

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN DE TIARET.



FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES
DÉPARTEMENT GÉNIE CIVIL

Mémoire de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme de Master

Spécialité : **Génie Civil**

Option : **Génie de construction**

Présenté par :

Mr : **BOUZIANE TOUFIK**

Mr : **KHALFALLAH YASSINE Abdelhadi**

Sujet du mémoire

**UN NOUVEAU CHAMP DE DEPLACEMENT POUR ETUDIER LA
FLEXION ET LA VIBRATION DES
PLAQUES FGM**

Soutenu publiquement ledevant le jury composé de :

Mr, **H.H.ABDELAZIZ**

Mr, **H.LAZREG**

Mr, **K.DRAICHE**

Mme, **Z.KHELIFA**

Mr, **Y.TLIDJI**

Président

Rapporteur

Examineur

Examineur

Examineur

PROMOTION : 2016/2017

Remerciements

Tout d'abord nous remercions avant tous, dieu le tout puissant qui nous a donné le courage, et la volonté pour atteindre notre objectif, et tous les enseignants qui ont contribué à notre formation durant tous les cycles.

Il est difficile d'exprimer en quelques mots nos profondes reconnaissances vers notre promoteur Mr : Hadji.L qui a assuré la direction scientifique de ce travail et pris le temps de nous faire profiter avec patience de sa expérience, ses connaissances et sa disponibilité constante à la réalisation de ce travail, veuillez accepter monsieur les expressions de nos sincères remerciements.

Nos remerciements vont aux membres du jury d'avoir honoré notre soutenance et tout l'effort fourni afin de juger ce modeste travail.

Nous portons avec gratitude de reconnaissance pour l'ensemble des enseignants du département de Génie Civil qui ont contribué à notre formation du master en Génie Civil.

Nos remerciements s'adressent également à l'ensemble du personnel technique et administratif du département de génie civil de Tiaret ainsi que tous nos collègues.

A tous ceux ou celles qui nous apportés leur soutien, trouvent ici, l'expression de nos vive et sincère reconnaissance.

Dédicaces

A l'homme de ma vie, mon exemple éternel, mon soutien moral et source de joie et de bonheur, celui qui s'est toujours sacrifié pour me voir réussir, que dieu te garde dans son vaste paradis, à toi mon père.

A la lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon cœur, ma vie et mon bonheur ; maman que j'adore.

A celui que j'aime beaucoup et qui m'a soutenue tout au long de ce projet : A mes frères et mes sœurs.

A tous mes amis et collègues,

A mon binôme YASSINE et toute la famille Bouziane.

A tous ceux qui, par un mot, m'ont donné la force de continuer

Dédicaces

A l'homme de ma vie, mon exemple éternel, mon soutien moral et source de joie et de bonheur, celui qui s'est toujours sacrifié pour me voir réussir, que dieu te garde dans son vaste paradis, à toi mon père.

A la lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon cœur, ma vie et mon bonheur ; maman que j'adore.

A celui que j'aime beaucoup et qui m'a soutenue tout au long de ce projet : A mes frères et mes sœurs.

A tous mes amis et collègues,

A mon binôme TOUFIK et toute la famille Khalfallah.

A tous ceux qui, par un mot, m'ont donné la force de continuer

Sommaire

Résumé	i
Abstract	ii
ملخص	iii
Liste des figures	iv
Liste des tableaux	vi
Liste des notations	vii
Introduction générale.....	2
I.1. Introduction.....	5
I.2. La Définition et le concept d'un matériau à gradient de propriétés	6
I.3. L'intérêt d'utilisation des FGM.....	8
I.4. Méthodes d'élaboration des FGM:	8
I.4.1 Coulage en Bande (Tape Casting ou Doctor-Blade).....	9
I.4.2 Coulage Séquentiel en Barbotine (Slip Casting)	10
I.4.3 Compaction Sèche des Poudres	11
I.4.4 Dépôt par Electrophorèse.....	11
I.4.5 Projection Plasma.....	11
I.4.6 C. V. D. et P. V. D.	12
I.4.7 Frittage et Infiltration.....	12
I.4.8 Frittage Laser Différentiel.....	12
I.4.9 Implantation Ionique (Sputtering).....	13
I.4.10 Dépôt par Centrifugation	13
I.5. Propriétés physiques et mécaniques des FGM	14
I.5.1 Propriétés physiques de l'aluminium	14
I.5.2 Propriétés physiques de la céramique	15
I.6. Différence entre FGM et les matériaux composites traditionnels... ..	16
I.7. Propriétés matérielles effectives d'un matériau FGM... ..	17
I.8. Domaines d'application des matériaux à gradients évalués FGM... ..	18
I.9. Les différentes lois qui régissent la variation des propriétés matérielles suivant l'épaisseur d'une plaque FGM... ..	20
I.9.1 Propriétés matérielles de la plaque P-FGM	20
I.9.2 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM	21
I.9.3 Propriétés matérielles de la plaque E-FGM	22
I.10. Conclusion	23
II.1. Introduction	25
II.2. Les Différents Modèles des structures composites dans l'élasticité bidimensionnelles ..	25
II.2.1.Approche monocouche équivalente.....	25

II.2.1.1. Les modèles classiques Love-Kirchhoff (théorie classique des plaque stratifiées CLPT).....	26
II.2.1.2. Les modèles Reissner-Mindlin (théorie de déformation en cisaillement du premier ordre FSDT)	27
II.2.1.3. Les modèles d'ordre élevé	28
II.2.2. Approche par couche	33
II.3. Conclusion	35
III.1. Introduction	37
III.2. Formulation théorique	38
III.2.1. Surface physique neutre	38
III.2.2. Hypothèses de base	40
III.2.3. Equations cinématique et constitutive	41
III.2.4. Equations gouvernantes	43
III.3. solution analytique.....	47
III.3.1. solution exacte pour une plaque en FGM	47
III.4. Conclusion	49
IV.1. Introduction.....	51
IV.2. Résultats numériques et discussion	51
IV.2.1. Analyse statique	51
IV.2.2. Analyse dynamique	60
IV.3. Conclusion	65
Conclusion générale et perspectives	67
Références bibliographiques	70
Programme statique : Les contraintes	75
Programme statique : Les déplacements	77
Programme dynamique : Les fréquences	79

Résumé

L'intérêt de cette étude est l'analyse du comportement statique et dynamique des plaques rectangulaires épaisses en FGM en se basant sur un nouveau champ de déplacement utilisant la théorie de cisaillement raffinée d'ordre élevé à quatre variable et faire une étude comparative entre les différents modèles de la littérature. Dans ce travail on suppose que les propriétés matérielles comme le module de Young et la densité de masse de la plaque FGM varient sans interruption dans la direction de l'épaisseur selon une simple distribution de loi de puissance P-FGM en fonction de la fraction volumique des constituants. Les équations régissantes sont obtenues en se basant sur la présente théorie. Les équations gouvernantes sont résolues pour les plaques simplement appuyées. Une étude paramétrique sera menée afin de souligner les effets des différents paramètres gouvernants la réponse des plaques épaisses en FGM.

Mots clés : Matériaux à gradient de propriété, Flexion, Vibration, Théorie d'ordre élevé.

Abstract

The interest of this study is to analyze the static and dynamic behavior of FGM thick rectangular plates based on a new field of motion using the four-variable high order refined shear theory and to make a comparative study between Different models of the literature. In this work, it is assumed that the material properties such as the Young's modulus and the mass density of the FGM plate vary continuously in the direction of thickness according to a simple distribution of power law P-FGM as a function of the volume fraction of the constituents. The governing equations are obtained on the basis of the present theory. The governing equations are solved for simply supported plates. A parametric study will be carried out in order to highlight the effects of the different parameters governing the response of thick plates to FGM.

Keywords: Functionally graded materials, Bending, Vibration, higher order theories,

ملخص

الهدف من هذه الدراسة هو تحليل السلوك الميكانيكي للصفائح المتدرجة وظيفيا استنادا إلى الموضوع الدقيق للمحور المحايد باستعمال نظرية مبسطة و دقيقة ذات تشوه القص و بدرجة عليا (بأربعة متغيرات) تعتمد على حقل جديد للانتقالات الجزيئية للجسم.

في هذه الدراسة خصائص المواد " معامل يونغ و كثافة الكتلة " تتغير حسب قانون أسي في الاتجاه العرضي للصفحة، معادلات الحركة للصفحة المتدرجة وظيفيا نتحصل عليها باستعمال مبدأ هاملتون. الحل التحليلي نتحصل عليه باستعمال طريقة نافي. لإثبات دقة وكفاءة النظرية ، تتم مقارنة النتائج المتحصل عليها مع نتائج نظريات أخرى.

الكلمات المفتاحية : المواد المتدرجة وظيفيا ، الانحناء، الاهتزاز، نظرية ذات درجة عليا

Liste des figures

Figure. I.1 : un type d'un matériau FGM en céramique et métal.....	7
Figure. I.2 : variation de la composition d'un FGM ,(a) Conductivité thermique,(b) résistance mécanique.....	8
Figure. I.3 : Principe de la méthode coulage en bande	10
Figure. I.4 : Disposition du procédé frittage laser différentiel.	13
Figure. I.5: Schéma du procédé dépôt par centrifugation..	14
Figure. I.6 : La distribution composante des matériaux.....	17
Figure. I.7: Modèles analytiques pour une couche en FGM.	18
Figure. I.8: Les principaux domaines d’application des FGM [Houari 2011].....	19
Figure.I.9 : La variation du module de Young dans une plaque P-FGM.....	20
Figure. I.10: Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.....	22
Figure.I.11: Variation du module de Young dans une plaque E-FGM.....	23
Figure. II.1: Cinématique de Love-Kirchhoff.	26
Figure. II.2: Cinématique de Reissner-Mindlin.	27
Figure.II.3:Variation de la fonction de gauchissement $f(x_3)=x_3$ et $f'(x_3)$ suivant l'épaisseur.....	28
Figure. II.4: Cinématique de la théorie d’ordre supérieur.....	29
Figure. II.5:Variation de la fonction de forme $f(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur.....	32
Figure. II.6:Variation de la dérivée de la fonction de forme $f'(z)$ des différents modèles suivant l'épaisseur	32
Figure.II.7:Champ de déplacements des modèles couches discrètes, approche Cinématique(Nguyen.2004).....	34
Figure.II.8:Champ de déplacements des modèles zig-zag, approche cinématique (Nguyen.2004).....	34

Figure. III.1 : Position de la surface médiane et la surface neutre pour une plaque FGM.....	40
Figure. III.2 : Géométrie d'une plaque en FGM.....	41
Figure. IV.1 : Flèche adimensionnelle \bar{W} en fonction de l'indice de loi de puissance p pour une plaque carrée en FGM sous chargement sinusoïdale.....	55
Figure. IV.2 : Flèche adimensionnelle \bar{W} en fonction du rapport (a/b) de la plaque FGM.....	55
Figure. IV.3 : Flèche adimensionnelle \bar{W} en fonction du rapport (a/h) d'une plaque carrée en FGM.....	56
Figure. IV.4 : Variation de la contrainte longitudinale $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur d'une plaque FGM pour différentes valeurs du rapport (a/h)	57
Figure. IV.5 : Variation de la contrainte longitudinale $\bar{\sigma}_y$ à travers l'épaisseur d'une plaque de FGM pour différentes valeurs du rapport (a/b)	57
Figure. IV.6 : Variation de la contrainte tangentielle $\bar{\tau}_{xy}$ à travers l'épaisseur d'une plaque FGM pour différentes valeurs du rapport (a/h)	58
Figure. IV.7 : Variation de la contrainte tangentielle $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur d'une plaque FGM pour différentes valeurs du rapport (a/b)	58
Figure. IV.8 : Variation de la contrainte tangentielle $\bar{\tau}_{yz}$ à travers l'épaisseur d'une plaque FGM pour différentes valeurs du rapport (a/b)	59
Figure. IV.9 : Fréquence adimensionnelle $\bar{\omega}$ en fonction du rapport d'aspect (a/h) pour différents indices de loi de puissance des plaques carrées en FGM.....	61
Figure. IV.10 : Fréquence adimensionnelle $\bar{\omega}$ en fonction du rapport d'aspect (a/b) pour différents indices de loi de puissance des plaques carrées en FGM.....	61
Figure. IV.11 : Fréquence adimensionnelle $\bar{\omega}$ en fonction du rapport (E_m/E_c) pour différents indices de loi de puissance des plaques carrées en FGM $a/b=5$	62

Liste des tableaux

Tableau IV.1 :Effets de l'indice de la fraction volumique sur les déplacements adimensionnels de la plaque FGM ($a/h = 10$).....	53
Tableau IV.2 :Effet de l'indice de la fraction volumique sur les contraintes adimensionnelles de la plaque carré en FGM soumise à un chargement sinusoïdale ($a/h=10$).....	54
Tableau IV.3 :Comparaison des trois premiers fréquences naturelles $\bar{\omega}$ de la plaque FGM pour différentes valeurs de rapport a/h et ($k = 1$).....	60
Tableau IV.4 :Effet de l'indice de la fraction volumique sur les fréquences fondamentales $\bar{\omega}$ de la plaque FGM avec $a/h=5$	60

Liste des notations

$[]$	Matrice.
$\{ \}$	Vecteur colonne.
E	Module de Young
E_c	Module de Young de la céramique
E_m	Module de Young de métal
E_1	Module de Young de la face supérieure
E_2	Module de Young de la face inférieure
$E(z)$	Module de Young en fonction de « z »
ν	Coefficient de Poisson
$\nu(z)$	Coefficient de Poisson en fonction de « z »
$V(z)$	Fraction volumique
k	Paramètre de matériau
b	la largeur de la plaque
h	L'épaisseur total de la plaque
L	La longueur de la plaque
u, v, w	Les déplacements suivant les directions x, y et z
u_0, v_0, w_0	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z	Les rotations autour des axes x, y et z
$f(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$g(z)$	La première dérivée de la fonction par rapport à z
ρ	la densité massique
σ_x, σ_y	Contraintes normales
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	Contraintes de cisaillement
$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$	Déformations dans les directions x et y et z
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	Déformations de distorsion
δ	Opérateur de variation
$\delta u, \delta v, \delta w_b, \delta w_s$	Champ de déplacement virtuel

δU	Variation de l'énergie de déformation interne de la plaque.
δV	Variation de l'énergie de déformation externe de la plaque.
δT	Variation de l'énergie de déformation cinétique de la plaque.
w_b	Composante de la flèche due à la flexion
w_s	Composante de la flèche due au cisaillement
N	Efforts normaux de membrane
M^b	Moments de flexion pure
M^s	Moments de flexion supplémentaire due au cisaillement transverse
S	Effort de cisaillement pur
m, n	Nombres de mode
A_{ij}	Termes de rigidité en membrane de la plaque
B_{ij}	Termes de rigidité de couplage de la plaque
D_{ij}	Termes de rigidité de flexion de la plaque
A_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
B_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
D_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
H_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
$I_0, I_1, I_2, J_1, J_2, K_2$	constante d'inertie
Q_{ij}	Les coefficients de rigidité
∂	Dérivée partielle
a_{ij}	Valeurs propres
i, j	Nombres naturels
$[K]$	Matrice de rigidité
$[M]$	Matrice de masse
$\{\Delta\}$	Le vecteur colonne de déplacement
$\bar{\omega}$	Les fréquences adimensionnelles
ω	Fréquence naturelle de la plaque FGM
ϕ_α	Rotation de la normale au plan moyen autour des axes x et α
γ_α^0	Déformation de cisaillement mesurée sur le plan
ϕ_i	Rotations des sections déformées autour des axes 1 x et 2 x (termes du

Premier ordre)

- k_x^b Courbure suivant X due à la flexion.
 k_x^s Courbure suivant X due au cisaillement.
 U_{mn}, V_{mn}, W_{bmn} et W_{sm} Paramètres arbitraires.
 q Charge transversale.

Introduction générale

Introduction générale

Les matériaux composites légers dont les rapports de résistance/poids et épaisseur/poids sont très grands, ont été utilisés avec succès dans l'industrie de génie civil, aéronautique et dans d'autres applications technologiques. Cependant, les matériaux composites traditionnels sont inutilisables sous un environnement à hautes températures. Les métaux ont été généralement utilisés dans le domaine de la technologie pendant plusieurs années grâce à leur excellente résistance mécanique et dureté. Mais dans des conditions de hautes températures, la résistance mécanique du métal devient faible comme pour les matériaux composites traditionnels. Les matériaux en céramique ont d'excellentes caractéristiques en résistance, thermique. Cependant, les applications de la céramique sont habituellement limitées du fait de leur faible dureté.

Le développement des matériaux composites a permis d'associer des propriétés spécifiques à différents matériaux au sein d'une même pièce. L'optimisation locale de ces propriétés par association d'un matériau de haute dureté à la surface d'un même matériau tenace pose le problème de l'interface, La transition brusque dans les propriétés des matériaux à travers l'interface entre les matériaux discrets peut entraîner une grande contrainte inter-laminaire ou une forte concentration de contraintes conduisant à la déformation plastique ou de fissuration. Une technique pour surmonter ces effets nuisibles et d'utiliser un matériau à gradient évalué (de l'anglicisme FUNCTIONALLY GRADED MATERIALS (FGM)).

Récemment, une nouvelle classe de matériaux composites connue sous le nom de matériau fonctionnellement gradués (FGM), ou matériaux à gradient de propriétés, a attiré une attention particulière.

Plusieurs chercheurs ont étudiés le comportement des plaques en matériau FGM, et qui ont définis la fraction volumique en utilisant plusieurs lois de mélange; tel que la loi de puissance P-FGM, la loi exponentielle E-FGM ou encore la loi sigmoïde S-FGM pour assurer une répartition harmonieuse des contraintes entre tous les interfaces.

Le travail présenté dans ce mémoire s'articule autour de quatre chapitres comme suit :

- Le premier chapitre traite des généralités sur les matériaux à gradients évalués FGM et leurs domaines d'application.
- Au second chapitre, on présente les différentes théories des plaques.

- Le troisième chapitre, on présente une analyse statique et dynamique des plaques en matériaux à gradient de propriété type FGM en se basant sur un nouveau champ de déplacement.
- Le quatrième chapitre contient une validation et comparaison des résultats.

Le présent travail se termine par une conclusion générale où on souligne l'efficacité de cette nouvelle théorie de cisaillement dans la résolution du comportement statique et dynamique des plaques FGM simplement appuyées ainsi par des perspectives envisagées pour des travaux futures.

CHAPITRE I

**GENERALITES SUR LES MATERIAUX A
GRADIENTS DE PROPRIETES.**

I.1.Introduction

Depuis le début du vingtième siècle, l'usage des matériaux composites sous la forme de plaques et de poutres s'est considérablement développé. Que ce soit dans l'industrie automobile, la construction, et plus récemment en aéronautique. Les matériaux composites disposent d'atouts importants par rapport aux matériaux traditionnels. Ils apportent de nombreux avantages fonctionnels : légèreté, résistance mécanique et chimique, maintenance réduite, liberté de forme et durée de vie prolongée [Bessaim2013].

Cependant, les matériaux composites conventionnels généralement constitués de couches ont un problème majeur : la discontinuité des propriétés et des contraintes au niveau des interfaces. Cette discontinuité provoque de fortes concentrations de contraintes, des fissurations de matrice ainsi qu'un grave problème de délaminage dus à la transition brutale de composition, en particulier dans un environnement à haute température. Pour surmonter ces difficultés une équipe de chercheurs japonais (1980) a proposé de nouveaux matériaux dits matériau à gradient de propriété (FGM) [Bessaim2013]

-Aperçu Historique Sur Les matériaux à gradient de propriétés:

Une question s'impose : Comment ce concept a-t-il germé, et comment l'étude des FGM a-t-elle été lancée ? Au environ de 1984-1985, dans une université Japonaise, deux chercheurs l'un dans le domaine de l'aéronautique et l'autre dans le domaine des sciences des matériaux rêvent de concevoir un engin spatial dont le revêtement pourrait résister à un environnement thermique très sévère. Il n'existe alors pas de matériau métallique ni de matériau composite capable de répondre à la fois aux exigences environnementales telles que décrites tout en gardant d'excellentes propriétés mécaniques. Ils échangent alors l'idée du concept FGM, autrement dit d'un matériau avec une gradation continue dans la direction de l'épaisseur, passant d'une face totalement métallique vers une face totalement céramique [Bachir2015]. En 1987, le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet intitulé " la recherche sur la technologie de base pour développement de matériaux à Gradient de propriétés et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques".

L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux. Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux sont appelés à travailler à des températures de surface de 1800°C ainsi qu'à un gradient de température de l'ordre de 1300°C. A cette année-là, aucun matériau industriel n'était connu pour supporter de telles sollicitations thermo mécaniques [Koizumi1992]

Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux :

- Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau.

- Ténacité du matériau coté basse température.

- Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau [Abdizadeh1997].

