

**RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**  
**UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN DE TIARET.**



**FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES**  
**DÉPARTEMENT GÉNIE CIVIL**

**Mémoire de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme de Master**

Spécialité : travaux publics

Option :VOA

Présenté par :

ANINE BAIKA

*Sujet du mémoire*

*Analyse de la réponse statique des plaques  
Isotropes et orthotropes sous diverses conditions de  
chargement*

*Soutenu publiquement le. 26/06/2018 .devant le jury composé de :*

Mr, ABDELAZIZ. H.H

Mr, DRAICHE. K

Mr, TLIDJI. Y

Mme, KHELIFA. Z

Président

Rapporteur

Examineur

Examineur

PROMOTION : 2017/2018

# ***DEDICACE***

Je dédie ce mémoire à

Mes parents

Ma mère, qui a œuvré pour ma réussite, de par son amour, son soutien, pour tous ses sacrifices consentis et ses précieux conseils, son assistance et sa présence dans ma vie, reçois maman à travers ce travail aussi modeste soit-il, l'expression de mes sentiments les plus sincères et de mon éternelle gratitude.

Mon père, je suis sûre qu'il sera fier de trouver ici le résultat de longues années de sacrifices et de privations pour m'aider à avancer dans la vie. Puisse Dieu faire en sorte que ce travail porte son fruit ; Merci pour les valeurs nobles, l'éducation et le soutien permanent venu de toi.

Mes frères et sœurs qui n'ont cessé d'être pour moi des exemples de persévérance, de courage et de générosité.

Mes professeurs qui doivent voir dans ce travail la fierté d'un savoir bien acquis.

Aux personnes qui m'ont toujours aidé et encouragé, qui étaient toujours à mes côtés, et qui m'ont accompagné durant mon chemin d'études supérieures, mes aimables amis, collègues

d'étude, et frères de cœur, Reggadi Messaouda ; Benassa  
Houria.

# REMERCIEMENTS

*Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde gratitude à mon encadreur Monsieur **K. Draïche**, de m'avoir proposé le sujet de mon mémoire.*

*Je le remercie aussi de son suivi permanent de mon travail, ses remarques et suggestions sans lesquelles ce mémoire n'aurait pas lieu.*

*Mes remerciements vont également à Monsieur **H.H.Abelaziz**, qui a accepté de présider le jury.*

*Je remercie très respectueusement à Monsieur **Y.Tlidji***

*De m'avoir fait l'honneur d'être membres du jury et d'avoir accepté de juger mon travail.*

*Mes vifs remerciements vont également à madame **Z.Khlifa***

*De m'avoir fait l'honneur d'être membres du jury et d'avoir accepté de juger mon travail.*

*Je remercie aussi l'équipe sympathique du département de Génie civil*

*Un grand merci aussi à tous mes collègues du groupe de Génie civil.*

*Je tiens enfin à remercier tous ceux qui ont contribué d'une façon ou d'une autre à la réalisation de ce travail.*

***Résumé***

Ce travail porté sur l'étude du comportement de la flexion statique des plaques isotropes et orthotropes sous diverses conditions de chargement en employant une théorie de déformation de cisaillement trigonométrique raffinée.

La présente théorie contient que quatre inconnues au lieu de cinq dont la composante du déplacement transversal est composée par deux variables ,de flexion et de cisaillement ,de même elle satisfait les conditions aux limites des contraintes nulles sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque sans utiliser les facteur de correction de cisaillement

A travers cette étude analytique les équations de mouvement, les conditions aux limites sont obtenues en utilisant le principe du travail virtuel, ensuite la technique de Navier a été utilisée pour obtenir des solutions de la flexion des plaques isotropes et orthotropes simplement appuyées et soumise à des charges réparties de façon sinusoïdale, uniformément distribuées et linéairement variables.

Les résultats obtenus par la présente théorie sont comparés avec d'autres résultats précédemment publiés.

**Mots clés : (composite, plaques, isotropes , orthotropes ,flexion, conditions des chargements théories des plaques )**

## *Abstract*

---

### *Abstract*

.This work focuses on the study of the static bending behavior of isotropic and orthotropic plates under various loading conditions using a theory of refined trigonometric shear deformation

The present theory holds that four unknowns instead of five whose transverse displacement component is composed of two variables, bending and shear, likewise satisfies the boundary conditions of zero stresses on the upper and lower surfaces of the plate. use the shear correction factor

Through this analytical study the equations of motion, the boundary conditions are obtained using the principle of virtual work, then the Navier technique was used to obtain solutions of the flexion of the isotropic and orthotropic plates simply supported and subjected to sinusoidally distributed, uniformly distributed and linearly variable loads.

The results obtained by this theory are compared with other previously published results.

**Key words: (composite, plates, isotropic, orthotropic, flexion, loading conditions plate theories)**

## المخلص

يركز هذا العمل على دراسة سلوك الانحناء الساكن للصفائح المتناحية والعضلية تحت ظروف التحميل المختلفة باستخدام نظرية تشوه القص المثلي المكرر.

تنص النظرية الحالية على أن أربعة مجهولة بدلاً من خمسة مكونات مكون إزاحتها المستعرضة تتكون من متغيرين ، هما الانحناء والقص ، كما تستوفي الشروط الحدودية لصفير الإجهادات على الأسطح العلوية والسفلية للوحة. استخدم عامل تصحيح القص

من خلال هذه الدراسة التحليلية معادلات الحركة ، يتم الحصول على شروط الحدود باستخدام مبدأ العمل الافتراضي ، ثم تم استخدام تقنية Navier للحصول على حلول من انحناء الصفائح المتناحية والمتناسقة تدعم ببساطة وتعرض متوزعة جيبياً ، موزعة بشكل منتظم وأحمال متغيرة خطياً. تتم مقارنة النتائج التي تم الحصول عليها من هذه النظرية مع النتائج المنشورة سابقاً. الكلمات المفتاحية: (المركب ، الألواح ، الخواص المتناحية ، العظمية ، الانحناء ، شروط نظريات التحميل)

## Notations

$E$	Module de Young
$E_i$	Module de Young dans la direction $i$
$a$	Longueur de la plaque
$b$	Largeur de la plaque
$h$	Épaisseur de la plaque
$e_k$	Épaisseur de la couche (pli) $k$
$u, v, w$	Les déplacements suivant les directions $x, y$ et $z$
$u_0, v_0, w_0$	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la Plaque
$G_{ij}$	Module de cisaillement
$\nu_{ij}$	Coefficient de poisson
$\sigma_{ij}$	Contraint de cisaillement
$\varepsilon_{ii}$	Déformation normales
$\varepsilon_{ij}$	Déformations de cisaillement
$\gamma_{ij}$	Déformations angulaires (distorsions)
$N_x, N_y, N_{xy}$	Efforts normaux
$M_x, M_y, M_{xy}$	Moments de flexion
$M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b$	Moments de flexion
$M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s$	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Contraintes normal
$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$	Contraintes de cisaillement
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Déformations dans les directions $x$ et $y$ et $z$

$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$	Déformations de distors
$\Phi, \Psi, \xi$	Les rotations dues à la flexion des plans $(x, y, z)$
$\rho$	La densité massique
$\rho_s$	La masse surfacique
$\delta$	Opérateur de variation
$\delta u_0, \delta v_0, \delta w$	Champ virtuel de déplacement
$\delta_\phi, \delta_\psi, \delta_\xi$	La variation cinématiquement admissible
$\delta w_f$	Travail des actions
$\delta U_d$	La variation de l'énergie de déformation
$U_d$	Energie de déformation
$m, n$	Nombres de mode
$A_{ij}$	Termes de rigidité en membrane de la plaque
$B_{ij}$	Termes de rigidité de couplage de la plaque
$D_{ij}$	Termes de rigidité de flexion de la plaque
$E_{ij}$	Termes de rigidité de flexion de la plaque
$I_{xy}$	Moment d'inertie rotatoire par unité de surface
$C_{ij}$	Tenseur des rigidités
$Q_{ij}$	Tenseur de rigidité de plaque
$\theta$	Angle d'orientation des fibres
$R$	Rapport longueur /largeur

Liste des figures

Chapitre I

Figure. I.1	Structure d'un matériau composite .....	5
Figure. I.2	Principaux matériaux de renforts .....	5
Figure. I.3	Fibres de verre .....	6
Figure .I.4	Exemple des fibres de carbone .....	7
Figure. I.5	Fibres d'aramide .....	8
Figure. I.6	Fibres de bore .....	8
Figure. I.7	Fibres métalliques .....	9
Figure. I.8	Les différentes familles de Matrice .....	9
Figure .I.9	Exemples de différentes charges :(a) microbilles de verre, (b) noir de carbone, (c) silice .....	14
Figure. I.10	Composite monocouche .....	16
Figure. I.11	Matériau composite stratifié.....	16
Figure. I.12	Composite sandwich .....	17
Figure. I.13	Nappe unidirectionnel des renforts .....	19
Figure .I.14	Toile ou taffetas .....	20
Figure .I.15	Un sergé 2/2.....	20
Figure .I.16	Tissu sous forme d'un satin.....	21

Chapitre II

Figure. II.1	Géométrie d'une plaque.....	26
Figure .II.2	Illustration de la plaque de Love-Kirchhoff .....	27
Figure .II.3	Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin .....	29
Figure .II.4	Description de la déformation d'une plaque selon les .....	30
Figure .II.5	Champ de déplacements du modèle zig-zag .....	33

Chapitre III

Figure. III.1	Système de coordonnées de la plaque orthotrope.....	35
---------------	---	----

Chapitre IV

Figure .IV.1	Variation du déplacement adimensionnel dans le plan $\bar{u}$ pour une plaque isotrope carrée soumise à une condition de chargement sinusoïdale avec $a/h=10$ .....	48
Figure .IV.2	Distribution des contraintes normales adimensionnelles $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur d'une plaque isotrope carrée soumise à une condition de chargement sinusoïdale avec $a/h=10$ .....	48
Figure .IV.3	Distribution des contraintes de cisaillement transversal adimensionnelles $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur d'une plaque isotrope carrée soumise à une condition de chargement sinusoïdale avec $a/h=10$ .....	49
Figure .IV.4	Variation du déplacement adimensionnel dans le plan $\bar{u}$ pour une plaque orthotrope carrée soumise à une condition de chargement sinusoïdale avec $a/h=10$ .....	52
Figure. IV.5	Distribution des contraintes normales adimensionnelles $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur d'une plaque orthotrope carrée soumise à une condition de chargement sinusoïdale avec $a/h=10$ .....	52
Figure. IV.6	Distribution des contraintes de cisaillement transversal adimensionnelles $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur d'une plaque orthotrope carrée soumise à une condition de chargement sinusoïdale avec $a/h=10$ .....	53

***Table des matières***

<b>ملخص</b> .....	I
<b>Abstract</b> .....	Ii
<b>Résumé</b> .....	Iii
<b>Liste des notations</b> .....	Iv
<b>Liste des figures</b> .....	V
<b>Liste des tableaux</b> .....	Vi

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
------------------------------	----------

<b>Chapitre I Généralités sur les matériaux composites</b>	<b>4</b>
--	----------

I.1	Introduction .....	4
I.2	Définition d'un matériaux composite .....	4
I.3	Les renforts.....	5
I.3.1	Les fibres de verre .....	5
I.3.2	Les fibres de carbone .....	5
I.3.3	Les fibres d'aramides (Kevlar) .....	6
I.3.4	Les fibres de bore .....	6
I.3.5	Les fibres métalliques.....	6
I.4	Les Matrices .....	7
I.4.1	Matrices organiques.....	7
I.4.1.1	Les résines thermodurcissables .....	8
I.4.1.2	Les résines thermoplastiques .....	8
I.4.1.3	Les Résines thermostables .....	8
I.4.1.4	Les élastomères thermoplastiques.....	9
I.4.2	Les matrices métalliques.....	12
I.4.3	Les matrices carbonées .....	13
I.4.4	Les matrices céramiques .....	13
I.5	Les charges.....	13
I.5.1	Charges renforçantes .....	14
I.5.2	Charges non renforçantes.....	14
I.5.3	Les Additifs.....	15
I.6	Structures du composite.....	15
I.6.1	Les monocouches.....	16

I.6.2	Les stratifiées.....	16
I.6.3	Les sandwichs.....	17
I.7	Propriétés mécaniques des composites .....	18
I.7.1	Déformation élastique.....	18
I.7.2	Relation contraintes-déformations.....	18
I.7.3	Comportement en traction.....	19
I.7.4	Comportement en compression et cisaillement.....	19
I.8	Architecture des renforts.....	19
I.8.1	Les unidirectionnels (UD) .....	20
I.8.2	Toile ou taffetas.....	20
I.8.3	Serge.....	21
I.8.4	Satin.....	21
I.9	Domaines d'application des composites.....	21
I.9.1	Les composites dans la construction civile.....	22
I.9.2	Les composites dans l'automobile.....	22
I.9.3	Les composites et la construction électrique.....	22
I.9.4	Les composites et la construction industrielle.....	22
I.9.5	Les composites et la construction industrielle.....	23
I.9.6	Les composites dans la construction nautique.....	23
I.9.7	Les composites dans l'aéronautique.....	23
I.9.8	Les composites dans le ferroviaire.....	23
I.10	Avantages et inconvénients des composites.....	23
I.11	Conclusion.....	24

<b>Chapitre II</b>	<b>Théories des plaques</b>	<b>26</b>
--------------------	-----------------------------	-----------

II.1	Introduction .....	26
II.2	Historique des théories des plaques.....	26
II.3	Définition d'une plaque .....	27
II.4	Les théories de déformation des plaques.....	27
II.4.1	La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT).....	28
II.4.2	La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT).....	29
II.4.3	La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT) .....	30
II.4.3.1	Revue sur les différents modèles de la théorie d'ordre élevé(HSDT) .....	32

	II.4.4 Théorie de zig-zag.....	33
II.5	Conclusion .....	34

<b>Chapitre III</b>	<b>Etude du comportement de flexion des plaques isotropes et orthotropes</b>	<b>36</b>
---------------------	--	-----------

III.1	Introduction .....	36
III.2	Formulation Théorique .....	37
	III.2.1 Configuration géométrique.....	37
	III.2.2 Champ de déplacement.....	37
	III.2.3 Champ de déformations.....	38
	III.2.4 Relations Constitutives .....	38
	III.2.5 Equations de mouvement .....	39
	III.2.6 Solution de Navier pour des plaques simplement appuyées.....	40
III.3	Conclusion .....	43

<b>Chapitre IV</b>	<b>Résultats et discussions</b>	<b>45</b>
--------------------	---------------------------------	-----------

IV.1	Introduction.....	45
IV.2	Résultats numériques et discussions.....	46
	IV.2.1 Résultats d’analyse de flexion des plaques isotropes simplement Appuyées.....	46
	IV.2.2 Résultats d’analyse de flexion des plaques orthotropes simplement appuyées.....	51
IV.3	Conclusion.....	55

<b>Conclusion générale et perspectives</b>		<b>57</b>
--	--	-----------

	Références bibliographiques .....	
--	-----------------------------------	--

# **Introduction générale**

# Introduction générale

---

## Introduction générale

Les plaques composites sont largement utilisées dans les différents domaines de l'ingénierie tels que l'aérospatiale, les navires, l'automobile et la construction civile. Par conséquent, diverses théories ont été développées par les chercheurs pour prédire le comportement en flexion des plaques composites. Kirchhoff [1] a développé une théorie classique des plaques (CPT) pour l'analyse des plaques minces, qui ne convient pas à la plaque épaisse en raison de la négligence de l'effet de déformation par cisaillement. Par conséquent, Mindlin [2] a développé la première théorie de déformation de cisaillement (FSDT) considérant l'effet de la déformation transversale de cisaillement de l'analyse des plaques.

Mais cette théorie ne satisfait pas la condition de cisaillement zéro et le haut et le bas facteur de correction de cisaillement. Diverses théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur ont été rapportées dans la littérature, qui considère l'effet de déformation transversale et satisfait les conditions de contrainte de cisaillement nul sur les surfaces supérieure et inférieure des plaques sans facteur de correction de cisaillement. Parmi ces théories d'ordre supérieur, la théorie de Reddy [3] est la plus couramment utilisée pour les plaques d'analyse. Ghugal et Shimpi [4] ont présenté une revue de ces théories affinées basées sur le déplacement et le stress pour les plaques isotropes et anisotropes. Levy [5] a été le premier à développer une théorie affinée utilisant des fonctions trigonométriques dans le champ de déplacement en termes de coordonnées d'épaisseur pour la plaque isotrope épaisse. Stein [6] a également proposé une telle théorie et appliquée aux plaques isotropes sous la forme modifiée. Mais la théorie de Stein ne satisfait pas les conditions de contrainte de cisaillement nul sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Touratier [7] a développé une théorie de déformation trigonométrique par cisaillement pour l'analyse de flexion, de flambage et de vibration de plaques composites et sandwich stratifiées. Shimpi et Ghugal [8] ont développé une théorie de déformation de cisaillement trigonométrique par couche pour l'analyse en flexion de deux plaques stratifiées en couches. Shimpi et al [9] ont proposé une théorie trigonométrique pour l'analyse statique et libre des vibrations des plaques composites isotropes, orthotropes et multicouches. Ghugal et Syiad [10,11] ont développé une théorie de déformation trigonométrique par cisaillement en considérant les effets du cisaillement transversal et de la déformation normale pour l'analyse en flexion de plaques épaisses isotropes et orthotropes. Mantari et al [12, 13] utilisent également la fonction trigonométrique

## Introduction générale

---

dans le champ de dissipation et développent une nouvelle analyse de flexion de cisaillement de déformation de cisaillement d'ordre supérieur, isotrope, composite stratifiée et sandwich. Neves et al [14,16] ont mis au point des théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur en 3D utilisant la fonction sinusoïdale et hyperbolique pour l'analyse statique, libre de vibrations et de flambage de plaques isotropes et de plaques fonctionnelles.

