



FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES
DÉPARTEMENT GÉNIE CIVIL

Mémoire de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme de Master

Spécialité : Génie Civil

Option : Matériaux et Structure (M.S)

Présenté par :

Bouzateur Med Salah Eddine

Guillal Messaoud

Sujet du mémoire

**ANALYSE DES POUTRES EN FGM EN UTILISANT
THEORIE QAUSI3D**

Soutenu publiquement le 18 juin Devant le jury composé de :

M, DRAICHE .K	Président
M, TLIDJI .Y	Rapporteur
M, H.H.ABELAZIZ	Examineur
M, HADJI .L	Examineur
M ^{me} , KHLIFA .Z	Examineur

Année universitaire : 2016-2017.

Remerciement

Tout d'abord, nous tenons à remercier Allah, le clément et le miséricordieux de nous avoir donné la force et le courage de mener à bien ce modeste travail.

Nos parents qui nous ont suivis pendant nos études

Nous adressons nos remerciements chaleureux à tous les professeurs qui nous ont enseignés au cours des études primaires jusqu'aux années du cursus universitaire pour l'obtention du diplôme de master.

*Toute personne ayant contribué de près ou de loin à achever ce travail, en particulier notre encadreur ; **Mr. Tlidji Youcef** et notre chef de département ; **Mr. Bouakkaz khaled** pour leurs orientations, leurs aides et précieux conseils.*

Et bien sûr, merci à tous les travailleurs d'université Ibn Khaldoun et à tous nos amis avec qui nous avons gardé des souvenirs très agréables des bons moments vécus ensemble.

En fin, nous vifs remerciements aux membres de jury et à son président avec

qui nous allons soutenir ce mémoire et juger de sa qualité.

Dédicace

Avant tout, je remercie le Dieu le tout puissant de m'avoir donné le courage et la volonté pour réaliser ce modeste travail.

Je dédie ce travail ;

A mes très, très chers parent pour leur soutien et tous les efforts qu'on m'a donnée le long de mon parcours, et je leurs souhaite bonne santé.

Je dédie ce travail aussi au reste de ma famille mes sœurs :

Inas,Aya Anfal et Israa à toute les familles

Bouzateur et Gourgache.

Je dédie également ce travail À Mon encadreur Mr. Tlidji Youcef Et tous les enseignants qui nous ont dirigés vers la porte de la réussite

A tous mes ami(e)s:

Sofian,Sofian Mahmoud, Chalhoub ,Abdelrahman, Didine,Sidali

Somali Tchikou Djelel Hamza Rabie et Ayoub.....

Et toute la promotion de 2^{eme}années master M.S (2016-2017).

Bouzateur Med Salah Eddine

Résumé

Dans cette étude, une nouvelle démarche analytique utilisant une théorie quasi3d de déformation en cisaillement, a été développée, afin d'étudier la flexion des poutres graduées. Les effets des déformations de cisaillement transverses ainsi que la déformation normale transverse sont pris en considération.

Les matériaux constituant la poutre sont supposés graduellement variables suivant le sens de l'épaisseur selon une distribution simple de loi de puissance en termes des fractions de volume des constituants ; les deux matériaux avec lesquels on a travaillé sont le métal et la céramique.

Les équations d'équilibre sont dérivées par le principe de minimisation des énergies. Des solutions analytiques de la flexion sont obtenues pour des poutres simplement appuyées soumises à des charges uniformes et sinusoïdales.

A la fin, des exemples illustratifs sont donnés pour montrer les effets de la variation des divers paramètres tel que (l'indice de puissance matériel, l'effet d'étirement de l'épaisseur, et le rapport épaisseur – longueur) sur la flexion des poutres FGM.

Mots clés : Poutre fonctionnellement graduée ; Théorie de déformation en cisaillement ; Effet d'étirement, quasi3d ; flexion.

Abstract

In this study, a new analytical approach using a quasi3d shear deformation theory was developed to study the bending of graduated beams. The effects of transverse shear strains and the transverse normal deformation are considered.

The constituent materials of the beam are supposed gradually variable depending the height direction based on a simple power distribution law in terms of the volume fractions of the constituents; the two materials with which we worked are metals and ceramics.

Governing equations are obtained by the energy minimization principle. Analytical solutions are obtained for bending of simply supported FGM beam under two loads (uniform and sinusoidal).

At the end, illustrative examples are presented to show the effects of changes in different parameters such as (material graduation, the stretching effect of the thickness, and thickness ratio - length) on the Bending of an FGM beam.

Keywords: Functionally graded beam; shear deformation theory; Stretching effect; Quasi3d; Bending.

تم في هذه الأطروحة تطوير نظرية جديدة لتشوه القص , من اجل دراسة الانحناء بروافد المتدرجة وظيفيا تحت إثقال مختلفة .حيث يتم اخذ الآثار المترتبة عن إجهاد القص العرضي وكذلك إجهاد القص العادي بعين الاعتبار .

من اجل ذلك يفترض ان تكون خصائص المواد متدرجة في اتجاه سمك رافدة وفقا لقانون توزيع بسيط. المادتان التي تم استعمالها في هذا العمل هي المعادن والخاف .

يتم حساب معادلات التوازن وفق المبدأ التقليل من الطاقة . ويتم الحصول على الحلول التحليلية لانحناء .

يتم الحصول على الحلول التحليلية لانحناء لروافدة مدعمة بكل بساطة. في الاخير , يتم وضع امثلة تطبيقية لإظهار اثار كل من التدرج المختلفة , سمك التمدد , شروط الحدود ومعدل السماكة والطول على لانحناء الرافدة متدرجة وظيفيا .

الكلمات المفتاحية: رافدة متدرجة وظيفيا، نظرية تشوه القص، تأثير التمدد، الانحناء .

Sommaire

Remerciement.....	i
Dédicace.....	ii
Résumé.....	iii
Abstract.....	iv
Sommaire.....	vi
Liste des figures.....	ix
Liste des tableaux.....	x
Introduction général.....	1
Chapitre 1 GENERALITE SUR LES MATERIAUX COMPOSITES ET LES MATERIAUX FGM.....	3
1.1 Introduction :.....	3
1.2 Matériaux composites.....	3
1.2.1 Définition.....	3
1.2.2 Les composants élémentaires des matériaux composites.....	4
1.2.3 Le renfort.....	5
1.2.4 La matrice.....	7
1.2.5 Les matrices métalliques.....	7
1.2.6 Les matrices céramiques.....	7
1.3 Classification des matériaux composites.....	8
1.3.7 Classification suivant la forme des constituants.....	8
1.3.8 Introduction.....	8
1.3.9 Les composites à fibres.....	8
1.3.10 Les composites à particules.....	8
1.3.11 Classification suivant la nature des constituants.....	9
1.4 Les matériaux composites structuraux.....	9
1.4.12 Monocouches.....	9
1.4.13 1.4.2 Stratifiés.....	10
1.4.14 Sandwichs.....	10
1.5 Définition d'un matériau FGM :.....	11
1.6 Concept sur les matériaux a gradient de propriété :.....	12
1.7 Différence entre FGM et les matériaux composites traditionnels :.....	13
1.8 L'intérêt d'utilisation des FGM :.....	14
1.9 Les méthodes d'élaboration des FGM :.....	14
1.9.15 Coulage en Bande (Tape Casting Ou Doctor-Blade) :.....	15

1.9.16	Coulage Séquentiel en Barbotine (Slip Casting) :	16
1.9.17	Dépôt par Electrophorèse :	16
1.9.18	Compaction Sèche des Poudres :	17
1.10	Domaines d'application des matériaux à gradients évalués FGM :	17
1.11	Propriétés physiques et mécaniques des FGM :	18
1.11.19	Propriétés de l'aluminium :	18
1.11.20	Propriétés de la céramique :	19
1.12	Propriétés matérielles effectives d'un matériau FGM:	20
1.13	Les différentes lois qui régissent la variation des propriétés matérielles suivant l'épaisseur d'une poutre FGM :	20
1.13.21	Propriétés matérielles de la poutre P-FGM :	20
1.13.22	Propriétés matérielles de la poutre S-FGM :	22
1.13.23	Propriétés matérielles de la poutre E-FGM.....	23
1.14	Conclusion.....	23
Chapitre 2 Théorie des poutres.....		24
2.1	Introduction	24
2.2	Historique des théories des poutres :	24
2.3	Le comportement des poutres composites :	24
2.4	Les différents types de poutres :	25
2.5	Les différentes théories des poutres :	26
2.5.1	Modèle d'Euler Bernoulli (Classical Beam Theory- CBT) :	26
2.5.2	Modèle de Timoshenko (FSDBT) :	27
2.5.3	Théorie d'Ordre Elevé :	29
2.6	Méthodes de résolution	30
2.6.1	Procédure de Navier.....	30
2.6.2	Méthode de RAYLEIGH-Ritz.....	30
2.6.3	Méthode des éléments finis	31
2.7	Conclusion :	31
Chapitre 3 Formulation mathématique.....		32
3.1	Introduction	32
3.2	Formulation théorique :	32
3.3	Description du problème et équations de base :	33
3.4	Hypothèses de base :	33
3.5	Cinématique:	34
3.6	Formulation Variation :	35

3.7	Equations constitutives :.....	36
3.8	Équations d'équilibre :	37
3.9	Procédure de solution :	38
3.9.1	Solutions analytiques :.....	38
3.10	Conclusions :	39
Chapitre 4 Résultats et interpretation		40
4.1	Introduction	40
4.2	Validation des résultats	40
4.3	Conclusion.....	50
Conclusion générale		51

Liste des figures

Figure : Matériaux composite en général.....	5
Figure : Classification des fibres.....	6
Figure : Les différentes familles de matrice.....	8
Figure : Matériau composite monocouche.....	10
Figure : Matériau composite stratifié.....	10
Figure : Matériau composite sandwich.....	11
Figure : Type d'un matériau FGM en céramique et métal.....	12
Figure : La distribution composante des matériaux.....	14
Figure : Principe de la Méthode de Coulage en Bande.....	15
Figure : Modèles analytiques pour une couche en FGM.....	20
Figure : Dimensions de la poutre FGM.....	21
Figure : Variation du module de Young dans une plaque P-FGM.....	21
Figure : Variation du module de Young dans une poutre S-FGM.....	22
Figure : Variation du module de Young de la poutre E-FGM.....	23
Figure : Cinématique d'Euler Bernoulli.....	26
Figure : Cinématique de Timoshenko.....	28
Figure : Cinématique de la Théorie d'Ordre Elevé.....	29
Figure : Géométrie de la poutre FGM.....	33
Figure : Comparaison de contraintes axiale d'une poutre FGM sous charge uniforme ($l/h=5$).....	43
Figure : Comparaison de contraintes de cisaillement d'une poutre FGM sous charge uniforme ($l/h=5$).....	44
Figure : Variation de la flèche adimensionnelle en fonction de p	45
Figure : Variation de la contrainte axiale en fonction de p	45
Figure : Comparaison de contraintes axiale d'une poutre FGM sous charge sinusoïdale ($l/h=5$).....	48
Figure : Comparaison de contraintes de cisaillement d'une poutre FGM sous charge sinusoïdale ($l/h=5$).....	49

Liste des tableaux

Tableau : Propriétés de quelques éléments de renfort	5
Tableau : Fleche adimensionnelles \bar{w} d'une poutre carrée en FGM.....	41
Tableau : Contrainte axiale adimensionnelles $\bar{\sigma}_x$ d'une poutre carrée en FGM.....	41
Tableau : Contrainte normale adimensionnelles $\bar{\sigma}_z$ d'une poutre carrée en FGM.....	42
Tableau : Contrainte de cisaillement adimensionnelles $\bar{\sigma}_{xz}$ d'une poutre carrée en FGM.....	42
Tableau : Fleche adimensionnelles \bar{w} d'une poutre carrée en FGM.....	46
Tableau : Contrainte axiale adimensionnelles $\bar{\sigma}_x$ d'une poutre carrée en FGM.....	46
Tableau : Contrainte normale adimensionnelles $\bar{\sigma}_z$ d'une poutre carrée en FGM.....	46
Tableau : Contrainte de cisaillement adimensionnelles $\bar{\sigma}_{xz}$ d'une poutre carrée en FGM.....	47

Introduction général

Le vaste problème de la modélisation des poutres est étudié depuis de nombreuses années afin de pouvoir répondre aux problèmes liés à la modélisation des structures. Parmi les premiers travaux sur les théories des poutres, nous pouvons notamment citer ceux d'Euler-Bernoulli qui établissent un premier modèle de poutre sans prise en compte du cisaillement transverse ; ces travaux font encore à ce jour référence dans la littérature.

Ces approches simples permettent d'obtenir des résultats, le plus souvent satisfaisants pour les structures fortement élancées (ces modèles sont encore appelés "modèles de poutres minces") puisque pour celles-ci, l'importance relative des contraintes de cisaillement transverse reste modérée. Toutefois, les théories classiques ne permettent pas d'atteindre une précision satisfaisante dans les cas suivants :

- Lorsque l'élancement de la plaque est faible, les contraintes de cisaillement transverse ne peuvent plus être négligées vis à vis des autres composantes, il est alors recommandé d'utiliser un modèle adapté aux "poutres épaisses".

- Lorsqu'il y a un fort ratio de module de Young entre les couches de la poutre, la variation des déformations de cisaillement au travers de la poutre est très importante et doit être prise en compte.

Notre objectif dans ce travail est d'utiliser un modèle de déformation en cisaillement en tenant compte l'effet d'étirement de l'épaisseur, afin d'étudier le comportement statique des poutres en FGM.

Le présent travail de thèse s'articule autour de deux parties essentielles, une première présente une étude bibliographique et une deuxième contient le volet analytique du travail.

La partie étude bibliographique comprend deux chapitres :

Dans le premier chapitre : nous avons présenté des généralités sur les matériaux sandwichs, les différentes lois qui régissent la variation des propriétés matérielles ainsi que leurs domaines d'utilisation.

Puis, le deuxième chapitre a été consacré à la présentation des différentes théories des poutres (théorie CBT, FSDBT,....).

La partie Analytique en son rôle est scindée en deux chapitres :

Au troisième chapitre, une formulation mathématique du problème statique des poutres fonctionnellement graduée en tenir compte l'effet d'étirement d'épaisseur et sous de différentes a été présenté.

Dans le dernier chapitre, nous avons présenté la validation des résultats du présent model avec ceux de la littérature ; une étude paramétrique a été aussi faite pour comprendre au mieux le matériau et sa composition.

A la fin de ce travail, nous avons terminé par une conclusion générale où on souligne l'efficacité de cette théorie dans la résolution du comportement statique des poutres en FGM et l'effet d'étirement d'épaisseur, l'ainsi par des perspectives envisagées pour des travaux futurs.

Chapitre 1 GENERALITE SUR LES MATERIAUX COMPOSITES ET LES MATERIAUX FGM

1.1 Introduction :

Dans la plupart des cas, les investigateurs considèrent le matériau à gradient de propriété (FGM) comme étant un matériau composé particulier pour lesquels la fraction de volume varie sans interruption par l'épaisseur, Quelques études considèrent également le FGM comme étant un composé renforcé par un tissu dans lesquels l'orientation de fibre varie à travers l'épaisseur.

Un matériau FGM est un type de matériaux composites classé par leur microstructure variable dans l'espace; conçue pour optimiser l'exécution des éléments de structures par la distribution de propriétés correspondantes. Les distributions de propriété sont trouvées dans une variété de produits communs qui doivent avoir des fonctions multiples (c'est-à-dire multifonctionnelles) comme les liaisons entre les particules ; qui doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture ; mais doivent également être assez dures sur l'extérieur pour empêcher l'usure.

Ces matériaux offrent un grand potentiel pour les composants dont le fonctionnement est soumis à de fortes charges mécaniques ou thermiques, tels que les boucliers thermiques des vaisseaux spatiaux, les revêtements du plasma pour les réacteurs de fusion, les composantes du moteur pour les avions de combat.

1.2 Matériaux composites

1.2.1 Définition

Un matériau composite est défini d'une manière générale comme étant la combinaison macroscopique de deux ou plusieurs matériaux non miscibles, qui se complètent et qui ont des caractéristiques différentes. Ce qui donne un matériau hétérogène et anisotrope.

