaux à gradient fonctionnel ont été pensés et conçus pour résister à des conditions thermiques sévères, le travail de recherche proposé est justement consacré à l'étude de l'instabilité thermique des plaques FGM.

I.2.les matériaux à gradient de propriété FGM

I.2.1 Aperçu historique sur les matériaux à gradient de propriétés

L'amélioration des performances des pièces structurelles peut conduire à rechercher, au sein d'un même matériau, des propriétés différentes, souvent antagonistes, mais localement optimisées. Le développement des matériaux composites a permis d'associer des propriétés spécifiques à différents matériaux au sein d'une même pièce.

L'optimisation locale de ces propriétés, par association d'un matériau de haute dureté à la surface d'un matériau tenace par exemple, pose alors le problème de l'interface. Par exemple, une couche d'un matériau céramique peut coller à la surface d'une structure métallique pour former un revêtement barrière thermique dans les applications à haute température, la transition brusque dans les propriétés des matériaux à travers l'interface entre les matériaux discrets peuvent entraîner une grande contrainte inter laminaire ou une forte concentration de contraintes qui conduit à la déformation plastique ou de fissuration. Une façon pour surmonter ces effets nuisibles on doit employer un matériau à gradient de propriétés FGM. Ces dernières années, les matériaux à gradients de propriétés ont été développés pour leurs excellentes propriétés mécaniques. Ces matériaux ont de grande performances et capables de résister aux températures ultra hautes. Un groupe de scientifiques, à Sendai (Japon) a proposé pour la première fois le concept FGM en 1984, comme étant un nouveau matériau avec une barrière thermique ou des propriétés calorifuge (isolation thermique). Au début, les FGM ont été conçus en tant que tant que matériaux thermiques de barrières dans les applications aéronautiques et les réacteurs. C'est par la suite que les FGM ont été développé dans le domaine militaire, l'automobile, le biomédicale, l'industrie de semi-conducteur et toutes utilisations dans un environnement à hautes températures.

I.2.2. La définition et le concept d'un matériau à gradient de propriété

Un matériau à gradient de propriété c'est un type de matériaux composés de deux ou plusieurs matériaux relatifs à des fractions volumiques et microstructure qui sont conçues pour avoir une continuité spatiale des variables. Un FGM est produit en changeant sans interruption les fractions de volume dans la direction d'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminé.

Ces matériaux FGM sont généralement faits à partir d'un mélange de métaux et de céramique (Figure. I.1) par un processus de métallurgie de poudre .le côté métal riche est

typiquement placé dans les régions où les propriétés mécaniques, comme la dureté, le besoin d'être élevés.

En revanche, la céramique riche, ce qui a la conductivité faible et peut résister aux températures plus élevées, est placée dans les régions de grands gradients de la température.

Le concept de matériaux à gradient de propriété a été développé dans le laboratoire national d'aérospatial en 1984 par un groupe de scientifiques au Japon [18].

L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion.

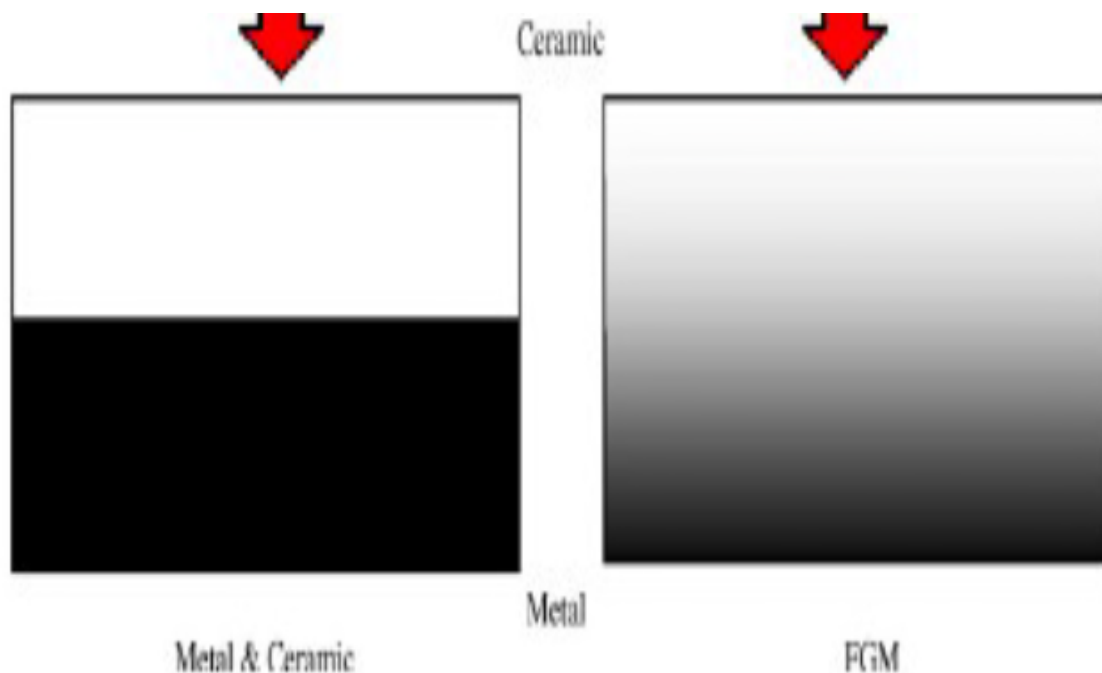


Figure I.1: un type d'un matériau FGM en céramique et métal

Les matériaux à gradient de propriété sont donc des matériaux composites avec un caractère au microscope non homogène. Constitué de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue les FGM (Figure I.2) des matériaux composites conventionnels. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais microstructure différente.

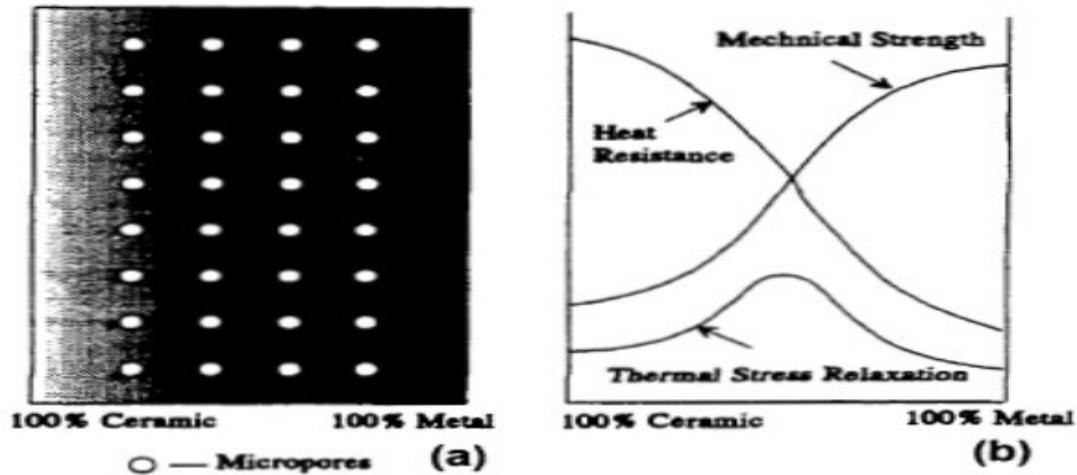


Figure I.2: la variation de la composition d'un FGM

Généralement, les FGM sont des matériaux constitués de plusieurs matériaux à des caractéristiques mécaniques contenant des composantes différentes tels que les céramiques et les métaux. Les vides sont également considérés comme une composante des matériaux FGM [19]. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement non homogènes.

La plupart des FGM sont constitués des céramiques et des métaux dont les propriétés mécaniques sont comparés dans le tableau I.1.

Tableau I.1 : comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal

La face à haute température	Céramique	-bonne résistance thermique. -bonne résistance à l'oxydation. -faible conductivité thermique.
Continuité du matériau d'un point à l'autre « couche intermédiaire »	Céramique-métal	-élimination des problèmes de l'interface ; -relaxer les contraintes thermiques.
La face à basse température	Métal	-bonne résistance mécanique. -conductivité thermique élevée. -très bonne ténacité.

FGM peuvent être utilisés pour différentes applications, telles que couches en céramique barrières thermiques pour les moteurs, turbines à gaz, couches minces en optiques...etc.

D'autres applications potentielles de ce matériau sont diverses et nombreuses, elles ont été récemment, rapporté dans la littérature ouverte par exemple, des sondes des déclencheurs des armures métal \ céramique, des détecteurs photoélectriques et des implants dentaires un certain nombre de revues traitant les différents aspects de ce matériau ont été éditées pendant les deux dernières décennies. Il a été montré dans ces revues que la majorité des recherches récentes en FGM sont concentrés sur l'analyse mécanique de la rupture ainsi que sur les contraintes thermiques.

Dans l'avenir, les FGM avec des propriétés des formes complexes x, y compris les deux et gradients en trois dimensions, seront produits en utilisant la fabrication assistée par ordinateur.

Ce potentiel signifie que le concepteur n'est plus limité à une palette du matériel existant homogène. Bien que beaucoup de recherches aient été consacrées à l'analyse des FGM, les ingénieurs et autres professionnels engagés dans le processus de conception avec les FGM manquent de cadre unifié pour la prise de décisions concernant la façon de tirer le meilleur parti du choix possible en fonction de ce "menu" d'ingrédients produits et de matières disparates [20].

I.3. L'intérêt d'utilisation d'un FGM

Il y a beaucoup d'intérêt pour la mise sur pied des structures ainsi les conditions fonctionnelles peuvent varier avec l'endroit. Dans la plupart des cas, ceci impliquera de varier les matériaux qui sont employés aux endroits spécifiques dans la structure ayant pour résultat les interfaces discrètes dans tout. À nombre de proposer des techniques manufacturières pour le traitement de FGM [20].

Récemment, les concepts de FGM sont devenus d'intérêts scientifiques pour améliorer l'exécution des systèmes géométriquement complexes des structures.

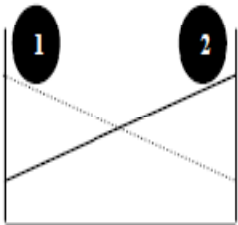
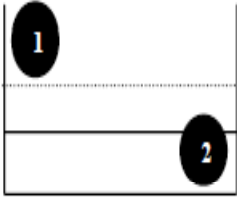
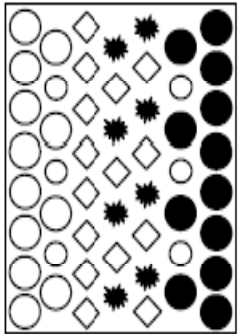
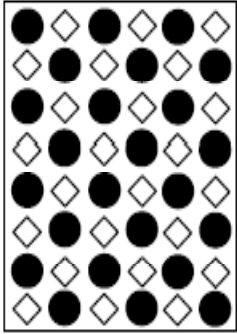
I.3.1. Différence entre FGM et les matériaux composites traditionnels

Un modèle simple illustrant les différences entre les matériaux à gradient de propriété (FGM) et les matériaux plus conventionnels est montré sur (Figure I.3): (a) un matériau plan composé, (b) un matériau relié et (c) un matériau à gradient de propriété.

Le matériau plan composé à une caractéristique plane, et le matériau relié à une frontière sur l'interface de deux matériaux.

Les FGM ont d'excellentes caractéristiques qui diffèrent de ceux des matériaux plans composés et reliés. Par conséquent, les FGM attirent l'attention en matière de leur application dans les domaines industriels. Puisque les FGM ont une double propriété des deux matières premières qui sont mélangés ensemble, et la distribution composante est graduée sans interruption.

Tableau I.2 Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels

<p>Propriétés</p>	<p>1 Résistance mécanique</p> <p>2 Conductivité thermique</p>		
<p>Structure</p>	<p>Eléments constitutants:</p> <p>céramique ○</p> <p>métal ●</p> <p>microporosité ○</p> <p>fibre ◇*</p>		
<p>Matériaux</p>	<p>exemple</p>	<p>FGM</p>	<p>NON-FGM</p>

Par exemple, l'un des FGM qui se composent du métal et en céramique a la caractéristique de la conductivité thermique et de la force métallique dans le côté en métal et la résistivité aux hautes températures dans le côté en céramique [21].

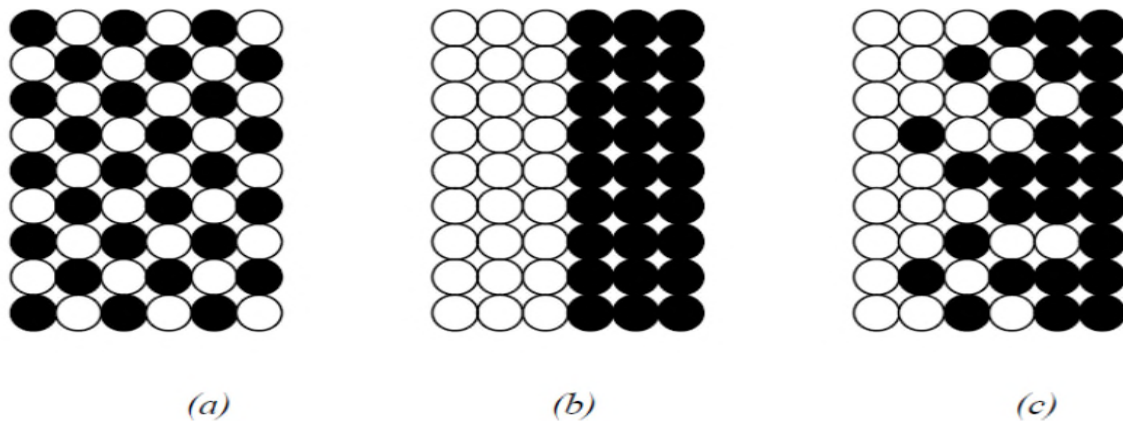


Figure I.3: La distribution composante des matériaux

Matériau plan composé (a), Matériau relié (b), Matériau à gradient de propriété (c).

I.3.2. Procédés de fabrication FGM

L'utilité des composites à gradient de propriété avec une structure à gradient a été identifiée dans les articles théoriques.

Cependant, leurs travaux n'ont qu'un effet limité, probablement en raison d'un manque de méthodes de production appropriées pour FGM à ce moment-là. Cela a pris 15 ans supplémentaires jusqu'à ce que la recherche systématique sur des processus de fabrication pour les matériaux à gradient de propriétés ait été effectuée dans le cadre d'un programme de recherche national sur les FGM au Japon.

Depuis lors, une partie de la recherche sur FGM a été consacrée au traitement de ces matériaux et une grande variété de méthodes de production a été développée.

Le processus de fabrication d'un FGM peut habituellement être divisé en établissant la structure dans l'espace non homogène « gradation » et la transformation de cette structure en matériau en bloc « consolidation ». Des processus constitutifs sont basés sur un habillage par étapes de la structure graduée à partir des matériaux de précurseur ou des poudres. Les principaux procédés disponibles de nos jours pour la production des matériaux FGM :

- coulage séquentiel en barbotine (Slip casting),
- coulage en bande (Tape casting),
- projection thermique (plasma),

- dépôt chimique et physique en phase vapeur (CVD et PVD)

- les frittages laser différentiel sont les plus importants. [22]

I.4.Méthodes les d'élaboration des FGM

Les procédés de fabrication d'un matériau à gradient évalué peuvent habituellement être divisés en construisant la structure dans un espace hétérogène (mélange graduel) et transformation de cette structure en un seul matériau (solidification). Les processus de mélange graduels peuvent être classés dans les constituants, l'homogénéisation et la ségrégation. Les procédés élémentaires sont basés sur la fabrication par étapes de structure en matériaux graduels précurseurs ou poudres.

Les avancer en technologie d'automatisation pendant les dernières décennies a rendu des processus élémentaires de progression technologiquement et économiquement durable. Dans la procédure d'homogénéisation qui traite une interface pointue entre deux matériaux est convertie dans un gradient par transport matériel.

Les procède d'homogénéisation et de ségrégation produit un gradient continu, mais ont des limitations au sujet des types de gradients qui peuvent être produits. Habituellement le séchage et la solidification suivent les étapes du mélange graduel. Le besoin de ces processus de consolidation doit être adapté aux FGM. Une attention particulière doit être également prêtée au rétrécissement inégal de FGM pendant la consolidation [23].