Cette théorie est encore étendue par Sayyad et Ghugal [18] pour l'analyse de la plaque composite orthotrope. Thai et Vo [19] ont développé une théorie de déformation trigonométrique par cisaillement pour l'analyse en flexion de plaques fonctionnellement graduées. La théorie des plaques raffinées utilisant la fonction parabolique est développée par Shimpi et palet [20] qui impliquent seulement deux variables inconnues pour l'analyse de flexion et de vibration libre des plaques orthotropes. Dans le présent article, une théorie des plaques à deux variables utilisant la fonction trigonométrique dans le domaine du déplacement est appliquée pour l'analyse en flexion des plaques isotropes et orthotropes. La théorie est désignée comme théorie de déformation de cisaillement trigonométrique variable.

Cette théorie néglige le besoin d'un facteur de correction de cisaillement. Les équations gouvernantes et les conditions aux limites sont obtenues en utilisant le principe du travail virtuel. Une technique de série trigonométrique double Navier est utilisée pour obtenir la solution de forme fermée. Les résultats actuels sont comparés à la solution exacte donnée par Pagano [21].

# **Chapitre I**

---

---

## **Généralités sur les matériaux composites**

## Chapitre I

### Généralités sur les matériaux composites

#### I.1. Introduction

Les matériaux composites disposent d'éventualités importantes par rapport aux matériaux traditionnels. Ils possèdent de nombreux avantages fonctionnels : légèreté, résistance mécanique et chimique, maintenance réduite, liberté de forme. Ils permettent d'augmenter la durée de vie de certains équipements grâce à leurs propriétés mécaniques et chimiques. Ils offrent une meilleure isolation thermique ou phonique et, pour certains d'entre eux, une bonne isolation électrique.

Ces performances remarquables sont à l'origine de solutions technologiques innovantes. Les matériaux composites (à matrice métallique, élastomère, polymère ou céramique) offrent aux industriels et aux designers des possibilités nouvelles d'associer des fonctions (forme et matériaux), alors des systèmes de plus en plus performants. [22]

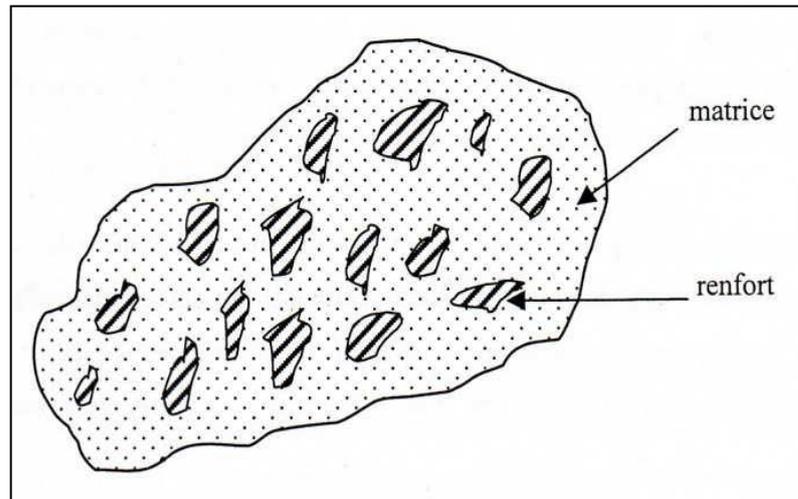
#### I.2. Définition d'un matériau composite

Un matériau composite est un assemblage d'au moins de deux matériaux non miscibles (mais ayant une forte capacité d'adhésion). Le nouveau matériau ainsi élaboré possède des performances supérieures à celles des éléments pris séparément (figure I.1).

Il est généralement constitué de deux composants, une ossature appelée renfort qui assure la tenue mécanique et d'une protection appelée matrice qui assure la cohésion de la structure et le transfert des charges entre les renforts. A ces deux composants principaux peuvent s'ajouter des additifs qui permettent de modifier l'aspect, ou les caractéristiques du matériau. Peuvent être incorporés pour améliorer la résistance au feu, diminuer le retrait, modifier la couleur...etc. [22]

Les additifs possibles sont encore plus nombreux. Une classe d'additifs que l'on rencontre systématiquement est celle des agents d'interface, que l'on dépose sur les fibres pour les faire adhérer à la matrice. On rencontre également :

- Lubrifiants et agents de démoulage
- Pigments et colorants
- Agents anti-retraits
- Agents ultraviolets



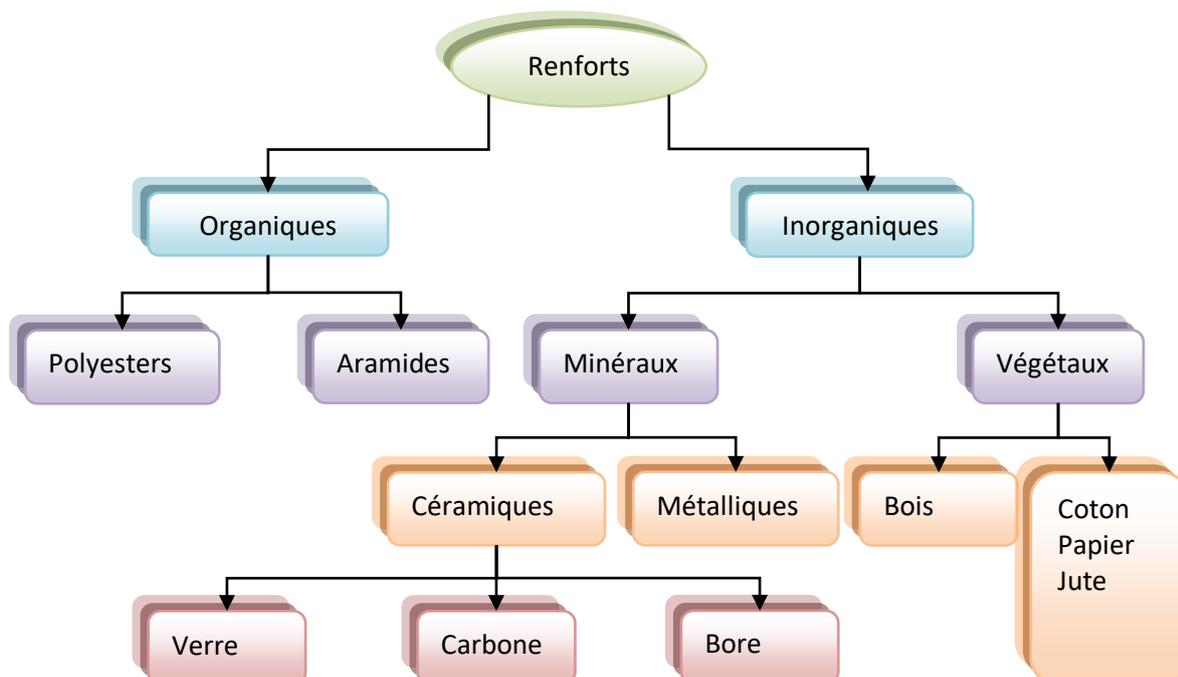
**Figure I.1 :** Structure d'un matériau composite.

### I.3. Les renforts

Les renforts assurent les propriétés mécaniques du matériau composite et un grand nombre de fibres sont disponibles sur le marché en fonction des coûts de revient recherchés pour la structure réalisée. Les renforts constitués de fibres se présentent sous les formes suivantes :

Linéique (fils, mèches), tissus surfaciques (tissus, mats), multidirectionnelle (tresse, tissus complexes, tissage tri directionnel ou plus) [23].

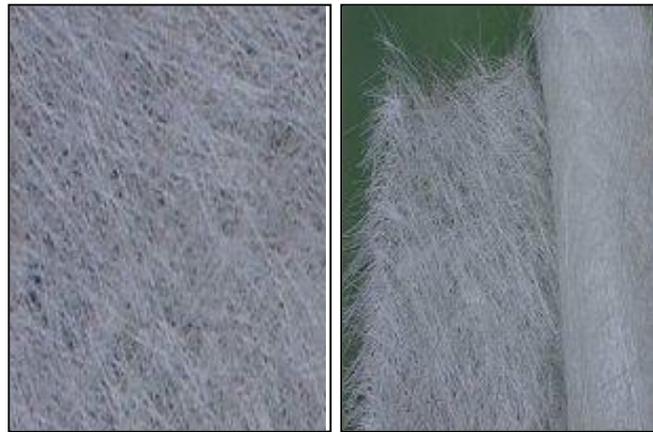
La classification des types de renforts couramment rencontrés est indiquée sur la figure I.2.



**Figure I.2:** Principaux matériaux de renforts.

### I.3.1. Fibres de verre

Elles constituent le renfort essentiel des composites de grande diffusion (GD). Elles sont les plus anciennes (1940) et les moins chères des fibres du marché, et celles dont on réalise le plus fort tonnage (figure I.4). Les fibres de verre constituent le principal renfort, utilisé dans plus de 95% des matériaux composites.



**Figure I.3 :** Fibres de verre

Elles sont obtenues à partir de silice et d'additifs. Le verre est coulé en Fusion à 1250°C à travers une filière en platine-rhodium ; après refroidissement, les filaments sont étirés pour obtenir des fibres continues. Suivant les applications auxquelles elles sont destinées, les fibres de verre sont réparties en trois qualités :

- Fibres E pour les composites grandes diffusions (GD) ;
- Fibres D pour les applications dans la construction électrique (circuits imprimés) ;
- Fibres R pour les composites hautes performances (HP).

L'utilisation des fibres de verre dans les composites est principalement limitée par un vieillissement accéléré au contact prolongé de l'eau, des rayonnements UV ou de températures élevées.

### I.3.2. Fibres de carbone

C'est la fibre la plus utilisée dans les applications hautes performances en aéronautique, en construction industrielle et dans les sports et loisirs. Très fortement orientées, les

microstructures des fibres de carbone donnent une importante rigidité et résistance des fibres dans la direction longitudinale que dans la direction transversale.

La fibre de carbone se compose des fibres extrêmement fines, d'environ 5 à 10  $\mu\text{m}$  de diamètre, et elle est composée principalement d'atomes de carbone. Ceux-ci sont agglomérés dans des cristaux microscopiques qui sont alignés plus ou moins parallèlement à l'axe long de la fibre. L'alignement des cristaux rend la fibre extrêmement résistante pour sa taille. Plusieurs milliers de fibres de carbone sont enroulées ensemble pour former un fil, qui peut être employé tel quel est ou tissé (figure I.4).

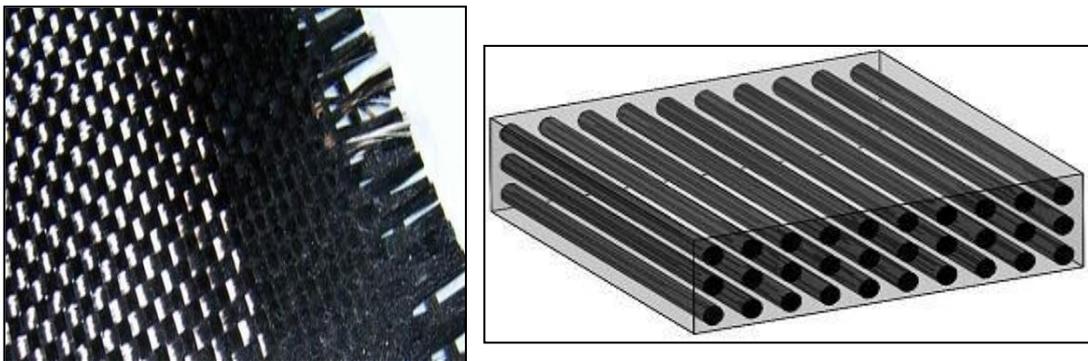


Figure I.4 : Exemple des fibres de carbone

Ces fibres sont fabriquées pour atteindre de plus hautes résistances en traction, mais ceci est fait au dépend de leurs capacités de déformations faibles. Les fibres de carbone peuvent aussi être très conductrices de chaleur et d'électricité, ce qui peut être un avantage ou un désavantage, selon le point de vue du concepteur.

### I.3.3. Fibres d'aramide

Elles sont issues de la chimie organique des polyamides Aromatiques (ou polyaramide) par synthèse chimique à basse température; ses propriétés diffèrent des polyamides aliphatiques classiques. Les composites renforcés de fibres d'aramide offrent une bonne stabilité en température (Jusqu'à 200°C en fonction de la matrice) mais souffrent :

➤ D'une adhérence moyenne entre matrice et fibre ;

D'un prix encore trop élevé.



**Figure I.5 : Fibres d'aramide**

Les chaînes de polymères alignées donnent une résistance et une rigidité plus importantes dans la direction longitudinale que dans la direction transversale. Il est possible de trouver deux types de fibres d'aramide de rigidités différentes :

- Les fibres à bas module: utilisées pour les câbles et les gilets pare-balles;
- Les fibres à haute module: employées dans le renforcement pour les composites hautes performances.

#### **I.3.4. Fibres de bore**

Ces fibres sont de gros filaments (figure I.6) (diamètre de l'ordre de 100  $\mu\text{m}$ ), formées d'une âme (le fil support) en carbone d'un diamètre d'environ 10  $\mu\text{m}$ , recouverts:

- D'une couche de bore ;
- D'une couche de carbure de silicium.



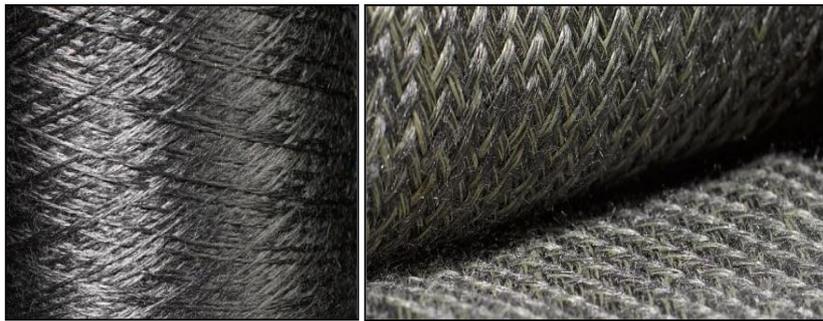
**Figure I.6 : Fibres de bore**

### I.3.5. Fibres métalliques

Elles sont les plus chères de toutes, en raison de leur difficulté de fabrication (figure I.7). Elles approchent les propriétés d'un cristal parfait.

Ces fibres sont utilisées avec des matrices métalliques pour :

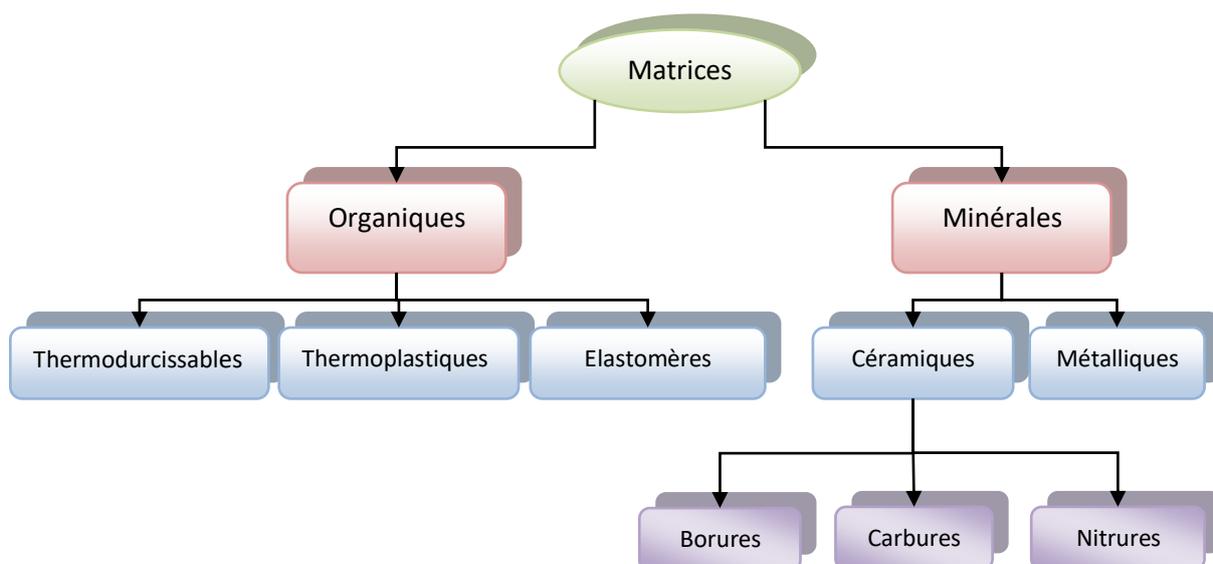
- Leurs bonnes conductibilités thermique et électrique ;
- Leurs caractéristiques thermomécaniques



**Figure I.7 : Fibres métalliques**

### I.4. Les Matrices

La matrice permet de lier les fibres de renforts, de répartir les contraintes, d'apporter la tenue chimique de la structure et de donner la forme désirée au produit final. Les différentes familles de Matrice sont présentées l'organigramme suivant:



**Figure I.8 : Les différentes familles de Matrice**

### I.4.1. Matrices Organiques

Un très grand nombre, de matériau plastique peut être utilisé comme matrice dans les matériaux composites. Elles peuvent aussi bien appartenir à la famille des résines « Thermodurcissables » qu'à celles des résines « Thermoplastiques ».

