

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Ibn Khaldoun Tiaret



Faculté des Sciences Appliquées
Département de Génie Civil

**Mémoire de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme de Master En Génie
Civil**

Option : Génie de la Construction

Présenté par :
Aissa Zaouia
Ghanim kheira

Sujet du mémoire

**Analyse du flambement des plaques en matériaux
fonctionnellement graduées sous chargement
thermique**

Soutenu publiquement le 18 juin devant le jury composé de :

Mr : AIT AMAR Meziane Mohamed	Président
Mr : BOUDERBA Bachir	Rapporteur
Mr : KHILOUN Mokhtar	Examineur
Melle: AIT YAHIA Siham	Examineur
Mme : KHAROUBI Lamia	Examineur

Promotion 2016/2017

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ


Remerciements et Dédicaces

Remerciement


*Nous tenons à remercier en premier lieu Allah qui nous a donné
La force et la patience à achever ce mémoire.*

*Nous voudrions saisir cette occasion pour remercier notre encadreur
Mr : Boudërba Bachir pour l'aide et la précision conseils.*

Ainsi qu'à tous nos enseignants "Les membres de jury":

 Mr : AIT AMAR Meziane Mohamed

 Mr : KHILOUN Mokhtar

 Mlle : AIT YAHIA Siham

 Mme : KHAROUBI Lamia


*Nous tenons à adresser nos sincères remerciements à tous les
enseignants qui ont participé à notre formation.*

Nous remercions également notre chef département :

 Mr : Bouakkaz Khaled

Un grand remerciement à tous.

 Aissa zaouia

 Ghanim kheira



Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

A mon grand père que Dieu nous le garde

A mes très chers parents qui m'ont encouragé et conseillé pendant mes plus pénibles moments

A mes sœurs qui sont présentes à mes cotés et qui me souhaitent la réussite et le bonheur

A toute ma famille ; mes oncles, mes tantes, mes cousins, mes cousines et à mes proches,

A toutes mes amies ainsi qu'à sa famille.



Zaouia

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

*A mes très chers parents et mon marie qui m'ont soutenu
Moralement durant toute ma vie avec leurs conseils précieux,*

Et leurs encouragements pour réaliser mon but

A celle qui m'a donné le courage et la volonté

A mes enfants ,mes frères et mes sœurs

A toute la famille

A mon encadreur

Ainsi qu'à tous mes amis et collègues de l'institut de génie civil



kheira

Sommaire

ملخص.....	I
Résumé.....	II
Abstract.....	III
Liste des figures.....	IV
Liste des tableaux.....	VIII
Liste des abréviations, symboles et notations.....	IX
Introduction générale.....	1

Chapitre I : Les matériaux à gradients de propriétés.

Première partie : Aperçu historique et généralités.

I.P1.1. Introduction :.....	4
I. P1.2. Concept des matériaux fonctionnellement gradués :.....	6
I. P1.3. Histoire du développement architectural du concept FGM :.....	7
I. P1.3.1. Pour des utilisations structurales (intégration du caractère réfractaire et de la dureté) :	8
I. P1.3.2. Pour des utilisations fonctionnelles (la conversion directe de l'énergie thermique en énergie électrique) :	9
I. P1.3.2.1. La conception et le traitement de composants gradués par TIC et TEC :.....	10
I. P1.4. Méthodes d'élaboration des FGM :.....	17
I. P1.4.1. Coulage en Bande (Tape Casting ou Doctor-Blade) :.....	18
I. P1.4.2. Coulage Séquentiel en Barbotine (Slip Casting) :.....	19
I. P1.4.3. Compaction Sèche des Poudres :	19
I. P1.4.4. Dépôt par Électrophorèse :	20
I. P1.4.5. Projection Plasma :.....	20
I. P1.4.6. C. V. D. et P. V. D :	20
I. P1.4.7. Frittage et Infiltration :	20

I. P1.4.8. Frittage Laser Différentiel :.....	21
I. P1.4.9. Implantation Ionique :	22
I. P1.4.10. Dépôt par Centrifugation :.....	22
I. P1.5. Propriétés physiques et mécaniques des FGM :.....	22
I. P1.5.1. Propriétés physiques du métal :.....	23
I. P1.5.2. Propriétés physiques de la céramique :	24
I. P1.6. Domaine d'application des matériaux fonctionnellement gradués :	25
I.P1.7. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM :.....	26
I. P1.7.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM :	28
I. P1.7.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM :.....	29
I. P1.7.3. Propriétés matérielles de la plaque E-FGM :... ..	30
I. P1.8. Conclusion :.....	31
Deuxième partie : Investigation sur les différentes théories des plaques.	
I.P2.1. Introduction :.....	32
I.P2.2. Les Différents Modèles des structures composites dans l'élasticité bidimensionnelles	32
I. P2.2.1. Approche monocouche équivalente :	32
I.P2.2.1.1. Les modèles classiques Love-Kirchhoff (théorie classique des plaque stratifiées CLPT) :.....	33
I.P2.2.1.2. Les modèles Reissner-Mindlin (théorie de déformation en cisaillement du premier ordre FSDT) :.....	34
I. P2.2.1.3. Les modèles d'ordre supérieur :.....	35
I. P2.2.2. Approche par couche :.....	38
I. P2.2.2.1. Les modèles zig-zag :	39
I. P2.2.2.2. Les modèles couches discrètes :.....	41
I.P2.3. Modèles éléments finis des structures multicouches :.....	43
I. P2.4. Conclusion :.....	43

Chapitre II : Le phénomène du flambement.

II.1. Introduction :	44
II.2.1. Définition de la stabilité :	44
II.2.2. Méthodes d'analyse de la stabilité :	45
II.3. Flambement thermique :	45
II.4. Flambement mécanique :	46
II.5. Flambement des plaques :	46
II.5.1 .Approche du Flambement :	47
II.5.2. Plaque rectangulaire simplement appuyée sur les quatre cotes :	47
II.5.3. Modes du flambement des plaques :	48
II.5.3.1. Le flambement local :	48
II.5.3.2. Le flambement distorsionnelle :	48
II.5.3.3. Le flambement global :	49
II.5.4. L'interaction entre les modes de flambement :	49
II.6. Quelques exemples sur le flambement :	49
II.6.1. Flambement d'une plaque raidie sous compression longitudinale et pression hydrostatique :	49
II.6.2. Ruine de la semelle comprimée d'une poutre en caisson :	50
II.6.3. Ruine locale d'un profil creux rectangulaire :	51
II.6.4. Voilement local d'une semelle de poutre :	51
II.6.5. Flambement d'une coque cylindrique comprimée :	52
II.6.6. Flambement de Réservoir :	52
II.7. Conclusion :	53

Chapitre III : Analyse du Flambement Thermique des Plaques Epaises en FGM

Première partie : Formulations théoriques

III.P1.1. Introduction :.....	54
III.P1.2. Description du problème :.....	54
III.P1.3. champ de déplacement et équations constitutives :.....	56
III.P1.3. Les équations d'équilibre et stabilité :	60
III.P1.4. Solutions précises pour le courant de flambement ascendant de la plaque de FGM :.....	62
III.P1.5. Flambement thermique des plaques de FGM sous température uniforme :	64
III.P1.6. Flambement des plaques FGM soumise à une variation de température graduée à travers l'épaisseur :	65
III.P1.7. Conclusion:	66

Deuxième partie : Validation et comparaison des résultats

III.P2.1. Introduction :.....	67
III.P2.2. Résultats numériques :	67
III.P2.2.1. Etude comparative :	68
III.P2.2.2. Etude paramétrique :	74
III.P2.3. Conclusion :	84

Conclusion générale et perspectives

Conclusion générale et perspectives.....	85
--	----

Références et bibliographiques

Références et bibliographiques	87
--------------------------------------	----

ملخص

يقدم في هذه الدراسة تحليل الانبعاث لصفحة مستطيلة سميكة متدرجة وظيفيا تحت تأثير حمل حرارية وفق النظرية الغير الخطية فون كارمان .في هذه الدراسة تم افتراض أن الخصائص المادية للصفائح المتدرجة وظيفيا، تتغير بطريقة مستمرة وبدون انقطاع من خلال سماكة وفقا لقانون التوزيع متعدد الحدود في دالة حجم المكونات . يتم اشتقاق معادلات التوازن و الاستقرار باستخدام نظرية التشوه القص عالية الترتيب على أساس أنواع مختلفة من دوال تشوه القص . يتم تطوير طريقة تحليلية لتحديد درجة حرارة الانبعاث الحرجة عبر سمك الصفحة تحت تأثير درجات حرارة متغيرة، أو خطية أو غير خطية .تم الحصول على النتائج العددية في برنامج مابل باستخدام مجموعات من القيم الرمزية والرقمية .تقدم نتائج مقارنة لدرجة حرارة الانبعاث الحرجة لأنواع مختلفة من دوال تشوه القص .يتم التحقق من دقة النتائج من خلال مقارنة النتائج المتاحة.

الكلمات الرئيسية: الانبعاث الحراري، نظرية التشوه القص عالية الترتيب ، دالة تشوه القص.

Résumé

Une analyse de flambement thermique des plaques rectangulaires épaisses fonctionnellement graduées selon la théorie non linéaire de Von Karman est présentée. Les propriétés matérielles de la plaque fonctionnellement graduée sont supposées être variées d'une façon continue à travers l'épaisseur selon une loi de distribution polynomiale de la fraction volumique des constituants. Les formulations des équations d'équilibre et de stabilité sont dérivées en utilisant la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé basée sur différents types de fonctions de forme. Une méthode analytique pour la détermination de la température critique de flambement sous élévation de température uniforme (U), linéaire (L) et non linéaire (NL) à travers l'épaisseur d'une plaque FG est développée. Le présent travail donne des résultats comparatifs de la température critique de flambement pour différents types de fonctions de forme. L'exactitude de la formulation présentée est vérifiée en comparant aux résultats fournis par la littérature.

Mots-clés : flambement thermique, la théorie HPT, fonction de forme

ABSTRACT

A thermal buckling analysis of functionally graded thick rectangular plates according to von Karman nonlinear theory is presented. The material properties of the functionally graded plate, except for the Poisson's ratio, were assumed to be graded in the thickness direction, according to a power-law distribution, in terms of the volume fractions of the metal and ceramic constituents. Formulations of equilibrium and stability equations are derived using the high order shear deformation theory based on different types of shape functions. Analytical method for determination of the critical buckling temperature for uniform increase of temperature, linear and nonlinear change of temperature across thickness of a plate is developed. Numerical results were obtained in Maple software using combinations of symbolic and numeric values. The paper presents comparative results of critical buckling temperature for different types of shape functions. The accuracy of the formulation presented is verified by comparing to results available from the literature.

Key words: thermal buckling, HPT theory, shape function

Liste des figures

Liste des figures

CHAPITRE I

Figure I. P1.1 : Variation continue des propriétés matérielles.....	6
Figure I. P1.2 : Variation discrète des propriétés matérielles.....	6
Figure I. P1.3 : Variation continue de la microstructure (schématisée).....	7
Figure I. P1.4 : Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels (Koizumi 1996).....	8
Figure I. P1.5 : Un schéma illustrant le système de conversion direct hybride d'énergie (Ichiro chiota (1996)).....	10
Figure I. P1.6 : (a) Un schéma de l'alignement gradué des fibres de carbone dans un réservoir à chaleur, (b) un réservoir à chaleur graduée de C/C (Ichiro chiota (1996)).....	11
Figure I. P1.7 : Changements microstructuraux de l'émetteur gradué en TiC/Mo W/Re (Ichiro chiota (1996)).....	12
Figure I. P1.8 : Puissance maximum efficace en fonction de la différence de la température pour un FGM trois-couches (Ichiro chiota (1996)).....	13
Figure I. P1.9 : Photo des électrodes symétriques graduées de MoSi ₂ /Al ₂ O ₃ /Ni/Al ₂ O ₃ /MoSi ₂ fabriquées à l'université d'Osaka pour un dispositif de SiGe (Ichiro chiota (1996)).....	14
Figure I. P1.10 : Schématisation d'un matériau très radiatif composé d'une matrice AlN contenant une dispersion graduelle des particules fines W (Ichiro chiota (1996))	16
Figure I. P1.11 : La relation entre la conduction thermique et l'émissivité (Ichiro chiota (1996)).....	16
Figure I. P1.12 : Principe de la méthode coulage en bande.....	18
Figure I. P1.13 : Disposition du procédé frittage laser différentiel	21
Figure I. P1.14 : Schéma du procédé dépôt par centrifugation (Abdizadeh H (1997)).....	22
Figure I. P1.15 : Les principaux domaines d'application des FGM.....	25
Figure I. P1.16 : Les dimensions de la plaque FGM.	27
Figure I. P1.17 : Variation du module Young dans une plaque P-FGM.	29
Figure I. P1.18 : La variation du module de Young dans une plaque S-FGM.	30

Figure I. P1.19 : La variation du module de Young dans une plaque E-FGM.....	31
Figure I. P2.1 : Cinématique de Love-Kirchhoff.....	33
Figure. I. P2.2 : Cinématique de Reissner-Mindlin.....	34
Figure. I. P2.3 : Variation de la fonction de gauchissement $\psi(x_3) = x_3$ et $\psi'(x_3)$ suivant l'épaisseur.....	35
Figure .I. P2.4 : Cinématique de la théorie d'ordre supérieur	36
Figure. I. P2.5 : Champs de déplacements des cinématiques. Viet.Tung. Nguyen (2004) modèles couches discrètes, approche.....	39
Figure. I. P2.6 : Champs de déplacements des modèles zig-zag, approche cinématique. Viet.Tung. Nguyen (2004).....	39
Figure. I. P2.7 : Champs de déplacements des modèles zig-zag du premier ordre. Viet.Tung. Nguyen (2004).	40
Figure. I. P2.8 : Champs de déplacements des modèles zig-zag d'ordre supérieur. Viet.Tung. Nguyen (2004).....	41

CHAPITRE II

Figure II.1 : Comportement charge-déformation de colonne soumis à une compression axiale ; (b) courbe P- Δ , (c) courbe P-y.....	45
Figure II.2 : Flambement d'une plaque.....	47
Figure II.3 :Flambage de la plaque sous une compression uni-axial.....	48
Figure II.4 : Flambement d'une plaque raidie.....	50
Figure II.5 : Ruine de la semelle comprimée d'une poutre en caisson.....	50
Figure II.6 : Ruine locale d'un profil creux rectangulaire	51
Figure II.7 : Voilement local d'une semelle de poutre.....	51
Figure II.8 : Flambement d'une coque cylindrique comprimée.....	52
Figure II.9 : Réservoir flambé après séisme (mode en pointe de diamant).....	52

CHAPITRE III

Figure III.P1.1: Système d'axe et géométrie pour les plaques rectangulaires en FGM.....	54
Figure III.P1.2: Composantes des vecteurs contraintes dans un système d'axes (x, y, z).....	58
Figure III.P1.3: Forces par unités de longueur.....	59
Figure III.P1.4: Moments par unités de longueur.....	59
Figure III.P2.1-(a): Différence de température critique de flambement T_{cr} due a une variation de température uniforme, d'une plaque FG ($a/h=10$) en fonction de l'indice de puissance p et pour différentes valeurs du rapport (a/b) et pour différentes formes de fonction (F3, F10, F12, F13).....	75
Figure III.P2.1 (b) : Différence de température critique de flambement T_{cr} due a une variation de température uniforme, d'une plaque FG ($a/b=1$) en fonction de l'indice de puissance p et pour différentes valeurs du rapport (a/h) et pour différentes formes de fonction (F3, F10, F12, F13).....	76
Figure III.P2.2 (a) : Différence de température critique de flambement T_{cr} due a une variation de température linéaire, d'une plaque FG ($a/h=10$) en fonction de l'indice de puissance p et pour différentes valeurs du rapport (a/b) et pour différentes formes de fonction (F3, F10, F12, F13).....	77
Figure III.P2.2 (b) : Différence de température critique de flambement T_{cr} due a une variation de température linéaire, d'une plaque FG ($a/h=5$) en fonction de l'indice de puissance p et pour différentes valeurs du rapport (a/b) et pour différentes formes de fonction (F3, F10, F12, F13).....	78
Figure III.P2.2 (c) : Différence de température critique de flambement T_{cr} due a une variation de température linéaire, d'une plaque FG ($a/b=1$) en fonction de l'indice de puissance p et pour différentes valeurs du rapport (a/h) et pour différentes formes de fonction (F3, F10, F12, F13).....	79
Figure III.P2.2 (d) : Différence de température critique de flambement T_{cr} due a une variation de température linéaire, d'une plaque FG ($a/h=5$, $a/h=10$, $a/b=1$) en fonction de différentes valeurs de l'indice de puissance p et pour différentes formes de fonctions (F3, F10,F12, F13).....	80

-
- Figure III.P2.3 (a) :** Différence de température critique de flambement T_{cr} due a une variation de température non linéaire, d'une plaque FG ($\mathbf{a/h=10, \beta = 3}$) en fonction de l'indice de puissance p et pour différentes valeurs du rapport ($\mathbf{a/b}$) et pour différentes formes de fonctions (F3, F10, F12, F13).....81
- Figure III.P2.3 (b) :** Différence de température critique de flambement T_{cr} due a une variation de température non linéaire, d'une plaque FG ($\mathbf{a/b=1, \beta = 3}$) en fonction de l'indice de puissance p et pour différentes valeurs du rapport ($\mathbf{a/h}$) et pour différentes formes de fonction (F3, F10, F12, F13).....82
- Figure III.P2.3 (c) :** Différence de température critique de flambement T_{cr} due a une variation de température non linéaire, d'une plaque FG ($\mathbf{a/h=10, a/b=1}$) en fonction de l'indice de puissance p et pour différentes valeurs de ($\mathbf{\beta}$) et pour différentes formes de fonction (F3, F10, F12, F13).....83

Liste des tableaux

Liste des tableaux

CHAPITRE I

Tableau I. P1.1: comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.....23

CHAPITRE III

Tableau III.P1.1 : fonction de forme de déformation de cisaillement définie par différents chercheurs :.....57

Tableau III.P2.1 : Température critique de flambement T_{cr} d'une plaque FG en fonction de l'indice de puissance p et le rapport de dimension a/b pour une variation uniforme de température et $a/h=100$68

Tableau III.P2. 2 : Température critique de flambement T_{cr} d'une plaque FG en fonction de l'indice de puissance p et le rapport de dimension a/b pour une variation linéaire de température et $a/h=100$69

Tableau III P2.3 : Température critique de flambement T_{cr} d'une plaque FG en fonction de l'indice de puissance p , le rapport de dimension a/b et de l'exposant de température β pour une variation non linéaire de température et avec $a/h=10$69

Tableau III.P2.4 : Température critique de flambement T_{cr} d'une plaque FG en fonction de l'indice de puissance p , le rapport de dimension a/b et de l'exposant de température β pour une variation non linéaire de température et avec $a/h=5$70

Tableau III.P2.5 : Température critique de flambement T_{cr} d'une plaque FG en fonction de l'indice de puissance p et le rapport de dimension a/b pour une variation uniforme de température et ($a/h=5$, $a/h=10$ et $m=n=1$).....71

Tableau III.P2.6 : Température critique de flambement T_{cr} d'une plaque FG en fonction de l'indice de puissance p et le rapport de dimension a/b pour une variation linéaire de température et ($a/h=5$, $a/h=10$ et $m=n=1$ et $T_m = 5^\circ c$).....72

Tableau III.P2.7 : Température critique de flambement T_{cr} d'une plaque FG en fonction de l'indice de puissance p , le rapport de dimension a/b et de l'exposant de température β pour une variation non linéaire de température et avec ($a/h=5$, $a/h=10$ et $m=n=1$ et $T_m = 5^\circ c$).....73

Liste des abréviations, symboles et notations

Nous donnons ci-dessous les principales notations, symboles et abréviations utilisées dans cette mémoire.

FGM : Les matériaux à gradient de propriétés.

CVD : Le dépôt chimique en phase vapeur.

PVD : Le dépôt physique en phase vapeur.

2D, 3D : Bidimensionnelle et tridimensionnelle respectivement.

E : Le module de Young.

E(z) : Module de Young en fonction de « z ».

E_c : Module de Young de la céramique.

E_m : Module de Young du métal.

G : Le module de cisaillement.

G(z) : Module de cisaillement en fonction de « z ».

ν : Le coefficient de Poisson.

$\nu(z)$: Coefficient de Poisson en fonction de « z ».

V : La fraction volumique.

ρ : La masse volumique.

α : Le coefficient de dilatation thermique.

P_C et P_M sont les propriétés correspondantes de la céramique et du métal, respectivement.

p : Paramètre du matériau (l'exposant de la fraction volumique qui prend des valeurs supérieures ou égales à zéro).

a : Longueur de la plaque suivant la direction de x.

b : Largeur de la plaque suivant la direction de y.

h : l'épaisseur de la plaque suivant la direction de z.

a/h : L'élancement.

u, v, w Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque.

u_α^0 : Le déplacement de membrane dans la direction α .

w : La flèche de la plaque.

$w_{,\alpha}$: La rotation due a la flexion (sans cisaillement).

ϕ_α : La rotation de la normale au plan moyen autour des axes x_α .

γ_α^0 : La déformation de cisaillement transverse mesurée sur le plan moyen.

$\psi(z)$: La fonction de gauchissement suivant l'épaisseur de la plaque.

∂ : Dérivée partielle.

i et j Sont des nombres naturels.

ϕ_x, ϕ_y , Les rotations autour des axes x, y

$\varepsilon_x, \varepsilon_y$ Déformation dans la direction x, y

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$: Les contraintes normales.

γ_{xz}, γ_{yz} : Les déformation de cisaillement.

τ_{xz}, τ_{yz} : les contraintes de cisaillement.

$T(z)$: Un champ de température (Chargement thermique).

Q_{ij} : Les coefficients de rigidité.

N, M, S : Les résultantes des contraintes.

A_{ij}, B_{ij} , etc : les termes de la matrice de rigidité de la plaque.

$[L]$: La matrice symétrique.

$\{ \}$: Vecteur colonne.

$[]$: Matrice.

Introduction générale

INTRODUCTION GENERALE

Les demandes sur les matériaux composites et leur application dans des éléments structuraux ont exigés la prévision précise des caractéristiques de la réponse des plaques fonctionnellement graduées (FGM) utilisées dans des situations où des gradients importants de température sont rencontrés. Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) sont conçus de telle sorte que les propriétés matérielles varient de façon progressive et continue à travers l'épaisseur selon une distribution en loi de puissance de la fraction volumique des constituants (Marković (2008)). Puisque les principales applications des matériaux en FGM sont dans des milieux à haute température, la plupart des recherches sur ces matériaux ont été limitées à l'analyse des contraintes thermomécaniques, le flambement thermique, la rupture mécanique et l'optimisation. Les matériaux FGM, qui contiennent le métal et la céramique, améliorent les propriétés thermo-mécaniques entre les couches en raison desquelles le décollement des couches devrait être dû évité au changement continu entre les propriétés des constituants en variant un pourcentage de la fraction volumique de deux matériaux ou plus, FGM peut être formé de sorte qu'il réalise une propriété désirée de gradient dans des directions spécifiques.

Le comportement thermo élastique d'une plaque rectangulaire FG en céramique-métal a été présenté par Praveen et Reddy à l'aide d'un élément fini rectangulaire de quatre nœuds basé sur la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FPT), y compris l'effet non linéaire de Von Karman's (Praveen et Reddy (1998)). Selon la formulation de Praveen et Reddy, (Reddy (2000)) a étudié l'analyse statique des plaques rectangulaires FG avec l'utilisation de la théorie de déformation de cisaillement de troisième ordre (TSDT). Basant sur la théorie (TSDT), il a défini le champ de déplacement établi de l'élément fini d'une plaque avec les huit-degrés de liberté par nœud. La formulation explique l'accouplement thermo mécanique et la non-linéarité géométrique de Von Karman's. Woo and Meguid (Woo and Meguid (2001)) étudiées les déformations non linéaires des plaques minces et des coques FG utilisant la théorie classique non linéaire de Von Karman's sous chargement thermo-mécanique, les auteurs ont comparé les contraintes et les déplacements pour céramique, métal et les plaques FG et ont conclu que les déplacements de la plaque FG avec une petite fraction de volume en céramique, sensiblement plus petite que les déplacements de la plaque métal. (MA et Wang (2003)) ont recherché de grandes déformations par la flexion et le flambement de la plaque circulaire FG simplement appuyée axisymétrique utilisant la théorie de la plaque non linéaire de Von Karman. (Lanhe (2004)) a dérivé des équations d'équilibre et de stabilité

d'une plaque FG rectangulaire modérément épaisse simplement appuyée sous l'effet des charges thermiques utilisant la théorie (FPT). La température de flambement est dérivée pour deux types de chargement thermique – la température uniforme augmente et les gradients augmentent à travers l'épaisseur de la plaque. (Chi et Chung (2006)) ont obtenu une solution de forme close d'une plaque rectangulaire FG modérément épaisse simplement appuyée sous la charge transversale utilisant la théorie classique des plaques (CPT) et la série de fourrier. Ils ont supposé que le module élastique varie dans la direction d'épaisseur de la plaque, selon la variation de la fraction volumique des constituants. Le coefficient de Poisson demeure constant. La solution analytique de forme close est prouvée en compare les résultats numériques avec la méthode d'élément fini. (Chung et che (2007) ont analysés une plaque rectangulaire FG modérément épaisse, élastique, simplement appuyée, sous les changements de température linéaires dans la direction d'épaisseur de la plaque .ils ont assumés que le module de Young d'élasticité et le coefficient de Poisson sont constants dans toute la plaque cependant, le coefficient de dilatation thermique varie selon la variation de la fraction de volume du constituants, basés sur la loi de puissance ou la fonction exponentielle dans la direction d'épaisseur.

Dans le présent travail, une solution analytique est développée pour l'étude de la stabilité au flambement thermiques des plaques épaisses en FGM en utilisant une théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur (HPT) avec plusieurs formes de fonction (parabolique, exponentielle, sinusoidale, hyperbolique, ...etc.) et en donne une description de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres. Une comparaison entre les théories d'ordre élevé sera établie en se basant sur le tenseur de déformation de Von Karman qui prend en compte la non linéarité géométrique. L'approche de l'énergie sera utilisée pour déterminer les équations d'équilibre et les charges critiques de flambement seront aussi calculées à partir des ces équations.

Le présent travail de mémoire s'articule autour deux aspects essentiels qui reflètent toute notre démarche, à savoir les aspects :

- Théorique
- Analytique

L'aspect théorique comprend deux chapitres :

Dans le premier chapitre, la première partie sera consacrée à une recherche bibliographique sur les matériaux à gradients de propriétés tous en définissant leur concept et leur caractéristiques, ainsi que leurs domaines d'application, puis nous définissons les lois qui régissent ces matériaux. La deuxième partie sera dédiée à la présentation des différentes théories applicables aux plaques FGM.

Dans le deuxième chapitre, on présente généralités sur le phénomène du flambement.

L'aspect Analytique en son rôle est scindé en deux chapitres :

Dans le troisième chapitre, une analyse de flambement thermique des plaques simplement appuyées en FGM à été présenté en détail en utilisant la théorie de la plaque de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HPT). La charge critique de flambement est déterminée pour les trois cas de chargement thermique retenus.

Au quatrième chapitre une validation des résultats numériques déjà élaborées est faite, tout en les comparants avec ceux trouvées dans des études précédentes.

Le présent travail se termine par une conclusion générale où on souligne l'efficacité de cette nouvelle théorie des plaques en FGM dans la résolution du problème de flambement thermique. En dernier lieu le travail contiendra les perspectives ouvertes par cette étude.

Chapitre I

les matériaux à gradients de propriétés

Première partie

Aperçu historique et généralités

Première partie : Aperçu historique et généralités**I.P1.1. Introduction :**

Les matériaux à gradient de propriétés (Functionally Graded Materials : FGM) ou les matériaux fonctionnellement gradués sont une nouvelle classe de matériaux composites dont la microstructure et la composition varient graduellement et continûment avec la position de manière à optimiser les performances mécaniques et thermiques de la structure qu'ils constituent. Ils sont considérés comme des matériaux intelligents dont les fonctions désirées sont intégrées, dès la conception, au cœur même de la matière.

A chaque interface, le matériau est choisi selon les applications spécifiques et les charges environnementales. Ces matériaux possèdent de multiples avantages qui peuvent les rendre attractifs du point de vue de leur potentiel d'application. Il peut s'agir de l'amélioration de la rigidité, de la tenue à la fatigue, de la résistance à la corrosion ou de la conductivité thermique en plus d'avoir une gradation des propriétés permettant ainsi d'augmenter ou de moduler des performances telles que la réduction des contraintes locales (Miyamoto et al. 1999, Suresh et Mortensen 1998) ou encore l'amélioration du transfert de chaleur (Öchsner et al. 2008). Ce nouveau concept marque le commencement d'une révolution dans les domaines de la science et de la mécanique des matériaux. L'intérêt particulier et grandissant envers les matériaux à gradient fonctionnel, pensés et conçus pour la première fois au Japon, est mis en évidence par les innombrables conférences et publications de qualité dédiées à l'analyse, la conception et la fabrication de ces matériaux.

Une question s'impose : Comment ce concept a-t-il germé, et comment l'étude des FGM a-t-elle été lancée ? Au environ de 1984-1985, dans une université Japonaise, deux chercheurs l'un dans le domaine de l'aéronautique et l'autre dans le domaine des sciences des matériaux rêvent de concevoir un engin spatial dont le revêtement pourrait résister à un environnement thermique très sévère. Il n'existe alors pas de matériau métallique ni de matériau composite capable de répondre à la fois aux exigences environnementales telles que décrites tout en gardant d'excellentes propriétés mécaniques. Ils échangent alors l'idée du concept FGM, autrement dit d'un matériau avec une gradation continue dans la direction de l'épaisseur, passant d'une face totalement métallique vers une face totalement céramique. En 1987, le programme national de recherche et de développement sur les FGM a vu le jour au Japon. Beaucoup de chercheurs des institutions publiques et de l'industrie ont uni leurs efforts pour créer un nouveau type de matériau, principalement pour permettre de construire l'enveloppe extérieure d'une navette intercontinentale commerciale.

Le problème principal à résoudre étant le flux de chaleur énorme frappant la majorité des surfaces qui sont exposées à la friction par l'air lors de la période de rentrée de la navette dans l'atmosphère terrestre et en même temps, de protéger l'intérieur contre un surchauffement. Certes, un revêtement céramique aurait pu protéger le fuselage contre les températures qui se développent à la surface, mais on a dû craindre l'action des très grandes contraintes thermo élastiques aux interfaces entre fuselage métallique et sa protection céramique, se rendant compte des différences entre les modules de Young et les conductivités thermiques des deux matériaux. L'idée fût alors de produire une transition douce, donc graduelle entre métal pur et céramique pure appelée matériaux à gradient fonctionnel (FGM). En 1990 a eu lieu la première conférence internationale sur les FGM à Sendai-city au Japon. En 1992, les matériaux à gradient fonctionnel ont été sélectionnés parmi les dix premières technologies de pointe au Japon et actuellement dans le monde entier.

La réussite dans le domaine des matériaux intelligents ne sera possible que par une forte synergie entre les différents secteurs industriels et scientifiques. Certes, le concept FGM a été proposé à l'origine pour répondre aux exigences du domaine de l'aéronautique et de l'aérospatial mais ces matériaux sont utilisés dans la fabrication des outils industriels qui exigent une grande rigidité, une grande dureté et une résistance thermique importante. Ils ont également des applications en optoélectronique, particulièrement dans la fabrication des fibres optiques capables de transmettre l'information à de très grandes vitesses. Leur application dans les systèmes de conversion de l'énergie solaire en énergie électrique sera probablement effective dans un futur proche dans notre pays qui a un potentiel énorme dans ce domaine. Les FGM sont également les biomatériaux idéaux pour réparer ou combler les déficiences osseuses éventuelles de notre squelette. Cette technologie est aussi applicable dans les centrales nucléaires où la température peut atteindre des valeurs considérables. Actuellement, des lanceurs en FGM sont testés et les résultats sont prometteurs.