Dans ces dernières années, les travaux menés par les chercheurs ont permis de développer une méthode originale pour élaborer des composites à gradient continu de composition. Cette méthode est basée sur une technique de Co-Sédimentation de poudres en milieu proportionnel à la densité du matériau et au carré du diamètre de particule. En contrôlant et en adaptant les répartitions granulométriques de chaque poudre, il est possible d'obtenir différents gradients de concentration dans le dépôt formé à l'issue de sédimentation.

Il existe de nombreuses méthodes d'élaboration des matériaux à gradients évalués, les techniques les plus employées sont brièvement expliquées ci-dessous.

I.4.1.Coulage en Bande (Tape Casting Ou Doctor-Blade)

Le coulage en bande consiste à couler une barbotine de poudres fines en suspension aqueuse ou non aqueuse (la plupart des travaux commerciaux utilisent le procédé non aqueux)

sur un support plan en couches minces et régulières (figure 1.4). Les produits obtenus sont des feuillets avec des épaisseurs contrôlées (25 —1000 μm) .Après un raffermissement de la pâte, les feuillets sont démoulés et ensuite découpés.

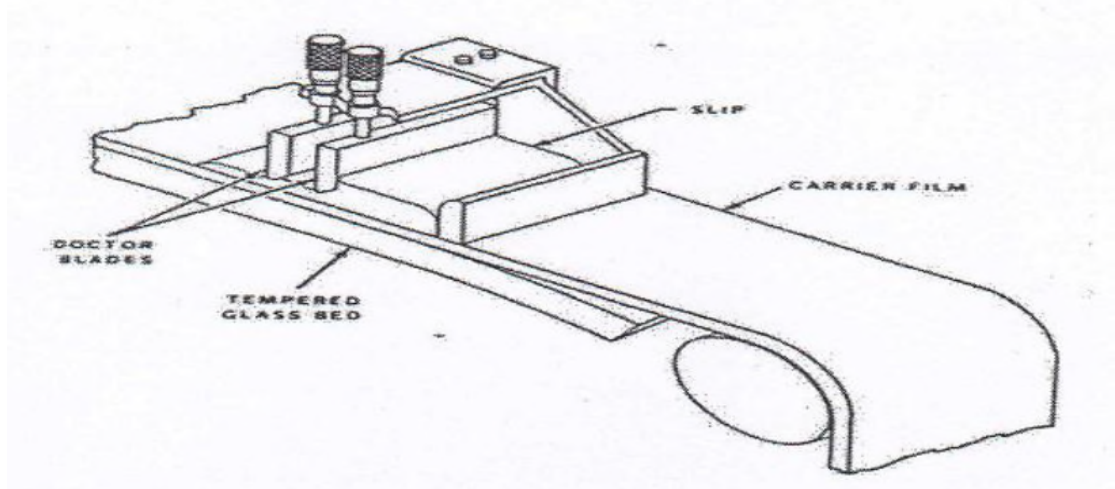


Figure I.4 Principe de la Méthode de Coulage en Bande

Le solvant doit avoir un point d'ébullition très bas et une viscosité faible. Il doit être soluble avec le liant, le plastifiant et les autres ajouts, mais ne doit être ni soluble ni réactif avec la poudre céramique. Le liant donne une grande résistance mécanique au produit crut en permettant son maniement. Généralement un plastifiant est ajouté au liant pour baisser sa viscosité.

Le liant, le plastifiant et le dé flocculant doivent être totalement dégagés pendant le délainage.

Le procédé de coulage en bande est largement utilisé pour réaliser des matériaux composites laminaires suivant deux méthodes : soit par réalisation directe de bandes multicouches grâce à un système de lames multiples, c'est le cas des tris-couches élaborés par Mistler [24] ; soit par empilage de couches élaborées séparément, dont la cohésion est ensuite assurée par une étape de thermo compression [25].

I.4.2.Coulage Séquentiel en Barbotine (Slip Casting)

Le coulage en barbotine (Slip Casting) consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, laissant un tesson (couche de poudre compacte) sur la surface du moule. Après séchage, on obtient le corps en cru.

Donc le coulage se décompose en deux étapes essentielles:

- Formation du tessou ou "prise".
- Consolidation du tessou ou "raffermissement".

La filtration, c'est-à-dire la formation du tessou lors du coulage, peut être considérée comme un processus d'élimination d'une partie de l'eau de la barbotine ; cette eau migre à travers la couche de tessou déjà formée, sous l'effet :

- du pouvoir de succion de la plate (coulage classique).
- ou d'une pression appliquée sur la barbotine (coulage sous pression).

Dans le cas de la fabrication de multicouches, après la formation du premier tessou le dépôt de la deuxième couche s'effectue de manière telle que la barbotine ne pénètre pas dans le tessou formé. Ce procédé est successivement reproduit pour les autres couches.

I.4.3. Dépôt par Électrophorèse

Un autre processus est ajouté aux différentes techniques de la fabrication des FGM, ce qu'on appelle le dépôt par électrophorèse (EPD) est un processus assez rapide à faible coût, capable de produire les matériaux à gradient de propriété changeant sans interruption avec la géométrie complexe. EPD se compose de deux processus, c'est-à-dire le mouvement des particules chargées en suspension dans un champ électrique entre deux électrodes (électrophorèses) et le dépôt de particules sur l'une des électrodes [26]. EPD permet la conception des matériaux à gradient de propriété en forme de plaque binaire en déposant +d'une suspension de poudre à laquelle une deuxième suspension est sans interruption ajoutée pendant le processus. Le dépôt est un contrat de poudre emballée étroite qui a besoin de l'agglomération pour réaliser les composants matériels entièrement denses.

I.4.4. Compaction Sèche des Poudres

Cette technique consiste à verser successivement dans un moule en acier les poudres, et à chaque fois qu'une poudre est versée une faible compression est exercée. Ensuite la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Ce procédé est suivi généralement par une pression isostatique et un délainage. La densification sera enfin l'étape finale. Ce procédé peut être envisagé pour la fabrication de pièces de formes complexes. En effet il s'applique aussi avec la technique du pressage isostatique, et de façon industrielle.

I.4.5. Projection plasma

Un gaz soumis à une forte température (par exemple celle d'un arc électrique), se transforme en un état ionisé (plasma). Cette transformation est accompagnée d'un dégagement de chaleur important. Si une particule de céramique se trouve dans cet environnement, elle se fond totalement ou superficiellement, ce qui permet de la situer sur un substrat.

La projection plasma des particules des divers matériaux est devenue une méthode très utilisée pour fabriquer des FGM. L'équipement relativement simple, le rendement élevé du dépôt des particules sur des substrats à géométrie compliquée, les performances des surfaces en fonctionnement et la compatibilité des céramiques avec les métaux sont les avantages essentiels de cette technique.

I.4.6 C. V. D. et P. V. D.

Les dépôts chimiques ou physique en phase vapeur est des techniques dans lesquelles les atomes du matériau source sont déposés sur la surface du substrat.

Les techniques de C.V.D. et P. V. D. peuvent être utilisées pour la préparation de F.G.M sur des substrats de formes compliquées.

I.4.7. Frittage et Infiltration

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes. La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique.

Cette technique peut être généralement appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres.

I.4.8. Frittage Laser Différentiel

Le rayonnement thermique du laser permet le contrôle de la température et la focalisation du point à chauffer. La différence de l'intensité de l'irradiation sur différents points du matériau, provoque un frittage différentiel le long de la pièce, ce qui résulte en des

microstructures différentes, dépendant de la position du point irradié ont utilisé cette technique pour élaborer un F.G.M de PSZ/Mo. La figure I.5 montre schématiquement la disposition du procédé utilisé par ces auteurs [27].

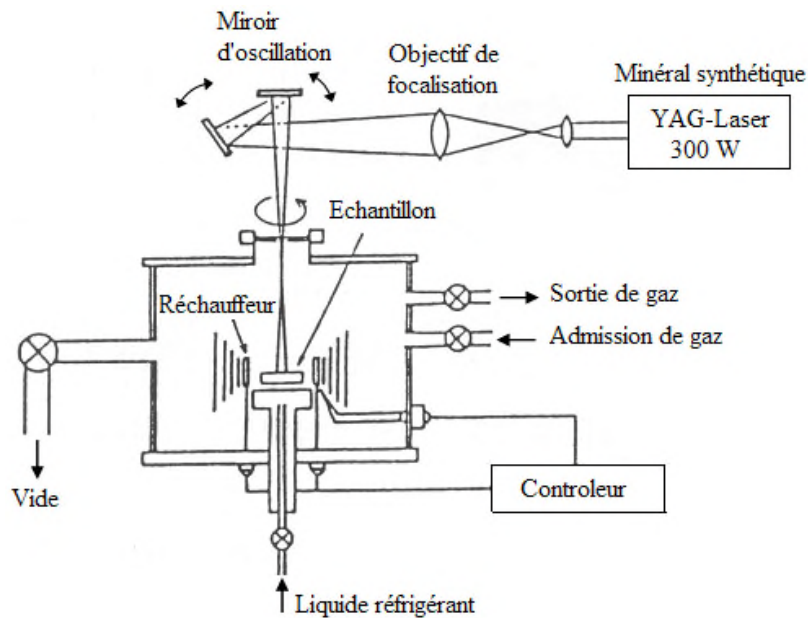


Figure I.5 schématiquement la disposition du procédé utilisé par ces auteurs

I.4.9. Implantation Ionique (Sputtering)

C'est une technique avancée pour la fabrication des F.G.M permettant de réaliser seulement des épaisseurs fines ($<1\mu\text{m}$) sur différents substrats (plastiques, céramiques, et métaux). Le traitement s'effectue par les faisceaux énergétiques d'ions ou via des gaz réactifs. Les couches fabriquées présenteront un gradient de composition qui peut être très finement contrôlé.

I.4.10. Dépôt par Centrifugation

La technique consiste à verser une suspension colloïdale relativement diluée dans des flacons cylindriques, le tout est soumis à une centrifugation. La sédimentation s'opère et le liquide surnageant est retiré. Ce procédé est répété pour obtenir des multicouches (figure I.6)

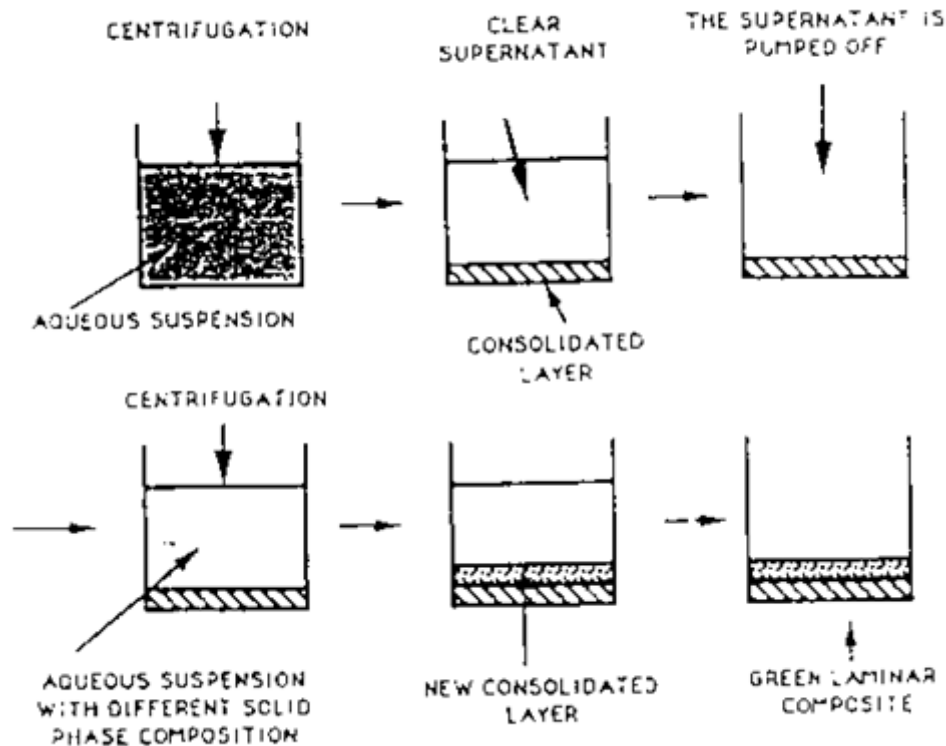


Figure I.6 schéma du procédé dépôt par centrifugation

I.5. Propriétés matérielles effectives d'un matériau FGM

Les matériaux à gradient de propriété sont généralement fabriqués par deux phases matérielles avec des propriétés différentes. Une description détaillée des microstructures graduées réelles n'est pas disponible, excepté peut-être pour l'information sur la distribution de fraction volumique. Puisque la fraction de volume de chaque phase varie graduellement dans la direction de la graduation, les propriétés effectives des FGM changent le long de cette direction.

Par conséquent, nous avons deux approches possibles pour modéliser un FGM.

- La première approche : une variation par tranche de fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée, et le FGM est pris pour être posé avec la même fraction de volume dans chaque région, c.-à-d., couches quasi homogènes de céramique-métal.
- La deuxième approche: une variation continue de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée (figure. I.4), et la fraction de volume en métal peut être représentée suivant une fonction dépendante de la coordonnée Z (épaisseur) [28].

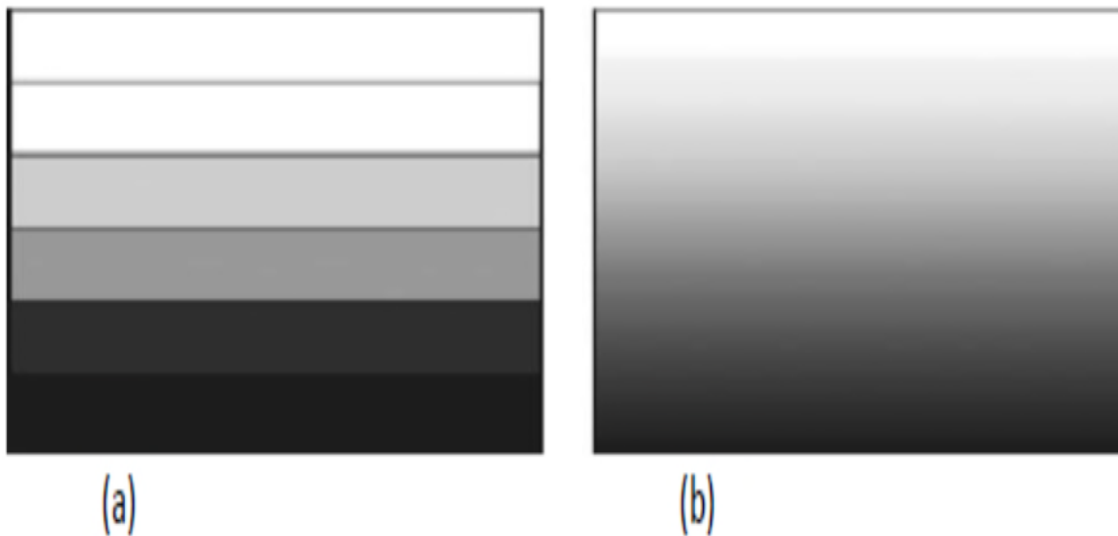


Figure. I.7 : Modèles analytiques pour une couche en FGM.

I.6. Revue sur les différentes lois qui régissent la variation des propriétés matérielles

Suivant l'épaisseur d'une plaque FGM. Considérant une plaque élastique rectangulaire (figure I.7.). Les coordonnées x et y définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe z lancé sur la surface moyenne de la plaque est dans la direction de l'épaisseur.

Les propriétés matérielles comme suite : le module d'Young, la densité et le coefficient de Poisson, sur les surfaces supérieures et inférieures sont différents mais sont déterminés selon les demandes d'exécution.

Cependant, le module d'Young, la densité et le coefficient de Poisson des plaques changent sans interruption seulement dans la direction d'épaisseur (l'axe z)

$$E = E(z), \quad \rho = \rho(z), \quad \nu = \nu(z)$$

Et ont indiqué que l'effet du coefficient de Poisson sur la déformation est beaucoup moins important que celui du module d'Young. Donc, on suppose que le coefficient de Poisson de la plaque F.G.M est constant dans tout point de la plaque,

D'ailleurs cette propriété est sensiblement la même pour les matériaux avec lesquels on va travailler. Alors le module d'Young et la densité changent dans la direction de l'épaisseur de la plaque FGM suivant une fonction de loi de puissance (P-FGM), une fonction exponentielle (E-FGM), ou une fonction sigmoïde (S-FGM). [29].