Pour répondre à un tel cahier des charges, L'idée originale des FGM a été proposée pour élaborer un nouveau composite profitant à la fois des propriétés des céramiques (Coté haute températures) et des métaux (Coté basse température).

A la fin de la première étape (1987-1989), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000 K (Température de surface) et à un gradient de température de 1000 K. Quatre techniques ont été utilisées pour fabriquer les matériaux présentant un gradient de composition et de structure, les techniques utilisées dans la fabrication de tels matériaux sont les suivantes :

Le système SIC/C par C.V.D, le système PSZ/Mo par la technique de la compaction sèche des poudres, le système TIB2/Cu par synthèse par auto-propagation à haute température, et enfin le système (Ni-Cr-Al-Y)/(ZrO₂Y₂O₃) par projection plasma à double torches.

Dans la seconde étape (1990-19991), le but était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première étape. Pendant les années 90, non seulement les champs d'application des FGM s'est développé pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température, mais s'est aussi élargi à d'autres applications : biomécaniques, technologie de capteur, optique, etc. [Fekrar2010]

I.2. La Définition et le concept d'un matériau à gradient de propriétés

Un matériau à gradient de propriétés c'est un type de matériaux composites compose de deux ou plusieurs matériaux relatif à des fractions volumiques et microstructure qui sont conçus pour avoir une continuité spatiale des variable .un FGM est produit en changeant sans interruption la fraction de volume dans la direction d'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminer. La plupart des chercheurs emploient trois fonctions pour décrire la variation de la fraction volumique qui sont :

- La fonction de puissance (P-FGM),
- La fonction sigmoïde (S-FGM),
- La fonction exponentielle (E-FGM),

Ces matériaux FGMs sont généralement faits à partir d'un mélange de métaux et de céramique (figure. I.1) par un processus de métallurgie de poudre, le côté métal riche est typiquement placé dans les régions où les propriétés mécaniques, comme la dureté, le besoin d'être élevés. En revanche, la céramique riche, ce qui a la conductivité faible et peut résister aux températures plus élevées, est placée dans les régions de grands gradients de la température.

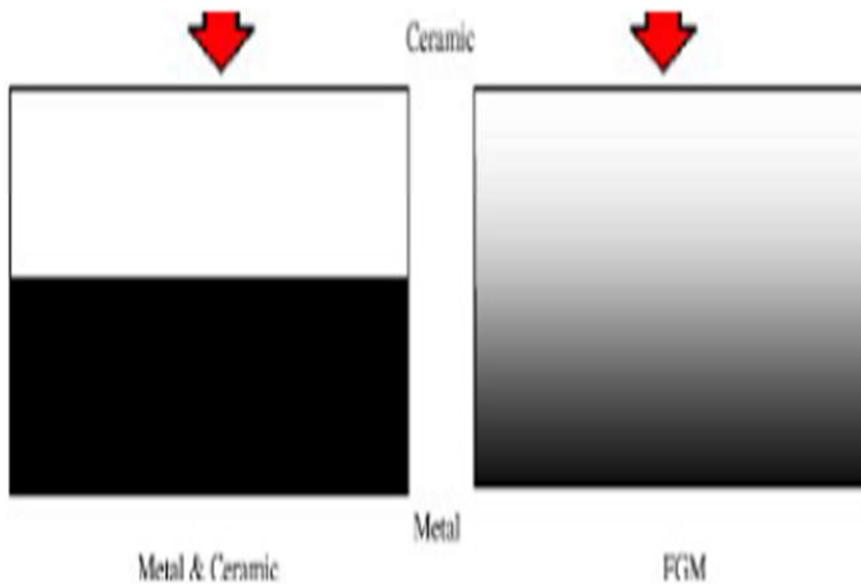


Figure. I.1 : un type d'un matériau FGM en céramique et métal.

Les matériaux à gradient de propriétés sont donc des matériaux composites avec un caractère au microscope non homogène. Constitues de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue les FGMs la figure(I.2).des matériaux composites conventionnels .dans certain cas, on peut avoir un FGM constitue d'un même matériau mais microstructure différente.

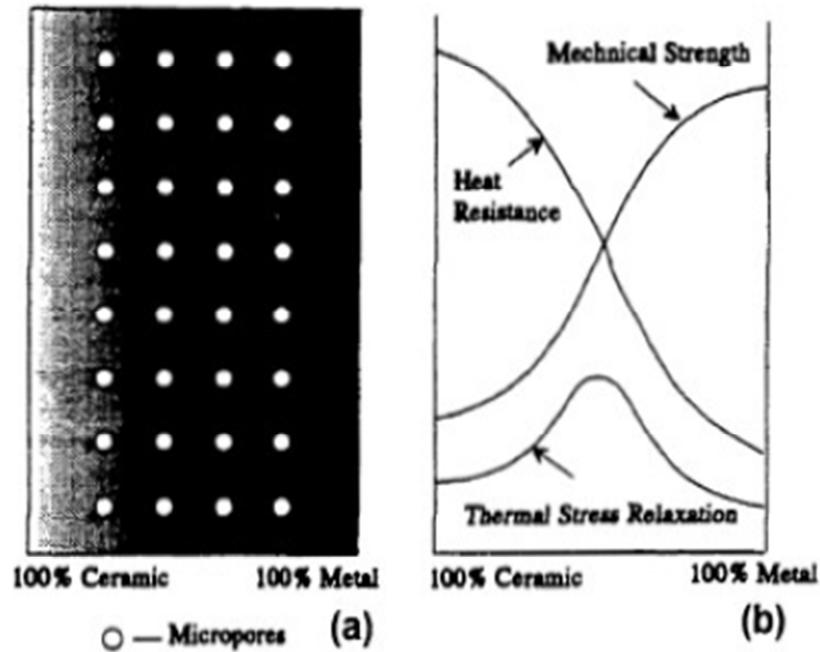


Figure. I.2 : Variation de la composition d'un FGM

(a) Conductivité thermique,

(b) résistance mécanique,

I.3. L'intérêt d'utilisation des FGM

Il y a beaucoup d'intérêt pour la mise sur pied des structures ainsi les conditions fonctionnelles peuvent varier avec l'endroit. Dans la plupart des cas, ceci impliquera de varier les matériaux qui sont employés aux endroits spécifiques dans la structure ayant pour résultat les interfaces discrètes dans tout. A nombre de proposé des technologies manufacturières pour le traitement de FGM.

I.4. Méthodes d'élaboration des FGM

L'obtention des qualités désirées nécessite de plus l'intervention de techniques sophistiquées et subtiles comme l'utilisation de lasers, de plasmas, l'implantation ionique, de dépôts en phase vapeurs, etc.

Les procédés de fabrication d'un matériau à gradient évalués peuvent habituellement être divisés en construisant la structure dans un espace hétérogène (mélange graduel) et la transformation de cette structure en matériau en bloc (solidification).

Les processus de mélange graduel peuvent être classés suivant ses constituants, l'homogénéisation et la ségrégation. Les procédés élémentaires sont basés sur la fabrication par étape de structure en matériaux graduels précurseurs ou poudres. Les avancés en technologie d'automatisation durant les dernières décennies ont rendu des processus élémentaires de progression technologiquement et économiquement durables. Dans la procédure d'homogénéisation qui traite une interface pointue entre deux matériaux est convertie dans un gradient par transport matériel. Les procédés d'homogénéisation et de ségrégation produisent un gradient continu, mais ont des limitations au sujet des types de gradients qui peuvent être produits.

Habituellement, le séchage et la solidification suivent les étapes du mélange graduel. Le besoin de ces processus de consolidation doit adapter aux FGM :

- Des conditions de procédure choisie pour ne pas altérer ou détruire le gradient en mode non contrôlé.
- Prêter attention à tout rétrécissement inégal du FGM pendant la consolidation.

Ces dernières années, les travaux menés au laboratoire ont permis de développer une méthode originale pour élaborer des composites à gradient continu de composition. Cette méthode est basée sur une technique de Co-sédimentation de poudres en milieu proportionnelle à la densité du matériau et au carré du diamètre de particule. En contrôlant et en adaptant les répartitions granulométriques de chaque poudre, il est possible d'obtenir différents gradient de concentration dans le dépôt formé à l'issue de sédimentation.

Il existe de nombreuses méthodes d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés, les techniques les plus employées sont brièvement expliquées ci-dessous :

I.4.1 Coulage en Bande (Tape Casting ou Doctor-Blade)

Le coulage en bande consiste à couler une barbotine de poudres fines en suspension aqueuse ou non-aqueuse (la plupart des travaux commerciaux utilisent le procédé non-aqueux) sur un support plan en couches minces et régulières. Selon les cas, c'est soit la lame (doctor-Blade) qui est animée d'un mouvement de translation, soit le support qui se déplace sous la lame (figure. I.3). Les produits obtenus sont des feuillets avec des épaisseurs contrôlées (25-1000 μ m). Après un raffermissement de la pâte, les feuillets sont démoulés et ensuite découpés.

Le solvant doit avoir un point d'ébullition très bas et une viscosité faible. Il doit être soluble avec le liant le plastifiant et les autres ajouts, mais ne doit être ni soluble ni réactif avec la poudre céramique. Le liant donne une grande résistance mécanique au produit cru en permettant son maniement. Généralement un plastifiant est ajouté au liant pour baisser sa viscosité. Les liants (Plastifiants et dé flocculant) doivent être totalement dégagés pendant le délainage.

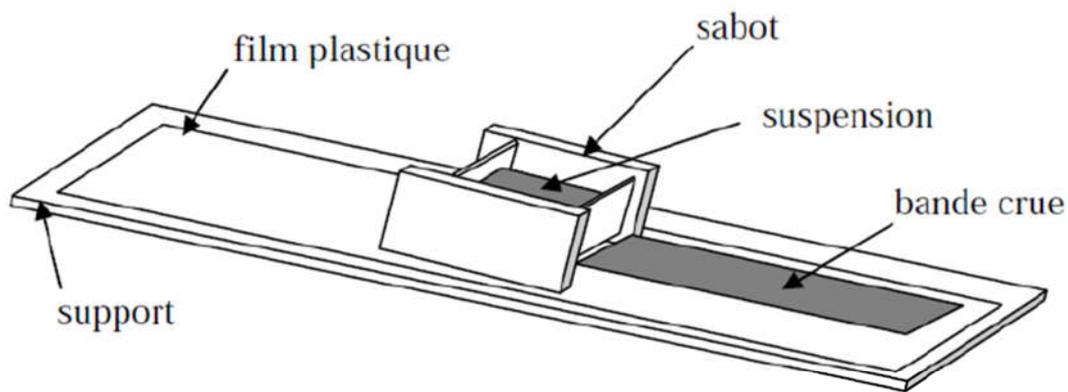


Figure. I.3 : Principe de la méthode coulage en bande.

L'un des plus anciens travaux sur l'étude de cette technique a été publié par Howatt. En 1947, et depuis d'autres travaux ont été réalisés (Reddy.1984). Ce procédé est devenu une technique économique pour la production des substrats céramiques de type Al_2O_3 et surtout pour les condensateurs à base de $BaTiO_3$. On peut d'ailleurs remarquer qu'il s'agit déjà de F.G.M puisqu'il faut empiler des couches conductrices (métaux rares) avec des couches diélectriques ($BaTiO_3$ principalement).

Le procédé de coulage en bande est largement utilisé pour réaliser des matériaux composites laminaires suivant deux méthodes :

- Réalisation directe de bandes multicouches grâce à un système de lames multiples c'est le cas des tri-couches élaborées par (MISTLER.1973).
- Empilement des couches élaborées séparément dont la cohésion est ensuite assurée par une étape de thermo-compression (Reddy.1984).

I.4.2 Coulage Séquentiel en Barbotine (Slip Casting)

Le coulage en Barbotine (Slip Casting) consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, laissant un tesson (couche de poudre compacte) sur la surface du moule. Après séchage, on obtient le corps en cru. Donc le coulage se effectuée en deux étapes essentielles :

- Formation du tesson ou « prise ».
- Consolidation du tesson « raffermissement ».

La filtration, c'est à dire la formation du tesson lors du coulage, peut être considéré comme un processus d'élimination d'une partie de l'eau de la barbotine; Cette eau migre à travers la couche de tesson déjà formée, sous l'effet :

- Du pouvoir de succion du plâtre (coulage classique) ; ou d'une pression appliquée sur la barbotine (coulage sous pression).

Dans le cas de la fabrication de multicouches, après la formation du premier tesson, le dépôt de la deuxième couche s'effectue de manière telle que la barbotine ne pénètre pas dans le tesson formé. Ce procédé est successivement reproduit pour les autres couches.

I.4.3. Compaction Sèche des Poudres

Cette technique consiste à verser successivement dans un moule en acier les poudres, et à chaque fois qu'une poudre est versée une faible compression est exercée. Ensuite la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Ce procédé est suivi généralement par une pression isostatique et un délainage. La densification sera enfin l'étape finale (Bishop.1993). Ce procédé peut être envisagé pour la fabrication de pièces de formes complexes. En effet il s'applique aussi avec la technique du pressage isostatique, et de façon industrielle.

I.4.4. Dépôt par Electrophorèse

Le dépôt par électrophorèse est un procédé dans lequel une suspension colloïdale stable est placée dans une cellule contenant deux électrodes, le dépôt se fait par le mouvement des particules chargées au sein de la solution vers la cathode ou l'anode selon le signe de la charge des particules due à un champ électrique. L'élaboration des F.G.M peut se faire donc par le dépôt séquentiel des matériaux (Abdizadeh H.1997).

I.4.5. Projection Plasma

Un gaz soumis à une forte température (par exemple celle d'un arc électrique), se transforme en un état ionisé (plasma). Cette transformation est accompagnée d'un dégagement de chaleur important. Si une particule de céramique se trouve dans cet environnement, elle se fond totalement ou superficiellement, ce qui permet de la situer sur un substrat. La projection plasma des particules des divers matériaux est devenue une méthode très utilisée pour fabriquer des FGM. L'équipement relativement simple, le rendement élevé du dépôt des particules sur des substrats à géométrie compliquée, les performances des surfaces en fonctionnement et la compatibilité des céramiques avec les métaux sont les avantages essentiels de cette technique (Steffes.H.D.1990).

I.4.6. C. V. D. et P. V. D.

Les dépôts chimique ou physique en phase vapeur sont des techniques dans lesquelles les atomes du matériau sont déposés sur la surface du substrat. Les techniques de C.V.D. et P. V. D. peuvent être utilisées pour façonner un F.G.M sur des substrats de formes compliquées.

I.4.7. Frittage et Infiltration

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes :

- La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité.
- La seconde étape est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration.
- Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique.

Cette technique peut être généralement appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres.

I.6.8. Frittage Laser Différentiel

Le rayonnement thermique du laser permet le contrôle de la température et la focalisation du point à chauffer. La différence de l'intensité de l'irradiation sur différents points du matériau, provoque un frittage différentiel le long de la pièce, ce qui résulte en des

microstructures différentes, dépendant de la position du point irradié. Cette technique a été utilisée pour élaborer un F.G.M de PSZ/Mo. La figure. I.4 montre schématiquement la disposition du procédé utilisé par ces auteurs.

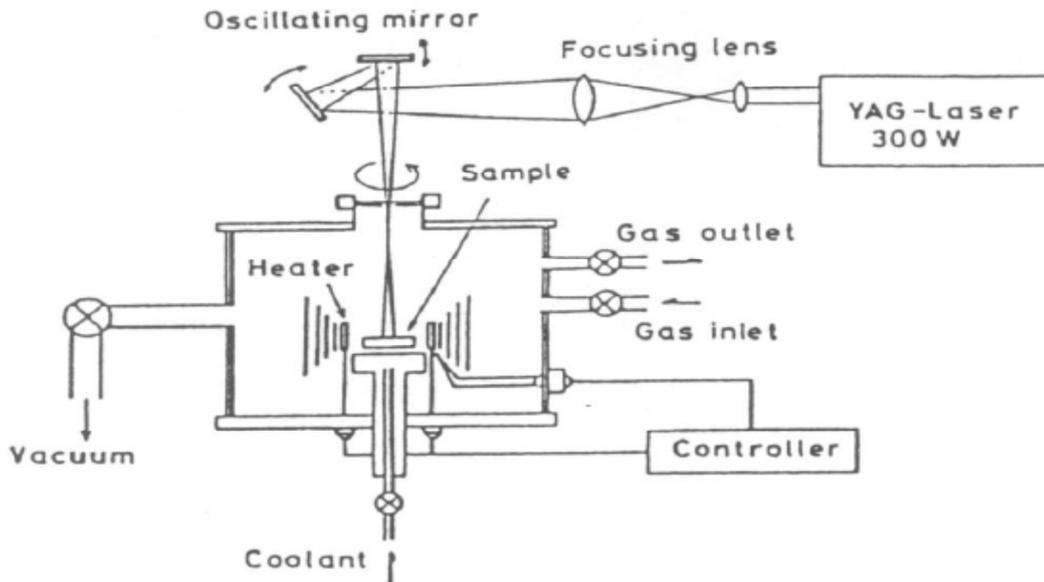


Figure I.4 : Disposition du procédé frittage laser différentiel.

I.4.9. Implantation Ionique (Sputtering)

C'est une technique avancée pour la fabrication des F.G.M permettant de réaliser seulement des épaisseurs fines ($<1\mu\text{m}$) sur différents substrats (plastiques, céramiques, et métaux). Le traitement s'effectue par les faisceaux énergétiques d'ions ou via des gaz réactifs. Les couches fabriquées présenteront un gradient de composition qui peut être très finement contrôlé (Abdizadeh H.1997).

I.4.10. Dépôt par Centrifugation

La technique consiste à verser une suspension colloïdale relativement diluée dans des flacons cylindriques, le tout est soumis à une centrifugation. La sédimentation s'opère et le liquide surnageant est retiré. Ce procédé est répété pour obtenir des multicouches (figure. I.5) (Abdizadeh H.1997).

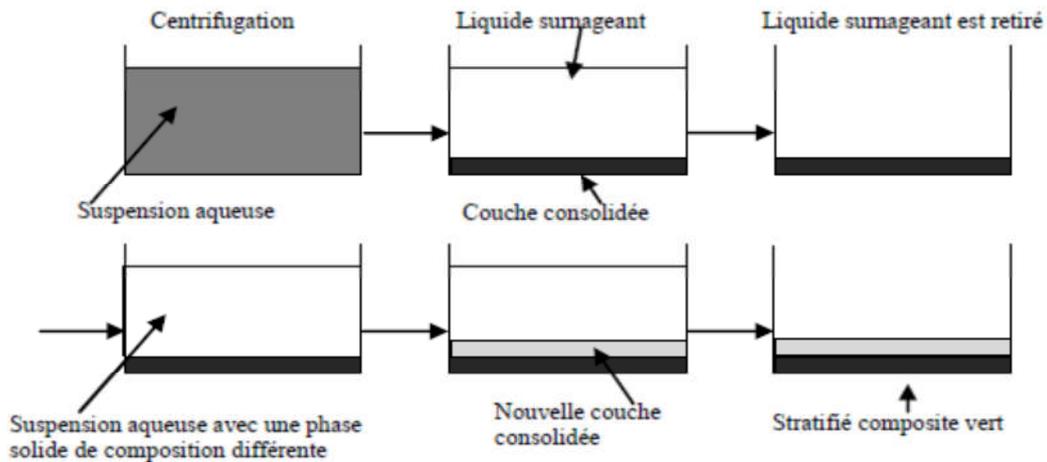


Figure I.5 : Schéma du procédé dépôt par centrifugation(Abdizadeh H.1997)..

I.5. Propriétés physiques et mécaniques des FGM

Pour ce travail le matériau FGM choisi est (Aluminium-Céramique).

I.5.1. Propriétés physiques de l'aluminium

Définition : L'Aluminium est un métal blanc qui après polissage peut devenir réfléchissant.

Propriétés physiques : L'Aluminium a une température de fusion relativement basse d'environ 660° . Il en résulte une facilité de fusion qui présente un avantage certain pour les opérations de fonderie. L'Aluminium est très ductile, on peut aisément le mettre en forme. La masse volumique de l'Aluminium est de 2700 kg/m^3 . L'utilisation de l'Aluminium s'impose donc dans les domaines aéronautiques et du transport.

Propriétés mécaniques : Les propriétés mécaniques des métaux présentent un grand intérêt dans la vie quotidienne, elles peuvent être classées en deux groupes :

- Celles qui se rapportent à la résistance mécanique du métal :

- Résistance à la traction.
- Résistance à la pénétration (dureté).

- Celles qui concernent les modifications de forme que le métal peut subir sans se briser :

- La malléabilité (mises en feuilles).
- La ductilité (mise en fils).

Propriétés des alliages d'aluminium : L'Aluminium a pour propriétés une :

- Température de travail élevée.
- Très bonne résistance à la corrosion.
- Légèreté.
- Très bonnes solidités, dureté et rigidité.
- Bon rapport force/poids.
- Bonnes propriétés de protection contre les interférences électromagnétiques.
- Bonne conductivité thermique.
- Conductivité électrique élevée.
- Bonnes caractéristiques de finition.
- Entièrement recyclable.