Le composé final aura des propriétés que les éléments constitutifs seuls ne possèdent pas. On appelle de façon courante, matériaux composites, des arrangements de renforts (fibres et/ou particules) noyés dans une matrice (résines), dont la résistance mécanique est beaucoup plus faible, que celle des renforts. La matrice assure la cohésion du matériau, l'orientation et la

tenue des fibres. Elle permet aussi de transmettre à ces fibres, qui assurent l'ossature du matériau, les sollicitations auxquelles sont soumises les pièces. Les renforts, sous forme de fibres, contribuent à l'amélioration de la résistance mécanique et la rigidité de la pièce obtenue, dans laquelle ils sont incorporés

Le but recherché dans ces associations est de combiner les propriétés de plusieurs classes de matériaux pour réaliser des pièces ou des produits directement selon la forme désirée, avec des propriétés bien précises (résistance mécanique, densité).

Les métaux sont en général tenaces (ils résistent à la propagation de fissures) et ductiles (ils présentent des déformations importantes avant de se rompre), de masse volumique élevée.

Les matières plastiques sont légères mais présentent de faibles propriétés mécaniques. Les céramiques sont rigides et résistantes, mais fragiles.

Il est donc du ressort de l'ingénieur de concevoir des structures tout en plaçant le bon matériau sous la bonne forme (morphologie des renforts), et au bon endroit (notion de répartition dans l'espace).

1.2.2 Les composants élémentaires des matériaux composites

Les matériaux composites sont formés d'une matrice organique – polymère thermodurcissable ou thermoplastique et d'une structure de renfort pouvant se présenter sous forme de particules, de mats, de fibres courtes, longues ou continues.

Les renforts les plus couramment utilisés sont les fibres, généralement de verre, de carbone ou d'aramide. Suivant les caractéristiques de la matrice et des renforts, on distingue généralement deux grandes familles : les composites de grande diffusion, peu onéreux, qui occupent une large part du marché et les composites à hautes performances. Ces derniers, généralement renforcés de fibres continues de carbone ou d'aramide, sont réservés à des secteurs de forte valeur ajoutée : aéronautique, médical, sports et loisirs. Les polymères thermodurcissables sont mis en forme par chauffage lors d'une transformation irréversible. Les principales résines thermodurcissables sont les polyesters insaturés, très largement utilisés, les résines époxydes et les résines phénoliques.

Les composites à matrice thermodurcissables représentent environ 70 % des composites transformés en Europe.

Les polymères thermoplastiques durcissent au cours du refroidissement. Le processus de transformation chimique qui les fabrique est réversible. Les principales résines thermoplastiques utilisées dans les composites sont le polypropylène, les polyamides et le polyéther-éther-cétone.

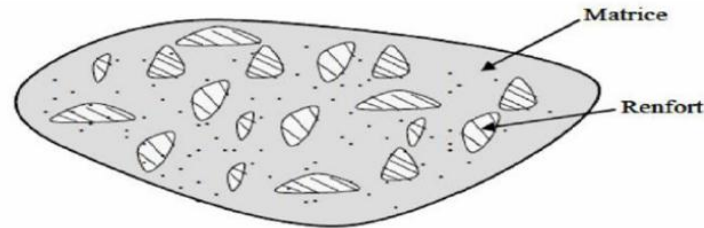


Fig (1.1) Matériaux composite en général.

1.2.3 Le renfort

Les composites artificiels sont souvent renforcés soit par des fibres, soit par des composants fabriqués à base de fibres (torons, assemblage de fibres tordues ensemble ; tissus ; mats, ou nappes). Chacune d'entre elles s'impose dans une application particulière en raison de ses propriétés spécifiques et de son prix.

- Les fibres de verre sont les plus anciennes (1940) et les moins chères (environ 1 euro/kg) des fibres du marché, et celles dont on réalise le plus fort tonnage. Elles sont fabriquées par extrusion du verre au travers d'une filière percée de trous de 1 à 2mm de diamètre, puis étirées jusqu'à obtenir des diamètres de 5 à 15mm, enduites et bobinées. Il existe différentes variétés selon la proportion de chaque composant (SiO_2 , Al_2O_3 , B_2O_3 , CaO , MgO), les meilleures propriétés étant obtenues pour les plus fortes proportions de silice (verre S, 65%).

- Les fibres de carbone doivent leurs propriétés à la très forte anisotropie des cristallites de graphite qui les composent. Leur prix décroît régulièrement, il est de l'ordre de 10 euros/kg. Elles sont fabriquées à partir de fibres de polymère (par exemple poly acrylonitrile) préalablement tissées, et carbonisées sous tension en plusieurs étapes, oxydation (100 à 200°C), puis pyrolyse (1500-2500°C). Selon la température et le temps de cuisson, les fibres présentent une "haute résistance" (HR) ou un "haut module" (HM).

Tab (1.1) Propriétés de quelques éléments de renfort

Matériau	Module de Young (GPa)	Résistance en traction (MPa)	Masse volumique (kg/m^3)	Température d'utilisation max (°C)	Allongement à rupture (%)
Verre R	80	2500	2500	650	3
Kevlar 49	130	3600	1450	200	2
Carbone HM	400	2000	1900	2500	/
Bore	400	3500	2650	700	0,8
Sic (fibre)	480	2300	3200	900	0,5
Sic (trichite)	840	21000	3200	1600	2,5

- Les fibres de polymère les plus connues sont des fibres de polyamides aromatiques, connues sous la marque commerciale de "Kevlar". De prix élevé (20 euros/kg), elles servent essentiellement à fabriquer des câbles.

- Les fibres métalliques ou céramiques sont les plus chères de toutes, en raison de leur difficulté de fabrication (de l'ordre de 1000 euros/kg). Les fibres de bore sont obtenues par réduction à 1100_C de chlorure de bore, qui se dépose sur un fil de tungstène de 10 à 15mm de diamètre. Le diamètre résultant est de 100 à 200mm pour la fibre. La même procédure expérimentale est utilisée pour produire des fibres de carbure de silicium (SiC). Les derniers développements concernent la production de trichites, ("WHISKERS") qui sont des monocristaux filamenteux obtenus par décomposition d'un sel métallique en ambiance réductrice. Leur longueur est de quelques millimètres, pour un diamètre d'environ 1mm. Elles approchent les propriétés d'un cristal parfait.

- Les microbilles pleines ou creuses peuvent être produites en verre, carbone ou polystyrène. Elles ont des diamètres compris entre 10 et 150mm ; le taux volumique de charge peut atteindre 50%. Le composite résultant a des propriétés mécaniques isotropes.

- Les principaux renforts minéraux sont le mica et l'amiante. L'un et l'autre sont des composés naturels dont les propriétés ne permettent pas d'atteindre les résistances obtenues avec les fibres. « L'amiante (mélange d'oxydes de magnésium, de silice et d'eau, comportant également du sodium, du fer,...) se présente sous forme de fibrilles de 20nm, dont il est possible de détacher des fibres de plusieurs centimètres. Son caractère cancérigène a maintenant conduit à un abandon complet ».

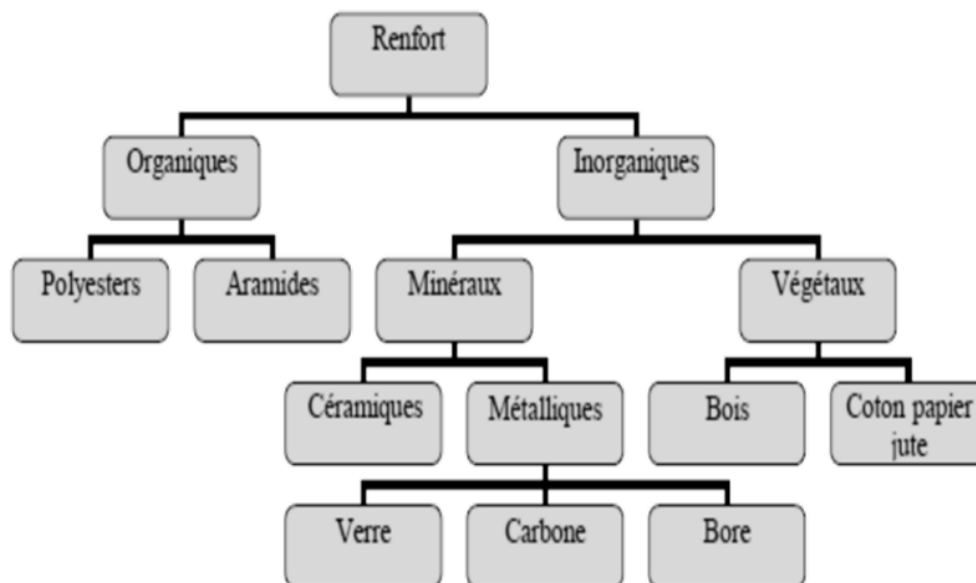


Fig (1.2) Classification des fibres.

1.2.4 La matrice

La matrice constitue l'élément de liaison entre les renforts et assure leur protection vis-à-vis des agents agressifs et la prévention contre une rupture catastrophique. D'une manière générale, les matériaux composites structuraux de part la nature du renfort sont fortement anisotropes, c'est-à-dire que leurs propriétés sont très différentes suivant la direction considérée. D'autre part, les matériaux composites sont légers, c'est-à-dire que les masses volumiques de leurs constituants sont de l'ordre de 1 à 3.5 g / cm³. Dans ce qui suit on présente trois catégories de matrices : Les matrices organiques (résines synthétiques) •

Les matrices métalliques ;

- Les matrices céramiques.

Le schéma ci-dessous montre les différentes résines existantes par leur nature. Les cas les plus développés actuellement sont les résines thermodurcissables.

1.2.5 Les matrices métalliques

Les matériaux composites à matrice métallique dont il est question ici ont été développés à partir des années 1960-1965 en deux vagues successives. Des efforts importants de recherche ont été menés aux États-Unis et en France dans les années 60 autour d'une fibre mono filamentaire de bore, sans véritable développement industriel ultérieur. Ce composite métal-métal était pénalisé par le coût très élevé de la fibre. À cette date, les applications envisagées étaient exclusivement orientées vers l'aéronautique et l'espace.

L'utilisation de matériaux composites à des températures supérieures à 300 °C interdit pratiquement l'usage des matrices organiques et suppose donc que l'élément de renforcement soit noyé au sein d'une matrice métallique. Les plus employées sont les métaux légers et leurs alliages en particulier l'aluminium, le titane et le nickel.

1.2.6 Les matrices céramiques

Dans les années 80, la disponibilité de nombreux nouveaux matériaux céramiques devait relancer les recherches dans ce domaine avec des perspectives de développement industriel plus encourageantes. Des exemples d'applications industrielles ont été développés dans l'automobile, à l'initiative de l'industrie japonaise.

Lorsque les températures d'utilisation sont supérieures à 1000°C, on a recours aux composites à matrice céramique. Dans ce type de composite, le renfort est généralement constitué de fibres longues en carbone, en silice ou en carbure de silicium, assemblé par tissage multidimensionnel.

Ces matériaux sont développés essentiellement dans le domaine aérospatial en tant que structure thermique en raison de leur haute résistance thermomécanique spécifique.

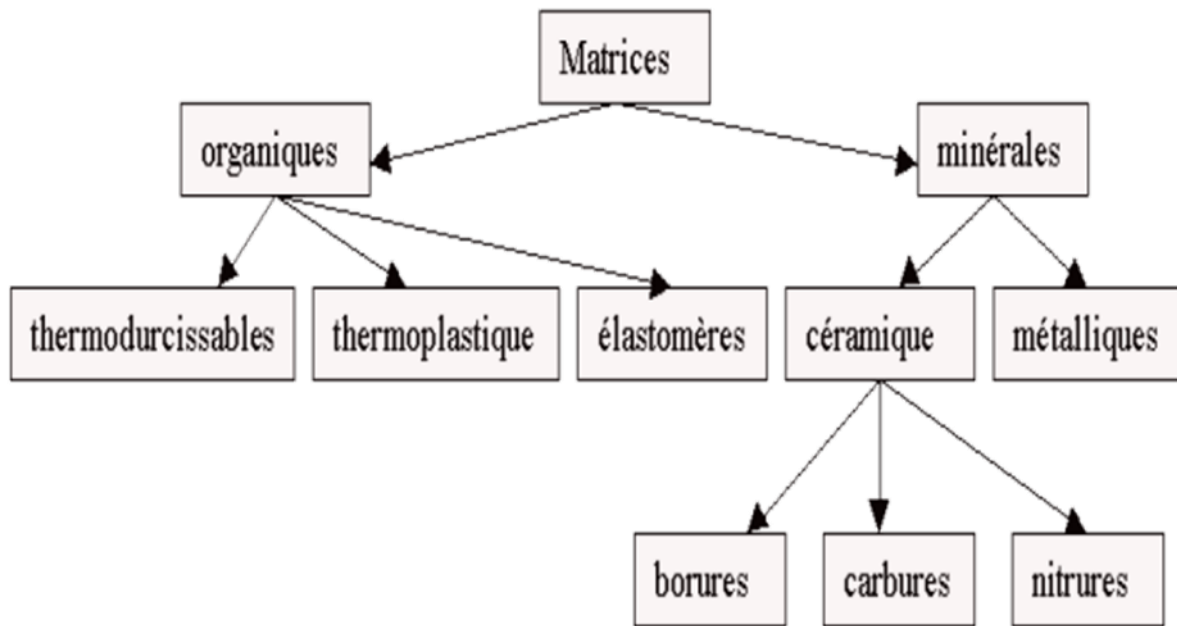


Fig (1.3) Les différentes familles de matrice.

1.3 Classification des matériaux composites

1.3.7 Classification suivant la forme des constituants

1.3.8 Introduction

Les composites peuvent être classés suivant la forme des composants ou suivant la nature des composants. En fonction de la forme des constituants, les composites sont classés en deux grandes classes : les matériaux composites à particules et les matériaux composites à fibres.

1.3.9 Les composites à fibres

Un matériau composite est un composite à fibres si le renfort se trouve sous une forme fibreuse. Les fibres utilisées se présentent, sous un aspect de fibres continues, sinon d'un aspect discontinu : ces fibres sont soit coupées, soit courtes. L'arrangement des fibres, et leurs orientations dans un plan, permet de moduler les propriétés mécaniques des matériaux composites, pour obtenir des matériaux allant de matériaux fortement anisotropes à des matériaux isotropes.

1.3.10 Les composites à particules

Un matériau composite est un composite à particules lorsque le renfort se trouve sous forme de dimensions privilégiées. Les particules sont généralement utilisées pour améliorer

certaines propriétés des matériaux ou des matrices, comme la rigidité, la tenue à la température, la résistance à l'abrasion, la diminution du retrait, etc...

Dans de nombreux cas, les particules sont simplement utilisées comme charges pour diminuer le coût de revient du matériau, sans en diminuer les caractéristiques. Le choix de l'association matrice – particules dépend des propriétés souhaitées par exemple, des incursions de plomb dans des alliages de cuivre, ces particules facilitent l'usinage. Des particules de métaux tels que le tungstène, le chrome incorporé dans les métaux ductile, augmentera leurs propriétés à température élevée, tout en conservant le caractère ductile à température ambiante.

1.3.11 Classification suivant la nature des constituants

Selon la nature de la matrice, les matériaux composites sont classés suivant les composites à matrice organique, à matrice métallique ou à matrice minérale. Divers renforts sont associés à ces matrices, seuls certains couples d'association ont actuellement un usage industriel :

Composites à matrice organique avec :

1. Fibres minérales : verre, carbone.
2. Fibres organiques : kevlar, polyamide.
3. Fibres métalliques : bore, aluminium.

Composites à matrice métallique avec :

1. Fibres minérales : carbone.
2. Fibres métalliques : bore.
3. Fibres métallo-minérales. Fibres de bore revêtues de carbure de silicium.

Composites à matrice minérale avec :

1. Fibres métalliques.
2. Particules métalliques.
3. Particules minérales.

1.4 Les matériaux composites structuraux

1.4.12 Monocouches

Les monocouches représentent l'élément de base de la structure composite. Les différents types de monocouches sont caractérisés par la forme du renfort : à fibres longues

(unidirectionnelles UD, réparties aléatoirement), à fibres tissées, à fibres courtes. Dans une nappe UD, les fibres sont assemblées parallèlement les unes par rapport aux autres à l'aide d'une trame très légère. Taux de déséquilibre très grand.