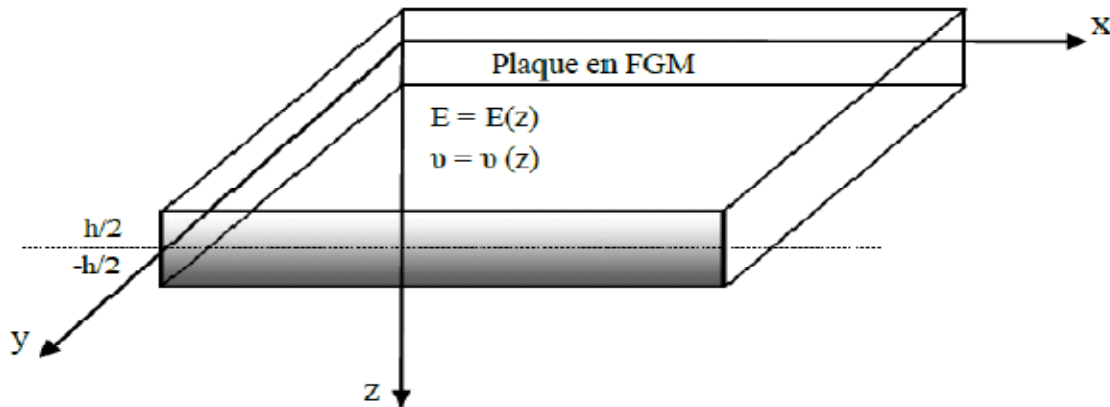


Figure I.8 Les dimensions de la plaque FGM.

I.6.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance.

$$V(z) = \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^k \quad (\text{I.1})$$

Où k est un paramètre matériel et h est l'épaisseur de la plaque. Une fois la fraction volumique locale $v(z)$ a été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges [30]:

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)V(z) \quad (\text{I.2})$$

Où E_1 et E_2 sont respectivement les modules d'Young de la surface inférieure ($z = -h/2$) et de la surface supérieure ($z = h/2$) de la plaque FGM, la variation du module d'Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la (figure I.9), il apparaît clairement que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour $k < 1$, et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour $k > 1$.

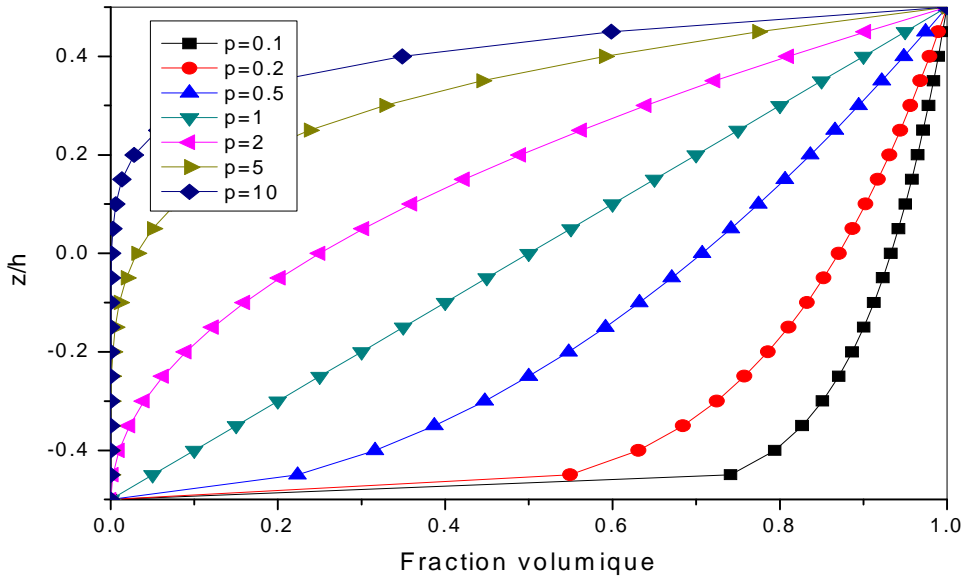


Figure I.9: Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.

I.6.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

Dans le cas d'ajouter une plaque P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interface où le matériau est continu mais change rapidement [31]. Par conséquent, Chung et chi [32] ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces.

Les deux fonctions de loi de puissance sont définis par:

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 + z}{h/2} \right)^k \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.3.a})$$

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - z}{h/2} \right)^k \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.3.b})$$

En utilisant la loi des mélanges, le module d'Young de la plaque S-FGM peut être calculé par:

$$E(z) = V_1(z)E_1 + [1 - V_1(z)]E_2 \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.4.a})$$

$$E(z) = V_2(z)E_1 + [1 - V_2(z)]E_2 \text{ Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.4.b})$$

La (figure I.9) montre que la variation de la fraction volumique dans les équations (I.4.a) et (I.4.b) représente les distributions sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée (Plaque S-FGM).

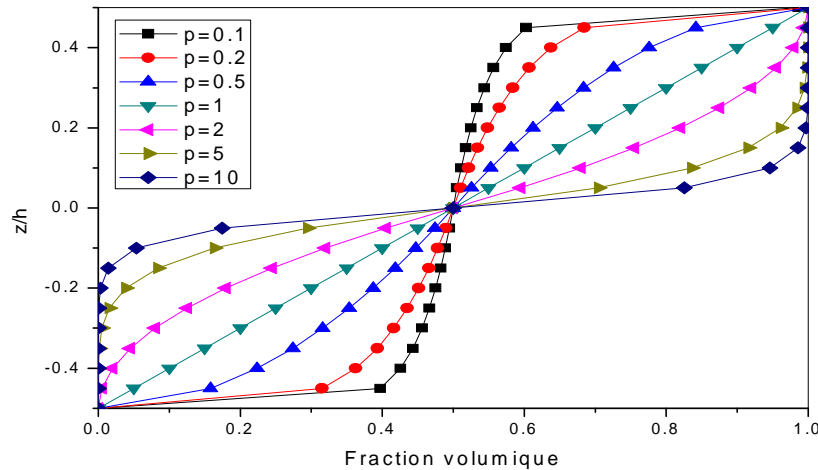


Figure I.10: Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.

I.6.3. Les propriétés matérielles de la poutre E-FGM

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme, [33]:

$$E(z) = E_2 e^{B(z+h/2)} \quad (\text{I.5.a})$$

Avec

$$B = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{E_1}{E_2} \right) \quad (\text{I.5.b})$$

La variation du module d'Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans la (figure I.11).

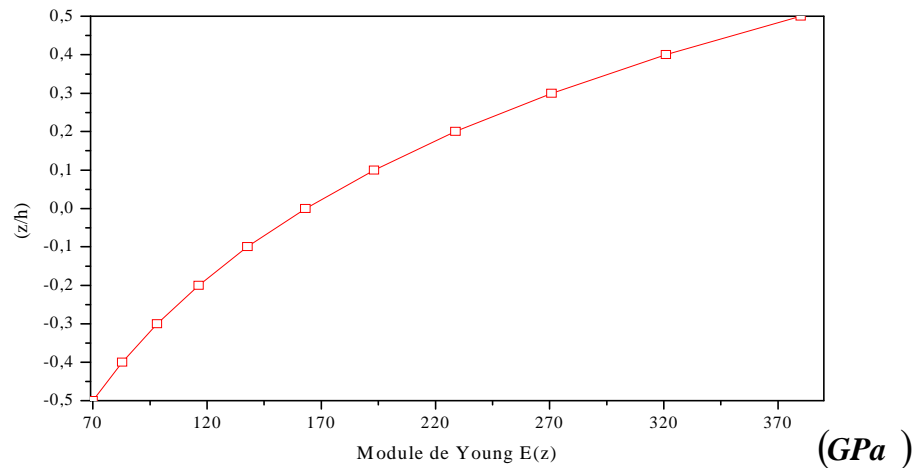


Figure I.11: Variation du module d'Young dans une plaque E-FGM

I.7. Propriétés physiques et mécaniques des FGM

Pour ce travail le matériau FGM choisi est (Aluminium-Céramique). L'aluminium est un métal blanc qui après polissage peut devenir réfléchissant.

Les propriétés physiques : l'aluminium a une température de fusion relativement basse d'environ 660° . Il en résulte une facilité de fusion qui présente un avantage certain pour les opérations de fonderie.

L'aluminium est très ductile, on peut aisément le mettre en forme.

La masse volumique de l'aluminium est de 2700 kg/m^3 . L'utilisation de l'aluminium s'impose donc dans les domaines aéronautiques et du transport. [20].

Les 4 propriétés mécaniques des métaux présentent un grand intérêt dans la vie quotidienne, elles peuvent être classées en deux groupes [20]:

Celles qui se rapportent à la résistance mécanique du métal :

- Résistance à la traction.
- Résistance à la pénétration (dureté).

Celles qui concernent les modifications de forme que le métal peut subir sans se briser :

- La malléabilité (mise en feuilles).
- La ductilité (mise en fils).

I.7.1. Propriétés des alliages d'aluminium

L'Aluminium a pour propriétés une :

- Température de travail élevée.
- Très bonne résistance à la corrosion.
- Légèreté.
- Très bonnes solidités, dureté et rigidité.
- Bon rapport force/poids.
- Bonnes propriétés de protection contre les interférences électromagnétiques.
- Bonne conductivité thermique.
- Conductivité électrique élevée
- Conductivité électrique élevée
- Entièrement recyclable.
- Bonnes caractéristiques de finition.
- Entièrement recyclable.

I.7.2. Résistance à la corrosion

Grâce à la couche d'oxyde qui se forme en surface, les alliages d'aluminium résistent à la corrosion. On peut rendre cette couche protectrice d'oxyde plus épaisse par galvanisation.

L'aluminium et ses alliages peuvent être utilisés sans protection supplémentaire comme revêtement extérieur de bâtiments.

Par contre dans les milieux corrosifs, les alliages d'aluminium peuvent subir les effets de la corrosion.

Des piqures, de la corrosion sous contrainte, de la fatigue corrosion, voire de la corrosion généralisée peuvent se développer.

Pour des conditions données, la sévérité de l'attaque dépend de l'alliage utilisé et de son état [34].

I.7.3. Propriété physique de céramique

La céramique résulte des terres et des roches broyées (matériaux géologiques) ou bien d'une argile qui sera modelée puis cuite sous haute température (transformation irréversible) ce qui fait perdre au matériau sa plasticité donc il ne peut plus se réhydrater [20].

La céramique a une facilité de fusion qui présente un avantage certain pour les opérations de fonderie.

La masse volumique de la céramique est de 3800 kg/m³.

L'utilisation de la céramique s'impose dans les domaines de l'habitat et du design, l'industrie céramique et métallurgique, aéronautique et spatial, médicale et dans les revêtements [34].

I.7.4. Propriété mécanique de céramique

Les propriétés mécaniques de la céramique dépendent des :

- Matière première employées.
- Méthodes de fabrication qui fixent les microstructures finales et déterminent la répartition des différentes phases en présence.

I.7.5. Propriété de céramique

Les propriétés de la céramique sont :

- un module d'Young élevé.

Une dureté élevée (surfaces de frottement qui doivent

- résister à l'usure, résistance mécanique élevée, bonne tenue à chaud, rigidité élevée).

- une très bonne résistance à la compression non à la traction (Résistance à la compression = 200MPa) [20]

I.8. Domaine d'application des FGM

On trouve une littérature très importante sur l'utilisation de ce matériau. Cependant, l'utilisation des structures en FGM dans les environnements avec de grands changements de température exige la connaissance des déformations, le matériau FGM peut être utilisé dans plusieurs domaines tels qu'en [20] [34].

- **Aéronautique**

- ✓ L'amélioration des engins spatiaux.
- ✓ Création de barrières thermiques.

- **Electronique et optique)**

- ✓ Fibres optiques avec une grande vitesse de transmission.
- ✓ Les circuits d'ordinateurs.
- ✓ Les téléphones cellulaires.

- **Biomatériaux**

- ✓ Dents.

- **Industrie**

- ✓ Les machines.
- ✓ Les outils.
- ✓ Soudure.
- ✓ Structure.

- **Génie civil :**

- ✓ *les joints dans la charpente métallique* : Lors de l'assemblage des éléments, on est obligé de réaliser des soudures entre les éléments de nature différente (acier/aluminium). L'utilisation des joints en FGM est une solution optimale.

- ✓ **Protection des structures métalliques soumises à un environnement thermique sévère :** Les industriels utilisent souvent un revêtement en céramique, matériau résistant à la chaleur et faible conducteur thermique.
- ✓ **Contrôle de la réponse sismique par FGM piézoélectrique:** Afin de minimiser les déplacements et d'éviter les dégâts dûs aux séismes.
- ✓ **Centrales thermiques.**
- ✓ **Dans les chaussées rigides :** Les FGM sont utilisés dans les chaussées rigides en béton avec une gradation obtenue par la variation de la fraction volumique de fibres, cette technique est utilisée dans les autoroutes et les routes à très fort trafic où l'utilisation d'une chaussée souple en béton bitumineux est déconseillée à cause de la température élevée.
- ✓ **Les grandes vitres des grattes de ciel :** Les vitres sont en FGM pour contrôler la température dans les zones chaudes et éviter les vitrages multiples.
- ✓ **Les tunnels:** La paroi intérieure des tunnels doit être réalisée en matériau réfractaire et rigide et d'un matériau imperméable dans la surface en contact avec le sol et les roches.
- ✓ **ponts à poutre en caisson, les cheminées, les fondations élastiques (ces structures de plaques peuvent être trouvées dans différents d'applications industrielles telles que radiers), réservoirs de stockage, les piscines.**

➤ **Chimique**

- ✓ L'échangeur de chaleur.
- ✓ Tube de chaleur.
- ✓ Récipient de réaction.

➤ **L'énergie nucléaire**

- ✓ Composante des réacteurs nucléaires.
- ✓ Pastilles de combustible.

➤ Conversion

- ✓ Générateur thermoélectrique.
- ✓ Convertisseur thermoïonique.
- ✓ Pile à combustible.

➤ Produits en générale

- ✓ Matériaux de constructions.
- ✓ Cors de voiture.
- ✓ Verres de fenêtre.

➤ Autres

- ✓ Cartes mémoires.
- ✓ Batte de Baseball

I.9. Conclusion

Nous avons vu dans ce chapitre une brève introduction aux matériaux à gradient de propriété FGM, d'où une vue sur l'historique de leur développement, leur propriété. Et puis en est passé à décrire les différentes lois qui régissent la variation des propriétés matérielles (module d'Young, la masse volumique, coefficient de poisson), ces lois peuvent être de puissance, exponentielles ou même sigmoïdes. À la fin nous avons terminé, par les propriétés physiques et mécaniques des matériaux FGM et leurs domaines d'application. Le chapitre suivant va porter sur les différentes théories des plaques applicables aux structures FGM.

II.1. Introduction

Nous présentons dans ce chapitre quelques modèles sur les théories des plaques développées dans la littérature pour améliorer l'évolution de la variation du champ des déplacements à travers l'épaisseur des plaques.

Afin de résoudre les problèmes des structures ayant comme éléments structuraux des poutres et des plaques FGM dans le domaine élastique, il est nécessaire de choisir la bonne théorie décrivant correctement le comportement statique et dynamique de la structure ainsi que la méthode de résolution à appliquer.

C'est en 1888 que Love utilisa les hypothèses de Gustav Kirchhoff, elles-mêmes inspiraient des hypothèses d'Euler-Bernoulli pour fonder une théorie des plaques minces (également appelée théorie classique ou théorie de Kirchhoff-Love). La théorie des plaques semi-épaisses (théorie des déformations du premier ordre) a été consolidée par Mindlin à partir des travaux de Timoshenko (1959) [35], Reissner (1945)[38].

Ensuite, des théories d'ordre supérieur sont venues améliorer les hypothèses des théories classiques et du premier ordre lorsque l'épaisseur de la plaque devient importante. Il existe aussi la théorie basée sur l'élasticité tridimensionnelle (théorie 3-D) qui ne fait aucune hypothèse restrictive sur les déplacements de la plaque.