Résistance à la corrosion : Grâce à la couche d'oxyde qui se forme en surface, les alliages d'Aluminium résistent à la corrosion. On peut rendre cette couche protectrice d'oxyde plus épaisse par galvanisation. L'Aluminium et ses alliages peuvent être utilisés sans protection supplémentaire comme revêtement extérieur de bâtiments. Par contre dans les milieux corrosifs, les alliages d'Aluminium peuvent subir les effets de la corrosion. Des piqûres, de la corrosion sous contrainte, de la fatigue corrosion, voire de la corrosion généralisée peuvent se développer. Pour des conditions données, la sévérité de l'attaque dépend de l'alliage utilisé et de son état.

I.5.2. Propriétés physiques de la céramique

Définition : La céramique résulte des terres et des roches broyées (matériaux géologiques) ou bien d'une argile qui sera modelée puis cuite sous haute température (transformation irréversible) ce qui fait perdre au matériau sa plasticité donc il ne peut plus se réhydrater.

Propriétés physiques : La céramique a une facilité de fusion qui présente un avantage certain pour les opérations de fonderie. La masse volumique de la céramique est de 3800 kg/m^3 . L'utilisation de la céramique s'impose dans les domaines de l'habitat et du design,

l'industrie céramique et métallurgique, aéronautique et spatial, médicale et dans les revêtements.

Propriétés mécaniques : Les propriétés mécaniques du céramique dépendent des :

- Matières première employées.
- Méthodes de fabrication qui fixent les microstructures finales et déterminent la répartition des différentes phases en présence.

Propriétés des céramiques : Les propriétés de la céramique sont :

- Un module de YOUNG élevé (Liaisons, covalente, ioniques).
- Une dureté élevée (Abrasif, outils de coupe, surfaces de frottement qui doivent résister à l'usure, résistance mécanique élevée, bonne tenue à chaud, rigidité élevée).
- Une très bonne résistance à la compression non à la traction (Résistance à la compression = 200 MPa).

- **I.6. Différence entre FGM et les matériaux composites traditionnels**

Un modèle simple illustrant les différences entre les matériaux à gradient de propriétés (FGM) et les matériaux plus conventionnels est montré sur la (figure I.6) : (a) un matériau plans composé, (b) un matériau relié et (c) un matériau à gradient de propriété. Le matériau plan composé à une caractéristique plane, et le matériau relié a une frontière sur l'interface de deux matériaux. Les FGM ont de excellentes caractéristiques qui diffèrent de ceux des matériaux plans composés et reliés. Par conséquent, les FGM attirent l'attention en termes de leur application dans les domaines industriels. Puisque les FGM ont une double propriété des deux matières premières qui sont mélangées ensemble, et la distribution composante est graduée sans interruption.

Par exemple, l'un des FGM qui se composent du métal et en céramique a la caractéristique de la conductivité thermique et de la force métallique dans le côté en métal et la résistivité aux hautes températures dans le côté en céramique.

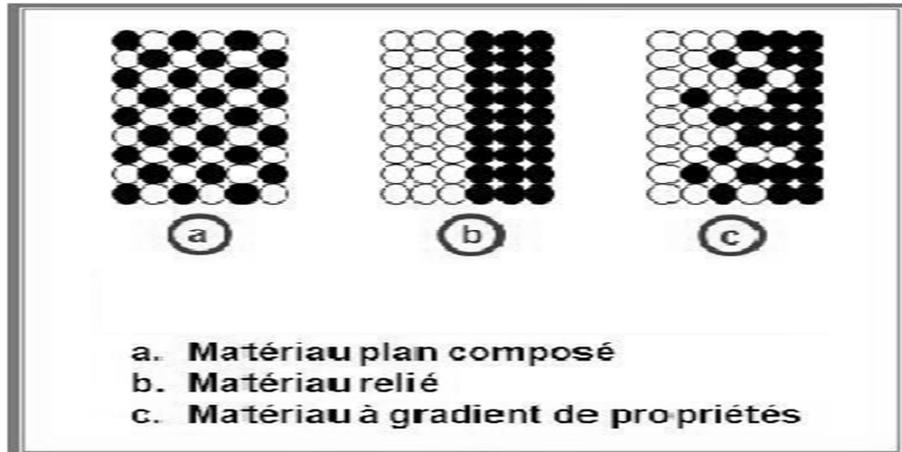


Figure. I.6 : La distribution composante des matériaux.

I.7. Propriétés matérielles effectives d'un matériau FGM

Les matériaux à gradient de propriétés sont généralement fabriqués par deux phases matérielles avec des propriétés différentes. Une description détaillée des microstructures graduée réelles n'est pas disponible, excepté peut-être pour l'information sur la distribution de fraction volumique. Puisque la fraction de volume de chaque phase varie graduellement dans la direction de la graduation, les propriétés effectives des FGM changent le long de cette direction.

Par conséquent, nous avons deux approches possibles pour modéliser un FGM.

- La première approche : une variation par tranche de fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée, et le FGM est pris pour être posé avec la même fraction de volume dans chaque région, c.-à-d., couches quasi homogènes de céramique-métal (figure. I.7a).
- La deuxième approche : une variation continue de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée (figure. I.7b), et la fraction de volume en métal peut être représentée suivant une fonction dépendante de la coordonnée Z (épaisseur).

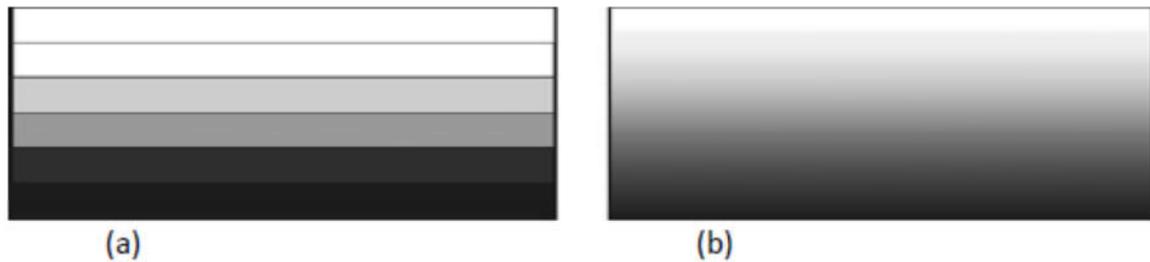


Figure. I.7 : Modèles analytiques pour une couche en FGM.

La plupart des chercheurs emploient la fonction de loi de puissance ; la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume. Par conséquent, on considère dans notre travail des plaques FGM avec des variations de la fraction de volume qui suit des fonctions de la loi de puissance.

I.8. Domaines d'application des matériaux à gradients évalués FGM

Le concept des matériaux à gradient évalués FGM est applicable dans des nombreux et larges intervalles de domaines tels que les matériaux de construction, matériaux de conversion d'énergie, aéronautique, aérospatiale, nucléaire et semi-conducteurs. Ainsi, ces matériaux ont deux propriétés contradictoires : la conductivité thermique et l'isolation thermique. Actuellement, ils permettent la production des matériaux légers, résistants et durables.

Les principaux domaines d'application des FGM sont :

- **Génie civil** : ponts à poutre en caisson, les cheminées, les fondations élastiques (ces structures de plaques peuvent être trouvées dans différents types d'applications industrielles telles que radiers), réservoirs de stockage, les piscines.

- **Aéronautique** : composants de moteur-fusée, corps des avions spatiaux.

- **Chimique** : l'échangeur de chaleur, tube de chaleur, récipient de réaction.

- **Ingénierie** : outils de coupe, éléments de moteur.

- **L'énergie nucléaire** : composante des réacteurs nucléaires, pastilles de combustible.

- **Électronique** : semi-conducteur à bande graduée, capteurs.

- **Optique** : fibres optiques, lentilles.

- **Conversion d'énergie** : générateur thermoélectrique, convertisseur thermoionique, pile à combustible.

- **Matières biologiques** : implants, peau artificielle,
- **Produits en générale** : matériaux de constructions, corps de voiture, verres de fenêtre.

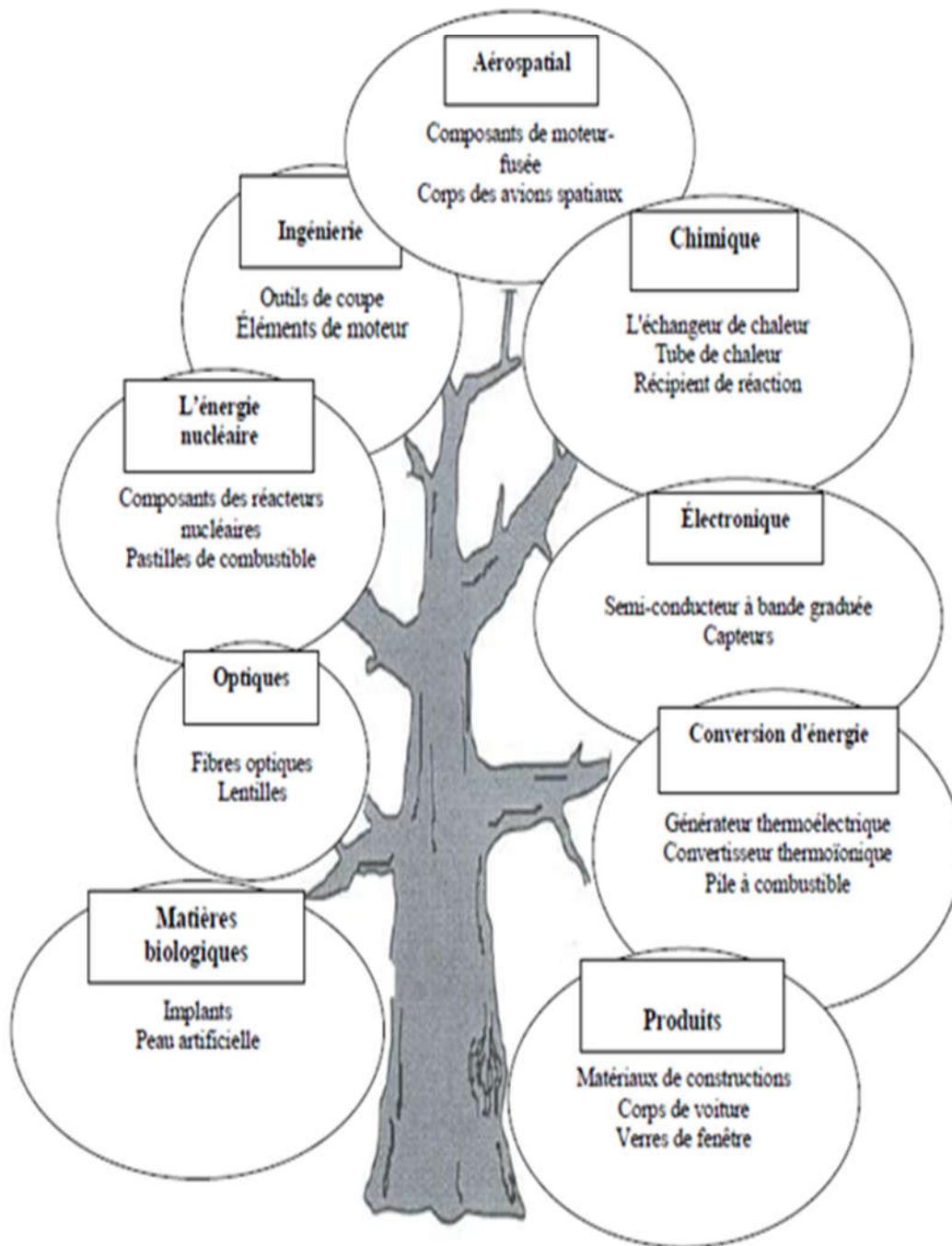


Figure I.8 : Les principaux domaines d'application des FGM (Houari. 2011).

I.9. Les différentes lois qui régissent la variation des propriétés matérielles suivant l'épaisseur d'une plaque FGM

I.9.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance.

$$V(z) = \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^k \quad (I.1)$$

Où k est un paramètre du matériau et h est l'épaisseur de la plaque. Une fois que la fraction de volume local $V(z)$ est définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges :

$$E(z) = V(z)E_1 + [1 - V(z)]E_2 \quad (I.2)$$

Où E_2 et E_1 sont respectivement les propriétés matérielles (modules de Young ou densité) de la surface inférieure ($z = -h/2$) et de la surface supérieure ($z = h/2$) de la plaque FGM. La variation de ces propriétés dans la direction de l'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée dans (Figure I.9), il apparaît clairement que le module de Young par exemple change rapidement près de la surface inférieure pour $k > 1$, et augmente rapidement près de la surface supérieure pour $k < 1$.

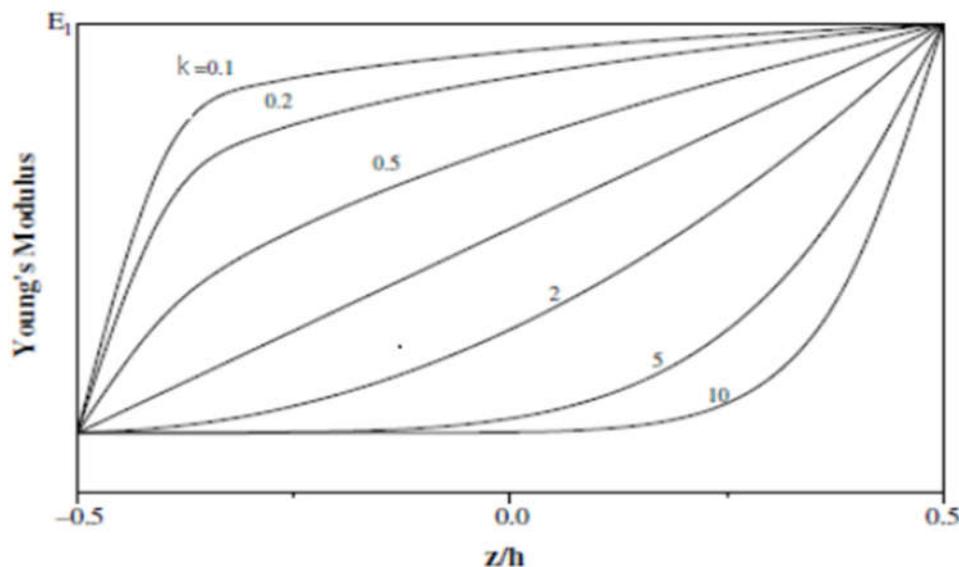


Figure I.9 : La variation du module de Young dans une plaque P-FGM.

I.9.2 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

Dans le cas d'ajouter une plaque P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interfaces où le matériau est continu mais change rapidement. Par conséquent, Chung et chi ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définis par :

$$V_1(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - z}{h/2} \right)^k \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (I.3)$$

$$V_2(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 + z}{h/2} \right)^k \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V_1(z).E_1 + [1 - V_1(z)].E_2 \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (I.4)$$

$$E(z) = V_2(z).E_1 + [1 - V_2(z)].E_2 \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0$$

La figure I.9 montre que la variation de la fraction volumique dans les équations (I.3) et (I.4) représente les distributions sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée (Plaque S-FGM).

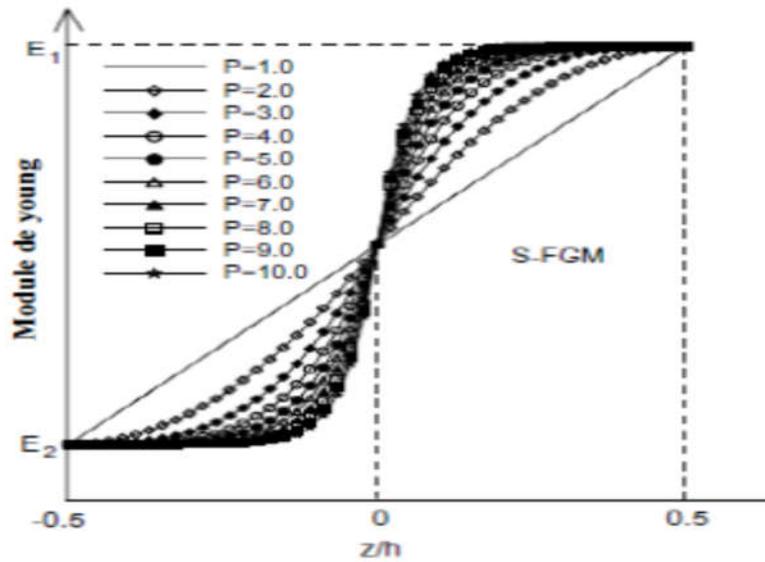


Figure I.10 : Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.

I.9.3 Les propriétés matérielles de la plaque E-FGM

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme :

$$E(z) = A.e^{B.(z+h/2)} \quad (I.5)$$

Avec,

$$A = E_2 \quad \text{Et} \quad B = \frac{1}{h} \cdot \ln\left(\frac{E_1}{E_2}\right) \quad (I.6)$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans (Figure I.10).

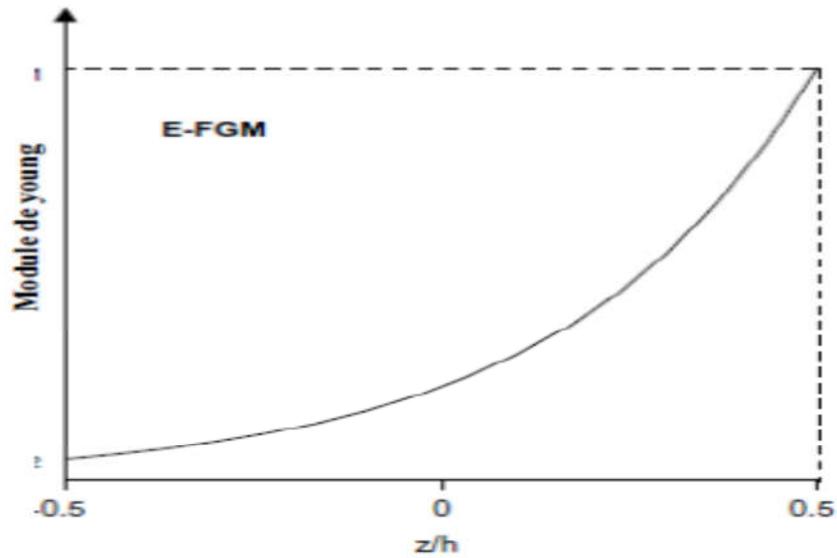


Figure I.11 : Variation du module de Young dans une plaque E-FGM.

I.10. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons défini les matériaux à gradient fonctionnel «FGM», l'histoire de leur développement, leurs propriétés et leurs domaines d'application et puis en est passé à décrire les différentes lois qui régissent la variation des propriétés matérielles (module de Young, la masse volumique, coefficient de poisson) suivant l'épaisseur d'une poutre FGM, ces lois peuvent être de puissances, exponentielles ou même sigmoïde.

CHAPITRE II

LES THEORIES DES PLAQUES FGM.

II.1. Introduction

Une structure FGM peut être considérée comme un corps hétérogène. La caractéristique géométrique d'une plaque est une épaisseur faible par rapport aux autres dimensions. La modélisation des structures FGM modernes avec une forte anisotropie (par exemple : faible rapport du module de cisaillement transverse de l'âme par rapport au module d'élasticité longitudinal des peaux dans le cas des structures sandwich) exige des théories raffinées qui prennent en compte une bonne description des cisaillements transverses. On trouve dans (Noor.1989) des revues complètes sur les différents modèles existants de type élasticité tridimensionnelle ou de type plaque.

Durant ces dernières années, plusieurs modèles bidimensionnels ont été développés pour la modélisation des structures multicouches tenant compte des cisaillements transverses. Ils peuvent être regroupés en fonction du type d'approche adopté :

- Approche monocouche équivalente
- Approche par couche
- Approche développement asymptotique

II.2. Les Différents Modèles des structures composites dans l'élasticité bidimensionnelles

II.2.1. Approche monocouche équivalente

Dans l'approche monocouche équivalente, la variation des caractéristiques physicomécaniques selon l'épaisseur n'est pas un facteur déterminant du nombre d'équations, la plaque FGM est homogénéisée et considérée donc comme une seule couche.

Depuis le premier travail de Sophie Germain en 1815 sur les plaques minces en passant par les modèles du premier ordre de Love-Kirchhoff et de Reissner-Mindlin, de nombreux auteurs ont développé des théories de plaques à partir de cinématiques ou champs de contraintes plus raffinés. Nous passons en revue, dans ce qui suit, les principaux modèles.

II.2.1.1. Les modèles classiques Love-Kirchhoff (théorie classique des plaque stratifiées CLPT)

En commence par le model le plus simple est le plus général appelé model de Love-Kirchhoff. Ce modèle est basé sur une distribution linéaire des déplacements suivant l'épaisseur (Reissner. 1961).