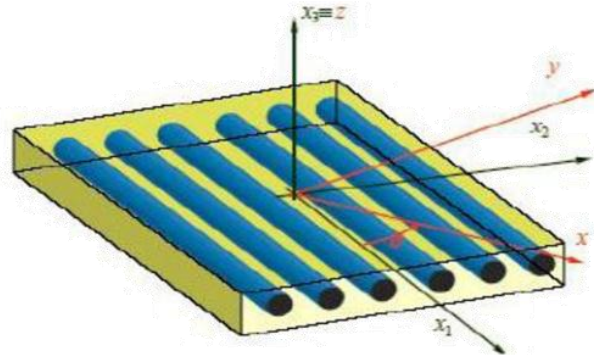


Fig (1.4) Matériau composite monocouche.

1.4.13 I.4.2 Stratifiés

Un stratifié est constitué d'un empilement de monocouches ayant chacun une orientation propre par rapport à un référentiel commun aux couches et désigné comme le référentiel du stratifié.

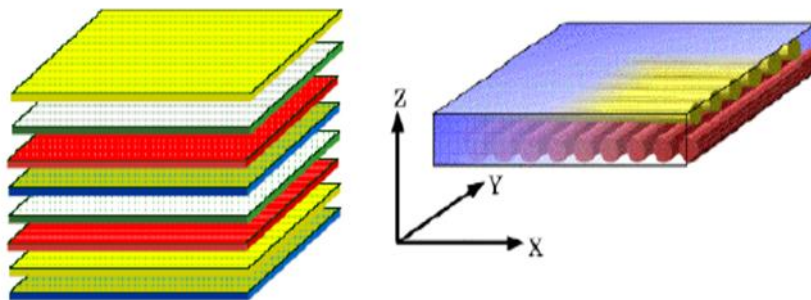


Fig (1.5) Matériau composite stratifié.

1.4.14 Sandwichs

Matériaux composés de deux semelles (ou peaux) de grande rigidité et de faible épaisseur enveloppent une âme (ou cœur) de forte épaisseur et faible résistance. L'ensemble forme une structure d'une grande légèreté. Le matériau sandwich possède une grande légèreté en flexion c'est un excellent isolant thermique.

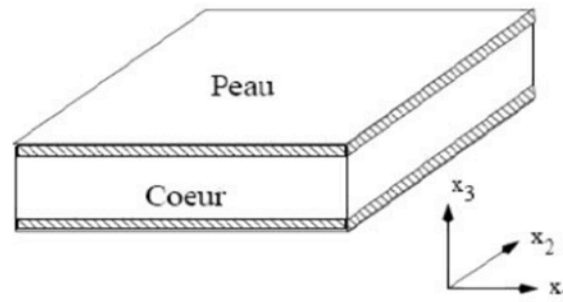


Fig (1.6) Matériau composite sandwich.

1.5 Définition d'un matériau FGM :

Un matériau à gradient de propriétés c'est un type de matériaux composites composé de deux ou plusieurs matériaux relatifs à des fractions volumiques et microstructure qui sont conçus pour avoir une continuité spatiale des variables.

Un FGM est produit en changeant sans interruption la fraction de volume dans la direction d'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminé. La plupart des chercheurs emploient trois fonctions pour décrire la variation de la fraction volumique qui sont :

La fonction de puissance (P-FGM),

La fonction sigmoïde (S-FGM),

La fonction exponentielle (E-FGM),

Ces matériaux à gradient de propriété sont généralement faits à partir d'un mélange de métaux et de céramique (figure 1-7) par un processus de métallurgie de poudre, le côté métal riche est typiquement placé dans les régions où les propriétés mécaniques, comme la dureté, le besoin d'être élevées. En revanche, le côté céramique riche, ce qui a une conductivité faible et peut résister aux températures plus élevées, est placé dans les régions de grands gradients de la température.

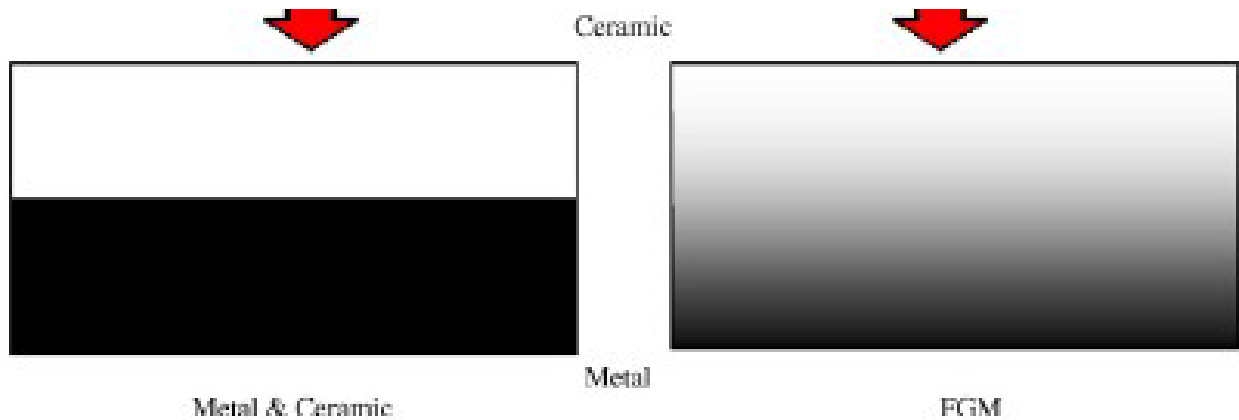


Fig (1.7) Type d'un matériau FGM en céramique et métal.

1.6 Concept sur les matériaux à gradient de propriété :

Le concept de "Matériaux à Gradient de propriétés" a été développé dans le laboratoire national d'aérospatial du Japon en 1984 par M. Niino et ses collègues à Sendai. L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion. Les changements continus dans la composition, dans la microstructure, et même dans la porosité de ces matériaux a comme conséquences des gradients des propriétés matérielles telles que les propriétés mécaniques et la conductivité thermique. Cette nouvelle classe de matériaux composites peuvent être utilisés pour différentes applications, telles que les enduits des barrières thermiques pour les moteurs en céramique, turbines à gaz, couches minces optiques [Nguyen 2007].

En 1987, le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet intitulé "la recherche sur la technologie de base pour développement de Matériaux à Gradient de propriétés et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques".

L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux. 17 laboratoires nationaux de recherche, des universités et des entreprises ont été engagées dans ce projet.

Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux et les murs thermiques spéciaux sont appelés à travailler à des températures de surface de 1800°C ainsi qu'à un gradient de température de l'ordre de 1300°C. A cette année-là, aucun matériau industriel n'était connu pour supporter de telles sollicitations thermomécaniques.

Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux:

Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau;

Ténacité du matériau côté basse température;

Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau.

Pour répondre à un tel cahier des charges, l'idée originale des FGM a été proposée pour élaborer un nouveau composite profitant à la fois des propriétés des céramiques (côté haute température) et des métaux (côté basse température).

À la fin de la première étape (1987-1989), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000K (température de surface) et à un gradient de température de 1000K. Quatre techniques ont été utilisées pour fabriquer les matériaux présentant un gradient de composition et de structure. Les techniques utilisées dans la fabrication de tels matériaux sont les suivantes : le système SiC/C par C.V.D., le système PSZ/Mo par la technique de la compaction sèche des poudres, le système TiB₂/Cu par synthèse par auto-propagation à haute température, et enfin le système (Ni-Cr-Al-Y)/ (ZrO₂-Y₂O₃) par projection plasma à double torches.

Dans la seconde étape (1990-1991), le but était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première étape. Pendant les années 90, non seulement les champs d'applications des FGM s'est développé pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température, mais s'est aussi élargi à d'autres applications: biomécaniques, technologie de capteur, optique, constructions.

Le concept des matériaux à gradient de propriétés est de l'intérêt non seulement dans la conception des matériaux réfractaires performants pour des utilisations pour les futures navettes spatiales, mais également dans le développement de divers matériaux fonctionnels, tels que les matériaux optiques et électroniques. A cet effet, un deuxième projet a été lancé pour la recherche et développement des matériaux FGM en tant que matériaux fonctionnels « Recherche sur les matériaux de conservation d'énergie avec la structure à gradient de propriétés ». Ce programme vise à s'appliquer la technologie des FGM dans le but d'améliorer l'efficacité de la conservation de l'énergie comme l'énergie solaire, nucléaire, photovoltaïque, thermoélectrique.

1.7 Différence entre FGM et les matériaux composites traditionnels :

Un modèle simple illustrant les différences entre les matériaux à gradient de propriétés (FGM) et les matériaux plus conventionnels est montré sur la (figure I.8) : (a) un matériau plans composé, (b) un matériau relié et (c) un matériau à gradient de propriété.

Le matériau plan composé à une caractéristique plane, et le matériau relié à une frontière sur l'interface de deux matériaux.

Les FGM ont de excellentes caractéristiques qui diffèrent de ceux des matériaux plans composés et reliés.

Par conséquent, les FGM attirent l'attention en termes de leur application dans les domaines industriels.

Puisque les FGM ont une double propriété des deux matières premières qui sont mélangées ensemble, et la distribution composante est graduée sans interruption.

Par exemple, l'un des FGM qui se compose du métal et en céramique a la caractéristique de la conductivité thermique et de la force métallique dans le côté en métal et la résistivité aux hautes températures dans le côté en céramique.

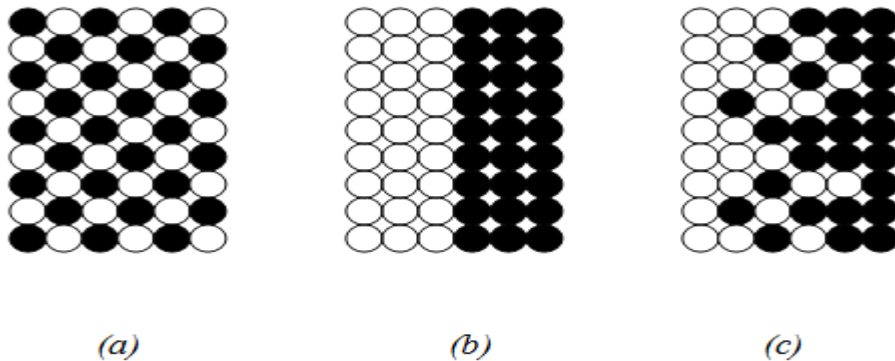


Fig (1.8) La distribution composante des matériaux

Matériau plan composé (a), Matériau relié (b), Matériau à gradient de propriété (c).

1.8 L'intérêt d'utilisation des FGM :

Il y a beaucoup d'intérêt pour la mise sur pied des structures ainsi les conditions fonctionnelles peuvent varier avec l'endroit. Dans la plupart des cas, ceci impliquera de varier les matériaux qui sont employés aux endroits spécifiques dans la structure ayant pour résultat les interfaces discrètes dans tout, a nombre de proposé des technologies manufacturières pour le traitement de FGM.

Récemment, les concepts de FGM sont devenus d'intérêts scientifiques pour améliorer l'exécution des systèmes géométriquement complexes des structures.

1.9 Les méthodes d'élaboration des FGM :

Les procédés de fabrication d'un matériau à gradient évalué peuvent habituellement être divisés en construisant la structure dans un espace hétérogène (mélange graduel) et transformation de cette structure en un seul matériau (solidification).

Les processus de mélange graduel peuvent être classés dans les constituants, l'homogénéisation et la ségrégation. Les procédés élémentaires sont basés sur la fabrication par étape de structure en matériaux graduels précurseurs ou poudres.

Les avancées en technologie d'automatisation pendant les dernières décennies ont rendu des processus élémentaires de progression technologiquement et économiquement durable. Dans la procédure d'homogénéisation qui traite une interface pointue entre deux matériaux est convertie dans un gradient par transport matériel.

Les procédés d'homogénéisation et de ségrégation produisent un gradient continu, mais ont des limitations au sujet des types de gradients qui peuvent être produits. Habituellement le séchage et la solidification suivent les étapes du mélange graduel. Le besoin de ces processus de consolidation doit être adapté aux FGM. Une attention particulière doit être également prêtée au rétrécissement inégal de FGM pendant la consolidation [Kieback 2003].

Dans ces dernières années, les travaux menés par les chercheurs ont permis de développer une méthode originale pour élaborer des composites à gradient continu de composition. Cette méthode est basée sur une technique de Co-sédimentation de poudres en milieu proportionnel à la densité du matériau et au carré du diamètre de particule. En contrôlant et en adaptant les répartitions granulométriques de chaque poudre, il est possible d'obtenir différents gradients de concentration dans le dépôt formé à l'issue de sédimentation.

Il existe de nombreuses méthodes d'élaboration des matériaux à gradients évalués, les techniques les plus employées sont brièvement expliquées ci-dessous.

1.9.15 Coulage en Bande (Tape Casting Ou Doctor-Blade) :

Le coulage en bande consiste à couler une barbotine de poudres fines en suspension aqueuse ou non-aqueuse (la plupart des travaux commerciaux utilisent le procédé non-aqueux) sur un support plan en couches minces et régulières (figure 1.9). Les produits obtenus sont des feuillets avec des épaisseurs contrôlées (25 —1000 μm) .Après un raffermissement de la pâte, les feuillets sont démoulés et ensuite découpés.

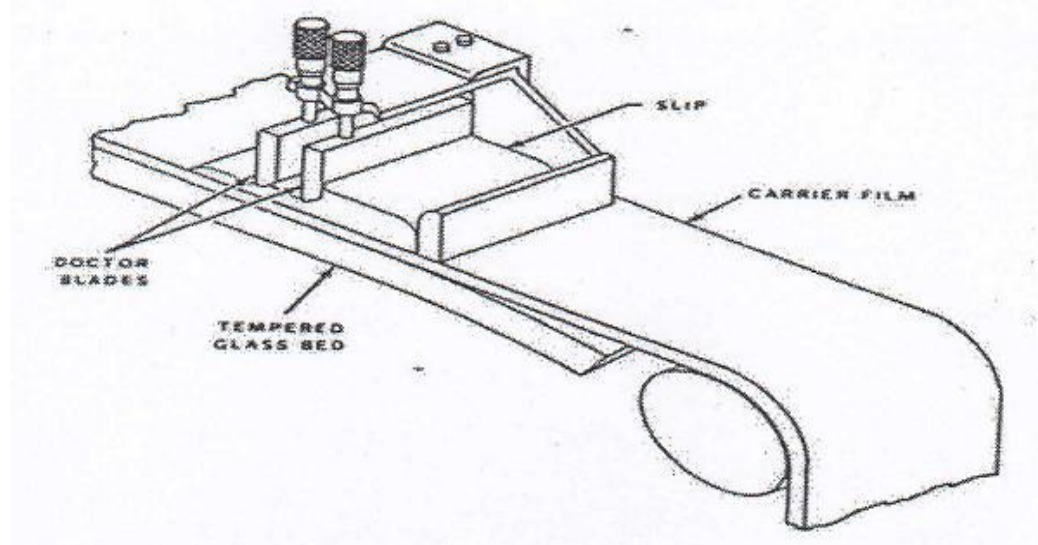


Fig (1.9) Principe de la Méthode de Coulage en Bande

Le solvant doit avoir un point d'ébullition très bas et une viscosité faible. Il doit être soluble avec le liant, le plastifiant et les autres ajouts, mais ne doit être ni soluble ni réactif avec la poudre céramique. Le liant donne une grande résistance mécanique au produit cru en permettant son maniement. Généralement un plastifiant est ajouté au liant pour baisser sa viscosité. Le liant, le plastifiant et le dé flocculant doivent être totalement dégagés pendant le délainage.

Le procédé de coulage en bande est largement utilisé pour réaliser des matériaux composites laminaires suivant deux méthodes : soit par réalisation directe de bandes multicouches grâce à un système de lames multiples, c'est le cas des tri-couches élaborés par Mistler [Mistler 1973] ; soit par empilage de couches élaborés séparément, dont la cohésion est ensuite assurée par une étape de thermo-compression [Boch 1986], [Boch 1987].

1.9.16 Coulage Séquentiel en Barbotine (Slip Casting) :

Le coulage en barbotine (Slip Casting) consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, laissant un tesson (couche de poudre compacte) sur la surface du moule. Après séchage, on obtient le corps en cru.