Un matériau FGM est un type de matériaux composites classé par leur microstructure variable dans l'espace, conçu pour optimiser l'exécution des éléments de structures par la distribution de propriétés correspondantes. Les distributions de propriétés sont trouvées dans une variété de produits communs qui doivent avoir des fonctions multiples (c'est-à-dire multifonctionnelles) comme les liaisons entre les particules qui doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture mais doivent également être assez dures sur l'extérieur pour empêcher l'usure. Une structure FGM peut être considérée comme un corps hétérogène. La caractéristique géométrique d'une plaque est une épaisseur faible par rapport aux autres dimensions.

L'intérêt d'une approche tridimensionnelle réside dans l'obtention de résultats exacts tridimensionnels, utiles notamment comme référence. L'adoption d'une approche tridimensionnelle ne présente toutefois d'utilité que dans la mesure où les équations différentielles finalement obtenues peuvent être résolues. L'approche tridimensionnelle (3D) est donc limitée à certains cas de géométrie, empilement et chargement simple. Là encore une approche (3D) peut fournir des informations dans certains cas (bord libre droit, plaque

simplement appuis....) mais il est préférable d'envisager des démarches bidimensionnelles (2D) de type plaque plus opératoires. Dans la suite ce sont ces approches 2D qui seront mentionnées.

II.2. Modèles analytiques des plaques

II.2.1 La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT)

On parle d'une plaque mince, lorsque la flèche générée par les déformations de cisaillement reste négligeable devant la flèche générée par la courbure de la plaque.

Dans le cas d'une plaque homogène isotrope, la part de cisaillement dans la flèche est directement reliée à l'élanement (L/h).

La théorie classique des plaques minces (CPT) se base sur les hypothèses de Love-Kirchhoff, selon lesquelles une droite normale au plan moyen de la plaque reste perpendiculaire après déformation (figure II.1), ce qui revient à négliger les effets de déformation en cisaillement transverse. Ce modèle de plaque peut être référé à [35] et [36]

En se basant sur les hypothèses ci-dessus, le champ de déplacement est donné par :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

Avec (u_0, v_0, w_0) sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ($z = 0$)

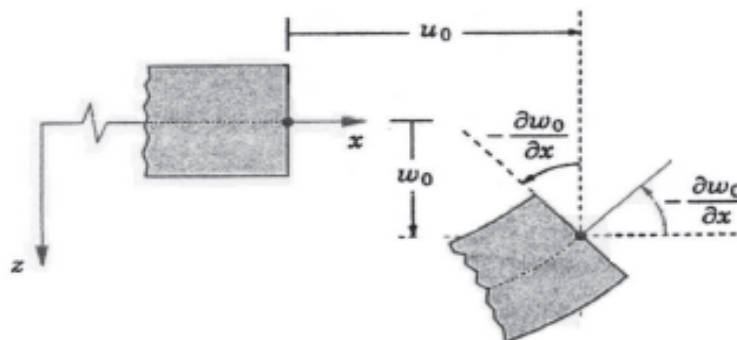


Figure II.1 : Illustration de la plaque de Love-Kirchhoff

Puisque ce modèle ne tient pas en compte l'effet de cisaillement transverse, il donne des résultats non précis pour les plaques épaisses.

II.2.2. Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)

La théorie de déformation de cisaillement du premier ordre à prolonger la théorie classique des plaques en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse. Dans ce cas les contraintes et les déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque, ce qui nécessite l'introduction d'un du facteur de correction de cisaillement. Les études sur la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) peuvent être trouvées dans les références [38] [39].

La théorie du premier ordre est basée sur le champ de déplacement suivant :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\phi_x(x, y), \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\phi_y(x, y), \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y), \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

Avec : (u_0, v_0, w_0) et (ϕ_x, ϕ_y) sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y, respectivement.

Le champ de déplacements définis dans l'expression ci-dessus permet de reprendre la théorie classique des plaques décrite dans la dernière section par le remplacement de

$$\phi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad \phi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y}.$$

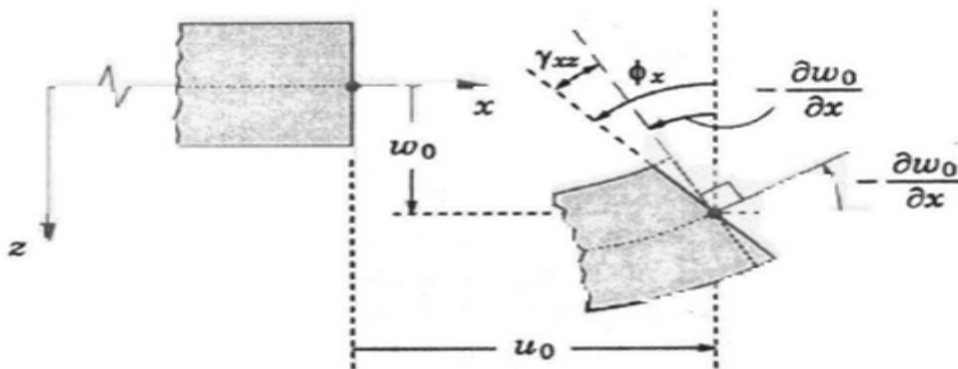


Figure II.2 : Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin (Reddy 1997).

Pour éviter l'introduction d'un facteur de correction, des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevé ont été développées.

II.2.3. Théorie de déformation en cisaillement D'ordre élève (HSDT)

À la différence de la théorie classique des plaques (CPT) et la théorie du premier ordre (FSDT) avec les hypothèses de la distribution linéaire du déplacement à travers l'épaisseur, la théorie d'ordre élevé est basée sur une distribution non linéaire des champs à travers l'épaisseur. Par conséquent, on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et/ou de la déformation normale transversale.

Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction. Les références sûres de tels modèles peuvent être trouvées dans [40]; [41]; [42];[43];[44].

Nous avons introduit ici quatre modèles de plaque utilisés pour analyser le comportement des plaques matériaux à gradient de propriété.

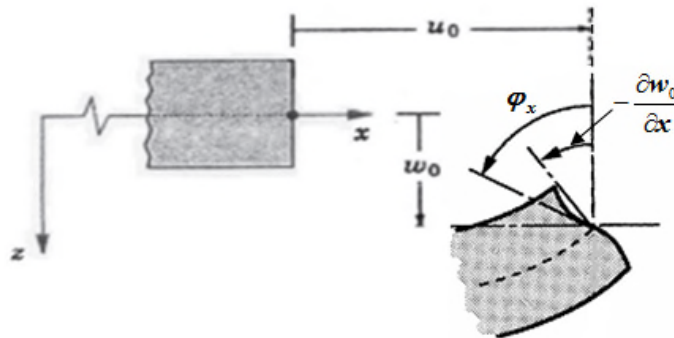


Figure II.3: illustration de la plaque d'ordre élève

Le champ de déplacement est généralement écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + f(z) \phi_x(x, y) \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + f(z) \phi_y(x, y) \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y)
 \end{aligned} \tag{II.3}$$

Avec : (u_0, v_0, w_0) et (ϕ_x, ϕ_y) sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y, respectivement. $(\phi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x, \phi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y)$, $f(z)$ est une fonction de cisaillement transverse caractérise les théories correspondantes.

En effet, les déplacements de la théorie classique de plaque (CPT) sont obtenus par en prenant $f(z)=0$, alors que la théorie de premier ordre (FSDPT) peut être obtenue par $f(z)=z$.

Les déplacements de théorie de déformation de cisaillement de la troisième de Reddy (TSDT) [22,28] sont obtenus par :

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4}{3h^2} z^2 \right) \quad (\text{II.4})$$

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement membranaire est cubique. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution d'élasticité tridimensionnelle.

La distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique dans l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

Touratier [13] propose le modèle sinus (SSDT) qui est différent des autres modèles d'ordre supérieur puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme ci-dessous :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (\text{II.5})$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par les modèles (sinus) prennent une forme sinusoïdale dans l'épaisseur de la poutre. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy.

La version exponentielle de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The exponential shear deformation plate theory ESDPT) développée par Karama et al. [14] est obtenue en prenant :

$$f(z) = ze^{-2(z/h)^2} \quad (\text{II.6})$$

La version hyperbolique de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The hyperbolic shear deformation plate theory HSDPT) développée par Ait Atmane et al [11]. est obtenue en prenant :

$$f(z) = \frac{\cosh(\pi/2)}{[\cosh(\pi/2)-1]} z - \frac{(h/\pi)\sinh\left(\frac{\pi}{h}z\right)}{[\cosh(\pi/2)-1]} \text{ Et } \varphi_z = 0 \quad (\text{II.7})$$

II.3 Revue sur les différents modèles de la théorie d'ordre élevé

Pour franchir les limites des théories du premier ordre, plusieurs auteurs ont proposé quelques contributions importantes pour le développement de modèles d'ordre élevé qui se sont distingués dans la littérature par l'expression de la fonction de cisaillement $f(z)$. Les modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs de déplacement à travers l'épaisseur, et qui permettent de représenter le gauchissement de la section transversale dans la configuration déformée (Figure II.3) [13];[44] ; [45]. Nous citons en particulier :

- L'approche d'Ambartsumyan Ambartsumyan (1969) [46] avec :

$$f(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad (\text{II.8})$$

- L'approche de Reissner Reissner (1945) [45] avec :

$$f(z) = \frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.9})$$

- L'approche de Levinson, Murthy Murthy (1981) et Reddy [47] [50] Avec :

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.10})$$

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal w , est constant [50]. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle dans le cas homogène.

La distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique à travers l'épaisseur (elle doit être parabolique par couches pour un multicouche). Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites. Les résultats du modèle de Reddy sont également très proches des deux modèles d'ordre élevé proposés par Kant (2002) [51].

Touratier propose le modèle (sinus) qui est différent des autres modèles d'ordre élevé puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est

donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur [52]. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme suite:

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) = \frac{h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \left(\frac{\pi z}{h}\right)^{2n+1} \\
 &= z \left(1 - \frac{\pi^2}{3!} \frac{z^2}{h^2} + \frac{\pi^4}{5!} \frac{z^4}{h^4} - \frac{\pi^6}{7!} \frac{z^6}{h^6} + \dots \right)
 \end{aligned}
 \tag{II.11}$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par le modèle (sinus) prennent une forme cosinusoidale à travers l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy (1984) [50]. En se basant sur les travaux de Touratier, un élément fini triangulaire à six nœuds, est construit pour les structures multicouches non linéaires géométriques par Polit (1997) et Dau (2006) [48] [49].

Récemment, Afaq et *al.* (2003)[50] proposent un modèle exponentiel avec une cinématique plus riche. La fonction de distribution de cisaillement transverse est de la forme Suivante:

$$f(z) = z e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}
 \tag{II.12}$$

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance pair et impair du variable z , alors que la fonction (sinus) de Touratier (1991) [13] ne permet qu'un développement en puissance impair.

Malgré le fait que les modèles d'ordre élevé assurent une continuité de déplacement et de déformation à l'interface, les contraintes de cisaillement inter laminaire et les contraintes d'interface, restent discontinues. Ceci présente un inconvénient lors de l'analyse locale de l'interface des structures multicouches dont les propriétés des couches sont très différentes.

Tableau II.1 : Différentes fonctions de cisaillement utilisées dans les théories des plaques isotropes et FGM

Théorie	intitulé	Fonction de cisaillement $f(z)$	Distribution de γ_{xz} et γ_{yz} suivant z	Coefficient de correction de cisaillement	Domaine de validité
CPT, Kirchhoff (Kirchhoff, G.R. 1850 a) et (Kirchhoff, G.R. 1850 b)	Théorie classique des plaques	0	-----	-----	Plaques minces
FSDT, Mindlin (Mindlin. R.D 1951)	Théorie de déformation des plaques du 1 ^{er} ordre	z	Constante	Requis	Plaques minces et moyennement épaisses
Ambartsumian (Ambartsumian, S.A. 1958)	Théorie d'ordre supérieur	$\frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right)$	Quadratique	Non Requis	Plaques minces et moyennement épaisses
Reissner (Reissner. E 1975)	Théorie d'ordre supérieur	$\frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$	Parabolique	Non Requis	Plaques minces et épaisses
TSDPT, Touratier (Touratier. M 1991)	Théorie de déformation trigonométrique des plaques	$\frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right)$	Parabolique	Non Requis	Plaques minces et épaisses
ESDPT, Karama et al. (Karama et al. 2003)	Théorie de déformation exponentielle des plaques	$ze^{-2(z/h)^2}$	Parabolique	Non Requis	Plaques minces et épaisses

II.4. Les différents modèles des structures composites dans l'élasticité bidimensionnelles

II.4.1. Approche monocouche équivalente

Dans l'approche monocouche équivalente, le nombre d'équations ne dépend pas du nombre de couche, la plaque multicouche est homogénéisée et est donc considérée comme une seule couche [51].

Depuis le premier travail de Sophie Germain en 1815 sur les plaques minces en passant par les modèles du premier ordre de Love-Kirchhoff et de Reissner-Mindlin, de nombreux auteurs ont développé des théories de plaques à partir de cinématiques ou champs de contraintes plus raffinées.

II.4.2. Approche par couche

Ces approches sont destinées justement à mieux décrire les effets d'interface pour les matériaux composites conventionnels. La (Figure. II.3) et les équations (II.2) et (II.3) montrent aussi que cette approche est applicable pour les matériaux FGM. Ainsi différents modèles issus de l'approche par couches ont été proposés [52]. Le multicouche est subdivisé en sous-structures (correspondant en fait à chaque couche ou chaque ensemble de couches). On applique à chaque sous-structure une théorie du premier ordre ou un modèle d'ordre élevé, imposant un champ de déplacement vérifiant la continuité aux interfaces entre les différentes couches. Les modèles de ce type sont relativement coûteux (l'ordre des équations de comportement dépend du nombre de couche), mais ils permettent l'obtention de résultats plus précis, notamment en ce qui concerne le calcul des contraintes hors plan.

D'une manière générale, les modèles de l'approche par couches peuvent être classés en deux groupes :

- ✓ Les modèles couches discrètes ou chaque couche sont considérées comme une plaque en imposant les conditions de continuité en déplacements ou en contraintes aux interfaces.
- ✓ Les modèles zigzag ou la cinématique satisfait à priori les conditions de contact est indépendants du nombre de couches. (figures. II.4 et II.5).

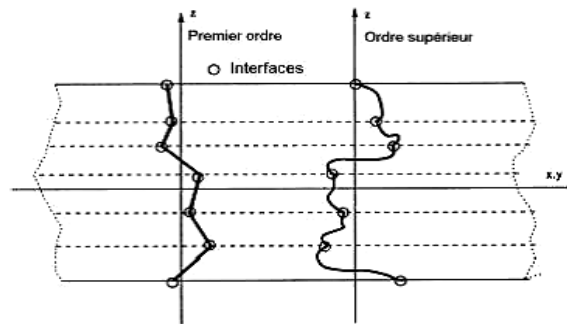


Figure. II.5. Champs de déplacements des modèles couche discrètes, Approche cinématique.

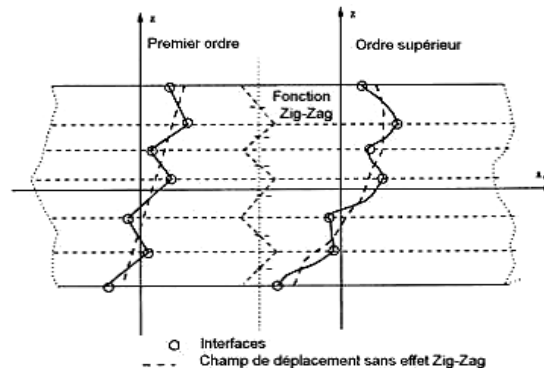


Figure. II.5. Champs de déplacements des modèles zig-zag, Approche cinématique

II.4.3. Approche développement asymptotique :

Le développement asymptotique est appliqué à des structures a priori peu épaisses ou le rapport entre l'épaisseur et la plus grande dimension est petit. Il est donc naturel d'envisager un développement asymptotique suivant ce rapport. Ce développement intervient au niveau de l'intégration des équations de l'élasticité (équations constitutives, équations de mouvements).