L'hypothèse adoptée est celle de Love-Kirchhoff (Kirchhoff. 1850) des contraintes planes, les déformations dues au cisaillement transverse sont négligées. La normale à la surface moyenne de la plaque reste perpendiculaire et droite à celle-ci avant déformation (Figure. II.1).

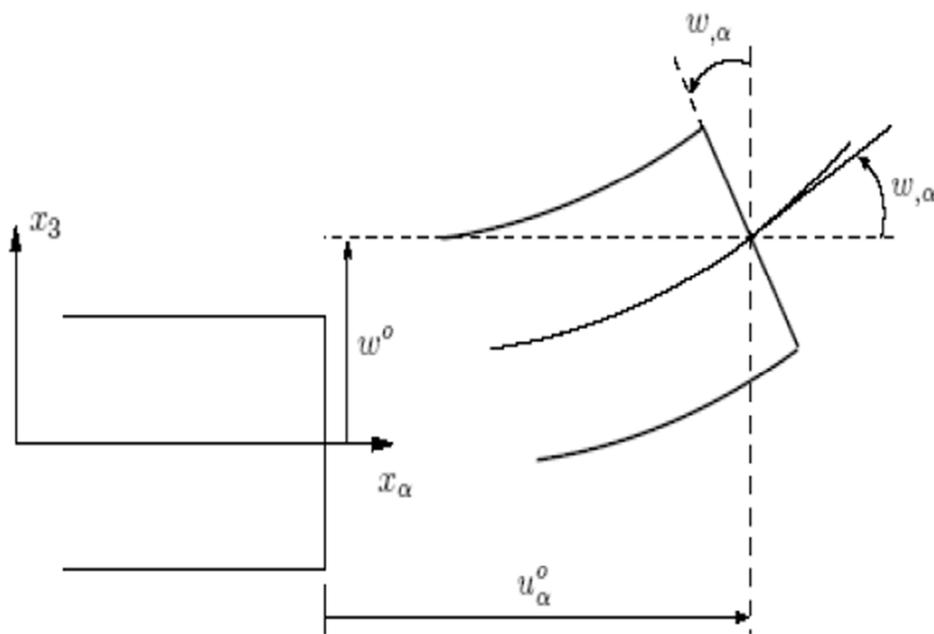


Figure. II. 1 : Cinématique de Love-Kirchhoff.

Le champ de déplacements de Love-Kirchhoff s'écrit alors,

$$\begin{cases} u_{\alpha}(x_1, x_2, x_3 = z) = u_{\alpha}^0(x_1, x_2) - z w_{,\alpha}(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases}, \alpha = 1, 2 \quad (\text{II.1})$$

Avec,

u_{α}^0 : Le déplacement de membrane dans la direction α ,

W : La flèche de la plaque,

$w_{,\alpha}$: La rotation due à la flexion (sans cisaillement).

II.2.1.2. Les modèles Reissner-Mindlin (théorie de déformation en cisaillement du premier ordre FSDT)

Le cisaillement transverse ne peut être négligé; sa prise en compte est adoptée par Mindlin dont l'hypothèse cinématique est la suivante :

La normale reste droite mais non perpendiculaire à la surface moyenne (à cause de l'effet du cisaillement transverse) dans la configuration déformée (Figure. II.2). Le champ de déplacements de Reissner-Mindlin s'écrit :

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) = u_\alpha^0(x_1, x_2) - z\phi_{,\alpha}(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

Avec,

ϕ_α : La rotation de la normale au plan moyen autour des axes x_α ,

$\gamma_\alpha^0 = (w_{,\alpha} + \phi_\alpha)$: La déformation de cisaillement transverse mesurée sur le plan moyen.

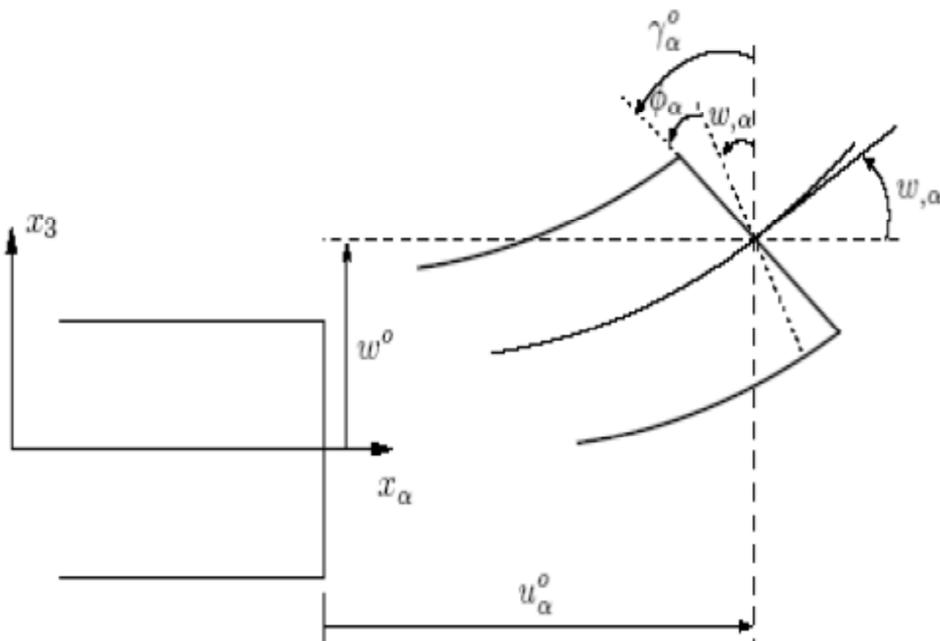


Figure. II.2 : Cinématique de Reissner-Mindlin.

Avec ce choix de la forme des champs de déplacements, les déformations transversales γ_α^0 sont constantes en z . Les contraintes de cisaillement sont donc uniformes à n'importe

quel point suivant l'épaisseur et ça évitent la discontinuité entre les couches dans les composites conventionnels.

Cette mauvaise description d'uniformité de distribution des contraintes oblige à introduire des coefficients correcteurs pour mieux prendre en compte, dans l'écriture de l'énergie, les effets du cisaillement transversal (Whitney. 1973). Les résultats obtenus dépendent essentiellement du choix empirique dans des situations complexes des coefficients correcteurs et l'étude des plaques épaisses reste aléatoire par ce type d'approche cinématique.

La Figure. II.3 montre la variation de la fonction de forme ainsi que sa dérivée par rapport à l'épaisseur de la plaque. Cette variation est plus authentique pour le cas des plaques stratifiés ou au niveau de l'interface il ya une discontinuité de distribution des propriétés alors que pour les FGM ce problème est résolu.

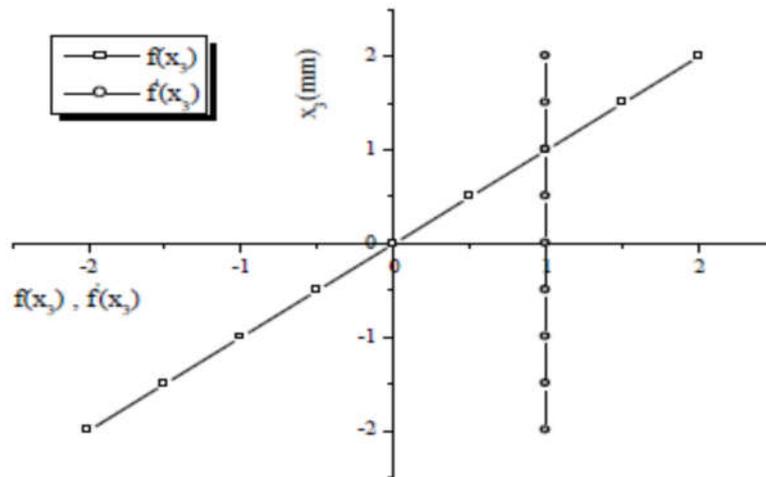


Figure. II.3 : Variation de la fonction de gauchissement $f(x_3) = x_3$ et $f'(x_3)$ suivant l'épaisseur.

II.2.1.3. Les modèles d'ordre élevé

Pour franchir les limites des théories du premier ordre, plusieurs auteurs proposent des théories à un ordre supérieur. Les modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs suivant l'épaisseur. Ces modèles permettent de représenter le gauchissement de la section dans la configuration déformée (Figure. II.4), (Liberscu. 1967). La plupart des modèles d'ordre supérieur utilisent un développement en série de Taylor des champs de déplacements qui s'écrivent de la forme :

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = u_i^0(x_1, x_2) + z\phi_i^{0(1)}(x_1, x_2) + z^2\phi_i^{0(2)}(x_1, x_2) + z^3\phi_i^{0(3)}(x_1, x_2) + z^4\phi_i^{0(4)}(x_1, x_2) + \dots \quad (\text{II.3})$$

Partons de ce principe, nous pouvons utiliser différents ordres, en fonction de la complexité du problème et de la précision souhaitée. La plupart des études sont basées sur un développement en 3ème ordre, assurant ainsi un niveau minimum de complexité. La valeur de $\phi_j^{0(i)}$ détermine la nature de la théorie. Ainsi, la théorie du premier ordre de Reissner-Mindlin est obtenue en posant : $\phi_i^{0(j)} = 0$ pour $j = 2, 3, 4$ et $\phi_3^{0(1)} = 0$.

En principe, ces modèles d'ordre supérieur sont plus précis que les modèles du premier ordre. La précision augmente avec l'ordre de développement, c'est à dire avec le nombre de paramètres supplémentaires. Cependant, les conditions aux limites sur les bords sont difficiles à satisfaire et le nombre de variables de déplacement indépendantes dépasse celui des modèles classiques. Pour réduire le nombre de paramètres de déplacement, plusieurs simplifications sont proposées. On impose souvent les conditions de nullité des contraintes de cisaillement transverse aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Le développement en série de Taylor est utilisé avec $\phi_i^{o(4)} = \phi_i^{o(2)} = \phi_i^{o(1)} = 0$, $\phi_i^{o(3)}$, $\alpha = \{1, 2\}$. Le champ de déplacement devient :

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) = u_\alpha^o(x_1, x_2) - zw_{,\alpha} + f(z)\gamma_\alpha^o(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases} \quad (\text{II.4})$$

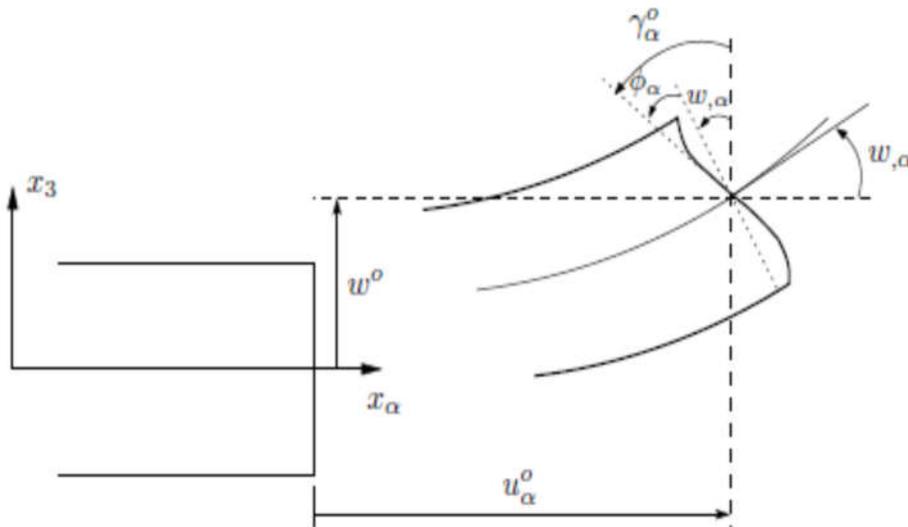


Figure. II.4 : Cinématique de la théorie d'ordre supérieur.

Voici quelques contributions importantes de développement de modèles d'ordre supérieur qui se sont distingués dans la littérature et qui diffèrent par la fonction de cisaillement $f(z)$:

- L'approche d'Ambartsumyan (Ambartsumyan.1969) avec :

$$f(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad (\text{II.5})$$

- L'approche de Reissner (Reissner. 1945) :

$$f(z) = \frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.6})$$

- L'approche de Reddy (Reddy. 1987) avec :

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.7})$$

Dans le modèle de (Reddy. 1987), le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal w est constant. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle. La distribution des contraintes de cisaillement transversal est parabolique suivant l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

- L'approche de Touratier (Touratier. 1991) avec :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{z}{h}\right) \quad (\text{II.8})$$

Touratier propose le modèle "sinus" qui est différent des autres modèles d'ordre supérieur puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement suivant l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) = \frac{h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi z}{h}\right)^{2n+1} \\
 &= z \left(1 - \frac{\pi^2}{3!} \frac{z^2}{h^2} + \frac{\pi^4}{5!} \frac{z^4}{h^4} - \frac{\pi^6}{7!} \frac{z^6}{h^6} + \dots \right)
 \end{aligned}
 \tag{II.9}$$

Les différents termes du développement correspondent aux différents modèles cités précédemment. Suivant la troncature choisie, on obtient la théorie Love-Kirchhoff, la théorie Reissner-Mindlin ou les modèles d'ordre supérieur (aux coefficients près).

Les contraintes de cisaillement transversal déterminées par le modèle "sinus" prennent une forme cosinusoidale dans l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de (Reddy. 1984).

Récemment, Afaq et al. (Afaq. 2003) propose un modèle exponentiel avec une cinématique plus riche.

La fonction de cisaillement transverse est de la forme suivante :

$$f(z) = z e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}
 \tag{II.10}$$

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance pair et impair de la variable z alors que la fonction "sinus" [Touratier] ne permet qu'un développement en puissances impaires.

- L'approche de Aydogdu (Aydogdu. 2005) avec ;

$$f(z) = z \alpha^{\frac{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}{\ln(\alpha)}} \quad \alpha > 0
 \tag{II.11}$$

h : étant l'épaisseur de la plaque FGM.

Il faut remarquer que les modèles issus d'une approche monocouche équivalente présentent des contraintes de cisaillement transverse discontinues aux interfaces si les couches ont des propriétés différentes, même si la continuité du champ de déformation est assurée. Ceci présente un inconvénient sérieux lors de l'analyse locale à l'interface des structures multicouches (effets de bord sur les contraintes, délaminage . . .).mais pour le cas

des matériaux FGM cette approche paraît très appropriée, du fait que la variation des propriétés se fait continuellement selon l'épaisseur.

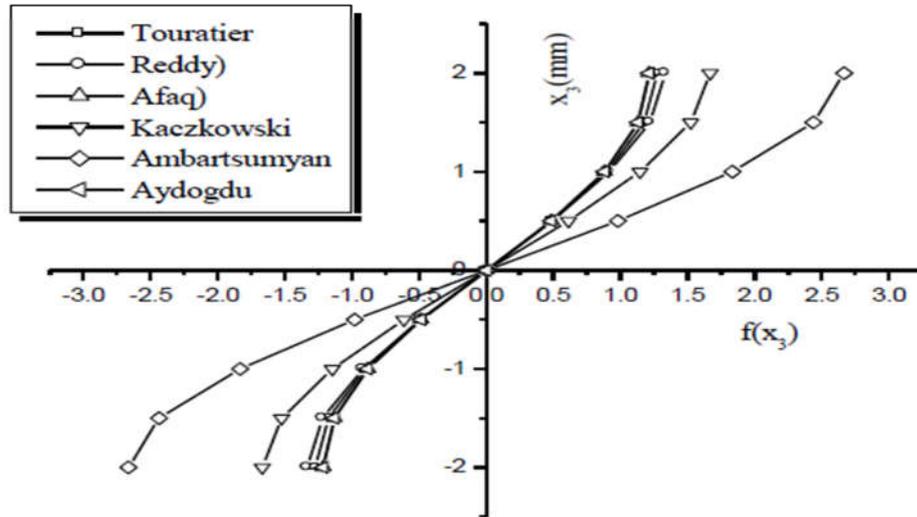


Figure. II.5 : Variation de la fonction de forme $f(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur.

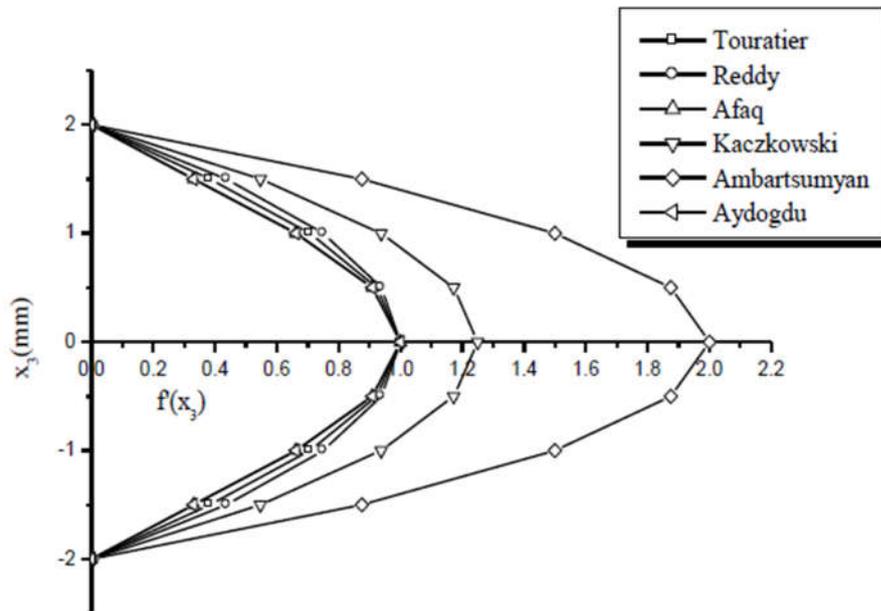


Figure. II.6 : Variation de la dérivée de la fonction de forme $f'(z)$ des différents modèles suivant l'épaisseur.

En fonction des Figures. II.5 et II.6 on remarque que les deux approches d'Ambartsumyan et de Kaczkowski sont un sensiblement loin des autres fonctions de forme . Elles sont servies comme bases pour développer les autres fonctions qui sont plus proches de l'analyse 3D.

Il faut remarquer que les modèles issus d'une approche monocouche équivalente pressentent des contraintes de cisaillement transverse discontinues aux interfaces si les couches ont des propriétés différentes, même si la continuité du champ de déformation est assurée. Ceci présente un inconvénient sérieux lors de l'analyse locale à l'interface des structures multicouches (effets de bord sur les contraintes, délaminage . . .).mais pour le cas des matériaux FGM cette approche paraît très appropriée, du fait que la variation des propriétés se fait continuellement selon l'épaisseur.

II. 2. 2. Approche par couche

Ces approches sont destinées justement à mieux décrire les effets d'interface pour les matériaux composites conventionnels.

Ainsi différents modèles issus de l'approche par couche ont été proposés (Afaq. 2003) , (Reddy 1984). Le multicouche est subdivise en sous structures (correspondant en fait à chaque couche ou chaque ensemble de couches). On applique à chaque sous structure une théorie du premier ordre ou un modèle d'ordre supérieur, imposant un champ de déplacement vérifiant la continuité aux interfaces entre les différentes couches.

Les modèles de ce type sont relativement coûteux (l'ordre des équations de comportement dépend du nombre de couche), mais ils permettent l'obtention de résultats plus précis, notamment en ce qui concerne le calcul des contraintes hors plan.

D'une manière générale, les modèles issus de l'approche par couche peuvent être classes en deux groupes : les modèles couches discrètes ou chaque couche est considérée comme une plaque en imposant les conditions de continuité en déplacements ou en contraintes aux interfaces et les modèles zig-zag ou la cinématique satisfait à priori les conditions de contact est indépendante du nombre de couches. (Figures II.7 et II. 8).

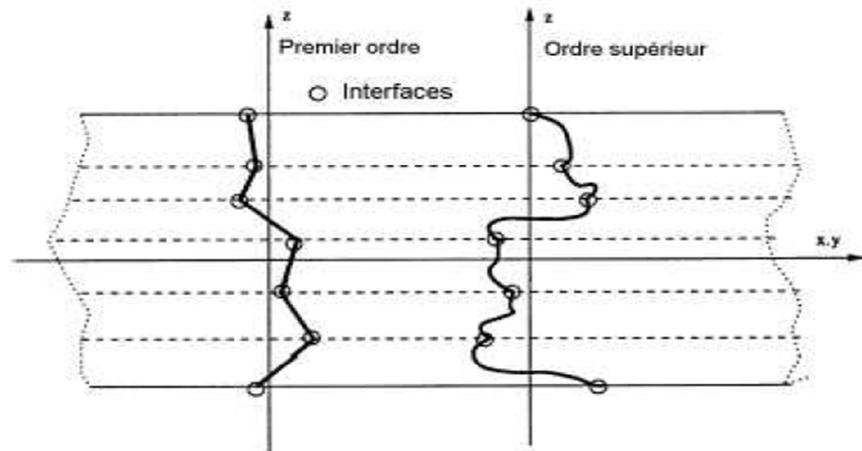


Figure. II.7 : Champ de déplacements des modèles couches discrètes, approche Cinématique(Nguyen.2004).