Outre les applications citées précédemment, les FGM trouvent aussi leurs applications dans les semi- conducteurs et en génie civil (Baron et Naili 2008).

Les poutres et les plaques constituent des éléments de base dans les structures aérospatiales, marines et terrestres, c'est pourquoi un intérêt particulier leur est porté, et bien comprendre leur comportement sous diverse sollicitations est une étape cruciale dans l'analyse structurale. Etant donné que les matériaux à gradient fonctionnel ont été pensés et conçus pour résister à des conditions thermiques sévères, le travail de recherche proposé est justement consacré à l'étude de l'instabilité thermique des plaques FGM.

I. P1.2. Concept des matériaux fonctionnellement gradués :

Les matériaux à gradient fonctionnel sont une nouvelle classe de matériaux composites dont les propriétés thermomécaniques varient selon une loi de fonction continue (**figure I. P1.1**) ou discrète (**figure I. P1.2**) à travers l'épaisseur. Grâce à la structure spéciale de ces matériaux, il est possible d'éviter les concentrations de contraintes au niveau des interfaces (provoquant le délaminage) et d'améliorer les propriétés mécaniques et thermiques des pièces par association de matériaux.

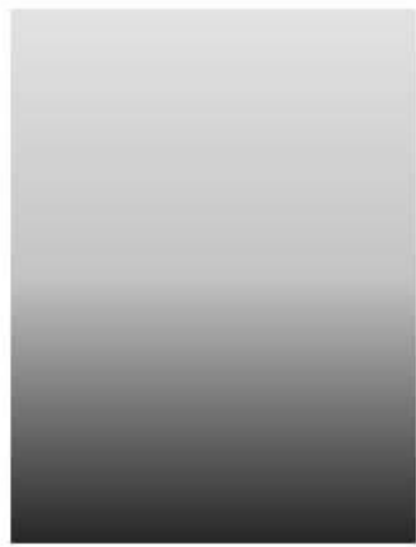


Figure I. P1.1 : Variation continue des propriétés matérielles.



Figure I. P1.2 : variation discrète des propriétés matérielles.

La variation continue des propriétés (**figures I. P1.3**) trouve son application lorsque, par exemple, la face supérieure est exposée à une haute température alors que la face inférieure est exposée à une basse température. Dans ce cas, la face supérieure est à 100% céramique et la face inférieure est à 100% métal, avec une transition graduelle entre les deux.

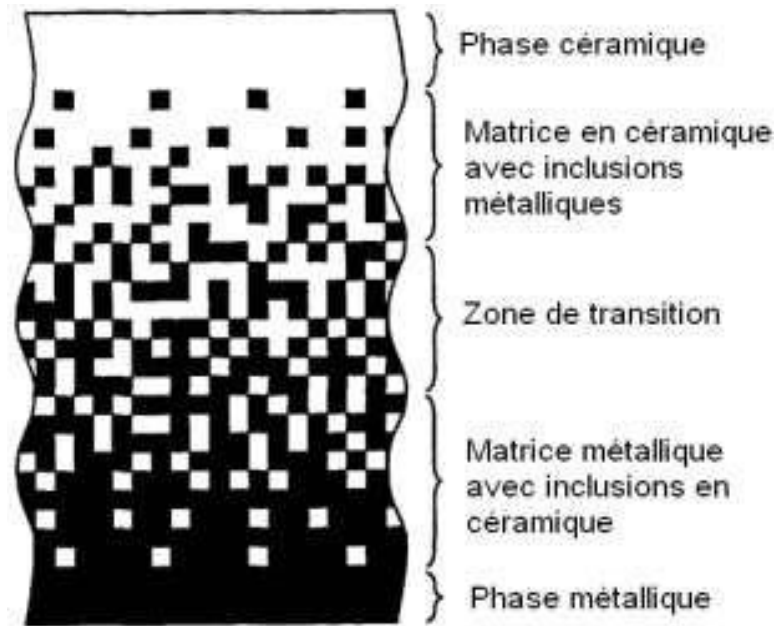


Figure I. P1.3 : Variation continue de la microstructure (schématisée).

En ajustant la microstructure de transition d'une façon appropriée, il est possible d'obtenir une distribution optimale de la température, de la déformation et des contraintes. Cette possibilité d'ajustement est demandée lors de la conception des structures thermiques aéronautiques et spatiales (moteurs, tuyères, revêtements thermiques, etc.). Ce concept a aussi été utilisé pour améliorer la résistance à la fatigue thermique et la durée de vie des revêtements pare-feu ((Jian, Hashida *et al.* 1995), (Kawasaki et Watanabe 1997)).

I. P1.3. Histoire du développement architectural du concept FGM :

Généralement, les F.G.M sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes. Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue les F.G.M des matériaux composites conventionnels comme c'est illustré dans la (**figure I. P1.4**) (Koizumi. M (1996)). Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés matérielles des FGM. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente (Boch. P Chartier. Huttepain. M (1986)).

Le concept FGM peut être appliqué dans divers domaines pour des usages structuraux et fonctionnels. Au Japon, plusieurs programmes de cinq ans ont été conduits au cours des années 80 et 90 afin de développer l'architecture des FGM, et d'étudier également ces matériaux pour les applications de hautes températures (par exemple, éléments pour navettes spatial hypersonique) ainsi que pour des applications fonctionnelles (par exemple, convertisseurs thermoélectriques et thermo-ioniques). Ces programmes ont conduit au développement de la conception architecturale du FGM et de ces perspectives.

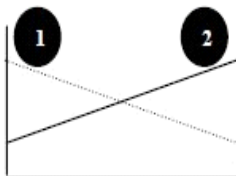
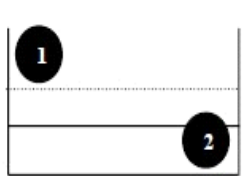
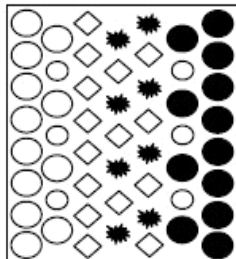
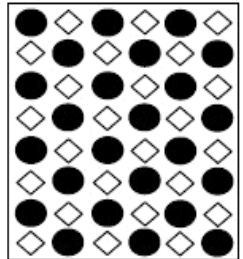
Propriétés	<p>1 Résistance mécanique</p> <p>2 Conductivité thermique</p>		
Structure	<p>Eléments constitutifs:</p> <p>céramique ○</p> <p>métal ●</p> <p>microporosité ○</p> <p>fibre ◇*</p>		
Matériaux	exemple	FGM	NON-FGM

Figure I. P1.4 : Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels (Koizumi 1996).

I. P1.3.1. Pour des utilisations structurales (intégration du caractère réfractaire et de la dureté) :

La véritable lancée de ce matériau à commencer en 1987. À cette époque-là, le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet intitulé « étude fondamentale de la relaxation des contraintes thermiques des matériaux à hautes températures en utilisant des structures graduées » pour un budget total de 1.215 millions de Yens sous l'auspice de l'agence des sciences et technologie. L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux.

Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux travaillent à des températures de surface de 1800°C ainsi qu'à un gradient de température de l'ordre de 1300°C.

A cette année-là, aucun matériau industriel n'était connu pour supporter de telles sollicitations thermomécaniques. Trente organisations de recherches entre instituts, universités et compagnies nationales ont participé au programme en tant que membres des trois importants ateliers « conception, traitement et évaluation ». Le souci a été de développer l'architecture fondamentale des FGM ainsi que leurs applications.

Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux :

1. Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau.
2. Ténacité du matériau côté basse température.
3. Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau.

Pour répondre à un tel cahier des charges, l'idée originale des FGM a été proposée pour élaborer un nouveau composite profitant à la fois des propriétés des céramiques (côté hautes températures) et des métaux (côté basse température) (**figure I. P1.4**).

I. P1.3.2. Pour des utilisations fonctionnelles (la conversion directe de l'énergie thermique en énergie électrique) :

Puisqu'on s'est attendu à ce que le concept FGM s'applique aux matériaux aussi bien pour des usages fonctionnels que pour des applications structurales, un nouveau projet de cinq ans a été lancé en 1993 dans le but d'appliquer le concept FGM au développement de l'énergie de conversion des matériaux thermoïoniques et thermoélectriques. Les convertisseurs TIC (en conversion ionique) et TEC (en conversion électrique) peuvent produire de l'énergie électrique directement à partir de l'énergie thermique par l'écoulement d'électron produit dans l'espace ou dans un solide sous un différentiel à hautes températures. La (**figure I. P1.5**) montre ce programme continu. Dans ce système hybride de conversion directe d'énergie, un TIC et un TEC sont combinés, et l'énergie solaire est utilisée comme source de chaleur pour créer un gradient de température de $\sim 2000^{\circ}\text{K}$ à $\sim 300^{\circ}\text{K}$. La conception et l'optimisation des champs gradués sous un potentiel électronique et élastique devraient mener à une efficace conversion avec la relaxation de

la contrainte thermique. Ainsi le développement de l'architecture du FGM qui combinerait les propriétés structurales et fonctionnelles est un autre but de ce programme.

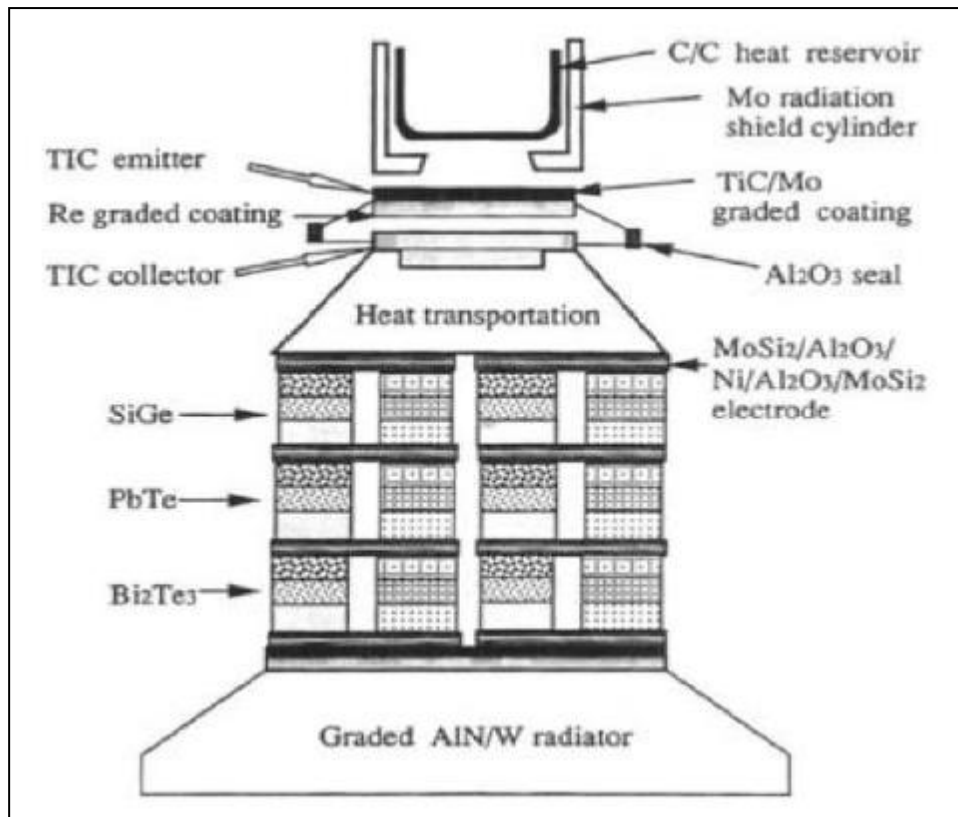


Figure I. P1.5 : Un schéma illustrant le système de conversion direct hybride d'énergie (Ichiro chiota (1996)).

I. P1.3.2.1. La conception et le traitement de composants gradués par TIC et TEC :

Afin de développer des TIC et TEC efficaces et durables, ou une combinaison de ces deux dispositifs, un système optimisé, avec une faible perte de température et moins de dégradation, doit être assemblé utilisant les matériaux et dispositifs à haute performance par TIC et TEC. Ceci exige de résoudre divers problèmes d'interface concernant le transfert de chaleur, jonction des matériaux, contrainte thermique, contact électrique, et isolation sous des conditions thermiques extrêmes.

A/ un réservoir de chaleur gradué(C/C) :

Afin de réaliser une accumulation de chaleur et un transfert efficace à partir des rayons solaires, un FGM composé d'un alignement gradué des fibres de carbone en 3D et une technique d'infiltration de lancement a été développée par Nippon Oil Company Ltd. (Ichiro chiota (1996)).

Les fibres de carbone sont fortement anisotropes concernant la conduction thermique suivant et perpendiculairement à leur longueur. Par conséquent, l'alignement gradué des fibres est conçu pour avoir une densité plus élevée des fibres le long du flux thermique dans les couches internes.

Une pièce tissée de fibres de carbone avec une texture graduée a été infiltrée par un lancement sous pression isostatique chaude (HIP) pour graphiter le lancement et pour densifier la structure. La **(figure I. P1.6 (a))** montre l'alignement gradué des fibres de carbone, tandis que la **(figure I. P1.6 (b))** est une photo d'un réservoir de chaleur gradué et dense en C/C selon la technique (HIP). Des rayons solaires sont concentrés dans ce réservoir par un grand miroir parabolique, et les parois latérales et celles du fond sont uniformément chauffées à 1380°C et à 1680°C respectivement.

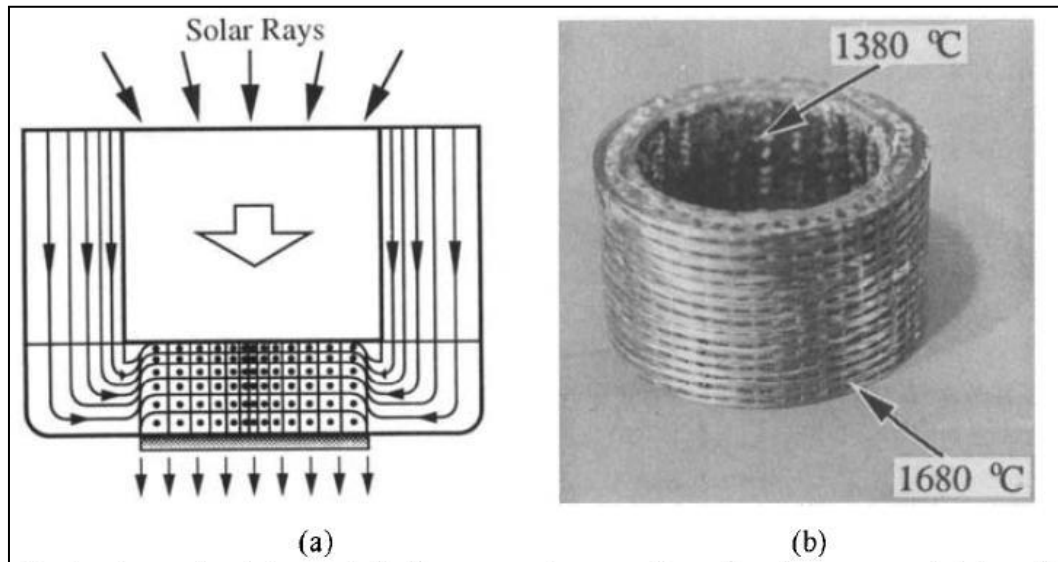


Figure I. P1.6 :(a) Un schéma de l'alignement gradué des fibres de carbone dans un réservoir à chaleur, (b) un réservoir à chaleur graduée de C/C (Ichiro chiota (1996)).

Le réservoir à chaleur est couvert d'un bouclier de radiations fait d'un cylindre fortement poli en monocristal M_0 **(figure I. P1.6)**. Un flux thermique élevé de 1450°C peut être transporté du fond du réservoir jusqu'à la surface arrière de l'électrode d'émission du TIC par les rayons de chaleur.

B/un émetteur gradué TIC (TIC/MO/W/Re) :

Le carbure titanique est un matériau prometteur pour la réception de la chaleur de l'émetteur TIC en raison de son point de fusion élevée (3000° C) et son émissivité élevée (0,9), qui permet

l'absorption efficace de la chaleur d'une bande du spectre solaire à températures élevées. Un enduit gradué de TiC/Mo avec une contrainte thermique basse a été développé en utilisant une technique de jet de plasma en double-pistolet développée à l'institut de recherche national sur les métaux au Japon (Ichiro Chiota (1996)). Il n'a été observé aucune fissure dans cet enduit gradué après chauffage à 1800°C.

L'enduit a été formé par le côté arrière de l'électrode d'émission Mo/W/Re (Ichiro Chiota (1996)). W et Re ont été déposés sur un substrat Mo par CVD. La couche graduée est formée à travers l'inter-diffusion de ces éléments à 2300°C par traitement thermique. W peut agir en tant que barrière de diffusion pour Re par la création d'une gradation compositionnelle stable au-delà de 2000°C.

La (figure I.P1.7) montre la section transversale graduée de cet émetteur en FGM développé par la firme Tokyo Tungstène Co. Ltd. le changement linéaire du coefficient de dilatation thermique pour Re-W et le petit changement pour W-Mo relaxent efficacement la contrainte thermique.

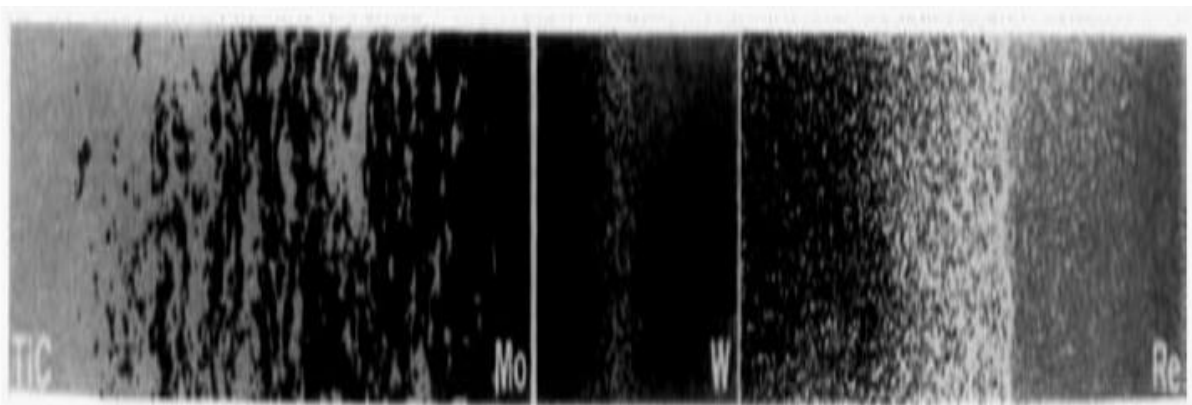


Figure I. P1.7 : Changements microstructuraux de l'émetteur gradué en TiC/Mo W/Re (Ichiro Chiota (1996)).

L'électrode du collecteur a été façonnée au laboratoire électrotechnique en pulvérisant l'oxyde de niobium selon une basse fonction de voltage de 1,38 eV sur l'électrode Mo. Le dispositif TIC avec un maximum de puissance de sortie de 8 W/cm² obtenue à un différentiel de température d'émetteur-collecteur de 1600°C-760°C et une température du réservoir de 330°C est assemblée à Mitui Engineering & Ship Building Co.Ltd. (Ichiro Chiota (1996)).

C/Matériau thermoélectrique gradué en PbTe :

Pour les dispositifs TEC tels que Bi₃Te₂, PbTe, et SiGe, exposés dans le procédé d'ichiro (1996), les calculs théoriques suggèrent qu'il soit possible d'améliorer l'efficacité de conversion d'un pourcentage considérable par la graduation des compositions. La (figure I. P1.8) compare le maximum de puissance de sortie d'un PbTe gradué ayant trois différentes concentrations (A-couche $3.51 \times 10^{25}/\text{m}^3$, b-couche $2.6 \times 10^{25}/\text{m}^3$, c-couche $2.26 \times 10^{25}/\text{m}^3$), fabriqué à l'institut national de recherche sur les métaux au Japon, à celui des compositions homogènes de chaque couche (théorique). Le PbTe avec une graduation du dopant PbI₂ a été préparé en stratifiant des poudres avec trois compositions différentes du dopant, suivies du pressage à chaud. La puissance de sortie a été mesurée en tenant l'électrode de basse température à la température ambiante. Il a été montré que l'échantillon de FGM possède une puissance maximum de 253 W/m pour $\Delta T = 486^\circ\text{K}$, 11% plus grande que la puissance la plus élevée des échantillons non-gradués en stratifiée.

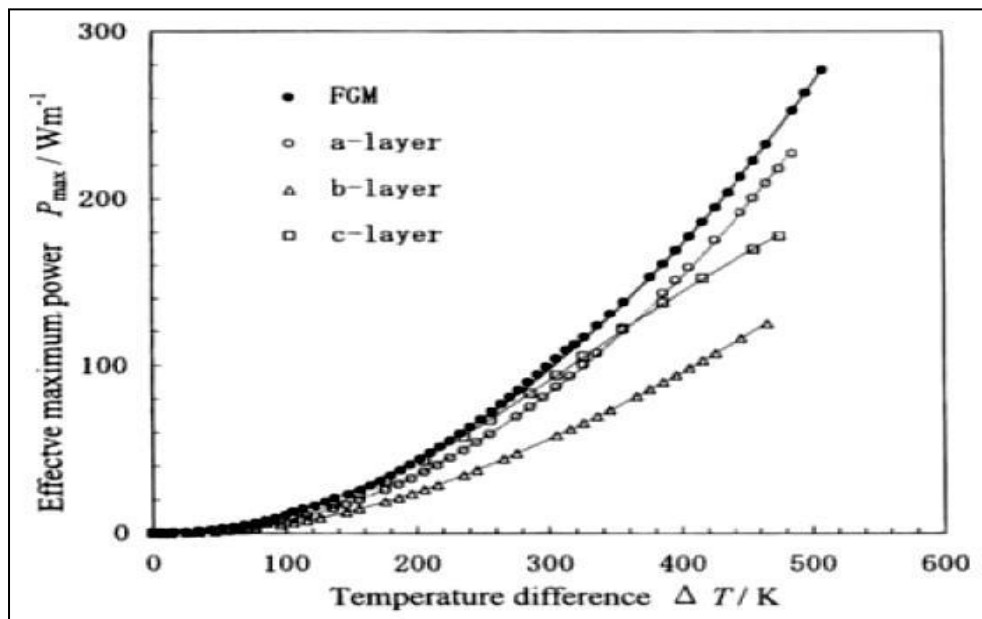


Figure I. P1.8 : Puissance maximum efficace en fonction de la différence de la température pour un FGM trois-couche (Ichiro chiota (1996)).

D/Une électrode symétriquement graduée MoSi₂/Al₂O₃/Ni/Al₂O₃/MoSi₂ pour un TEC SiGe :

Dans le cas du dispositif TEC, MoSi₂ est prometteur comme électrode à hautes températures pour les matériaux thermoélectriques tels que SiGe parce qu'il a un point de fusion élevée

(2030°C), avec une résistivité appropriée de $(1.7 \cdot 10^{-4} \Omega\text{-cm}$ à 1000 °C), et une excellente résistance à l'oxydation. Cependant, sa dureté mécanique ($3\text{-}4 \text{ MPA}\cdot\text{m}^{1/2}$) est faible. Pour façonner des électrodes dures, une électrode symétriquement graduée de MoSi₂/Al₂O₃/Ni/Al₂O₃/MoSi₂ (représenté sur la **figure I.P1.9**) a été fabriquée à l'université d'Osaka à l'aide d'une combinaison d'auto propagation d'une synthèse à hautes températures et de HIP (SHS/HIP).

Cette structure symétriquement graduée produit une contrainte résiduelle compressive de 100 MPA à la couche externe de MoSi₂ due à une dilatation thermique inadéquate entre les couches externes et internes, ayant pour résultat le renforcement du MoSi₂ jusqu'à 5,8 MPA m^{1/2}. Al₂O₃ agit en tant que barrière de diffusion contre le Ni à environ 800 °C. Un aperçu des expériences avec la diffusion de Ni dans une structure de FGM à températures élevées suggère qu'à 800°C il y aura peu de formation de couches réactives pendant au moins 10 années. Cette électrode symétrique en FGM a été jointe à SiGe par la firme (Mitsubishi Heavy Industries Ltd) en utilisant des inters couches en poudres Ge et W et des feuilles Zr-Ni à 1000°C (Ichiro chiota (1996)).

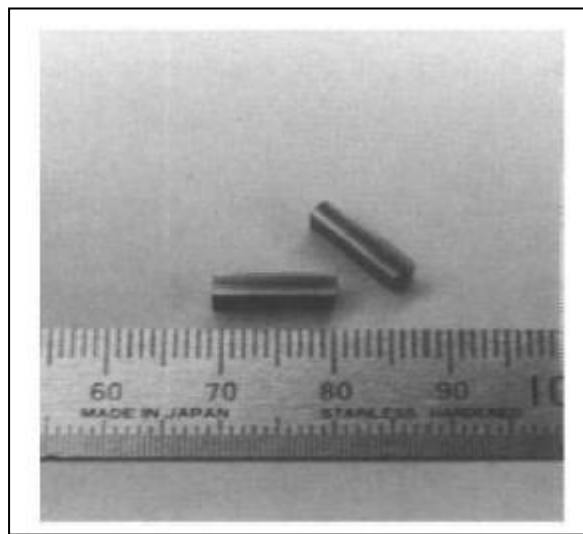


Figure I. P1.9: Photo des électrodes symétriques graduées de MoSi₂/Al₂O₃/Ni/Al₂O₃/MoSi₂ fabriquées à l'université d'Osaka pour un dispositif de SiGe (Ichiro chiota (1996)).

E/Matériau radiatif gradué AlN/W :

Pour l'utilisation des dispositifs TIC et TEC ou leur combinaison dans l'espace, le refroidissement par rayonnement est exigé. Au Sumitomo Electric Industries, Ltd. Au Japon, un matériau radiatif unique fait d'un composé d'une matrice en céramique AlN contenant une dispersion graduée des particules fines de W, fabriqué par frittage à 1800°C. L'AlN dense possède

une conductivité thermique élevée (200 W/mK), il est transparent aux longueurs d'ondes du visible à l'infrarouge. D'autre part, W a une émissivité élevée (0,9) pour les ondes infrarouges. Une partie de la chaleur écoulee, conduite à partir du TEC vers AIN, peut être reflétée par les particules W, comme illustré sur la (**figure I. P1.10**) Une émissivité élevée de 0,97 a été calculée et mesurée quand une forte concentration de particules de W ont été dispersées près de l'interface avec TEC, et la concentration a été graduellement diminuée vers l'autre extrémité.

Suivant les indications de la (**figure I. P1.11**) la structure graduée AIN/W, qui peut satisfaire à la fois une conduction thermique élevée et une émissivité élevée, possède différentes caractéristiques comparées aux matériaux conventionnels (Ichiro chiota (1996)).

Dans ce programme, la nouvelle enquête a été effectuée principalement sur les sujets suivants :

1. Modélisation et évaluation des matériaux thermoélectriques gradués ;
2. Synthèse des graduations p et n type (Bi_3Te_2 , PbTe, et SiGe) avec une efficacité de conversion plus élevée ;
3. La fabrication des segments et des cascades de TEC avec des pertes d'énergie faibles au niveau des interfaces ;
4. fabrication des TIC avec les électrodes graduées qui ont une efficacité de conversion au-dessus de 15%.
5. Stabilité des structures graduelles de propriétés aux températures élevées.

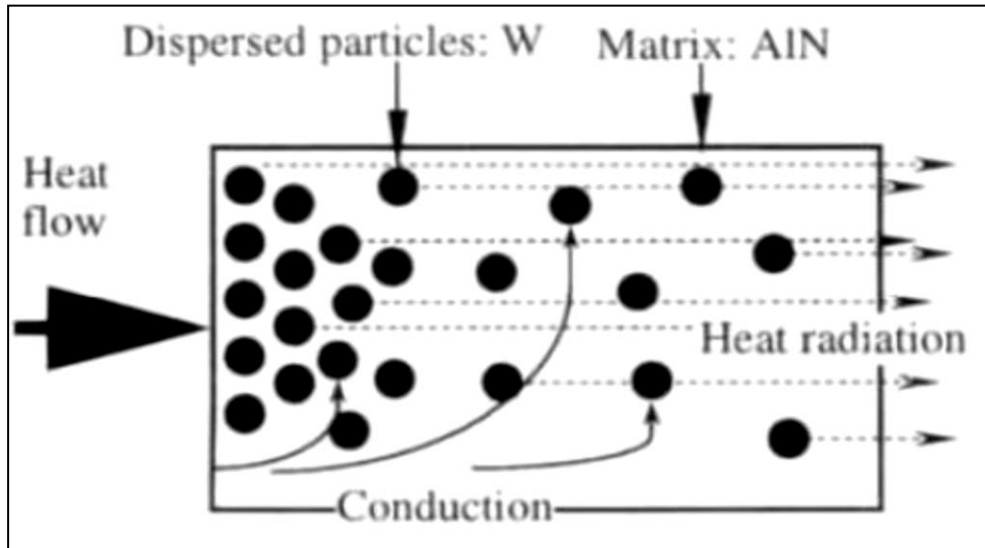


Figure I. P1.10 : Schématisation d'un matériau très radiatif composé d'une matrice AlN contenant une dispersion graduelle des particules fines W (Ichiro chiota (1996))

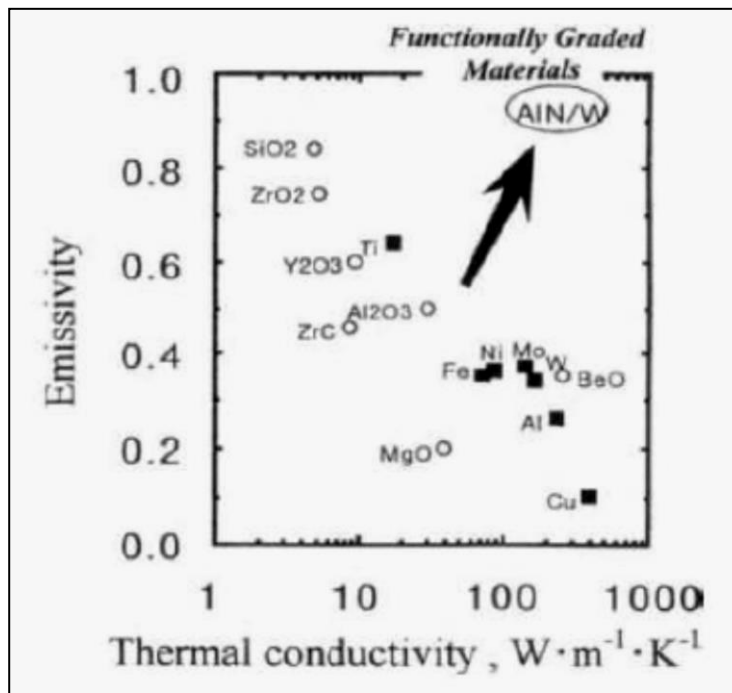


Figure I. P1.11: La relation entre la conduction thermique et l'émissivité (Ichiro chiota (1996)).

I. P1.4. Méthodes d'élaboration des FGM :

L'obtention des qualités désirées nécessite de plus l'intervention de techniques sophistiquées et subtiles comme l'utilisation de lasers, de plasmas, l'implantation ionique, de dépôts en phase vapeurs, etc.