II.5 Théorie de zig-zag

Pour mieux décrire la déformation en cisaillement des matériaux composites, certains auteurs ont associé la théorie d'ordre élevé à celle dite de zig-zag, cette dernière est destinée justement à mieux décrire les effets d'interface. Ainsi, différents modèles issus de l'approche par couches ont été proposés. Le multicouche est subdivisé en sous structures (correspondant en fait à chaque couche ou chaque ensemble de couches). On applique à chaque sous-structure une théorie du premier ordre ou un modèle d'ordre élevé. La cinématique des modèles zig-zag satisfait a priori les conditions de contact et elle est indépendante du nombre de couches. L'avantage principal du champ de déplacement des modèles zig-zag réside dans la bonne modélisation de la distorsion de la normale à la surface déformée, ainsi que dans la vérification des conditions de continuité, et ce sans augmenter pour autant le nombre et l'ordre des équations fondamentales de la théorie du premier ordre. Le recours à des coefficients de

correction pour cisaillement transverse est évité. En se basant sur le concept de Di Sciuva, plusieurs auteurs ont réalisé des améliorations significatives pour le modèle zig-zag.

L'amélioration principale est l'introduction d'une distribution non linéaire des déplacements. On superpose le champ zig-zag (linéaire par morceaux) à un champ de déplacement d'ordre élevé (souvent cubique) (Figure II.6).

Les conditions de compatibilité sont satisfaites sur les surfaces supérieures et inférieures des plaques pour réduire le nombre de paramètres.

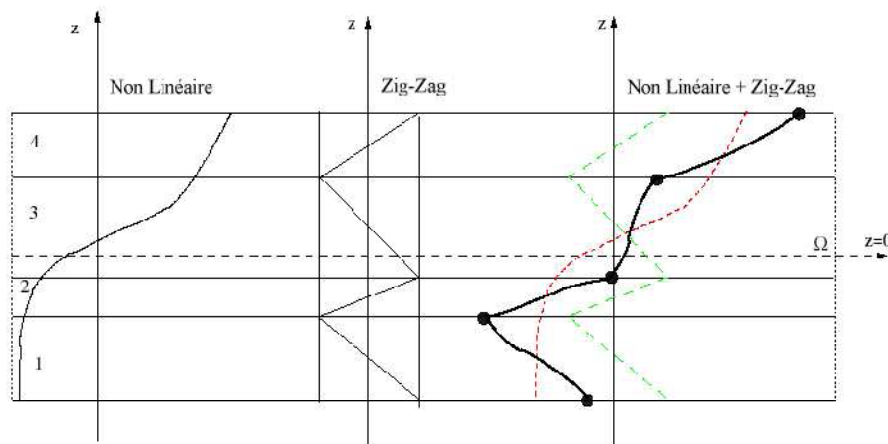


Figure II.6 : Champ de déplacements du modèle zig-zag d'ordre élevé

II.6 Conclusion

Dans ce chapitre on a décrit les différentes théories des plaques (la théorie classique CPT, la théorie de cisaillement de premier ordre FSDPT, la théorie d'ordre élevé HSDPT) à savoir l'approche monocouche équivalente, l'approche par couches et l'approche développement asymptotique.

Nous concluons aussi que l'approche monocouche équivalente est mieux adaptée pour les matériaux FGM car il n'y a pas de changement brusque dans les caractéristiques mécaniques contrairement aux composites conventionnels où le délaminage est un problème à ne pas écarter.

Donc on a eu recours au modèle monocouche équivalent pour les plaques sandwich pour différentes théories d'ordre élevé où la prise en compte du cisaillement transversal est nécessaire pour une étude plus exacte.

III.1.Introduction

L'utilisation croissante des matériaux avancés dans les éléments de structures a éveillé l'intérêt des chercheurs à l'étude de la réponse des plaques fonctionnellement graduée (FGM) utilisées dans des domaines à fort gradient thermique.

Les FGM sont des matériaux où les propriétés varient continuellement à travers l'épaisseur à partir de la surface de la céramique exposée à de fortes températures à celle du métal. Les propriétés mécaniques varient graduellement à travers l'épaisseur suivant une simple loi de puissance. Du moment où la plupart des applications des FGM se sont concentrées dans des environnements à température élevée.

Dans ce chapitre, on a présenté une théorie raffinée des plaques qui prend en considération l'effet de cisaillement transverse pour analyser le comportement de flexion d'une plaque épaisse fonctionnellement graduée reposant sur des fondations élastiques.

III.2.Formulation du problème :

Considérons une plaque rectangulaire de longueur a , largeur b et d'épaisseur h . en matériau à gradient de propriété avec le système de coordonnées comme illustré dans la Fig.1. Il est supposé reposer sur une fondation élastique du type Winkler-Pasternak avec k_0 la rigidité de Winkler et k_1 la rigidité au cisaillement. Les propriétés matérielles de la plaque FMG, telle que le module d'Young E , sont supposées être en fonction de la fraction volumique des matériaux constitutifs. La plaque FGM doit être soumise à une charge transversale $q(x, y)$.

Les coordonnées x et y de la forme rectangulaire du plan cartésien sont introduites dans l'analyse de la déformation de la plaque actuelle. La plaque considérée est délimitée par les plans de coordonnées $x = 0, a$ et $y = 0, b$. La surface de référence est la surface médiane de la plaque définie par $z = 0$, et z désigne la coordonnée d'épaisseur mesurée à partir de la surface médiane non déformée.

Deux techniques d'homogénéisation sont utilisées pour trouver les propriétés effectives à chaque point de la couche FGM. La règle des mélanges est la technique conventionnelle et simple qui est largement utilisée dans les matériaux composites. Dans cette technique, la propriété effective des MGF peut être approchée sur la base de l'hypothèse qu'une propriété composite est la moyenne pondérée en volume des propriétés des constituants. Une autre approche largement utilisée pour la caractérisation de la gradation des matériaux est la technique micromécanique. Dans cette technique, les modules élastiques effectifs d'une FGM

sont déterminés à partir des fractions volumiques et des formes des constituants. La méthode Mori-Tanaka [53] et la méthode cohérente (Hill, 1965)[57] sont deux schémas populaires de la technique micromécanique. Récemment, Chehel Amirani et al (2009) [54] ont étudié la vibration libre de la poutre sandwich avec noyau FG et ont montré qu'il y a une différence insignifiante entre les résultats obtenus par ces deux techniques (technique micromécanique et technique de la règle des mélanges). Ainsi, dans les sections suivantes, la règle de la technique des mélanges est utilisée pour sa simplicité.

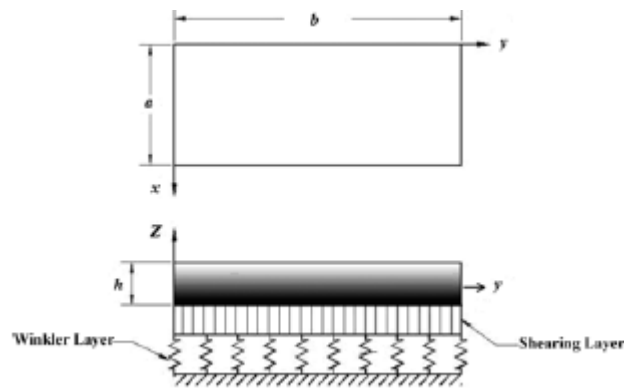


Figure III.1 : Plaque FGM reposant sur fondation élastique.

La relation fonctionnelle entre E et z pour la plaque de FGM en céramique et en métal est supposée par Ait Atmane 2010[11], Praveen et Reddy 1998[55], Mechab et al., 2010[56].

$$E(z) = E_m + E_{cm} V_f \quad (1a)$$

Où

$$E_{cm} = E_c - E_m, \quad V_f = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p \quad (1b)$$

Où E_c et E_m sont respectivement les propriétés correspondantes de la céramique et du métal, et p est l'exposant de la fraction volumique qui prend des valeurs supérieures ou égales à zéro. L'hypothèse de loi de puissance ci-dessus reflète une règle simple de mélanges utilisés pour obtenir les propriétés effectives de la plaque céramique-métal. La règle des mélanges s'applique uniquement à la direction de l'épaisseur. Notez que la fraction volumique du métal est élevée près de la surface inférieure de la plaque, et celle de la céramique élevée près de la surface supérieure. De plus, (1) indique que la surface inférieure de la plaque ($z = -h/2$) est

riche en métal alors que la surface supérieure ($z = h/2$) de la plaque est riche en céramique. En général, le coefficient de Poisson ν varie dans une petite fourchette. Pour la simplicité, ν est supposé constant à travers l'épaisseur de la plaque. La figure 2 montre la distribution de la fraction volumique de la phase métallique à travers l'épaisseur pour plusieurs valeurs de l'indice de la loi de puissance. La valeur de p égale à zéro représente une plaque entièrement en céramique et l'infinie de p représente une plaque entièrement métallique. La variation de la composition de la céramique et du métal est linéaire pour $p = 1$.

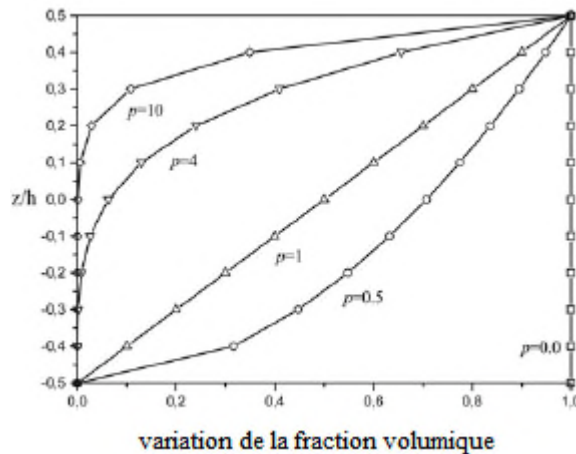


Fig.III.2 : Variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur de la plaque

Lorsque la valeur de p augmente, la fraction volumique V diminue, la teneur en métal dans une plaque FG augmente.

III.2.1. Théorie de la plaque à ordre élevé :

Les déplacements d'un point matériel situé en (x, y, z) dans la plaque peuvent s'écrire comme suit:

$$u = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + \Psi(z) \theta_x \quad (2a)$$

$$v = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + \Psi(z) \theta_y \quad (2b)$$

$$w = w_0(x, y) \quad (2c)$$

où u, v, w sont des déplacements dans les directions x, y, z , u_0, v_0, w_0 sont des déplacements de plan médian, θ_x, θ_y , les rotations des plans yz et xz dues à la flexion, respectivement.

$\Psi(z)$ représente la fonction de cisaillement déterminant la distribution des déformations et des contraintes transversales de cisaillement le long de l'épaisseur.

Le champ de déplacement de la théorie classique des plaques minces (CPT) s'obtient facilement en mettant $\Psi(z)=0$. Le déplacement de la théorie des plaques de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDPT) est obtenu en mettant $\Psi(z)=z$.

De plus, le déplacement de la théorie des plaques de déformation de cisaillement du troisième ordre (TSDPT) de Reddy (1984)[12] est obtenu par :

$$\Psi(z) = z\left(1 - \frac{4z^2}{3h^2}\right) \quad (3a)$$

La théorie des plaques de déformation de cisaillement sinusoïdal (SSDPT) de Touratier (1991) [13] est obtenue en mettant :

$$\Psi(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (3b)$$

En plus, la Théorie des Plaques de Déformation de cisaillement Exponentielle (ESDPT) de Karama et d'autres. (2003) [14] est obtenu en mettant :

$$\Psi(z) = z.e^{-2(z/h)^2} \quad (3c)$$

III.2.2.Présente théorie raffinée de déformation de cisaillement :

Contrairement aux autres théories, le nombre de fonctions inconnues impliquées dans la théorie actuelle de la déformation de cisaillement hyperbolique raffinée (RHSDT) n'est que de quatre, contre cinq dans le cas d'autres théories de déformation de cisaillement (Reddy, 1984 [12] ; Touratier, 1991 [13] ; Karama et al., 2003 [14]). La théorie présentée est variablement cohérente. N'exige pas de facteur de correction de cisaillement et donne lieu à une variation des contraintes de cisaillement transversales, de sorte que les contraintes de cisaillement transversales varient paraboliquement sur toute l'épaisseur.

III.2.2.1. Les hypothèses de la présente théorie des plaques (RHSDT) :

Les hypothèses (de RHSDT) sont comme suit :

- Les déplacements sont faibles par rapport à l'épaisseur de la plaque et, par conséquent, les déformations impliquées sont infinitésimales.
- Le déplacement transversal w comprend deux composantes de flexion w_b , et de cisaillement w_s . Ces composants sont des fonctions de coordonnées x, y seulement.

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \quad (4)$$

- La contrainte transversale normale σ_z est négligeable par rapport aux contraintes dans le plan σ_x et σ_y .

- Les déplacements u dans la direction x et v dans la direction y sont constitués de composants d'extension, de flexion et de cisaillement.

$$U = u_0 + u_b + u_s, \quad \text{et} \quad V = v_0 + v_b + v_s \quad (5)$$

Les composantes de flexion u_b et v_b sont supposées être similaires aux déplacements donnés par la théorie classique des plaques. Par conséquent, l'expression pour u_b et v_b peut être donnée sous la forme :

$$u_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial x} \quad \text{et} \quad v_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial y} \quad (6)$$

Les composantes de cisaillement u_s et v_s donnent lieu, en conjonction avec w_s , aux variations paraboliques des déformations de cisaillement γ_{xz} , γ_{yz} et donc aux contraintes de cisaillement τ_{xz}, τ_{yz} à travers l'épaisseur de la plaque de telle sorte que les contraintes de cisaillement τ_{xz}, τ_{yz} sont nulles dans la surface supérieure et inférieure de la plaque. Par conséquent, l'expression de u_s et v_s donnée comme suite :

$$u_s = -f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x}, \quad v_s = -f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (7)$$

III.2.2.2. Cinématique et équations constitutives :

Sur la base des hypothèses faites dans la section précédente, le champ de déplacement peut être obtenu en utilisant les équations (4)-(7) comme :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \end{aligned} \quad (8a)$$

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y)$$

Où

$$f(z) = \frac{(h/\pi) \sinh\left(\frac{\pi}{h} z\right) - z}{[\cosh(\pi/2) - 1]} \quad (8b)$$

Les déformations associées aux déplacements dans l'équation (8) sont :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + z k_x^b + f(z) k_x^s \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_y^0 + z k_y^b + f(z) k_y^s \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^0 + z k_{xy}^b + f(z) k_{xy}^s \\ \gamma_{yz} &= g(z) \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz} &= g(z) \gamma_{xz}^s \\ \varepsilon_z &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Où

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x}, k_x^b = \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}, k_x^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial y}, k_y^b = \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}, k_y^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}, k_{xy}^b = -2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y}, k_{xy}^s = -2 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \\ \gamma_{yz}^s &= \frac{\partial w_s}{\partial y}, \gamma_{xz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ g(z) &= 1 - f'(z), f'(z) = \frac{\partial f(z)}{\partial z} \end{aligned} \quad (10)$$

Pour les FGMs élastiques et isotropes, les relations constitutives peuvent s'écrire ainsi :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \text{ et } \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

Où $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{yx})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz})$ sont les composants des contraintes et déformations, respectivement. En utilisant les propriétés matérielles définies dans l'équation (1), les coefficients de rigidité, Q_{ij} peuvent être exprimés comme suit :

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu^2} \quad (12a)$$

$$Q_{12} = \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2} \quad (12b)$$

$$Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad (12c)$$

Puisque la surface inférieure de la plaque est supposée être soumise à la fondation élastique Winkler-Pasternak (voir Fig. 1), la relation réaction- déflexion à la surface inférieure du modèle est exprimée

$$f_e = k_0 w - k_1 \nabla^2 w \quad (13)$$

Où f_e est la densité de la force de réaction de la fondation. Si la fondation est modélisée comme la fondation de Winkler linéaire, le coefficient K_1 dans l'équation (13) est égal à zéro.

III.2.2.3. Les équations d'équilibres :

Les équations d'équilibre peuvent être dérivées en utilisant le principe des travaux virtuels.

$$\int_{-h/2}^{h/2} \int_{\Omega} [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}] d\Omega dz + \int_{\Omega} [f_e \delta w] d\Omega - \int_{\Omega} [q \delta w] d\Omega = 0 \quad (14)$$

Où Ω est la surface supérieure.