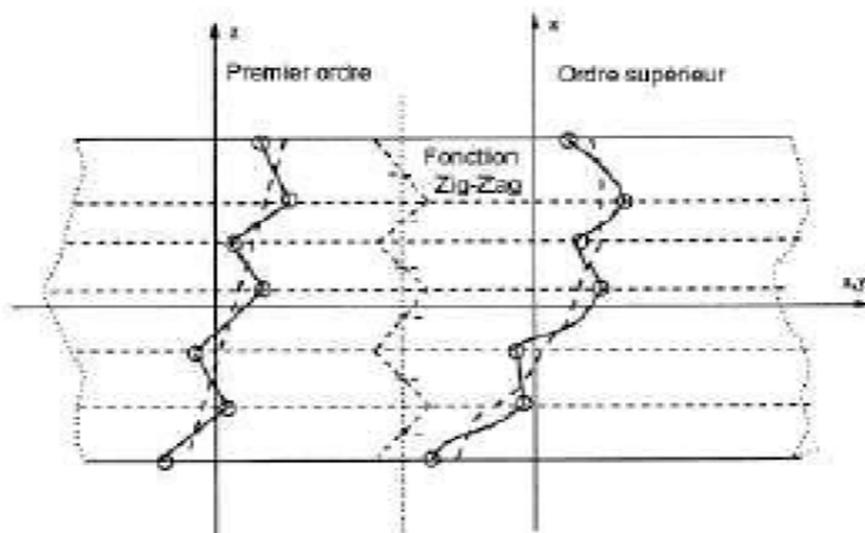


Figure II. 8 : Champ de déplacements des modèles zig-zag, approche cinématique (Nguyen.2004).

II.3. Conclusion

Dans cette partie on a décrit les différentes théories des plaques à savoir l'approche monocouche équivalente, l'approche par couche et l'approche développement asymptotique. Nous concluons aussi que l'approche monocouche équivalente est mieux adaptée pour les matériaux FGM car il n'y a pas de changement brusque dans les caractéristiques mécaniques contrairement aux composites conventionnels où le délaminage est un problème à ne pas écarter

Donc on a eu recours au modèle monocouche équivalent pour les plaques épaisses et les poutres courtes pour différentes théories d'ordre élevé où la prise en compte du cisaillement transversal est nécessaire pour une étude plus exacte.

CHAPITRE III

**ANALYSE STATIQUE ET DYNAMIQUE DES
PLAQUES FGM EN UTILISANT UN NOUVEAU
CHAMP DE DEPLACEMENT.**

III.1 Introduction

Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) sont de nouveaux matériaux composites dans lequel les micro-structure de détails sont spatialement varié au cours une distribution non uniforme de la phase de renforcement. Ceci est obtenu en utilisant le renforcement avec des propriétés différentes, de tailles et de formes, ainsi que par inversion du rôle de renforcement et la phase de matrice d'une manière continue. Le résultat est une microstructure produit un changement continu ou lisse sur les propriétés thermiques et mécaniques au niveau macroscopique ou continuum (Koizumi. 1993).

Maintenant, FGM sont développé pour une utilisation générale en tant que composants structurels en très haute température environnements. Par conséquent, il est important d'étudier la propagation de l'onde de gradation fonctionnelle structures des matériaux en termes de non-destructive évaluation et la caractérisation des matériaux.

Plusieurs études ont été réalisées pour analyser la mécanique ou thermique ou les réponses thermomécaniques des plaques et coques FGM. Un examen approfondi est effectué par (Tanigawa. 1995).(Reddy. 2000) a analysé le comportement statique des plaques rectangulaire à base de sa théorie de la plaque de déformation de cisaillement de troisième ordre.(Cheng.2000) ont liés les déviations d'une plaque FGM polygonale simplement appuyée donnée par la théorie du premier ordre de déformation de cisaillement et de théorie du troisième ordre de déformation de cisaillement à celui d'un équivalent plaques de Kirchhoff homogène.

La réponse statique de la plaque de FGM a été étudiée par (Zenkour. 2006) en utilisant une théorie de déformation de cisaillement généralisé. Dans une étude récente, (Şimşek. 2010) a étudié les déviations dynamiques et les contraintes d'une plaque FGM simplement appuyée soumis à une masse en mouvement à l'aide d'Euler-Bernoulli, Timochenko et la théorie de déformation de cisaillement parabolique des plaques. (Şimşek. 2010), (Benchour. 2011 et Abdelaziz. 2011) ont étudié la vibration libre de plaques FGM ayant différentes conditions aux limites à l'aide du classique, le premier ordre et différents d'ordre supérieur de théories de déformation de cisaillement de la plaque FGM.

L'analyse dynamique non linéaire d'une plaque FGM avec des supports épinglés-épinglés due à une charge harmonique mobile a été examinée par (Şimşek. 2010) en utilisant la théorie des plaques Timoshenko.

L'objectif principal de ce chapitre est de présenter une formulation générale pour les plaques fonctionnellement graduées (FGM) en utilisant une nouvelle théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé basée sur un nouveau champ de déplacement avec seulement quatre fonctions inconnues. La présente théorie satisfait les conditions de l'équilibre en haut et en bas de la face de plaque sans utiliser les facteurs de correction de cisaillement. La fonction hyperbolique en termes d'épaisseur de coordonnées est utilisée dans le champ de déplacement pour tenir compte de la déformation de cisaillement. Les équations de mouvement régissant proviennent du principe de l'énergie d'Hamilton. La solution de Navier est utilisée pour obtenir les solutions pour plaques FGM. Les résultats obtenus de cette nouvelle théorie raffinée sont comparés à ceux existant dans la littérature tel que solutions des théories d'ordre élevé (ZSDPT, HSDPT), théorie raffinée de Hadji (2015).

III.2 Formulation théorique

III.2.1 Surface physique neutre

Les matériaux à gradient de propriétés est un type particulier de composites dans lesquels leurs propriétés matérielles varient de façon continue en raison des variations progressive de la fraction volumique des matériaux constitutifs le long de l'une des dimensions (généralement dans le sens de l'épaisseur).

Dans cette étude, la plaque FGM est faite à partir d'un mélange de céramique et de métal et les propriétés sont supposées variables à travers l'épaisseur de la plaque. l'asymétrie des propriétés des matériaux de la plaque FGM est par rapport au plan médian, comme il est montré dans la figure III.1.

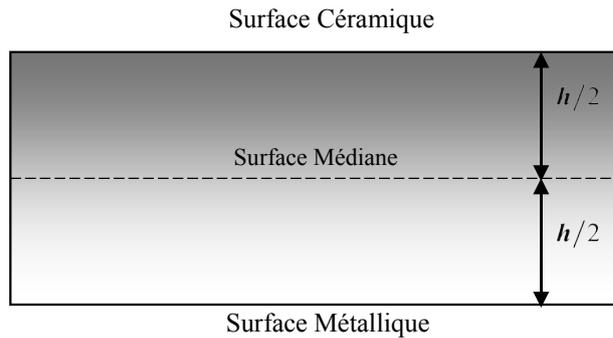


Fig.III.1: Position de la surface médiane pour une plaque FGM.

La fraction volumique de la céramique $V(z)$ est exprimée comme suit :

$$V(z) = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k \quad (\text{III.1})$$

Où k est l'indice de loi de puissance qui prend une valeur supérieure ou égale à zéro.

Les propriétés matérielles non homogènes de la plaque FGM peuvent être exprimées par la loi de mélange en puissance. En utilisant l'équation. (III.1), Les propriétés matérielles non homogènes de la plaque P-FGM, comme une fonction de coordonnée de l'épaisseur devient :

$$P(z) = (P_C - P_M)V(z) + P_M \quad (\text{III.2})$$

Où P_M et P_C sont les propriétés du métal et de céramique successivement.

Dans ce chapitre, nous supposons que le module d'élasticité E et la densité de masse ρ sont décrits par l'équation. (III.2), tandis que le coefficient de Poisson ν est considéré constant suivant l'épaisseur ((Benachour .2009),(labri chaht.2014)).

$$E(z) = (E_C - E_M)V(z) + E_M \quad (\text{III.3})$$

III.2.2 Hypothèses de base

Considérons le cas d'une plaque FGM d'épaisseur totale h (Fig. III. 2). La plaque est constituée d'un matériau isotrope ayant des propriétés variant sans interruption dans la direction de l'épaisseur. Le plan xy est considéré comme étant le plan médian de la plaque non déformé avec l'axe z positif vers le haut depuis le plan médian.

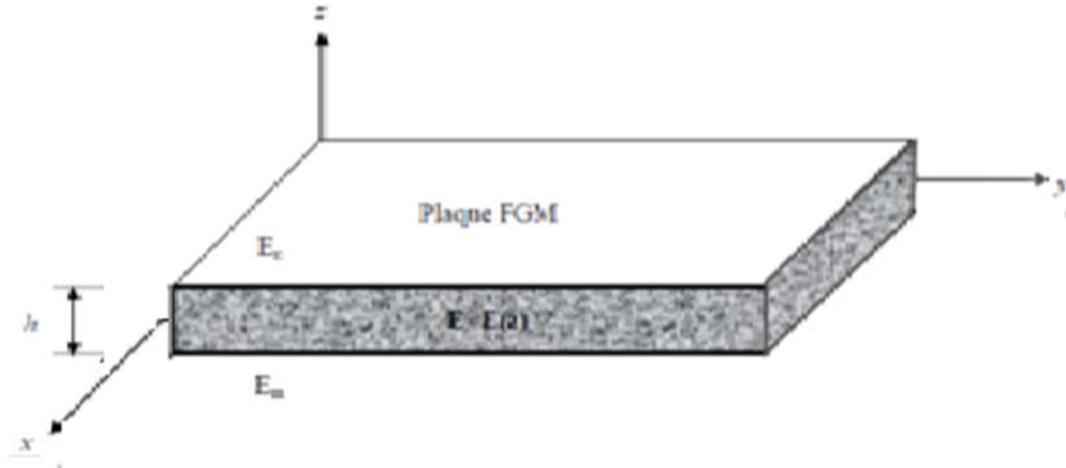


Fig.III.2: Géométrie d'une plaque en FGM.

Les hypothèses de la présente théorie raffinée des plaques sont les suivantes :

- L'origine du système de coordonnées cartésiennes est prise à la surface médiane de la plaque FGM.
- Les déplacements sont petits par rapport à l'épaisseur de la plaque et, en conséquence les déformations sont infinitésimales.
- Le déplacement transverse w contient une seule composante de flexion w_0 et Cette composante est en fonction des coordonnées x et y .

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad (\text{III.4})$$

• La contrainte normale transversale σ_z est négligeable devant la contrainte plane σ_x et σ_y .

• Le déplacement u dans la direction X est défini par superposition des déplacements dus aux effets d'extension, de flexion et de cisaillement.

$$u = u_0 + u_b + u_s, \quad v = v_0 + v_b + v_s, \quad (\text{III.5})$$

• La composante de flexion u_b est supposée le même déplacement donné par la théorie classique des plaques. Donc, les expressions pour u_b peut être donné comme suit :

$$u_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial x}, \quad v_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial y}, \quad (\text{III.6})$$

• À partir de la composante de déplacement u_s, v_s se dérive la composante de déformation γ_{xz}, γ_{yz} qui varie suivant une forme parabolique à travers l'épaisseur de la plaque, tout en assurant la condition de nullité des contraintes de cisaillement τ_{xz} aux surfaces inférieure et supérieure de la plaque. Par conséquent, l'expression pour u_s peut être donné comme :

$$u_s = k_1 \cdot f(z) \int \theta(x, y, t) dx \quad v_s = k_2 \cdot f(z) \int \theta(x, y, t) dy \quad (\text{III.7})$$

Où

$$f(z) = z \cdot \left(\frac{5}{4} - \frac{5z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{III.8})$$

III.2.3 Equations cinématique et constitutive

En se basant, sur les hypothèses de la section précédente, le champ de déplacement peut être obtenu on utilisant les équations (III.5) – (III.9) comme :

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} + k_1 \cdot f(z) \int \theta(x, y, t) dx, \quad (\text{III.9a})$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} + k_2 \cdot f(z) \int \theta(x, y, t) dy, \quad (\text{III.9b})$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t), \quad (\text{III.9c})$$

Le champ de déformations se déduit des déplacements de l'Esq. (III.10) soit :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + z k_x^b + f(z) k_x^s, \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_y^0 + z k_y^b + f(z) k_y^s, \end{aligned} \quad (\text{III.10a})$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^0 + z k_{xy}^b + f(z) k_{xy}^s, \\ \gamma_{yz} &= g(z) \gamma_{yz}^0, \\ \gamma_{xz} &= g(z) \gamma_{xz}^0, \end{aligned} \quad (\text{III.10b})$$

Où

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad k_x^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}, \quad k_x^s = k_1 \cdot \theta, \\ \varepsilon_y^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial y}, \quad k_y^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}, \quad k_y^s = k_2 \cdot \theta, \\ \gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}, \quad k_{xy}^b = -2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y}, \quad k_{xy}^s = \frac{\partial}{\partial y} \int \theta \cdot dx + k_2 \frac{\partial}{\partial x} \int \theta \cdot dy, \\ \gamma_{xz}^0 &= k_1 \cdot \int \theta \cdot dx, \quad \gamma_{yz}^0 = k_2 \cdot \int \theta \cdot dy, \quad g(z) = \frac{df(z)}{dz} \end{aligned} \quad (\text{III.10c})$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \int \theta \cdot dx = A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \int \theta \cdot dy = B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \int \theta \cdot dx = A' \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \int \theta \cdot dy = B' \frac{\partial \theta}{\partial y},$$

Où les coefficients A' et B' sont les expressions accordées à un type de solution utilisée .dans cette case par Navier, A' , B' , k_1 et k_2 sont des expressions comme suit :

$$A' = -1/\alpha^2, \quad B' = -1/\beta^2, \quad k_1 = \alpha^2, \quad k_2 = \beta^2.$$

Pour les FGM élastiques et isotropes, les relations constitutives peuvent être écrites comme suit:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.11})$$

Où

$$C_{11}(z) = C_{22} = \frac{E(z)}{(1-\nu^2)}, \quad (\text{III.12a})$$

$$C_{12}(z) = \frac{\nu E(z)}{(1-\nu^2)}, \quad (\text{III.12b})$$

$$C_{44}(z) = C_{55}(z) = C_{66}(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}, \quad (\text{III.12c})$$

III.2.4 Equations gouvernantes

Les équations de mouvement de la plaque FGM peuvent être exprimées en utilisant le principe d'énergie d'Hamilton. Le principe sous la forme analytique suivant :

$$\int_0^t (\delta U + \delta V - \delta K) dt = 0 \quad (\text{III.13})$$

Où t est le temps; t_1 et t_2 sont les temps initial et final, respectivement; δU est la variation de l'énergie de déformation; δV est la variation virtuelle de l'énergie potentielle; et δT est la variation virtuelle de l'énergie cinétique.

La variation de l'énergie de déformation de la plaque peut être comme suit :

$$\delta U = \int_V (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz}) dV, \quad (\text{III.14})$$

$$\delta U = \int^A [N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b + M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^0 + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^0] dA = 0$$

Avec A est la surface supérieure et les contraintes résultants M , N et S définies comme suit :

$$(N_i, M_i^b, M_i^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, f) \sigma_i dz, (i = x, y, xy), \text{ et } (S_{xz}^s, S_{yz}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} g(\tau_{xz}, \tau_{yz}) dz \quad (\text{III.14a})$$

La variation de travail externe peut être écrite comme suit :

$$\delta V = - \int_A q \delta w_0 dA, \quad (\text{III.15})$$

La variation de l'énergie cinétique peut être exprimée par :

$$\begin{aligned} \delta T &= \int_V [\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}] \rho(z) dV, \quad (\text{III.16}) \\ &= \int_V I_0 [\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}] - \\ &I_1 \left(\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) + \\ &J_1 \left((k_1 A') \left(\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \delta \dot{u}_0 \right) + (k_2 B') \left(\dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \right) + \\ &I_2 \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) + K_2 \left((k_1 A') \left(\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} \right) + (k_2 B') \left(\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} \right) \right) - \\ &J_2 \left((k_1 A') \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} \right) + (k_2 B') \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) \right) dA \end{aligned}$$

Où le point «.» Indique la dérivation par rapport à la variable de temps t ;

$\rho(z)$ Est la densité de masse donnée par Eq. (1), et (I_i, J_i, K_i) sont les masses inerties défini par :

$$(I_0, I_1, I_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) \rho(z) dz, \quad (\text{III.17a})$$

$$(J_1, J_2, K_2) = \int_{-h/2}^{-h/2} (1, z, f, f^2) \rho(z) dz, \quad (\text{III.17b})$$

En remplaçant les expressions de δU , δV et δT des équations (III.15), (III.16), et (III.17) dans l'équation (III.14) . ce qui suit peut être dérivé :

$$\begin{aligned}
\delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} + k_1 A' J_1 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x}, \\
\delta v_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= I_0 \dot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} + k_2 B' J_1 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial y}, \\
\delta w_0 : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + q &= I_0 \dot{w}_0, \\
\delta \theta : -k_1 M_x^s - k_2 M_y^s - (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + k_1 A' \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} &= -J_1 \left(k_1 A' \frac{\partial \dot{u}_0}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial \dot{v}_0}{\partial y} \right) \\
- K_2 \left((k_1 A')^2 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x^2} + (k_2 B')^2 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right) + J_2 \left(k_1 A' \frac{\partial^2 \dot{w}_0}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \dot{w}_0}{\partial y^2} \right), &
\end{aligned} \tag{III.18}$$

Substitution Eq. (III.11 ab) dans Eq. (III.12) et les subséquents résultats dans Eq. (III.15a), les contraintes résultantes sont obtenues en termes de tensions comme suit compact forme :

$$\begin{Bmatrix} N, \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix}, S = A^s \gamma \tag{III.19}$$

Dans lequel :

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t, M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t \tag{III.20a}$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}^t, k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}^t, k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\}^t, \tag{III.20b}$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, \tag{III.20c}$$

$$D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix}, H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix}, B^s = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix}, \tag{III.20d}$$

$$A^s = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix}, S = \{S_{xz}^s, S_{yz}^s\}, \gamma = \{\gamma_{xz}^0, \gamma_{yz}^0\} \tag{III.20e}$$

Les composantes de rigidité sont définies comme suit :

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} C_{11} \left(1, z, z^2, f(z), z, f(z_{ns}), f^2(z) \right) \begin{Bmatrix} 1 \\ \nu \\ \frac{1-\nu}{2} \end{Bmatrix} dz, \quad (\text{III.21a})$$

$$(A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s) = (A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s), \quad (\text{III.21b})$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \int_{-h/2}^{h/2} C_{44} [g(z)]^2 dz, \quad (\text{III.21c})$$