Parmi ces familles de résines, on distingue deux types de résines qui sont, actuellement, les plus utilisées:

#### I.4.1.1. Les résines thermodurcissables

En général ces résines sont associées avec des fibres longues. Les polymères thermodurcissables ont la forme d'un réseau tridimensionnel ; au cours de la polymérisation, ce réseau se pont (double liaison de polymérisation) et durcit de façon définitive lors du chauffage selon la forme souhaitée. La transformation est irréversible.

- **Polyesters insaturés**

C'est la résine la plus utilisée dans l'application composite de grande distribution. La résine de polyester insaturé contenant un monomère (généralement le styrène) est réticulée à température ambiante par addition d'un catalyseur de type peroxyde organique et d'un accélérateur. Elle passe successivement de l'état liquide visqueux initial à l'état de gel, puis à l'état de solide infusible.

La réaction est exothermique et la température de la résine augmente progressivement depuis le gel jusqu'à un maximum pour redescendre ensuite lentement à la température ambiante.

Le durcissement sera d'autant plus rapide ou, si l'on préfère, le temps nécessaire dans le moule sera d'autant plus court que la courbe de température en fonction du temps se rapprochera davantage de la verticale. La réaction de durcissement dépend de la réactivité de la résine, de la forme de l'objet fabriqué (épaisseur, etc.), de la nature et du dosage du système catalytique.

Il existe différents types de résines :

- Ortho phtalique : la plus courante ;
- Iso phtalique : qui donne une meilleure tenue à l'humidité ;
- Chlorée : apportant une auto extingüibilité ;
- Bisphénol : possédant de bonnes caractéristiques chimiques et thermiques.

- **Vinylesters**

On peut la considérer comme une variante des polyesters produite à partir d'acides acryliques. Elles possèdent une bonne résistance à la fatigue et un excellent comportement à la corrosion, mais demeure combustible.

- **Phénoliques**

Elles sont issues de la polycondensation du phénol et du formol et se caractérisent par une bonne tenue au feu, sans fumée. Elles restent fragiles, sensibles à l'humidité, difficiles à colorer et à mettre en œuvre.

- **Epoxydes**

Elles résultent de la polyaddition de l'épichlorhydrine sur un polyalcool et constitue la résine type des composites hautes performances HP. On distingue deux classes de résines en fonction :

- Du durcissement à chaud ou à froid ;
- De la tenue en température (120-130 °C, ou 180-200 °C).

- **Polyuréthannes et polyurées**

Dans la fabrication de pièces composites, on utilise surtout des formules élastomériques dont la faible viscosité permet un bon remplissage du moule. Les constituants sont livrés à l'état de prépolymères liquides :

- Polyols + polyisocyanates = polyuréthannes ;
- Polyéthers + polyamines = polyurées.

#### **I.4.1.2. Les résines thermoplastiques**

Renforcés avec des fibres courtes (et parfois, avec des fibres longues) se développe fortement. Les polymères thermoplastiques ont une structure linéaire ; ils sont mis en forme par chauffage (les chaînes se plient), et durcissent au cours du refroidissement (les chaînes se bloquent). La transformation est réversible.

#### **I.4.1.3. Les Résines thermostables**

Polymère présentant des caractéristiques mécaniques stables sous des pressions et des températures élevées (>200°C) appliquées de façon continue. Cette propriété est mesurée en

déterminant la température que peut supporter la résine durant 2000h sans perdre la moitié de ses caractéristiques mécaniques.

#### I.4.1.4. Les élastomères thermoplastiques

Les matériaux élastomères thermoplastiques sont des matières premières que l'on peut traiter dans l'ensemble des machines de processus plastiques grâce à ses particularités fonctionnelles comme la faible densité ne nécessitant pas de vulcanisation à part leurs forces comme les mêmes que les caoutchoucs vulcanisés, une large gamme de dureté, la résistance à l'environnement extérieur et à la température, la faible déformation permanente et la facilité de recyclage. Tout ceci leurs permettent d'assurer un faible coût de production et d'investissement aux utilisateurs avec son gain de haut processus dans le secteur du plastique.

**Tableau I.01** : Principales caractéristiques mécaniques des résines

	Nom	P (kg/m <sup>3</sup> )	E (MPa)	$\nu$	R (MPa)	$\alpha$ ( $\mu\text{m}/\text{m}^\circ\text{C}$ )	Prix (F/kg)
Résines	Polyester	1300	3800	0.37	88	100	15
	Vinylester	1200	3500	0.35	81	65	18
	Epoxyde	1220	5200	0.38	121	40	40
	Silicone	1550	1000	0.45	3	30	200
	Polyimide	1217	3450	0.35	80	36	150
	Phénolique	1350	3000	0.36	70	80	10
	Polyamide	1130	1900	0.33	70	85	25
	Polycarbonate	1100	2300	0.33	60	70	30
	Polyester saturé	1310	2800	0.33	55	90	
métaux	Aluminium	2630	69000	0.33	358	23	13
	Acier XC10	7850	210000	0.29	1000	10	10
	Cuivre	8940	119000	0.30	350	17	11
	Magnésium	1660	42000	0.30	280	25	27

#### I.4.2. Les matrices métalliques

L'utilisation de matériaux composites à des températures supérieures à 3000°C interdit pratiquement l'usage des matrices organiques et suppose donc que l'élément de renforcement soit noyé au sien d'une matrice métallique. Les plus employées sont les métaux légers et leurs alliages en particulier l'aluminium, le titane et le nickel.

### I.4.3. Les matrices carbonées

Sont fabriquées par décomposition d'une matière organique à haute température. La matière peut être un liquide (imprégnation en phase liquide), ou un hydrocarbure gazeux (décomposition chimique en phase vapeur). Le second procédé est plus rapide que le premier, qui peut durer plusieurs mois pour obtention d'une densification suffisante, mais moins reproductible. Le carbone se dépose en grains sur les fibres, assurant leur bonne liaison. Il est possible par exemple d'obtenir un composite carbone-carbone dont la densité est égale à celle du carbone massif.

### I.4.4. Les matrices céramiques

Sont particulièrement intéressantes en raison de leur caractère réfractaire. Elles sont utilisées dans des pièces qui doivent subir sans dommage de très hautes températures (tuiles de protection thermique, brûleurs). Le point faible des céramiques, à savoir leur très faible résistance à la rupture en traction, est partiellement masquée par l'insertion de fibres dans la matrice. Les techniques de fabrication les plus courantes sont l'imprégnation en phase liquide (SiC-SiC par exemple) ou le dépôt plasma (par exemple dépôt de silicium puis nitruration à l'aide d'un traitement sous azote à 1450°C, qui produit une augmentation de volume et favorise la densification).

## I.5. Charges

De manière générale, les charges et additifs jouent un rôle essentiel dans l'obtention des propriétés des polymères, qu'ils soient utilisés seuls ou comme matrices de composites ; il en existe de très nombreux types.

Les charges sont des particules solides que l'on disperse au sein de la matrice. Elles peuvent être minérales, organiques (végétales ou synthétiques) ou métalliques, et s'utilisent grosso modo de la même façon que dans les plastiques "traditionnels". On peut par exemple rencontrer (Figure I.8) :

- Des microbilles de verre creuses, ajoutées en plus des renforts principaux, qui améliorent la tenue en compression tout en allégeant la matrice ;
- Du noir de carbone utilisé à la fois comme pigment noir, comme barrière anti-UV et comme antioxydant ;

- Des particules de silice pour rendre la matrice plus isolante (thermiquement, électriquement et acoustiquement), diminuer son retrait au moulage... ;
- Des poudres ou paillettes métalliques pour rendre la matrice conductrice de l'électricité et de la chaleur, pour améliorer son usinabilité, sa résistance aux chocs ou à l'abrasion... ;
- Des billes thermoplastiques ajoutées dans les matrices thermodurcissables, pour améliorer leur ductilité et donc leur résistance à la fissuration... ;



**Figure I.9 :** Exemples de différentes charges :  
(a) microbilles de verre, (b) noir de carbone, (c) silice.

### I.5.1. Charges renforçantes

Sphériques ( $10 < \Phi < 150 \mu\text{m}$ ) : microbilles de verre creusées ou pleines, microbilles de carbone.

### I.5.2. Charges non renforçantes

Ces matériaux sont ajoutés à la résine afin de réduire le coût de la résine. Ils sont extraits de roches ou de minerais (carbonate de calcium, talc, kaolin, silices,...etc.). L'incorporation de ces charges à la matrice a pour effet d'augmenter certaines propriétés, entre autres, la masse volumique, le module d'élasticité, la dureté, la viscosité et la stabilité dimensionnelle. Par contre, on obtient une réduction du prix, de la résistance à la traction et de la résistance à la flexion du composite.

### I.5.3. Les Additifs

Il s'agit de la substance ajoutée avec une faible quantité quelque pourcentage en masse à la résine pour modifier ou améliorer le comportement rhéologique ou les propriétés du produit fini :

- Accélérateurs et catalyseurs de polymérisation ;
- Diluants ;
- plastifiants ou flexibilisateurs ;
- Tensioactifs ;
- Pigments et colorants ;
- antioxydants, anti UV, anti-ozones ;

Les charges et additifs; sont incorporés dans un matériau composite pour :

- Modifier la couleur ;
- Modifier sensiblement les propriétés mécaniques ou thermiques ;
- Réduire le coût ;
- Résister au feu ;
- Diminuer le retrait ;
- Faciliter le démoulage ;
- Améliorer la résistance au vieillissement ;
- Modifier la densité du matériau.

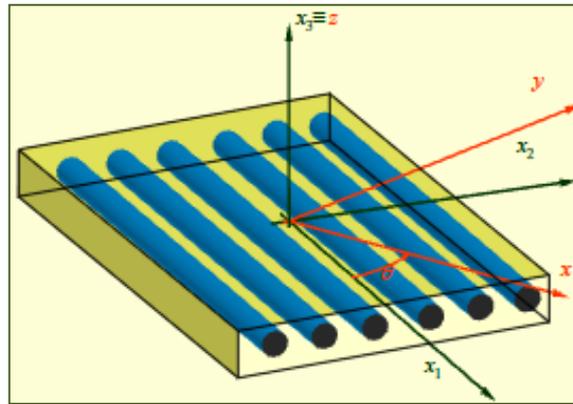
### I.6. Structures du composite

La rigidité d'un composite est conditionnée par le nombre et l'empilement des couches, leur nature, leur orientation, leur séquence d'empilement, etc. Généralement les matériaux composites structuraux sont classés en trois catégories :

1. Les monocouches ;
2. Les stratifiées ;
3. Les sandwiches.

### I.6.1. Les monocouches

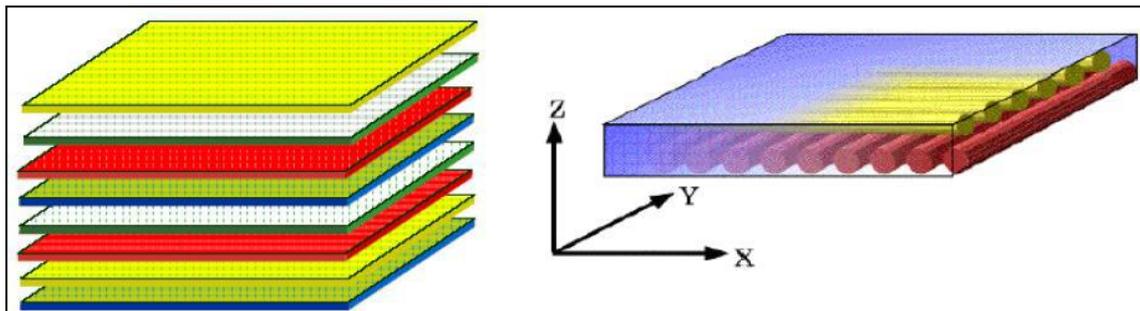
Les monocouches représentent l'élément de base de la structure composite. Les différents types de monocouches sont caractérisés par la forme du renfort : à fibres longues (unidirectionnelles 1D, réparties aléatoirement), à fibres tissées, à fibres courtes.



**Figure I.10 :** Composite monocouche

### I.6.2. Les stratifiées

Un stratifié est constitué d'un empilement de monocouches (figure I.10) ayant chacun une orientation propre par rapport à un référentiel commun aux couches et désigné comme le référentiel du stratifié. Le choix de l'empilement et plus particulièrement des orientations permettra d'avoir des propriétés mécaniques spécifiques.



**Figure I.11 :** Matériau composite stratifié

Les stratifiés sont, avec les panneaux sandwich, les matériaux composites qui ont les meilleures performances structurales. L'idée de base est celle de superposer des couches anisotropes, renforcées avec des fibres longues, unidirectionnelles ou bidirectionnelles, en orientant les couches de sorte à obtenir un matériau final ayant les propriétés souhaitées, en

terme de comportement élastique, rigidité, résistance...etc. La conception du matériau devient donc une phase de la conception structurale, leurs qualités est d'être :

- ✓ Hautes performances mécaniques ;
- ✓ Légers.

L'un des avantages des stratifiés est la possibilité d'orienter les fibres selon des directions adaptées aux efforts imposés à la structure. La conception d'une structure stratifiée passe donc par le choix des matériaux, des orientations des fibres et de l'agencement des plis (séquence d'empilement de plis d'inclinaison donnée).

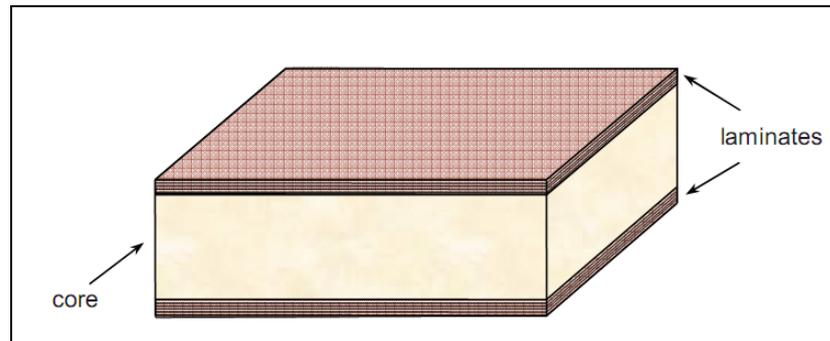
Un stratifié possédant l'empilement (0, +45, 90, -45) est un stratifié avec 4 couches dans les directions 0°, +45°, 90° et -45°, l'orientation 0° coïncidant avec la direction « 1 » du repère principal du composite. Ces plans seront répartis symétriquement par rapport au plan moyen du stratifié. Il est recommandable que les stratifiés soient :

- ✓ Équilibrés : stratifié comportant autant de couches orientées suivant la direction + $\theta$  que de couches orientées suivant la direction - $\theta$  ;
- ✓ Symétriques : stratifié comportant des couches disposées symétriquement par rapport à un plan moyen ;
- ✓ Orthogonales : stratifié comportant autant de couches à 0° que de couches à 90°.

### I.6.3. Les sandwichs

Les matériaux composites de types sandwichs sont principalement constitués de deux composants nommés, peau et noyau (Figure I.11). Cette technique consiste à déposer une âme (constituée d'un matériau léger possède de bonnes caractéristiques en compression) entre deux feuilles ou peau.

Les âmes peuvent être pleines (bois, mousse, balsa, structure a nid d'abeille ...etc.) ou creuses (alliages métalliques léger, papier...etc.). Les peaux sont des stratifiés ou des feuilles d'alliages légers. Par ce fait les sandwichs deviennent assez légers et offrent une très grande rigidité en flexion.



**Figure I.12:** Composite sandwich

## I.7. Propriétés mécaniques des composites

### I.7.1. Déformation élastique

Contrairement à l'acier, les matériaux composites ne montrent pas une déformation plastique, et leur rupture est fragile. Dans le béton on ne peut généralement pas accepter qu'il ait une déformation plastique.

### I.7.2. Relation contraintes-déformations

Les propriétés mécaniques des barres de renforcement, peuvent être obtenues à partir des propriétés des constituants, à l'aide de la loi des mélanges, qui considère que chaque constituant contribue selon sa proportion en volume dans le composite. Soit  $V_f$  la fraction volumique des fibres. En première approximation, le module d'élasticité du composite est donné par l'expression suivante:

$$E_c = E_f \cdot V_f + E_m \cdot V_m \text{ avec } V_f + V_m = 1$$

$$E_c = E_f \cdot V_f + E_m (1 - V_f) = (E_f - E_m) V_f + E_m$$

Avec :

$E_c$ : module d'élasticité du composite ;

$E_f$ : module d'élasticité des fibres ;

$E_m$ : module d'élasticité de la matrice ;

$V_f$  : fraction volumique des fibres ;

$V_m$  : fraction volumique des matrices.

### I.7.3. Comportement en traction

La variation de la résistance en traction des matériaux composites est beaucoup plus élevée, comparée à celle de l'acier. La variation dépend du type de fibres, de la configuration des fibres, des liants et des dimensions de l'échantillon. Beaucoup d'essais ont été réalisés pour déterminer les résistances en traction des barres de renforcements. D'une façon générale, ces barres sont caractérisées par:

- ✓ Les résistances en traction des barres à base de fibres de carbone ( $V_f=47$  à  $70\%$ ) sont pour la plupart comprises entre 1100 et 2200 MPa, le module élastique de 100 à 150 GPa ;
- ✓ Les résistances en traction des barres en fibres de verre ( $V_f=50$  à  $60\%$ ) sont comprises entre 900 et 1100 MPa, le module élastique est autour de 45 GPa ;
- ✓ Les résistances en traction des barres en fibres d'aramide ( $V_f=43$  à  $70\%$ ) sont comprises entre 1350 et 1650 MPa et leur module d'élasticité" est d'environ 60 GPa.