Donc le coulage se décompose en deux étapes essentielles:

Formation du tesson ou "prise",

Consolidation du tesson ou "raffermissement",

La filtration, c'est-à-dire la formation du tesson lors du coulage, peut être considérée comme un processus d'élimination d'une partie de l'eau de la barbotine ; cette eau migre à travers la couche de tesson déjà formée, sous l'effet :

du pouvoir de succion de la plate (coulage classique [Moya1992]),

ou d'une pression appliquée sur la barbotine (coulage sous pression),

Dans le cas de la fabrication de multicouches, après la formation du premier tesson le dépôt de la deuxième couche s'effectue de manière telle que la barbotine ne pénètre pas dans le tesson formé. Ce procédé est successivement reproduit pour les autres couches.

1.9.17 Dépôt par Electrophorèse :

Un autre processus est ajouté aux différentes techniques de la fabrication des FGM, ce qu'on appelle le dépôt par électrophorèse (EPD) est un processus assez rapide à faible coût, capable de produire les matériaux à gradient de propriétés changeant sans interruption avec la géométrie complexe. EPD se compose de deux processus, c'est-à-dire le mouvement des particules chargées en suspension dans un champ électrique entre deux électrodes

(électrophorèses) et le dépôt de particules sur l'un des électrodes [Aldo 2002]. EPD permet la conception des matériaux à gradient de propriétés en forme de plaque binaire en déposant +d'une suspension de poudre à laquelle une deuxième suspension est sans interruption ajoutée pendant le processus. Le dépôt est un contrat de poudre emballé étroit qui a besoin de l'agglomération pour réaliser les composants matériels entièrement denses.

1.9.18 Compaction Sèche des Poudres :

Cette technique consiste à verser successivement dans un moule en acier les poudres, et à chaque fois qu'une poudre est versée une faible compression est exercée. Ensuite la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Ce procédé est suivi généralement par une pression isostatique et un délainage. La densification sera enfin l'étape finale.

Ce procédé peut être envisagé pour la fabrication de pièces de formes complexes. En effet il s'applique aussi avec la technique du pressage isostatique, et de façon industrielle.

1.10 Domaines d'application des matériaux à gradients évalués FGM :

Le concept des matériaux à gradient évalués FGM est applicable dans des nombreux et larges intervalles de domaines tels que les matériaux de construction, matériaux de conversion d'énergie, aéronautique, aérospatiale, nucléaire et semi-conducteurs.

Ainsi, ces matériaux ont deux propriétés contradictoires : la conductivité thermique et l'isolation thermique. Actuellement, ils permettent la production des matériaux légers, résistants et durables. Les principaux domaines d'application des FGM sont :

Génie civil : ponts à poutre en caisson, les cheminées, les fondations élastiques (ces structures de plaques peuvent être trouvées dans différents types d'applications industrielles telles que radiers), réservoirs de stockage, les piscines.

Aéronautique : composants de moteur-fusée, corps des avions spatiaux.

Chimique : l'échangeur de chaleur, tube de chaleur, récipient de réaction.

Ingénierie : outils de coupe, éléments de moteur.

L'énergie nucléaire : composante des réacteurs nucléaires, pastilles de combustible.

Électronique : semi-conducteur à bande graduée, capteurs.

Optique : fibres optiques, lentilles.

Conversion d'énergie : générateur thermoélectrique, convertisseur thermoïonique, pile à combustible.

Matières biologiques : implants, peau artificielle,

Produits en générale : matériaux de constructions, corps de voiture, verres de fenêtre.

1.11 Propriétés physiques et mécaniques des FGM :

Pour ce travail le matériau FGM choisi est (Aluminium-Céramique).

1.11.19 Propriétés de l'aluminium :

Définition : L'Aluminium est un métal blanc qui après polissage peut devenir réfléchissant.

Propriétés physiques : L'Aluminium à une température de fusion relativement basse d'environ 660°. Il en résulte une facilité de fusion qui présente un avantage certain pour les opérations de fonderie. L'Aluminium est très ductile, on peut aisément le mettre en forme. La masse volumique de l'Aluminium est de 2700 kg/m³. L'utilisation de l'Aluminium s'impose donc dans les domaines aéronautiques et du transport.

Propriétés mécaniques : Les propriétés mécaniques des métaux présentent un grand intérêt dans la vie quotidienne, elles peuvent être classées en deux groupes :

Celles qui se rapportent à la résistance mécanique du métal :

Résistance à la traction.

Résistance à la pénétration (dureté).

Celles qui concernent les modifications de forme que le métal peut subir sans se briser :

La malléabilité (mise en feuilles).

La ductilité (mise en fils).

Propriétés des alliages d'aluminium : L'Aluminium à pour propriétés une :

Température de travail élevée.

Très bonne résistance à la corrosion.

Légèreté.

Très bonnes solidités, dureté et rigidité.

Bon rapport force/poids.

Bonnes propriétés de protection contre les interférences électromagnétiques.

Bonne conductivité thermique.

Conductivité électrique élevée.

Bonnes caractéristiques de finition.

Entièrement recyclable.

Résistance à la corrosion : Grâce à la couche d'oxyde qui se forme en surface, les alliages d'Aluminium résistent à la corrosion. On peut rendre cette couche protectrice d'oxyde plus épaisse par galvanisation. L'Aluminium et ses alliages peuvent être utilisés sans protection supplémentaire comme revêtement extérieur de bâtiments. Par contre dans les milieux corrosifs, les alliages d'Aluminium peuvent subir les effets de la corrosion. Des piqûres, de la corrosion sous contrainte, de la fatigue corrosion, voire de la corrosion généralisée peuvent se développer. Pour des conditions données, la sévérité de l'attaque dépend de l'alliage utilisé et de son état.

1.11.20 Propriétés de la céramique :

Définition : La céramique résulte des terres et des roches broyées (matériaux géologiques) ou bien d'une argile qui sera modelée puis cuite sous haute température (transformation irréversible) ce qui fait perdre au matériau sa plasticité donc il ne peut plus se réhydrater.

Propriétés physiques: La céramique a une facilité de fusion qui présente un avantage certain pour les opérations de fonderie. La masse volumique de la céramique est de 3800 kg/m³. L'utilisation de la céramique s'impose dans les domaines de l'habitat et du design, l'industrie céramique et métallurgique, aéronautique et spatial, médicale et dans les revêtements.

Propriétés mécaniques : Les propriétés mécaniques de la céramique dépendent des :

Matières premières employées.

Méthodes de fabrication qui fixent les microstructures finales et déterminent la répartition des différentes phases en présence.

Propriétés des céramiques : Les propriétés de la céramique sont :

Un module de YOUNG élevé (Liaisons, covalente, ioniques).

Une dureté élevée (Abrasif, outils de coupe, surfaces de frottement qui doivent résister à l'usure, résistance mécanique élevée, bonne tenue à chaud, rigidité élevée).

Une très bonne résistance à la compression non à la traction

(Résistance à la compression = 200 MPa).

1.12 Propriétés matérielles effectives d'un matériau FGM:

Les matériaux à gradient de propriétés sont généralement fabriqués par deux phases matérielles avec des propriétés différentes. Une description détaillée des microstructures graduée réelles n'est pas disponible, excepté peut-être pour l'information sur la distribution de fraction volumique. Puisque la fraction de volume de chaque phase varie graduellement dans la direction de la graduation, les propriétés effectives des FGM changent le long de cette direction. Par conséquent, nous avons deux approches possibles pour modéliser un FGM.

Pour le premier choix, une variation par tranche de fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée, et le FGM est pris pour être posé avec la même fraction de volume dans chaque région, c.-à-d., couches quasi homogènes de céramique-métal (figure. I.10).

Pour la deuxième approche, une variation continue de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée, et la fraction de volume en métal peut être représentée suivant une fonction dépendante de la coordonnée Z (épaisseur) :

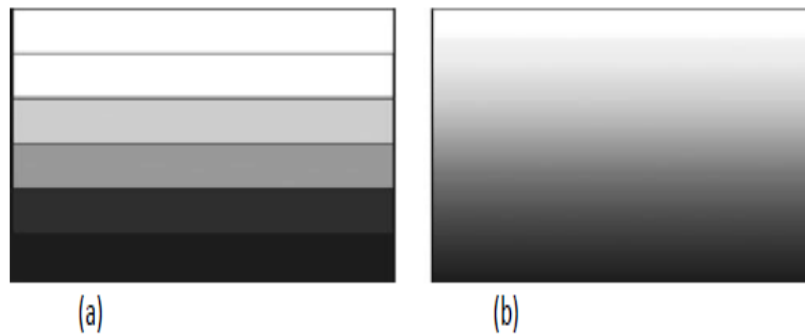


Fig (1.10) Modèles analytiques pour une couche en FGM.

1.13 Les différentes lois qui régissent la variation des propriétés matérielles suivant l'épaisseur d'une poutre FGM :

1.13.21 Propriétés matérielles de la poutre P-FGM :

La fraction volumique dans les P-FGM est assurée par une loi de puissance sous la forme:

$$g(z) = \left(\frac{h/2 + z}{h} \right)^p \quad (1.1)$$

Où p est un paramètre du matériau et h est l'épaisseur de la poutre. Une fois que la fraction de volume local $g(z)$ est définie, les propriétés matérielles d'une poutre P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges :

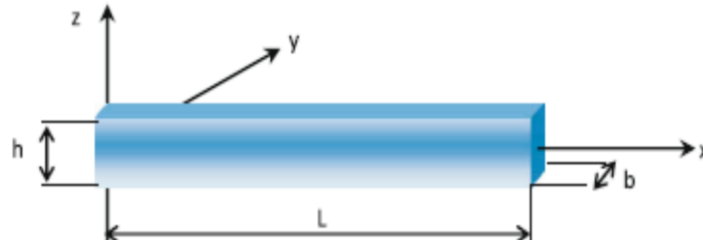


Fig (1.11) Dimensions de la poutre FGM

Où E_1 et E_2 et sont respectivement les propriétés matérielles (modules de Young ou densité) de la surface inférieure ($z = -h/2$) et de la surface supérieure ($z = h/2$) de la poutre FGM. La variation de ces propriétés dans la direction de l'épaisseur de la poutre P-FGM est représentée sur la figure.1.6, il apparaît clairement que le module de Young par exemple change rapidement près de la surface inférieure pour $p > 1$, et augmente rapidement près de la surface supérieure pour $p < 1$. Pour une résolution numérique, par éléments finis par exemples,

Les propriétés matérielles effectives E de la couche de FGM, comme le module de Young E , et la densité et le coefficient de poisson ν peut alors être exprimé comme suit :

$$E = \sum_{j=1} E_j g_j \tag{1.2}$$

Là où l' E_j et le g_j sont les propriétés matérielles et la fraction volumique de la couche jj (Figure. 1.12), et la somme des fractions de volume de tous les matériaux constitutifs fait l'unité :

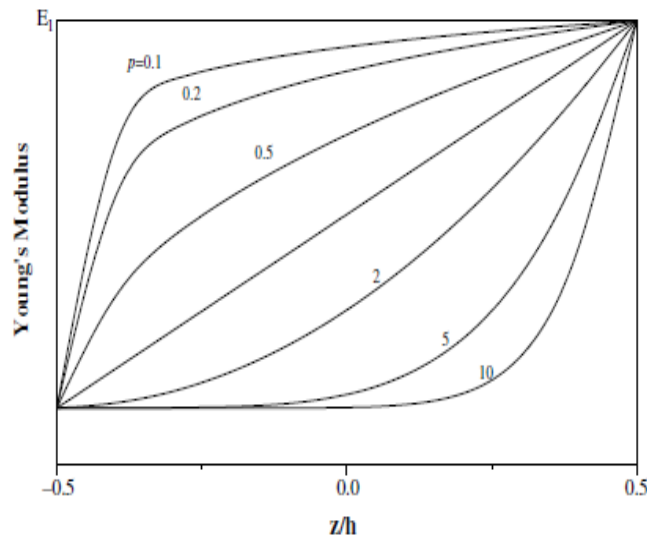


Fig (1.12) Variation du module de Young dans une plaque P-FGM

1.13.22 Propriétés matérielles de la poutre S-FGM :

Si l'on rajoute une poutre P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une poutre composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interface des deux matériaux Par conséquent, Chung et chi ont défini la fraction de volume de la poutre FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces.

Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par:

$$g_1(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - z}{h/2} \right)^p \text{ Pour } 0 \leq z \leq h/2 \tag{1.3}$$

$$g_2(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 + z}{h/2} \right)^p \text{ Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \tag{1.4}$$

En utilisant la loi des mélanges, la propriété S de la poutre S-FGM peut être calculé par :

$$S(z) = g_1(z).S_1 + [1 - g_1(z)].S_2 \text{ Pour } 0 \leq z \leq h/2 \tag{1.5}$$

$$S(z) = g_2(z).S_1 + [1 - g_2(z)].S_2 \text{ Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \tag{1.6}$$

La figure. 1.13 montre que la variation du module de Young selon les équations avec des distributions sigmoïdes, donc la poutre FGM est ainsi appelée (poutre S-FGM).

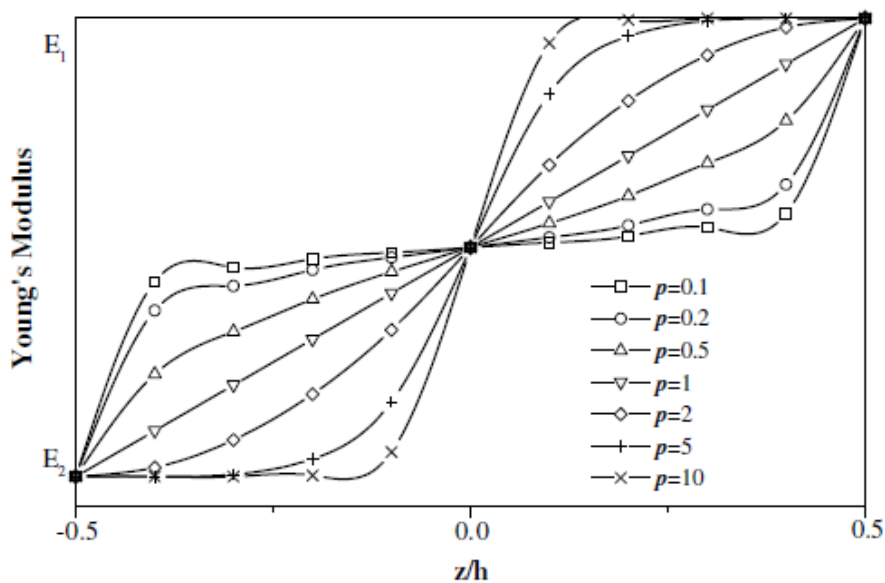


Fig (1.13) Variation du module de Young dans une poutre S-FGM

1.13.23 Propriétés matérielles de la poutre E-FGM

Beaucoup de chercheurs utilisent la fonction exponentielle pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la fonction exponentielle est donnée par [Delale 1983] :

$$E(z) = Ae^{\beta(z+\frac{h}{2})} \quad (1.7)$$

Avec :

$$A = E_2 \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1}{h} \ln \frac{E_1}{E_2} \quad (1.7.a)$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans la figure (1.14.)

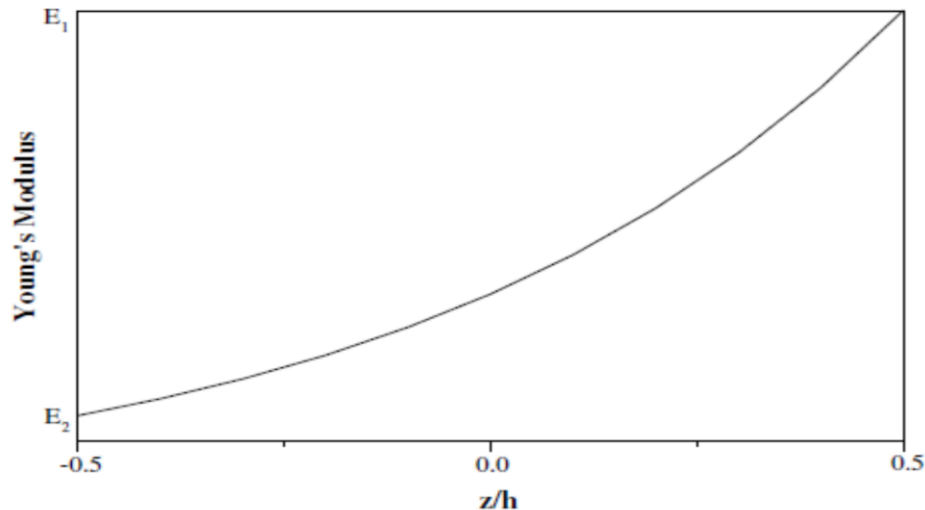


Fig (1.14) Variation du module de Young de la poutre E-FGM

1.14 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes attachés à présenter et à définir la notion d'un matériau FGM. Dans un premier temps, nous avons présenté l'historique de la fabrication des FGM dont les premiers pas de la naissance du FGM. Après nous avons cités les propriétés matérielles effectives d'un matériau FGM, et à la fin nous avons terminés par les différentes lois qui servent à décrire la variation des propriétés matérielles du matériau FGM (module de Young, masse volumique et coefficient de poisson) suivant l'épaisseur d'une poutre, ces lois peuvent être de puissances, exponentielles ou même sigmoïde. Le chapitre suivant va porter sur les différentes théories des poutres.