Les procédés de fabrication d'un matériau à gradient évalués peuvent habituellement être divisés en construisant la structure dans un espace hétérogène (mélange graduel) et la transformation de cette structure en matériau en bloc (solidification).

Les processus de mélange graduel peuvent être classés suivant ses constituants, l'homogénéisation et la ségrégation. Les procédés élémentaires sont basés sur la fabrication par étape de structure en matériaux graduels précurseurs ou poudres. Les avancés en technologie d'automatisation durant les dernières décennies ont rendu des processus élémentaires de progression technologiquement et économiquement durables. Dans la procédure d'homogénéisation qui traite une interface pointue entre deux matériaux est convertie dans un gradient par transport matériel. Les procédés d'homogénéisation et de ségrégation produisent un gradient continu, mais ont des limitations au sujet des types de gradients qui peuvent être produits.

Habituellement, le séchage et la solidification suivent les étapes du mélange graduel. Le besoin de ces processus de consolidation doit adapter aux FGM :

- Des conditions de procédure choisie pour ne pas altérer ou détruire le gradient en mode non contrôlé.
- Prêter attention à tout rétrécissement inégal du FGM pendant la consolidation.

Ces dernières années, les travaux menés au laboratoire ont permis de développer une méthode originale pour élaborer des composites à gradient continu de composition. Cette méthode est basée sur une technique de Co-sédimentation de poudres en milieu proportionnelle à la densité du matériau et au carré du diamètre de particule. En contrôlant et en adaptant les répartitions granulométriques de chaque poudre, il est possible d'obtenir différents gradient de concentration dans le dépôt formé à l'issue de sédimentation.

Il existe de nombreuses méthodes d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés, les techniques les plus employées sont brièvement expliquées ci-dessous :

I. P1.4.1. Coulage en Bande (Tape Casting ou Doctor-Blade) :

Le coulage en bande consiste à couler une barbotine de poudres fines en suspension aqueuse ou non-aqueuse (la plupart des travaux commerciaux utilisent le procédé non-aqueux) sur un support plan en couches minces et régulières. Selon les cas, c'est soit la lame (doctor-Blade) qui est animée d'un mouvement de translation, soit le support qui se déplace sous la lame (**figure I. P1.12**).

Les produits obtenus sont des feuillets avec des épaisseurs contrôlées (25-1000 μm). Après un raffermissement de la pâte, les feuillets sont démoulés et ensuite découpés.

Le solvant doit avoir un point d'ébullition très bas et une viscosité faible. Il doit être soluble avec le liant le plastifiant et les autres ajouts, mais ne doit être ni soluble ni réactif avec la poudre céramique. Le liant donne une grande résistance mécanique au produit cru en permettant son maniement. Généralement un plastifiant est ajouté au liant pour baisser sa viscosité. Les liants (Plastifiants et dé flocculant) doivent être totalement dégagés pendant le délainage.

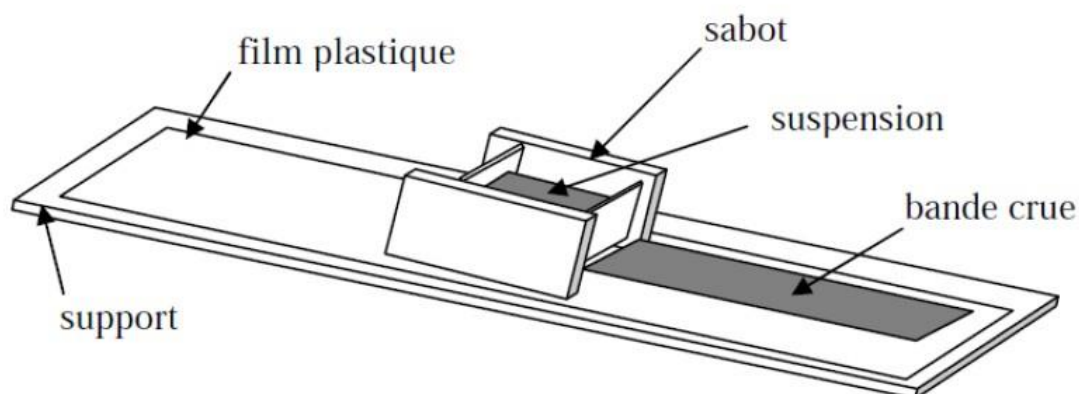


Figure I. P1.12 : Principe de la méthode coulage en bande.

L'un des plus anciens travaux sur l'étude de cette technique a été publié par Howatt et al. En 1947, et depuis d'autres travaux ont été réalisés (Boch. P Chartier. Huttepain. M (1986)). Ce procédé est devenu une technique économique pour la production des substrats céramiques de type Al_2O_3 et surtout pour les condensateurs à base de BaTiO_3 . On peut d'ailleurs

remarquer qu'il s'agit déjà de F.G.M puisqu'il faut empiler des couches conductrices (métaux rares) avec des couches diélectriques (BaTiO₃ principalement).

Le procédé de coulage en bande est largement utilisé pour réaliser des matériaux composites laminaires suivant deux méthodes :

- Réalisation directe de bandes multicouches grâce à un système de lames multiples c'est le cas des tri-couches élaborées par Mistler(1973).
- Empilement des couches élaborées séparément dont la cohésion est ensuite assurée par une étape de thermo compression (Boch. P Chartier. Huttepain. M (1986)).

I. P1.4.2. Coulage Séquentiel en Barbotine (Slip Casting) :

Le coulage en Barbotine (Slip Casting) consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, laissant un tesson (couche de poudre compacte) sur la surface du moule .Après séchage, on obtient le corps en cru .Donc le coulage se effectué en deux étapes essentielles :

- Formation du tesson ou « prise ».
- Consolidation du tesson « raffermissment ».

La filtration, c'est à dire la formation du tesson lors du coulage, peut être considéré comme un processus d'élimination d'une partie de l'eau de la barbotine ; Cette eau migre à travers la couche de tesson déjà formée, sous l'effet :

- du pouvoir de succion du plâtre (coulage classique) ;
- ou d'une pression appliquée sur la barbotine (coulage sous pression).

Dans le cas de la fabrication de multicouches, après la formation du premier tesson, le dépôt de la deuxième couche s'effectue de manière telle que la barbotine ne pénètre pas dans le tesson formé. Ce procédé est successivement reproduit pour les autres couches.

I. P1.4.3. Compaction Sèche des Poudres :

Cette technique consiste à verser successivement dans un moule en acier les poudres, et à chaque fois qu'une poudre est versée une faible compression est exercée.

Ensuite la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Ce procédé est suivi généralement par une pression isostatique et un délainage. La densification sera enfin l'étape finale (Bishop, a et al (1993)). Ce procédé peut être envisagé pour la fabrication de pièces de formes complexes.

En effet il s'applique aussi avec la technique du pressage isostatique, et de façon industrielle.

I. P1.4.4. Dépôt par Électrophorèse :

Le dépôt par électrophorèse est un procédé dans lequel une suspension colloïdale stable est placée dans une cellule contenant deux électrodes, le dépôt se fait par le mouvement des particules chargées au sein de la solution vers la cathode ou l'anode selon le signe de la charge des particules due à un champ électrique. L'élaboration des F.G.M peut se faire donc par le dépôt séquentiel des matériaux (Abdizadeh H (1997)).

I. P1.4.5. Projection Plasma :

Un gaz soumis à une forte température (par exemple celle d'un arc électrique), se transforme en un état ionisé (plasma). Cette transformation est accompagnée d'un dégagement de chaleur important. Si une particule de céramique se trouve dans cet environnement, elle se fond totalement ou superficiellement, ce qui permet de la situer sur un substrat. La projection plasma des particules des divers matériaux est devenue une méthode très utilisée pour fabriquer des FGM. L'équipement relativement simple, le rendement élevé du dépôt des particules sur des substrats à géométrie compliquée, les performances des surfaces en fonctionnement et la compatibilité des céramiques avec les métaux sont les avantages essentiels de cette technique (Steffes.H.D. DvorakM.Wewel. (1990)).

I. P1.4.6.C. V. D. et P. V. D :

Les dépôts chimique ou physique en phase vapeur sont des techniques dans lesquelles les atomes du matériau sont déposés sur la surface du substrat. Les techniques de C.V.D. et P. V. D. peuvent être utilisées pour façonner un F.G.M sur des substrats de formes compliquées.

I. P1.4.7. Frittage et Infiltration :

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes :

- La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité.
- La seconde étape est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration.
- Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique.

Cette technique peut être généralement appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres.

I. P1.4.8. Frittage Laser Différentiel :

Le rayonnement thermique du laser permet le contrôle de la température et la focalisation du point à chauffer. La différence de l'intensité de l'irradiation sur différents points du matériau, provoque un frittage différentiel le long de la pièce, ce qui résulte en des microstructures différentes, dépendant de la position du point irradié. Cette technique a été utilisée pour élaborer un F.G.M de PSZ/Mo. La (**figure I. P1.13**) montre schématiquement la disposition du procédé utilisé par ces auteurs.

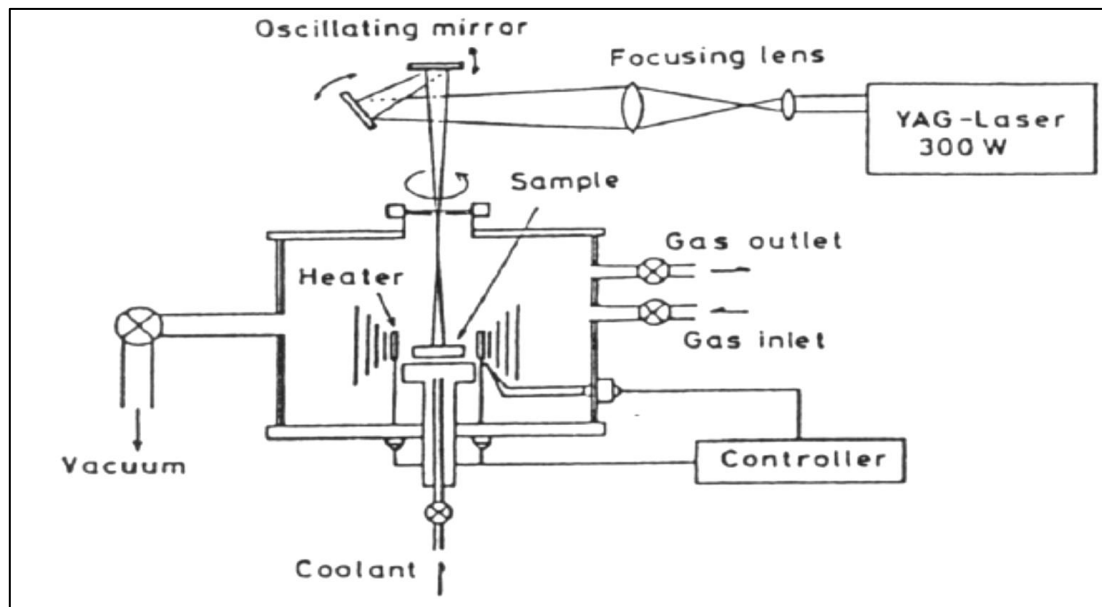


Figure I. P1.13 : Disposition du procédé frittage laser différentiel.

I. P1.4.9. Implantation Ionique :

C'est une technique avancée pour la fabrication des F.G.M permettant de réaliser seulement des épaisseurs fines ($<1\mu\text{m}$) sur différents substrats (plastiques, céramiques, et métaux). Le traitement s'effectue par les faisceaux énergétiques d'ions ou via des gaz réactifs. Les couches fabriquées présenteront un gradient de composition qui peut être très finement contrôlé (Abdizadeh H (1997)).

I. P1.4.10. Dépôt par Centrifugation :

La technique consiste à verser une suspension colloïdale relativement diluée dans des flacons cylindriques, le tout est soumis à une centrifugation. La sédimentation s'opère et le liquide surnageant est retiré. Ce procédé est répété pour obtenir des multicouches (**figure. I. P1.14**) (Abdizadeh H (1997)).

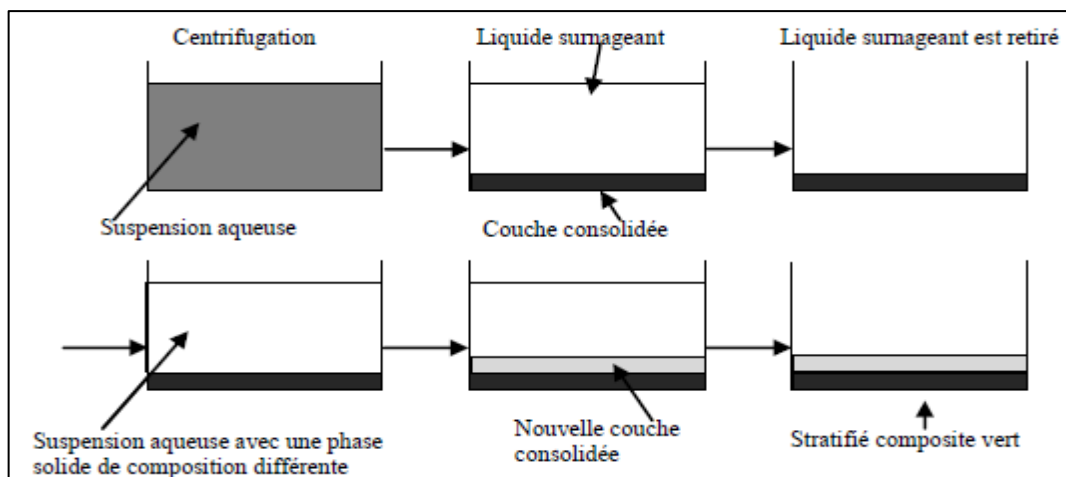


Figure I. P1.14 : Schéma du procédé dépôt par centrifugation (Abdizadeh H (1997)).

I. P1.5. Propriétés physiques et mécaniques des FGM :

La plupart des « FGM » sont constitués de céramique et de métal dont les propriétés mécaniques sont comparées dans le **tableau I. P1.1**.

Tableau I. P1.1: comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.

La face à haute température	Céramique	-Bonne résistance thermique ; -Bonne résistance à l'oxydation ; -Faible conductivité thermique.
Continuité du matériau d'un point à l'autre « couches intermédiaires »	Céramique-métal	-Élimination des problèmes de l'interface ; -Relaxer les contraintes thermiques.
La face à basse température	Métal	-Bonne résistance mécanique ; -Conductivité thermique élevée, -Très bonne ténacité.

I. P1.5.1. Propriétés physiques du métal :

Définition : L'Aluminium est un métal blanc qui après polissage peut devenir réfléchissant.

- **Propriétés physiques :** L'Aluminium a une température de fusion relativement basse d'environ 660°. Il en résulte une facilité de fusion qui présente un avantage certain pour les opérations de fonderie. L'Aluminium est très ductile, on peut aisément le mettre en forme. La masse volumique de l'Aluminium est de 2700 kg/m³. L'utilisation de l'Aluminium s'impose donc dans les domaines aéronautiques et du transport.
- **Propriétés mécaniques :** Les propriétés mécaniques des métaux présentent un grand intérêt dans la vie quotidienne, elles peuvent être classées en deux groupes :
 - Celles qui se rapportent à la résistance mécanique du métal :
 - Résistance à la traction.
 - Résistance à la pénétration (dureté).
 - Celles qui concernent les modifications de forme que le métal peut subir sans se briser :
 - La malléabilité (mises en feuilles).
 - La ductilité (mise en fils).
- **Propriétés des alliages d'aluminium :** L'Aluminium a pour propriétés une :
 - Température de travail élevée.

- Très bonne résistance à la corrosion.
 - Légèreté.
 - Très bonnes solidités, dureté et rigidité.
 - Bon rapport force/poids.
 - Bonnes propriétés de protection contre les interférences électromagnétiques.
 - Bonne conductivité thermique.
 - Conductivité électrique élevée.
 - Bonnes caractéristiques de finition.
 - Entièrement recyclable.
- **Résistance à la corrosion** : Grâce à la couche d'oxyde qui se forme en surface, les alliages d'Aluminium résistent à la corrosion. On peut rendre cette couche protectrice d'oxyde plus épaisse par galvanisation. L'Aluminium et ses alliages peuvent être utilisés sans protection supplémentaire comme revêtement extérieur de bâtiments. Par contre dans les milieux corrosifs, les alliages d'Aluminium peuvent subir les effets de la corrosion. Des piqures, de la corrosion sous contrainte, de la fatigue corrosion, voire de la corrosion généralisée peuvent se développer. Pour des conditions données, la sévérité de l'attaque dépend de l'alliage utilisé et de son état.

I. P1.5.2. Propriétés physiques de la céramique :

- **Définition** : La céramique résulte des terres et des roches broyées (matériaux géologiques) ou bien d'une argile qui sera modelée puis cuite sous haute température (transformation irréversible) ce qui fait perdre au matériau sa plasticité donc il ne peut plus se réhydrater.
- **Propriétés physiques** : La céramique a une facilité de fusion qui présente un avantage certain pour les opérations de fonderie. La masse volumique de la céramique est de **3800 kg/m³**. L'utilisation de la céramique s'impose dans les domaines de l'habitat et du design, l'industrie céramique et métallurgique, aéronautique et spatial, médicale et dans les revêtements.
- **Propriétés mécaniques** : Les propriétés mécaniques du céramique dépendent des :
- Matières première employées.

- Méthodes de fabrication qui fixent les microstructures finales et déterminent la répartition des différentes phases en présence.
- Un module de YOUNG élevé (Liaisons, covalente, ioniques).
- Une dureté élevée (Abrasif, outils de coupe, surfaces de frottement qui doivent résister à l'usure, résistance mécanique élevée, bonne tenue à chaud, rigidité élevée).
- Une très bonne résistance à la compression non à la traction (Résistance à la compression = 200 MPa).

I. P1.6. Domaines d'applications des matériaux fonctionnellement gradués :

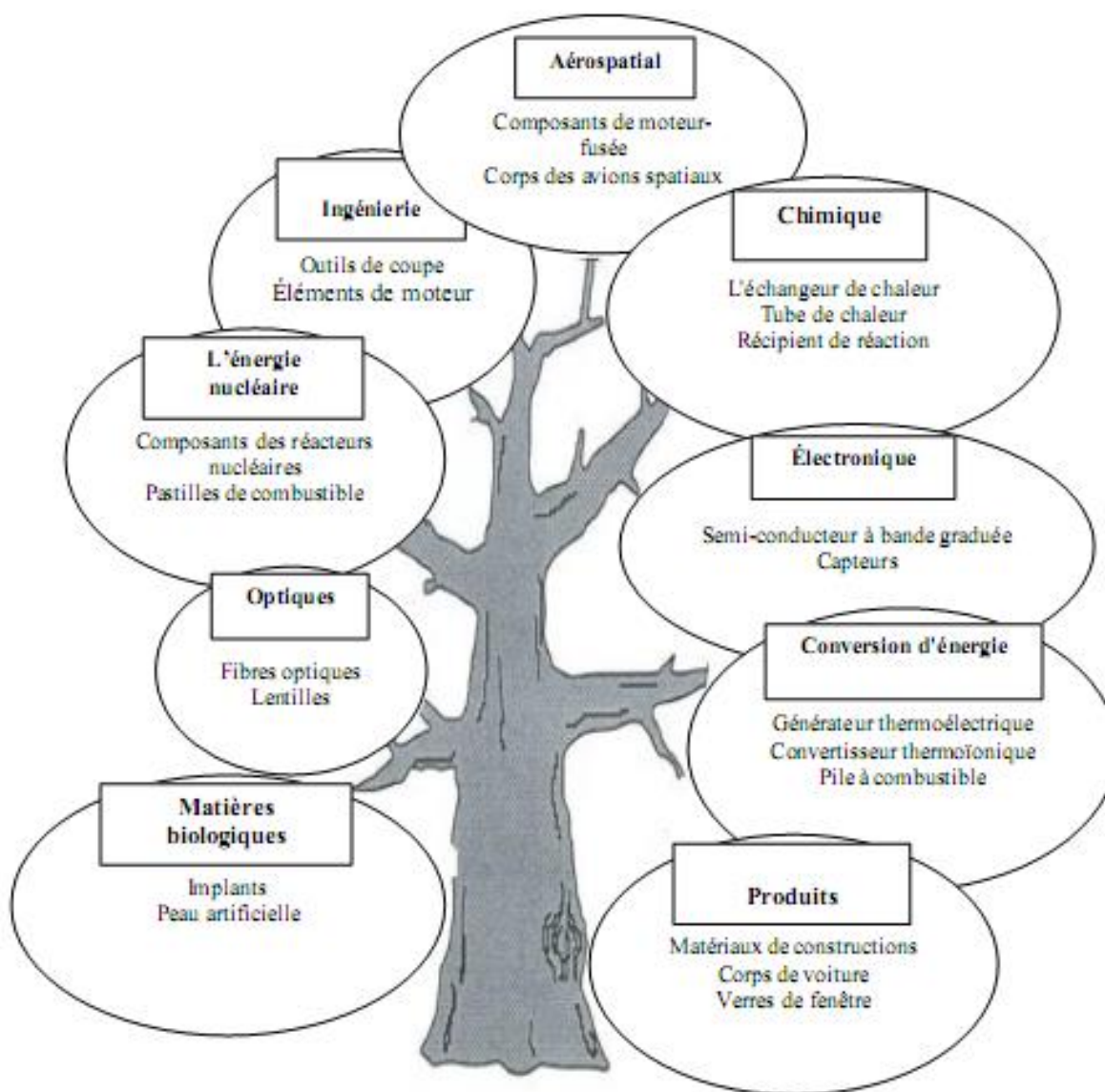


Figure I. P1.15 : Les principaux domaines d'application des FGM

Le concept des matériaux à gradient évalués FGM est applicable dans des nombreux et larges intervalles de domaines tels que les matériaux de construction, matériaux de conversion d'énergie, aéronautique, aérospatiale, nucléaire et semi-conducteurs. Ainsi, ces matériaux ont deux propriétés contradictoires : la conductivité thermique et l'isolation thermique. Actuellement, ils permettent la production des matériaux légers, résistants et durables.

Les principaux domaines d'application des FGM sont :

- **Génie civil** : ponts à poutre en caisson, les cheminées, les fondations élastiques (ces structures de plaques peuvent être trouvées dans différents types d'applications industrielles telles que radiers), réservoirs de stockage, les piscines, les tunnels, Les grands vitrages dans les zones chaudes.

I. P1.7. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM :

Les matériaux à gradient fonctionnel « FGM » consistent en l'association de deux ou plusieurs matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent.

Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non- uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace.

Un des paramètres clé à déterminer lors de la fabrication de ces matériaux est la composition multi phase à travers l'épaisseur.

La dépendance des propriétés de la position se traduit par la prise en compte de la loi des mélanges correspondant au modèle de Voigt (Shen 2009).

$$P = \sum_{i=1}^n P_i V_i \quad \text{(I.P1.1)}$$

Avec P_i et V_i sont respectivement la propriété mécanique et la fraction volumique du constituant i , avec :

$$\sum_{i=1}^n V_i = 1 \quad (\text{I.P1.2})$$

Dans la pratique, la plupart des structures FGM sont à deux constituants : de la céramique et du métal inoxydable en général. Dans ce cas, la loi de Voigt se réduit à :

Avec :
$$P = P_1V_1 + P_2V_2 \quad (\text{I.P1.3})$$

$$V_1 + V_2 = 1 \quad (\text{I.P1.4})$$

Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume. Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure.

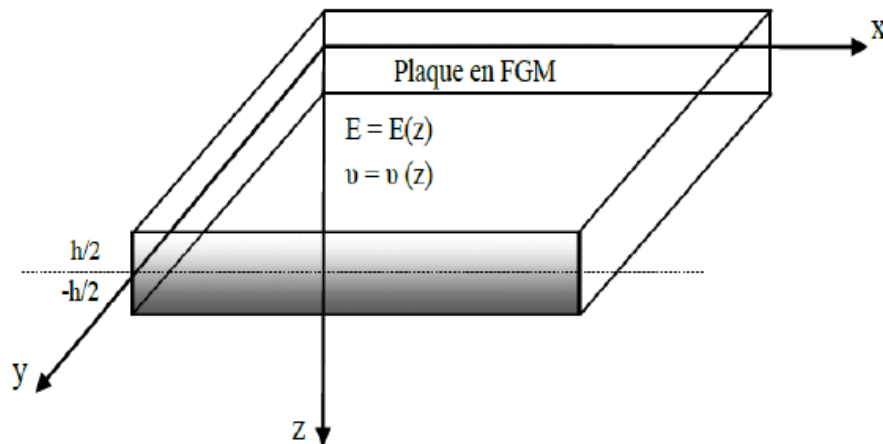


Figure I. P1.16: Les dimensions de la plaque FGM.

Les coordonnées x et y définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe z est perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque et dans la direction de l'épaisseur.

Les propriétés du matériau dont le module de Young et le coefficient de Poisson sur les faces supérieures et inférieures sont différentes. Ils varient de façon continue, suivant l'épaisseur

(l'axe z) soit : $E = E(z)$ et $\nu = \nu(z)$.

Jin et Batra (1996) indiquent que l'effet du coefficient de poisson sur les déformations est négligeable comparativement à celui du module de Young. Par conséquent, le coefficient de Poisson peut être supposé comme constant. Cependant, Le module de Young dans la direction de l'épaisseur de la plaque FGM varie en fonction de la loi de puissance (P-FGM), la fonction exponentielle (E-FGM) ou avec la fonction sigmoïde (S-FGM).

I. P1.7.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM :

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance comme suit :

$$g(z) = \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^p \quad (\text{I. P1.5})$$

Où P est un paramètre du matériau et h est l'épaisseur de la plaque. Une fois que la fraction de volume local $g(z)$ est définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges :

$$S(z) = g(z) \cdot S_1 + [1 - g(z)] \cdot S_2 \quad (\text{I. P1.6})$$

Où S_1 et S_2 sont respectivement les propriétés matérielles (modules de Young ou densité) de la surface inférieure ($z = h/2$) et de la surface supérieure ($z = -h/2$) de la plaque FGM. La variation de ces propriétés dans la direction de l'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la (**figure I. P1.17**) il apparaît clairement que la fraction volumique change rapidement près de la surface inférieure pour $P \succ 1$, et augmente rapidement près de la surface supérieure pour $P \prec 1$.

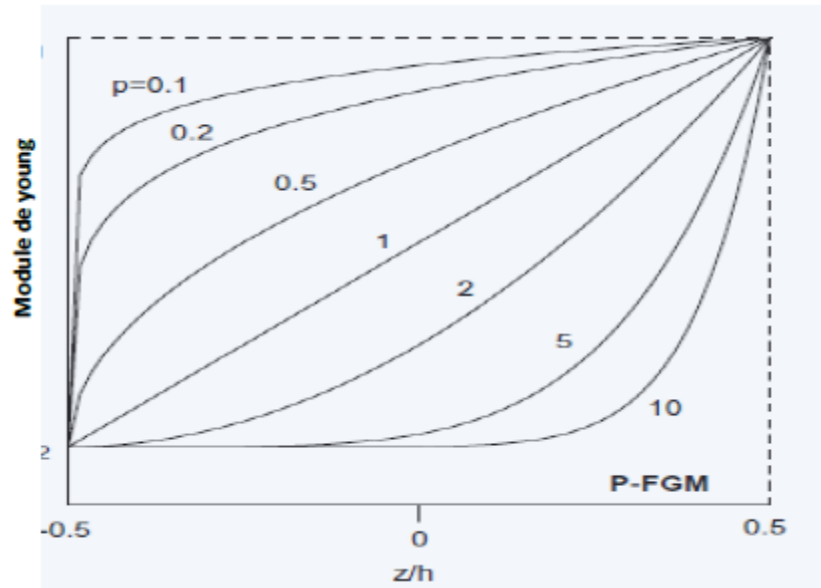


Figure I. P1.17 : Variation du module Young dans une plaque P-FGM.

I. P1.7.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM :

Si l'on rajoute une plaque P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interface des deux matériaux. Par conséquent, Chung et chi ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par :

$$g_1(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - z}{h/2} \right)^p \quad \text{pour} \quad 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I. P1.7.a})$$

$$g_2(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 + z}{h/2} \right)^p \quad \text{pour} \quad -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I. P1.7.b})$$

En utilisant la loi des mélanges, la propriété S de la plaque S-FGM peut être calculé

$$S(z) = g_1(z).S_1 + [1 - g_1(z)].S_2 \quad \text{pour} \quad 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I. P1.8.a})$$

$$S(z) = g_2(z).S_1 + [1 - g_2(z)].S_2 \quad \text{pour} \quad -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I. P1.8.b})$$

La (**figure I. P1.18**) montre que la variation du module de Young selon les équations (**I. P1.8.a**) et (**I. P1.8.b**) avec des distributions sigmoïdes, donc la plaque FGM est ainsi appelée (Plaque S-FGM).

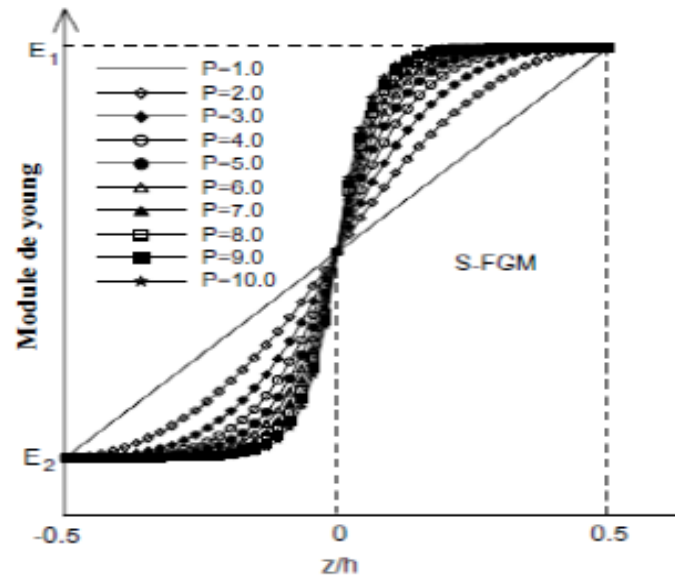


Figure I. P1.18 : La variation du module de Young dans une plaque S-FGM.

I. P1.7.3. Propriétés matérielles de la plaque E-FGM :

Beaucoup de chercheurs utilisent la fonction exponentielle pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la fonction exponentielle est donnée par [Delale 1983] :

$$S(z) = A.e^{B.(z+h/2)} \quad (\text{I. P1.9.a})$$

Avec

$$A = S_2 \quad \text{et} \quad B = \frac{1}{h} \cdot \ln\left(\frac{S_1}{S_2}\right) \quad (\text{I. P1.9.b})$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans la (**figure I. P1.19**).

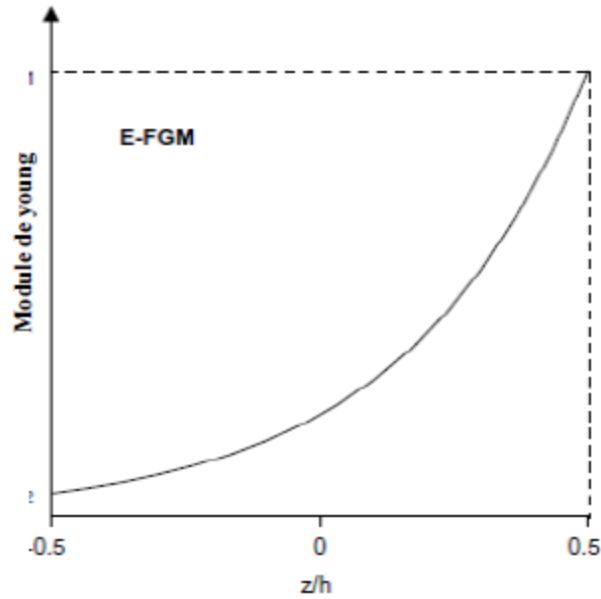


Figure I. P1.19 : La variation du module de Young dans une plaque E-FGM.