### I.7.4. Comportement en compression et cisaillement

Les matériaux composites sont généralement utilisés comme des renforcements de traction. Les résistances en compression et en cisaillement sont généralement très faibles. On n'utilise donc généralement pas les matériaux composites comme renforcement en compression et en cisaillement.

### I.8. Architecture des renforts

Les structures composites sont anisotropes. La plupart des renforts travaillent bien en traction, mais offrent de moins bonnes performances en compression et cisaillement. Il est donc impératif de jouer sur la texture et la géométrie des renforts pour créer une architecture adaptée [22].

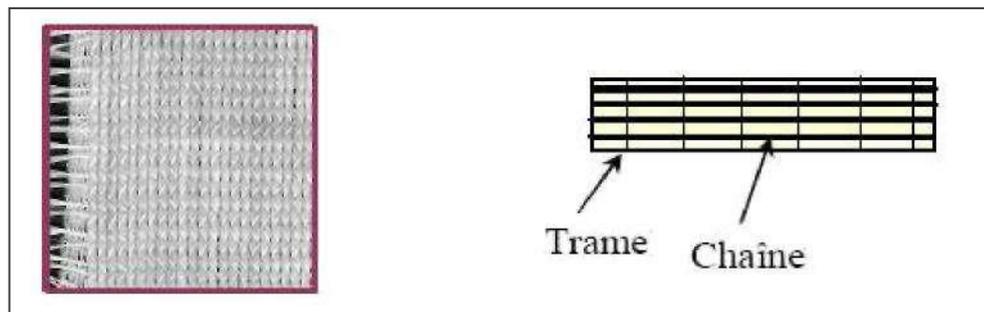
Il existe différentes géométries et textures de renforts :

- Les unidirectionnels (UD)
- Toile ou taffetas
- Serge
- Satin

### I.8.1. Les unidirectionnels (UD)

Dans une nappe UD, les fibres sont assemblées parallèlement les unes par rapport aux autres à l'aide d'une trame très légère. Taux de déséquilibre très grand.

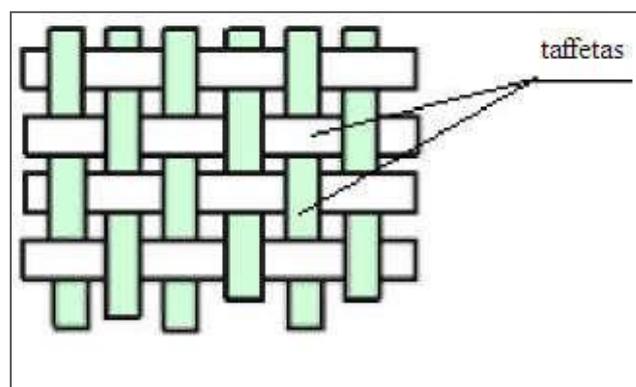
Les tissus se composent de fils de chaîne et de trame perpendiculaires entre eux. Le mode d'entrecroisement ou armure les caractérise.



**Figure I.13:** Nappe unidirectionnel des renforts

### I.8.2. Toile ou taffetas

Chaque fil de chaîne passe dessus puis dessous chaque fil de trame, et réciproquement. Le tissu présente une bonne planéité et une relative rigidité, mais est peu déformable pour la mise en œuvre. Les nombreux entrecroisements successifs génèrent un embuvage important et réduisent les propriétés mécaniques.



**Figure I.14:** Toile ou taffetas

### I.8.3. Serge

Chaque fil de chaîne flotte au dessus de plusieurs (n) fils de trame et chaque fil de trame flotte au dessus de (m) fils de chaîne. Armure de plus grande souplesse que le taffetas ayant une bonne densité de fils. Ci-contre, un sergé 2/2.

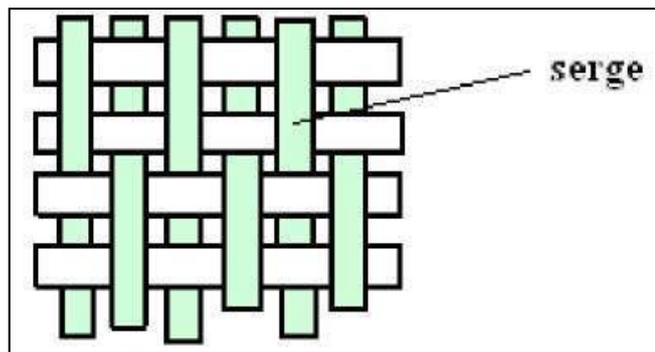


Figure I.15: Un sergé 2/2

### I.8.4. Satin

Chaque fil de chaîne flotte au dessus de plusieurs (n-1) fils de trame et réciproquement. Ces tissus ont des aspects différents de chaque côté. Ces tissus sont assez souples et adaptés à la mise en forme de pièces à surfaces complexes. Ce type de tissus présente une forte masse spécifique.

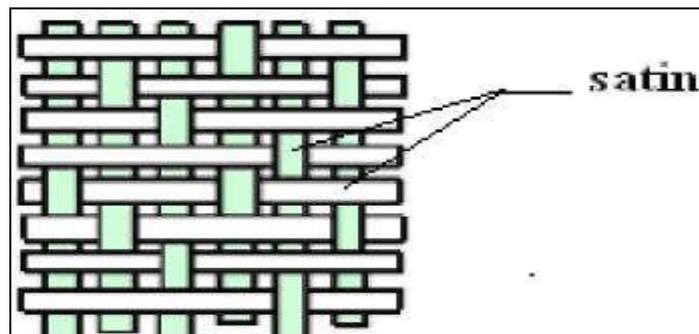


Figure I.16: Tissu sous forme d'un satin

## I.9. Domaines d'application des composites

Les composites entrent aujourd'hui dans pratiquement tous les domaines d'applications possibles : Piscines, bassins, bâtiments, les transports aériens, maritime, routier, ferroviaire, sports, loisirs, ...etc.

### **I.9.1. Les composites dans la construction civile**

L'utilisation des composites dans la construction civile est un nouveau créneau, qui commence à intéresser nos bâtisseurs. Le nombre de dégâts causés par les séismes à travers le monde a poussé les chercheurs à s'intéresser aux composites.

Le handicap majeur de l'utilisation des matériaux composites dans la construction civile, reste leur coût, qui est encore excessif.

L'utilisation des composites renforcés de fibres de carbone, en complément des composites à fibre de verre (TD et TP) pourra se développer dans le secteur de la construction civile lorsque leur prix deviendra inférieur [26]. Néanmoins les composites apportent au bâtiment la souplesse des formes, la résistance aux contraintes climatiques, et les composites renforcés de fibres de carbone la résistance aux séismes.

### **I.9.2. Les composites dans l'automobile**

Les matériaux organiques composites à matrice thermoplastique ou thermodurcissable renforcées par des fibres, généralement de verre, courtes ou longues ont fait leur apparition dans l'automobile durant les années 60-70.

Le secteur de l'automobile utilise pour 95% des composites à matrice polyesters et fibres de verre, mais intègre massivement les composites thermoplastiques depuis 2003. De plus les composites apportent au secteur de l'automobile une facilité d'entretien et une grande liberté de conception [27].

Dans l'automobile, le développement à long terme des composites est menacé par la difficulté de les intégrer dans les chaînes de fabrication et par les exigences de recyclage.

### **I.9.3. Les composites et la construction électrique**

La consommation massive des composites dans les domaines électrique et électronique, prends de l'ampleur avec l'utilisation importante de l'audiovisuel (TV, microordinateurs, lecteurs DVD...etc.).

En utilisant les propriétés remarquables des matériaux composites, la construction électrique réalise des équipements fiables, aux fonctions multiples et longues durée de vie.

### **I.9.4. Les composites et la construction industrielle**

Le développement des composites TD et TP, avec la possibilité de jouer sur leurs caractéristiques, ont fait que ces matériaux, se sont imposés dans le monde industriel. Les

fibres de carbone pourront être utilisées en complément aux fibres de verre à la fois comme renfort et comme capteur, et seront associées à des résines polyesters ou époxy.

L'utilisation des matériaux composites peut contribuer à améliorer la sécurité de certains sites industriels sensibles et faciliter la conception des bâtiments.

### **I.9.5. Les composites et la construction industrielle**

Les performances sportives exigent des matériaux performants. Les matériaux composites répondent bien à ces exigences. Les sports et loisirs utilisent des composites HP avec un taux de renforts de plus de 70%. Les sports concernés par ces matériaux sont surtout, le tennis, le ski, les sports nautiques ...etc.

### **I.9.6. Les composites dans la construction nautique**

Dans la construction nautique de plaisance et de pêche, les composites sont indispensables pour les embarcations de taille inférieure à 40 mètres. D'ailleurs c'est le seul domaine exploité en Algérie. Les entreprises étatiques et privées se sont spécialisées dans la construction des bateaux de pêche et de plaisance. Elles utilisent surtout de la résine polyester et la fibre de verre E.

### **I.9.7. Les composites dans l'aéronautique**

L'aéronautique utilise principalement des composites HP constitués d'une matrice époxy associée à un taux élevé de renforts en fibres de carbone.

L'aéronautique utilise les composites hautes performances pour la fabrication de pièces de structure primaire des appareils en raison de leur légèreté, de leur souplesse de forme et des économies de frais de maintenance qu'ils engendrent.

### **I.9.8. Les composites dans le ferroviaire**

Les matériaux composites sont utilisés dans le domaine ferroviaire pour deux principaux atouts :

- ✓ Un bon comportement au feu ;
- ✓ Un moulage facile des pièces utilisées.

### **I.10. Avantages et inconvénients des composites**

Les composites sont préférés à d'autres matériaux parce qu'ils offrent des atouts liés à :

- ✓ Leur légèreté ;
- ✓ Leur résistance à la corrosion et aussi à la fatigue ;

- ✓ Leur insensibilité aux produits comme les graisses, les liquides hydrauliques, les peintures et les solvants ;
- ✓ Leur possibilité de prendre plusieurs formes, d'intégrer des accessoires et permettre la réduction de bruit.

Cependant certains inconvénients freinent leur diffusion :

- ✓ Les coûts des matières premières et des procédés de fabrication ;
- ✓ La gestion des déchets engendrés et la réglementation de plus en plus stricte.

L'industrie des matériaux composites doit donc aujourd'hui relever certains défis tels que :

- ✓ La maîtrise des émanations de produits organiques volatiles, par exemple le styrène ;
- ✓ La maîtrise des procédés de transformations et des performances des matériaux qui sous-entend d'une très bonne connaissance des constituants mis en place ;
- ✓ La mise en place de technologies et des filières pour la gestion des déchets en fin de vie qui est la partie la plus difficile à satisfaire en raison du caractère thermostable de la plupart des composites.

De plus, dans ce dernier point, le recyclage est actuellement très limité parce que le broyage ou les autres procédés sont très coûteux et fournissent une matière de faible qualité [28].

### I.11. Conclusion

En général, le composite est formulé pour satisfaire à des critères de résistance, de rigidité ou bien de tenue à l'action de l'environnement. Les propriétés finales dépendent des propriétés élémentaires de chaque constituant.

On a vu dans ce chapitre tout ce qui concerne les matériaux composites, leur domaine d'application (aéronautique, construction,...), leurs avantages (grande rigidité, résistance à la corrosion, isolation thermique et phonique....) et leurs inconvénients (mauvaise tenue à la chaleur, sensibilité de ces matériaux aux impacts....), et leurs propriétés mécaniques.

L'utilisation des composites dans le domaine de construction montre que c'est une excellente alternative aux solutions traditionnelles.

## **Chapitre II**

---

### **Théorie des plaques**

## Chapitre II

### Théories des plaques

#### II.1. Introduction

L'emploi de structures minces, poutres, plaques et coques, est aujourd'hui largement répandu dans de nombreux domaines, en particulier les transports et le génie civil. Il s'agit en général de prédire le comportement des structures sous certaines sollicitations en vue de contrôler ou d'éviter divers phénomènes (endommagement, bruit ...). En ingénierie ou en, la plupart des modèles utilisés sont en général linéaires et fournissent une bonne approximation, au premier ordre, du comportement des plaques. L'objet de toute théorie est le calcul approché des grandeurs généralisées sur la base du système d'équations d'équilibre, de compatibilité, de conditions aux limites sur les bords, complété par une loi de comportement reliant les contraintes et les déformations généralisées. Nous présentons dans ce chapitre quelques modèles sur les théories des plaques développés dans la littérature.

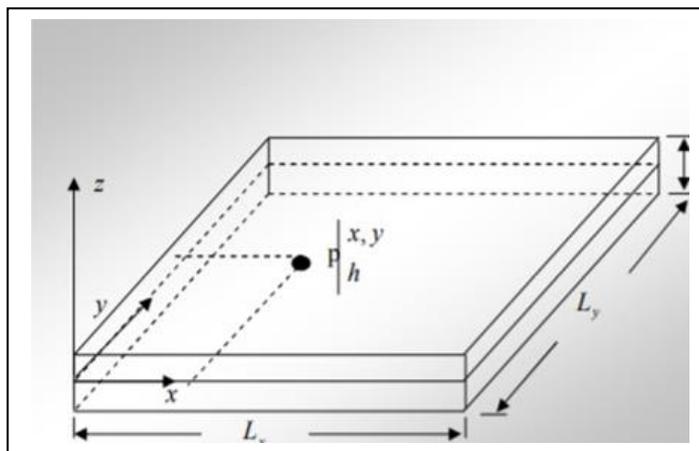
#### II.2. Historique des théories des plaques

Afin de résoudre les problèmes des structures ayant comme éléments structuraux des poutres et des plaques, il est nécessaire de choisir la bonne théorie décrivant correctement le comportement statique et dynamique de la structure ainsi que la méthode de résolution à appliquer. C'est en 1888 que Love utilisa les hypothèses de Gustav Kirchhoff, elles-mêmes inspirées des hypothèses d'Euler-Bernoulli pour fonder une théorie des plaques minces (également appelée théorie classique ou théorie de Kirchhoff-Love). La théorie des plaques semi-épaisses (théorie des déformations du premier ordre) a été consolidée par Mindlin à partir des travaux de Rayleigh en (1877) Timoshenko., (1959), Timoshenko He.,(2001) et Chi.,(2006) en (1921), Reissner Reddy., (1997) en (1945) et Uflyand (1948). Ensuite, des théories d'ordre supérieur sont venues améliorer les hypothèses des théories classiques et du premier ordre lorsque l'épaisseur de la plaque devient importante. Il existe aussi la théorie basée sur l'élasticité tridimensionnelle (théorie 3-D) qui ne fait aucune hypothèse restrictive sur les déplacements de la plaque. Les différentes théories existantes peuvent donc être classées en quatre principales catégories : théorie classique des plaques minces (appelée aussi théorie de Kirchhoff-Love), théorie des plaques semi-épaisses du premier ordre (appelée aussi théorie de Mindlin-Reissner), théories d'ordre supérieur applicables aux plaques épaisses (comme celle de Reddy) et la théorie basée sur l'élasticité tridimensionnelle (théorie 3-D).

### II.3. Définition d'une plaque

Une plaque est une pièce dont l'épaisseur est faible par rapport aux autres dimensions ou un solide délimitée par deux plans parallèles, les faces, et un cylindre au sens large (de section quelconque et pas nécessairement circulaire) dont l'axe est perpendiculaire aux faces Figure II. 1. On définit :

- Le plan moyen, ou plan médian : plan situé à équidistance entre les faces (c'est l'équivalent de la courbe moyenne des poutres) ;
- Le feuillet neutre : élément de matière d'épaisseur infinitésimale situé autour du plan moyen (c'est l'équivalent de la fibre neutre des poutres) ; c'est le plan  $(O, x, y)$ , d'équation  $z = 0$
- Une fibre normale : ensemble des points situés sur une normale au plan médian, à un endroit  $(x, y)$  donné ; elle a pour direction  $z$ .
- On appelle  $h$  l'épaisseur de la plaque ; le plan inférieur est donc le plan  $z = -h/2$  et le plan supérieur est le plan  $z = h/2$ .



**Figure II.1.** Géométrie d'une plaque

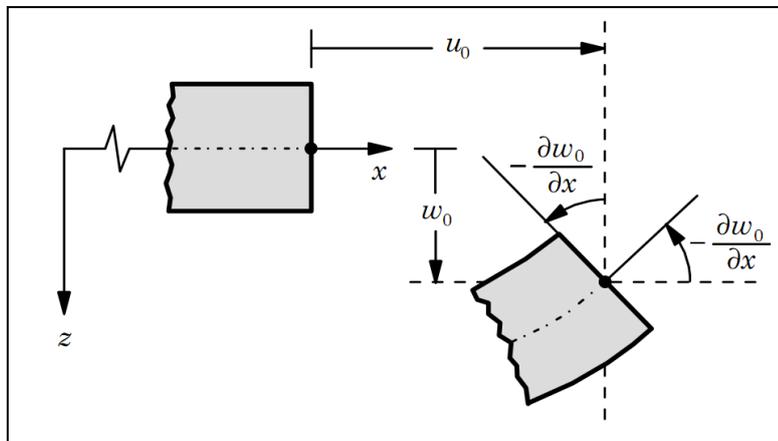
### II.4. Les théories de déformation des plaques

L'utilisation intensive des plaques isotropes et des plaques composites dans diverses industries, particulièrement dans les domaines de l'aéronautique, de l'automobile, et de la construction navale, a stimulé les chercheurs à développer des théories capables de décrire correctement leur comportement structural.