Chapitre 2 Théorie des poutres

2.1 Introduction

Le terme «poutre» désigne un objet dont la longueur est grande comparée aux dimensions transverses (section fine). Une poutre est un élément de structure utilisée dans la construction des bâtiments, des navires, autres véhicules et dans la fabrication des machines. Cependant, le modèle des poutres peut être utilisé pour des pièces très diverses à condition qu'elles respectent certaines normes.

2.2 Historique des théories des poutres :

La paternité de la théorie des poutres est attribuée à Galilée, mais des études récentes indiquent que Léonard De Vinci l'aurait précédé. De Vinci avait supposé que la déformation varie de manière linéaire en s'éloignant de la surface neutre, mais il ne pût finaliser ses calculs car il ne connaissait pas la loi de Hooke.

De son côté, Galilée était parti sur une hypothèse incorrecte (il supposait que la contrainte était répartie uniformément en flexion), et c'est Antoine Parent qui obtint la distribution correcte. Ce sont Leonard Euler et Jacques Bernoulli qui émirent la première théorie utile vers les années 1750, alors que Daniel Bernoulli, le neveu du précédent, écrivit l'équation différentielle pour l'analyse vibratoire. À cette époque, le génie mécanique n'était pas reconnu comme une science, et on ne considérait pas que les travaux d'une académie des mathématiques puissent avoir des applications pratiques, et on continua à bâtir les ponts et les bâtiments de manière roue, qu'on démontra la validité de la théorie à grande échelle.

2.3 Le comportement des poutres composites :

L'analyse d'une structure composite est plus complexe que celle d'une structure en matériaux traditionnels, métalliques par exemple [5]. Cela est dû au caractère hautement anisotrope des propriétés mécaniques du matériau de base, tant sur les plans raideur que résistance, et qui sont concentrées dans la direction des fibres.

L'importance de développer une analyse sur le comportement des poutres est liée d'une part à l'utilisation des poutres comme éléments de base dans la réalisation des structures, d'autre part à la caractérisation des propriétés mécaniques des matériaux composites et ceci à partir des différents essais réalisés sur des éprouvettes en forme de poutres.

2.4 Les différents types de poutres :

La poutre est l'élément structural le plus répandu, puisqu'elle fait partie intégrante de la plupart des ouvrages de construction ou des pièces machines. En réaction aux charges appliquées, des forces et des moments internes se développent dans la poutre pour maintenir l'équilibre :

Poutre simple :

C'est une poutre reposant sur deux supports ; l'appui double et l'appui simple. Les points d'appui sont articulés de façon à ce que les extrémités puissent se mouvoir librement pendant la flexion.

Poutre console :

C'est une poutre encastrée dans un mur à une extrémité. L'extrémité encastrée ne bouge pas pendant la flexion, tandis que l'autre extrémité est entièrement libre. On appelle aussi cette poutre, poutre en porte-à-faux ou poutre encastrée à une extrémité.

Poutre avec porte-à-faux :

C'est une poutre sur deux appuis (un simple et l'autre double), elle a une ou deux extrémités qui dépassent de façon appréciable les appuis (porte-à-faux). Les poutres sont classées suivant leurs appuis.

Ces trois précédents types des poutres entrent dans la catégorie des poutres statiquement déterminées (poutre isostatique), parce qu'elles possèdent trois inconnues reliées aux trois degrés de liberté et par le fait même des équations d'équilibre.

Poutre continue :

C'est une poutre supportée par l'un des deux supports, c'est donc une poutre en équilibre hyperstatique.

Poutre à double encastrement :

C'est une poutre supportée par deux encastresments, elle est donc une poutre en équilibre hyperstatique.

Poutre supportée à double encastrement :

C'est une poutre supportée par deux encastresments ayant un ou plusieurs supports. C'est donc une poutre en équilibre hyperstatique. Elle a plus de fixation ou support que nécessaire.

Cependant, ces supports augmentent la capacité portante de la poutre mais les équations de la statique ne suffisent pas à analyser ces poutres. On aura donc recours à différentes méthodes.

2.5 Les différentes théories des poutres :

La théorie des poutres s'applique sur des solides élancés (typiquement les prismes dont la longueur vaut 10 fois la plus grande dimension transversale). Là où la détermination de la solution exacte pour les champs de contrainte et de déformation n'est pas possible, elle permet d'obtenir une solution approchée, qui donne une bonne idée sur les efforts et les déplacements.

2.5.1 Modèle d'Euler Bernoulli (Classical Beam Theory- CBT) :

Il est bien connu que la théorie d'Euler-Bernoulli est basée sur la théorie élémentaire de flexion des poutres qui ne tient pas compte des effets de la déformation de cisaillement. Il est également connu qu'elle n'est applicable qu'aux poutres fines.

Dans cette approche, le nombre d'équations ne dépend pas du nombre de couches puisque la poutre multicouche est homogénéisée, donc considérée comme une seule couche. Comme hypothèse de cette théorie, les déformations dues au cisaillement transversal sont négligées (pas de cisaillement sur la hauteur de la poutre), La section reste perpendiculaire à la ligne moyenne de la poutre et la section reste plane.

La fonction qui décrit la répartition de déplacement suivant l'épaisseur de la poutre est:

$$\phi(z) = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (2.1)$$

Pour le cas des poutres élancées et d'après la théorie classique des poutres, le déplacement d'un point M est donné par les deux composantes suivantes:

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u^0(x) - z w_{,x}^0(x) \\ w(x, z) = w^0(x) \end{cases} \quad (2.2)$$

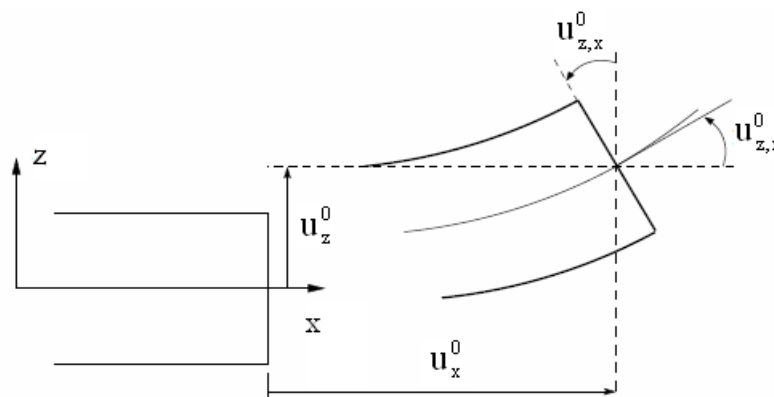


Fig (2.1) Cinématique d'Euler Bernoulli

$u(x, z)$ C'est le déplacement suivant X et $w(x, z)$ est le déplacement dans la direction de Z ou bien la flèche.

La rotation autour de l'axe Y, provoquée par la flexion est tel que:

$$w_{,x}^0(x) = \frac{\partial w^0}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (2.3)$$

$u^0(x)$ et $w^0(x)$ sont les composantes de déplacement au milieu de la section et sur la ligne moyenne de la poutre, respectivement le long des axes X et Z.

Lorsque cette théorie est utilisée pour l'analyse des fréquences naturelles des poutres, les flèches sont sous-estimées. Ceci est la conséquence de négliger la déformation de transversal.

2.5.2 Modèle de Timoshenko (FSDBT) :

La théorie de Timoshenko est plus riche et plus générale que la théorie élémentaire des poutres au prix d'une fonction supplémentaire. Cette solution permet d'affiner les solutions analytiques issues de la théorie classique.

Toutefois ces solutions sont entachées d'erreurs au voisinage des appuis et de la zone indentation où nous pouvons avoir des concentrations de contrainte et des champs de déplacement non homogènes.

Elle s'applique sur des poutres courtes, elle est basée sur le principe ; qu'après déformation, la section plane reste plane mais elle perd sa perpendicularité par rapport à la ligne moyenne de la poutre (Figure 2.2). Ceci est dû au cisaillement transversal, découvert par Timoshenko, sur l'épaisseur de la poutre.

Cette théorie est analogue à la théorie de "Reissner-Mindlin" dans le cas des plaques épaisses. Dans le cas où nous avons un élancement faible, l'effet du cisaillement devient plus important sur la déformée. Dans ce cas, la fonction $\phi(z)$ est égale à Z.

Il existe un cisaillement uniforme et les déformations dues au cisaillement transversal ne sont pas négligées. C'est la théorie de premier ordre (FSDBT).

Le déplacement d'après Timoshenko s'écrit comme suit :

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u^0(x) - zw_{,x}^0(x) + z\gamma_{xz}^0(x) \\ w(x, z) = w^0(x) \end{cases} \quad (2.4)$$

$\gamma_{xz}^0(x)$, c'est la déformation angulaire mesurée sur la ligne moyenne de la poutre.

$$\text{Tel que : } \gamma_{xz}^0(x) = w_{,x}^0(x) - \phi^0(x) \quad (2.5)$$

$\phi^0(x)$ Etant la rotation totale de la section mesurée sur la ligne moyenne de la poutre.

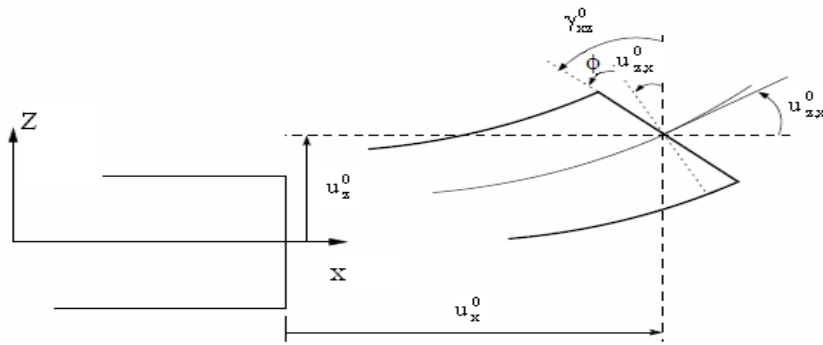


Fig (2.2) Cinématique de Timoshenko.

Par définition, la distorsion est donnée par la relation suivante :

$$\gamma_{xz}(x) = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -w_{,x}^0(x) + \gamma_{xz}^0(x) + w_{,x}^0(x) \tag{2.6}$$

Sachant que la contrainte de cisaillement est égale:

$$\tau_{xz} = G_{xz}\gamma_{xz} = G_{xz}\gamma_{xz}^0 \tag{2.7}$$

G_{xz} :est le module de cisaillement transversal qui est supposé constant.

Avec cette théorie, les contraintes tangentielles de cisaillement sont constantes et uniformes sur toute l'épaisseur de la poutre; cela veut dire qu'elles existent même sur les bords supérieurs et inférieurs de la poutre et pourtant il n'y a aucun chargement qui induit le cisaillement.

Cette contradiction mène à introduire des coefficients pour corriger et maintenir les contraintes et les déformations du cisaillement transversales constantes à travers l'épaisseur de la poutre. Ce facteur a été calculé pour la variété de sections de poutres par [Mind lin et Deresiewicz]. Cowper et Murtyont donné de nouvelles expressions de ce coefficient pour différentes sections de la poutre. La théorie de Timoshenko est plus riche et plus générale que la théorie élémentaire des poutres au prix d'une fonction supplémentaire. Cette solution permet d'affiner les solutions analytiques

Bien qu'issues de la théorie classique, ces solutions sont toutefois entachées d'erreurs au voisinage des appuis et de la zone indentation où nous pouvons avoir des concentrations de contrainte et des champs de déplacement non homogènes.

Les non nullité des contraintes tangentielles sur les bords extrêmes de la poutre et l'introduction des coefficients de correction de cisaillement ont menés d'autres chercheurs à

essayer de trouver une autre théorie pouvant tenir compte de ces facteurs; c'est "la théorie d'ordre élevé".

2.5.3 Théorie d'Ordre Elevé :

Dans cette théorie la distribution des champs de déplacement est non linéaire selon l'épaisseur de la poutre. Elle est plus précise que la théorie du premier ordre puisqu'elle introduit une fonction qui tient compte du phénomène de "gauchissement". Ce phénomène apparaît lorsque la section transversale de la poutre perd sa planéité (figure 2.3).

La fonction représente le gauchissement et sa dérivée $\psi'(z)$ représente le cisaillement.

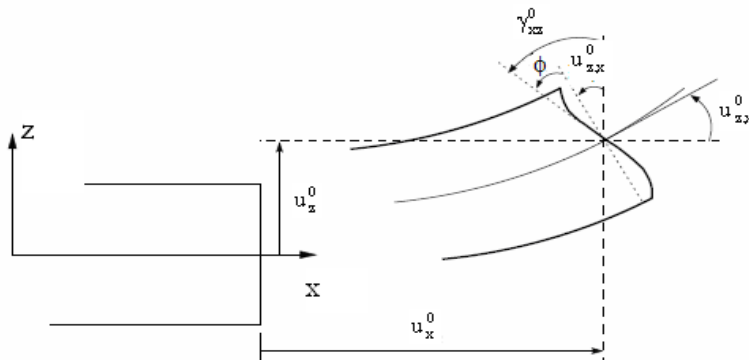


Fig (2.3) Cinématique de la Théorie d'Ordre Elevé.

Dans ce cas, le champ de déplacement devient :

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u^0(x) - zw'_{,x}(x) + \Phi(z) \gamma_{xz}^0(x) \\ w(x, z) = w^0(x) \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\gamma_{xz}(x) = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -w'_{,x}(x) + \Phi'(z) \gamma_{xz}^0(x) + w'_{,x}(x) \quad (2.9)$$

$$\gamma_{xz}(x) = \Phi'(z) \gamma_{xz}^0(x) \quad (2.10)$$

Pour que les contraintes tangentielles soient nulles sur les bords extrêmes de la poutre, on doit avoir:

$$\Phi'(z)|_z = \pm h/2 = 0 \quad (2.11)$$

C'est la condition qui nous permet d'avoir une répartition parabolique des contraintes de cisaillement sur l'épaisseur de la poutre d'une part et de choisir correctement des fonctions cubiques qui répondent à la condition

Selon l'expression de la fonction de gauchissement $\psi(z)$, quelques modèles sont présentés dans la littérature des poutres en FGM:

Le modèle Euler-Bernoulli (la théorie des poutres classiques) (CBT):

$$\psi(z) = 0 \quad (2.12.a)$$

Le modèle de Timoshenko ou bien la théorie du premier ordre (FSDBT):

$$\psi(z) = z \quad (2.12.b)$$

Le modèle de puissance avec l'approche de (PSDBT) :

$$\psi(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (2.12.c)$$

Le modèle exponentiel proposé par (ESDBT) :

$$\psi(z) = z e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (2.12.d)$$

Le modèle trigonométrique :

$$\psi(z) = \frac{h}{\pi} \sin \frac{\pi z}{h} \quad (2.12.e)$$

Avec, h : épaisseur de la poutre.

2.6 Méthodes de résolution

2.6.1 Procédure de Navier

Nous choisissons ici de nous référer à cette méthode par le terme générique de procédure de Navier. Cette méthode est adaptée à des cas de chargement particuliers : c'est à dire que chaque variable est projetée sur une fonction d'une base trigonométrique adaptée. Dans sa version la plus classique, cette méthode est utilisée pour simuler une poutre ou plaque rectangulaire simplement appuyée chargée avec une pression de forme sinusoïdale ou uniforme ; la déflexion associée est alors supposée sinusoïdale. Les autres degrés de liberté sont exprimés sur une base trigonométrique correspondante.