I. P1.8. Conclusion :

Dans cette partie, nous avons défini les matériaux à gradients fonctionnel « FGM », l'histoire de leur développement, leurs propriétés et leurs domaines d'application, et les différentes méthodes d'élaboration de ces matériaux, et ensuite on s'est intéresser aux différentes lois possibles qui servent à décrire la variation des propriétés matérielles du matériau suivant l'épaisseur d'une plaque FGM.

Deuxième partie
Investigation
sur
les différentes théories
des plaques

Deuxième Partie : Investigation sur les différentes théories des plaques

I.P2.1. Introduction :

Afin de résoudre les problèmes des structures ayant comme éléments structuraux des poutres et des plaques FGM dans le domaine élastique, il est nécessaire de choisir la bonne théorie décrivant correctement le comportement statique et dynamique de la structure ainsi que la méthode de résolution à appliquer.

Durant ces dernières années, plusieurs modèles bidimensionnels ont été développés pour la modélisation des structures multicouches tenant compte des cisaillements transverses. Ils peuvent être regroupés en fonction du type d'approche adopté :

- Approche monocouche équivalente.
- Approche par couche.
- Approche développement asymptotique.

I.P2.2. Les Différents Modèles des structures composites dans l'élasticité bidimensionnelles:

I. P2.2.1. Approche monocouche équivalente :

Dans l'approche monocouche équivalente, le nombre d'équations ne dépend pas du nombre de couche, la plaque multicouche est homogénéisée et est donc considérée comme une seule couche.

Depuis le premier travail de Sophie Germain en 1815 sur les plaques minces en passant par les modèles du premier ordre de Love-Kirchhoff et de Reissner-Mindlin, de nombreux auteurs ont développé des théories de plaques à partir de cinématiques ou champs de contraintes plus raffinés. Nous passons en revue, dans ce qui suit, les principaux modèles.

I.P2.2.1.1. Les modèles classiques Love-Kirchhoff (théorie classique des plaque stratifiées CLPT) :

En commence par le model le plus simple est le plus général appelé model de Love-Kirchhoff. Ce modèle est basé sur une distribution linéaire des déplacements suivant l'épaisseur (E. Reissner & Y. Stavsky (1961)). L'hypothèse adoptée est celle de Love-

Kirchhoff (G. Kirchhoff (1850)) des contraintes planes, les déformations dues au cisaillement transverse sont négligées. La normale à la surface moyenne de la plaque reste perpendiculaire et droite à celle-ci après déformation (**Figure. I. P2.1**).

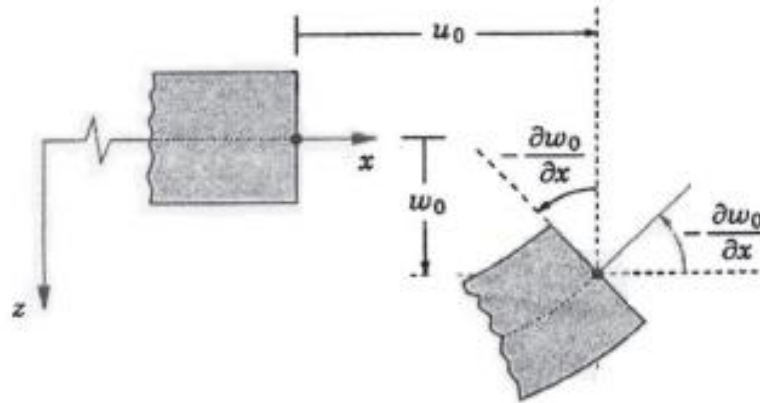


Figure I. P2.1 : Cinématique de Love-Kirchhoff.

Le champ de déplacements de Love-Kirchhoff s'écrit alors,

$$\begin{cases} u_{\alpha}(x_1, x_2, x_3 = z) = u_{\alpha}^0(x_1, x_2) - z w_{,\alpha}(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases}, \alpha = 1, 2 \quad \text{(I.P2.1)}$$

Avec :

u_{α}^0 : Le déplacement de membrane dans la direction α .

w : La flèche de la plaque.

$w_{,\alpha}$: La rotation due à la flexion (sans cisaillement).

I. P2.2.1.2. Les modèles Reissner-Mindlin (théorie de déformation en cisaillement du premier ordre FSDT) :

Le cisaillement transverse ne peut être négligé, sa prise en compte est adoptée par Mindlin dont l'hypothèse cinématique est la suivante :

La normale reste droite mais non perpendiculaire à la surface moyenne (à cause de l'effet du cisaillement transverse) dans la configuration déformée (**Figure. I. P2.2**). Le champ de déplacements de Reissner-Mindlin s'écrit :

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) = u_\alpha^0(x_1, x_2) - z\phi_{,\alpha}(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases} \quad (\text{I.P2.2})$$

Avec,

ϕ_α : La rotation de la normale au plan moyen autour des axes x_α ,

$\gamma_\alpha^0 = (w_{,\alpha} + \phi_\alpha)$: La déformation de cisaillement transverse mesurée sur le plan moyen.

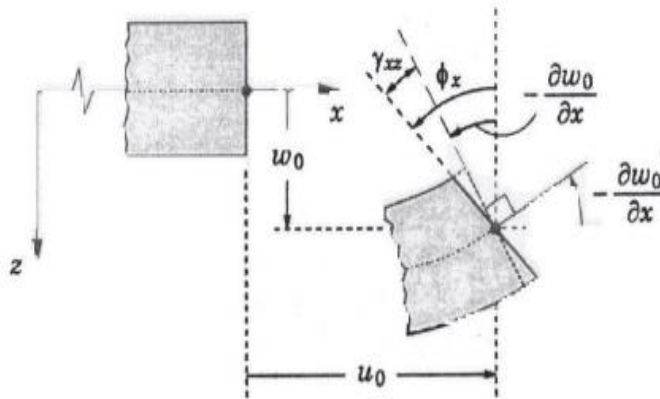


Figure. I. P2.2 : Cinématique de Reissner-Mindlin.

Avec ce choix de la forme des champs de déplacements, les déformations transversales γ_α^0 sont constantes en z . Les contraintes de cisaillement sont donc uniformes à n'importe quel point suivant l'épaisseur et ça évitent la discontinuité entre les couches dans les composites conventionnels. Cette mauvaise description d'uniformité de distribution des contraintes oblige à introduire des coefficients correcteurs pour mieux prendre en compte, dans l'écriture de l'énergie, les effets du cisaillement transversal (J.M. Whitney (1973)). Les résultats obtenus dépendent essentiellement du choix empirique dans des situations complexes des coefficients correcteurs et l'étude des plaques épaisses reste aléatoire par ce type d'approche cinématique.

La (**figure. I. P2.3**) montre la variation de la forme de fonction ainsi que sa dérivée par rapport à l'épaisseur de la plaque. Cette variation est plus authentique pour le cas des plaques stratifiés ou au niveau de l'interface il y a une discontinuité de distribution des propriétés alors que pour les FGM ce problème est résolu.

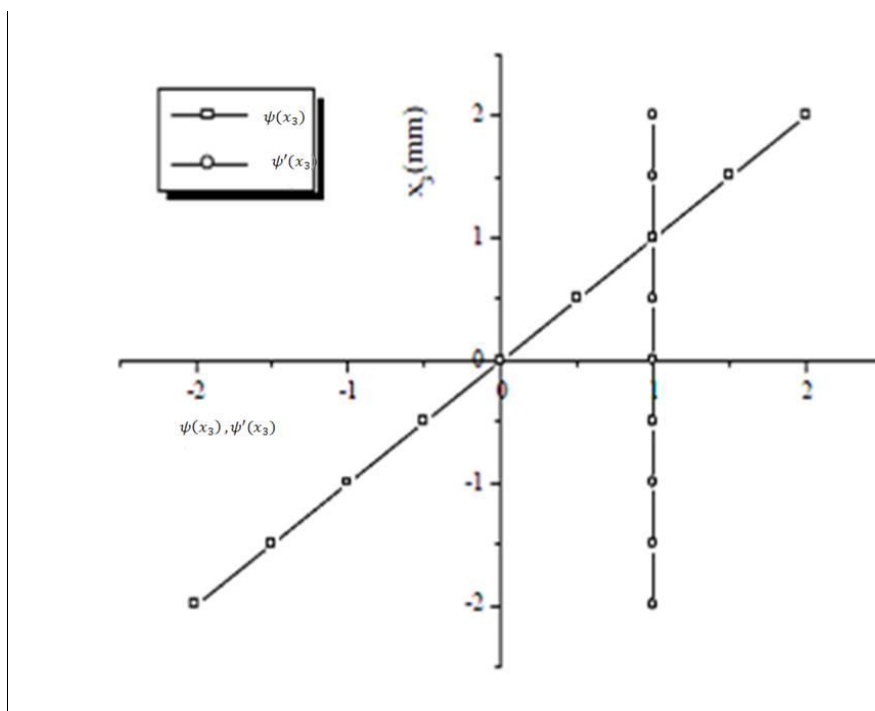


Figure. I. P2.3: Variation de la fonction de gauchissement suivant l'épaisseur.

I. P2.2.1.3. Les modèles d'ordre supérieur :

Pour franchir les limites des théories du premier ordre, plusieurs auteurs proposent des théories à un ordre supérieur. Les modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs suivant l'épaisseur. Ces modèles permettent de représenter le gauchissement de la section dans la configuration déformée (**Figure. I.P2.4**) (L. Liberscu (1967), J.M. Whitney (1973), M. Touratier (1991), Viet.Tung. Nguyen (2004)). La plupart des modèles d'ordre supérieur utilisent un développement en série de Taylor des champs de déplacements qui s'écrivent de la forme :

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = u_i^0(x_1, x_2) + z\phi_i^{0(1)}(x_1, x_2) + z^2\phi_i^{0(2)}(x_1, x_2) + z^3\phi_i^{0(3)}(x_1, x_2) + z^4\phi_i^{0(4)}(x_1, x_2) + \dots \tag{I.P2.3}$$

Partons de ce principe, nous pouvons utiliser différents ordres, en fonction de la complexité du problème et de la précision souhaitée. La plupart des études sont basées sur un développement en 3ème ordre, assurant ainsi un niveau minimum de complexité. La valeur de $\phi_j^{0(i)}$ détermine la nature de la théorie. Ainsi, la théorie du premier ordre de Reissner-Mindlin est obtenue en posant : $\phi_i^{0(j)} = 0$ pour $j = 2,3,4$ et $\phi_3^{0(1)} = 0$.

En principe, ces modèles d'ordre supérieur sont plus précis que les modèles du premier ordre. La précision augmente avec l'ordre de développement, c'est à dire avec le nombre de paramètres supplémentaires. Cependant, les conditions aux limites sur les bords sont difficiles à satisfaire et le nombre de variables de déplacement indépendantes dépasse celui des modèles classiques. Pour réduire le nombre de paramètres de déplacement, plusieurs simplifications sont proposées. On impose souvent les conditions de nullité des contraintes de cisaillement transverse aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Le développement en série de Taylor est utilisé avec $\phi_i^{o(4)} = \phi_i^{o(2)} = \phi_i^{o(1)} = 0$, $\phi_i^{o(3)}, \alpha = \{1,2\}$. Le champ de déplacement devient :

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) = u_\alpha^o(x_1, x_2) - z w_{,\alpha} + \psi(z) \gamma_\alpha^o(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases} \quad \text{(I.P2.4)}$$

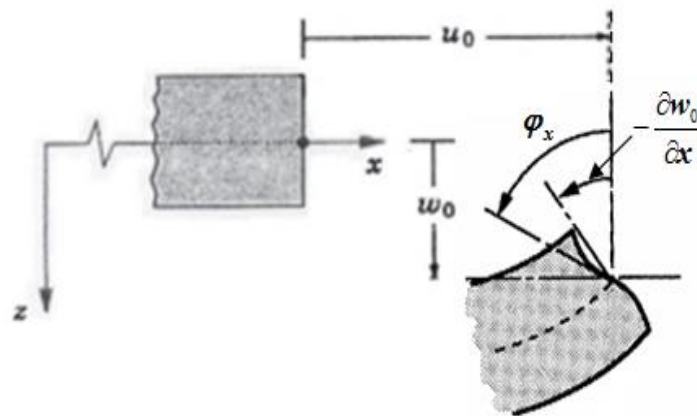


Figure I. P2.4 : Cinématique de la théorie d'ordre supérieur.

Voici quelques contributions importantes de développement de modèles d'ordre supérieur qui se sont distingués dans la littérature et qui diffèrent par la fonction de cisaillement $\psi(z)$:

- L'approche d'Ambartsumyan (1945) avec :

$$\psi(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad \text{(I.P2.5)}$$

- L'approche de Reissner (1945) :

$$\text{(I.P2.6)}$$

$$\psi(z) = \frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$$

- L'approche de Reddy (1987) avec :

$$\psi(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad \text{(I.P2.7)}$$

Dans le modèle de Reddy (1987), le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal w est constant. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle. La distribution des contraintes de cisaillement transversal est parabolique suivant l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

- L'approche de Touratier (1991) avec :

$$\psi(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{z}{h}\right) \quad \text{(I.P2.8)}$$

Touratier propose le modèle "sinus" qui est différent des autres modèles d'ordre supérieur puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement suivant l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme suit :

$$\psi(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) = \frac{h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi z}{h}\right)^{2n+1} = z \left(1 - \frac{\pi^2}{3!} \frac{z^2}{h^2} + \frac{\pi^4}{5!} \frac{z^4}{h^4} - \frac{\pi^6}{7!} \frac{z^6}{h^6} + \dots \right) \quad \text{(I.P2.9)}$$

Les différents termes du développement correspondent aux différents modèles cités précédemment. Suivant la troncature choisie, on obtient la théorie Love-Kirchhoff, la théorie Reissner-Mindlin ou les modèles d'ordre supérieur (aux coefficients près). Les contraintes de cisaillement transversal déterminées par le modèle "sinus" prennent une forme sinusoïdale dans l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de (J.N. Reddy (1984)).

Récemment, Afaq et al. (2003) propose un modèle exponentiel avec une cinématique plus riche.

La fonction de cisaillement transverse est de la forme suivante :

$$\psi(z) = ze^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (\text{I.P2.10})$$

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance pair et impair de la variable z alors que la fonction "sinus" [Touratier] ne permet qu'un développement en puissances impaires.

- L'approche de Aydogdu (2005) avec ;

$$\psi(z) = z\alpha^{\frac{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}{\ln(\alpha)}} \quad \alpha > 0 \quad (\text{I.P2.11})$$

h : étant l'épaisseur de la plaque FGM.

Il faut remarquer que les modèles issus d'une approche monocouche équivalente présentent des contraintes de cisaillement transverse discontinues aux interfaces si les couches ont des propriétés différentes, même si la continuité du champ de déformation est assurée. Ceci présente un inconvénient sérieux lors de l'analyse locale à l'interface des structures multicouches (effets de bord sur les contraintes, délaminage . . .). Mais pour le cas des matériaux FGM cette approche paraît très appropriée, du fait que la variation des propriétés se fait continuellement selon l'épaisseur.

I. P2.2.2. Approche par couche :

Ces approches sont destinées justement à mieux décrire les effets d'interface pour les matériaux composites conventionnels. Les équations (I.P.3) et (I.P.4) montrent aussi que cette approche est applicable pour les matériaux FGM. Ainsi différents modèles issus de l'approche par couche ont été proposés (A. Chabot (1997), E. Carrera (2000), K.S. Afaq (2003), J.N. Reddy (1984), M. Di Sciuva (1987)). Le multicouche est subdivisée en sous structures (correspondant en fait à chaque couche ou chaque ensemble de couches). On applique à chaque sous structure une théorie du premier ordre ou un modèle d'ordre supérieur, imposant un champ de déplacement vérifiant la continuité aux interfaces entre les différentes couches. Les modèles de ce type sont relativement coûteux (l'ordre des équations de comportement dépend du nombre de couche), mais ils permettent l'obtention de résultats plus précis, notamment en ce qui concerne le calcul des contraintes hors plan.

D'une manière générale, les modèles issus de l'approche par couche peuvent être classés en deux groupes :

- Les modèles couches discrètes ou chaque couche est considérée comme une plaque en imposant les conditions de continuité en déplacements ou en contraintes aux interfaces.
- Les modèles zig-zag ou la cinématique satisfait a priori les conditions de contact est indépendante du nombre de couches. (**Figures. I. P2.5 et I. P2.6**).

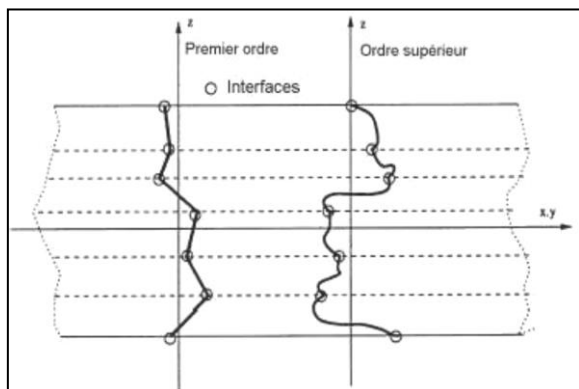


Figure. I. P2.5 : Champs de déplacements des cinématiques. Viet.Tung. Nguyen (2004)
modèles couches discrètes, approche

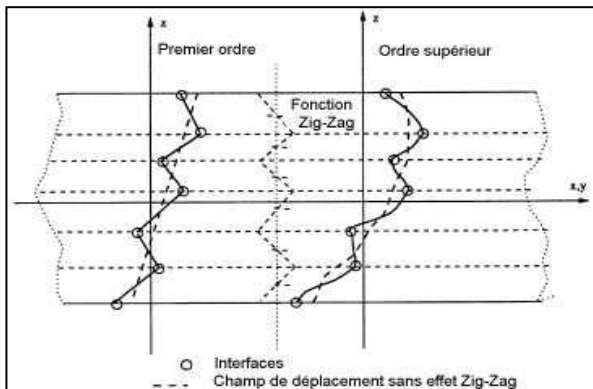


Figure. I. P2.6 : Champs de déplacements des modèles zig-zag, approche cinématique.
Viet.Tung. Nguyen (2004)

I. P2.2.2.1. Les modèles zig-zag :

Afin de réduire le nombre de paramètres inconnus, Di Sciuva est le premier à proposer le modèle zig-zag du premier ordre M. Di Sciuva (1987). Dans ce modèle, les déplacements membranaires sont les résultats de la superposition du champ de déplacement global d'une théorie du premier ordre et d'une fonction zig-zag (avec l'emploi de la fonction d'Heaviside). La fonction zig-zag donne une contribution des déplacements membranaires qui est continue en z mais sa dérivée première est discontinue à l'interface (**voir Figure. I. P2.7**). Les déformations transversales sont donc discontinues et la continuité des contraintes de cisaillement transverse aux interfaces est assurée.

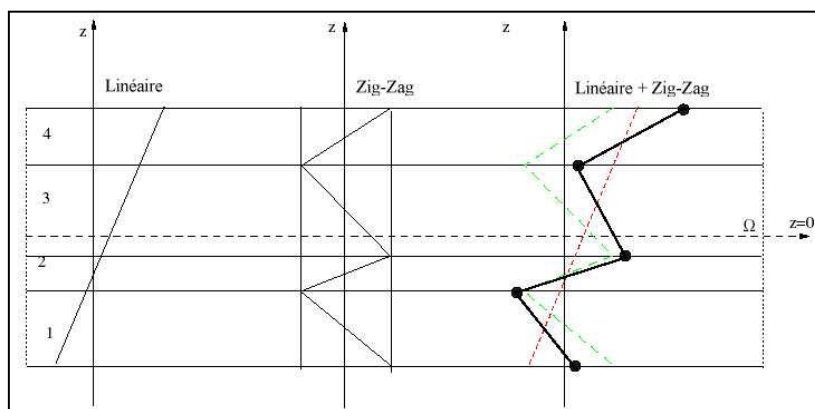


Figure. I. P2.7 : Champs de déplacements des modèles zig-zag du premier ordre.

Viet.Tung. Nguyen (2004).

L'avantage principal du champ de déplacement des modèles zig-zag réside dans la bonne modélisation de la distorsion de la normale de la surface déformée, ainsi que dans la vérification des conditions de continuité, et ce sans augmenter pour autant le nombre et l'ordre des équations fondamentales de la théorie du premier ordre. Le recours à des coefficients de correction pour le cisaillement transverse est évité.

En se basant sur le concept de M. Di Sciuva (1984), plusieurs auteurs ont réalisé des améliorations significatives pour le modèle zig-zag. L'amélioration principale est l'introduction d'une distribution non linéaire des déplacements. On superpose le champ zig-zag (linéaire par morceau) à un champ de déplacement d'ordre supérieur (souvent cubique) (voir **Figure. I. P2.8**). Les conditions de compatibilité sont satisfaites sur les surfaces supérieure et inférieure des plaques pour réduire le nombre de paramètres.

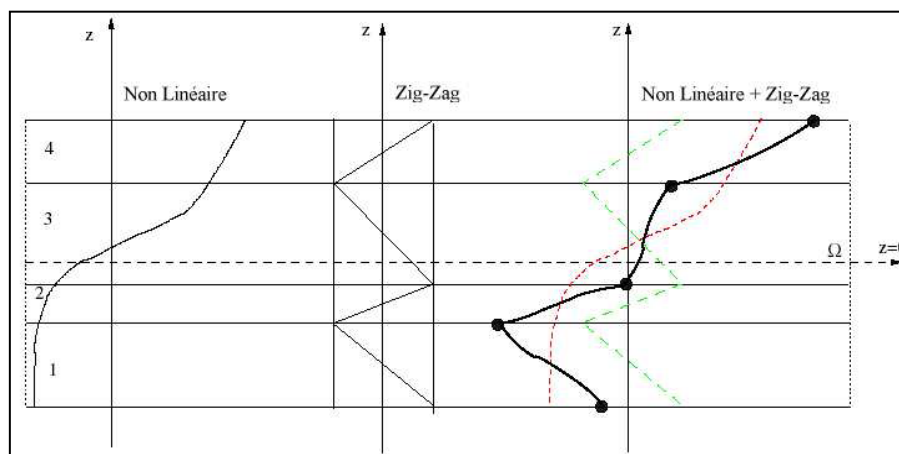


Figure. I. P2.8 : Champs de déplacements des modèles zig-zag d'ordre supérieur.

Viet.Tung. Nguyen (2004).

Dans les travaux de (M. Karama (1998), C. Ossadzew & M. Touratier (2001)), la fonction sinus de (M. Touratier (1991)) est combinée avec la fonction zig-zag pour raffiner les effets de cisaillement.

Récemment, Afaq et al. (2003) combine le modèle exponentiel avec l'effet zig-zag pour une cinématique plus riche.

Les résultats numériques de tous ces travaux montrent que le modèle zig-zag assure un bon compromis entre la précision des solutions et le coût de calcul. Néanmoins, les modèles zig-zag ont des limites de validation dans l'analyse du délaminage. En effet rien de physique ne pousse à penser que ces modèles quelque peu artificiels peuvent prévoir les délaminages, par exemple. Le calcul des contraintes de cisaillement transverse par les équations constitutives des modèles zig-zag devient moins précis quand le rapport d'élanement diminue. Un autre inconvénient des modèles zig-zag, tout comme pour les modèles d'ordre supérieur est la continuité de type C^1 demandée qui complique leur implémentation numérique.

I. P2.2.2.2. Les modèles couches discrètes :

Les modèles couches discrètes adoptent une approximation plus fine des champs suivant l'épaisseur du multicouche que les modèles de plaque d'ordre supérieur ou zig-zag puisqu'ils proposent une cinématique par couche plutôt qu'une cinématique globale (**voir Figure. I. P2.5**). En fait, avec les modèles couches discrètes, le multicouche est représenté par un ensemble de plaques (objets 2D) couplés par des efforts d'interface.

Les conditions de continuité aux interfaces sont assurées. Le nombre de paramètres inconnus dépend du nombre de couche de la plaque composite.

Dans les travaux de (S. Srinivas & A.K. Rao (1973), J.N. Reddy (1987), M. Tahani & A. Nosier (2003)), on postule une cinématique du premier ordre ou d'ordre supérieur par couche. Les équations fondamentales par couche sont obtenues en utilisant le principe des travaux virtuels. Les conditions aux limites sont également données couche par couche.

D'une manière alternative, les travaux de (J.G. Ren (1986), C. Kassapoglou (1987), W.L. Yin (1994)) utilisent une approximation des champs de contraintes par couche ou une mixte contrainte cinématique. Ainsi J.G. Ren (1986) utilise un champ de contrainte dont la composante de cisaillement transversal est quadratique par couche et les déplacements sont considérés cubiques par couche et continus aux interfaces. Dans (C. Kassapoglou & P.A. Lagace (1987)), le champ de contrainte est construit sous la forme d'un produit de fonctions à variables séparées, par couche, à partir de l'équilibre des forces et moments. Les contraintes planes sont supposées constantes suivant l'épaisseur. Dans (W.L. Yin (1994)), les fonctions de contraintes sont utilisées par couche pour déterminer les contraintes inter laminaires. Elles sont approximées de façon polynomiale dans l'épaisseur.

Nous passons à présent à une famille de modèles couches discrètes particulières, les modèles multi particuliers. Le premier travail semble être celui de Pagano qui propose le modèle local dans (N.J Pagano (1978)). Le modèle local a été construit à partir de la formulation variationnelle d'Hellinger-Reissner et d'une approximation polynomiale des champs de contraintes par couche.

Les polynômes sont du premier degré pour les contraintes membranaires, quadratique pour les contraintes de cisaillement et donc cubique pour les contraintes normales.

La formulation variationnelle d'Hellinger-Reissner restreinte aux approximations de ces champs de contraintes conduit à une cinématique du multicouches à $7n$ champs en $(x ; y)$, n étant le nombre de couches de la plaque. Ces champs cinématiques contiennent des composantes correspondantes à des moments du second ordre qui n'ont pas un sens physique très clair.

La formulation mixte d'Hellinger-Reissner permet de déduire le comportement élastique linéaire généralisé du modèle. Ce modèle pose quelques difficultés au niveau des conditions aux limites et reste assez lourd compte tenu du nombre élevé de champs cinématiques intervenants. Ce modèle a été le point de départ pour un ensemble de travaux menés à l'ENPC

dont l'objectif est de proposer une série de simplifications permettant d'alléger tout en conservant un bon niveau de prédictibilité Viet.Tung. Nguyen (2004).

I.P2.3. Modèles éléments finis des structures multicouches :

Les solutions analytiques fournies par les approches décrites précédemment ne concernent que des cas de géométrie, chargement et empilement simples. Pour les cas complexes plusieurs méthodes numériques ont été développées. Parmi ces méthodes on a la méthode des éléments finis, outil d'ingénierie dominant pour l'analyse des structures. Les éléments finis sont généralement classés suivant le type de description géométrique (2D, 3D), la méthode de construction et le choix du type d'inconnues principales du modèle (déplacements, contraintes, mixtes, hybrides).

I. P2.4. Conclusion :

Dans cette partie on a décrit les différentes théories des plaques à savoir l'approche monocouche équivalente, l'approche par couche et l'approche développement asymptotique.

Nous concluons aussi que l'approche monocouche équivalente est mieux adaptée pour les matériaux FGM car il n'y a pas de changement brusque dans les caractéristiques mécaniques contrairement aux composites conventionnels où le délaminage est un problème à ne pas écarter.

Donc on a eu recours au modèle monocouche équivalent pour les plaques épaisses pour différentes théories d'ordre élevé où la prise en compte du cisaillement transversal est nécessaire pour une étude plus exacte.

Chapitre II

Phénomène du flambement

LE PHENOMENE DU FLAMBEMENT

II.1. Introduction :

Dans le génie civil les plaques sont largement utilisées ; dans le (bâtiment, les ponts,... etc.). Contrairement aux poutres et les colonnes, qui ont des longueurs plus grandes que les deux autres dimensions, et ils sont donc modélisés en tant que éléments linéaires, les plaques d'acier ont des largeurs comparables à leur longueur et ainsi sont modélisées comme des éléments non- linéaires (surface plane).

Tout comme les longues colonnes qui subissent des instabilités (forme de flambement), les plaques en compression ont aussi tendance à se déformer dans leur surface plane. La forme dépend de l'appui et les conditions de chargement dans les deux directions de la longueur et la largeur.

Toutefois, contrairement aux colonnes, les plaques continuent à porter des charges, même après un flambage. Cette propriété suscite d'un grand intérêt pour l'ingénierie en structure, puisque sa peut jouer dans l'intérêt de la stabilité.

II.2.1. Définition de la stabilité :

Le flambement est un phénomène rencontré dans la structure. C'est le résultat de l'effet des forces de compression. L'exigence selon laquelle un corps doit être en équilibre semble insuffisante. Même du point de vue purement pratique. Il est souhaitable pour les structures d'être dans un état d'équilibre stable.

L'état d'équilibre stable est défini comme la capacité de la structure de rester en position et de soutenir la charge appliquée, même si elles sont forcées légèrement hors de sa position par une perturbation.

On considère une colonne soumise à une force concentrée (P) agissant le long de son axe central. La charge (P) est continuellement augmentée, passant de zéro à une valeur critique particulière de la charge (P_{cr}) correspondant à une valeur (σ_{cr}) de la contrainte normale inférieure à la contrainte de rupture, il se produit une déformation latérale (**figure II.1.a**).

Les courbes de déformation latérale de la charge (P) en fonction de (Δ), et de (P) et de (y) sont représentés dans les (**figure II.1.b**) et (**figure II.1.c**).

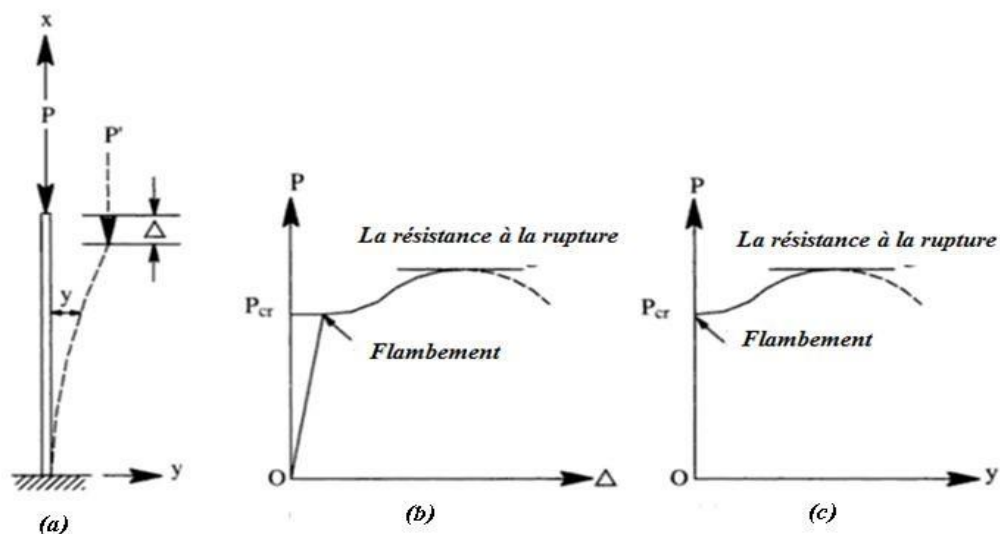


Figure II.1 : comportement charge-déformation de colonne soumise à une compression axiale ; (b) courbe $P-\Delta$, (c) courbe $P-y$

II.2.2. Méthodes d'analyse de la stabilité :

L'analyse de la stabilité pour la détermination du mode de la perte de la stabilité structurelle et la charge correspondante est appelée charge critique.