### II.4.1. La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT)

On parle d'une plaque mince, lorsque la flèche générée par les déformations de cisaillement reste négligeable devant la flèche générée par la courbure de la plaque. Dans le cas d'une plaque homogène isotrope, la part de cisaillement dans la flèche est directement reliée à l'élanement ( $L/h$ ).

La théorie cpt se présente comme la plus simple des approches. Cette théorie se base sur les hypothèses de Love Kirchhoff [30], selon lesquelles une droite normale au plan moyen de la plaque reste perpendiculaire après déformation (figure II.2), ce qui revient à négliger les effets de déformation en cisaillement transverse [31].



**Figure II.2.** Illustration de la plaque de Love-Kirchhoff

Le champ de déplacements de Love-Kirchhoff s'écrit alors,

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

Avec :

$u_0(x, y)$  et  $v_0(x, y)$  : Les déplacements de membrane dans les direction  $x$  et  $y$  respectivement

$w_0(x, y)$  : La flèche de la plaque

$\frac{\partial w_0}{\partial x}$  et  $\frac{\partial w_0}{\partial y}$  : Les rotations dues à la flexion (sans cisaillement).

Le plan principal de la plaque est le plan  $(x, y, z)$  et l'épaisseur est orientée selon l'axe  $z$ . Puisque ce modèle ne tient pas en compte l'effet de cisaillement transverse, il donne des résultats imprécis pour les plaques épaisses.

#### II.4.2. La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre a prolongé la théorie classique des plaques en tenant compte l'effet de cisaillement transverse, dans ce cas les contraintes et les déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque, ce qui oblige l'introduction d'un facteur de correction. Les études sur la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) peuvent être référées dans [32 et 33] qui a mené au modèle de plaque de Reissner-Mindlin. Ainsi que [34 et 35].

L'hypothèse cinématique de Mindlin est la suivante : La normale reste droite mais non perpendiculaire à la surface moyenne (à cause de l'effet du cisaillement transverse) dans la configuration déformée (Figure II.3).

Le champ de déplacements de Reissner-Mindlin s'écrit :

(II.2)

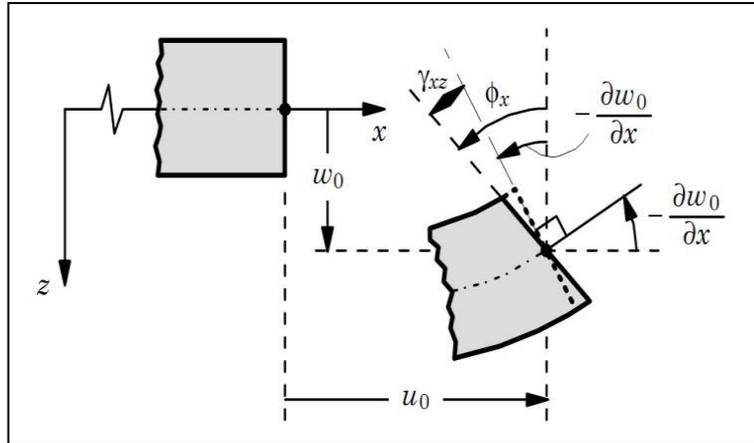
$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z\phi_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z\phi_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned}$$

Avec :

$\phi_x$  et  $\phi_y$  : Les rotations de la normale au plan moyen autour des axes  $x$  et  $y$

Le champ de déplacement définis dans l'expression ci-dessus permet de reprendre la théorie classique des plaques décrite dans la dernière section par le remplacement,

$$\phi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad \phi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (\text{II.3})$$



**Figure II.3.** Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin

D'ailleurs pour éviter l'introduction d'un facteur de correction, des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevée ont été développées.

Avec ce choix de la forme des champs de déplacements, les déformations transversales  $\gamma_{xz}$  sont constantes en "z". Les contraintes de cisaillement sont donc uniformes à n'importe quel point suivant l'épaisseur et ça évitent la discontinuité entre les couches dans les composites conventionnels. Cette mauvaise description d'uniformité de distribution des contraintes oblige à introduire des coefficients correcteurs pour mieux prendre en compte, dans l'écriture de l'énergie, les effets du cisaillement transversal [36]. Les résultats obtenus dépendent essentiellement du choix empirique dans des situations complexes des coefficients correcteurs et l'étude des plaques épaisses reste aléatoire par ce type d'approche cinématique.

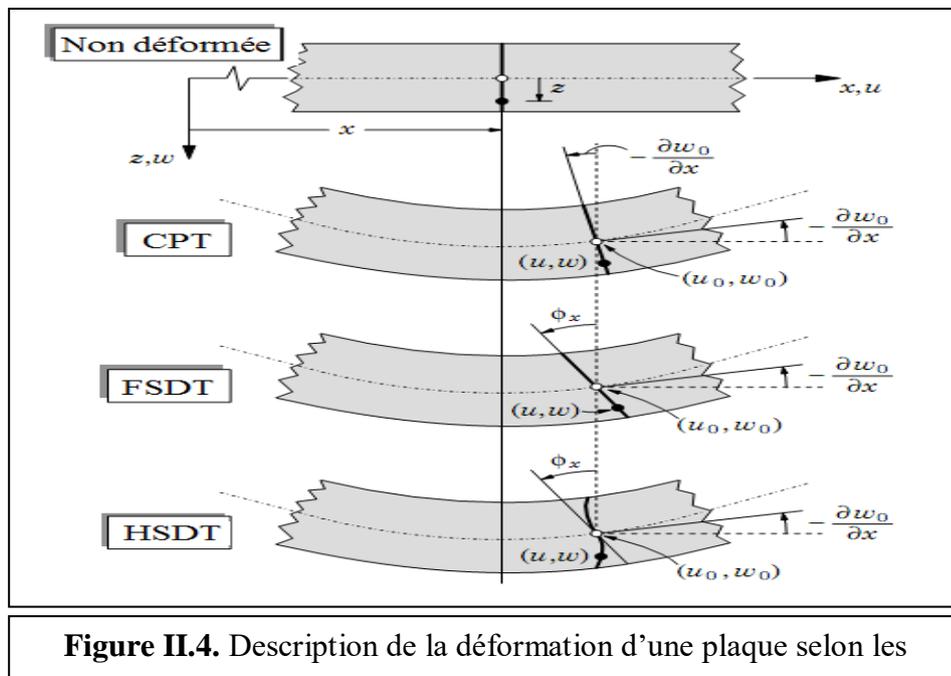
#### II.4.3. La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé(HSDT)

Cette classe de théories plus fines a pour base un développement du déplacement dans l'épaisseur à l'ordre deux ou plus. Ces théories sont particulièrement bien adaptées à la modélisation du comportement des plaques épaisses ou poutres courtes, où la déformation transverse joue un rôle prédominant. La plupart de ces modèles utilisent un développement en série de Taylor, la théorie d'ordre élevé est basée sur une distribution non linéaire des champs dans l'épaisseur (figure II.4). Par conséquent, on tient compte des effets de la déformation

transversale de cisaillement et/ou de la déformation normale transversale. Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction. Les références sur de tels modèles peuvent être trouvées dans [37-38].

Le champ de déplacement est généralement écrit comme suit

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z)\phi_x \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z)\phi_y \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{II.4}$$



En effet, les déplacements de la théorie classique de plaque (CLPT) est obtenue en prenant  $f(z) = 0$  , alors que la théorie de premier ordre (FSDT) peut être obtenue par  $f(z) = z$

### II.4.3.1. Revue sur les différents modèles de la théorie d'ordre élevé (HSDT)

Pour franchir les limites des théories du premier ordre, plusieurs auteurs proposent quelques contributions importantes de développement de modèles d'ordres élevés qui se sont

distingués dans la littérature par l'expression de la fonction de cisaillement  $f(z) = 0$ . Ces modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs de déplacement dans

l'épaisseur, et qui permettent de représenter le gauchissement de la section transversale dans la configuration déformée (Figure II.4) [36], [39-40]. Nous citons en particulier :

- L'approche d'Ambartsumyan [41] avec ;

$$f(z) = \frac{z}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad (\text{II.5})$$

- L'approche de Reissner [11], Panc et Kaczkowski avec ;

$$f(z) = \frac{5}{4} z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.6})$$

- L'approche de Levinson, Murthy [34 et 35] et [42] avec :

$$f(z) = z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.7})$$

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal  $w$  est constant [43]. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle dans le cas homogène [44].

La distribution des contraintes de cisaillement transversal est parabolique suivant l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

- L'approche de Touratier [40] avec :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin \left( \frac{z}{h} \right) \quad (\text{II.8})$$

Touratier propose le modèle "sinus" (SSDT) qui est différent des autres modèles d'ordre supérieur puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement suivant l'épaisseur.

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par les modèles (sinus) prennent une forme sinusoïdale dans l'épaisseur de la poutre.

Récemment, Afaq et al, proposent un modèle exponentiel (ESDPT) avec une cinématique plus riche [45].

La fonction de distribution de cisaillement transverse est de la forme suivante:

$$f(z) = ze^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (\text{II.9})$$

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance pair et impair de la variable « $z$  », alors que la fonction (sinus) [40] ne permet qu'un développement en puissance impair.

La version hyperbolique de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDPT) développée par [55] est obtenue en prenant :

$$f(z) = \frac{\cosh(\pi/2)}{[\cosh(\pi/2) - 1]} z - \frac{(h/\pi)\sinh\left(\frac{\pi}{h}z\right)}{[\cosh(\pi/2) - 1]} \quad \text{Et} \quad \phi_z = 0 \quad (\text{II.10})$$

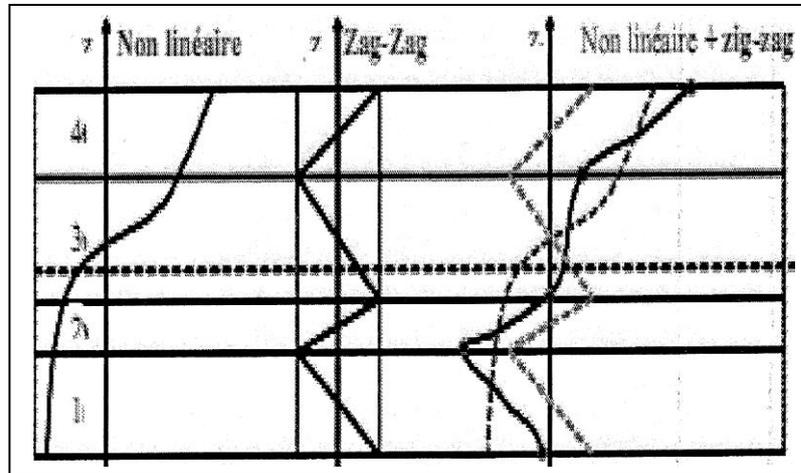
#### II.4.4. Théorie de zig-zag

Pour mieux décrire la déformation en cisaillement des matériaux composites, certains auteurs ont associé la théorie d'ordre élevé à celle dite de zig-zag [47 et 48], Cette dernière est destinée justement à mieux décrire les effets d'interface. Ainsi, différents modèles issus de l'approche par couche ont été proposés. Le multicouche est subdivisé en sous-structures (correspondant en fait à chaque couche ou chaque ensemble de couches). On applique à chaque sous-structure une théorie du premier ordre ou un modèle d'ordre élevé.

La cinématique des modèles zig-zag satisfait a priori les conditions de contact et elle est indépendante du nombre de couches. L'avantage principal du champ de déplacement des modèles zig-zag réside dans la bonne modélisation de la distorsion de la normale à la surface déformée, ainsi que dans la vérification des conditions de continuité, et ce sans augmenter pour autant le nombre et l'ordre des équations fondamentales de la théorie du premier ordre.

Le recours à des coefficients de correction pour cisaillement transverse est évité. En se basant sur le concept de Di Sciuva [49], plusieurs auteurs ont réalisé des améliorations significatives pour le modèle zig-zag [50-51]. L'amélioration principale est l'introduction d'une distribution non linéaire des déplacements. On superpose le champ zig-zag (linéaire par morceau) à un champ de déplacement d'ordre élevé (souvent cubique) figure II.4.

Les conditions de compatibilité sont satisfaites sur les surfaces supérieures et inférieures des plaques pour réduire le nombre de paramètres [52].



**Figure II.5.** Champ de déplacements du modèle zig-zag

## II.5 : Conclusion

Dans ce chapitre on a décrit les différentes théories des plaques pour simplifier les problèmes rencontrés, une comparaison des théories classiques, du premier ordre et d'ordre élevé a été faite pour décrire la déformation de cisaillement des plaques.

Il est à noter qu'il existe d'autres théories issues de ces théories mentionnées dans ce chapitre qui donnent des résultats acceptables dans certains cas. Ainsi, on s'est intéressées par les théories les plus fameuses et les plus utilisées dans la littérature.

En général, il est rare de trouver une théorie qui serait applicable à tous les cas possibles (matériau composite anisotrope, isotrope, stratifié, sandwich ...) et aux différents phénomènes étudiés (statique, dynamique, flambement, flexion...), et qui serait en plus simple et facile et ne coûte pas trop en temps de calcul, car chacune d'elles présente des avantages et des inconvénients, avec des formulations qui diffèrent selon le domaine d'application.

## **Chapitre III**

---

---

### **Etude du comportement de flexion des plaques isotropes et orthotropes**

## Chapitre III

### *Etude du comportement de flexion des plaques isotropes et orthotropes*

#### III.1. Introduction

La détermination de la contrainte de cisaillement transverse développée dans l'épaisseur des poutres et des plaques soumises à la flexion, est habituellement effectuée sous quelques hypothèses bien connus, basées sur la forme du champ de déplacement à travers leurs épaisseurs. Ces théories étant conçus comme une approximation d'une réalité de trois dimensions, on comprend qu'il puisse en exister plusieurs, différents entre elles par la précision des approximations sur lesquelles elles sont fondées.

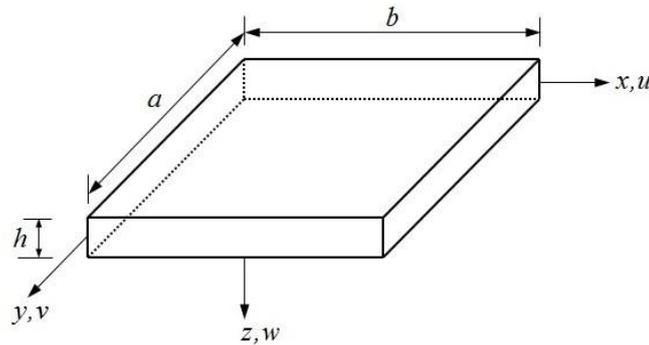
Ce chapitre est consacré à la modélisation du comportement élastique de la flexion des plaques simplement appuyées en matériaux isotropes et orthotropes en utilisant une théorie raffinée de déformation de cisaillement transverse d'ordre élevé des plaques, et en utilisant des approches mathématiques basées sur la formulation des équations d'équilibre et le développement de la théorie classique simplifiée des plaques. La présente théorie n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description hyperbolique de la contrainte de cisaillement transversal à travers l'épaisseur tout en satisfaisant les conditions aux limites et remplissant la condition des contraintes de cisaillement nulles sur les bords libres de la plaque.

Dans cette étude un nouveau champ de déplacement basé sur la théorie de déformation de cisaillement hyperbolique est présenté pour analyser le comportement statique des structures en matériaux isotropes et orthotropes. Les résultats obtenus des déplacements et des contraintes à travers l'épaisseur par le présent modèle analytique sont comparés avec d'autres théories disponibles dans la littérature, à savoir la théorie classique des plaques, la théorie de déformation de cisaillement de premier ordre, d'ordre élevé et la théorie exacte d'élasticité.

## III.2. Formulation Théorique

### III.2.1. Configuration géométrique

On considérons une plaque carrée des côtés ( $a$ ,  $b$ ) et de l'épaisseur totale ( $h$ ) comme indiqué sur la figure III. La plaque est constituée d'un matériau orthotrope linéairement élastique. La direction  $z$  est prise positive suivant le bas. La plaque occupe la région,  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$  et  $-h/2 \leq z \leq h/2$  dans le système de coordonnées cartésiennes. Cependant une charge transversale  $q(x, y)$  est appliquée sur la surface supérieure de la plaque.