2.6.2 Méthode de RAYLEIGH-Ritz

La méthode de Rayleigh-Ritz permet, en projetant les déplacements sur une base donnée, d'implémenter un modèle pour la simulation de poutres ou plaques rectangulaires

soumises à des conditions aux limites et des chargements variés. Le principal avantage de cette méthode réside dans le fait que, avec un choix de base de projection adapté, les dérivées – successives – des fonctions de la base sont simples à obtenir, et par conséquent, cette méthode est tout à fait adaptée aux modèles nécessitant le calcul des dérivées multiples de la base. La qualité des résultats obtenus est souvent relative au choix de la base.

2.6.3 Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis a progressivement fait son apparition depuis les années 1950. C'est une méthode qui permet la résolution numérique des équations aux dérivées partielles. Elle est couramment utilisée comme méthode de discrétisation afin de simuler le comportement de structures complexes proches de cas pratiques. Les principes généraux de la méthode ainsi qu'un certain nombre de raffinements sont regroupés dans le livre de Zienkiewicz.

2.7 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous sommes attachés à présenter l'historique des théories des poutres. Dans un premier temps, nous avons présenté le comportement des poutres composites qui est plus complexe que celui d'une poutre en matériaux traditionnels, métalliques par exemple, et nous l'avons terminé par une démonstration des différents théories des poutres telles que la théorie classique (CBT), la théorie de cisaillement de premier ordre (FSDBT) et les théories d'ordre élevé HSDBT (PSDBT, SSDBT, ESDBT).

Chapitre 3 Formulation mathématique

3.1 Introduction

Au cours des dernières années, on a assisté à une augmentation rapide de l'utilisation de structures à gradient fonctionnel (FG) Dans l'aérospatiale, la marine et le génie civil en raison d'un rapport force / poids élevé.

Le concept de FGM a été initialement introduit au milieu des années 1980 par un groupe de chercheurs japonais. Macroscopiquement, Ce sont des matériaux composites hétérogènes qui sont généralement composées de deux matériaux différents comme le céramique-métal.

La composition du matériau change progressivement suivant la direction de l'épaisseur. En conséquence, les propriétés mécaniques sont supposées variables de manière continue à partir de la surface supérieure à la partie inférieure.

En raison des bonnes caractéristiques de la céramique à la température et la bonne résistance à la corrosion ainsi que la ténacité du métal, la combinaison de la céramique et du métal peut aboutir à d'excellents matériaux.

L'objectif dans ce chapitre est de développer un nouveau modèle de cisaillement d'ordre élevé en utilisant la théorie quasi3D pour analyser la flexion et la vibration libre des poutres simplement appuyées en matériau FGM.

3.2 Formulation théorique :

Propriétés matérielles :

Les propriétés du FGM varient continuellement en changeant la fraction volumique des matériaux suivant la direction de l'épaisseur. Une fonction de loi de puissance est utilisée couramment pour décrire cette variation de propriétés matérielle.

La fraction volumique de la poutre P-FGM est supposé varier suivant l'épaisseur de la poutre selon une fonction de la fraction volumique de la poutre en loi de puissance :

3.3 Description du problème et équations de base :

Considérons le cas d'une poutre FGM, (voir la Figure 3.1), de longueur L et d'épaisseur uniforme h . Les faces supérieure et inférieure de la poutre FGM sont à $z = \pm h/2$.



Fig (3.1) Géométrie de la poutre FGM.

On suppose que le module de Young de la poutre FGM varie à travers l'épaisseur selon une loi de puissance P-FGM comme :

$$E(z) = (E_c + E_m) \left(\frac{z}{h} - \frac{1}{2} \right)^P + E_m \quad (3.1)$$

Où E_c et E_m , sont les modules de Young des faces supérieures et inférieures de la poutre FGM, respectivement.

Selon cette distribution, la surface inférieure ($z = -h/2$) de la poutre FGM est en métal, tandis que la surface supérieure ($z = h/2$) est en céramique, et pour différentes valeurs de p on peut obtenir les différentes fractions volumiques du FGM.

3.4 Hypothèses de base :

Les hypothèses de la théorie actuelle sont les suivantes :

Les déplacements sont petits par rapport à l'épaisseur de la poutre et, par conséquent, les déformations sont infinitésimal impliqués.

Le déplacement transversal « w » comprend trois composantes : la flexion w_b , le cisaillement w_s et l'effet de déformation normale $g(z)w_z$

$$w(x, z) = w_b(x) + w_s(x) + g(z)w_z(x) \quad (3.2)$$

Les deux premières composantes sont des fonctions de la coordonnée x seulement et le troisième « *stretching effect* » est une fonction des coordonnées x et z .

c- Les déplacement u dans la direction x est constitué de trois composantes :

- a- Extensionnelle ;
- b- Flexionnelle ;
- c- Cisaillement

$$u = u_0 + u_b + u_s$$

L'élément de flexion u_b est considéré comme similaire au déplacement donné par la théorie classique des poutres. Donc, l'expression de peut être donnée par :

$$u_b = -z \frac{\partial w_b(x)}{\partial x}$$

La composante de cisaillement u_s peut définir, en parallèle avec w_s , des variations sinusoïdales de la déformation de cisaillement γ_{xz} et donc la contrainte de cisaillement τ_{xz} à travers l'épaisseur de la poutre de telle sorte que la contrainte de cisaillement τ_{xz} est nulle au niveau des face supérieure et inférieure de la poutre. Par conséquent, l'expression de u_s peut être donnée :

$$u_s = -f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x}$$

3.5 Cinématique:

Cet article étend une théorie de déformation de cisaillement raffinée à partir de recherches intérieures en incluant épaisseur. Le nouveau champ de déplacement est supposé être :

$$U(x, z) = u(x, t) - z \frac{dw_b(x)}{dx} - \frac{4z^3}{3h^2} \frac{dw_s(x)}{dx} = u(x, t) - z w_b'(x) - f(z) w_s'(x) \tag{3.3a}$$

$$W(x, z) = w_b(x) + w_s(x) + \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) w_z(x) = w_b(x) + w_s(x) + g(z) w_z(x) \tag{3.3b}$$

Où u, w_b, w_s et w_z sont quatre déplacements inconnus du milieu du plan de la poutre.

Si la composante $g(z) w_z(x)$ n'est pas inclus (3.2), pour obtenir le champ de déplacement de la Théorie classique (CBT, $f = g = 0$). Et celui du premier ordre (FBT, $f = 0, g = 1$) Et pour la théorie du troisième ordre (TBT, $f = \frac{4z^3}{3h^2}, g = 1 - \frac{4z^2}{h^2}$) ou $g = 1 - f'$, Qui définit la répartition des déformations en cisaillement à travers l'épaisseur de la poutre.

Les déformations non nulles sont:

$$\epsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} = u' - z w_b'' - f w_s'' \tag{3.4a}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = g' w_z \quad (3.4b)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = g(w'_s + w'_z) \quad (3.4c)$$

3.6 Formulation variation al :

La variation de l'énergie de déformation peut être indiquée comme suit:

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_0^l \int_0^b \left[\int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_{xz} \delta \gamma_{xz} + \sigma_z g' \delta w_z) dz \right] dy dx \\ &= \int_0^l [N_x \delta u' - M_x^b \delta w_b'' - M_x^s \delta w_s'' + Q_{xz} (\delta w_s' + \delta w_z') + R_z \delta w_z] dx \end{aligned} \quad (3.5)$$

Où N_x , M_x^b , M_x^s , Q_{xz} et R_z Sont les résultantes des contraintes, définis comme suit:

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x b dz \quad (3.6a)$$

$$M_x^b = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z b dz \quad (3.6b)$$

$$M_x^s = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x f b dz \quad (3.6c)$$

$$Q_{xz} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} g b dz \quad (3.6d)$$

$$R_z = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_z g' b dz \quad (3.6e)$$

La variation de l'énergie potentielle sous une charge transversale q Peut être écrite comme :

$$\delta V = - \int_0^l q (\delta w_b + \delta w_s) dx \quad (3.7)$$

En utilisant le principe de l'énergie potentielle totale, l'énoncé faible suivant est obtenu:

$$\int_0^l [N_x \delta u' - M_x^b \delta w_b'' - M_x^s \delta w_s'' + Q_{xz} (\delta w_s' + \delta w_z') R_z \delta w_z - q (\delta w_b + \delta w_s)] dx = 0 \quad (3.8)$$

3.7 Equations constitutives :

Les relations constitutives linéaires sont données comme suit:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_z \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{13} & 0 \\ C_{13} & C_{11} & 0 \\ 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

Ou

$$C_{11} = \frac{E(z)}{1-\nu^2} \quad (3.10a)$$

$$C_{13} = \frac{E(z)\nu}{1-\nu^2} \quad (3.10b)$$

$$C_{55} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad (3.10c)$$

Si l'effet d'éirement d'épaisseur est omis ($\varepsilon_z = 0$), les constantes élastiques C_{ij} De (Eq 3.10) Sont réduits comme:

$$C_{11} = E(z) \quad (3.11a)$$

$$C_{13} = 0 \quad (3.11b)$$

$$C_{55} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad (3.11c)$$

En remplaçant les équations. (3.9) et (3.4) dans (3.6) Les résultantes des contraintes peuvent être exprimés:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ M_x^b \\ M_x^s \\ R_z \\ Q_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B_s & X & 0 \\ B & D & D_s & Y & 0 \\ B_s D_s & H & Y_s & 0 & 0 \\ X & Y & Y_s & Z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u' \\ -w_b'' \\ -w_s'' \\ w_z \\ w_s' + w_z' \end{Bmatrix} \quad (3.12)$$

Ou

$$(A. B. B_s. D. D_s. H. Z) = \int_{-h/2}^{h/2} C_{11} (1, z, f, z^2, fz, f^2, g'^2) b dz \quad (3.13a)$$

$$A_s = \int_{-h/2}^{h/2} C_{55} g^2 b dz \quad (3.13b)$$

$$(X. Y.Y_s) = \int_{-h/2}^{h/2} C_{13} g'(1, z, f) b dz \quad (3.13c)$$

3.8 Équations d'équilibre :

Les équations d'équilibre peuvent être obtenues en intégrant les dérivés des différentes quantités par parties et en collectant les coefficients $\delta u, \delta w_b, \delta w_s$ et δw_z :

$$N'_x = 0 \quad (3.14a)$$

$$M_x^{b''} + q = 0 \quad (3.14b)$$

$$M_x^{s''} + Q'_{xz} + q = 0 \quad (3.14c)$$

$$Q'_{xz} - R_z = 0 \quad (3.14d)$$

Les conditions limites naturelles sont sous la forme:

$$\delta u : N_x \quad (3.15a)$$

$$\delta w_b : M_x^{b'}$$

$$(3.15b)$$

$$\delta w'_b : M_x^b \quad (3.15c)$$

$$\delta w_s : M_x^{s'} + Q_{xz} \quad (3.15d)$$

$$\delta w'_s : M_x^s \quad (3.15e)$$

$$\delta w_z : Q_{xz} \quad (3.15f)$$

En remplaçant l'équation (3.12) Dans l'équation (3.13) Les équations d'équilibre peuvent être exprimées, comme suit:

$$A u'' - B w_b''' - B_s w_s''' + X w'_z = 0 \quad (3.16a)$$

$$B u''' - D w_b^{iv} - D_s w_s^{iv} + Y w'_z + q = 0 \quad (3.16b)$$

$$B_s u''' - D_s w_b^{iv} - H w_s^{iv} + A_s w_s'' + (A_s + Y_s) w'_z + q = 0 \quad (3.16c)$$

$$- X u' + Y w_b'' + (A_s + Y_s) w_s'' + A_s w_z'' - Z w_z = 0 \quad (3.16d)$$

3.9 Procédure de solution :

3.9.1 Solutions analytiques :

Pour les conditions aux limites simplement appuyée, la solution de Navier est supposée sous la forme:

$$u(x) = \sum_n^{\infty} U_n \cos \alpha x \quad (3.17a)$$

$$w_b(x) = \sum_n^{\infty} W_{bn} \sin \alpha x \quad (3.17b)$$

$$w_s(x) = \sum_n^{\infty} W_{sn} \sin \alpha x \quad (3.17c)$$

$$w_z(x) = \sum_n^{\infty} W_{zn} \sin \alpha x \quad (3.17d)$$

Où $\alpha = \frac{n\pi}{L}$ et U_n, W_{bn}, W_{sn} et W_{zn} sont les coefficients.

La charge transversale q est également développée en séries de Fourier pour une charge uniforme (q_0) comme suit

$$q(x) = \sum_n^{\infty} Q_n \sin \alpha x = \sum_n^{\infty} \frac{4q_0}{n\pi} \sin \alpha x \quad \text{Où } n = 1,3,5, \quad (3.18)$$

En remplaçant l'équation (3.17) et (3.18) Dans l'équation (3.16) La solution analytique peut être obtenue à partir d'équations suivantes:

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_n \\ W_{bn} \\ W_{sn} \\ W_{zn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ Q_n \\ Q_n \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

Où

$$S_{11} = A\alpha^2; S_{12} = S_{21} = -B\alpha^3; S_{13} = S_{31} = -B_s\alpha^3 \quad (3.20 a)$$

$$S_{14} = S_{41} = -X\alpha; S_{22} = D\alpha^4; S_{23} = S_{32} = D_s\alpha^4 \quad (3.20b)$$

$$S_{24} = S_{42} = Y\alpha^2; S_{33} = A_s\alpha^2 + H\alpha^2 \quad (3.20c)$$

$$S_{34} = S_{43} = (A_s + Y_s)\alpha^2; S_{44} = A_s\alpha^2 + Z \quad (3.20d)$$

3.10 Conclusions :

Une formulation mathématique de la théorie quasi-3D utilisée dans ce mémoire a été présentée. Cette théorie permet d'inclure deux effets, effet du cisaillement transverse et de la déformation normale $\varepsilon_z \neq 0$. La résolution du système matriciel obtenu en fin de ce chapitre donne les déplacements et les contraintes qui seront comparés avec ceux des autres théories, afin de voir l'effet de la déformation normale sur le comportement statique de poutres en FGM.

Chapitre 4 Résultats et interpretation

4.1 Introduction

Pour les résultats numériques, une poutre Al/Al₂O₃ composée d'aluminium (métal) et d'alumina (céramique) est considérée. Les propriétés matérielles de l'aluminium sont $E_m = 70$ GPa, $\nu_m = 0.3$ et celles de l'alumina sont $E_c = 380$ GPa, $\nu_c = 0.3$. Pour interpréter les résultats trouvés, on a utilisé les quantités adimensionnelles suivantes :

$$\text{Le déplacement vertical } \bar{w} = \frac{100 E_m h^3}{q L^4} w\left(\frac{L}{2}, z\right) \quad (4.1)$$

Contraintes axiale, normale et de cisaillement

$$\bar{\sigma}_x = \frac{h}{q L} \sigma_x\left(\frac{L}{2}, z\right) \quad (4.2)$$

$$\bar{\sigma}_z = \frac{h}{q L} \sigma_z\left(\frac{L}{2}, z\right) \quad (4.3)$$

$$\bar{\sigma}_{xz} = \frac{h}{q L} \sigma_{xz}(0, z) \quad (4.4)$$

Deux cas sont traités, le premier sous chargement uniforme et le deuxième sous charge sinusoïdale.

4.2 Validation des résultats

Les tableaux (4.1) à (4.4) présentent les résultats de la flèche et des contraintes axiales, normales et de cisaillement d'une poutre carrée FGM simplement appuyée sous charge uniforme.