La structure reste au repos avant et après flambement, sauf dans les cas où la perte de la stabilité est due à la transition de l'état de repos à un état de mouvement appelé l'instabilité cinématique ou dynamique. Parmi les méthodes classiques disponibles pour la résolution des problèmes de flambement sont les suivants:

- ✓ L'approche de travail.
- ✓ L'approche de l'énergie.
- ✓ L'approche cinétique ou dynamique.

II.3. Flambement thermique :

L'effet de la température sur une structure peut se manifester de deux façons. D'une part, les propriétés élastiques de la structure dépendent de la température, donc la raideur de la structure aussi. En effet, l'augmentation de la température induit, en général, un assouplissement des matériaux et une diminution de la limite élastique. D'autre part, une variation non-uniforme ou rapide de la température, peut donner lieu à des contraintes thermiques, qui peuvent provoquer un flambement thermique.

En plus de la dégradation des propriétés des matériaux, le flambement thermique est probablement le phénomène le plus important issu de l'effet de l'élévation de la température sur les structures à paroi mince. Il a été reconnu, au début des années cinquante, comme étant l'un des problèmes les plus graves lié à l'échauffement aérodynamique.

L'une des causes fondamentales du flambement thermique est le blocage de la dilatation thermique. Sous certaine condition aux limites, une structure ne peut se dilater librement sous une élévation uniforme de la température, ce qui crée des contraintes thermiques capables d'agir comme des forces de compression pouvant nuire à la stabilité de la structure. La seconde cause du flambement thermique est la variation non-uniforme de la température. En effet, quand une structure uniforme est soumise à un échauffement thermique non-uniforme, ou le contraire, la température varie d'un point à l'autre de la structure. Cette dernière, donne lieu à des contraintes thermiques internes qui peuvent aussi nuire la stabilité de la structure.

II.4. Flambement mécanique :

Le flambement mécanique signifie généralement une défaillance catastrophique dans les systèmes de mécanique des structures. Cependant, le flambement contrôlé de films minces sur des substrats conformes a été utilisé de manière avantageuse dans divers domaines tels que la fabrication micro-nano, l'optique, la bio-ingénierie et la métrologie, ainsi que des études de mécanique fondamentale.

II.5. Flambement des plaques :

Le flambement d'une plaque implique la flexion dans deux plans .Un élément de plaque peut porter une charge supplémentaire au-delà de la charge critique. Cette force de réserve est appelée la résistance après flambement. L'importance relative de la résistance après flambement à la charge de flambement dépend de divers paramètres tels que les propriétés dimensionnelles, les effets d'imperfection, l'importance des effets non linéaires géométriques, les conditions aux limites, les types de chargement, et le rapport de contrainte de flambement ainsi que la limite d'élasticité.

La première solution d'un problème de stabilité de plaque plane simplement appuyée été donnée par Bryan (1891), Euler a présenté l'analyse de la stabilité d'une colonne au début du XXe siècle. Timoshenko a étudié le flambement avec divers des conditions aux limites. Bon nombre sont donnés par Timoshenko et Gere (1961). Traitement de l'analyse de la stabilité de plaque plane est trouvé par Bleich (1952) et Timoshenko et Gere (1961).

II.5.1. Approche du Flambement :

Le voilement est un phénomène d'instabilité relatif aux plaques sollicitées dans leur plan. Sous l'effet d'efforts de compression, les plaques se déforment perpendiculairement au plan des efforts.

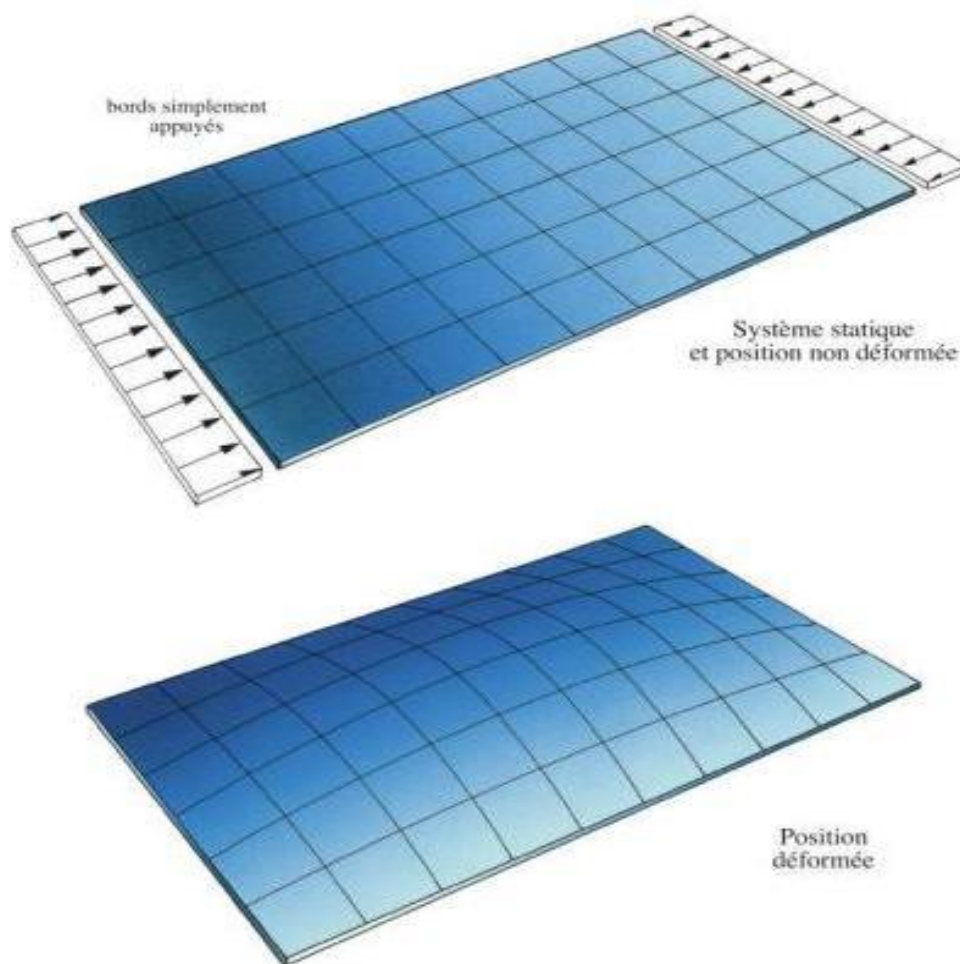


Figure II.2 : Flambement d'une plaque.

II.5.2. Plaque rectangulaire simplement appuyée sur les quatre cotes :

Considérons une plaque rectangulaire parfaitement plate, simplement appuyée sur les quatre cotes et soumise à une force de compression uniforme N_x par unité de longueur dans la direction x (**figure II.3**). L'équation d'équilibre pour une telle plaque est donnée par :

Etude et analyse du flambement d'une plaque homogène soumise à un chargement thermique Ou w désigne la déviation dans la direction z de tout point (x, y)

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{12(1-\nu^2)}{Er^3} \left(-N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

Où w désigne la déviation dans la direction z de tout point (x,y)

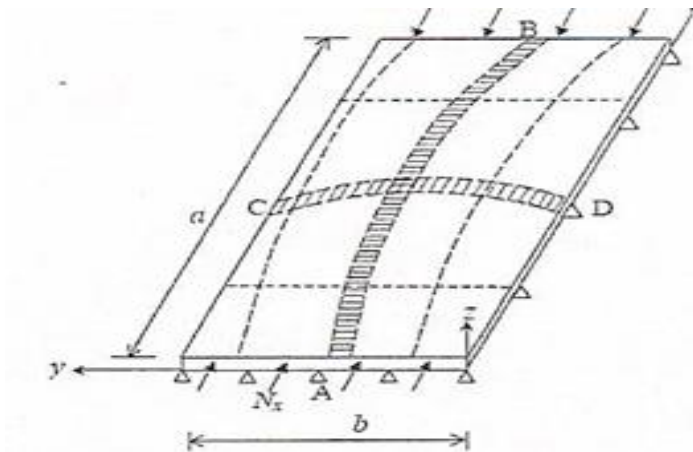


Figure II.3: Flambage de la plaque sous une compression uni-axial.

II.5.3. Modes du flambement des plaques :

En abordant les structures à parois minces, (Plaques, coques, profilées, etc...) on doit immédiatement considérer les phénomènes de flambement qui y sont inhérents. Les structures à parois minces peuvent être soumises aux flambements local, distorsionnel et global.

II.5.3.1. Le flambement local :

C'est un mode impliquant seulement la flexion hors-plan de plaque sans déformation des lignes à la jonction des plaques et il est caractérisé par l'onde de flambement relativement courte des plaques individuelles.

II.5.3.2. Le flambement distorsionnelle :

Comme suggère le terme, est un mode de flambement impliquant le changement de forme de la section transversale ; les lignes d'intersection des plaques se déplacent relativement. L'onde du flambement distorsionnel est de valeur moyenne.

II.5.3.3. Le flambement global :

Les sections dans le flambement global se déplacent comme des corps rigides sans aucune distorsion et l'onde de flambement global est la plus longue par rapport aux deux autres modes de flambement précédents.

II.5.4. L'interaction entre les modes de flambement :

Sa peut se produire, pour le calcul, on examine souvent les interactions entre les flambements local et distorsionnel, local et global ou distorsionnel et global.

Les modèles d'éléments finis de plaque et de coque surbaissée déformable en cisaillement avec la rotation dans le plan ont été appliqués avec succès à l'analyse linéaire des structures à parois minces. On peut déterminer la contrainte de flambement élastique en considérant l'influence du cisaillement à travers l'épaisseur des parois. Les résultats s'accordent bien avec la théorie classique des plaques lorsque le rapport largeur-épaisseur est grand. Bien que l'analyse linéaire du flambement soit suffisante dans la plupart des cas pratiques et utile pour la conception des barres à parois minces, quelques structures qui sont très sensibles à l'imperfection, ne sont pas proprement traitées par celle-ci. Dans ces cas, il faut recourir à l'analyse non-linéaire. La modélisation des structures à parois minces par éléments de plaque et de coque permet de tenir compte de la distorsion de la section transversale et de l'interaction entre les modes de flambement.

La méthode des éléments finis est depuis longtemps connue comme une méthode puissante pour l'analyse structurelle. De nombreux types de coques sont utilisés pour l'analyse non-linéaire des structures composées de plaques ; ce qui permet la simulation de la distorsion de la section transversale et des phénomènes de flambement de la structure.

II.6. Quelques exemples sur le flambement :

II.6.1. Flambement d'une plaque raidie sous compression longitudinale et pression hydrostatique :

Cette vue montre les formes de flambement local qui se sont développées dans le panneau. Du fait que la plaque était en compression biaxiale sous l'influence de la flexion des raidisseurs transversaux, les panneaux individuels n'ont pas flambé selon la forme d'onde circulaire habituelle. Cet effet est plus marqué au centre du panneau où la compression transversale est la plus grande.



Figure II.4 : Flambement d'une plaque raidie.

II.6.2. Ruine de la semelle comprimée d'une poutre en caisson :

Essai de flexion sur un caisson avec raidisseurs transversaux. Le panneau comprimé a flambé. Notez la déformation des angles du caisson. Ceci a contribué à réduire l'efficacité de l'effet de plaque

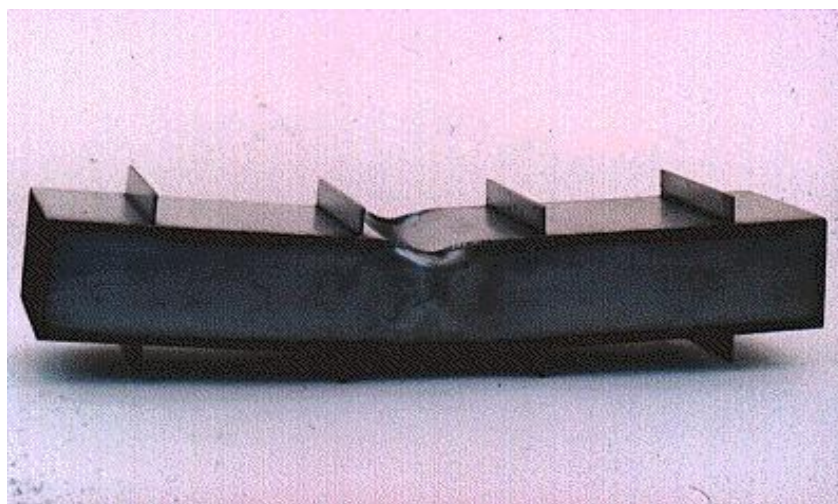


Figure II.5 : Ruine de la semelle comprimée d'une poutre en caisson.

II.6.3. Ruine locale d'un profil creux rectangulaire :

Flambement par flexion-torsion d'une bôme comprimée. Remarquez la distorsion de la section transversale souple. L'essai faisait partie d'un programme d'étude d'un système de treillis spatial en éléments minces.



Figure II.6 : Ruine locale d'un profil creux rectangulaire.

II.6.4. Voilement local d'une semelle de poutre :

Notez la faible longueur de l'onde du flambement : la demi-longueur d'onde est pratiquement égale à la longueur de paroi en console (demi-largeur de la semelle).

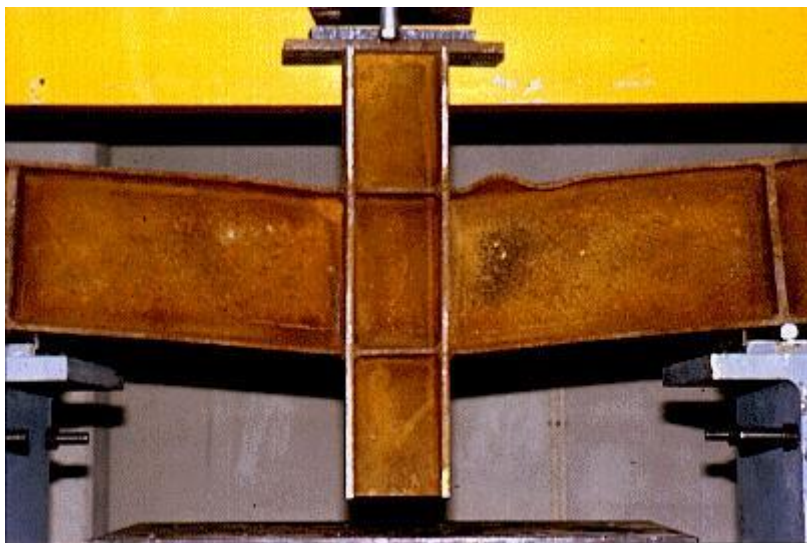


Figure II.7 : Voilement local d'une semelle de poutre.

II.6.5. Flambement d'une coque cylindrique comprimée :

Flambement d'une coque cylindrique raidie radialement soumise à une compression axiale et à une pression hydrostatique. Les traits blancs montrent la position des anneaux raidisseurs.



Figure II.8 : Flambement d'une coque cylindrique comprimée.

II.6.6. Flambement de Réservoir :

Lors des séismes récents plusieurs réservoirs de stockage (figures I.B.2, I.B.3) ont flambé ce qui a engendré de nombreuses études concernant l'effet du fluide sur la réponse de la structure. Les types de flambage observés montrent soit un flambage de type patte d'éléphant soit un flambage en pointes de diamant [CLO82], les cloques sont toujours situées en bas de la coque. Les différences proviennent des dimensions des réservoirs en cause, l'un a un rapport R/t de 1650, l'autre un rapport R/t de 775.



Figure II.9: Réservoir flambé après séisme (mode en pointe de diamant)

II.7. Conclusion :

La résistance au flambement d'un élément ou d'un composant de section, peut être améliorée de plusieurs façons.

Pour une forme de flambement donnée, une réduction du rapport d'élançement se traduira par une charge ultime plus élevée. Ceci sera normalement réalisé en augmentant les dimensions de la section droite ; cela peut aussi être fait en répartissant le matériau de manière différente le long du centre de gravité, tout en gardant à la section droite une section constante ; en faisant cela ; cependant, on peut changer la réponse de la section et/ou de l'élément, de telle sorte que d'autres formes de flambement puissent devenir critiques. En particulier, une diminution d'épaisseur de composants de section droite, afin de mieux répartir le matériau, a souvent pour conséquence un voilement, prépondérant d'un point de vue calcul.

Une autre manière d'améliorer la résistance au flambement d'un élément est de lui fournir des maintiens de meilleure qualité ou supplémentaires, afin de modifier le mode de flambement. La charge critique élastique d'un poteau en compression axiale bi articulé, par exemple, est augmentée d'un facteur 4 si on ajoute un appui simple à mi-hauteur, de telle sorte que le poteau flambe dans un mode en deux demi-ondes sinusoïdales. De la même manière une poutre simplement appuyée, soumise à de la flexion par rapport à son axe le plus fort, est renforcée vis-à-vis du déversement en empêchant les rotations de flexion et/ou de torsion à ses supports d'extrémités, ou, plus simplement, en mettant un obstacle à tout déplacement latéral de la semelle en compression au moyen d'un entretoisement adéquat. La résistance ultime d'une plaque mince comprimée peut être améliorée de façon appréciable en fixant des raidisseurs longitudinaux et éventuellement transversaux ; à condition qu'ils soient assez rigides, la plaque flambera entre les raidisseurs, pour une contrainte critique élastique plus élevée. Le fait de raidir des structures en coques produira, de la même manière, une augmentation de la résistance.

Bien que la résistance de calcul soit plutôt reliée à la contrainte ultime qu'à la contrainte critique élastique, les commentaires ci-dessus peuvent, qualitativement être étendus à la capacité porteuse ultime.

Chapitre III
Analyse du Flambement Thermique
des Plaques Epaissses
en FGM

Chapitre III
Première partie:
Formulations théoriques

Analyse du Flambement Thermique des Plaques Epaissees en FGM

Première partie : Formulations théoriques

III.P1.1. Introduction :

L'utilisation croissante des matériaux avancés dans les éléments de structures a éveillé l'intérêt des chercheurs à l'étude de la réponse des plaques fonctionnellement graduées (FG). Les FGM sont des matériaux où les propriétés varient continuellement à travers l'épaisseur à partir de la surface de la céramique exposée à de fortes températures à celle du métal. Les propriétés mécaniques varient graduellement à travers l'épaisseur suivant une simple loi de puissance. Du moment où la plupart des applications des FGM se sont concentrées dans des environnements à température élevée, les recherches ont été limitées à l'analyse des contraintes thermiques, le flambement thermique, les fractures mécaniques et l'optimisation. Plusieurs investigations sur le flambement thermique des plaques fonctionnellement graduées ont été publiées et ont vues le jour ces dernières années. Les propriétés utilisées dans des domaines à fort gradient thermique.

Le but de ce chapitre, est d'étudier l'instabilité thermique du flambement des plaques épaisses fonctionnellement graduées, en utilisant la théorie de la plaque de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HPT). Les propriétés matérielles effectives sont estimées en utilisant la loi de mélange.

Par conséquent, les équations qui régissent le comportement de la plaque FG peuvent être simplifiées. En se basant sur la présente théorie et le principe des travaux virtuels, les équations qui gouvernent la plaque sont obtenues. Trois cas de chargement thermique sont retenus à travers l'épaisseur de la plaque, uniforme, linéaire et non linéaire.

III.P2.2. Description du problème :

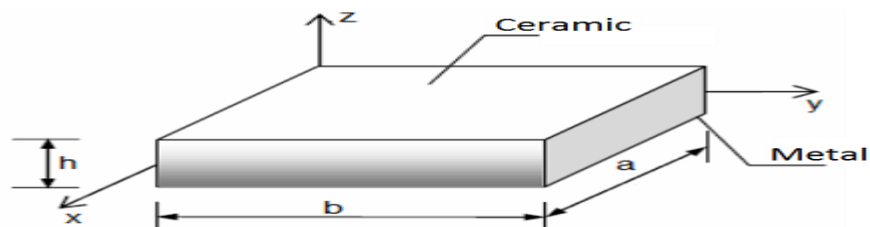


Figure III.P1.1: Système d'axe et géométrie pour les plaques rectangulaires en FGM

Considérons une plaque rectangulaire en FGM de longueur a et de largeur b et épaisseur h . Elle est soumise à une charge thermique $T(x, y, z)$, On suppose que les propriétés matérielles (module de Young et le coefficient de dilatation thermique) de la plaque varient sans interruption dans la direction de l'épaisseur selon une simple distribution de loi de puissance en fonction de la fraction volumique des matériaux constituants.

La plaque est appuyée sur quatre bords définis dans le système (x, y, z) .

Le module d'élasticité E , le coefficient de dilatation thermique α et le ν du coefficient de Poisson sont assumés par (Praveen, et Reddy(1998)).

$$\begin{aligned}
 E(z) &= E_m + E_{cm} \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p, \\
 E_{cm} &= E_c - E_m, \\
 \alpha(z) &= \alpha_m + \alpha_{cm} \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p, \\
 \alpha_{cm} &= \alpha_c - \alpha_m, \\
 T(z) &= T_m + \Delta T_{cr} \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^\beta, \\
 \Delta T_{cr} &= T_c - T_m, \\
 \nu &= \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)
 \end{aligned} \tag{III.1}$$

Où les indices " c " et " m " se rapportent à la céramique et au métal, respectivement et E_m et α_m définissent le module élastique (le module d'Young) et le coefficient de dilatation thermique de métal ; E_c et α_c indiquent le module d'Young et le coefficient de dilatation thermique du céramique, et p l'indice de fraction de volume.

La valeur de p égale à zéro représente entièrement la plaque en céramique.

L'hypothèse ci-dessus de loi de puissance se reflète une règle simple des mélanges employés pour obtenir les propriétés efficaces de la plaque du céramique-métal. La loi des mélanges s'applique seulement à la direction d'épaisseur.

La densité de la plaque varie selon la loi de puissance, et l'exposant peut être varié pour obtenir différentes distributions des matériaux composants par épaisseur de plaque.

Notez que la fraction de volume du métal est haut près du surface inferieure de la plaque, et cela de la haute en céramique près de la surface supérieure.

En outre, (Eq.III.1) indique que la surface inferieure de la plaque ($z = -h/2$) est riche en métal tandis que la surface supérieure ($z = h/2$) de la plaque est riche en céramique.

Pour la simplicité, le v est constant assumé à travers l'épaisseur de la plaque.

III.P1.3.champ de déplacement et équations constitutives :

Les déplacements d'un point matériel situé à (x, y, z) dans la plaque FGM pourrait mieux être illustré comme (Zenkour (2006)) :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_x(x, y, z) = \mathbf{u} - z \frac{\partial w}{\partial x} + \psi(z) \varphi_x \\ \mathbf{u}_y(x, y, z) = \mathbf{v} - z \frac{\partial w}{\partial y} + \psi(z) \varphi_y \\ \mathbf{u}_z(x, y, z) = \mathbf{w} \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

\mathbf{u}, \mathbf{v} et \mathbf{w} sont les déplacements du milieu de la surface le long des axes x, y et z , respectivement, et φ_x et φ_y sont les rotations au autour des axes x, y pour expliquez l'effet du cisaillement transversal.

Les coefficients de φ_x ou φ_y qui est donné par le $\Psi(z)$ devrait être en fonction de z . Tous les déplacements généralisés $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \varphi_x, \varphi_y)$ sont des fonctions de (x, y) .

Le déplacement de la théorie classique de la plaque mince (CPT) pouvez facilement soyez obtenu par $\Psi(z) = 0$.

Les déplacements de la théorie de déformation de cisaillement de premier ordre de la plaque (FPT) sont obtenus par $\Psi(z) = z$.

Les déplacements de la théorie de déformation de cisaillement de la plaque d'ordre élevé (Reddy 2000) sont obtenus par $\Psi(z) = (z(1 - 4z^2/3h^2))$.

En outre, la théorie de déformation de cisaillement de la plaque d'ordre élevé (HPT) est obtenue par **Tableau III.P1.1:**

Tableau III.P1.1 : forme de fonction de déformation de cisaillement définie par différents chercheurs :

Nombre de forme de fonction (F)	Nom des chercheurs	Forme de Fonction $\Psi(z)$
F 1	Ambartsumain (1958)	$(z/2)(h^2/4 - z^2/3)$
F 2	Kaczkowski , Panc et Reissner (1961)	$(5z/4)(1 - 4z^2/3h^2)$
F 3	Levy, Stein, Touratier (1986)	$(h/\pi)\sin(\pi z/h)$
F 4	Mantari, <i>et Al</i> (2012)	$\sin(\pi z/h)e^{\cos(\pi z/h)/2} + (\pi z/2h)$
F5-F6	Mantari <i>et Al</i> (2012)	$\tan(mz) - z m \sec^2(mh/2), m = \{1/5h, \pi/2h\}$
F 7	Karama, <i>et Al</i> (2003), Aydogdu (2009)	$z \exp(-2(z/h)^2), z \exp(-2(z/h)^2 / \ln \alpha), \forall \alpha > 0$
F 8	Mantari, <i>et Al</i> (2014)	$z \cdot 2.85^{-2(z/h)^2} + 0.028z$
F 9	El Meiche, <i>et Al</i> (2011)	$\xi[(h/\pi) \sin(\pi z/h) - z], \xi = \{1, 1/\cos(\pi/2) - 1\},$
F10	Soldatos (1992)	$h \sin h(z/h) - z \cos h(1/2)$
F11	Akavci et Tanrikulu (2010)	$z \operatorname{sech}(z^2/h^2) - z \operatorname{sech}(\pi/4)[1 - (\pi/2)\tanh(\pi/4)]$
F12	Akavci et Tanrikulu (2012)	$(3\pi/2)h \tanh(z/h) - (3\pi/2)z \operatorname{sech}^2(1/2)$
F13	Mechab, <i>et Al</i> (2010)	$\frac{z \cos(1/2)}{-1 + \cos(1/2)} - \frac{h \sin(z/h)}{-1 + \cos(1/2)}$

Les équations non linéaires déplacement-déformation de Von Karman sont formulées comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_{xx} \\ k_{yy} \\ k_{xy} \end{Bmatrix} + \psi(z) \begin{Bmatrix} \eta_{xx} \\ \eta_{yy} \\ \eta_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.3})$$

$$\varepsilon_{zz} = 0, \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \end{Bmatrix} = \psi(z),z \begin{Bmatrix} \varepsilon_{yz}^0 \\ \varepsilon_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.4})$$

Avec :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^0 &= u_{,x} + \frac{1}{2}w_{,x}^2, \quad \varepsilon_{yy}^0 = v_{,y} + \frac{1}{2}w_{,y}^2, \quad \varepsilon_{yz}^0 = \varphi_{,y}, \quad \varepsilon_{xz}^0 = \varphi_{,x} \\ \varepsilon_{xy}^0 &= v_{,x} + u_{,y} + w_{,x}w_{,y} \end{aligned} \quad (\text{III.5})$$

$$k_{xx} = -w_{,xx}, \quad k_{yy} = -w_{,yy}, \quad k_{xy} = -2w_{,xy}$$

$$\eta_{xx} = \varphi_{x,x}, \quad \eta_{yy} = \varphi_{y,y}, \quad \eta_{xy} = \varphi_{y,x} + \varphi_{x,y}$$

Composantes des vecteurs contraintes :

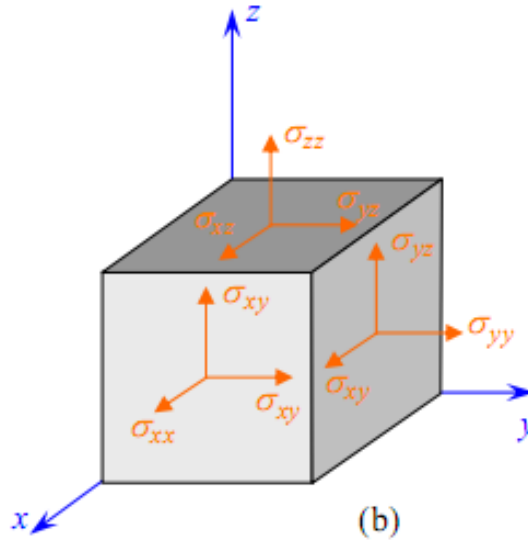


Figure III.P1.2: Composantes des vecteurs contraintes dans un système d'axes (x, y, z).

Les relations constitutives linéaires sont :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \end{Bmatrix} = \frac{E(z)}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} - \alpha T \\ \varepsilon_{yy} - \alpha T \end{Bmatrix} \quad (\text{III.6})$$

$$\{\sigma_{yz}, \sigma_{xz}, \sigma_{xy}\} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \{\varepsilon_{yz}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{xy}\}$$

Où la plaque est sujette à un chargement thermique $T(x, y, z)$.

Les résultantes d'effort et de moment de la plaque FGM peuvent être obtenues en intégrant (Eq.III.6) par rapport à l'épaisseur, et sont écrits comme :

$$N = \int_{h^-}^{h^+} \sigma dz \qquad M = \int_{h^-}^{h^+} \sigma z dz \qquad S = \int_{h^-}^{h^+} \sigma \Psi(z) dz$$

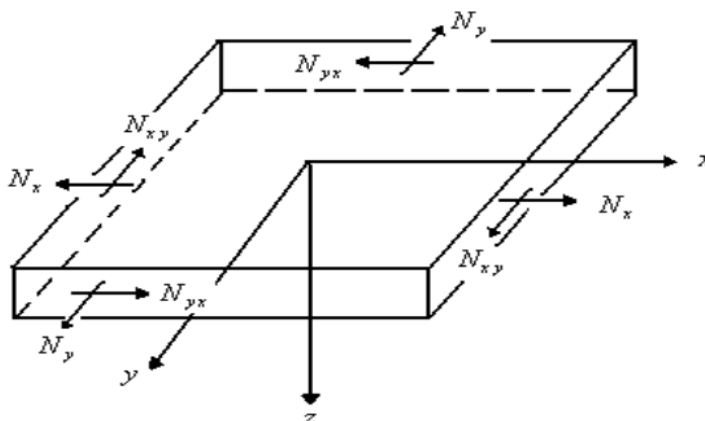


Figure III.P1.3: Forces par unités de longueur

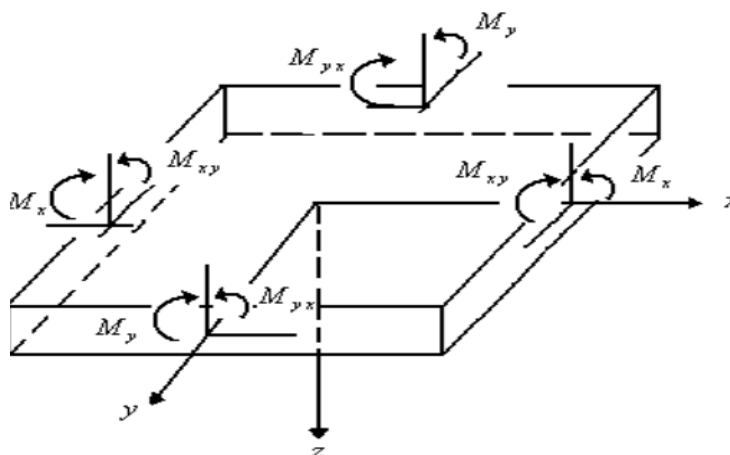


Figure III.P1.4: Moments par unités de longueur

$$\begin{Bmatrix} N_i \\ M_i \\ S_i \end{Bmatrix} = \frac{1}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} A_k & B_k & C_k \\ B_k & D_k & F_k \\ C_k & F_k & G_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\epsilon}_i^0 \\ \bar{k}_i \\ \bar{\eta}_i \end{Bmatrix} + \frac{1}{\nu-1} \begin{Bmatrix} A_T \\ B_T \\ C_T \end{Bmatrix} \qquad \text{(III.7)}$$

$$\begin{Bmatrix} N_{xy} \\ M_{xy} \\ S_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} A_k & B_k & C_k \\ B_k & D_k & F_k \\ C_k & F_k & G_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xy}^0 \\ k_{xy} \\ \eta_{xy} \end{Bmatrix} \qquad \text{(III.8)}$$

et

$$\begin{Bmatrix} Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{H_k}{2(1+\nu)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xz}^0 \\ \varepsilon_{yz}^0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.9})$$

Où $i = 1, 2$ et

$$\bar{\varepsilon}_x^0 = \varepsilon_{xx}^0 + \nu \varepsilon_{yy}^0 \quad \bar{\varepsilon}_y^0 = \varepsilon_{yy}^0 + \nu \varepsilon_{xx}^0$$

$$\bar{k}_x = k_{xx} + \nu k_{yy} \quad \bar{k}_y = k_{yy} + \nu k_{xx}$$

$$\bar{\eta}_x = \eta_{xx} + \nu \eta_{yy} \quad \bar{\eta}_y = \eta_{yy} + \nu \eta_{xx}$$

Dans (Eqs.III.7-9), N_x, N_y , et N_{xy} et M_x, M_y et M_{xy} sont les composantes de base des efforts et des moments résultants; S_x, S_y , et S_{xy} sont les efforts supplémentaires couplés liés aux effets de cisaillement transversaux ; et Q_{xz} et Q_{yz} sont des résultantes transversales d'effort de cisaillement. Les coefficients A_k, B_k, C_k, \dots etc. sont définis par :

$$\{A_k, B_k, D_k\} = \int_{-h/2}^{+h/2} E(z) \{1, z, z^2\} dz$$

$$\{C_k, F_k, G_k\} = \int_{-h/2}^{+h/2} \psi(z) E(z) \{1, z, \psi(z)\} dz$$

(III.11)

$$\{A_T, B_T, C_T\} = \int_{-h/2}^{+h/2} \alpha(z) E(z) T(x, y, z) \{1, z, \psi(z)\} dz$$

$$H_k = \int_{-h/2}^{+h/2} E(z) (\psi(z),_z)^2 dz$$

III.P1.3. Les équations d'équilibre et stabilité :

Toute l'énergie potentielle d'une plaque soumise à un chargement thermique est définie comme (Najafizadeh et Heydari (2004)).

$$V = U_m + U_b + U_c + U_T \quad (\text{III.12})$$

Où U_m, U_b, U_c et U_T sont l'énergie de déformation de la membrane, énergie de déformation de la flexion, et l'énergie de déformation couplée ainsi que l'énergie de déformation thermique, respectivement.