**Figure III.1** : Géométrie d'une plaque orthotrope dans le système de coordonnées cartésiennes.

### III.2.2. Champ de déplacement

Le champ de déplacement simplifié de la présente théorie raffinée d'ordre élevé en un point quelconque de coordonnées  $(x, y, z)$  pour une plaque en matériau orthotrope, peut être obtenu sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= -z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ v(x, y, z, t) &= -z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \end{aligned} \quad (\text{III.1})$$

$$w(x, y, z, t) = w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t)$$

Où  $u, v$  et  $w$  désignent les déplacements le long des directions de coordonnées  $x$  et  $y$  et  $z$ , respectivement;  $w_b$  et  $w_s$  sont les composantes de flexion et de cisaillement du déplacement transversal, respectivement. Ces deux composantes sont en fonction des coordonnées  $x$  et  $y$ .  $f(z)$  Est appelée fonction de cisaillement qui représente la forme de distribution des contraintes et des déformations de cisaillement transverse à travers l'épaisseur de la plaque en matériaux orthotrope .ainsi le choix de la fonction  $f(z)$  est basé sur les résultats de l'élasticité

tridimensionnelle ou toute autre information sur la distribution des contraintes de cisaillement transverse. Dans cette étude la fonction de cisaillement est exprimée sous forme trigonométrique suivante :

$$f(z) = z - h \sinh \frac{z}{h} + z \cosh \frac{1}{2} \quad (\text{III.2})$$

Et

$$g(z) = 1 - \frac{df(z)}{dz} = \cosh \frac{z}{h} - \cosh \frac{1}{2} \quad (\text{III.3})$$

### III.2.3. Champ de déformations

Selon le champ proposé, la déformation transverse normale est encore nulle ( $\varepsilon_z$ ). Le champ de déformation est obtenu en substituant les termes du champ de déplacement dans la relation d'élasticité linéaire déformations-déplacements. Il est donné comme suit :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - \left( z - h \sinh \frac{z}{h} + z \cosh \frac{1}{2} \right) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} - \left( z - h \sinh \frac{z}{h} + z \cosh \frac{1}{2} \right) \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} - 2 \left( z - h \sinh \frac{z}{h} + z \cosh \frac{1}{2} \right) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y}, \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = g(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} = \left( \cosh \frac{z}{h} - \cosh \frac{1}{2} \right) \frac{\partial w_s}{\partial x}, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = g(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} = \left( \cosh \frac{z}{h} - \cosh \frac{1}{2} \right) \frac{\partial w_s}{\partial y} \end{aligned} \quad (\text{III.4})$$

### III.2.4. Relations Constitutives

En se limitant à un comportement élastique linéaire, l'expression des contraintes pour une plaque composite stratifiée être déterminée en écrivant la relation qui existe entre ces dernières et les déformations, le champ des contraintes s'écrit donc :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.5})$$

$Q_{ij}$  Sont les coefficients de rigidités, et pour le cas d'un matériau orthotrope peuvent être exprimés en fonction des constantes d'ingénieur comme suit :

$$Q_{11} = \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad (III.6)$$

$$Q_{66} = G_{12}, \quad Q_{44} = G_{23}, \quad Q_{55} = G_{13}$$

### III.2.5. Equations de mouvement

Les équations régissant les conditions d'équilibre et les conditions aux limites qui sont associées à la présente théorie peuvent être dérivées en utilisant le principe des travaux virtuels. La forme analytique de ce principe pour étudier le comportement de flexion des plaques isotropes et orthotropes peut être écrite comme :

$$\int_0^a \int_0^b \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dx dy dz - \int_0^a \int_0^b q(x, y) \delta w dx dy = 0 \quad (III.7)$$

$q(x, y)$  est la charge transversale agissant sur la surface supérieure de la plaque et  $(\delta)$  est l'opérateur variationnel. En remplaçant les valeurs des déformations virtuelles par leurs expressions définies par les équations (III.4) dans l'équation (III.7), ensuite en faisant l'intégration à travers l'épaisseur de la plaque, on obtient :

$$\int_0^a \int_0^b \left( -M_x^b \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x^2} - M_y^b \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial y^2} - 2M_{xy}^b \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x \partial y} - M_x^s \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial x^2} - M_y^s \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial y^2} \right. \\ \left. - 2M_{xy}^s \frac{\partial \delta w_s}{\partial x \partial y} + V_{xz} \frac{\partial \delta w_s}{\partial x} + V_{yz} \frac{\partial \delta w_s}{\partial y} - q(x, y) (\delta w_b + \delta w_s) \right) dx dy = 0 \quad (III.8)$$

Où les résultantes des contraintes  $(M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b)$ ,  $(M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s)$  et  $(V_{xz}, V_{yz})$  sont définis comme :

$$\begin{aligned} (M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b) &= \sum_{k=1}^n \int_{h_k}^{h_{k+1}} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) z dz, \\ (M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s) &= \sum_{k=1}^n \int_{h_k}^{h_{k+1}} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) f(z) dz, \\ (V_{xz}, V_{yz}) &= \sum_{k=1}^n \int_{h_k}^{h_{k+1}} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) g(z) dz \end{aligned} \quad (III.9)$$

En faisant l'intégration par parties de l'équation (III.8) et ensuite la collection des coefficients ou bien des termes de  $\delta w_b$  et  $\delta w_s$ , on obtient les équations de mouvement de la théorie de déformation de cisaillement proposée comme suit :

$$\begin{aligned}\delta w_b : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + q &= 0 \\ \delta w_s : \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial V_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial V_{yz}}{\partial y} + q &= 0\end{aligned}\quad (\text{III.10})$$

En Substituant les résultantes de contrainte en termes de variables de déplacement de l'équation. (III.9) dans les équations précédentes (III.10), les équations différentielles d'équilibre peuvent être réécrites comme:

$$\begin{aligned}\delta w_b : D_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} + F_{11} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + 2D_{12} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} + 2F_{12} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} \\ + F_{22} \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} + 4D_{66} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} + 4F_{66} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} = q, \\ \delta w_s : F_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} + H_{11} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + 2F_{12} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} + 2H_{12} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} + F_{22} \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} \\ + H_{22} \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} + 4F_{66} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} + 4H_{66} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} + A_{s55} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + A_{s44} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} = q\end{aligned}\quad (\text{III.11})$$

Où les coefficients de rigidité de la plaque  $D_{ij}$ ,  $F_{ij}$ ,  $H_{ij}$  et  $A_{sij}$  sont définis comme suit :

$$(D_{ij}, F_{ij}, H_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(z^2, zf(z), f^2(z)) dz, \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (\text{III.12})$$

$$A_{s44} = A_{s55} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{2(1+\nu)} [g(z)]^2 dz \quad (\text{III.13})$$

### III.2.6. Solution de Navier pour des plaques simplement appuyées

La forme de la solution de Navier est utilisée pour arriver à une solution adoptée pour l'analyse la flexion des plaques isotropes et orthotropes simplement appuyées sur les quatre bords. La plaque est soumise à une charge transversale  $q(x, y)$  à la surface supérieure, c'est-à-

dire  $z = -h/2$ . Néanmoins les conditions aux limites sur les bords de la plaque simplement appuyée peuvent être exprimées comme :

Aux arêtes  $x=0$  et  $x=a$  :

$$w_b = w_s = \frac{\partial w_b}{\partial y} = \frac{\partial w_s}{\partial y} = M_x^b = M_x^s = 0 \quad (\text{III.14})$$

Et aux arêtes  $y=0$  et  $y=b$

$$w_b = w_s = \frac{\partial w_b}{\partial x} = \frac{\partial w_s}{\partial x} = M_y^b = M_y^s = 0 \quad (\text{III.15})$$

Navier a présenté la solution des plaques simplement appuyées par une double série trigonométrie. Cette solution transforme l'équation différentielle en une équation algébrique. Les variables de déplacement  $w_b$  et  $w_s$  qui satisfont les conditions aux limites des plaques orthotropes simplement appuyées citées aux équations précédentes (III.14) et (III.15), peuvent être exprimées sous la forme d'une double série trigonométrie :

$$\begin{cases} w_b \\ w_s \end{cases} = \begin{cases} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{bmn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{smn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \end{cases} \quad (\text{III.16})$$

Où  $w_{bmn}$  et  $w_{smn}$  sont des paramètres arbitraires à déterminer, et les constantes  $\alpha = m\pi/a$ ,  $\beta = n\pi/b$ . La charge transversale est présentée aussi en double séries trigonométriques comme :

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \quad (\text{III.17})$$

Où  $q_{mn}$  est le coefficient de l'expression de Fourier donné ci-dessous pour diverses charges statiques.

$$q_{mn} = q_0, \quad m = n = 1 \quad \text{Cas d'une charge sinusoïdale (SDL)}$$

$$q_{mn} = \frac{16q_0}{mn\pi^2}, \quad m = n = 1,3,5,\dots \quad \text{Cas d'une charge uniformément répartie (UDL)}$$

$$q_{mn} = \frac{8q_0}{mn\pi^2} \cos(m\pi), \quad m = n = 1,3,5,\dots \quad \text{Cas d'une charge linéairement variable (LVL)}$$

Avec  $q_0$  est l'intensité maximale de la charge répartie au centre de la plaque. La forme de solution proposée dans les équations (III.16) pour les variables de déplacement inconnues  $w_{bmn}$  et  $w_{smn}$  satisfaisant exactement les conditions aux limites des plaques isotropes et orthotropes simplement appuyées.

En Substituant cette forme de solution et la charge transversale  $q(x, y)$  dans les équations (III.11) conduisant à une équation sous une forme matricielle pour laquelle on peut étudier la réponse statique des plaques isotropes et orthotropes:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{bmn} \\ w_{smn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_{mn} \\ q_{mn} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.18})$$

Avec les éléments de la matrice de rigidité  $[\mathbf{K}]$  sont les suivants:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{11} &= \mathbf{D}_{11}\alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2(\mathbf{D}_{12} + 2\mathbf{D}_{66}) + \mathbf{D}_{22}\beta^4 \\ \mathbf{K}_{12} &= \mathbf{K}_{21} = \mathbf{F}_{11}\alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2(\mathbf{F}_{12} + 2\mathbf{F}_{66}) + \mathbf{F}_{22}\beta^4 \\ \mathbf{K}_{22} &= \mathbf{H}_{11}\alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2(\mathbf{H}_{12} + 2\mathbf{H}_{66}) + \mathbf{H}_{22}\beta^4 + \mathbf{A}s_{44}\beta^2 + \mathbf{A}s_{55}\alpha^2 \end{aligned} \quad (\text{III.19})$$

A partir de l'équation (III.18) la solution des coefficients inconnus  $w_{bmn}$  et  $w_{smn}$  peuvent être obtenus. Ayant obtenu des valeurs de ces coefficients inconnus, on peut alors calculer tous les composantes des déplacements et des contraintes dans la plaque. Les contraintes de cisaillement sont obtenues en utilisant des relations constitutives de la théorie de l'élasticité.

### III.3. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une solution générale pour résoudre le comportement statique des plaques simplement appuyées en matériaux isotropes et orthotropes, sous différentes conditions de chargement mécanique en utilisant une simple théorie raffinée à deux variables. Le nombre de fonctions inconnues dans la présente théorie est seulement deux, tandis que trois ou plus dans le cas des autres théories de déformation de cisaillement. La théorie proposée à une forte similitude avec la théorie classique des plaques dans de nombreux aspects n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description hyperbolique. Les équations de mouvements sont obtenues en utilisant le principe des travaux virtuels. Les résultats montrent que la présente théorie est capable de produire des

résultats plus précis que la théorie FSDT et d'autres théories HSDT avec un nombre plus élevé d'inconnues.

Toutes les études comparatives ont montré que le déplacement dans le plan et le déplacement transversal, les contraintes normales axiales et les contraintes de cisaillement transversal obtenues par la présente théorie et la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé proposée par Reddy [3] sont en excellent accord.

## **Chapitre IV**

---

---

### **Résultats et discussion**

## Chapitre IV

### Résultats et discussions

#### IV.1. Introduction

Les calculs proposés dans cette thématique s'inscrivent dans le cadre général d'une étude développée sur un modèle de solution analytique pour analyser le comportement statique de la flexion des plaques isotopes et orthotropes simplement appuyées soumises aux différentes conditions de chargements, à savoir les charges sinusoïdales, uniformément réparties et linéairement variables en utilisant une théorie simple de déformation de cisaillement d'ordre élevé. Seulement deux inconnues indépendantes sont utilisées dans la présente théorie au lieu de quatre, cinq ou six inconnues indépendantes ou plus employées dans les autres théories correspondantes de déformations de cisaillement transversal, ce qui rend la théorie simple à utiliser. Dans cette étude, les différents exemples numériques obtenus sont comparés et discutés pour vérifier l'exactitude et l'efficacité de la présente théorie par rapport aux autres théories disponibles dans la littérature scientifique, tel que la théorie classique des plaques (CPT) de Kirchhoff [1], la théorie de déformation en cisaillement transversal de premier ordre (FSDT) proposée par Mindlin [2] avec la prise en compte de leur coefficient de correction, la théorie d'ordre élevé donnée par Reddy (HSDT) [3], la théorie de la déformation de cisaillement trigonométrique (TSDT) présentée par Ghugal et Sayyad [9], la théorie de la déformation de cisaillement exponentielle (ESDT) proposée par Sayyad [16, 17] et enfin la solution exacte d'élasticité tridimensionnelle fournie par Pagano [21] chaque fois que cela est applicable.

Les formulations de la théorie proposée reposent sur le principe des travaux virtuels. Elle n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description hyperbolique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition des contraintes de cisaillement nulles sur les bords libres de la plaque.

## IV.2. Résultats numériques et discussions

Différents exemples numériques sont décrits et discuté pour vérifier l'exactitude et l'efficacité de la présente théorie. Toutefois elle est appliquée pour analyser le comportement statique en flexion des plaques isotropes et orthotropes soumises à diverses charges statiques telles que, la charge sinusoïdale SDL, la charge uniformément réparties UDL et la charge linéairement variable LVL. Les propriétés matérielles (le module d'élasticité, le module de cisaillement transversal et le coefficient de poisson) utilisées dans la présente analyse sont définies comme suit :

✓ Cas d'une plaque isotrope :

$$E_1 = E_2 = E = 210 \text{ GPa}, \nu_{12} = \nu_{21} = \nu = 0.25, G_{12} = G_{13} = G_{23} = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{IV.1})$$

✓ Cas d'une plaque orthotrope :

$$E_1 = 25E_2, \nu_{12} = 0.25, G_{12} = G_{13} = 0.5E_2, G_{23} = 0.2E_2 \quad (\text{IV.2})$$

Ainsi que les résultats numériques des déplacements et des contraintes pour les plaques considérées sont présentés sous la forme adimensionnelle suivante :

$$\begin{aligned} \bar{u}\left(0, \frac{b}{2}, -\frac{z}{h}\right) &= \frac{h^2 E_2}{q_0 a^3} u, \quad \bar{w}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0\right) = \frac{100h^3 E_2}{q_0 a^4} w, \\ \bar{\sigma}_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, -\frac{z}{h}\right) &= \frac{h^2}{q_0 a^2} \sigma_x, \\ \bar{\sigma}_y\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, -\frac{z}{h}\right) &= \frac{h^2}{q_0 a^2} \sigma_y, \\ \bar{\tau}_{xy}\left(0, 0, -\frac{z}{h}\right) &= \frac{h^2}{q_0 a^2} \tau_{xy}, \quad \bar{\tau}_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, 0\right) = \frac{h}{q_0 a} \tau_{xz}, \quad \bar{\tau}_{yz}\left(\frac{a}{2}, 0, 0\right) = \frac{h}{q_0 a} \tau_{yz} \end{aligned} \quad (\text{IV.3})$$

### IV.2.1. Résultats d'analyse de flexion des plaques isotropes simplement appuyées

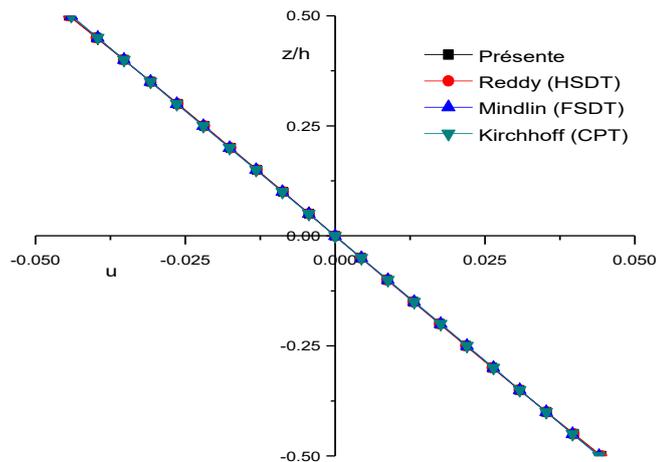
La comparaison des déplacements maximaux adimensionnels et des contraintes aux points critiques pour une plaque carrée isotrope et simplement appuyée soumise à une condition de chargement transversal sinusoïdale est présentée dans le tableau IV.1. Dans cette section la plaque est constituée par les propriétés d'un matériau isotrope mentionnées dans l'équation IV.1 précédente. Les résultats numériques sont obtenus pour les deux rapports d'élanement  $a/h = 4$  (qui correspondant à des plaques épaisses) et  $a/h = 10$  (qui correspondant

à des plaques moyennement épaisses). Les résultats obtenus des déplacements adimensionnels dans le plan suivant la direction ( $x$ ) en utilisant la présente théorie sont en excellent accord avec la théorie HSDT, tandis qu'une faible erreur est observée dans la prédiction de déplacement transversal par d'autres modèles que celles générés par les théories ESDT, TSDT, FSDT et même la théorie classique CPT par rapport aux solutions exactes d'élasticité.

**Tableau IV. 1 :** Comparaison des déplacements et des contraintes adimensionnelles pour une plaque carrée isotrope ( $b=a$ ) soumise à une charge sinusoïdale.