Introduction Eq. (III.20) dans Eq. (III.19), l'équation de mouvement peut être exprimée en termes de déplacements (u_0, v_0, w_0, θ) .et l'approprié équation prendre la forme :

$$\begin{aligned} & A_{11}d_{11}u_0 + A_{66}d_{22}u_0 + (A_{12} + A_{66})d_{12}v_0 - B_{11}d_{111}w_0 - (B_{12} + 2B_{66})d_{122}w_0 \\ & + (B_{66}^s(k_1 A' + k_2 B'))d_{112}\theta + (B_{22}^s k_2 + B_{12}^s k_2)d_1\theta = I_0\ddot{u}_0 - I_1d_1\ddot{w}_0 + J_1A'k_1d_1\ddot{\theta}, \end{aligned} \quad (\text{III.22a})$$

$$\begin{aligned} & A_{22}d_{22}v_0 + A_{66}d_{11}v_0 + (A_{12} + A_{66})d_{12}u_0 - B_{22}d_{222}w_0 - (B_{12} + 2B_{66})d_{112}w_0 \\ & + (B_{66}^s(k_1 A' + k_2 B'))d_{112}\theta + (B_{22}^s k_2 + B_{12}^s k_1)d_2\theta = I_0v_0 - I_1d_2\ddot{w}_0 + J_1B'k_2d_2\ddot{\theta}, \end{aligned} \quad (\text{III.22b})$$

$$B_{11}d_{111}u_0 + (B_{12} + 2B_{66})d_{122}u_0 + (B_{12} + 2B_{66})d_{112}v_0 + B_{22}d_{222}v_0 \quad (\text{III.22c})$$

$$\begin{aligned} & - D_{11}d_{1111}w_0 - 2(D_{12} + 2D_{66})d_{1122}w_0 - D_{22}d_{2222}w_0 + (D_{11}^s k_1 + D_{12}^s k_2)d_{11}\theta \\ & + 2(D_{66}^s(k_1 A' + k_2 B'))d_{1122}\theta + (D_{12}^s k_1 + D_{22}^s k_2)d_{22}\theta + N_x^0 d_{11}w_0 + 2N_{xy}^0 d_{12}w_0 + N_y^0 d_{22}w_0 + q = \\ & I_0\ddot{w}_0 + I_1(d_1\ddot{u}_0 + d_2\ddot{v}_0) - I_2(d_{11}\ddot{w}_0 + d_{22}\ddot{w}_0) + J_2(k_1 A' d_{11}\ddot{\theta} + k_2 B' d_{22}\ddot{\theta}), \end{aligned}$$

$$(\text{III.22d})$$

$$\begin{aligned} & - (B_{11}^s k_1 + B_{12}^s k_2)d_1u_0 - (B_{66}^s(k_1 A' + k_2 B'))d_{122}u_0 - (B_{66}^s(k_1 A' + k_2 B'))d_{112}v_0 - (B_{12}^s k_1 + B_{22}^s k_2)d_2v_0 \\ & + (D_{11}^s k_1 + D_{12}^s k_2)d_{11}w_0 + 2(D_{66}^s(k_1 A' + k_2 B'))d_{1122}w_0 + (D_{12}^s k_1 + D_{22}^s k_2)d_{22}w_0 \\ & - H_{11}^s k_1^2\theta - H_{22}^s k_2^2\theta - 2H_{12}^s k_1 k_2\theta - ((k_1 A' + k_2 B')^2 H_{66}^s)d_{1122}\theta + A_{44}^s (k_2 B')^2 d_{22}\theta + A_{55}^s (k_1 A')^2 d_{11}\theta = \\ & - J_1(k_1 A' d_1\ddot{u}_0 + k_2 B' d_2\ddot{v}_0) + J_2(k_1 A' d_{11}\ddot{w}_0 + k_2 B' d_{22}\ddot{w}_0) - K_2((k_1 A')^2 d_{11}\ddot{\theta} + (k_2 B')^2 d_{22}\ddot{\theta}), \end{aligned}$$

Où d_{ij} , d_{ijl} et d_{ijlm} sont les opérateurs différentielles comme suit :

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, \quad d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, \quad d_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (i, j, l, m = 1, 2), \quad (\text{III.23})$$

III.3. solution analytique**III.3.1. solution analytique pour une plaque FGM :**

La méthode des solutions de Navier est employée pour déterminer les solutions analytiques pour que les variables de déplacement sont écrits comme produit de arbitraire paramètres et les fonctions trigonométriques connues pour respecter les équations de mouvement et les conditions aux bords

$$\text{Où } \begin{cases} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta \end{cases} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{cases} U_{mn} \cdot e^{i\omega t} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \\ V_{mn} \cdot e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \\ W_{mn} \cdot e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ X_{mn} \cdot e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \end{cases} \quad (\text{III.24})$$

Où ω la fréquence propre de la vibration libre de la plaque, $\sqrt{-1}$ unité imaginaire.

$$\text{Avec : } \alpha = m\pi/a \text{ et } \beta = n\pi/b \quad (\text{III.25})$$

La charge transverse q est aussi étendue dans série de double Fourier sinus:

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y), \quad (\text{III.26})$$

Où

$$Q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin(\alpha x) \sin(\beta y) dx dy = \{q_0 \text{ Pour la charge sinusoïdale distribuée.} \quad (\text{III.27})$$

Dans ce calcul, on a utilisé : $Q_{mn} = 1$

Considérons la plaque est soumise à en plan compressive charge pour forme :

$$N_x^0 = \gamma_1 N_{cr}, N_y^0 = \gamma_2 N_{cr}, N_{xy}^0 = 0 \text{ (ici } \gamma_1 \text{ et } \gamma_2 \text{ sont les charges paramètres adimensionnelles)}$$

Substitution Eq. (III.25) dans Eq. (III.24), le problème suivant est obtenu :

$$\left(\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} + k & S_{34} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & m_{14} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{34} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} \end{bmatrix} \right) \begin{cases} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ Q_{mn} \\ 0 \end{cases} \quad (\text{III.28})$$

Pour lesquels :

$$S_{11} = -(A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2)$$

$$\begin{aligned}
S_{12} &= -\alpha \beta (A_{12} + A_{66}) \\
S_{13} &= \alpha (B_{11} \alpha^2 + B_{12} \beta^2 + 2B_{66} \beta^2) \\
S_{14} &= \alpha (k_1 B_{11}^s + k_2 B_{12}^s - (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s \beta^2) \\
S_{22} &= -(A_{66} \alpha^2 + A_{22} \beta^2) \\
S_{23} &= \beta (B_{22} \beta^2 + B_{12} \alpha^2 + 2B_{66} \alpha^2) \\
S_{24} &= \beta (k_2 B_{22}^s + k_1 B_{12}^s - (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s \alpha^2) \\
S_{33} &= -(D_{11} \alpha^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \alpha^2 \beta^2 + D_{22} \beta^4) \\
S_{34} &= -k_1 (D_{11}^s \alpha^2 + D_{12}^s \beta^2) + 2(k_1 A' + k_2 B') D_{66}^s \alpha^2 \beta^2 - k_2 (D_{22}^s \beta^2 + D_{12}^s \alpha^2) \\
S_{44} &= -k_1 (H_{11}^s k_1 + H_{12}^s k_2) - (k_1 A' + k_2 B')^2 H_{66}^s \alpha^2 \beta^2 - k_2 (H_{12}^s k_1 + H_{22}^s k_2) - (k_1 A')^2 A_{55}^s \alpha^2 - (k_2 B')^2 A_{44}^s \beta^2 \\
N_{cr} &= (\gamma_1 \alpha^2 + \gamma_2 \beta^2) \\
m_{11} &= -I_0, m_{13} = -\alpha d_1, m_{14} = -J_1 k_1 A \alpha, m_{22} = -I_0, m_{23} = \beta d_1, m_{24} = -k_2 B' \beta J_1 \\
m_{33} &= -I_0 - I_2 (\alpha^2 + \beta^2) \\
m_{34} &= J_2 (k_1 A \alpha^2 + k_2 B' \beta^2), m_{44} = -K_2 ((k_1 A')^2 \alpha^2 + (k_2 B')^2 \beta^2),
\end{aligned} \tag{III.29b}$$

III.4 Conclusion

Dans ce chapitre, L'analyse de la flexion et de la vibration libre des plaques en matériau fonctionnellement graduées (FGM) sont examinées par une nouvelle théorie de cisaillement raffinée des plaques basé sur un nouveau champ de déplacement. Cette théorie prend en compte les effets de cisaillement transversal et la distribution parabolique des contraintes de cisaillement suivant l'épaisseur de la plaque et satisfait les conditions de nullité de la contrainte de cisaillement sur les faces supérieure et inférieure de la plaque FGM sans l'aide des facteurs de correction de cisaillement. Le module de Young est supposé varie dans la direction de l'épaisseur de la plaque FGM en fonction d'une simple loi de puissance. Les équations de mouvement ont été trouvées en utilisant le principe d'énergie d'Hamilton.

Les solutions sont obtenues en utilisant les équations de Navier, et les fréquences fondamentales sont trouvées en résolvant le problème en valeurs propres. Une validation des résultats de cette nouvelle théorie des plaques raffinées ainsi qu'une étude paramétrique seront fait ultérieurement.

CHAPITRE IV

**VALIDATION ET COMPARAISON DES
RESULTATS.**

IV.1. Introduction

Dans ce chapitre nous considérons une théorie raffinée en tenant compte d'une fonction de cisaillement $f(z)$ qui permet d'une part de prendre en compte le cisaillement transverse, et d'autre part d'en approcher la forme de distribution suivant l'épaisseur. Du fait que les caractéristiques matérielles sont variables suivant l'épaisseur.

Nous essayons de comparer les résultats de cette étude à ceux de la littérature et faire, par la suite, une étude paramétrique afin de voir l'influence de la géométrie et de la variation matérielle sur le comportement statique et dynamique de ce type des plaques en matériau FGM.

IV.2. Résultats numériques et discussion

Dans cette étude, l'analyse de flexion et de la vibration libre des plaques FGM en utilisant un nouveau champ de déplacement est effectuée pour discussion.

IV.2.1. Analyse statique

Pour l'analyse statique, les plaques sont soumises à un chargement sinusoidale donnée par: $q(x, y) = q_0$

Où q_0 représente l'intensité de la charge au centre de la plaque.

Pour la plaque FGM, les propriétés matérielles utilisées dans la présente étude sont :

■ Céramique (P_C , alumine, Zr_2O_3) : $E_c = 380GPa$, $\nu = 0.3$.

■ Métal (P_M , Aluminium, Al) : $E_m = 70GPa$, $\nu = 0.3$.

Et leurs propriétés changent à travers l'épaisseur de la plaque selon la loi de puissance P-FGM. Les surfaces inférieures et supérieures de la plaque FGM sont riches en métal et en céramique respectivement.

Les résultats numériques sont présentés en termes des flèches, déplacements et contraintes.

$$\begin{aligned} \bar{w} &= 10 \frac{E_c h^3}{q_0 a^4} w \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right), \quad \bar{u} = 100 \frac{E_c h^3}{q_0 a^4} u \left(0, \frac{b}{2}, -\frac{h}{4} \right), \quad \bar{v} = 100 \frac{E_c h^3}{q_0 a^4} v \left(\frac{a}{2}, 0, -\frac{h}{6} \right) \\ \bar{\sigma}_x &= \frac{h}{q_0 a} \sigma_x \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2} \right), \quad \bar{\sigma}_y = \frac{h}{q_0 a} \sigma_y \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{3} \right), \quad \bar{\tau}_{xy} = \frac{h}{q_0 a} \tau_{xy} \left(0, 0, \frac{h}{3} \right), \quad \bar{\tau}_{xz} = \frac{h}{q_0 a} \tau_{xz} \left(0, \frac{b}{2} \right), \\ \bar{\tau}_{yz} &= \frac{h}{q_0 a} \tau_{yz} \left(\frac{a}{2}, 0, \frac{h}{6} \right). \end{aligned}$$

Les résultats sont reportés dans le tableau IV.1 et le tableau IV.2. Ces tableaux présentent les résultats numériques adimensionnels des déplacements et des contraintes respectivement. Les résultats obtenus sont comparés à la théorie du zéro ordre de déformation de cisaillement (ZSDPT), et la théorie d'ordre élevé de Reddy (HSDPT). La présente théorie de cisaillement raffinée donne des bons résultats par rapports à la théorie ZSDPT et en bon accord avec la théorie de cisaillement raffinée de Hadji (Hadji. 2015).

Ces tableaux montrent aussi l'effet de l'indice de volume fractionnel sur les contraintes et les déplacements d'une plaque carrée en FGM avec un rapport $a/h = 10$. On constate que la flèche \bar{w} et la contrainte normale $\bar{\sigma}_x$ augmente lorsque la plaque devient de plus en plus métallique, par contre la contrainte normale $\bar{\sigma}_y$ diminue. Il est très intéressant de noter que les contraintes d'une plaque entièrement en céramique sont les mêmes que celle d'une plaque entièrement en métal. Cela est dû au fait que dans ces deux cas, la plaque est entièrement homogène et les contraintes ne dépendent pas du module d'élasticité.

Tableau IV.1 : Effets de l'indice de la fraction volumique sur les déplacements adimensionnels de la plaque carrée en FGM ($a/h = 10$).

k	Théorie	\bar{u}	\bar{v}	\bar{w}
Céramique	ZSDPT*	0.21805	0.14493	0.29423
	HSDPT #	0.21805	0.14493	0.29423
	Hadji (2015)	0.21815	0.14488	0.29604
	Présente	0.21830	0.14505	0.29605
0.2	ZSDPT*	0.28180	0.19850	0.33672
	HSDPT#	0.28172	0.19820	0.33767
	Hadji(2015)	0.30479	0.21538	0.35988
	Présente	0.30490	0.21557	0.35989
0.5	ZSDPT*	0.42135	0.31096	0.44387
	HSDPT #	0.42131	0.31034	0.44407
	Hadji (2015)	0.43859	0.32549	0.45369
	Présente	0.43877	0.32571	0.45370
1	ZSDPT*	0.64258	0.49673	0.59059
	HSDPT #	0.64137	0.49438	0.58895
	Hadji (2015)	0.64112	0.49408	0.58893
	Présente	0.64136	0.49437	0.58895
2	ZSDPT*	0.9022	0.71613	0.76697
	HSDPT #	0.89858	0.71035	0.75747
	Hadji (2015)	0.89793	0.70968	0.75733
	Présente	0.89835	0.71014	0.75729
5	ZSDPT*	1.06786	0.84942	0.94325
	HSDPT #	1.06297	0.84129	0.90951
	Hadji (2015)	1.06620	0.84399	0.91171
	Présente	1.06694	0.84478	0.91135
Métal	ZSDPT*	1.18373	0.78677	1.59724
	HSDPT #	1.18373	0.78677	1.59724
	Hadji (2015)	1.18428	0.78652	1.60709
	Présente	1.18509	0.78746	1.60716

#Résultats de réf (Reddy.2000) , * Résultats de réf (Dharan et al, 2010)

Tableau IV.2 : Effet de l'indice de la fraction volumique sur les contraintes adimensionnelles de la plaque carré en FGM soumise à un chargement sinusoïdale ($a/h=10$).

k	théories	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\sigma}_y$	$\bar{\tau}_{xy}$	$\bar{\tau}_{xz}$	$\bar{\tau}_{yz}$
Céramique	ZSDPT*	1.98915	1.31035	0.70557	0.23778	0.23778
	HSDPT [#]	1.98915	1.31035	0.70557	0.23778	0.19051
	Hadji (2015)	1.99515	1.31219	0.70656	0.24406	0.21289
	Présente	1.99432	1.31236	0.72793	0.23857	0.21206
0.2	ZSDPT*	2.1227	1.30962	0.6678	0.22557	0.2256
	HSDPT [#]	2.12671	1.30958	0.66757	0.22532	0.18045
	Hadji (2015)	2.26002	1.38706	0.72053	0.24805	0.22655
	Présente	2.25906	1.38723	0.73884	0.24257	0.22576
0.5	ZSDPT*	2.60436	1.47175	0.66709	0.23909	0.23869
	HSDPT [#]	2.61051	1.47147	0.66668	0.23817	0.19071
	Hadji (2015)	2.61929	1.45863	0.69119	0.24945	0.24311
	Présente	2.61815	1.45882	0.70602	0.24398	0.24230
1	ZSDPT*	3.07011	1.48935	0.61395	0.22705	0.23919
	HSDPT [#]	3.08501	1.4898	0.61111	0.23817	0.19071
	Hadji (2015)	3.08640	1.48944	0.611061	0.24406	0.26178
	Présente	3.08500	1.48980	0.62262	0.23857	0.26076
2	ZSDPT*	3.58089	1.3968	0.54947	0.22705	0.22719
	HSDPT [#]	3.60664	1.39575	0.54434	0.22568	0.1807
	Hadji (2015)	3.60856	1.39561	0.54413	0.22427	0.27558
	Présente	3.60669	1.39603	0.55460	0.21856	0.27367
5	ZSDPT*	4.19547	1.1087	0.57811	0.21792	0.21813
	HSDPT [#]	4.24293	1.10539	0.57368	0.21609	0.17307
	Hadji (2015)	4.24758	1.10329	0.57553	0.19919	0.24164
	Présente	4.24470	1.10406	0.59080	0.19296	0.23854
Métal	ZSDPT*	1.98915	1.31035	0.70557	0.23778	0.23778
	HSDPT [#]	1.98915	1.31035	0.70557	0.23778	0.19051
	Hadji (2015)	1.99515	1.31219	0.70656	0.24406	0.21289
	Présente	1.99432	1.31236	0.72793	0.23857	0.21206

Figure IV.1 Montre la variation de la flèche adimensionnelle au centre d'une plaque carrée en fonction de l'indice de loi de puissance p . Les Figure IV.2 et IV.3 montrent la variation de la flèche adimensionnel \bar{W} au centre de la plaque avec la variation des rapports (a/b) et (a/h) de la plaque respectivement. Il est claire d'après les figures que la flèche est maximale pour la plaque entièrement en métal et minimale pour les plaques en céramique. La différence augmente lorsque le rapport (a/b) augmente, et reste constante avec l'augmentation du rapport (a/h) .

A partir de ces figures, il est également évident que la réponse des plaques en FGM est intermédiaire entre les plaques homogènes en céramique et de métal

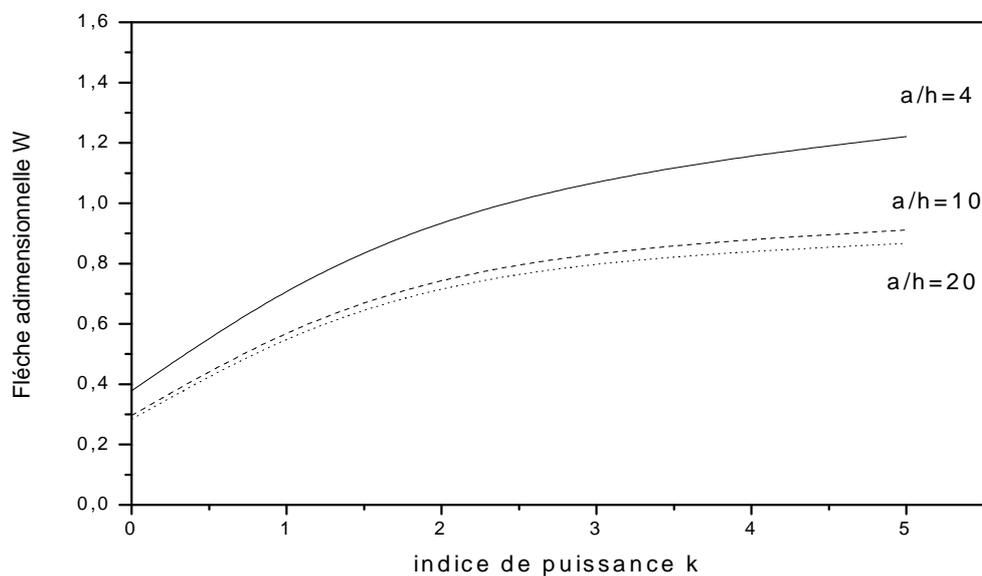


Fig. IV.1 : Flèche adimensionnelle \bar{W} en fonction de l'indice de loi de puissance k pour une plaque carrée en FGM sous chargement sinusoïdale.

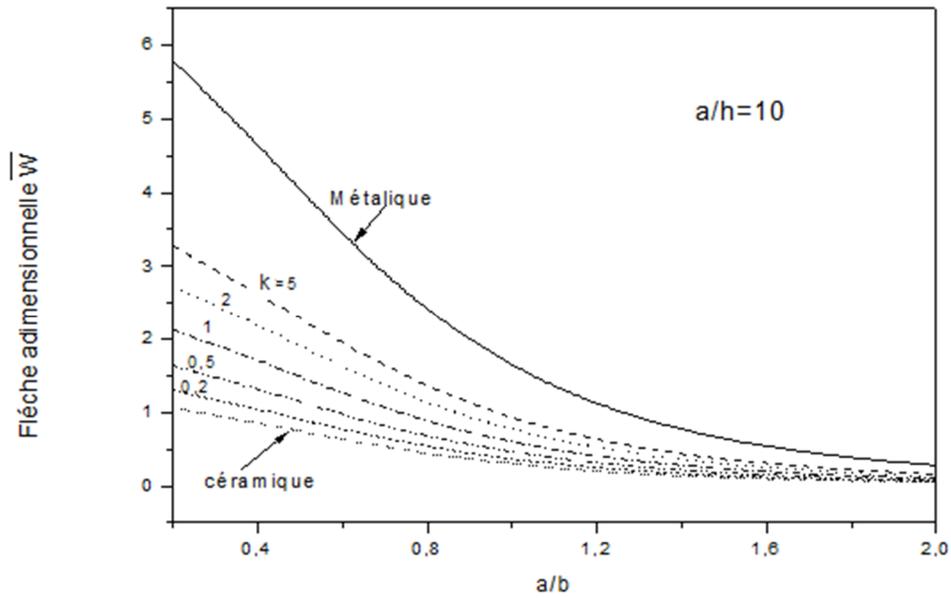


Fig. IV.2 : Flèche adimensionnelle \bar{W} en fonction du rapport (a/b) de la plaque FGM.