Tab (4.1) Fleche adimensionnelles \bar{w} d'une poutre sous charge uniforme en FGM

Théorie	ε_z	p=0	p=1	p=2	p=5	p=10
$l/h = 5$						
TBT [Li et al 2010]	=0	3.1657	6.2599	8.0602	9.7802	10.8979
CBT	=0	2.8783	5.7746	7.4003	8.7508	9.6072
FBT	=0	3.1657	6.2599	8.0303	9.6483	10.7194
TBT	=0	3.1654	6.2594	8.0677	9.8281	10.9381
Quasi3D	$\neq 0$	3.1397	6.1338	7.8606	9.6037	10.7578
$l/h = 20$						
TBT [Li et al 2010]	=0	2.8962	5.8049	7.4415	8.8151	9.6879
CBT	=0	2.8783	5.7746	7.4003	8.7508	9.6072
FBT	=0	2.8962	5.8049	7.4397	8.8069	9.6767
TBT	=0	2.8962	5.8049	7.4421	8.8182	9.6905
Quasi3D	$\neq 0$	2.8947	5.7201	7.2805	8.6479	9.5749

Tab (4.2) Contrainte axiale adimensionnelles $\bar{\sigma}_x$ d'une poutre sous charge uniforme en FGM

Théorie	ε_z	p=0	p=1	p=2	p=5	p=10
$l/h = 5$						
TBT [Li et al 2010]	=0	3.8020	5.8837	6.8812	8.1030	9.7063
FBT	=0	3.7500	5.7959	6.7676	7.9428	9.5228
TBT	=0	3.8020	5.8836	6.8826	8.1106	9.7122
Quasi3D	$\neq 0$	3.8005	5.8812	6.8818	8.1140	9.7164
$l/h = 20$						
TBT [Li et al 2010]	=0	15.0130	23.2054	27.0989	31.8112	38.1372
FBT	=0	15.0000	23.1834	27.0704	31.7711	38.0913
TBT	=0	15.0129	23.2053	27.0991	31.8130	38.1385
Quasi3D	$\neq 0$	15.0126	23.2047	27.0990	31.8139	38.1397

Tab (4.3) Contrainte normale adimensionnelles $\overline{\sigma}_z$ d'une poutre en élément finis en FGM

Théorie	ε_z	p=0	p=1	p=2	p=5	p=10
$l/h = 5$						
Quasi3D	$\neq 0$	0.1352	0.0670	0.0925	0.0180	-0.0181
$l/h = 20$						
Quasi3D	$\neq 0$	0.0337	-0.5880	-0.6269	-1.1698	-1.5572

Tab (4.4) Contrainte de cisaillement adimensionnelles $\overline{\sigma}_{xz}$ d'une poutre sous charge uniforme en FGM

Théorie	ε_z	p=0	p=1	p=2	p=5	p=10
$l/h = 5$						
TBT [Li et al 2010]	= 0	0.7500	0.7500	0.6787	0.5790	0.6436
FBT	= 0	0.5988	0.5988	0.5095	0.3922	0.4288
TBT	= 0	0.7332	0.7332	0.6706	0.5905	0.6467
Quasi3D	$\neq 0$	0.7233	0.7233	0.6622	0.5840	0.6396
$l/h = 20$						
TBT [Li et al 2010]	=0	0.7500	0.7500	0.6787	0.5790	0.6436
FBT	=0	0.5988	0.5988	0.5095	0.3922	0.4288
TBT	=0	0.7451	0.7451	0.6824	0.6023	0.6596
Quasi3D	$\neq 0$	0.7433	0.7433	0.6809	0.6011	0.6584

Les valeurs calculées par les différentes théories sont obtenues en utilisant 100 termes dans les séries de l'équation (3.17). On constate que les valeurs obtenues par les différentes théories de déformation de cisaillement sont en accord avec celles données par Li et al (2010) pour toutes les valeurs de l'indice matériel p et du rapport L/h . il est remarqué aussi que la CBT sous-estime la flèche pour des poutres modérément épaisses ($L/h=5$) et cela est dû à la négligence de l'effet de déformation de cisaillement par la CBT. On constate aussi que la théorie quasi3D a donné les plus petites valeurs.

Les figures 4.1 a 4.3 montrent les variations la contrainte axiale $\overline{\sigma}_x$ et la contrainte de cisaillement transversal $\overline{\tau}_{xz}$ respectivement à travers l'épaisseur d'une poutre très épaisse ($L=5h$) sous un chargement uniforme. En général, les deux théories de déformation de cisaillement donnent presque les mêmes résultats à l'exception de la contrainte $\overline{\tau}_{xz}$ où des légères différences sont apparues.

Pour illustrer l'effet de l'indice matériel p sur la repense statique des poutres en FGM sous chargement uniforme, la flèche, contraintes axiales, adimensionnelles sont présentées dans les figures 4.3Et 4.4 respectivement. Puisque aucune différence entre les résultats des théories de déformation en cisaillement, seulement la théorie Quasi3D est utilisée pour tracer les figures 4.3 Et 4.4. On constate que l'augmentation de l'indice matériel p réduit la rigidité

des poutres en FGM et par conséquent une augmentation de la flèche et de la contrainte axiale. Ceci est dû au fait que de grandes valeurs de p correspondent à des portions élevées en métal par rapport au céramique, qui rend les poutres en FGM plus flexibles.

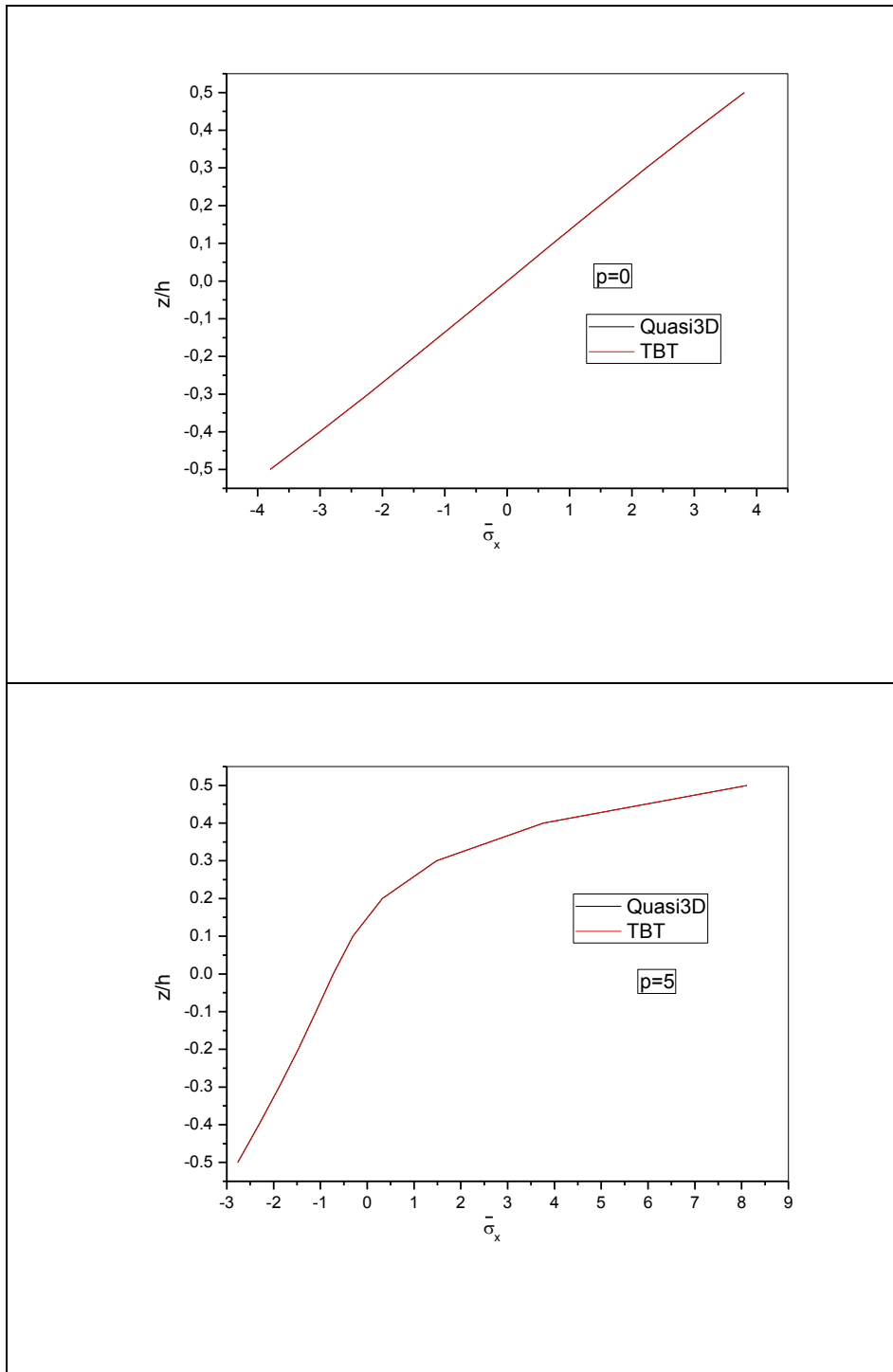


Fig (4.1) Comparaison de contraintes axiale d’une poutre FGM sous charge uniforme ($l/h=5$)

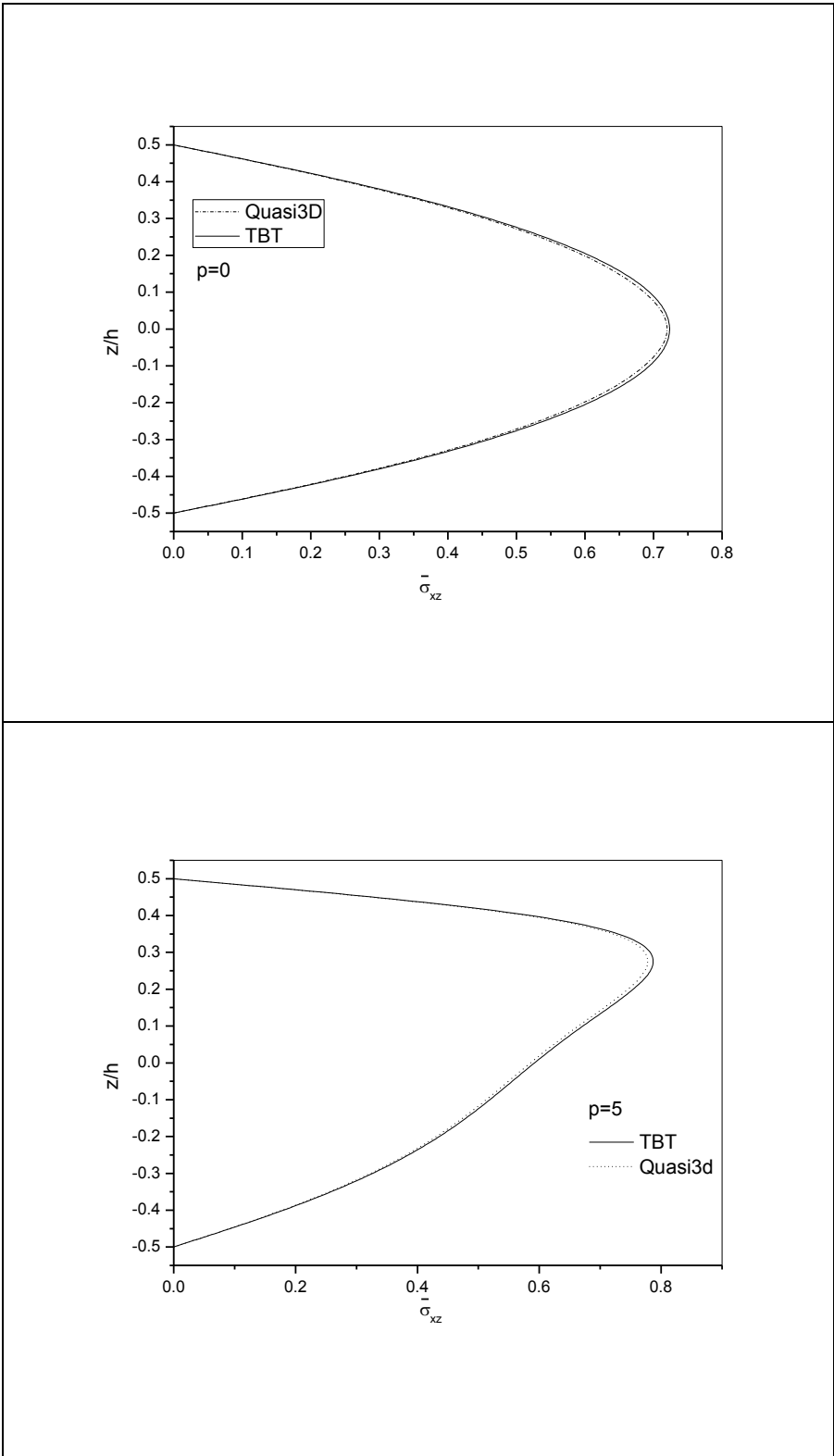


Fig (4.2) Comparaison de contraintes de cisaillement d'une poutre FGM sous charge uniforme ($l/h=5$)

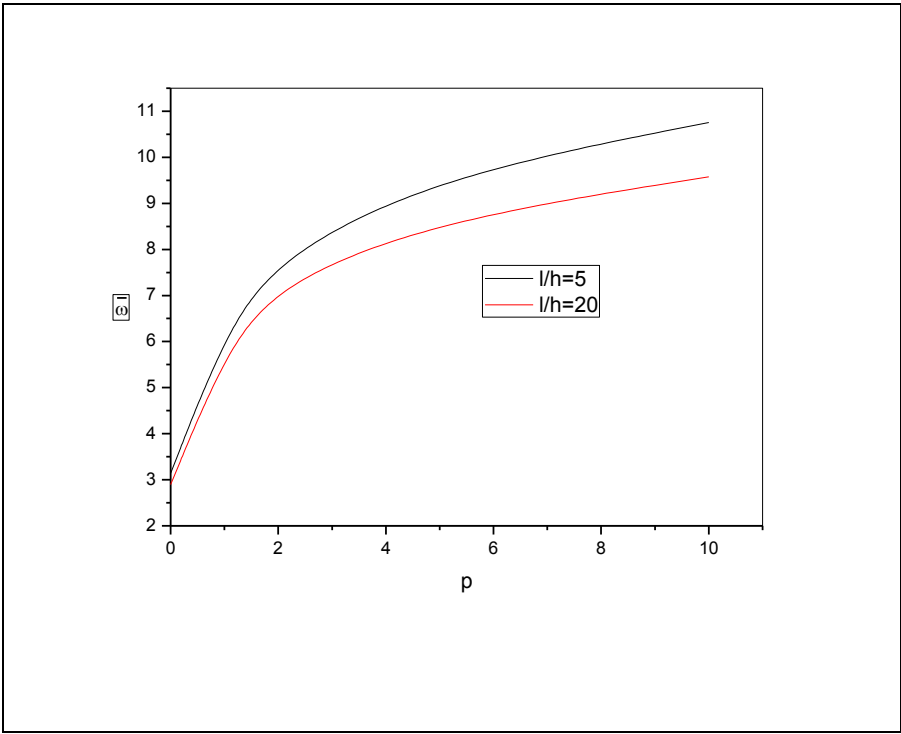


Fig (4.3) Variation de la flèche adimensionnelle en fonction de p

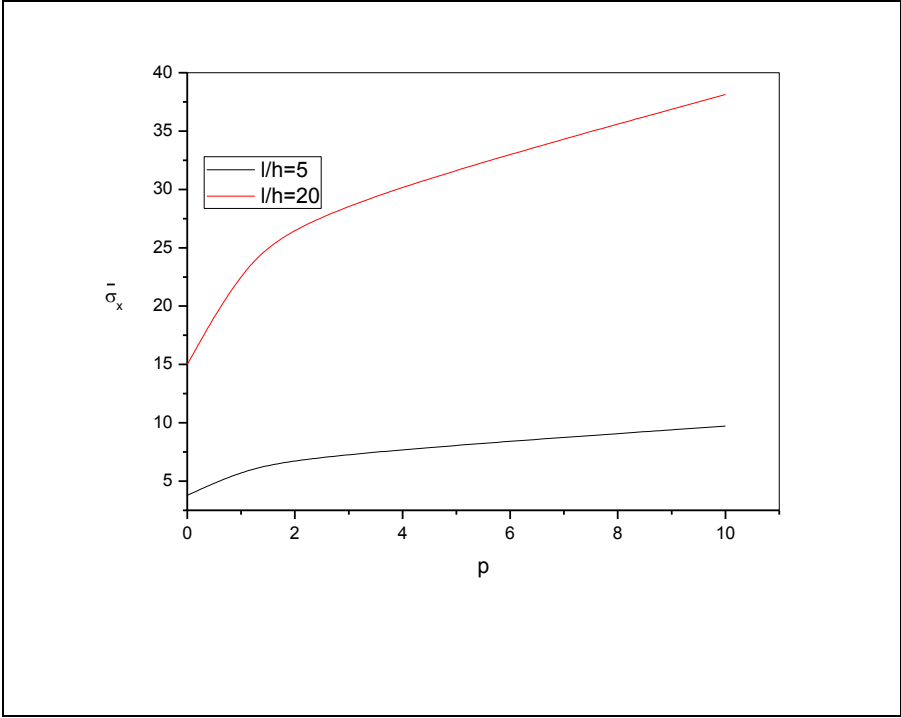


Fig (4.4) Variation de la contrainte axiale en fonction de p

Dans les tableaux 4.5 à 4.8, sont présentés les résultats de la flèche et des contraintes axiales, normales et de cisaillement d'une poutre carrée en FGM simplement appuyée sous charge sinusoïdale.