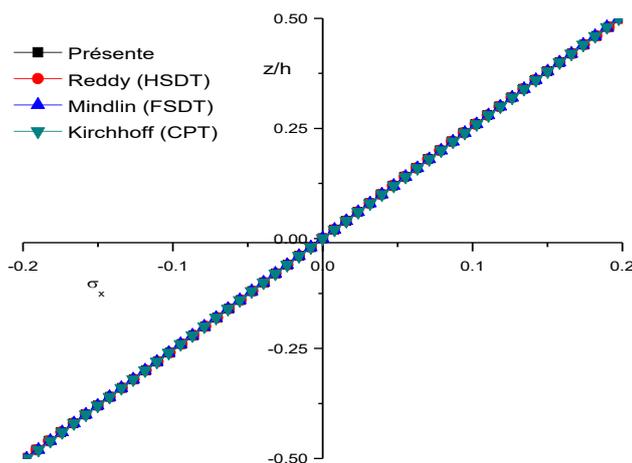
$a/h$	Quantités	Exacte	Présente	TSDT	HSDT	FSDT	CPT
4	$\bar{u}$	0.0454	0.046	0.044	0.046	0.044	0.044
	$\bar{w}$	3.6630	3.786	3.653	3.787	3.626	2.803
	$\bar{\sigma}_x$	0.2040	0.209	0.226	0.209	0.197	0.197
	$\bar{\sigma}_y$	0.2040	0.209	0.226	0.209	0.197	0.197
	$\bar{\tau}_{xy}$	---	0.112	0.133	0.112	0.106	0.106
	$\bar{\tau}_{zx}$	0.2361	0.237	0.244	0.237	0.159	---
	$\bar{\tau}_{yz}$	0.2361	0.237	0.244	0.237	0.159	---
10	$\bar{u}$	0.0443	0.044	0.044	0.044	0.044	0.044
	$\bar{w}$	2.9425	2.961	2.933	2.961	2.934	2.803
	$\bar{\sigma}_x$	0.1988	0.199	0.212	0.199	0.197	0.197
	$\bar{\sigma}_y$	0.1988	0.199	0.212	0.199	0.197	0.197
	$\bar{\tau}_{xy}$	---	0.107	0.110	0.107	0.106	0.106
	$\bar{\tau}_{zx}$	0.2383	0.238	0.245	0.238	0.235	---
	$\bar{\tau}_{yz}$	0.2383	0.238	0.245	0.238	0.235	---

La variation du déplacement dans le plan  $\bar{u}$  pour le cas des plaques isotropes moyennement épaisses où le rapport d'élanement  $a/h=10$  est représentée sur la figure IV.1 ci-dessous. Les valeurs des contraintes normales axiales  $\bar{\sigma}_x$  obtenues en utilisant la nouvelle cinématique du champ de déplacement à deux variables et la théorie HSDT proposée par Reddy [3] à cinq variables sont en excellents accords entre eux, alors que FSDT et CPT sous-estiment ces contraintes axiales pour les deux rapports d'élanement par rapport aux valeurs des autres théories d'ordre élevé. Toutefois en utilisant les relations constitutives de la présente théorie, les résultats montrent que l'augmentation du rapport d'élanement ( $a/h$ ) à un effet significatif pour la diminution du déplacement transversal  $\bar{w}$ .



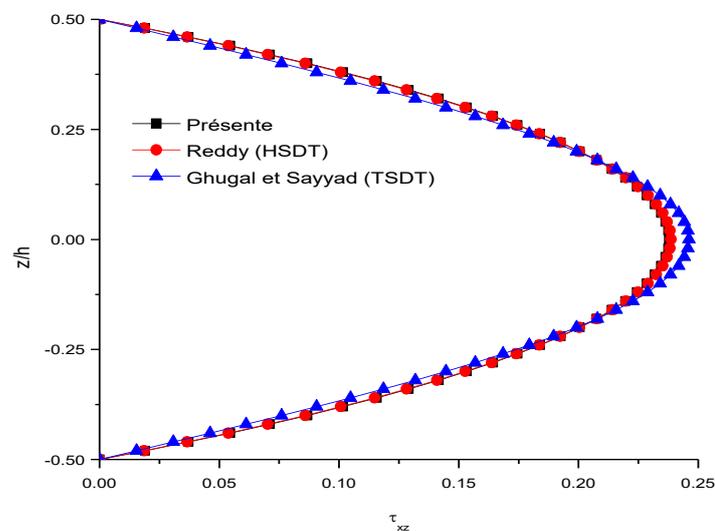
**Figure IV.1 :** Variation du déplacement adimensionnel dans le plan  $\bar{u}$  pour une plaque isotrope carrée soumise à une condition de chargement sinusoïdale avec  $a/h=10$

A travers cette étude on constate que la théorie TSDT surestime les valeurs des contraintes normales alors que la théorie du premier ordre FSDT et la théorie classique CPT sous-estiment ces contraintes par rapport aux valeurs exactes. La figure IV.2 montre la distribution de la contrainte normale  $\bar{\sigma}_x$  à travers l'épaisseur d'une isotrope carrée soumise à une condition de chargement sinusoïdale, on observe que la présente théorie de déformation de cisaillement et les autres théories de cisaillement proposées par Mindlin [2] et Reddy [3], sont identiques.



**Figure IV.2 :** Distribution des contraintes normales adimensionnelles  $\bar{\sigma}_x$  à travers l'épaisseur d'une plaque isotrope carrée soumise à une condition de chargement sinusoïdale avec  $a/h=10$

Généralement la valeur de la contrainte de cisaillement dans le plan  $\bar{\tau}_{xy}$  obtenue par la présente théorie est en excellent accord avec les valeurs des autres théories raffinées. La distribution des contraintes de cisaillement transversales  $\bar{\tau}_{zx}$  à travers l'épaisseur obtenues par les relations constitutives en utilisant la présente théorie et les autres théories d'ordre élevé donnent des résultats plus précis que la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre. La figure IV.3 montre un excellent accord entre les résultats prévus par la présente théorie et la théorie HSDT proposée par Reddy [3] pour la distribution des contraintes de cisaillement transversales  $\bar{\tau}_{zx}$  à travers l'épaisseur.



**Figure IV.3 :** Distribution des contraintes de cisaillement transversal adimensionnelles  $\bar{\tau}_{xz}$  à travers l'épaisseur d'une plaque isotrope carrée soumise à une condition de chargement sinusoïdale avec  $a/h=10$ .

Les déplacements et la variation des contraintes dans les plaques isotropes carrées, simplement appuyées soumises à une charge uniformément répartie et linéairement variable sont également indiqués dans les tableaux IV.2 et IV.3, respectivement. Les résultats adimensionnels obtenus pour les rapports d'élancement  $a/h = 4$  et  $10$  sont comparés aux autres théories d'ordre supérieur, FSDT, CPT et la solution exacte d'élasticité. A partir des tableaux IV.2 et IV.3, on observe que les résultats obtenus des déplacements et des contraintes par la présente théorie sont toujours en bon accord avec ceux rapportés par Reddy [3] en utilisant la théorie d'ordre élevé à cinq variables.

**Tableau IV. 2 :** Comparaison des déplacements et des contraintes adimensionnelles pour une plaque carrée isotrope ( $b=a$ ) soumise à une charge uniformément réparties.

$a/h$	Quantités	Exacte	Présente	ESDT	TSDT	HSDT	FSDT	CPT
4	$\bar{u}$	0.072	0.079	0.079	0.074	0.079	0.074	0.074
	$\bar{w}$	5.694	5.868	5.816	5.680	5.869	5.633	4.436
	$\bar{\sigma}_x$	0.307	0.299	0.300	0.318	0.299	0.287	0.287
	$\bar{\sigma}_y$	0.307	0.299	0.300	0.318	0.299	0.287	0.287
	$\bar{\tau}_{xy}$	---	0.222	0.223	0.208	0.218	0.195	0.195
	$\bar{\tau}_{zx}$	0.460	0.483	0.481	0.483	0.482	0.330	---
	$\bar{\tau}_{yz}$	0.460	0.483	0.481	0.483	0.482	0.330	---
10	$\bar{u}$	0.073	0.075	0.075	0.073	0.075	0.074	0.074
	$\bar{w}$	4.639	4.666	4.658	4.625	4.666	4.670	4.436
	$\bar{\sigma}_x$	0.289	0.289	0.289	0.307	0.289	0.287	0.287
	$\bar{\sigma}_y$	0.289	0.289	0.289	0.307	0.289	0.287	0.287
	$\bar{\tau}_{xy}$	---	0.201	0.204	0.195	0.203	0.195	0.195
	$\bar{\tau}_{zx}$	0.487	0.496	0.494	0.504	0.492	0.330	---
	$\bar{\tau}_{yz}$	---	0.496	0.494	0.504	0.492	0.330	---

**Tableau IV. 3 :** Comparaison des déplacements et des contraintes adimensionnelles pour une plaque carrée isotrope ( $b=a$ ) soumise à une charge linéairement variable.

$a/h$	Quantités	Exacte	Présente	ESDT	TSDT	HSDT	FSDT	CPT
4	$\bar{u}$	0.036	0.0394	0.0395	0.037	0.0395	0.037	0.037
	$\bar{w}$	2.847	2.9343	2.908	2.84	2.9345	2.8165	2.218
	$\bar{\sigma}_x$	0.1535	0.1494	0.15	0.159	0.1495	0.1435	0.1435
	$\bar{\sigma}_y$	0.1535	0.1494	0.15	0.159	0.1495	0.1435	0.1435
	$\bar{\tau}_{xy}$	---	0.1112	0.1115	0.104	0.109	0.0975	0.0975
	$\bar{\tau}_{zx}$	0.23	0.2416	0.2405	0.2415	0.241	0.165	---
	$\bar{\tau}_{yz}$	0.23	0.2416	0.2405	0.2415	0.241	0.165	---
10	$\bar{u}$	0.0365	0.0372	0.0375	0.0365	0.0375	0.037	0.037
	$\bar{w}$	2.3195	2.3329	2.329	2.3125	2.333	2.335	2.218
	$\bar{\sigma}_x$	0.1445	0.1446	0.1445	0.1535	0.1445	0.1435	0.1435
	$\bar{\sigma}_y$	0.1445	0.1446	0.1445	0.1535	0.1445	0.1435	0.1435
	$\bar{\tau}_{xy}$	---	0.1002	0.102	0.0975	0.1015	0.0975	0.0975
	$\bar{\tau}_{zx}$	0.2435	0.2480	0.247	0.252	0.246	0.165	---
	$\bar{\tau}_{yz}$	0.2435	0.2480	0.247	0.252	0.246	0.165	---

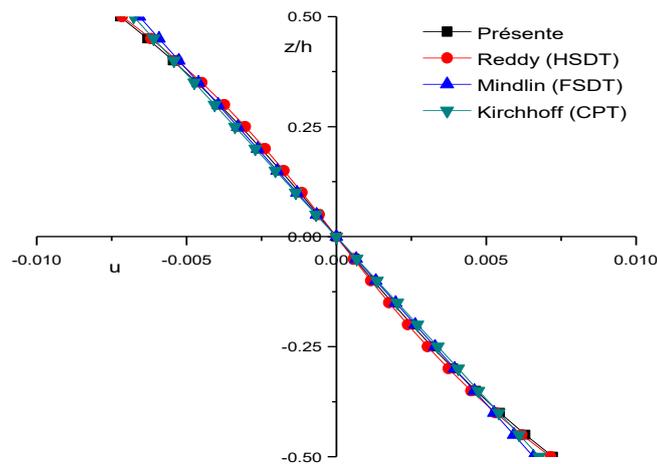
**IV.2.2. Résultats d’analyse de flexion des plaques orthotropes simplement appuyées**

Les résultats numériques des déplacements et des contraintes adimensionnelles à travers l'épaisseur pour des plaques carrées orthotropes simplement appuyées soumises à une condition de chargement transversal sinusoïdale sont énumérés dans le tableau IV.4. La plaque est constituée par les propriétés d'un matériau d'orthotrope comme indiqué dans l'équation IV.2. L'examen du tableau IV.4 révèle que la présente théorie surestime légèrement le déplacement dans le plan et sous-estime le déplacement transversal. La contrainte normale axiale  $\bar{\sigma}_x$  évaluée par la présente théorie est presque identique avec la valeur de la théorie HSDT, mais la contrainte normale axiale  $\bar{\sigma}_y$  est très proche à celle fournie par Shinde et al. [53] pour les deux rapports d'élancement  $a/h = 4$  et 10. Cependant on observe que les résultats obtenus de la contrainte de cisaillement  $\bar{\tau}_{xy}$  par la présente théorie sont en excellent accord avec les autres théories pour les différentes conditions de chargement. Il est observé également que les contraintes de cisaillement transversal  $\bar{\tau}_{zx}$  et  $\bar{\tau}_{yz}$  calculées par la présente nouvelle théorie à deux variables sont en accord avec celles générées par Shinde et al. [53] pour toutes les valeurs du rapport d'élancement.

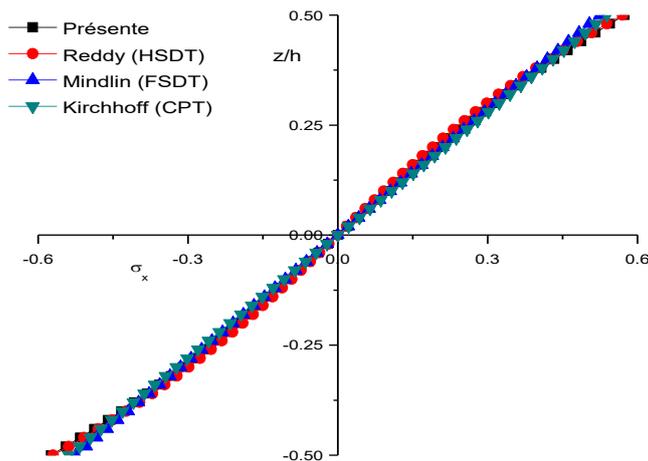
**Tableau IV. 4 :** Comparaison des déplacements et des contraintes adimensionnelles pour une plaque carrée orthotrope ( $b=a$ ) soumise à une charge une charge sinusoïdale.

$a/h$	Quantités	Exacte	Présente	Shinde et al. [0]	ESDT	HSDT	FSDT	CPT
4	$\bar{u}$	0.0093	0.0095	0.0096	0.0094	0.0092	0.0060	0.0068
	$\bar{w}$	1.5978	1.4859	1.4973	1.5828	1.6206	1.6616	0.4310
	$\bar{\sigma}_x$	0.7276	0.7570	0.7725	0.7765	0.7379	0.4784	0.5387
	$\bar{\sigma}_y$	0.0727	0.0376	0.0383	0.0667	0.0640	0.0579	0.0267
	$\bar{\tau}_{xy}$	---	0.0300	0.0306	0.0312	0.0427	0.0358	0.0213
	$\bar{\tau}_{zx}$	0.3620	0.3303	0.3427	0.3938	0.3903	0.2692	---
	$\bar{\tau}_{yz}$	0.0738	0.1322	0.1371	0.0717	0.0714	0.0491	---
10	$\bar{u}$	0.0071	0.0072	0.0072	0.0071	0.0071	0.0066	0.0068
	$\bar{w}$	0.6340	0.6137	0.6141	0.6327	0.6371	0.6383	0.4310
	$\bar{\sigma}_x$	0.5680	0.5745	0.5770	0.5809	0.5700	0.5385	0.5387
	$\bar{\sigma}_y$	0.0360	0.0284	0.0286	0.0348	0.0347	0.0339	0.0267
	$\bar{\tau}_{xy}$	---	0.0227	0.0228	0.0229	0.0257	0.0246	0.0213
	$\bar{\tau}_{zx}$	0.4220	0.3384	0.3506	0.4375	0.4290	0.2877	---
	$\bar{\tau}_{yz}$	0.0460	0.1354	0.1402	0.0466	0.0458	0.0306	---

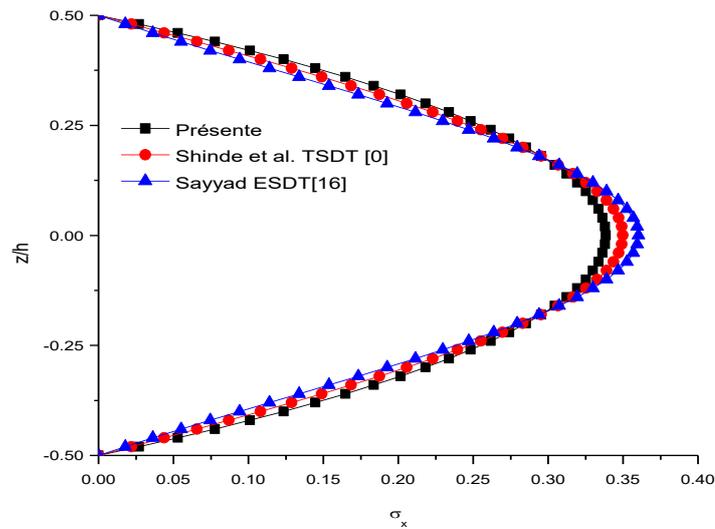
La variation du déplacement adimensionnel dans le plan et la distribution des contraintes normales axiales et de cisaillement transversal adimensionnelles à travers l'épaisseur des plaques carrées orthotropes, simplement appuyées soumises à une condition de chargement sinusoïdale sont représentées sur les figures IV.4, IV.5 et IV.6, respectivement en utilisant la présente théorie de déformation du cisaillement d'ordre élevé à deux variables. On observe que cette théorie de cisaillement et les autres théories proposées dans la littérature sont identiques.



**Figure IV.4 :** Variation du déplacement adimensionnel dans le plan  $\bar{u}$  pour une plaque orthotrope carrée soumise à une condition de chargement sinusoïdale avec  $a/h=10$ .



**Figure IV.5 :** Distribution des contraintes normales adimensionnelles  $\bar{\sigma}_x$  à travers l'épaisseur d'une plaque orthotrope carrée soumise à une condition de chargement sinusoïdale avec  $a/h=10$ .



**Figure IV.6 :** Distribution des contraintes de cisaillement transversal adimensionnelles  $\bar{\tau}_{xz}$  à travers l'épaisseur d'une plaque orthotrope carrée soumise à une condition de chargement sinusoïdale avec  $a/h=10$ .