Substituer Eq (8), (9) et (11) en Eq (14) et intégrer à travers l'épaisseur de la plaque, Eq. (14) peut être réécrit comme :

$$\int_{\Omega} [N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_{xy} \delta \varepsilon_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b + M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^s + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^s] d\Omega + \int_{\Omega} [f_e (\delta w_b + \delta w_s)] d\Omega - \int_{\Omega} q (\delta w_b + \delta w_s) d\Omega = 0 \quad (15)$$

Où

$$\begin{Bmatrix} N_x & N_y & N_{xy} \\ M_x^b & M_y^b & M_{xy}^b \\ M_x^s & M_y^s & M_{xy}^s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{Bmatrix} dz, \quad (16a)$$

$$(\mathcal{Q}_{xz}^s, \mathcal{Q}_{yz}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) g(z) dz \quad (16b)$$

Les équations d'équilibre peuvent être dérivées de l'équation Eq (15) en intégrant les gradients de déplacement par parties et en fixant les coefficients $\delta u_0, \delta v_0, \delta w_b, \delta w_s$ zéro séparément. Ainsi, on peut obtenir les équations d'équilibre associées à la présente théorie de déformation de cisaillement,

$$\begin{aligned} \delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \delta v_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= 0 \\ \delta w_b : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} - f_e + q &= 0 \\ \delta w_s : \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial^2 S_{yz}^s}{\partial y} - f_e + q &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

En utilisant l'équation (11) dans l'équation (16), les résultats de contrainte d'une plaque de FGM peuvent être liés aux contraintes totales par:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ A & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix}, S = A^s \gamma \quad (18)$$

Où

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t, M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t \quad (19a)$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}^t, k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}^t, k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\}^t \quad (19b)$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \quad (19c)$$

$$B^s = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix}, D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix}, H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix} \quad (19d)$$

$$S = \{S_{xz}^s, S_{yz}^s\}^t, \gamma = \{\gamma_{xz}, \gamma_{yz}\}^t, A^s = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix} \quad (19e)$$

où A_{ij} , B_{ij} , etc., sont la rigidité de la plaque, définie par

$$\begin{Bmatrix} A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s \\ A_{12}, B_{12}, D_{12}, B_{12}^s, D_{12}^s, H_{12}^s \\ A_{66}, B_{66}, D_{66}, B_{66}^s, D_{66}^s, H_{66}^s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11}(1, z, z^2, f(z), zf(z), f^2(z)) \begin{Bmatrix} 1 \\ v \\ \frac{1-v}{2} \end{Bmatrix} dz, \quad (20a)$$

$$(A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s) = (A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s) Q_{11} = \frac{E(z)}{1-\nu^2} \quad (20b)$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{2(1+\nu)} [g(z)]^2 dz \quad (20c)$$

III.3.Solutions exactes pour les plaques FGM simplement appuyées :

Les plaques rectangulaires sont généralement classées en fonction du type d'appui utilisé. Nous nous intéressons ici aux solutions analytiques de l'équation (données à l'annexe A) pour les plaques FG simplement appuyées. Les conditions aux limites suivantes sont imposées sur les bords latéraux.

$$v_0(0, y) = w_b(0, y) = w_s(0, y) = \frac{\partial w_s}{\partial y}(0, y) = 0 \quad (21a)$$

$$v_0(a, y) = w_b(a, y) = w_s(a, y) = \frac{\partial w_s}{\partial y}(a, y) = 0 \quad (21b)$$

$$N_x(0, y) = M_x^b(0, y) = M_x^s(0, y) = N_x(a, y) = M_x^b(a, y) = M_x^s(a, y) = 0 \quad (21c)$$

$$u_0(x, 0) = w_b(x, 0) = w_s(x, 0) = \frac{\partial w_s}{\partial x}(x, 0) = 0 \quad (21d)$$

$$u_0(x, b) = w_b(x, b) = w_s(x, b) = \frac{\partial w_s}{\partial x}(x, b) = 0 \quad (21e)$$

$$N_y(x, 0) = M_y^b(x, 0) = M_y^s(x, 0) = N_y(x, b) = M_y^b(x, b) = M_y^s(x, b) = 0 \quad (21f)$$

Pour résoudre ce problème, Navier a présenté la force externe sous la forme d'une double série trigonométrique :

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{\min} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \quad (22)$$

Où $\lambda = m\pi/a$ et $\mu = n\pi/b$, m et n sont des numéros de mode. Pour le cas d'une charge distribuée sinusoïdale, nous avons :

$$m = n = 1 \quad \text{et} \quad q_{11} = q_0 \quad (23)$$

Où q_0 représente l'intensité de la charge au centre de la plaque. En suivant la procédure de la solution de Navier, nous supposons que les solutions sous la forme suivante (u_0, v_0, w_b, w_s) satisfont les conditions aux limites.

$$\begin{cases} u_0 \\ v_0 \\ w_b \\ w_s \end{cases} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} U_{mn} \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \\ V_{mn} \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \\ W_{bmn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \\ W_{smn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \end{bmatrix} \quad (24)$$

U_{mn} , V_{mn} , W_{bmn} et W_{smn} Sont des paramètres arbitraires à déterminer.

En substituant les équations (24), (23) et (22) dans les équations de l'annexe A, nous obtenons :

$$[K]\{\Delta\} = \{F\} \quad (25)$$

Où

$$\{\Delta\}^T = \{U_{mn}, V_{mn}, W_{bmn}, W_{smn}\}, \quad \text{et} \quad \{F\}^T = \{0, 0, -q_{mn}, -q_{mn}\} \quad (26)$$

Et

$$[K] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix} \quad (27)$$

Les éléments de la matrice symétrique [K] sont définis à l'annexe B.

L'annexe A :

$$\begin{aligned} & A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - B_{11} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial y^2} - B_{11}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} \\ & - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial y^2} = 0 \end{aligned} \quad (A1)$$

$$\begin{aligned} & (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^2 \partial y} - B_{22} \frac{\partial^3 w_b}{\partial y^3} \\ & - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^2 \partial y} - B_{22}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial y^3} = 0 \end{aligned} \quad (A2)$$

$$\begin{aligned}
 & B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + B_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} - D_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} \\
 & - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22} \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - D_{11} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} \\
 & - f_e + q = 0
 \end{aligned} \tag{A3}$$

$$\begin{aligned}
 & B_{11}^s \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + B_{22}^s \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} - D_{11}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} \\
 & - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - H_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} - H_{22}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2} \\
 & + A_{55}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + A_{44}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} - f_e + q = 0
 \end{aligned} \tag{A4}$$

L'annexe B :

Les éléments $a_{ij} = a_{ji}$ de la matrice [K] sont donnés par :

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= -(A_{11} \lambda^2 + A_{66} \mu^2) \\
 a_{12} &= -\lambda \mu (A_{12} + A_{66}) \\
 a_{13} &= +\lambda [B_{11} \lambda^2 + (B_{12} + 2B_{66}) \mu^2] \\
 a_{14} &= -\lambda [B_{11}^s \lambda^2 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \mu^2] \\
 a_{22} &= -A_{66} \lambda^2 - A_{22} \mu^2 \\
 a_{23} &= \mu [(B_{12} + 2B_{66}) \lambda^2 + B_{22} \mu^2] \\
 a_{24} &= -\mu [(B_{12}^s + 2B_{66}^s) \lambda^2 + B_{22}^s \mu^2] \\
 a_{33} &= -(D_{11} \lambda^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \lambda^2 \mu^2 + D_{22} \mu^4 + K_1 (\lambda^2 + \mu^2) + K_0) \\
 a_{34} &= (D_{11}^s \lambda^4 + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \lambda^2 \mu^2 + D_{22}^s \mu^4 - K_1 (\lambda^2 + \mu^2) - K_0) \\
 a_{44} &= -(H_{11}^s \lambda^4 + 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s) \lambda^2 \mu^2 + H_{22}^s \mu^4 + A_{55}^s \lambda^2 + A_{44}^s \mu^2 + K_1 (\lambda^2 + \mu^2) + K_0)
 \end{aligned} \tag{B}$$

III.4. Conclusion

Dans le cadre de cette étude, nous avons présenté une théorie de cisaillement à quatre variables qui déterminent les contraintes et les déplacements d'une plaque fonctionnellement graduée (FGM) simplement appuyée reposant sur des fondations élastiques. Les équations d'équilibre et les conditions aux limites sont obtenues à partir du principe des travaux virtuels. Puis on a utilisé la méthode de Navier pour résoudre les solutions des équations d'équilibre. La comparaison des résultats de cette nouvelle théorie avec les solutions existant dans la littérature est présentée dans le chapitre suivant.

VI.1.Introduction :

Dans cette étude, l'analyse de flexion des plaques FGM reposant sur des fondations élastiques par la nouvelle théorie trigonométrique de déformation de cisaillement est suggérée pour l'étude.

Le coefficient de Poisson est fixé à $\nu = 0.3$. Des comparaisons sont faites avec les solutions disponibles dans la littérature. Afin de vérifier l'exactitude de la présente analyse, quelques exemples numériques sont résolus.

VI.2. Résultats numériques :

Les propriétés des matériaux utilisés dans la présente étude sont :

- Métal (Aluminium, Al) : $E_m = 70 \times 10^9 \text{ N / m}^2$; $\nu = 0.3$
- Céramique (Alumine, Al_2O_3) : $E_c = 380 \times 10^9 \text{ N / m}^2$; $\nu = 0.3$

Les différents paramètres non dimensionnels utilisés sont les suivants :

$$\bar{w} = \frac{10h^3 E_c}{a^4 q_0} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right), \quad \bar{\sigma}_x = \frac{h}{aq_0} \sigma_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right), \quad \bar{\tau}_{xy} = \frac{h}{aq_0} \tau_{xy}\left(0, 0, -\frac{h}{3}\right)$$

$$\bar{\tau}_{xz} = \frac{h}{aq_0} \tau_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, 0\right), \quad \bar{z} = \frac{z}{h}, \quad K_0 = k_0 a^4 / D, \quad K_1 = k_1 a^2 / D$$

$$\text{Où } D = Eh^3 / 12(1 - \nu^2).$$

Le tableau VI.1 représente les effets du rapport côté-épaisseur a/h et des paramètres de fondation élastique sur la flèche et les contraintes adimensionnelles pour une plaque carrée isotrope.

Il est clair que la flèche \bar{w} et la contrainte adimensionnelle $\bar{\sigma}_x$ diminuent à mesure que le rapport d'épaisseur a/h augmente. Cependant, les contraintes de cisaillement $\bar{\sigma}_{yz}$ et $\bar{\sigma}_{xz}$ augmentent à mesure que le rapport a/h augmente.

De plus, la flèche et les contraintes diminuent avec l'existence des fondations élastiques. L'inclusion du paramètre de fondation Winkler donne plus de résultats que l'inclusion des paramètres de fondation Pasternak. Comme le montre le tableau 1, il existe un très bon accord

entre la présente théorie des plaques de cisaillement trigonométrique et d'autres théories des plaques d'ordre élevé.

On peut observer que la théorie classique des plaques (CPT) sous estime le déplacement transversal de la plaque. Étant donné que les influences de déformation de cisaillement transversal ne sont pas incluses dans le CPT.

Tableau. VI.1. Effets du rapport côté-épaisseur et les paramètres des fondations élastiques sur la flèche et les contraintes adimensionnelles d'une plaque FGM isotrope carrée.

a/h	K_0	K_1	théories	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\tau}_{xy}$	$\bar{\tau}_{xz}$
5	0	0	ESDPT	0.3428578	1.0294400	0.3489582	0.2530360
			SSDPT	0.3431864	1.0272580	0.3491764	0.2455716
			FSDPT	0.3434858	0.9878816	0.3546240	0.1909859
			CPT	0.2802613	0.9878810	0.3546238	-
			Ameur [58]	0.3431864	1.0272580	0.3491766	0.2455716
			Présente	0.3428583	1.0229241	0.3497063	0.2317711
	100	0	ESDPT	0.2609323	0.7834560	0.2655750	0.1925733
			SSDPT	0.2611226	0.7816170	0.2656804	0.1868497
			FSDPT	0.2612958	0.7514992	0.2697690	0.1452864
			CPT	0.2230227	0.7861232	0.2821980	-
			Ameur [58]	0.2611226	0.7816172	0.2656804	0.1868497
			Présente	0.2611801	0.7782653	0.2660650	0.1763371
	0	10	ESDPT	0.2116725	0.6355520	0.2154386	0.1562185
			SSDPT	0.2117976	0.6339732	0.2154946	0.1515546
			FSDPT	0.2119115	0.6094678	0.2187832	0.1178277
			CPT	0.1860216	0.6556996	0.2353796	-
			Ameur [58]	0.2117976	0.6339728	0.2154944	0.1515546
			Présente	0.2118355	0.6312280	0.2157975	0.1430218
	100	10	ESDPT	0.1773040	0.5323598	0.1804586	0.1308539
			SSDPT	0.1773918	0.5309862	0.1804880	0.1269350
			FSDPT	0.1774717	0.5104170	0.1832266	0.0986783
			CPT	0.1589454	0.5602600	0.2011190	-
			Ameur [58]	0.1773918	0.5309862	0.1804881	0.1269350
			Présente	0.1774184	0.5286717	0.1807366	0.1197849
10	100	ESDPT	0.1638744	1.1055380	0.3911440	0.1405294	
		SSDPT	0.1638971	1.1048030	0.3911620	0.1362969	
		FSDPT	0.1639081	1.0938180	0.3926523	0.1057331	
		CPT	0.1589454	1.1205200	0.4022380	-	
		Ameur [58]	0.1638971	1.1048040	0.3911616	0.1362969	
		Présente	0.1639009	1.1035726	0.3913026	0.1285318	
20	100	ESDPT	0.1602009	2.2334070	0.7988240	0.1431760	
		SSDPT	0.1602066	2.2330340	0.7988335	0.1388572	
		FSDPT	0.1602086	2.2274440	0.7995950	0.1076574	
		CPT	0.1589454	2.2410390	0.8044750	-	
		Ameur [58]	0.1602066	2.2330340	0.7988330	0.1388572	
		Présente	0.1602073	2.2324088	0.7989066	0.1309218	
50	100	ESDPT	0.1591473	5.5995300	2.008916	0.1439351	
		SSDPT	0.1591483	5.5993780	2.008920	0.1395914	
		FSDPT	0.1591486	5.5971340	2.009226	0.1082087	
		CPT	0.1589454	5.6026000	2.011190	-	
		Ameur [58]	0.1591483	5.5993760	2.008920	0.1395914	
		Présente	0.1591483	5.5991296	2.0089504	0.1316070	
100	100	ESDPT	0.1589959	11.20366	4.021240	0.1440442	
		SSDPT	0.1589961	11.20359	4.021243	0.1396969	
		FSDPT	0.1589962	11.20247	4.021396	0.1082879	
		CPT	0.1589454	11.20520	4.022380	-	
		Ameur [58]	0.1589961	11.20359	4.021242	0.1396969	
		Présente	0.1589962	11.203464	4.0212591	0.1317055	

Tableau. VI.2. Effets de l'exposant de la fraction volumique et les paramètres des fondations élastiques sur la flèche et les contraintes adimensionnelles d'une plaque FGM carrée ($a/h=10$)

p	K_0	K_1	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\tau}_{xy}$	$\bar{\tau}_{xz}$
céramique	0	0	0.296043801	1.993313667	0.706785275	0.232158857
	100	0	0.232903191	1.568177116	0.556041186	0.182643712
	0	10	0.192845494	1.298461775	0.460406046	0.151230289
	100	10	0.163900859	1.103572581	0.391302615	0.128531778
1	0	0	0.588931184	3.083303756	0.611181848	0.232158857
	100	0	0.382593207	2.003037207	0.397048127	0.150819661
	0	10	0.285256969	1.493440844	0.296034386	0.112449355
	100	10	0.226174648	1.184119912	0.23471985	0.089158885
2	0	0	0.757179612	3.604417129	0.544322225	0.211909455
	100	0	0.447138899	2.128524174	0.32143977	0.125139345
	0	10	0.319661368	1.521690351	0.229798563	0.089462612
	100	10	0.247276168	1.177113649	0.1777622	0.069204396
5	0	0	0.910802859	4.241221075	0.575855949	0.185755487
	100	0	0.496602408	2.31246595	0.313977331	0.101280558
	0	10	0.344168647	1.602646838	0.217600945	0.070192154
	100	10	0.261690828	1.218582755	0.165454268	0.053371053
10	0	0	1.00831877	5.081343142	0.58977096	0.204238471
	100	0	0.524246183	2.641897407	0.306634354	0.106187886
	0	10	0.357223269	1.800198572	0.208941772	0.072356814
	100	10	0.269170264	1.356462375	0.157439105	0.054521372
métal	0	0	1.60709492	1.993313667	0.706785275	0.232158857
	100	0	0.650198568	0.806454973	0.285951233	0.093926846
	0	10	0.411546237	0.510449462	0.180994175	0.059451438
	100	10	0.298899016	0.370730742	0.131452984	0.043178566

Dans le tableau VI.2, les effets de l'exposant de fraction volumique et des paramètres de fondation sur la flèche et les contraintes adimensionnelles pour des plaques homogènes et en FGM sont donnés. D'après les résultats présentés dans le tableau 2, il ressort que, la diminution se produit pour les contraintes de cisaillement ($\bar{\sigma}_{yz}$ et $\bar{\sigma}_{xz}$) et la contrainte axiale $\bar{\sigma}_x$, soit pour la flèche adimensionnelle \bar{w} de la plaque comme en tant que K_0 et K_1 et augmentent.