L'énergie de déformation pour la plaque FGM basée sur le HPT est définie comme donné ci-dessous dans (Eq.III.13).

$$V = \frac{1}{2} \iiint_V [\sigma_{xx}(\varepsilon_{xx} - \alpha T) + \sigma_{yy}(\varepsilon_{yy} - \alpha T) + \sigma_{xy}\varepsilon_{xy} + \sigma_{yz}\varepsilon_{yz} + \sigma_{xz}\varepsilon_{xz}] dv \quad (\text{III.13})$$

Les équations d'équilibre et de stabilité des plaques en FGM peuvent être dérivées en utilisant la proche variationnel. V est exprimé par la série de Taylor est :

$$\Delta V = \delta V + \frac{1}{2!} \delta^2 V + \frac{1}{3!} \delta^3 V + \dots \quad (\text{III.14})$$

Les équations d'équilibre peuvent être dérivées à l'aide du première variation de δV .

Les équations d'équilibre non linéaires liées au HPT sont :

$$\begin{aligned} N_{x,x} + N_{xy,y} &= 0 \\ N_{xy,x} + N_{y,y} &= 0 \\ M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy} + N_x w_{,xx} + N_y w_{,yy} + 2N_{xy} w_{,xy} &= 0 \\ S_{x,x} + S_{xy,y} - Q_{xz} &= 0 \\ S_{xy,x} + S_{y,y} - Q_{yz} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.15})$$

Pour établir les équations de stabilité, la condition $\delta^2 V = 0$ employée pour dériver les équations de stabilité des problèmes de flambement des plaques sont également utilisés ici.

La charge externe agissant sur la configuration originale est considérée pour être la température de flambement critique de l'équation ($\delta^2 V = 0$) est satisfaisante. Ajouter a cela l'état d'équilibre stable d'une plaque sous l'effet d'une charge thermique peut être indiquée par $(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0, \varphi_x^0, \varphi_y^0)$.

Les équations de stabilités de la plaque peuvent être décrites par le critère de l'équilibre adjacent. Supposons que l'état d'équilibre de la plaque FG sous le chargement thermique est définit en termes des composantes de déplacement $(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0, \varphi_x^0, \varphi_y^0)$. Les composantes de déplacement d'un état adjacent stable diffère par $(\mathbf{u}^1, \mathbf{v}^1, \mathbf{w}^1, \varphi_x^1, \varphi_y^1)$ par rapport à la position d'équilibre. Ainsi, le déplacement total d'un état adjacent est donné par :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}^0 + \mathbf{u}^1, \varphi_x = \varphi_x^0 + \varphi_x^1 \\ \mathbf{v} &= \mathbf{v}^0 + \mathbf{v}^1, \varphi_y = \varphi_y^0 + \varphi_y^1 \\ \mathbf{w} &= \mathbf{w}^0 + \mathbf{w}^1 \end{aligned} \quad (\text{III.16})$$

Où $\mathbf{u}^1, \mathbf{v}^1, \mathbf{w}^1, \varphi_x^1$ et φ_y^1 sont arbitrairement les déplacements de petites augmentations.

En substituant les équations de stabilité de tous les déplacements ci-dessus donné dans (Eq.III.16) dans l'équation $\delta^2 V = 0$ et intégrant par parties, et par la suite égalant à zéro séparément les coefficients ($\delta u^0, \delta v^0, \delta w^0, \delta \phi_x^0, \delta \phi_y^0$).

Les équations de stabilité sont obtenues pour la théorie de déformation de cisaillement comme suit :

$$\begin{aligned}
 N_{x,x}^1 + N_{xy,y}^1 &= 0 \\
 N_{xy,y}^1 + N_{y,y}^1 &= 0 \\
 M_{x,xx}^1 + 2M_{xy,xy}^1 + M_{y,yy}^1 + N_x^0 w_{,xx}^1 + N_y^0 w_{,yy}^1 + 2N_{xy}^0 w_{,xy}^1 &= 0 \quad (\text{III.17}) \\
 S_{x,x}^1 + S_{xy,y}^1 - Q_{xz}^1 &= 0 \\
 S_{xy,x}^1 + S_{y,y}^1 - Q_{yz}^1 &= 0
 \end{aligned}$$

Là où l'indice « 1 » désigne l'état de stabilité et « 0 » l'état de condition d'équilibre.

Les termes N_x^0, N_y^0 et N_{xy}^0 sont les efforts de pré-flambement résultants qui sont définis par :

$$N_x^0 = \frac{A_T}{v-1}, \quad N_y^0 = \frac{A_T}{v-1}, \quad N_{xy}^0 = 0 \quad (\text{III.18})$$

III.P1.4. Solutions exactes pour le flambement thermique des plaques en FGM :

Les plaques rectangulaires sont généralement classées par rapport au support utilisé (conditions d'appuis). Nous nous intéressons dans ce qui suit à la solution exacte pour le flambement thermique des plaques en FGM simplement appuyées.

Les conditions aux limites suivantes sont retenues pour la présente théorie de déformation de cisaillement.

$$\begin{aligned}
 v^1 = w^1 = \phi_y^1 = N_x^1 = M_x^1 = S_x^1 &= 0 \text{ à } x = 0, a \\
 u^1 = w^1 = \phi_x^1 = N_y^1 = M_y^1 = S_y^1 &= 0 \text{ à } y = 0, b
 \end{aligned} \quad (\text{III.19})$$

En suivant la procédure de la solution de Navier, nous assumons la solution suivante sous la forme de $(u^1, v^1, w^1, \phi_x^1, \phi_y^1)$ cela remplit les conditions aux limites,

$$\begin{Bmatrix} u^1 \\ v^1 \\ w^1 \\ \phi_x^1 \\ \phi_y^1 \end{Bmatrix} = \sum_{m,n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn}^1 \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \\ V_{mn}^1 \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \\ W_{mn}^1 \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \\ X_{mn}^1 \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \\ Y_{mn}^1 \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \end{Bmatrix} \quad (\text{III.20})$$

où $\lambda = m\pi/a$, $\mu = n\pi/b$; m et n sont des nombres de mode ; U_{mn}^1 , V_{mn}^1 , W_{mn}^1 , X_{mn}^1 et Y_{mn}^1 ont des paramètres arbitraires à déterminer.

En substituant (Eq.III.20) dans (Eq.III.17) on obtient :

$$[L]\{\Omega\} = \mathbf{0} \quad (\text{III.21})$$

Où $\{\Omega\}$ est un vecteur donné par :

$$\{\Omega\}^t = \{U_{mn}^1, V_{mn}^1, W_{mn}^1, X_{mn}^1, Y_{mn}^1\} \quad (\text{III.22})$$

Où $[L]$ est une matrice symétrique donnée par:

$$[L] = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} & L_{15} \\ L_{12} & L_{22} & L_{23} & L_{24} & L_{25} \\ L_{13} & L_{23} & L_{33} & L_{34} & L_{35} \\ L_{14} & L_{24} & L_{34} & L_{44} & L_{45} \\ L_{15} & L_{25} & L_{35} & L_{45} & L_{55} \end{bmatrix}$$

et $L_{rs} = L_{sr}$ des éléments de la matrice $[L]$ sont donnés par :

$$\begin{aligned} L_{11} &= -A_k[2\lambda^2 + (1 - \nu)\mu^2] \\ L_{12} &= -\lambda\mu A_k(1 + \nu) \\ L_{13} &= 2\lambda B_k(\lambda^2 + \mu^2) \\ L_{14} &= -C_k[2\lambda^2 + (1 - \nu)\mu^2] \\ L_{15} &= -\lambda\mu C_k(1 + \nu) \\ L_{22} &= -A_k[(1 - \nu)\lambda^2 + 2\mu^2] \\ L_{23} &= 2\mu B_k(\lambda^2 + \mu^2) \\ L_{24} &= L_{15} \\ L_{25} &= -C_k[(1 - \nu)\lambda^2 + 2\mu^2] \end{aligned} \quad (\text{III.23})$$

$$L_{33} = -2(\lambda^2 + \mu^2)[D_k(\lambda^2 + \mu^2) - A_T(1 + \nu)]$$

$$L_{34} = 2\lambda F_k(\lambda^2 + \mu^2)$$

$$L_{35} = 2\mu F_k(\lambda^2 + \mu^2)$$

$$L_{44} = -G_k[2\lambda^2 + (1 - \nu)\mu^2] - H_k(1 - \nu)$$

$$L_{45} = -\lambda\mu G_k(1 + \nu)$$

$$L_{55} = -G_k[(1 - \nu)\lambda^2 + 2\mu^2] - H_k(1 - \nu)$$

Pour une solution non triviale, le déterminant de la matrice $|\mathbf{L}|$ de l'équation (III.21) devrait être nul.

Cette équation ($|\mathbf{L}| = \mathbf{0}$) est énoncée pour la détermination de la charge critique la plus basse. Dans le suivant, les solutions de l'équation $|\mathbf{L}| = \mathbf{0}$ pour les différents types de la charge thermique sont présentées. La plaque est simplement appuyée dans la flexion et fixée rigidement dans l'extension. Le changement de température est varié seulement dans la direction d'épaisseur.

III.P1.5. Flambement thermique des plaques FGM sous une variation de température uniforme :

La température uniforme initiale de la plaque est T_i . La température est d'une manière uniforme pour atteindre une valeur finale de température T_f pour la quelle la plaque flambe. La variation de température est $\Delta T = T_f - T_i$.

En Substituant l'équation (Eq.III.23) dans l'équation $|\mathbf{L}| = \mathbf{0}$, la variation de température critique de flambement ΔT en utilisant les théories de déformation de cisaillement est obtenue comme suit :

$$\Delta T = \frac{\pi^2(n^2 s^2 + m^2)[\overline{P}_1 a^2(1-\nu) + \overline{P}_2 \pi^2(n^2 s^2 + m^2)]}{a^2 A_{T1}(1+\nu)[P_1 a^2(1-\nu) + P_2 \pi^2(n^2 s^2 + m^2)]} \quad (\text{III.24})$$

Où

$$P_1 = A_k H_k, \quad P_2 = 2(A_k G_k - C_k^2)$$

$$\overline{P}_1 = P_1 D_k - B_k^2 H_k$$

$$\overline{P}_2 = P_2 D_k - 2A_k F_k^2 - 2B_k(B_k G_k - 2F_k C_k) \quad (\text{III.25})$$

$$A_{T1} = \int_{-h/2}^{+h/2} \alpha(z) E(z) dz, \quad s = a/b$$

la température critique de flambement T_{cr} , est la plus petite valeur du ΔT qui est obtenu quand $m = 1$ et $n = 1$. Par conséquent,

$$T_{cr} = \frac{\pi^2(s^2 + 1)[\overline{P}_1\alpha^2(1 - \nu) + \overline{P}_2\pi^2(s^2 + 1)]}{\alpha^2 A_{T1}(1 + \nu)[P_1\alpha^2(1 - \nu) + P_2\pi^2(s^2 + 1)]} \quad (\text{III.26})$$

Pour la théorie classique de la plaque (CPT), la température critique de flambement T_{cr} donnée par :

$$T_{cr} = \frac{\pi^2(s^2 + 1)(A_k D_k - B_k)}{\alpha^2 A_k A_{T1}(1 + \nu)} \quad (\text{III.27})$$

III.P1.6. Flambement thermique des plaques FGM soumise à une variation de température graduée à travers l'épaisseur :

Pour une plaque de FGM, le changement de température n'est pas uniforme. La température varie selon la loi de variation de puissance. Habituellement, la température s'élève beaucoup plus haut sur le côté en céramique que cela dans le côté en métal de la plaque. Dans ce cas, la température par l'épaisseur est donné par

$$T(z) = \Delta T V^\beta + T_m \quad (\text{III.28})$$

Où T_m est la température de la surface riche en métal et le β est l'exposant de loi de puissance ($0 < \beta < \infty$).

Semblable au cas précédent de chargement, résolvant l'équation $|L| = 0$, la différence de la température de flambement $\Delta T = T(h/2) - T(-h/2)$ utilisant les théories de la plaque de déformation de cisaillement peuvent être déterminées, et alors nous pouvons obtenir la température critique de flambement T_{cr} comme :

$$T_{cr} = \frac{\pi^2(s^2 + 1)[\overline{P}_1\alpha^2(1 - \nu) + \overline{P}_2\pi^2(s^2 + 1)]}{\alpha^2 A_{T2}(1 + \nu)[P_1\alpha^2(1 - \nu) + P_2\pi^2(s^2 + 1)]} - \frac{T_m A_{T1}}{A_{T2}} \quad (\text{III.29})$$

Où

$$A_{T2} = \int_{-h/2}^{+h/2} \alpha(z) V^\beta E(z) dz \quad (\text{III.30})$$

En outre, la température critique de flambement T_{cr} pour la théorie classique de la plaque, est déduit comme :

$$T_{cr} = \frac{\pi^2(s^2+1)(A_k D_k - B_k)}{a^2 A_k A_{T2}(1+\nu)} - \frac{T_m A_{T1}}{A_{T2}} \quad (\text{III.31})$$

Notez que la valeur de $\beta = 1$ représente une variation linéaire de la température à travers l'épaisseur. Tandis que pour des valeurs de β qui diffèrent de l'unité nous aurons une variation non linéaire de la température à travers l'épaisseur.

III.P1.4. Conclusion :

Dans cette partie, l'analyse du flambement thermique des plaques épaisses fonctionnellement graduées FGM simplement appuyées sous chargement thermique uniforme, linéaire et non linéaire est présentée en utilisant la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé basée sur différentes formes de fonction (parabolique, exponentielle, sinusoïdale, hyperbolique, ...etc.). Les présentes théories prennent en compte l'effet de cisaillement transversal et donnent une distribution correcte des contraintes de cisaillement transversales suivant l'épaisseur de la plaque.

Chapitre III
Deuxieme partie:
Validation et comparaison
des résultats.

Analyse du Flambement Thermique des Plaques Epaissees en FGM

Deuxième partie: Validation et comparaison des résultats

III.P2.1. Introduction :

L'intérêt de ce chapitre est de présenter les résultats numériques pour valider le modèle proposé et vérifier l'exactitude de la présente théorie (la théorie de déformation de cisaillement a ordre élevé (HPT)) a base des différentes formes de fonction de gauchissement $\psi(z)$ (parabolique, exponentielle, sinusoidale, hyperbolique, ...etc.) qui permet d'une part de prendre en compte le cisaillement transverse dans l'étude et l'analyse de l'instabilité thermique des plaques épaisses en FGM simplement appuyée.

Dans cette section en basant sur le développement présenté dans le chapitre précédent. La théorie présentée est variationnelle, elle n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description correcte de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres.

III.P2.2. Résultats numériques :

Dans cette partie, différents exemples numériques sont présentés et discutés pour vérifier l'exactitude et l'efficacité des présentes théories pour prédire la variation de température critique de flambement des plaques en matériaux à gradient de propriétés (FGM) simplement appuyées sous une variation de température uniforme, linéaire et non linéaire à travers l'épaisseur.

Afin de valider les résultats, une comparaison avec les travaux connus dans la littérature scientifique a été réalisée.

Dans le but d'obtenir des résultats numériques, une plaque fonctionnellement graduée composée d'Aluminium et d'Alumina (Al/Al_2O_3) est considérée.

Les propriétés matérielles utilisées dans les exemples numériques, étaient les suivantes :

✓ **Metal** $E_m = 0,7 \cdot 10^5 [MPa]$, $\nu_m = 0,3$, $\alpha_m = 23 \times 10^{-6} [^{\circ}C^{-1}]$,

✓ **Céramique** $E_c = 3,8 \cdot 10^5 [MPa]$, $\nu_c = 0,3$, $\alpha_c = 7,4 \times 10^{-6} [^{\circ}C^{-1}]$,

La théorie présentée en ce chapitre est vérifiée par les exemples du plaque carré ($a/b = 1$), qui était considéré par (Javaheri (2002), Bouiadjra et Al (2012) et Akavci (2014)).

En basant sur différentes formes de fonction (**tableau. III.P1. 1**), Les résultats obtenus et les courbes d'étude ont été confrontés et comparés avec ceux de la littérature. On essayera dans ce chapitre de décrire la relation entre la présente théorie de déformation de cisaillement (HPT : noter par F3) et les différentes théories de déformation de cisaillement à ordre élevé et du premier ordre (FPT) et la théorie classique pour les plaques (CPT).

Nous considérons les différentes formes de fonction de gauchissement qui permet d'une part de prendre en compte le cisaillement transverse, et d'autre part d'en approcher la forme de distribution suivant l'épaisseur.

Pour les variations de température linéaire et non linéaire à travers l'épaisseur, la température augmente de 5°C dans la surface de la plaque riche en métal $T_m = 5^\circ\text{C}$.

III.P2.2.1 Etude comparative :

Tableau III.P2.1 : Température critique de flambement T_{cr} d'une plaque FG en fonction de l'indice de puissance p et le rapport de dimension a/b pour une variation uniforme de température et $a/h=100$.

p	Théories	a/h=100		
		a/b =1	a/b =2	a/b =5
0	F3(HPT)	17.0894	42.6876	220.6729
	Reddy(2000)	17.0894	42.6875	220.6706
	FPT	17.0894	42.6875	220.6704
	CPT	17.0991	42.7477	222.2883
1	F3(HPT)	7.9400	19.8359	102.6365
	Reddy(2000)	7.9400	19.8358	102.6356
	FPT	7.9400	19.8358	102.6355
	CPT	7.9437	19.8594	103.2690
10	F3(HPT)	7.4634	18.6365	96.1183
	Reddy(2000)	7.4634	18.6366	96.1213
	FPT	7.4644	18.6427	96.2820
	CPT	7.4692	18.6731	97.1005

Dans le tableau **III.P2.1** la variation de la température critique de flambement obtenue par la présente méthode de déformation de cisaillement sinusoïdale est comparée avec celle qui est basée à la fois sur la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FPT) et la théorie classique des plaques (CPT) d'une part et les travaux de Reddy (2000) qui sont basé sur la théorie de déformation de cisaillement parabolique. Pour cela, une variation uniforme de température a été retenue. A partir de ce tableau, il est clair que les résultats ont une très grande concordance.

Tableau III.P2. 2 : Température critique de flambement T_{cr} d'une plaque FG en fonction de l'indice de puissance p et le rapport de dimension a/b pour une variation linéaire de température et $a/h=100$.

p	Théories	a/h=100		
		a/b =1	a/b =2	a/b =5
0	F3(HPT)	24.1789	75.3753	431.3459
	Reddy(2000)	24.1789	75.3751	431.3412
	FPT	24.1789	75.3751	431.3409
	CPT	24.1982	75.4955	434.5767
1	F3(HPT)	5.5138	27.8242	183.1140
	Reddy(2000)	5.5138	27.8242	183.1123
	FPT	5.5138	27.8242	183.1122
	CPT	5.5209	27.8683	184.3002
10	F3(HPT)	4.3653	24.1648	161.4674
	Reddy(2000)	4.3653	24.1650	161.4729
	FPT	4.3670	24.1757	161.7575
	CPT	4.3757	24.2297	163.2080

Dans le tableau III P2.2, une autre étude comparative est conduite pour l'évaluation de la température critique de flambement entre la présente théorie et ceux de la littérature. La plaque est sujette à une variation linéaire de température à travers l'épaisseur.

A partir de ces résultats, on constate l'existence d'une grande concordance.

Tableau III P2.3 : Température critique de flambement T_{cr} d'une plaque FG en fonction de l'indice de puissance p , le rapport de dimension a/b et de l'exposant de température β pour une variation non linéaire de température et avec $a/h=10$.

p	Théories	a/h=10			
		a/b =1		a/b =3	
		$\beta =2$	$\beta =5$	$\beta =2$	$\beta =5$
0	F3(HPT)	4.8414	9.6829	20.0164	40.0328
	Reddy (2000)	4.8410	9.6821	20.0066	40.0133
	FPT	4.8408	9.6817	19.9919	39.9838
	CPT	5.1147	10.2294	25.6336	51.2673
1	F3(HPT)	2.1068	4.3182	8.9711	18.3880
	Reddy (2000)	2.1066	4.3179	8.9673	18.3802
	FPT	2.1065	4.3178	8.9615	18.3684
	CPT	2.2072	4.5241	11.0921	22.7355
10	F3(HPT)	1.6766	2.8844	6.5362	11.2448
	Reddy (2000)	1.6770	2.8851	6.5402	11.2515
	FPT	1.6974	2.9202	6.8510	11.7862
	CPT	1.8092	3.1126	9.0951	15.6470

Tableau III.P2.4 : Température critique de flambement T_{cr} d'une plaque FG en fonction de l'indice de puissance p , le rapport de dimension a/b et de l'exposant de température β pour une variation non linéaire de température et avec $a/h=5$.

p	Théories	a/h=5			
		a/b=1		a/b=3	
		$\beta=2$	$\beta=5$	$\beta=2$	$\beta=5$
0	F3(HPT)	16.7416	33.4833	48.6540	97.3080
	Reddy (2000)	16.7353	33.4706	48.5388	97.0776
	FPT	16.7270	33.4541	48.1978	96.3955
	CPT	20.5039	41.0078	102.5796	205.1592
1	F3(HPT)	7.4586	15.2878	22.9714	47.0843
	Reddy (2000)	7.4561	15.2827	22.9214	46.9819
	FPT	7.4529	15.2762	22.7734	46.6785
	CPT	8.8709	18.1827	44.4106	91.0281
10	F3(HPT)	5.5369	9.5255	14.3554	24.6965
	Reddy (2000)	5.5400	9.5308	14.3463	24.6810
	FPT	5.7630	9.9144	15.7723	27.1342
	CPT	7.2736	12.5134	36.4172	62.6510

En plus, dans les tableaux (III.P2.3 et III.P2.4) une autre comparaison intéressante entre les résultats de la présente théorie et ceux de la solution analytique développée par Reddy (2000), et celle de FPT et CPT. Ces tableaux présentent la différence de température critique pour différentes valeurs du rapport (a/b), de l'exposant de température β , et de l'indice de puissance p sous un chargement de température non linéaire ($a/h=5$ et $a/h=10$).

Ces tableaux indiquent que nos résultats sont très satisfaisants.

Dans les tableaux III.P2.5 et III.P2.6, III.P2.7, une autre étude comparative est conduite pour l'évaluation de la température critique de flambement entre la présente théorie (HPT) a base des différentes formes de fonction de gauchissement $\psi(z)$ (parabolique, exponentielle, sinusoïdale, hyperbolique, ...etc., Noter de F1, F2, ..., F13) et ceux de la littérature (Bouiadjra et Al, (2012), Javaheri (2002), Akavci (2014)). La plaque épaisse en FGM est sujette à une variation uniforme (tableau III.P2.5), linéaire (tableau III.P2.6) et non linéaire (tableau III.P2.7) de température à travers l'épaisseur.

Utilisant les rapports $a/h = 10, a/b = 1$ et $p=0$, on remarque l'existence d'une grande concordance entre les résultats de la présente théorie a base des différentes formes de fonction $\psi(z)$ et ceux de (Bouiadjra et Al, (2012), Javaheri (2002), Akavci (2014)).une déviation insignifiante a été notée dans la forme de fonction marquée comme F4. Il est noté l'évaluation de la température critique de flambement T_{cr} augmente avec l'augmentation du rapport (a/b), et elle diminue avec l'augmentation de rapport (a/h), prouvant que l'effet des formes de fonction est inversement proportionnel à l'épaisseur de plaque.

Tableau III.P2.5 : Température critique de flambement T_{cr} d'une plaque FG en fonction de l'indice de puissance p et le rapport de dimension a/b pour une variation uniforme de température et ($a/h=5$, $a/h=10$ et $m=n=1$).

p	Source	a/h=5			a/h=10		
		a/b=1	a/b=2	a/b=5	a/b=1	a/b=2	a/b=5
0	B-2012	---	---	---	1618.680	---	---
	J-2002	---	---	---	1617.484	---	---
	AK-2014	---	---	---	1618.750	---	---
	F 1	5583.442	10959.448	23192.800	1618.681	3747.312	12872.652
	F 2	5583.442	10959.448	23192.800	1618.681	3747.312	12872.652
	F 3	5585.559	10971.195	23351.112	1618.820	3748.159	12891.308
	F 4	5621.881	11128.293	24554.451	1621.682	3764.011	13119.689
	F 5	5583.426	10959.286	23189.151	1618.681	3747.307	12872.361
	F 6	5587.882	10970.575	23065.303	1619.120	3749.487	12883.915
	F 7	5590.910	10995.856	23580.381	1619.225	3750.450	12928.084
	F 8	5591.659	10999.186	23608.379	1619.283	3750.774	12932.982
	F 9	5591.659	10999.186	23608.379	1619.283	3750.774	12932.982
	F 10	5583.400	10958.981	23181.701	1618.681	3747.302	12871.799
	F 11	5591.409	10983.034	23086.289	1619.429	3751.109	12900.319
F 12	5584.615	10966.460	23297.570	1618.752	3747.766	12884.026	
F 13	5583.510	10960.024	23204.664	1618.684	3747.333	12873.662	
1	B-2012	---	---	---	758.390	---	---
	J-2002	---	---	---	757.891	---	---
	AK-2014	---	---	---	758.424	---	---
	F 1	2671.531	5398.066	12201.408	758.395	1775.555	6406.862
	F 2	2671.531	5398.066	12201.408	758.395	1775.555	6406.862
	F 3	2672.409	5403.230	12280.777	758.450	1775.899	6415.235
	F 4	2687.462	5472.168	12882.413	759.588	1782.344	6517.540
	F 5	2671.524	5397.995	12199.578	758.395	1775.553	6406.732
	F 6	2673.373	5402.958	12137.451	758.570	1776.440	6411.918
	F 7	2674.629	5414.066	12395.630	758.611	1776.831	6431.733
	F 8	2674.939	5415.529	12409.648	758.634	1776.963	6433.930
	F 9	2674.939	5415.529	12409.648	758.634	1776.963	6433.930
	F 10	2671.514	5397.861	12195.841	758.395	1775.551	6406.479
	F 11	2674.835	5408.433	12147.980	758.692	1777.099	6419.278
F 12	2672.017	5401.149	12253.939	758.423	1775.740	6411.967	
F 13	2671.559	5398.320	12207.357	758.396	1775.563	6407.316	
10	B-2012	---	---	---	692.690	---	---
	J-2002	---	---	---	692.519	---	---
	AK-2014	---	---	---	692.570	---	---
	F 1	2276.788	4205.548	7964.373	692.694	1562.032	4840.685
	F 2	2276.788	4205.548	7964.373	692.694	1562.032	4840.685
	F 3	2275.519	4203.601	8011.792	692.544	1561.350	4839.654
	F 4	2290.659	4265.870	8477.768	693.799	1568.105	4929.058
	F 5	2276.857	4205.716	7963.455	692.702	1562.066	4840.864
	F 6	2285.447	4231.109	7961.675	693.549	1566.244	4871.915
	F 7	2276.487	4209.521	8092.708	692.597	1561.714	4849.198
	F 8	2276.720	4210.599	8103.084	692.615	1561.814	4850.812
	F 9	2276.720	4210.599	8103.084	692.615	1561.814	4850.812
	F 10	2277.006	4206.087	7961.620	692.717	1562.141	4841.265
	F 11	2286.626	4234.654	7962.595	693.664	1566.815	4876.290
F 12	2275.691	4203.457	7994.618	692.570	1561.457	4838.988	
F 13	2276.584	4205.060	7967.439	692.672	1561.928	4840.175	

Tableau III.P2.6 : Température critique de flambement T_{cr} d'une plaque FG en fonction de l'indice de puissance p et le rapport de dimension a/b pour une variation linéaire de température et ($a/h=5$, $a/h=10$ et $m=n=1$ et $T_m = 5^\circ c$).

p	Source	a/h=5			a/h=10		
		a/b=1	a/b=2	a/b=5	a/b=1	a/b=2	a/b=5
0	B-2012	---	---	---	3227.360	---	---
	J-2002	---	---	---	3224.968	---	---
	AK-2014	---	---	---	3227.510	---	---
	F 1	11156.885	21908.895	46375.601	3227.364	7484.624	25735.303
	F 2	11156.885	21908.895	46375.601	3227.364	7484.624	25735.303
	F 3	11161.117	21932.391	46692.225	3227.640	7486.319	25772.617
	F 4	11233.762	22246.586	49098.902	3233.365	7518.023	26229.378
	F 5	11156.852	21908.572	46368.301	3227.363	7484.616	25734.721
	F 6	11165.765	21931.151	46120.607	3228.241	7488.976	25757.830
	F 7	11171.821	21981.711	47150.762	3228.451	7490.901	25846.167
	F 8	11173.319	21988.372	47206.759	3228.567	7491.550	25855.963
	F 9	11173.319	21988.372	47206.759	3228.567	7491.550	25855.963
	F 10	11156.801	21907.961	46353.401	3227.364	7484.605	25733.597
	F 11	11172.819	21956.069	46162.578	3228.859	7492.219	25790.637
F 12	11159.229	21922.920	46585.139	3227.506	7485.533	25758.051	
F 13	11157.020	21910.049	46399.328	3227.368	7484.667	25737.324	
1	B-2012	---	---	---	1412.960	---	---
	J-2002	---	---	---	1412.023	---	---
	AK-2014	---	---	---	1413.020	---	---
	F 1	5000.989	10114.514	22873.951	1412.968	3320.615	12006.476
	F 2	5000.989	10114.514	22873.951	1412.968	3320.615	12006.476
	F 3	5002.635	10124.198	23022.805	1413.071	3321.261	12022.180
	F 4	5030.867	10253.490	24151.154	1415.205	3333.348	12214.049
	F 5	5000.976	10114.380	22870.518	1412.967	3320.612	12006.231
	F 6	5004.443	10123.687	22754.003	1413.295	3322.275	12015.958
	F 7	5006.798	10144.520	23238.207	1413.373	3323.009	12053.121
	F 8	5007.381	10147.264	23264.499	1413.416	3323.257	12057.241
	F 9	5007.381	10147.264	23264.499	1413.416	3323.257	12057.241
	F 10	5000.956	10114.129	22863.511	1412.968	3320.608	12005.758
	F 11	5007.186	10133.956	22773.750	1413.525	3323.512	12029.762
F 12	5001.901	10120.295	22972.472	1413.021	3320.962	12016.051	
F 13	5001.042	10114.989	22885.109	1412.969	3320.631	12007.327	
10	B-2012	---	---	---	1218.630	---	---
	J-2002	---	---	---	1218.328	---	---
	AK-2014	---	---	---	1218.420	---	---
	F 1	4025.755	7443.641	14104.519	1218.639	2759.160	8569.143
	F 2	4025.755	7443.641	14104.519	1218.639	2759.160	8569.143
	F 3	4023.504	7440.189	14188.549	1218.372	2757.952	8567.316
	F 4	4050.334	7550.535	15014.289	1220.596	2769.923	8725.746
	F 5	4025.876	7443.938	14102.892	1218.652	2759.221	8569.461
	F 6	4041.099	7488.936	14099.738	1220.154	2766.624	8624.486
	F 7	4025.220	7450.681	14331.938	1218.467	2758.597	8584.229
	F 8	4025.632	7452.592	14350.324	1218.498	2758.774	8587.089
	F 9	4025.632	7452.592	14350.324	1218.498	2758.774	8587.089
	F 10	4026.140	7444.595	14099.641	1218.680	2759.354	8570.171
	F 11	4043.188	7495.218	14101.369	1220.358	2767.635	8632.239
F 12	4023.810	7439.935	14158.116	1218.418	2758.142	8566.137	
F 13	4025.392	7442.776	14109.953	1218.600	2758.976	8568.240	

Tableau III.P2.7 : Température critique de flambement T_{cr} d'une plaque FG en fonction de l'indice de puissance p , le rapport de dimension a/b et de l'exposant de température β pour une variation non linéaire de température et avec ($a/h=5$, $a/h=10$ et $m=n=1$ et $T_m = 5^\circ\text{C}$).