Tab (4.5) Flèche adimensionnelles \bar{w} d'une poutre sous charge sinusoïdale en FGM

Théorie	ε_z	p=0	p=1	p=2	p=5	p=10
$l/h = 5$						
CBT	=0	2.2693	4.5528	5.8346	6.8994	7.5746
FBT	=0	2.5023	4.9462	6.3453	7.6269	8.4761
TBT	=0	2.5020	4.9458	6.3754	7.7723	8.6530
Quasi3D	$\neq 0$	2.4810	4.8455	6.2107	7.5937	8.5088
$l/h = 20$						
CBT	=0	2.2693	4.5528	5.8346	6.8994	7.5746
FBT	=0	2.2839	4.5774	5.8665	6.9448	7.6309
TBT	=0	2.2839	4.5774	5.8684	6.9540	7.6421
Quasi3D	$\neq 0$	2.2826	4.5105	5.7410	6.8197	7.5508

Tab (4.6) Contrainte axiale adimensionnelles $\bar{\sigma}_x$ d'une poutre sous charge sinusoïdale en FGM

Théorie	ε_z	p=0	p=1	p=2	p=5	p=10
$l/h = 5$						
FBT	=0	3.0396	4.6979	5.4856	6.4381	7.7189
TBT	=0	3.0916	4.7857	5.6005	6.6057	7.9080
Quasi3D	$\neq 0$	3.0910	4.7847	5.6012	6.6107	7.9140
$l/h = 20$						
FBT	=0	12.1585	18.7918	21.9425	25.7527	30.8757
TBT	=0	12.1715	18.8137	21.9712	25.7947	30.9230
Quasi3D	$\neq 0$	12.1712	18.8131	21.9711	25.7955	30.9241

Tab (4.7) Contrainte normale adimensionnelles $\bar{\sigma}_z$ d'une poutre sous charge sinusoïdale en FGM

Théorie	ε_z	p=0	p=1	p=2	p=5	p=10
$l/h = 5$						
Quasi3D	$\neq 0$	0.1352	0.0977	0.1254	0.0772	0.0601
$l/h = 20$						
Quasi3D	$\neq 0$	0.0337	-0.4657	-0.4955	-0.9324	-1.2434

Tab (4.8) Contrainte de cisaillement adimensionnelles $\overline{\sigma}_{xz}$ d'une poutre sous charge sinusoïdale en FGM

Théorie	ε_z	p=0	p=1	p=2	p=5	p=10
$l/h = 5$						
FBT	= 0	0.3820	0.3820	0.3250	0.2502	0.2735
TBT	= 0	0.4769	0.4769	0.4368	0.3856	0.4224
Quasi3D	$\neq 0$	0.4769	0.4769	0.4368	0.3856	0.4224
$l/h = 20$						
FBT	=0	0.3820	0.3820	0.3250	0.2502	0.2735
TBT	=0	0.4774	0.4774	0.4374	0.3863	0.4231
Quasi3D	$\neq 0$	0.4774	0.4774	0.4374	0.3863	0.4231

On constate que les valeurs obtenues par les différentes théories de déformation en cisaillement sont comparable. Et les mêmes remarques que dans le cas de chargement uniforme.

Les figures 4.5 et 4.6 montrent les variations la contrainte axiale $\overline{\sigma}_x$ et la contrainte de cisaillement transversal $\overline{\tau}_{xz}$ respectivement à travers l'épaisseur d'une poutre très épaisse ($L=5h$) sous un chargement sinusoïdale. En général, les deux théories de déformation de cisaillement donnent presque les mêmes résultats à l'exception de la contrainte $\overline{\tau}_{xz}$ où des légères différences sont apparues

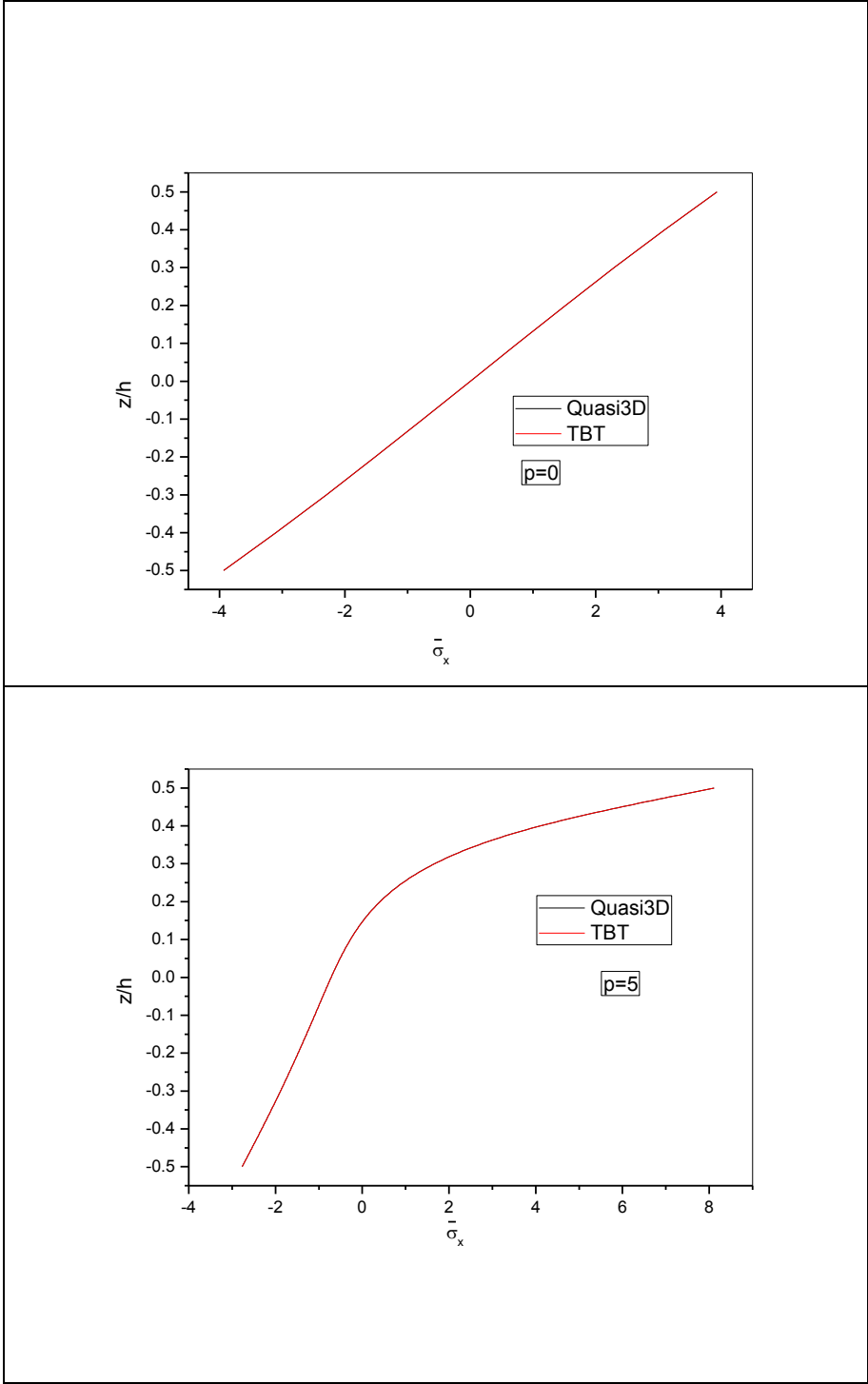


Fig (4.5) Comparaison de contraintes axiale d’une poutre FGM sous charge sinusoidale ($l/h=5$)

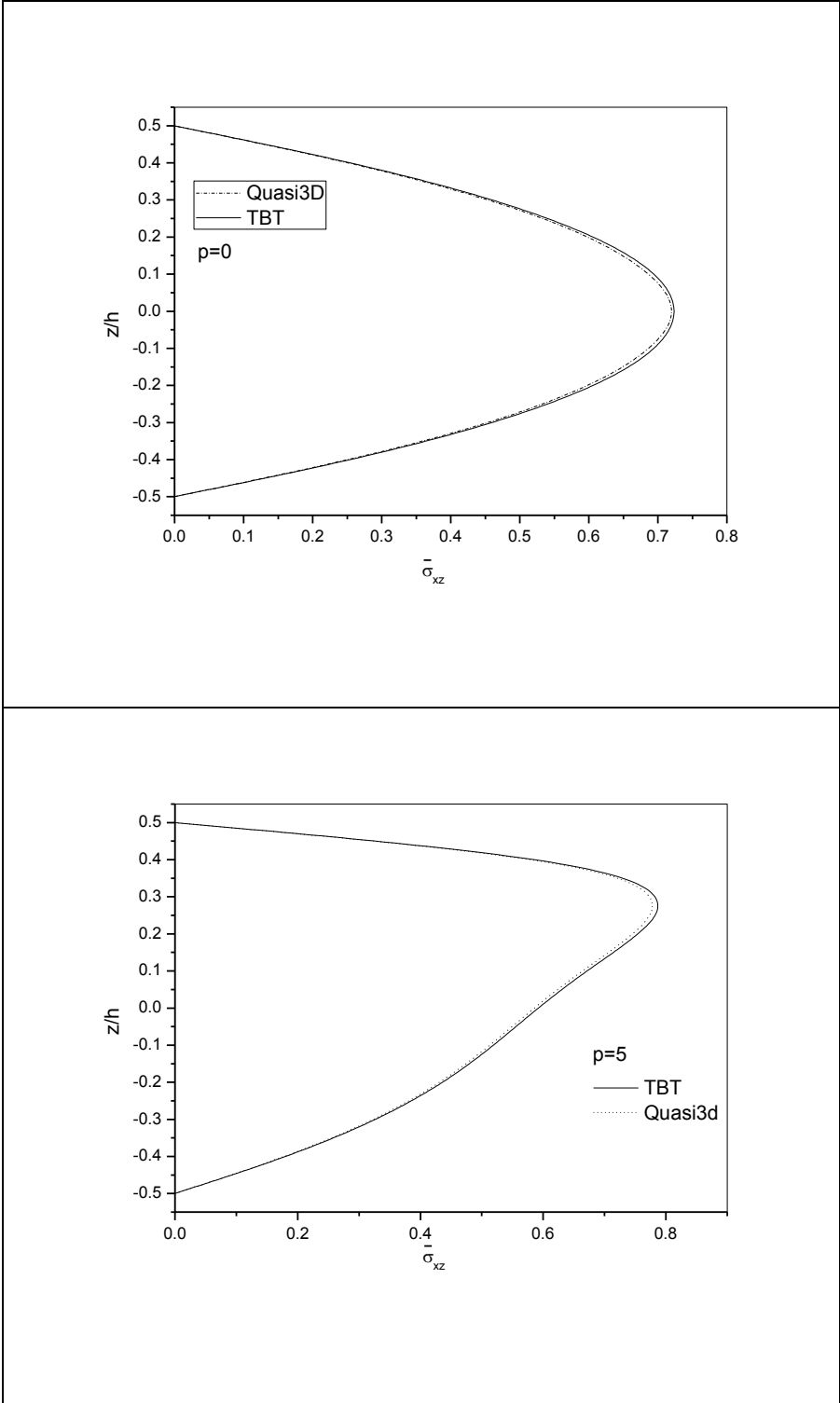


Fig (4.6) Comparaison de contraintes de cisaillement d’une poutre FGM sous charge sinusoïdale ($l/h=5$)

4.3 Conclusion

Basé sur une théorie quasi3d et la solution de Navier sont déterminés les déplacements et les contraintes d'une poutre en FGM simplement appuyée soumise à une charge uniforme et sinusoïdale. Cette théorie prend en considération l'effet de cisaillement et celui de la déformation normale.

Les comparaisons des résultats obtenus par cette théorie avec ceux des autres théories ont montré l'effet du cisaillement et d'étirement « *stretching effect* » sur les déplacements et les contraintes. Alors l'effet de la déformation normale est très important et doit être pris en considération dans l'analyse du comportement statique des poutres en FGM.

Conclusion générale

Dans le cadre de ce travail, nous avons développé une méthode analytique directe qui détermine les valeurs la flèche et les contraintes d'une poutre en FGM. Le modèle utilise tient compte des effets de cisaillement et de la déformation normales.

la validation et l'étude paramétrique de l'analyse ainsi faite avec des résultats d'autres recherches nous ont permis de dégager les points suivants:

- la flèche et les contraintes obtenues dans le présent travail sans l'effet de déformation normal ($\varepsilon_z = 0$) et le modèle de Li et al. (2010) donnent des résultats proches les uns des autres.

- Par contre pour ceux qui tiennent compte de l'effet de déformation normal ($\varepsilon_z \neq 0$) la flèche et les contraintes obtenues par le présent modèle sont presque identiques avec celles obtenues par le modèle de Li et al. (2010).

On constate aussi que présent modèle sans effet de déformation normale ($\varepsilon_z = 0$) et le modèle de Li et al. (2010) surestiment légèrement la flèche pour une poutre épaisse ($L / h = 5$), en raison de la négligence l'effet de la déformation normal.

- On peut aussi conclure que la flèche et les contraintes augmentent quand la raideur du matériau diminue, ceci est expliquer par la variation de l'indice de puissance matérielle.

En perspective de ce travail, nous recommandons d'étudier d'autres problèmes liés à la déformation normale ainsi qu'au gauchissement, et d'utiliser d'autres fonctions de formes et d'autres modes d'appuis tel que le cas encasté-libre, encasté-appuyée...etc

Nous envisageront aussi de :

- Prendre en compte l'effet de la porosité sur les propriétés matérielles ;
- Prendre en compte l'effet de la haute température ;

[Ait Amar Meziane, 2014]Ait Amar Meziane, M., Abdelaziz, H.H. and Tounsi, A. (2014), "An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions", *J. Sandw. Struct. Mater.* 16(3), 293-318.

[Berthelot, 2005] Jean-Marie Berthelot. « Matériaux composites, comportement mécanique et analyse des structures ». 4^{ème} Edition, Lavoisier, 2005.

[Bousahla, 2014]Bousahla, A.A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., AddaBedia, E.A., (2014), "A novel higher order shear and normal deformation theory based on neutral surface position for bending analysis of advanced composite plates", *International Journal of Computational Methods*, (In press).

[Hadji, 2013]HADJI LAZREG « Contribution à l'étude de la vibration des plaques sandwichées en FGM. » Thèse de Doctorat de l'université de DJILLALILIBES de SIDI BEL ABBES, 2013.

[Hadji, 2013]HADJI LAZREG « Analyse du comportement dynamique des poutres à gradient de propriétés type FGM. » Séminaire de Mécanique, SNM'13, 2013.

[Hebali, 2014]Hebali, H., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Bessaim, A. and AddaBedia, E.A.(2014), "A new quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates", *ASCE J. Eng. Mech.*, 140(2), 374-383.

[Kaskas, 2010]KESKAS « Etude de l'effet de cisaillement transverse sur le comportement des poutres composites. » Thèse Magister en génie civil de l'université Mentouri, Constantine, 2010.

[Li, 2010]Li XF, Wang BL, Han JC. A higher-order theory for static and dynamic analyses of functionally graded beams. *Arch Appl Mech* 2010;80(10):1197–212.

[Reddy, 1984]Reddy, J.N., 1984. A simple higher-order theory for laminated composite plates. *J Appl Mech* 51(4), 745–52.

[Reddy, 2002]Reddy, J.N. (2002), *Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics*, John Wiley & Sons Inc.

[Reddy, 2004]Reddy, J.N. (2004), *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*, (2nd Ed.), CRC Press, Boca Raton, FL, USA.

[Simsek, 2010]Simsek M. Fundamental frequency analysis of functionally graded beams by using different higher-order beam theories. *Nucl Eng Des* 2010;240(4): 697–705.

[Thai, 2012] ThaiH.-T., T. P. Vo, Bending and free vibration of functionally graded beams using various higher-order shear deformation beam theories, *International Journal of Mechanical Sciences* 62 (1)(2012) 57 – 66.