Il est indiqué que de grands modules de fondation élastique peuvent améliorer la rigidité à la flexion de la plaque.

Les contraintes et la flèche de la plaque sont grandement influencées par l'indice de la loi de puissance p , ce qui signifie que la plaque peut être conçue de manière optimale en fonction des conditions de travail données en adaptant le gradient des propriétés matérielles. En fait, on constate que la flèche augmente à mesure que l'indice de fraction volumique p augmente. Ceci est dû au fait que la rigidité à la flexion est le maximum pour une plaque entièrement en céramique, c'est-à-dire ($p = 0$) et se dégrade progressivement au fur et à mesure que p augmente. Il est important de noter que les contraintes pour une plaque entièrement céramique sont les mêmes que pour une plaque entièrement métallique sans fondations élastiques ($K_0 = K_1 = 0$). En effet, la plaque pour ces deux cas est totalement homogène et les contraintes ne dépendent pas du module d'élasticité. Cette observation peut être légèrement modifiée par l'inclusion des paramètres de fondation qui sous-estiment toujours la valeur de la flèche et les contraintes

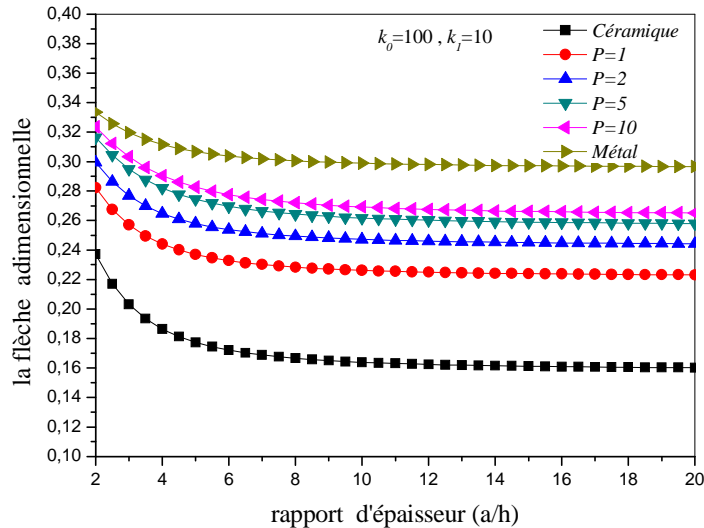


Figure. VI.1 : Variation de la flèche adimensionnelle \bar{w} en fonction de la variation du rapport d'épaisseur a/h pour une plaque FGM carrée reposant sur des fondations élastiques

La figure VI.1 montre la variation de la flèche adimensionnelle \bar{w} avec la variation du rapport a/h . La déflexion est maximale pour la plaque métallique et minimale pour la plaque céramique. Elle diminue avec l'augmentation des rapports a/h . La différence est presque constante avec l'augmentation du rapport d'épaisseur. L'une des principales conclusions de l'analyse est que la réponse des plaques FGM est intermédiaire à celle des plaques céramiques et métalliques homogènes (voir aussi le tableau 2).

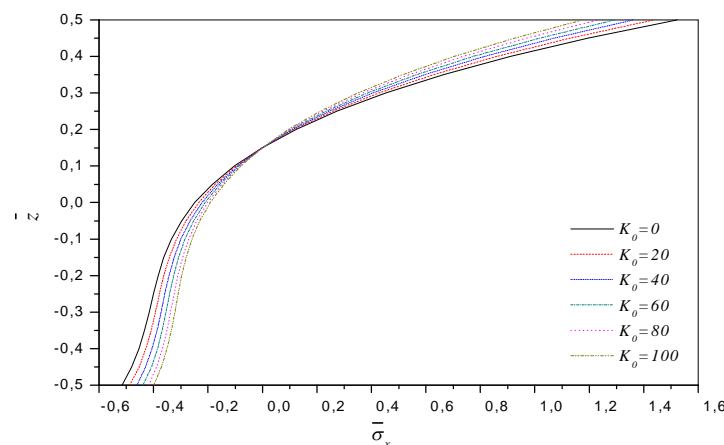


Figure. VI.2 : Variation de la contrainte adimensionnelle $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur d'une plaque FGM carrée pour différentes valeurs de K_0 ($a/h=10, p=2, K_1=10$)

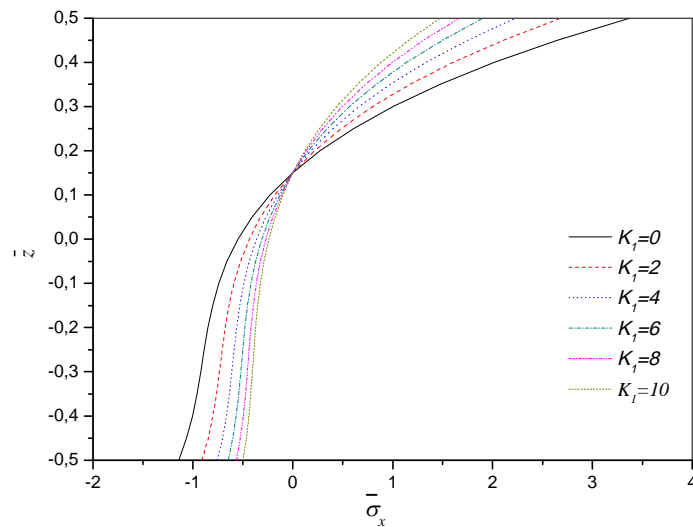


Figure. VI.3 : Variation de la contrainte adimensionnelle $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur d'une plaque FGM carrée pour différentes valeurs de K_1 ($a/h=10$, $p=2$, $K_0=10$)

Les figures VI.2 et VI.3 illustrent les distributions de la contrainte axiale $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur des plaques FGM carrées avec ($p=2$) sous les charges sinusoïdales.

Comme le montrent les Figures VI.2 et VI.3, la contrainte axiale est comprimée dans toute la plaque jusqu'à $\bar{z} = 0.153$, puis elles se transforment en traction. Les contraintes de compression maximales se produisent en un point de la surface inférieure et les contraintes de traction maximales se produisent, bien sûr, en un point de la surface supérieure de la plaque FGM. De plus, il ressort de ces chiffres que la fondation élastique a un effet significatif sur les valeurs maximales de la contrainte axiale $\bar{\sigma}_x$. On observe que la contrainte normale $\bar{\sigma}_x$ augmente progressivement avec la diminution de K_0 où K_1 .

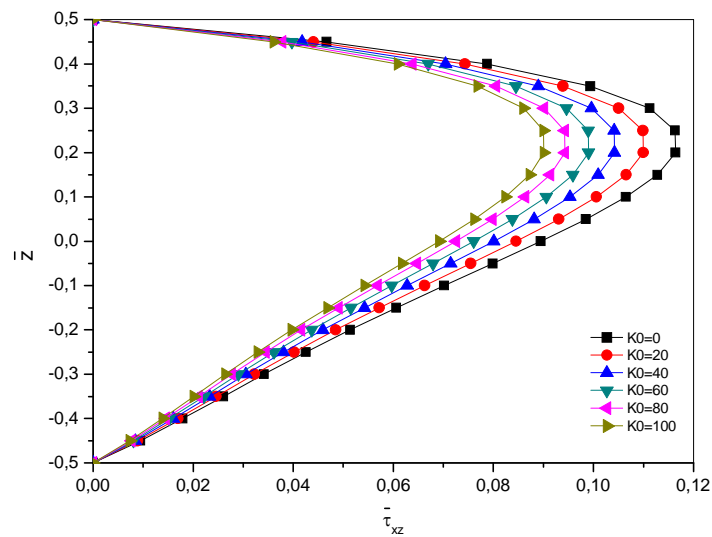


Figure. VI.4 : Variation de la contrainte de cisaillement transversale $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur d'une plaque FGM carrée pour différentes valeurs de K_0 ($a/h=10, p=2, K_1=10$)

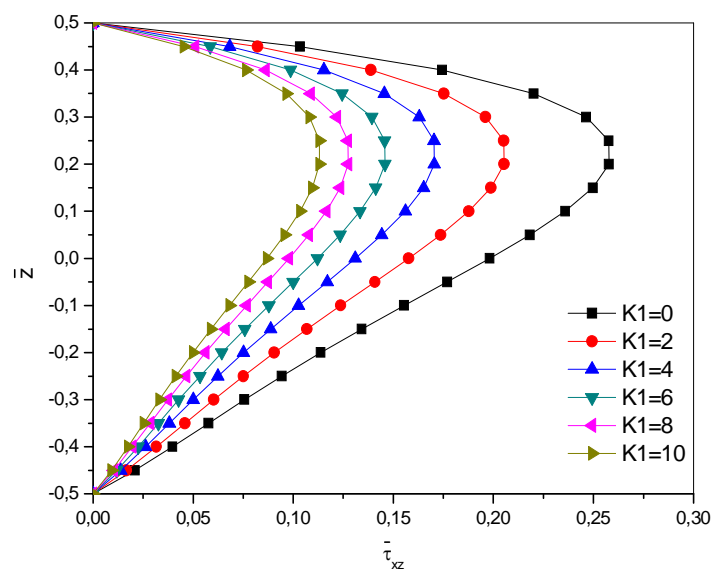


Figure. VI.5 : Variation de la contrainte de cisaillement transversale $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur d'une plaque FGM carrée pour différentes valeurs de K_1 ($a/h=10, p=2, K_0=10$)

Les figures VI.4 et VI.5 illustrent la répartition des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur des plaques FGM carrée sous des charges sinusoidale. L'exposant de fraction volumique de la plaque FGM est pris comme $p = 2$ dans ces figures. La distinction entre les courbes des Fig. 4 et 5 est évidente.

On observe que la contrainte de cisaillement transverse ($\bar{\tau}_{xz}$) augmente graduellement avec la diminution de K_0 ou K_1 . Il est indiqué que de grands modules de fondation élastique peuvent améliorer la rigidité à la flexion de la plaque. Les distributions à travers l'épaisseur de la contrainte de cisaillement ne sont pas paraboliques comme dans la plaque en matériau pur.

Il est à noter que la valeur maximale se produit à $\bar{z} = 0.2$, et non pas au centre de la plaque comme dans le cas homogène.

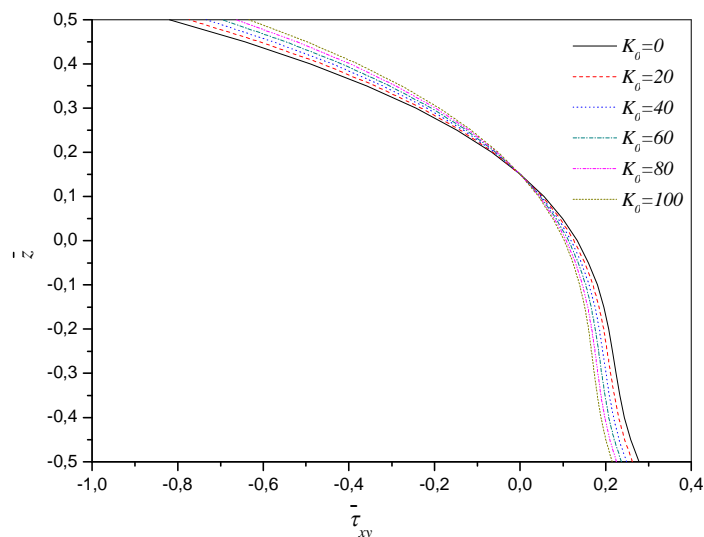


Figure. VI.6 : Variation de la contrainte de cisaillement longitudinale $\bar{\tau}_{xy}$ à travers l'épaisseur d'une plaque FGM carrée pour différentes valeurs de K_0 ($a/h=10$, $p=2$, $K_1 = 10$)

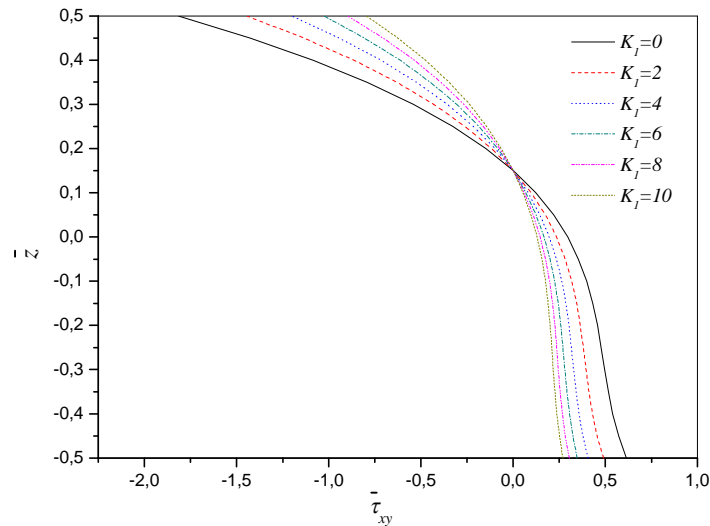


Figure. VI.7: Variation de la contrainte de cisaillement longitudinale $\bar{\tau}_{xy}$ à travers l'épaisseur d'une plaque FGM carrée pour différentes valeurs de K_1 ($a/h=10$, $p=2$, $K_0=10$)

Les figures VI.6-VI.7 montrent la contrainte tangentielle longitudinale $\bar{\tau}_{xy}$ dans les plaques carrées FGM ($p=2$) sous les charges sinusoïdales.

Contrairement à la contrainte axiale, les valeurs de traction et de compression de la contrainte tangentielle longitudinale $\bar{\tau}_{xy}$ (Fig. 6 et 7) sont maximales en un point sur les surfaces inférieures et supérieures de la plaque FGM, respectivement.

Il est clair que la valeur minimale de zéro pour toutes les contraintes axiales $\bar{\sigma}_x$ et $\bar{\tau}_{xy}$ se produit à $z=0,153$.