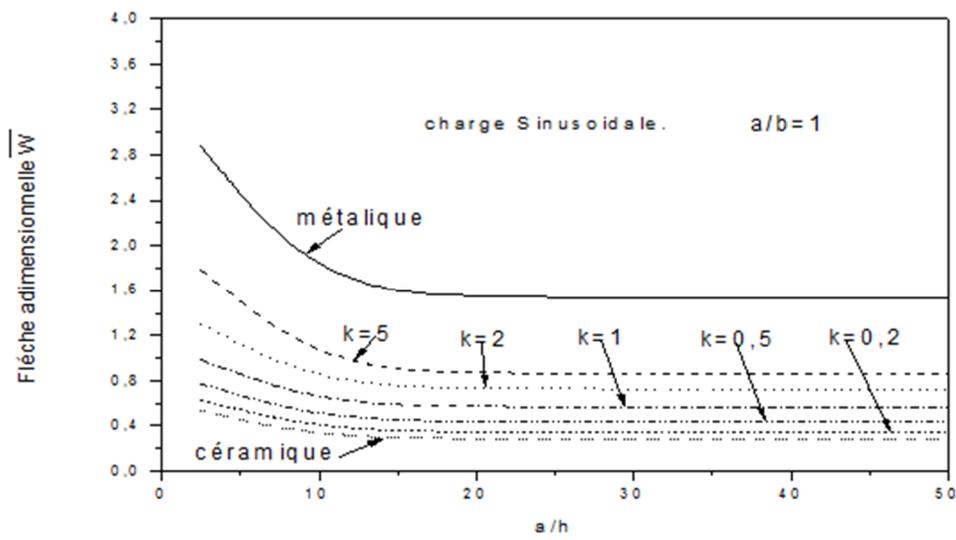


Fig. IV.3 : Flèche adimensionnelle \bar{W} en fonction du rapport (a/h) d'une plaque carrée en FGM.

Les figures de IV.4 à IV.8 montrent la répartition des contraintes normales et de cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque FGM. L'indice de la fraction volumique est considéré comme égale 2 pour ces résultats. À partir de ces figures, les contraintes normales $\bar{\sigma}_x$ et $\bar{\sigma}_y$ sont de compression dans toute la plaque jusqu'à $\frac{z}{h} \approx 0.149$ et après ils deviennent de traction. Les valeurs maximales de ces contraintes et la contrainte de cisaillement $\bar{\tau}_{xy}$ se produisent au niveau des surfaces supérieure et inférieure de la plaque.

La différence entre les courbes des Fig. IV.7 et IV.8 est très claire. Comme le gradient de matériel k augmente, les inhomogénéités jouent un plus grand rôle dans les calculs de distribution de contraintes. La distribution des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur $\bar{\tau}_{yz}$ et $\bar{\tau}_{xz}$ ne sont pas parabolique et les contraintes augmentent avec la diminution du rapport (a/b) de la plaque. On remarque que la valeur maximale se produit à $\frac{z}{h} \approx 0.149$, et non pas au centre de la plaque comme dans le cas des plaques homogènes.

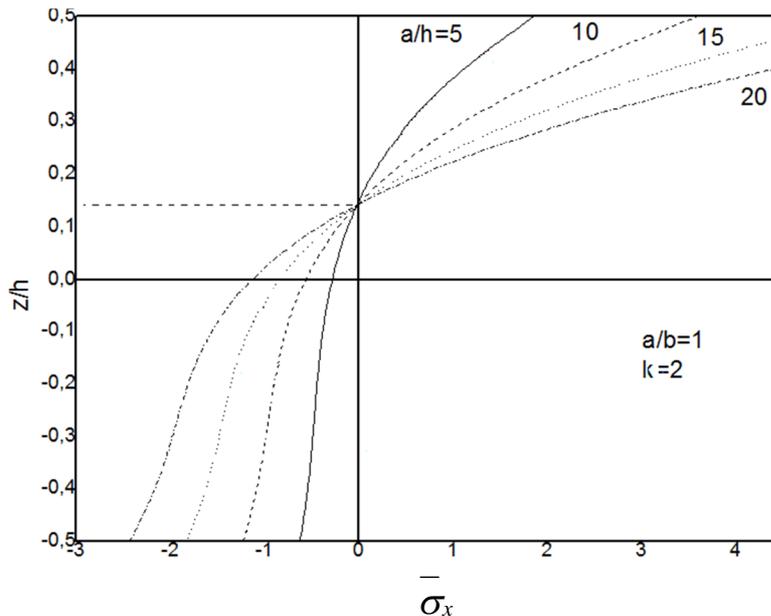


Fig. IV.4 : Variation de la contrainte longitudinale $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur d'une plaque FGM pour différentes valeurs du rapport (a/h) .

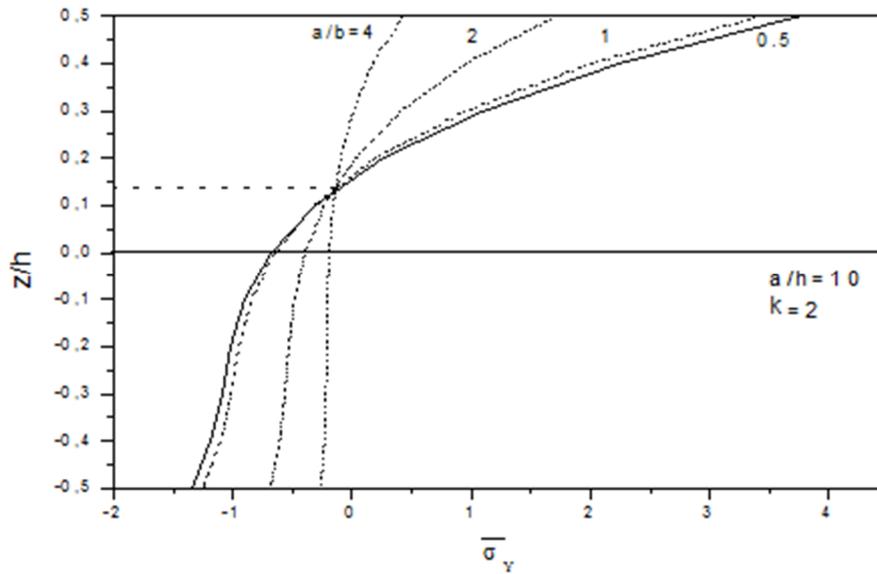


Fig. IV.5 : Variation de la contrainte longitudinale $\bar{\sigma}_y$ à travers l'épaisseur d'une plaque de FGM pour différentes valeurs du rapport (a/b)

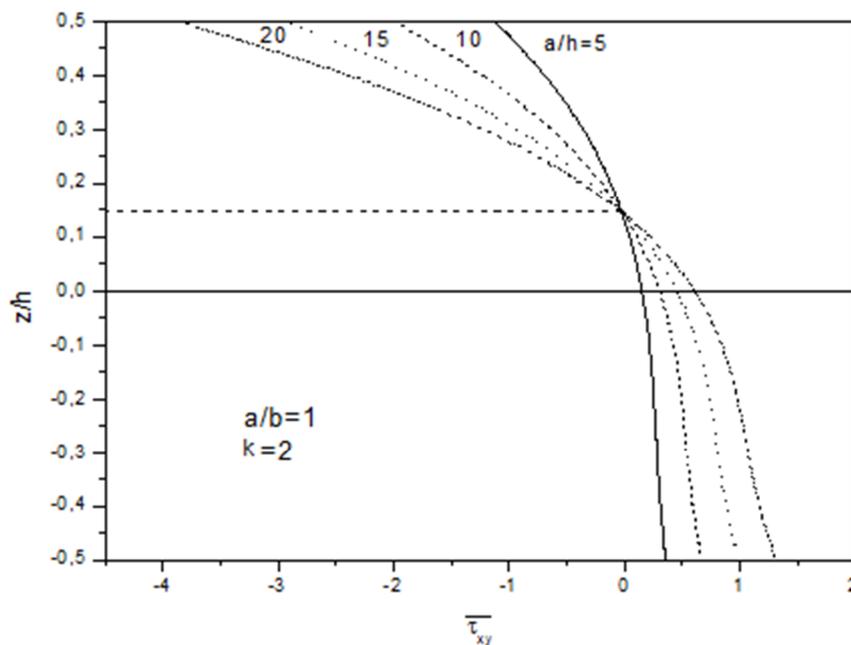


Fig. IV.6 : Variation de la contrainte tangentielle $\bar{\tau}_{xy}$ à travers l'épaisseur d'une plaque FGM pour différentes valeurs du rapport (a/h).

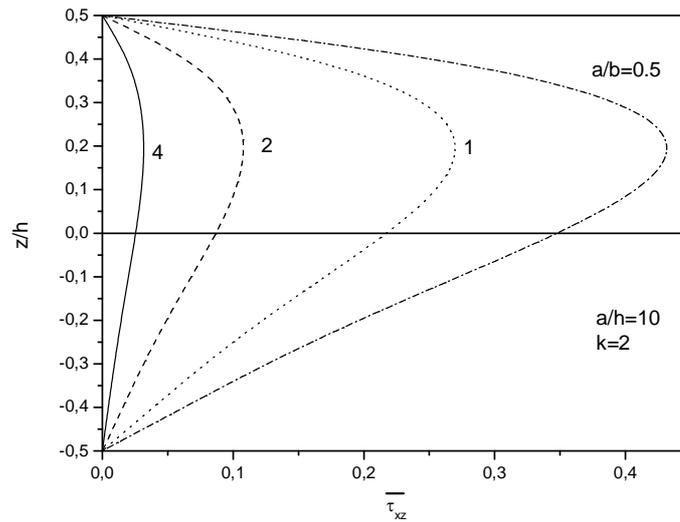


Fig. IV.7 : Variation de la contrainte tangentielle $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur d'une plaque FGM pour différentes valeurs du rapport (a/b) .

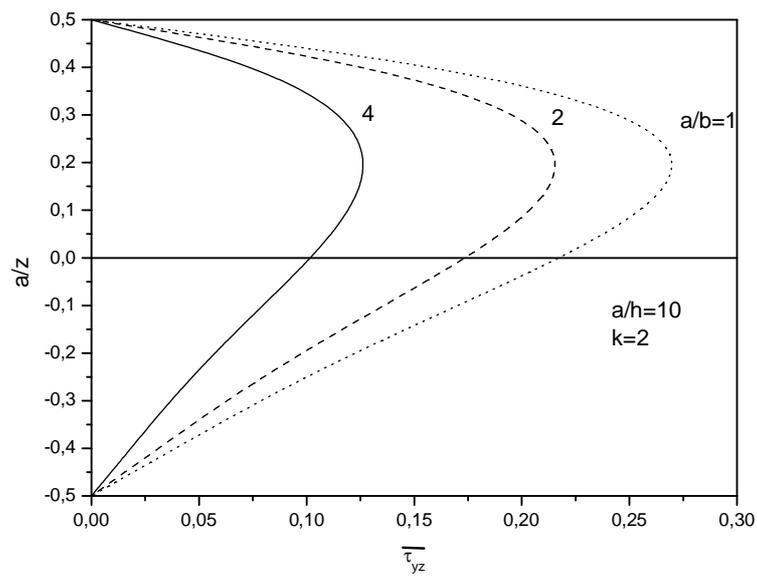


Fig. IV.8 : Variation de la contrainte tangentielle $\bar{\tau}_{yz}$ à travers l'épaisseur d'une plaque FGM pour différentes valeurs du rapport (a/b) .

IV.2.2. Analyse dynamique

La précision et l'efficacité de la présente théorie de cisaillement est montré par l'analyse de la vibration libre des plaques en FGM. Les propriétés des matériaux utilisés dans la présente cette analyse sont :

■ Céramique (P_c , Zirconia, Zr_2O_3) : $E_c = 200 \times 10^9 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$. $\rho_c = 5700 \text{ Kg/m}^3$,

■ Métal (P_m , Aluminium, Al) : $E_m = 70 \times 10^9 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$. $\rho_m = 2702 \text{ Kg/m}^3$,

Les résultats numériques sont présentés en termes des fréquences fondamentales naturelles adimensionnelles :

$$\bar{\omega} = \left(\omega \left(\frac{a^2}{h} \right) \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}} \right),$$

Plusieurs paramètres sont variés pour étudié le comportement dynamique de ce type de plaque. Les trois premières fréquences naturelles pour le mode fondamental de vibration ($m=n=1$) d'une plaque carré en FGM (Al/Zr_2O_3) sont comparées avec les résultats existants dans la littérature. Le tableau IV.3 présente les résultats obtenus par la présente théorie de cisaillement et comparé avec les résultats des autres théories de cisaillement tel que la théorie ZSDPT (Dharan .2010) et HSDPT de (Reddy.2000).

Le tableau IV.4 présente l'effet de l'indice de la loi de puissance sur les fréquences de vibration adimensionnel. A travers ce tableau, il est clair que la présente théorie de cisaillement raffinée (basée sur un nouveau champ de déplacement) fournis des résultats avec plus de précision que les autres modèles par rapport aux solutions de la théorie de cisaillement de ZSDPT.

Tableau IV.3 : Comparaison des trois premiers fréquences naturelles $\bar{\omega}$ de la plaque FGM pour différentes valeurs de rapport a/h et ($k = 1$).

a/h	Théories	1	% Erreur	2	% Erreur	3	% Erreur
5	ZSDPT*	5.6914	0.009	15.2996	0.288	25.9247	0.001
	HSDPT [#]	5.7123	0.357	15.3408	0.019	25.9257	0.005
	Hadji (2015)	5.8577	2.83	15.8029	2.906	25.5253	1.565
	Présente	5.6919	/	15.3437	/	25.9249	/
10	ZSDPT*	6.1863	0.001	30.6861	0.004	51.8665	0.009
	HSDPT [#]	6.1932	0.10	30.6850	0.008	51.7950	0.13
	Hadji (2015)	6.3718	2.90	31.6058	2.90	52.8224	1.81
	Présente	6.1864	/	30.6875	/	51.8660	/
20	ZSDPT*	6.3371	0.00	61.3744	0.001	103.7404	0.001
	HSDPT [#]	6.339	0.002	61.374	0.001	103.71	0.029
	Hadji (2015)	6.5269	2.90	63.2117	2.90	106.5471	2.63
	Présente	6.3371	/	61.3751	/	103.7402	/

[#]Résultats de réf (Reddy.2000) , * Résultats de réf (Dharan et al, 2010)

Tableau IV.4 : Effet de l'indice de la fraction volumique sur les fréquences fondamentales $\bar{\omega}$ de la plaque FGM avec $a/h=5$.

Indice de puissance k								
		$k =1$	2	3	5			
ZSDPT*		5.6914	5.6421	5.6571	5.6795			
HSDPT #		5.7123	5.6599	5.6757	5.702			
Hadji (2015)		5.8577	5.8357	5.8533	5.8558			
Présente		5.6919	5.6421	5.7659	5.7889			
Théories	$k =1$	% Erreur	2	% Erreur	3	% Erreur	5	% Erreur
ZSDPT*	5.6914	0.009	5.6421	0.00	5.6571	1.92	5.6795	1.92
HSDPT #	5.7123	0.357	5.6599	0.31	5.6757	1.58	5.702	1.52
Hadji (2015)	5.8577	2.83	5.8357	3.31	5.8533	1.49	5.8558	1.14
Présente	5.6919	/	5.6421	/	5.7659	/	5.7889	/

#Résultats de réf (Reddy.2000) , * Résultats de réf (Dharan et al, 2010)

Effet de rapport (a/h) , (a/b) et (E_m/E_c) des fréquences fondamentales sont représentés sur les figures IV.9, IV.10 et IV.11,

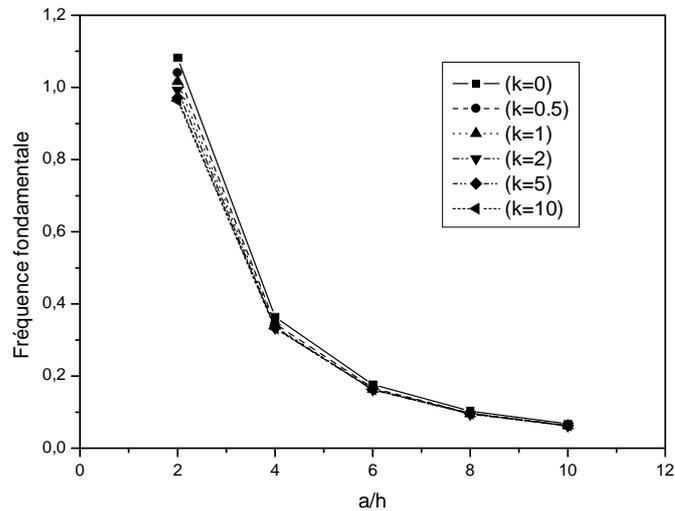


Fig.IV.9 : Fréquence adimensionnelle $\bar{\omega}$ en fonction du rapport a/h pour différentes indices de loi de puissance des plaques carrées en FGM.

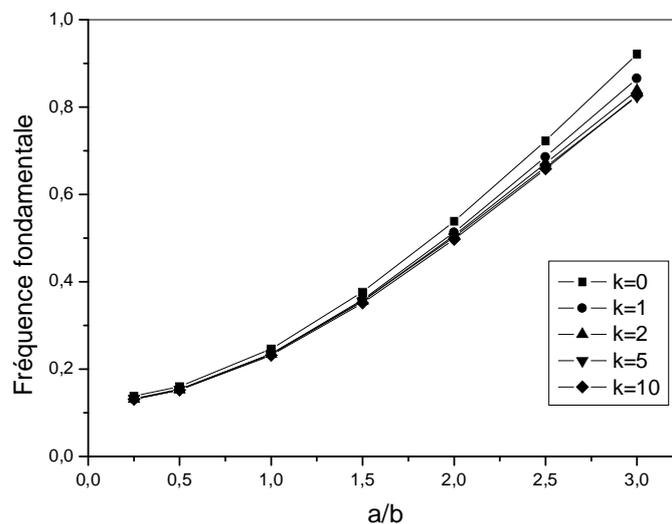


Fig. IV.10 : Fréquence adimensionnelle $\bar{\omega}$ en fonction du rapport a/b pour différentes indices de loi de puissance des plaques carrées en FGM.

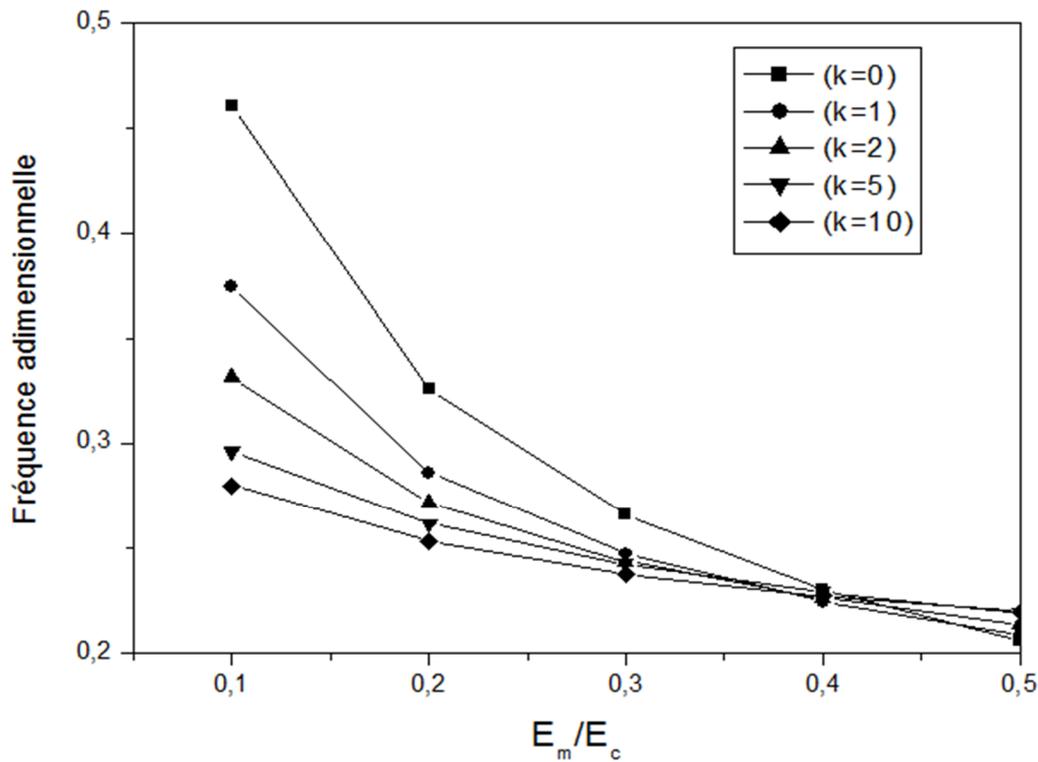


Fig. IV.11 : Fréquence adimensionnelle $\bar{\omega}$ en fonction du rapport E_m/E_c pour différentes indices de loi de puissance des plaques carrées en FGM avec $a/b=5$.

L'influence des rapports de la plaque est très claire sur la variation des fréquences de vibration. On remarque que dans la figure IV.9 que l'augmentation du rapport de dimensionnement a/h conduit à une diminution rapide des fréquences quel que soit la valeur de l'indice de la fraction volumique k .