P	Source	a/h=5				a/h=10			
		a/b=1		a/b=5		a/b=1		a/b=5	
		$\beta = 2$	$\beta = 5$	$\beta = 2$	$\beta = 5$	$\beta = 2$	$\beta = 5$	$\beta = 2$	$\beta = 5$
0	B-2012	16730.0	33470.0	---	---	4840.0	9680.0	---	---
	Z-2010	16741.6	33483.3	---	---	4841.4	9682.9	---	---
	AK-2014	16738.8	33477.7	---	---	4841.2	9682.5	---	---
	F 1	16735.3	33470.6	69563.4	139126.8	4841.0	9682.0	38602.9	77205.9
	F 2	16735.3	33470.6	69563.4	139126.8	4841.0	9682.0	38602.9	77205.9
	F 3	16741.6	33483.3	70038.3	140076.7	4841.4	9682.9	38658.9	77317.8
	F 4	16850.6	33701.2	73648.3	147296.7	4850.0	9700.0	39344.0	78688.1
	F 5	16735.2	33470.5	69552.4	139104.9	4841.0	9682.0	38602.0	77204.1
	F 6	16748.6	33497.2	69180.9	138361.8	4842.3	9684.7	38636.7	77273.4
	F 7	16757.7	33515.4	70726.1	141452.3	4842.6	9685.3	38769.2	77538.5
	F 8	16759.9	33519.9	70810.1	141620.3	4842.8	9685.7	38783.9	77567.8
	F 9	16759.9	33519.9	70810.1	141620.3	4842.8	9685.7	38783.9	77567.8
	F 10	16735.2	33470.4	69530.1	139060.2	4841.0	9682.0	38600.4	77200.7
	F 11	16759.2	33518.4	69243.8	138487.7	4843.2	9686.5	38685.9	77371.9
F 12	16738.8	33477.6	69877.7	139755.4	4841.2	9682.5	38637.0	77274.1	
F 13	16735.5	33471.0	69598.9	139198.0	4841.0	9682.1	38605.9	77211.9	
1	B-2012	7450.0	15280.0	---	---	2100.0	4310.0	---	---
	Z-2010	7458.6	15287.8	---	---	2106.8	4318.2	---	---
	AK-2014	7457.5	15285.6	---	---	2106.7	4318.1	---	---
	F 1	7456.1	15282.8	34103.5	69901.7	2106.6	4317.9	17900.8	36691.1
	F 2	7456.1	15282.8	34103.5	69901.7	2106.6	4317.9	17900.8	36691.1
	F 3	7458.5	15287.8	34325.5	70356.5	2106.7	4318.2	17924.2	36739.1
	F 4	7500.6	15374.1	36007.7	73804.7	2109.9	4324.7	18210.3	37325.5
	F 5	7456.1	15282.7	34098.4	69891.2	2106.6	4317.9	17900.4	36690.4
	F 6	7461.2	15293.3	33924.7	69535.1	2107.1	4318.9	17914.9	36720.1
	F 7	7464.8	15300.5	34646.6	71014.8	2107.2	4319.1	17970.3	36833.7
	F 8	7465.6	15302.3	34685.8	71095.1	2107.3	4319.3	17976.5	36846.3
	F 9	7465.6	15302.3	34685.8	71095.1	2107.3	4319.3	17976.5	36846.3
	F 10	7456.0	15282.7	34088.0	69869.7	2106.6	4317.9	17899.7	36689.0
	F 11	7465.3	15301.7	33954.1	69595.4	2107.4	4319.6	17935.5	36762.3
F 12	7457.5	15285.6	34250.4	70202.7	2106.7	4318.1	17915.1	36720.4	
F 13	7456.2	15282.9	34120.2	69935.8	2106.6	4317.9	17902.1	36693.7	
10	B-2012	5540.0	9530.0	---	---	1670.0	2880.0	---	---
	Z-2010	5536.9	9525.5	---	---	1676.6	2884.4	---	---
	AK-2014	5537.3	9526.2	---	---	1676.7	2884.5	---	---
	F 1	5540.0	9530.8	19409.8	33392.1	1677.0	2885.0	11792.3	20287.2
	F 2	5540.0	9530.8	19409.8	33392.1	1677.0	2885.0	11792.3	20287.2
	F 3	5536.9	9525.5	19525.5	33591.0	1676.6	2884.4	11789.8	20282.9
	F 4	5573.8	9589.0	20661.8	35545.9	1679.7	2889.7	12007.9	20658.0
	F 5	5540.1	9531.1	19407.6	33388.2	1677.0	2885.1	11792.8	20287.9
	F 6	5561.1	9567.2	19403.2	33380.7	1679.1	2888.6	11868.5	20418.2
	F 7	5539.2	9529.6	19722.8	33930.5	1676.7	2884.6	11813.1	20322.9
	F 8	5539.8	9530.5	19748.1	33974.0	1676.8	2884.7	11817.0	20329.7
	F 9	5539.8	9530.5	19748.1	33974.0	1676.8	2884.7	11817.0	20329.7
	F 10	5540.5	9531.7	19403.1	33380.5	1677.0	2885.1	11793.8	20289.6
	F 11	5564.0	9572.1	19405.5	33384.6	1679.3	2889.1	11879.2	20436.6
F 12	5537.3	9526.2	19483.6	33519.0	1676.7	2884.5	11788.2	20280.1	
F 13	5539.5	9530.0	19417.3	33404.9	1676.9	2885.0	11791.1	20285.1	

III.P2.2.2. Etude paramétrique

Dans cette section, afin d'étudier les effets des différents paramètres de la plaque et du chargement thermique sur la réponse de la plaque en terme de température critique de flambement, divers résultats sont présentés sur les figures **III.P2-1** à **III.P2-3**.

La variation de la température critique de flambement T_{cr} d'une plaque FG Al/Al₂O₃ simplement appuyée et soumise à trois différents chargements thermiques est illustrée aux figures **III.P2-1** à **III.P2-3** en fonction de l'indice de puissance p , du rapport (a/h) et du rapport de dimension (a/b) respectivement.

A partir de ces figures, on constate que la température critique de flambement T_{cr} augmente rapidement avec l'augmentation de la valeur p , ainsi quand $p > 5$, le rapport (a/h) est constant et avec un rapport (a/b) variable.

Les différentes formes de fonction n'exercent pas un effet significatif sur ce comportement ou les courbes obtenues en employant F3, F10, F12, et F13 qui peuvent être clairement vus dans (**Figure III.P2 .1 a**).

Pour $p=0$ (plaque entièrement en céramique) la température critique de flambement T_{cr} prend des valeurs très important par rapport à un indice $p \geq 10$ (plaque entièrement en céramique).

Aussi, il est a noter que la différence de température critique de flambement T_{cr} décroît avec l'augmentation des valeurs du rapport (a/h) et inversement par rapport au rapport de dimension (a/b) .

Dans la (**Figure III.P2.1 b**) il peut être clairement vu dont l'augmentation du rapport (a/h) , indépendamment de la valeur de p , donc les courbes à approchez asymptotiquement a zéro, qui est conforme au fait que les plaques minces ont plus bas résistance pendant le changement de température.

La température critique de flambement T_{cr} de la plaque entièrement en céramique est supérieure à celle en FGM. Ceci s'explique par le faite que, la plaque en céramique est plus rigide que les autres dans un environnement thermique.

Les différences entre les types de chargement décroissent avec l'augmentation de (a/h) parce que la plaque devient de plus en plus mince.

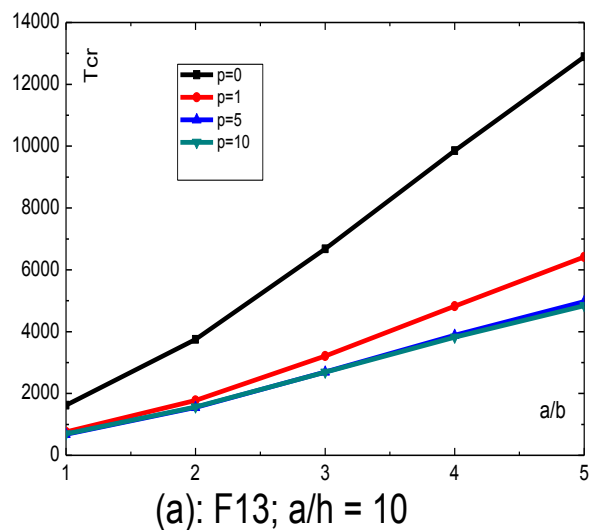
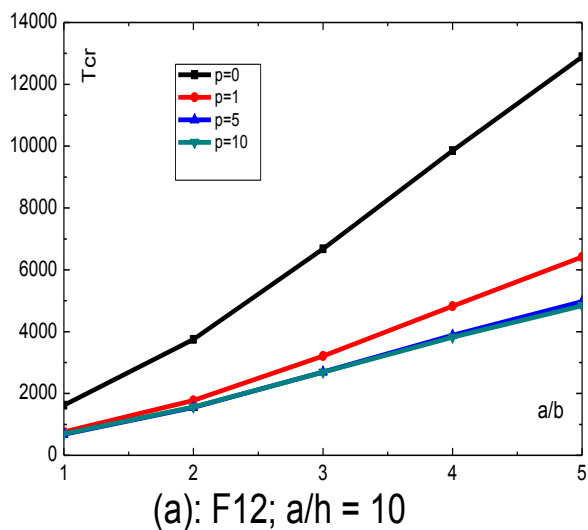
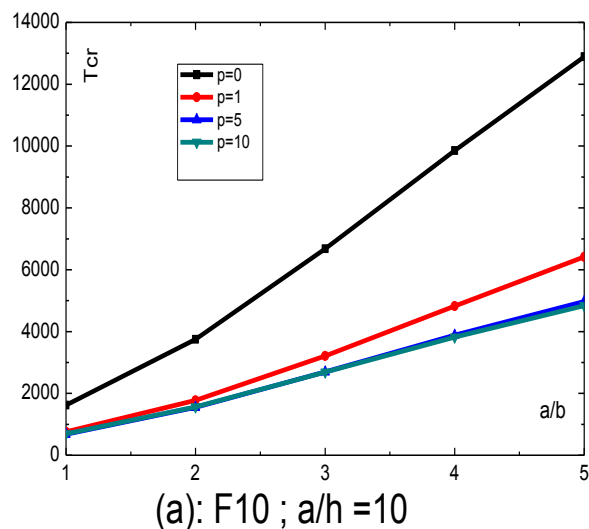
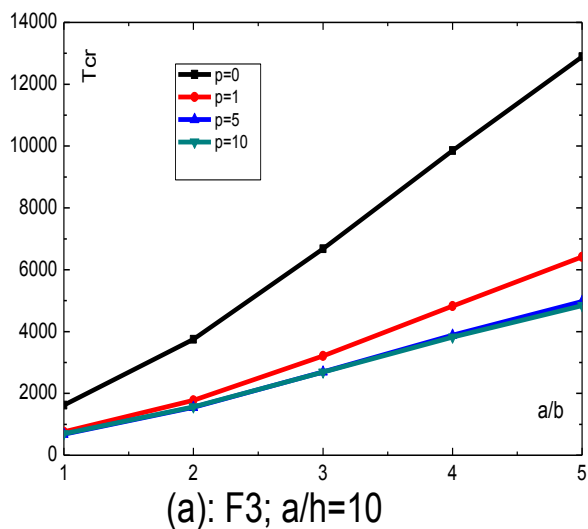


Figure III.P2.1(a): Différence de température critique de flambement T_{cr} due a une variation de température uniforme, d'une plaque FG ($a/h=10$) en fonction de l'indice de puissance p et pour différentes valeurs du rapport (a/b) et pour différentes formes de fonction (F3, F10, F12, F13).

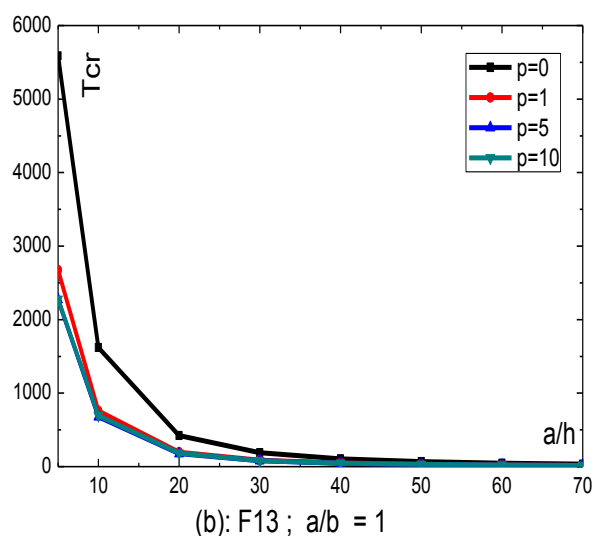
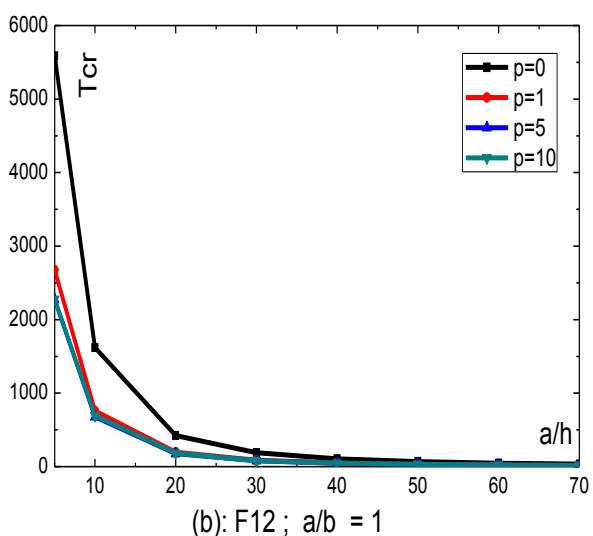
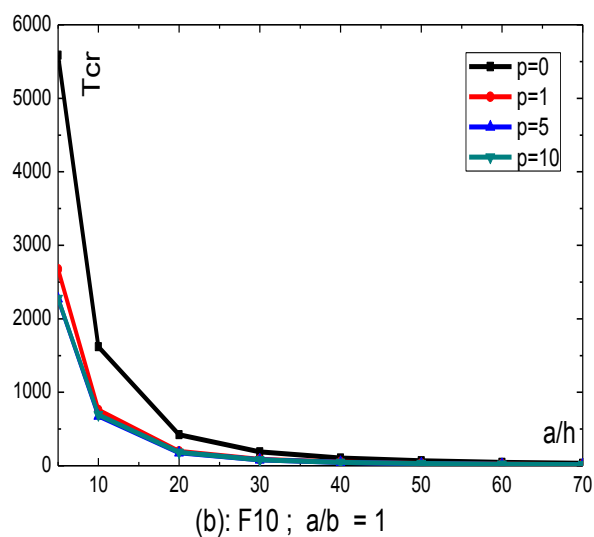
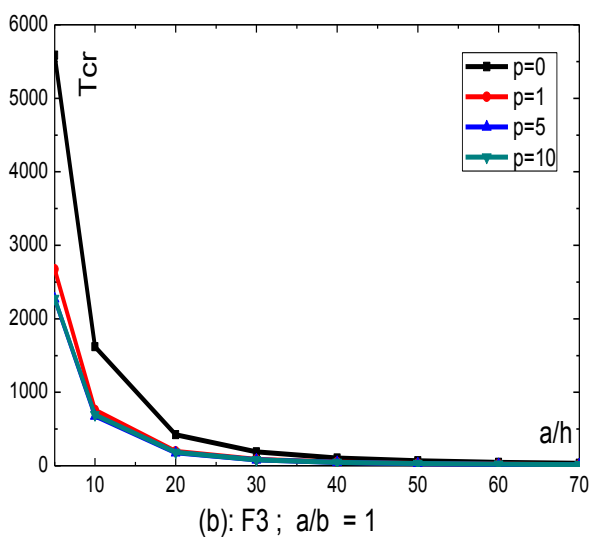


Figure III.P2.1 (b) : Différence de température critique de flambement T_{cr} due a une variation de température uniforme, d'une plaque FG ($a/b=1$) en fonction de l'indice de puissance p et pour différentes valeurs du rapport (a/h) et pour différentes formes de fonction (F3, F10, F12, F13).

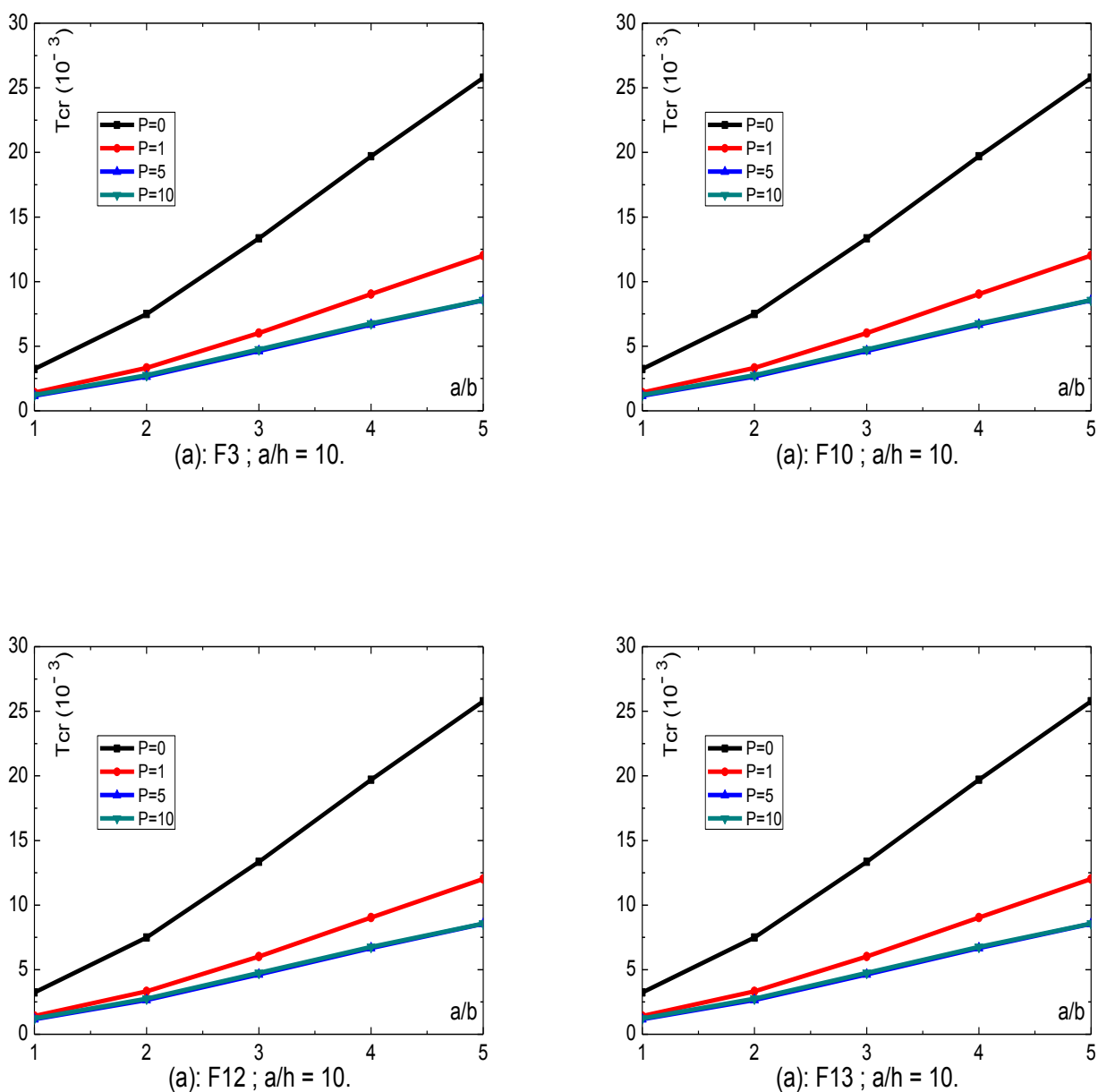


Figure III.P2.2 (a) : Différence de température critique de flambement T_{cr} due a une variation de température linéaire, d'une plaque FG ($a/h=10$) en fonction de l'indice de puissance p et pour différentes valeurs du rapport (a/b) et pour différentes formes de fonction (F3, F10, F12, F13).

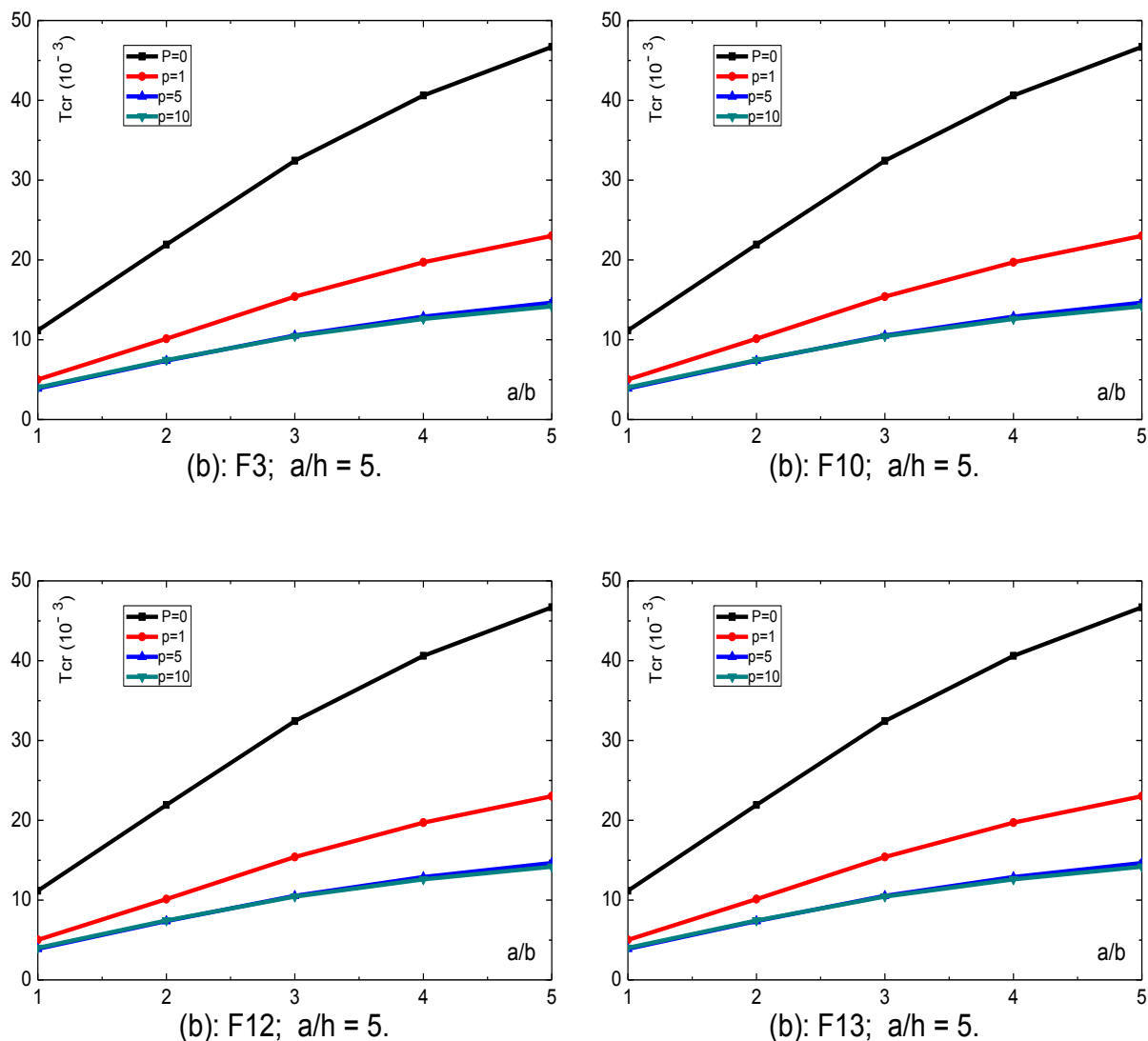
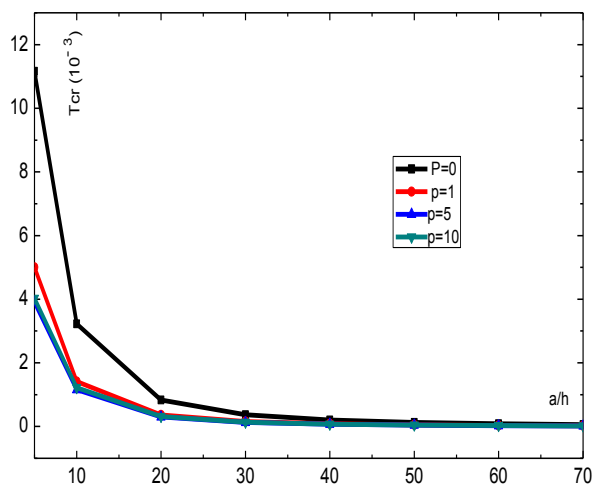
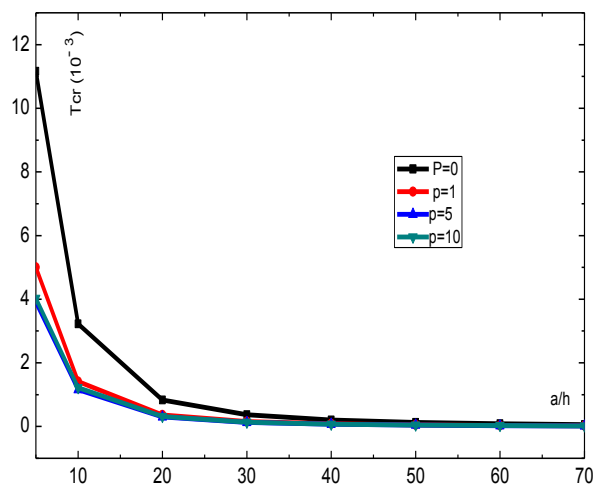


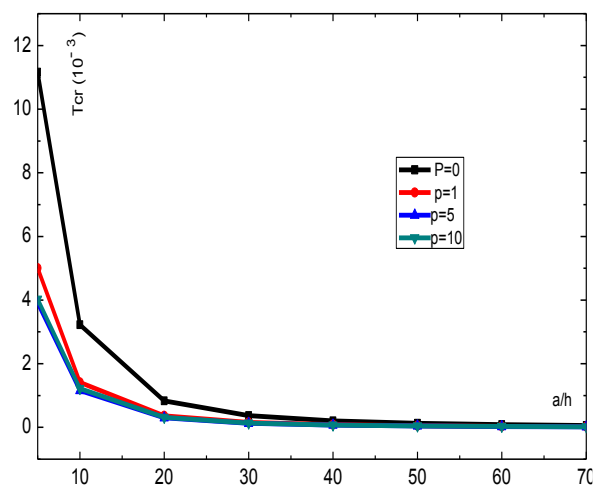
Figure III.P2.2 (b) : Différence de température critique de flambement T_{cr} due a une variation de température linéaire, d'une plaque FG ($a/h=5$) en fonction de l'indice de puissance p et pour différentes valeurs du rapport (a/b) et pour différentes formes de fonction (F3, F10, F12, F13).



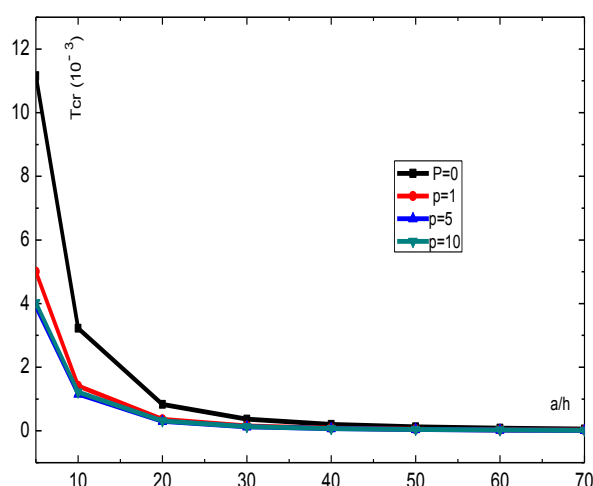
(c): F3; $a/b = 1$.



(c): F10; $a/b = 1$.

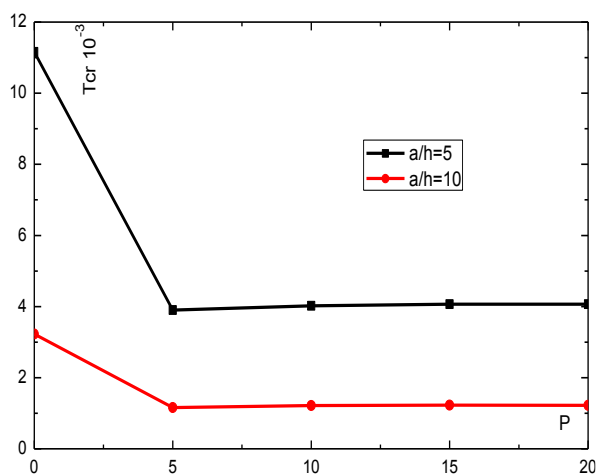


(c): F12; $a/b = 1$.