Pour vérifier l'exactitude et l'efficacité de la présente théorie d'ordre élevé, les résultats adimensionnels obtenus d'une plaque orthotrope soumise à une autres condition de chargement, à savoir la charge uniformément répartie et la charge linéairement variable en utilisant la présente théorie, sont présentés dans les tableaux IV.5 et IV.6, respectivement. Les résultats obtenus sont calculés pour les rapports d'élanement  $a/h = 4$  et  $10$ , c'est-à-dire dans le cas des plaques épaisses et moyennement épaisses.

Il convient de noter que les solutions de la présente étude sont exprimées en fonction d'une variation hyperbolique des déplacements dans le plan, tandis que la solution HSDT de Reddy [3] est obtenue en fonction d'une variation cubique des déplacements dans le plan. Les tableaux IV.5 et IV.6 montrent que la théorie actuelle donne des résultats des déplacements et des contraintes normales et de cisaillement plus ou moins similaires à ceux obtenus avec d'autres théories.

**Tableau IV. 5 :** Comparaison des déplacements et des contraintes adimensionnelles pour une plaque carrée orthotrope ( $b=a$ ) soumise à une charge une uniformément.

$a/h$	Quantités	Exacte	Présente	Shinde et al. [0]	ESDT	HSDT	FSDT	CPT
4	$\bar{u}$	0.0146	0.0152	0.0156	0.0156	0.0147	0.0092	0.0104
	$\bar{w}$	2.3590	2.1714	2.2992	2.3368	2.3886	2.4375	0.6497
	$\bar{\sigma}_x$	0.9640	1.0385	1.1216	1.0754	1.0188	0.7041	0.7867
	$\bar{\sigma}_y$	0.0780	0.0833	0.0871	0.0740	0.0746	0.0727	0.0245
	$\bar{\tau}_{xy}$	---	0.0793	0.0754	0.0805	0.0739	0.0742	0.0464
	$\bar{\tau}_{zx}$	0.6160	0.5638	0.5997	0.6542	0.6567	0.4906	---
	$\bar{\tau}_{yz}$	0.2060	0.2616	0.2653	0.2172	0.2183	0.1575	---
10	$\bar{u}$	0.0112	0.0112	0.0112	0.0113	0.0111	0.0102	0.0104
	$\bar{w}$	0.9470	0.8976	0.8958	0.9444	0.9506	0.9520	0.6497
	$\bar{\sigma}_x$	0.8210	0.8264	0.8551	0.8341	0.8246	0.7707	0.7867
	$\bar{\sigma}_y$	0.0360	0.0260	0.0262	0.0353	0.0355	0.0353	0.0245
	$\bar{\tau}_{xy}$	---	0.0532	0.0563	0.0514	0.0497	0.0540	0.0464
	$\bar{\tau}_{zx}$	0.7310	0.6222	0.6208	0.7564	0.7469	0.5154	---
	$\bar{\tau}_{yz}$	0.1880	0.3340	0.3975	0.1935	0.1909	0.1299	---

**Tableau IV. 6 :** Comparaison des déplacements et des contraintes adimensionnelles pour une plaque carrée orthotrope ( $b=a$ ) soumise à une charge linéairement variable.

$a/h$	Quantités	Exacte	Présente	Shinde et al. [0]	ESDT	HSDT	FSDT	CPT
4	$\bar{u}$	0.0073	0.0075	0.0078	0.0078	0.0073	0.0046	0.0052
	$\bar{w}$	1.1795	1.1453	1.1496	1.1684	1.1943	1.2187	0.3248
	$\bar{\sigma}_x$	0.4820	0.5191	0.5608	0.5377	0.5094	0.3520	0.3933
	$\bar{\sigma}_y$	0.0390	0.0405	0.0435	0.0370	0.0373	0.0363	0.0122
	$\bar{\tau}_{xy}$	---	0.0394	0.0377	0.0402	0.0369	0.0371	0.0232
	$\bar{\tau}_{zx}$	0.3080	0.2918	0.2998	0.3271	0.3283	0.2453	---
	$\bar{\tau}_{yz}$	0.1030	0.1308	0.1326	0.1086	0.1091	0.0787	---
10	$\bar{u}$	0.0056	0.0056	0.0056	0.0056	0.0055	0.0051	0.0052
	$\bar{w}$	0.4735	0.4488	0.4479	0.4722	0.4753	0.476	0.3248
	$\bar{\sigma}_x$	0.4105	0.4132	0.4275	0.4170	0.4123	0.3853	0.3933
	$\bar{\sigma}_y$	0.0180	0.0130	0.0131	0.0176	0.0177	0.0176	0.0122
	$\bar{\tau}_{xy}$	---	0.0266	0.0281	0.0257	0.0248	0.0270	0.0232
	$\bar{\tau}_{zx}$	0.3655	0.3161	0.3104	0.3782	0.3745	0.2577	---
	$\bar{\tau}_{yz}$	0.0940	0.1670	0.1721	0.0967	0.0954	0.0649	---

### IV.3. Conclusion

Dans la présente étude, une nouvelle théorie de déformation de cisaillement à deux variables est appliquée pour l'analyse en flexion de plaques isotropes et orthotropes. La fonction de cisaillement employée est de forme hyperbolique. Elle satisfait les conditions aux limites et assure la nullité des contraintes de cisaillement transversal sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque sans utiliser de facteur de correction de cisaillement.

A partir des résultats numériques et de la discussion, nous concluons que la théorie actuelle est en bon accord tout en prédisant le comportement en flexion des plaques isotropes et orthotropes. Les résultats de la flexion des plaques et la distribution des contraintes à travers l'épaisseur des plaques isotropes et orthotropes ont été comparés avec Les résultats de la solution exacte d'élasticité de Pagano [21], la solution d'ordre élevé HSDT de Reddy [3], la solution trigonométrique TSDT proposée par Ghugal et Sayyad [9] et la solution de la déformation de cisaillement exponentielle (ESDT) présentée par Sayyad [16, 17]. En fin toutes les études comparatives ont montré que le déplacement transversal, les contraintes normales axiales et les contraintes de cisaillement transversal obtenues par la présente théorie et les autres théories de déformation de cisaillement sont presque identiques.

# **Conclusion générale**

---

## **Conclusion générale**

Dans ce travail de mémoire, une théorie raffinée à deux variables de déformation de cisaillement transversal est appliquée pour l'analyse statique de flexion des plaques isotropes et orthotropes simplement appuyées soumises aux diverses conditions de chargement. L'effet de la charge sinusoïdale, la charge uniforme répartie et la charge linéairement variable sur le comportement en flexion des plaques isotropes et orthotropes a été évalué et discuté. À partir des résultats obtenus numériquement et graphiquement nous arrivons à tirer les conclusions suivantes :

1. La théorie présentée est variationnelle, elle n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description hyperbolique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres de la plaque ;
2. La présente théorie est valide pour être capable de produire d'excellents résultats pour le déplacement transversal, les contraintes normales axiales et les contraintes de cisaillement transversal à travers l'épaisseur des plaques étudiées ;
3. La théorie est capable de produire des résultats raisonnables des contraintes de cisaillement transversal à l'aide des relations constitutives développées dans cette théorie pour diverses conditions de chargement ;
4. Les résultats actuels seront des références utiles pour évaluer les autres futures théories des plaques et les méthodes numériques telles que la méthode des éléments finis et la méthode de différence fini, on peut conclure que la théorie actuelle est précise et efficace dans la prédiction de la flexion des plaques isotropes et orthotropes.

En perspective, il est prévu d'appliquer ce modèle d'ordre élevé pour le calcul de différentes formes de structures composites et épaisses, comme par exemple les sandwichs et les matériaux à gradient de propriétés sous la combinaison des différents types de chargement

## *Conclusion générale*

---

(mécanique, thermique) et en tenant compte les changements dans les propriétés matérielles des matériaux constitutives.

Enfin, on peut dire que ce modeste travail s'inscrit dans le cadre de la contribution de notre université dans le domaine du comportement des plaques orthotropes et précisément leurs comportements statiques.

### References bibliographiques

- [1] G.R. Kirchhoff, Uber das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheibe. *J. Reine Angew. Math.* 40 (1850) 51-88.
- [2] R. D. Mindlin, Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *ASME J. App. Mech.* 18 (1951) 31-38.
- [3] J.N. Reddy, A simple higher order theory for laminated composite plates, *ASME J. App. Mech.* 51 (1984) 745–752.
- [4] Y.M. Ghugal, R.P. Shimpi, A review of refined shear deformation theories of isotropic and anisotropic Laminated Plates. *J. Reinf. Plast. Compo.* 21 (2002) 775-813.
- [5] M. Levy, Mémoire sur la théorie des plaques élastique planes. *J. Math. Pures Appl.* 30 (1877) 219-306.
- [6] M. Stein, D.C. Jegly, Effect of transverse shearing on cylindrical bending, vibration and buckling of laminated plates. *AIAA J.* 25 (1987) 123-129
- [7] M. Touratier, An efficient standard plate theory. *Int. J. Eng. Sci.* 29(8) (1991) 901–916.
- [8] R.P. Shimpi, Y.M. Ghugal, A layerwise shear deformation theory for two-layered cross-ply laminated plates, *Mech. Adv. Mater. Struct.* 7 (2000) 331-353.
- [9] Y.M. Ghugal, A.S. Sayyad, A static flexure of thick isotropic plates using trigonometric shear deformation theory. *J. Solid Mech.* 2 (1) (2010) 79-90.
- [10] Y. M. Ghugal, A.S. Sayyad, Free vibration of thick isotropic plates using trigonometric shear deformation theory. *J. Solid Mech.* 3 (2) (2011) 172-182.
- [11] J.L. Mantari, A.S. Oktem, C. Guedes Soares, A new trigonometric shear deformation theory for isotropic, laminated composite and sandwich plates. *Int. J. Solids and Struc.* 49 (2012) 43-53.
- [12] J.L. Mantari, A.S. Oktem, C. Guedes Soares, A new higher order shear deformation theory for sandwich and composite laminated plates. *Int. J. Solid. Struc. Part B* 43 (2012) 1489-1499.
- [13] A.M.A. Neves, A.J.M. Ferreira, E. Carrera, M. Cinefra , C.M.C. Roque, R.M.N. Jorge, C. M.M. Soares, Static, free vibration and buckling analysis of isotropic and sandwich functionally graded plates using a quasi-3D higher-order shear deformation theory and a meshless technique, *Comp. Part B* 44 (2013) 657-674.

## Références bibliographiques

---

- [14] A.M.A. Neves, A.J.M. Ferreira, E. Carrera, C.M.C. Roque, M. Cinefra, R.M.N. Jorge, C. M.M. Soares. A quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates. *Comp. Part B* 43 (2012) 711-725.
- [15] A.M.A. Neves, A.J.M. Ferreira, E. Carrera, M. Cinefra, C.M.C. Roque, R.M.N. Jorge, C. M.M. Soares. A quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates, *Compos. Part B* 94 (2012) 1814-1825.
- [16] A.S. Sayyad, Flexure of thick orthotropic plates by exponential shear deformation theory, *Lat. Ame. J. Solids Struct.* 10(2013) 473 – 490.
- [17] A.S. Sayyad, Y.M. Ghugal, Bending and free vibration analysis of thick isotropic plates by using exponential shear deformation theory. *App. Comput. Mech.* 6 (2012) 65–82.
- [18] R.P. Shimpi, H. Arya, N.K. Naik, A higher order displacement model for the plate analysis. *J. Reinf. Plast. Compos.* 22 (2003) 1667-1688.
- [19] H.T. Thai, T.P. VO, A new sinusoidal shear deformation theory for bending, buckling and vibration of functionally graded plates. *Appl. Math. Model.* 37(5) (2013) 3269-3281.
- [20] R.P. Shimpi, H.G. Patel, A two variable refined plate theory for orthotropic plate analysis. *Int. J. Solids Struct.* 43(22) (2006) 6783–6799.
- [21] N.J. Pagano, Exact solutions for bidirectional composites and sandwich plates. *J Compos. Mater.* 4 (1970) 20-34.
- [22] Glossaire des matériaux composites-CARMA-Actualisation octobre 2006.
- [23] L. Gornet, Généralités sur les matériaux composites, Ecole d'ingénieur, 2008.
- [24] M. P. Hanson, T. T. Serafini, Effects of Thermal and Environment Exposure on the Mechanical properties of Graphite/polyimide composites, Lewis Research Center, Cleveland, Ohio, Dec. 1971.
- [25] B. O. Sallai, A. Tounsi, I. Mechab, B. Boudarba, M. Meradjah, E.A. Adda Bedia, « A theoretical analysis of flexional bending of Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> S-FGM thick beams », *Computational Materials Science*, vol. 44(4), pp. 1344 – 1350, 2009.
- [26] Y. Menail, Analyse de l'effet du vieillissement à l'air, dans l'eau douce et dans l'eau salée, sur la tenue en fatigue de composites à matrice organique, renforcée par des fibres de verre, thèse de doctorat, UBM Annaba, 2009.
- [27] A. Giocosa, Les composites dans l'industrie automobile, Techniques de l'ingénieur, traité Plastiques et Composites, AM 5600, 1999.

## Références bibliographiques

---

- [28] E. H. Babacar Ly, « Nouveaux matériaux composites thermoformables à base de fibres de cellulose », Matériaux. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 2008.
- [29] Glossaire des matériaux composites-CARMA-Actualisation octobre 2006.
- [30] G. Kirchhoff, « Sur l'équilibre et le mouvement d'un anneau élastique », Journal de mathématiques pures et appliquées, vol. 40, pp. 51-88, 1950.
- [31] J. Cugnoni, Identification par recalage modale et fréquentiel des propriétés constitutives de coques en matériaux composites. Thèse de doctorat, l'école polytechnique fédérale de Lausanne, 2004.
- [32] E. Reissner, « The effect of transverse shears deformation on the bending of elastic plates », J. Appl. Mech., vol. 12, pp. 69-77, 1945.
- [33] R.D Mindlin, « Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates », Journal of Applied Mechanics, vol. 18, pp. 31-38, 1951 .
- [34] J. N. Reddy, C. M. Wang, K. H. Lee, « Relationships between bending solutions of classical and shear deformation beam theories », International Journal of Solids and Structures, vol. 34(26), pp. 3373-3384, 1997.
- [35] J. N. Reddy, Theory and Analysis of Elastic plates, Taylor & Francis, Philadelphia, 1999.
- [36] J.M. Whitney, « Shear correction factors for orthotropic laminates under static loads », J. Applied Mechanics, Vol.40, pp. 302-304, 1973.
- [37] F. B. Hilderbrand, E. Reissner, G. G. Thomas, « Notes on the foundations of theory of small displacements of orthotropic shells. NACA Technical note N°1833, 1949.
- [38] T. Kant, K. Swaminathan. Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order reffined theory. Composite Structures, 56(4):329-344, 2002.
- [39] R. B. Nelson, D. R. Lorch, « A refined theory for laminated orthotropic plates », ASME Journal of Applied Mechanics, Vol.41, pp. 177-183, 1974.
- [40] M. Touratier, « An efficient standard plate theory », Eng Sci, vol. 29(8), pp. 901-916, 1991.

## Références bibliographiques

---

- [41] S. A. Ambartsumyan, « Theory of anisotropic plate », Technomic Publishing Co, 1969.
- [42] M.V.V. Murthy, « An improved transverse shear deformation theory for laminated anisotropic plate ». Rapport technique, NASA, 1981 .
- [43] J. N. Reddy, « A simple higher-order theory for laminated composite plates », Journal of Applied Mechanics, vol. 51, pp. 745-752, 1984.
- [44] V. A. Duong, Développement en dynamique d'un élément fini multicouche avec interfaces imparfaites, Thèse de doctorat, Ecole national des ponts, ParisTech, 2008.
- [45] K. S. Afaq, « Développement d'un nouveau modèle pour les structures Composites multicouches et sandwichs avec prise en compte du cisaillement transverse et des effets de bord », thèse de doctorat, Université Toulouse III - Paul Sabatier, Erance, 2003.
- [46] H. Ait Atmane, A. Tounsi, I. Mechab, E. Adda Bedia, « Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory », Int. J. Mech. Mater. Design, vol. 6 (2), pp. 113-121, 2010.
- [47] M. Cho, K. Kim, M. H. Kim, « Efficient high order shell theory for laminated composites », Composite Structures, vol. 34, pp. 197-212, 1996 .
- [48] M. Cho, J. S. Kim. « A postprocess method for laminated shells with a doubly curved nine-nodded finite element », Composites: Part B, vol. 31, pp. 65-74, 2000.
- [49] M. Di Sciuva, « A refined transverse shear deformation theory for multilayered anisotropic plates ».Atti. Accad. Sci. Torino, vol. 118, pp. 279-295, 1984.
- [50] H. Murakami, « Laminated composite plate theory with improved in-plane responses », Journal of Applied Mechanics, vol. 53, pp. 661-666, 1986.
- [51] E. Carrera, « On the use of Murakami's zig-zag fonction in the modeling of layered plates and shells », Computers and Structures, vol. 82, pp. 541-554, 2004.
- [52] J. Sunôes, M. Moita, « Buckling behaviour of laminated composite structures using a discrete higher-order displacement model », Composite Structures, vol. 35, pp. 15-92. 1996.

## Références bibliographiques

---

[53] *Bharti M. Shinde\**, *Atteshamuddin S. Sayyad*, *Shantaram M. Ghumare*:

A refined shear deformation theory for bending analysis of isotropic and orthotropic plates under various loading conditions; JOURNAL OF MATERIALS AND ENGINEERING STRUCTURES 2 (2015) 3–15