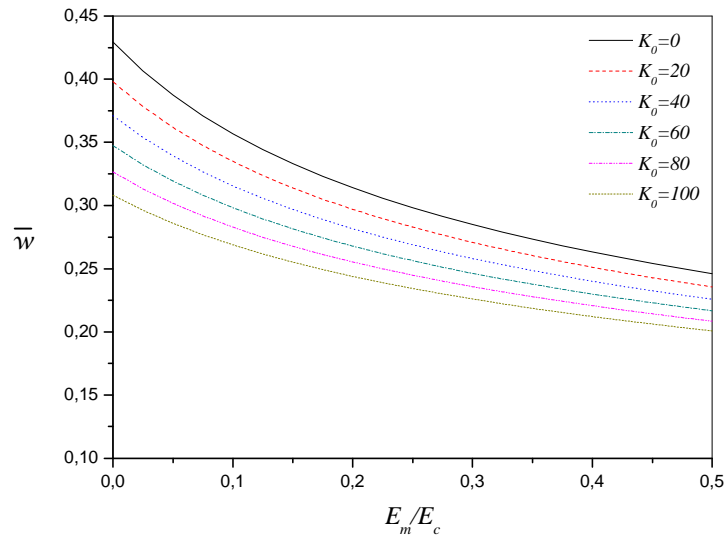


Figure. VI.8: L'effet de l'anisotropie du matériau sur la flèche adimensionnelle \bar{w} d'une plaque FGM carrée pour différentes valeurs de K_0 ($a/h = 10$, $p = 2$ et $K_1 = 10$)

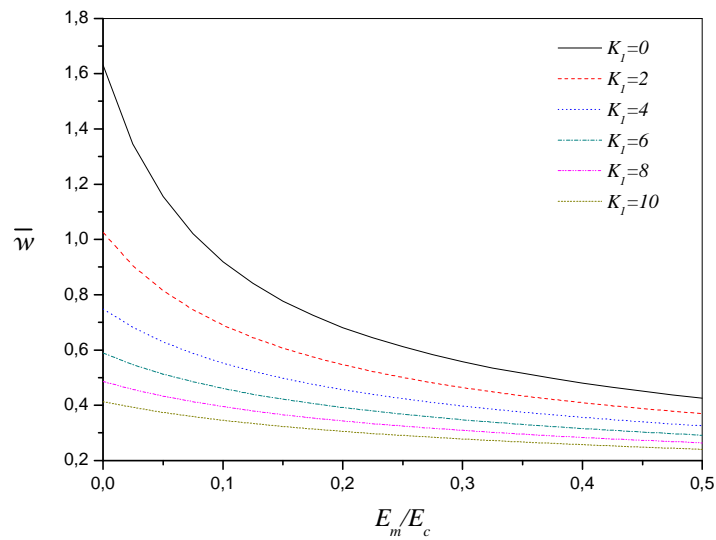


Figure. VI.9: L'effet de l'anisotropie du matériau sur la flèche adimensionnelle \bar{w} d'une plaque FGM carrée pour différentes valeurs de K_1 ($a/h = 10$, $p = 2$ et $K_0 = 10$)

Enfin, les flèches maximales exactes des plaques FGM carrées simplement appuyées sont comparées dans les Fig. VI.8 et VI.9 pour différents rapports de module E_m/E_c . Cela signifie que les flèches sont calculées pour des plaques avec différents mélanges céramique-métal.

Il est clair que les flèches diminuent progressivement lorsque le rapport des modules métal-céramique augmente. En outre, les flèches diminuent progressivement lorsque K_0 ou K_1 augmente.

VI.3.Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les valeurs de la flèche adimensionnelle et les contraintes normales et tangentielles calculées par la présente théorie pour des plaques FGM reposant sur des fondations élastiques.

Les résultats obtenus sont en excellent accord avec les théories de déformation de cisaillement à ordre élevé et satisfait la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres. Par conséquent, on peut dire que la théorie proposée est précise et efficace pour prédire les réponses en flexion des plaques FGM.

Conclusion générale

La réponse en flexion des plaques à gradient de propriétés reposant sur une fondation élastique Winkler-Pasternak est étudiée à l'aide d'une nouvelle théorie trigonométrique de la déformation de cisaillement à ordre élevé. Le nombre de variables dans cette théorie est même inférieur à celui de théorie de premier ordre et les théories de déformation de cisaillement à ordre élevé. La théorie donne la distribution parabolique des déformations transversales de cisaillement, et satisfait aux conditions limites de traction nulle sur les surfaces de la plaque sans utiliser de facteurs de correction de cisaillement. La réponse de contrainte et de déplacement des plaques a été analysée sous charge sinusoïdale. La gradation des propriétés à travers l'épaisseur est supposée être du type loi de puissance et des comparaisons ont été faites avec des plaques isotropes homogènes. Les contraintes et déplacements non dimensionnels sont calculés pour les plaques avec mélange céramique-métal.

On voit que la réponse fondamentale des plaques qui correspondent à des propriétés intermédiaires à celle du métal et de la céramique se situe nécessairement entre celle de la céramique et celle du métal. Ce comportement s'avère être vrai quelles que soient les conditions aux limites.

Ainsi, les gradients dans les propriétés des matériaux jouent un rôle important dans la détermination de la réponse des plaques de FGM. Les résultats montrent que les déformations et les contraintes diminuent progressivement au fur et à mesure que K_0 ou K_1 augmente.

Les résultats numériques donnés dans le présent travail constituent une référence pour l'analyse des plaques FGM épaisses posées sur des fondations élastiques à l'avenir.

Perspectives :

-l'utilisation de la présente théorie raffinée pour étudier le comportement des plaques vis-à-vis la vibration et le flambement.

-l'utilisation de la présente théorie raffinée pour étudier le comportement des nano plaques vis-à-vis la flexion, vibration et le flambement.

-l'utilisation de la présente théorie pour les plaque P-FGM et S-FGM.

Références bibliographiques

- [1] Pasternak, P. L. (1954). *On a new method of analysis of an elastic foundation by means of two foundation constants*, Gosudarstvennoe Izdatelstvo Literaturi po Stroitelstvu I Arkhitekture, Moscow, USSR, Vol. 1, pp. 1-56 (in Russian).
- [2] Winkler, E. (1867). *Die Lehre von der Elasticitaet und Festigkeit*, Prag Dominicus.
- [3] Koizumi, M. (1993). "The concept of FGM. Ceramic transactions." *functionally gradient materials*, Vol. 34, No. 1, pp. 3-10.
- [4] Suresh, S. and Mortensen, A. (1998). *Fundamentals of functionally graded materials*, London: IOM Communications.
- [5] Koizumi, M. (1997). "FGM activities in Japan." *Compos. Part. B: Eng*, Vol. 28, p. 1-4.
- [6] Tanigawa, Y. (1995). "Some basic thermoelastic problems for nonhomogeneous structural materials." *Appl. Mech. Rev*, Vol. 48, No. 6, pp. 287-300.
- [7] Suresh, S. and Mortensen, A. (1997). "Functionally graded metals and metal-ceramic composites 2: thermomechanical behaviour." *Int. Mater. Rev*, Vol. 42, No. 3, pp. 85-116.
- [8] Cheng, Z. Q. and Kitipornchai, S. (1999). "Membrane analogy of buckling and vibration of inhomogeneous plates." *ASCE. J. Eng. Mech*, Vol. 125, No. 11, pp. 1293-1297.
- [9] Cheng, Z. Q. and Batra, B. C. (2000). "Exact correspondence between eigenvalues of membranes and functionally graded simply supported polygonal plate." *J. Sound. Vib*, Vol. 229, No. 4, pp. 879-895.
- [10] Reddy, J. N. and Cheng, Z. Q. (2002). "Frequency correspondence between membranes and functionally graded spherical shallow shells of polygonal planform." *Int. J. Mech. Sci*, Vol. 44, No. 5, pp. 967-985.

Références bibliographiques

- [11] Ait Atmane. H, A. Tounsi., I. Mechab., E.A Adda Bedia, (2010). —Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory. Int. J. Mech. Mater. Design; 6 (2): 113-121.
- [12] Reddy. J.N, (1984). —A simple higher-order theory for laminated composite plates. Journal of Applied Mechanics; 51 (4): 745-752.
- [13] Touratier. M, (1991). —An efficient standard plate theory. Engng Sci, vol. 29, no 8, pages 901-916.
- [14] Karama. M, K.S. Afaq., S. Mistou, (2003). —Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity. Int. J. Solids Structures; 40 (6): 1525-1546.
- [15] Miyamoto et al. (1999), Suresh et Mortensen 1998 Miyamoto Y., Kaysser W.A., Rabin B.H., Kawasaki A., Ford R.G., Functionally graded materials: design, processing and applications, Materials Technology Series, Vol. 5-1999.
- [16] Öchsner et al. 2008 M.J.S. (2008), "Cellular and Porous Materials", WILEY-VCH, 398-417.
- [17] Baron et Naili (2008), Propagation d'ondes élastiques au sein d'un guide d'ondes élastiques anisotrope à gradient unidirectionnel sous chargement fluide, Compte Rendue Mécanique ; 336 (9) : 722–730, 2008.
- [18] M. Niino et ses collègues à Sendai
- [19] Kokini (1990) : K. Kokini, Y. Takeuchi, Multilayer «Ceramic thermal barrier coatings under transient thermal loads, In Proceeding of the First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan» ; 31-36, 1990.
- [20] Nora. Kassimi (2011), “ Etude des contraintes d'interface d'une poutre FGM renforcées par une plaque en matériaux composites”, mémoire de master de l'université Djilali Liabes de Sidi Bel Abbes, 2011.
- [21] AMANETTE AMINA (2011), « analyse et modélisation du comportement des poutres en gradient à propriété », mémoire de master d'université DILALI LIABES DE SIDI BEL ABBES 2011.

Références bibliographiques

- [22] ELOMARI KAWTHER (2011), « analyse de la vibration libre des poutres en E-FGM à section transversale variable », mémoire de master d'université DJILLALI LIABES DE SIDI BEL ABBES 2011.
- [23] Kieback (2003) Kieback B., Neubrand A., Riedel H., Processing techniques for functionally graded materials, *Materials Science and Engineering*, A362 (2003) 81-105. [Liew] K.M. Liew, J. Yang, S. Kitipornchai, Post-pliage de plaques de FGM piézoélectriques soumises à une charge thermo-électromécanique, *Int. J. Solids Struct.* 40 (15) (2003) 3869
- [24] Mistler (1973) MISTLER, R.E., «High Strength Alumina Substrates Produced by a Multiple-Layer Casting Technique», *Am. Ceram. Soc. Bull.*, 1973, Vol. 52, N°. 11, p. 850-54.
- [25] Boch (1986,1987): BOCH, P., CHARTIER, T.& HUTTEPAIN, «M.Tape Casting of Al₂O₃/ZrO₂ Laminated Composites», *J. Am. Ceram. Soc.*, 1986, Vol. 69, N°. 8, p. C- 191 - C-192. BOCH, P. «Tape Casting of Layered Composites, in *Processing of Advanced Ceramics*». Edited by J. S. Moya and S. de Aza. *Sociedad Espanola de Ceramica y Vidrio*, Madrid, Spain, 1987, p. 103-112.
- [26] Aldo (2002) Aldo R. Boccaccini, O. Vander Biest, Jan B. Talbot, *Electrophoretic Deposition, Fundamentals and Applications: Proceedings of the International Symposium*, Electrochemical Society, Electrodeposition Division, United Engineering Foundation (U.S.), 2002.
- [27] Yuki et al (1991), Yuki M., Murayama T., Irisawa T., «Temperature gradient sintering of PSZ/Mo Functionally Gradient Material by laser beam heating», in proceeding of the first international symposium on functionally gradient materials FGM, Sendai- Japan, 1991, 203208.
- [28] AymenMarouene (2010), “Comportement sous choc des composites sandwichés et influence des paramètres des matériaux et du test ”, Diplôme de maitrise és appliquées.
- [29] HASSEN. Ait Atman (2011) *Vibration des structures composites en tenant compte de l'effet du cisaillement*”, Thèse de Doctorat de l'université Djilali Liabes de Sidi Bel Abbas.
- [30] M. Bodaghi (2010), A.R. Saidi. Levy-type solution for buckling analysis of thick functionally graded rectangular plates based on the higher-order shear deformation plate theory, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 34, Issue 11, pp.3659-3673, November 2010. 2013.
- [31] Ghannad S.A.M.(2012), vesy H.R. O, Nassirnia M., “Buckling analysis of functionally graded plates under thermal loadings using the finite strip method”, *Computers & Structures*, Vol. 108–109, pp.93-99, October 2012.

- [32] Huu-Tai Thai (2010), and Dong-Ho C hoi, “An efficient and simple refined theory for buckling analysis of functionally graded plates”, *Appl. Math. Modelling*, Vol. 36, pp.1008-1022.
- [33] Huu Tai Thai.(2011), and Thuc., P. Vo, “A new sinusoidal shear deformation theory for bending, buckling, and vibration of functionally graded plates”, *Applied mathematical modeling*, Vol. 37, pp. 3269-3281.
- [34] lazreg. Hadji (2012). A new refined shear deformation beam theory for static and free vibration of functionally graded beams, *The Arabian Journal for Science and Engineering*, (3-8.11).
- [35] Timoshenko. S.P, S.Woinowsky-Krieger, (1959). —Theory of Plates and Shells. McGraw-Hill, New York.
- [36] Reddy. J.N, (1997). —Mechanics of Laminated Composites Plates: Theory and Analysis, CRC Press, Boca Raton.
- [37] Reddy. J.N, (1999). —Theory and Analysis of Elastic plates, Taylor & Francis, Philadelphia.
- [38] Reissner.E, (1945). —The effect of transverse shears deformation on the bending of elastic plates. *J. Appl. Mech.*, vol. 12, pages 69/77.
- [39] Mindlin. R.D, (1951). —Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 18, pages 31-38.
- [40] Hildebrand. F.B, E. Reissner, G.G. Thomas, (1949). —Notes on the foundations of theory of small displacements of orthotropic shells. NACA T. N. N°:1833.
- [41] Naghdi. P. M, (1957). —On the theory of thin elastic shells. *Quarterly Appl. Math*, 14: 369-380.
- [42] Reissner. E, (1975). —On transverse bending of plates, including the effects of transverse shear deformation, *Int. J. Solids Structures*; 25 (5):495-502.
- [43] Kant.T, K. Swaminathan, (2002). —Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory. *Composite Structure*; 56 (4): 329-344.

- [44] Whitney. J.M, (1973). —Shear correction factors for orthotropic laminates under static loads. *J.Applied Mechanics*, Vol.40, pages 302-304.
- [45] Nelson. R.B & D.R.Lorch, (1974). —A refined theory for laminated orthotropic plates. *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol.41, pages 177-183.
- [46] Ambartsumian. S.A, (1969). —Theory of anisotropic plate. Technomic Publishing Co.
- [47] Levinson, M. (1980), "An accurate simple theory of the statics and dynamics of elastic plates", *Mechanics Research Communications*, 343–350.
- [48] Polit. O and M. Touratier, (1997). —A new laminated triangular finite element assuring interface continuity for displacements and stresses. *Composite Structures*, 38(1-4):37-44.
- [49] Dau. F, O. Polit, and M. Touratier, (2006). —C1 plate and shell finite elements for geometrically non linear analysis of multilayered structures. *Computers and Structures*, 84:1264-1274.
- [50] Afaq. K.S, (2003). « Développement d'un nouveau modèle pour les structures composites multicouches et sandwichs avec prise en compte du cisaillement transverse et des effets de bord. PhD thesis, Université Toulouse III - Paul Sabatier.
- [51] Abdelkader Fekrar (2010), “Conception des plaques FGM ayant un comportement similaire aux plaques homogènes”, Mémoire de magister de l’université Djilali Liabes de Sidi Bel Abbes.
- [52] Chabot, A (1997), “Analyse des efforts à l’interface entre les couches des matériaux composites à l’aide de modèles multiparticulaires de matériaux multicouches, PhDthesis, ENPC.
- [53] Mori, T. and Tanaka, K. (1973). “Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions.” *Acta. Metall*, Vol. 21, pp. 571-574.
- [54] Chehel Amirani, M., Khalili, S. M. R., and Nemati, N. (2009). “Free vibration analysis of sandwich beam with FG core using the element free Galerkin method.” *Composite. Structures*, Vol. 90, pp. 373-379.
- [55] Praveen, G. N. and Reddy, J. N. (1998). “Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic–metal plates.” *Int. J. Solids Struct*, Vol. 35, pp. 4457-4476.

[56] Mechab, I., Ait Atmane, H., Tounsi, A., Belhadj, H., and Adda bedia, E. A. (2010). "A two variable refined plate theory for bending of functionally graded plates." *Acta. Mech. Sin*, Vol. 26, No. 6, pp. 941.

[57] Hill, R. (1965). "A self-consistent mechanics of composite materials." *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 13, pp. 213-222.

[58] Ameer.M, Tounsi.A, Mechab.I, and Adda Bedia.E.A (2011)" A New Trigonometric Shear Deformation Theory for Bending Analysis of Functionally Graded Plates Resting on Elastic Foundations." *Journal of Civil Engineering* (2011) 15(8):1405-1414.