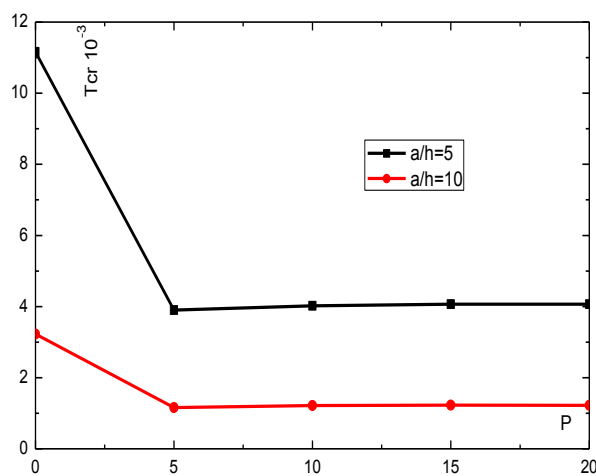


(c): F13; $a/b = 1$.

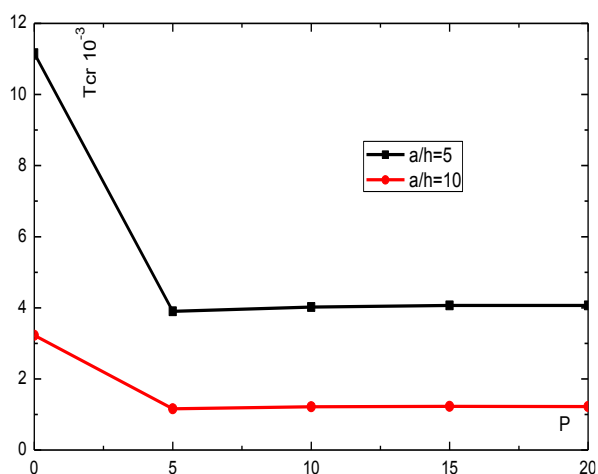
Figure III.P2.2 (c) : Différence de température critique de flambement T_{cr} due a une variation de température linéaire, d'une plaque FG ($a/b=1$) en fonction de l'indice de puissance p et pour différentes valeurs du rapport (a/h) et pour différentes formes de fonction (F3, F10, F12, F13).



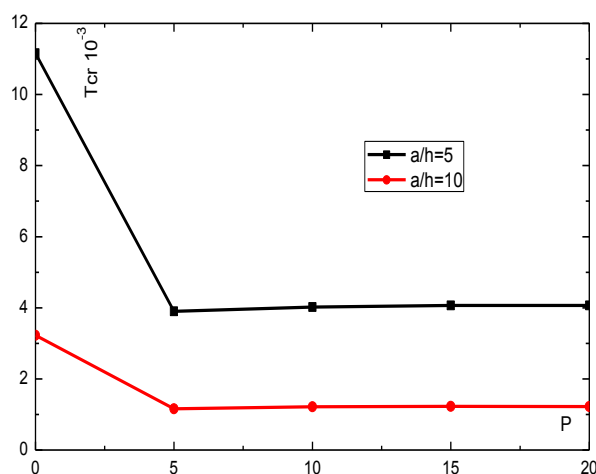
(d): F3; $a/h = 5$ et $a/h = 10$, $a/b = 1$.



(d): F10; $a/h = 5$ et $a/h = 10$, $a/b = 1$.



(d): F12; $a/h = 5$ et $a/h = 10$, $a/b = 1$.



(d): F13; $a/h = 5$ et $a/h = 10$, $a/b = 1$.

Figure III.P2.2 (d) : Différence de température critique de flambement T_{cr} due a une variation de température linéaire, d'une plaque FG ($a/h=5$, $a/h=10$, $a/b=1$) en fonction de différentes valeurs de l'indice de puissance p et pour différentes formes de fonction

(F3, F10, F12, F13).

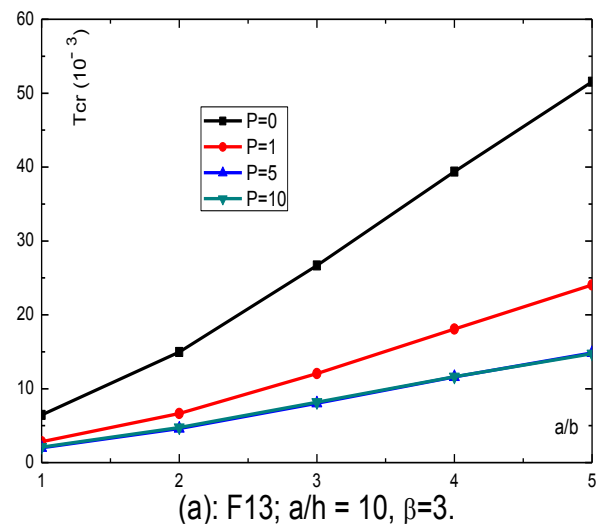
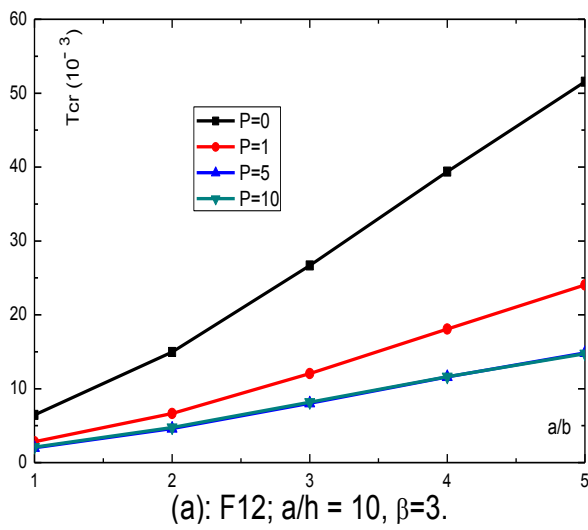
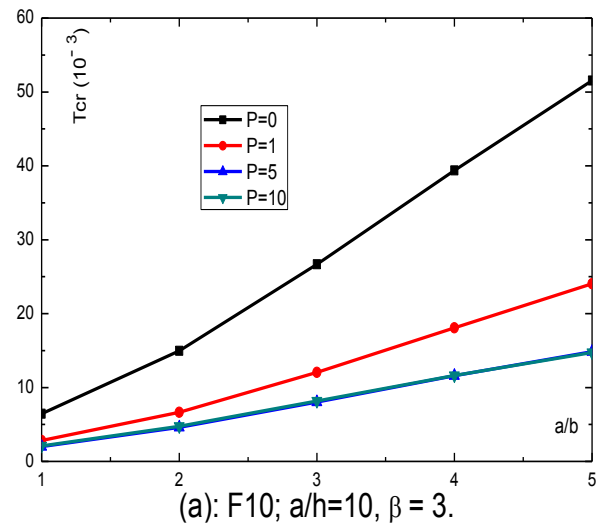
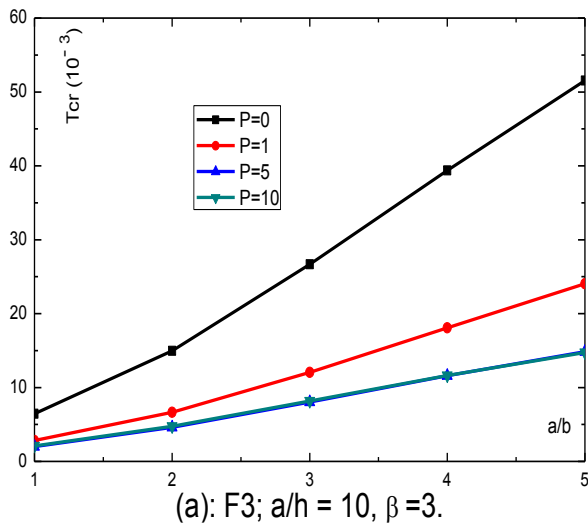
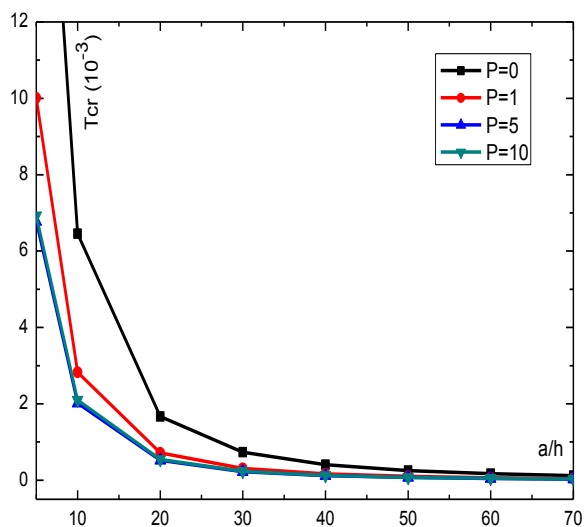
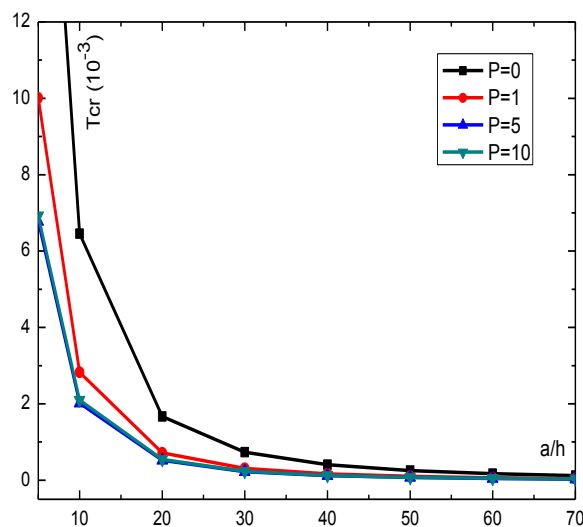


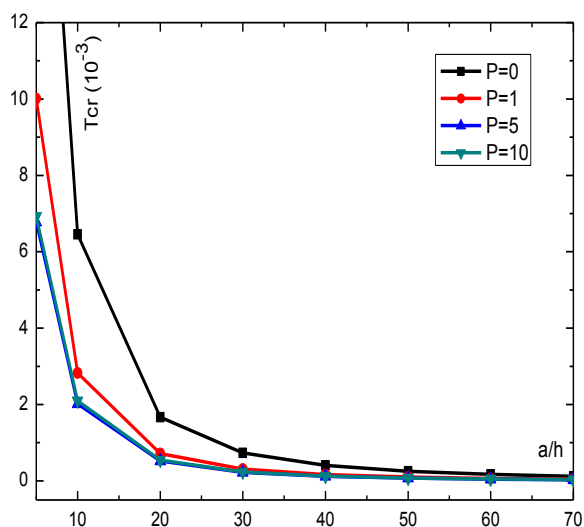
Figure III.P2.3 (a) : Différence de température critique de flambement T_{cr} due a une variation de température non linéaire, d’une plaque FG ($a/h=10, \beta = 3$) en fonction de l’indice de puissance p et pour différentes valeurs du rapport (a/b) et pour différentes formes de fonction (F3, F10, F12, F13).



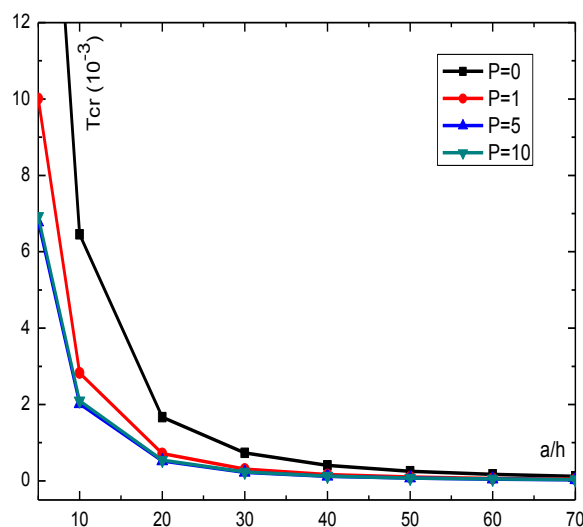
(b): F3; $a/b = 1, \beta = 3$.



(b): F10; $a/b = 1, \beta = 3$.

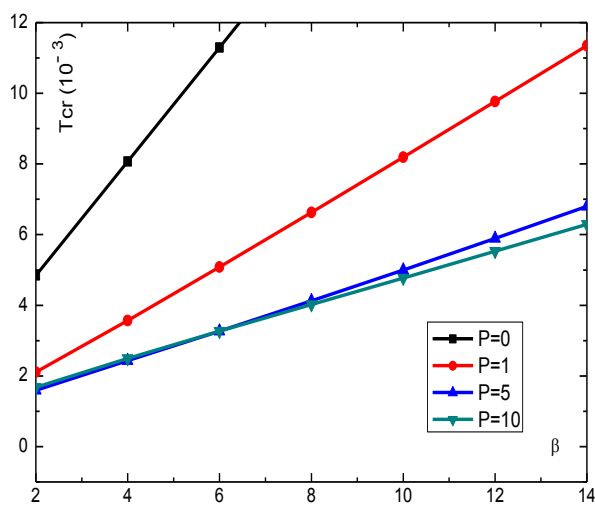


(b): F12; $a/b = 1, \beta = 3$.

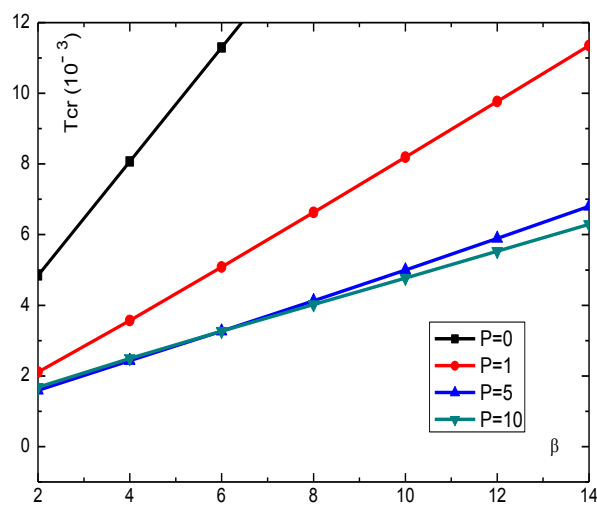


(b): F13; $a/b = 1, \beta = 3$.

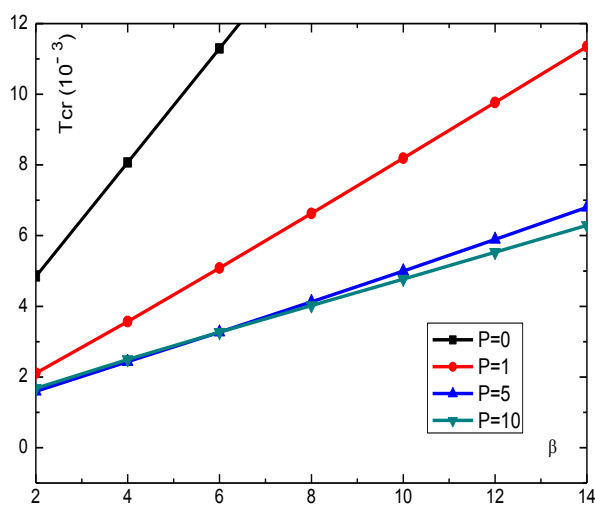
Figure III.P2.3 (b) : Différence de température critique de flambement T_{cr} due a une variation de température non linéaire, d'une plaque FG ($a/b=1, \beta = 3$) en fonction de l'indice de puissance p et pour différentes valeurs du rapport (a/h) et pour différentes formes de fonction (F3, F10, F12, F13).



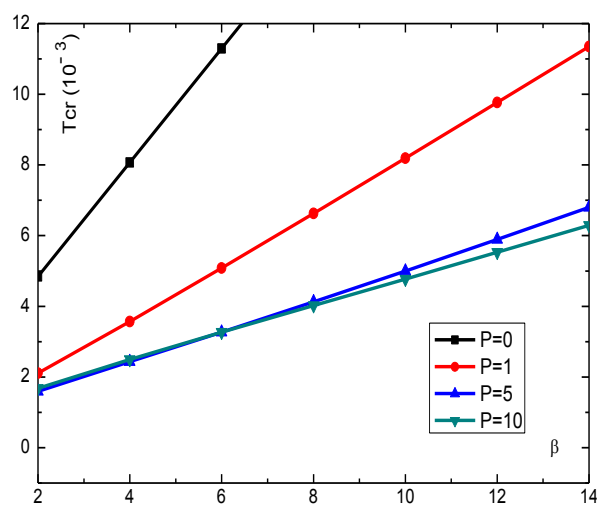
(c): F3; $a/h=10, a/b=1$.



(c): F10; $a/h=10, a/b=1$.



(c): F12; $a/h=10, a/b=1$.



(c): F13; $a/h=10, a/b=1$.

Figure III.P2.3 (c) : Différence de température critique de flambement T_{cr} due a une variation de température non linéaire, d'une plaque FG ($a/h=10, a/b=1$) en fonction de l'indice de puissance p et pour différentes valeurs de (β) et pour différentes formes de fonction (F3, F10, F12, F13).

La variation de la température critique de flambement T_{cr} en fonction des rapports (a/h) est (a/b) d'une plaque FG sollicitée par différents chargement thermique est indiquée sur les figures III.P2-1 à III.P2-3. Il est a constaté que mise à part le type de chargement, la différence de température critique de flambement T_{cr} décroît avec l'augmentation des valeurs du rapport (a/h) et la réduction des valeurs du rapport (a/b). En plus, les valeurs de T_{cr} augmentent avec celles du paramètre du non linéarité β .

Figure III.P2.3. Prouve qu'avec une variation de température non-linéaire, les valeurs de la température critique de flambement T_{cr} augmentent et pour la valeur $p=0$. Pour de plus grandes valeurs de p , les courbes de la variation de la température critique augmentent légèrement plus lentement, quand $p=5$ ou $p=10$. Pour la valeur $\beta > 6$, les courbes commencent à aller dans les différentes directions et leur séparation est clairement vue.

III.P2.3. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présenté les résultats numériques de l'analyse du flambement thermique des plaques FGM sous chargement thermique. La stabilité au flambement thermique des plaques fonctionnellement graduées sujettes aux variations de température uniforme, linéaire et non linéaire à travers l'épaisseur a été étudiée sur la base de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur et la théorie non linéaire de Von Karman. Les propriétés matérielles de la plaque fonctionnellement graduée sont supposées être variées d'une façon continue à travers l'épaisseur selon une loi de distribution polynomiale de la fraction volumique des constituants. Une très bonne corrélation a été trouvée entre les résultats de la présente méthode et ceux de la littérature. Plusieurs études paramétriques ont été menées pour montrer les effets des différents paramètres sur la température critique de flambement.

Finalement, il est à noter que la solution proposée est non seulement fiable mais aussi une approche facile pour simuler le comportement au flambement des plaques FG.

Conclusion générale et perspectives

CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES

Basé sur les résultats présentés, il peut conclure que les différentes formes de fonction données dans le tableau III soient acceptables pour l'analyse et l'étude de la stabilité au flambement thermiques des plaques épaisses en FGM. Les résultats obtenus par la procédure analytique élaborée sont presque identiques avec les résultats donnés dans la littérature. Les différentes formes de fonctions ont un effet significatif plus grand dans les plaques épaisses en FGM et donnent une description correcte de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque. Ce travail montre que la fraction de volume des constituants de métal/céramique et le rapport (a/b) , ont un effet sensiblement plus grand sur la résistance thermique on utilisant la théorie de déformation à ordre supérieur. On lui montre également que les plus grandes valeurs de la température critique se produisent quand la valeur du paramètre (p) est basse, alors que la température critique de flambement diminue ou disparaissent complètement avec l'augmentation de la valeur (p) . Aussi, la température « T_{cr} » diminue avec l'accroissement du rapport (a/h) et inversement par rapport au rapport (a/b) .

L'étude paramétrique menée a démontrée que la géométrie de la plaque représentée par rapports d'épaisseur, le type de la charge thermique ainsi que le paramètre du non linéarité thermique ont une très grande influence sur la température critique de flambement. Le mélange de la céramique et de métal avec variation continue de la fraction volumique peut éliminer les problèmes d'interface des plaques sandwiches et les distributions des contraintes sont ainsi lisses.

Toutes les études comparatives ont démontrées que les charges critiques de flambement obtenues en utilisant la présente théorie d'ordre élevé et les autres théories de déformation de cisaillement sont presque identiques. Par conséquent, on peut dire que la théorie proposée est précise et simple pour résoudre les problèmes d'instabilité des plaques FGM.

Dans l'application de technologie, l'étude de ce phénomène est très essentielle pour choisir des paramètres de matériau appropriés pour s'assurer que ces plaques FGM ne remet pas l'intégrité structurale en question une fois soumise à champ de température élevé.

En perspective, il est prévu d'appliquer la présente théorie d'ordre élevé qui n'exige pas de facteur de correction de cisaillement pour le calcul de différentes formes de structures et des plaques fonctionnellement graduées sous la combinaison des différents types de

chargement (mécanique, thermique, hygrothermique, vibratoire) et en tenant compte les changements dans les propriétés matérielles des matériaux constitutives dû à la température.

Finalement, cette étude peut servir comme une base de données pour les futurs chercheurs dans le but de développer et d'approfondir les connaissances dans le domaine d'utilisation des matériaux à gradient de propriétés (FGM) pour les applications dans les domaines civils.

Références bibliographiques

Les références

Abdizadeh H, élaboration et caractérisation de composites « composites laminaires tri-couches à base d'alumine » thèse de doctorat INSA de Lyon 1997 212 p.

A. Chabot. Analyse des efforts a l'interface entre les couches des matériaux composites à l'aide de modèles multiparticulaires de matériaux multicouches. PhD thesis, ENPC, 1997.

Afaq, K.S., Karama, M. & Mistou, S. (2003), “Un nouveau modèle raffine pour les structures multicouches”, In Comptes-rendus des 13^{ème} Journées Nationales sur les Composites, pages 289-292. Strasbourg, March 2003.

Akavci ,S.S. , analyse du flambement thermique des plaques fonctionnellement gradués sur une base selon une théorie élastique hyperbolique de déformation de cisaillement , mère Mèche de compos ,50 (2014) ,2 ,Pp.197-212.

AKavci , S.S. , nouveau déplacement hyperbolique du cisaillement deux mode pour les plaques composé stratifiés orthotropes ,la mère Mech de Composé , 46 (2010),2,Pp .215-226.

Bousri Fet Boussaada N, Analyse du flambement des plaques en matériaux à gradient de propriétés en utilisant la théorie de déformation de cisaillement exponentielle, mémoire de master, Université Tiaret, 2015.

Bouiadjra, M.B., et autres, flambement thermique des plaques fonctionnellement gradués selon une théorie de raffinage quatre-variable de plaques, efforts de J Thermo, 35(2012), 8, Pp.677-694.

Baron. C, Naili. S. –Propagation d’ondes élastiques au sein d’un guide d’ondes élastiques anisotrope à gradient unidirectionnel sous chargement fluidel, *Compte Rendue Mécanique* ; 336 (9) : 722–730, (2008).

Bishop, a, Lin, C.Y. Navaratnam, M. Rawlings.R.D MC. Chane a functionally graded material produced by a powder metallurgical process, *journal of materials science letters* 1993.

Boch. P Chartier . Huttepain. M Tapa (1986) -casting of AL2O3/ZrO2 Composites.

Bachir bouiadjra R ,Contribution à l’Etude de la Stabilité des Plaques Epaises en Composite sur Fondations Elastiques, thèse de doctorat, Université Mohamed boudiaf Oran 2015.

- Bouderba B** ,Etude du comportement des plaques FGM sous chargement thermo mécanique en utilisant de nouvelles théories à ordre élevé, thèse de doctorat, Université Djillali liabes Sidi bel- Abbes, 2014.
- Barka M** , Investigation de la stabilité thermique des plaques FGM sigmoïdes, mémoire de magister, Université Djillali liabes Sidi bel- Abbes, 2012.
- Chi, S-H Chung, YL.** , Comportement mécanique de plaques rectangulaires à gradation fonctionnelle des matériaux transversale -partie I : analyse, solides strict ,43 (2006), 13, Pp.3675-3674 J international.
- E. Carrera.** An assessment of mixed and classical theories on global and local response of multilayered orthotropic plates. Composite structures, vol. 50, pages 183,198, 2000. G. Kirchhoff. Uber das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheibe. Journal fur reine und angewandte Mathematik, vol. 40, pages 51, 88, 1850.
- Houdayfa O**, Etude numérique par éléments finis de l'effet de la température sur la vibration et la stabilité des plaques, thèse de doctorat, Université Mohamed Khider – Biskra, 2015.
- Ichiro chiota ; yoshinari miyamoto** functionally graded materials 1996 elsevier.
- Jawaheer, R., Eslami, M.R.**, flambement thermique des plaques fonctionnellement gradués basés sur une Théorie évaluée, efforts de J Thermo, 25(2002), 7, Pp.603-625.
- Jian. C.Y., Hashida. T, Takahashi. H and Saito. M.** (1995), "Thermal shock and fatigue resistance evaluation of functionally graded coatings for gas turbine blades by **laser heating method**", Composites Engineering, (1995), 879–889.
- J.M. Whitney.** « Shear correction factors for orthotropic laminates under static loads ». J.Applied Mechanics, Vol.40, pages 302-304, 1973.
- Karma ,M**, et autres comportement mécanique de faisceau composé stratifié par le nouveau modèle de structures composé stratifié multicouche avec la continuité transversale d'effort de cisaillement , solides struct , 40 (2003) ,6,Pp.1525-1546 d'international J .
- Koizumi. M**, FGM activities in Japan, department of materials chemistry. Ryukoku University, Ohtsu 520-21 Japan, 1996.
- Kawasaki. A and Watanabe. R** (1997), "Evaluation of thermo mechanical performance for thermal barrier type of sintered functionally graded materials", Composites Part B, Engineering, 29–35.

- Lanhe, w.** flambement thermique d'une plaque rectangulaire de FGM d'un appui simple modérément épaisse , Composite Structures, 64 (2004)2, Pp211-218.
- L. Liberscu.** On the theory of anisotropic elastic shell and plates. Int J Solids Structures, vol. 3, pages 53,68, 1967.
- Miyamoto, M., Kaysser, W.A., Rabin, B.H.** et al. (1999), "Functionally Graded Materials Design". Processing and Applications.
- Marković, s** , synthèse et caractérisation des poudres BaTi1-xSnxO3 et d'en céramique matériaux, thèse de ph.D. , Université de Belgrade, Serbie, 2008(dans serbe).
- Mantari ,J.L.** ,et autres se pliant et analyse de vibration des plaques et des coquilles isotropes et multicouche à l'aide d'une nouvelle théorie évaluée précise de déformation de cisaillement ,compos pièce B- anglais ,43(2012),8,Pp.3348-3360.
- Mantais, J.L.** ,et autres nouvelle théorie évolué tangentiel-exponentielle de déformation de cisaillement à pour les plaques composé s'avances compos pièces B- anglais ,60 (2014) .Pp.319-328.
- Maiche, nord-est** et autres «une nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique pour flambement et vibration du plaques sandwich fonctionnellement graduées J international Sci Mech ,53 (2011), 4, Pp.237-247.
- Mechab,B.,** et autres , analyse des plaques composé stratifiés orthotropes épais basés sur la théorie évaluée de déformation de cisaillement par la nouvelle fonction sous chargement et thermo mécanique, Compos pièce B- anglais ,43 (2012),3,Pp. 1453-1458.
- Najafizadeh, MM et Heydari, HR** (2004) gauchissement thermique des plaques circulaires fonctionnellement classés sur la base de la théorie de la plaque de déformation par cisaillement d'ordre supérieur. Revue européenne de Mécanique / solides, 23 (6), 1085-1100.
- Najafizadeh, MM et Heydari, HR** (2004) gauchissement thermique des plaques circulaires fonctionnellement classés sur la base de la théorie de la plaque de déformation par cisaillement d'ordre supérieur. Revue européenne de Mécanique / solides, 23 (6), 1085-1100.
- Nguyen, T.V. (2004)**, "Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaques ", Thèse de doctorat de l'école nationale des ponts et chaussées.

- Öchsner, A., Murch, G.E.** et de **Lemos, M.J.S.** (2008), "Cellular and Porous Materials", WILEY-VCH, 398-417.
- Praveen, GN et Reddy, JN** (1998) Nonlinear analyse thermoélastique transitoire de plaques métalliques en céramique à gradient fonctionnel. Journal international des solides et des structures, 35 (33), 4457-4476.
- Praveen, GN et Reddy, JN** (1998) Non linear analyse thermo élastique transitoire de plaques métalliques en céramique à gradient fonctionnel. Journal international des solides et des structures, 35 (33), 4457-4476.
- Reddy, JN** (2000) Analyse des plaques fonctionnellement graduées. Journal international des méthodes numériques en ingénierie, 47 (1-3), 663-684.
- Reissner, E., Stavisky : Y.**, se pliant et s'étendant de certains types des plaques élastiques anisotropiques hétérogènes , JAPPL mech-T-ASME ,28(1961), Pp.402-408 Ryukoku University, Ohtsu, 520-21 Japan.
- Reissner E.**, The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. J ApplMech, Trans ASME, 12(2): 69–77, 1945.
- Reddy, J.N. (1987)**, "A generalization of two-dimensional theories of laminated composite plates", Commun. Appl. Numer. Methods, (3), 173-180.
- Ren, J.G. (1986)**, "A new theory of laminated plate", Composite Science and Technology, (26), 225-239.
- Soldats, K.**, théorie transversale de déformation de cisaillement pour les plaques monoclinique homogènes, acta, Mech ,94 (1992) ,3,Pp.195 -220.
- Srinivas, S., Rao, A.K. (1973)**, "Flexure of thick plates", ASME, 298-299.
- Suresh, S.** et Mortensen, A. Functionally graded metals and metal ceramic composites 2: thermomechanical behaviour. International Materials Reviews., 42(3), 85–116 (1998).
- Steffes.H.D. DvorakM.Wewel.** Plasma sprayed functionally graded materials-processing and application, in proceeding of the first international symposium on functionally gradient materials-Sedai Japan 1990.
- Touratier, M. (1991)**, "An efficient standard plate theory", Engng Sci, vol. 29(8), 901-916. **Vel, S.S., Batra, R.C. (2002)**, "Exact Solution for Thermoelastic Deformations of Functionally Graded Thick Rectangular Plates", AIAA Journal, 40(7), 1421-1433.

Viet.Tung. Nguyen. « Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaques ». Thèse de doctorat de l'école nationale des ponts et chaussées ,2004 .

Woo, J., Meguid, SA, analyse non linéaire des plaques fonctionnellement gradués et coquilles peu profondes ; international Solides struct ,38(2001) ,42-43, Pp.7409-7421.

Zenkour, AM (2006) théorie de déformation de cisaillement Généralisée pour l'analyse de flexion des plaques fonctionnellement graduées. Applied Mathematical Modeling, 30 (1), 67-84.

Zenkour, AM (2004) flambage de plaques composites visco-élastique renforcée par des fibres à l'aide de diverses théories de la plaque. Journal de mathématiques de l'ingénieur, 50 (1), 75-93.

Zenkour, AM (2006) théorie de déformation de cisaillement Généralisée pour l'analyse de flexion des plaques fonctionnellement graduées. Applied Mathematical Modeling, 30 (1), 67-84.

Zenkour , heure du matin ,Masha ,D.S. ,analyse de flambement thermique des plaques d'en céramique-métal à fonctionnellement gradués, la science naturelle .,2 (2010),9,Pp.968-978 .