Dans la figure IV.10 on voit une augmentation des fréquences de vibration avec l'augmentation de l'élanement de la plaque pour différente valeur de l'indice de la fraction volumique k . Dans la figure IV.11 l'augmentation du rapport (E_m/E_c) conduit à la diminution des fréquences de vibration. Toujours les plaques en céramique donnent les plus grandes valeurs des fréquences.

IV.3.Conclusion

Cette étude présente une nouvelle théorie de cisaillement de déformation raffinée pour l'analyse du comportement statique et dynamique des plaques fonctionnellement gradués.

Les solutions de Navier sont présentées pour analyser la flexion et la vibration libre des plaques FGM. Les contraintes et les déplacements sont calculés pour les plaques avec le mélange métal-céramique et on voit que la réponse est intermédiaire à celle du métal et la céramique. Par conséquent, les gradients de propriétés des matériaux jouent un rôle essentiel dans la détermination de la réponse des plaques FGM, on peut conclure que la présente théorie fournit de meilleures estimations pour les déplacements et les contraintes que celui d'une théorie généralisée de déformation de cisaillement d'ordre élevé comme les théories HSDPT de Reddy et ZSDPT et donne presque des solutions très proches avec celui de la théorie de cisaillement utilisé par Hadji et al (2015).

Toutes les études comparatives ont démontré que les déplacements et les contraintes obtenues en utilisant la nouvelle théorie de cisaillement raffinée d'ordre élevé (avec quatre inconnues) et d'autres théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé (avec cinq inconnues) sont presque identiques. Cette théorie est également utilisée pour la prédiction des fréquences fondamentales des plaques FGM. L'influence jouée par les rapports de dimensionnement et de l'élancement de la plaque est étudiés. La présente théorie de cisaillement fournit des résultats en excellent accord avec les résultats disponibles et donne une meilleure estimation que la théorie de Hadji. (2015) par rapport aux autres théories des plaques HSDPT et ZSDPT. En conclusion, on peut dire que la présente théorie proposé est précis et simple pour résoudre le comportement statique et dynamique des plaques FGM.

**CONCLUSION
GENERALE ET
PERSPECTIVES**

Conclusion générale

L'objectif de notre étude consiste à analyser le comportement des plaques en matériaux à gradients de propriétés sous l'effet du cisaillement transverse. La mise en évidence de l'effet du cisaillement transverse dans cette étude nous a permis de décrire avec une bonne précision les champs de contraintes et de déformations induites, pour cela nous traité:

- Les résultats obtenue par la théorie raffinée sont presque identiques avec ceux calculés à partir des théories de déformation de cisaillement.
- L'axe médian pour une plaque fonctionnellement graduée se déplace vers la surface riche en céramique.
- La flèche augmente avec l'augmentation de l'indice de puissance k .
- La flèche et les contraintes normales et tangentielles dépendent des géométries de la plaque et de l'indice de puissance k .
- Les contraintes de cisaillement ne sont pas paraboliques et les contraintes augmentent avec la diminution du rapport (a/b) de la plaque. la valeur maximale se produit à la partie supérieur de la plaque, et non pas au centre comme dans le cas des plaques homogènes.
- Il est montré que les fréquences fondamentales naturelles diminuées avec la diminution de la rigidité du matériau, qui est due à l'augmentation de l'indice de puissance k et avec l'augmentation du rapport a/h et a/b de la plaque.

En conclusion, on peut dire que la théorie de cisaillement des plaques raffinées proposée est exacte et simple pour la résolution du comportement de flexion et de vibration des plaques en FGM.

En perspective à ce travail, nous envisagerons d'étudier le problème de cisaillement, et d'utiliser de la nouvelle fonction raffinée pour les cas suivants.

- La prise en compte de l'effet de la température dans l'étude de la vibration.
- Prise en compte de la distribution graduelle arbitraire du matériau FGM.

- Utilisation de la théorie raffinée pour d'autres types d'appuis.
- Effet du cisaillement transverse sur le comportement mécanique des plaques sandwichs en matériaux à gradient de propriétés;
- Utilisée cette théorie pour analyser d'autre type des plaques telle que les plaques sandwichs.
- Il s'avère indispensable de recourir à la méthode des éléments finis qui permet de résoudre des problèmes plus compliqués comparativement à la méthode analytique.

REFERENCES
BIBLIOGRAPHIQUES

Références bibliographiques

- [Abdizadeh H.1997]** élaboration et caractérisation de composites « composites laminaires tri-couches à base d'alumine » thèse de doctorat INSA de Lyon 1997. 212 p.
- [Afaq.2003]** Un nouveau modèle raffiné pour les structures multicouches. In Comptes-rendus des 13 emes Journées Nationales sur les Composites, pages 289-292. Strasbourg, March 2003.
- [Ambartsumyan.1969]** Theory of anisotropic plate. Technomic Publishing Co, 1969.
- [Aydogdu.2005]** Metin Aydogdu, Vibration analysis of cross-ply laminated beams with general boundary conditions by Ritz method, International Journal of Mechanical Sciences 47 (2005) 1740–1755.
- [Benchour.2011]** « Vibration des structures composites en tenant compte de l'effet du cisaillement ».Thèse de Doctorat de l'université Djilali Liabes de Sidi Bel Abbes 2011.
- [Benchour.2009]** « Réhabilitation et renforcement des poutres au moyen des matériaux composites ». Thèse Magister en génie civil de l'université Mentouri, Constantine.
- [Bishop. 1993]** A, Lin, C.Y. NAVARATNAM, M. Rawlings.R.D MC. Chane a functionally graded material produced by a powder metallurgical process, journal of materials science letters 1993.
- [Bessaim 2013]** Bessaim, A, Houari .M, Megueni. A, Tounsi .A, Adda.B, « Analyse statique de la flexion des poutres ZrO₂/ Ti-6Al-4V en P-FGM », Nature & Technologie A-Sciences fondamentales et Engineering, n° 09, 2013.
- [Bachir 2015]** Bachir. B, « Contribution à l'Etude de la Stabilité des Plaques Epaissees en Composite sur Fondations Elastiques », Thèse de Doctorat de l'université Mohamed Boudiafd'Oran, 2015.

- [Cheng.2000]** Cheng ZQ, Batra BC. Exact correspondence between eigenvalues of membranes and functionally graded simply supported polygonal plate. *J Sound Vib* 2000; 229(4):879–95.
- [Dharan.2010]** Dharan, S., Syam Prakash, V., Savithri, S. (2010), "A Higher Order Shear Deformation Model for Functionally Graded Plates ", International Conference on Technological Trends (ICTT-2010), CET, Trivandrum, November 2010.
- [Hadji.2015]** M. Merazi 1, L. Hadji, T.H. Daouadji, Abdelouahed Tounsi and E.A. Adda Bedia, A new hyperbolic shear deformation plate theory for static analysis of FGM plate based on neutral surface position, *Geomechanics and Engineering*, Vol. 8, No. 3 (2015) 305-321.
- [Houari.2011]** « Vibration des structures composites en tenant compte de l’effet du cisaillement ».Thèse de Doctorat de l’université Djilali Liabes de Sidi Bel Abbes 2011.
- [Kirchhoff.1950]** Uber das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheibe. *Journal fur reine und angewandte Mathematik*, vol. 40, pages 51, 88, 1850.
- [Koizumi.1992]** The concept of FGM, ceramic transaction, functionally graded materials. *Functionally Graded Materials*, 34, 3-10.
- [Koizumi.1993]** The concept of FGM. *Ceramic Transactions, Functionally Gradient Materials*, 34(1), 3–10 (1993).
- [Larbi Chaht.2014]** Larbi Chaht, F., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Anwar Bég, O., Mahmoud, S.R. (2014), “Bending and buckling analyses of the functionally graded material (FGM) size-dependent nanoscale beams including thickness stretching effect” *Steel and Composite Structures*, (In press).

- [Liberescu.1967]** On the theory of anisotropic elastic shell and plates. Int J Solids Structures, vol. 3, pages 53, 68, 1967.
- [Mistler.1973]** High strength substrates produced by multiple layer casting technique, Am. Ceram. Soc. Bull. 1973 Vol .52 N° 11 p850-54.
- [Nguyen.2004]** Viet.Tung. Nguyen. « Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaques ». Thèse de doctorat de l'école nationale des ponts et chaussées ,2004.
- [Noor.1989]** Assesment of shear deformation theories for multilayered composite plates. Appl Mech Rev, vol. 42, no. 1, pages 1, 12, 1989.
- [Ould larbi.2013]** OULD LARBI LATIFA, thèse de Doctorat, « Etude comparative des différentes théories à ordre élevé pour la vibration libre des poutres FGM ».
- [Reddy.1984]** A simple higher-order theory for laminated composite plates. Jornal of Applied Mechanics, vol. 51, pages 745-752, 1984.
- [Reddy.1987]** A generalization of two-dimensional theories of laminated composite plate. Commun. Appl. Numer. Methods, vol. 3, pages 173,180, 1987.
- [Reddy.2000]** Analysis of functionally graded plates. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 47(1-3), 663–684 (2000).
- [Reissner.1945]** The e_ect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. J. Appl. Mech., vol. 12, pages 69, 77, 1945.
- [Reissner.1961]** E. reissner & y. stavsky. bending and stretching of certain types of hetero-geneous aelotropic elastic plate. J. appl.mech., vol. 28, page 402,408, 1961.
- [Steffes H D.1990]** DvorakM.Wewel. Plasma sprayed functionally graded materials-processing and application, in proceeding of the first international symposium on functionally gradient materials-Sedai Japan 1990.
- [Simsek.2010]** ŞİMŞEK, M., 2010b. Vibration analysis of a functionally graded beam under a moving mass by using different beam theories.

Composite Structures 92(4), 904–917.

[Tauratier.1991] An efficient standard plate theory. Engng Sci, vol. 29, no. 8, pages 901,916, 1991.

[Tanigawa.1995] Some basic thermo elastic problems for non homogeneous structural materials, Applied Mechanics Reviews, 48, 287–300.

[Whitney.1973] « Shear correction factors for orthotropic laminates under static loads» J.Applied Mechanics, Vol.40, pages 302-304, 1973.

[Zenkour.2006] Ashraf M. Zenkour, Department of Mathematics, Faculty of Education, Tanta University, Kafr El-Sheikh 33516, Egypt
Received 1 April 2004; received in revised form 1 February 2005; accepted 4 March 2005. Available online 29 April 2005. Abstract, Applied Mathematical Modelling 30 (2006) 67–84.

PROGRAMME MAPLE

Programme statique : les contraintes

```

> restart;
Ec:=380;Em:=70;rho11:=3800;rho22:=2707;m:=1;n:=1;pi:=3.1415926
54;nu:=0.30;a:=1;q0:=1;Qm:=1;u:=(1-nu)/2;E11:=380;E22:=70;
> k:=2;
> ah:=10;
> h:=a/ah;
> s:=4;
> b:=a/s;
> f:=(z*((5/4)-((5*z*z)/(3*h*h)))));
> g:=diff(f,z);
> V1:=((z/h)+(1/2))^k;
> E1:=(Ec-Em)*V1+Em;rho1:=(rho11-rho22)*V1+rho22;
> C11:=C22;C22:=E1/(1-(nu^2));C12:=nu*E1/(1-
(nu^2));C44:=E1/(2*(1+nu));C55:=E1/(2*(1+nu));C66:=E1/(2*(1+nu
));
> A11:=int(C11,z=-h/2..h/2);B11:=int(C11*z,z=-
h/2..h/2);D11:=int(C11*z^2,z=-h/2..h/2);B11s:=int(C11*f,z=-
h/2..h/2);D11s:=int(C11*z*f,z=-h/2..h/2);H11s:=int(C11*f^2,z=-
h/2..h/2);A12:=int(C11*nu,z=-h/2..h/2);B12:=int(C11*z*nu,z=-
h/2..h/2);D12:=int(C11*z^2*nu,z=-
h/2..h/2);B12s:=int(C11*f*nu,z=-
h/2..h/2);D12s:=int(C11*z*f*nu,z=-
h/2..h/2);H12s:=int(C11*f^2*nu,z=-h/2..h/2);A66:=int(C11*u,z=-
h/2..h/2);B66:=int(C11*z*u,z=-h/2..h/2);D66:=int(C11*z^2*u,z=-
h/2..h/2);B66s:=int(C11*f*u,z=-
h/2..h/2);D66s:=int(C11*z*f*u,z=-
h/2..h/2);H66s:=int(C11*f^2*u,z=-
h/2..h/2);A22:=A11;B22:=B11;D22:=D11;B22s:=B11s;D22s:=D11s;H22
s:=H11s;A44s:=int(C44*g^2,z=-h/2..h/2);A55s:=int(C44*g^2,z=-
h/2..h/2);
> alpha:=(m*pi)/a;beta:=(n*pi)/b;A1:=-1/(alpha^2);B1:=-
1/(beta^2);k1:=alpha^2;k2:=beta^2;I0:=int(rho1,z=-
h/2..h/2);I1:=int(rho1*z,z=-h/2..h/2);I2:=int(rho1*z*z,z=-
h/2..h/2);J1:=int(rho1*f,z=-h/2..h/2);J2:=int(rho1*f*z,z=-
h/2..h/2);K2:=int(rho1*f*f,z=-h/2..h/2);
> m11:=-I0;m12:=0;m13:=alpha*I1;m14:=-
J1*k1*A1*alpha;m21:=0;m22:=-I0;m23:=beta*I1;m24:=-
k2*B1*beta*J1;m31:=m13;m32:=m23;m33:=-I0-
I2*(alpha^2+beta^2);m34:=J2*(k1*A1*alpha^2+k2*B1*beta^2);m41:=
m14;m42:=m24;m43:=m34;m44:=-
K2*((k1*A1)^2*alpha^2+(k2*A1)^2*beta^2);
> S11:=-((A11*alpha^2)+(A66*beta^2));S12:=-
alpha*beta*(A12+A66);S13:=alpha*((B11*alpha^2)+(B12*beta^2)+(2
*B66*beta^2));S14:=alpha*((k1*B11s)+(k2*B12s)-
((k1*A1)+(k2*B1))*B66s*beta^2);S22:=-
((A66*alpha^2)+(A22*beta^2));S23:=beta*((B22*beta^2)+(B12*alph
a^2)+(2*B66*alpha^2));S24:=beta*((k2*B22s)+(k1*B12s)-
((k1*A1)+(k2*B1))*B66s*alpha^2);S33:=-

```

```

( (D11*alpha^4)+2*(D12+2*D66) * (alpha^2*beta^2) + (D22*beta^4) ) ; S3
4:=-

k1*(D11s*alpha^2+D12s*beta^2)+2*(k1*A1+k2*B1)*D66s*alpha^2*bet
a^2-k2*(D22s*beta^2+D12s*alpha^2) ; S44:=(-k1*(H11s*k1+H12s*k2) -
(k1*A1+k2*B1)^2*H66s*alpha^2*beta^2-k2*(H12s*k1+H22s*k2) -
(k1*A1)^2*A55s*alpha^2-((k2*B1)^2)*A44s*beta^2) ;
> with(linalg):
equ:=solve({S11*Um+S12*Vm+S13*Wm+S14*Xm=0,S12*Um+S22*Vm+S23*Wm
+S24*Xm=0,S13*Um+S23*Vm+S33*Wm+S34*Xm=-
Qm,S14*Um+S24*Vm+S34*Wm+S44*Xm=0},{Um,Vm,Wm,Xm});
> A:=subs(equ,Wm);
B:=subs(equ,Xm);
c:=subs(equ,Vm);
d:=subs(equ,Um);
> v0:=c*sin(alpha*x)*cos(beta*y);
u0:=d*cos(alpha*x)*sin(beta*y);
w0:=A*sin(alpha*x)*sin(beta*y);
> theta:=B*sin(alpha*x)*sin(beta*y);
gamma023:=k2*int(theta,y);
> zh:=-0.1;x:=a/2;y:=0;z:=h*zh;
gamma23:=g*gamma023;
> tau23:=C44*gamma23;
> taubaryz:=(h*tau23)/(q0*a);

```

Programme statique : les déplacements

```

> restart;
Ec:=380;Em:=70;rho11:=3800;rho22:=2707;m:=1;n:=1;pi:=3.1415926
54;nu:=0.30;a:=1;k:=0.2;q0:=1;Qm:=q0;u:= (1-
nu)/2;E11:=380;E22:=70;
> ah:=10;
> h:=a/ah;
> s:=1;
> b:=a/s;
> f:=(z*((5/4)-((5*z*z)/(3*h*h))));
> g:=diff(f,z)
> V1:=((z/h)+(1/2))^k;
> E1:=Em;
> C11:=C22;C22:=E1/(1-(nu^2));C12:=nu*E1/(1-
(nu^2));C44:=E1/(2*(1+nu));C55:=E1/(2*(1+nu));C66:=E1/(2*(1+nu
));
> A11:=int(C11,z=-h/2..h/2);B11:=int(C11*z,z=-
h/2..h/2);D11:=int(C11*z^2,z=-h/2..h/2);B11s:=int(C11*f,z=-
h/2..h/2);D11s:=int(C11*z*f,z=-h/2..h/2);H11s:=int(C11*f^2,z=-
h/2..h/2);A12:=int(C11*nu,z=-h/2..h/2);B12:=int(C11*z*nu,z=-
h/2..h/2);D12:=int(C11*z^2*nu,z=-
h/2..h/2);B12s:=int(C11*f*nu,z=-
h/2..h/2);D12s:=int(C11*z*f*nu,z=-
h/2..h/2);H12s:=int(C11*f^2*nu,z=-h/2..h/2);A66:=int(C11*u,z=-
h/2..h/2);B66:=int(C11*z*u,z=-h/2..h/2);D66:=int(C11*z^2*u,z=-
h/2..h/2);B66s:=int(C11*f*u,z=-
h/2..h/2);D66s:=int(C11*z*f*u,z=-
h/2..h/2);H66s:=int(C11*f^2*u,z=-
h/2..h/2);A22:=A11;B22:=B11;D22:=D11;B22s:=B11s;D22s:=D11s;H22
s:=H11s;A44s:=int(C44*g^2,z=-h/2..h/2);A55s:=int(C44*g^2,z=-
h/2..h/2);
> alpha:=(m*pi)/a;beta:=(n*pi)/b;A1:=-1/(alpha^2);B1:=-
1/(beta^2);k1:=alpha^2;k2:=beta^2;I0:=int(rho1,z=-
h/2..h/2);I1:=int(rho1*z,z=-h/2..h/2);I2:=int(rho1*z*z,z=-
h/2..h/2);J1:=int(rho1*f,z=-h/2..h/2);J2:=int(rho1*f*z,z=-
h/2..h/2);K2:=int(rho1*f*f,z=-h/2..h/2);
> m11:=-I0;m12:=0;m13:=alpha*I1;m14:=-
J1*k1*A1*alpha;m21:=0;m22:=-I0;m23:=beta*I1;m24:=-
k2*B1*beta*J1;m31:=m13;m32:=m23;m33:=-I0-
I2*(alpha^2+beta^2);m34:=J2*(k1*A1*alpha^2+k2*B1*beta^2);m41:=
m14;m42:=m24;m43:=m34;m44:=-
K2*((k1*A1)^2*alpha^2+(k2*A1)^2*beta^2);
> S11:=-(A11*alpha^2)+(A66*beta^2);S12:=
alpha*beta*(A12+A66);S13:=alpha*(B11*alpha^2)+(B12*beta^2)+(2
*B66*beta^2);S14:=alpha*((k1*B11s)+(k2*B12s)-
((k1*A1)+(k2*B1))*B66s*beta^2);S22:=
((A66*alpha^2)+(A22*beta^2));S23:=beta*(B22*beta^2)+(B12*alph
a^2)+(2*B66*alpha^2);S24:=beta*((k2*B22s)+(k1*B12s)-
((k1*A1)+(k2*B1))*B66s*alpha^2);S33:=
((D11*alpha^4)+2*(D12+2*D66)*(alpha^2*beta^2)+(D22*beta^4));S3

```

```

4:=k1*(D11s*alpha^2+D12s*beta^2)+2*(k1*A1+k2*B1)*D66s*alpha^2*
beta^2-k2*(D22s*beta^2+D12s*alpha^2);S44:=(-
k1*(H11s*k1+H12s*k2)-(k1*A1+k2*B1)^2*H66s*alpha^2*beta^2-
k2*(H12s*k1+H22s*k2)-(k1*A1)^2*A55s*alpha^2-
((k2*B1)^2)*A44s*beta^2);
> with(linalg):
equ:=solve({S11*Um+S12*Vm+S13*Wm+S14*Xm=0,S12*Um+S22*Vm+S23*Wm
+S24*Xm=0,S13*Um+S23*Vm+S33*Wm+S34*Xm=-
Qm,S14*Um+S24*Vm+S34*Wm+S44*Xm=0},{Um,Vm,Wm,Xm});
> A:=subs(equ,Wm);
> W1:=w0;
> A:=subs(equ,Wm);
> x:=a/2;y:=b/2;
> w0:=A*sin(alpha*x)*sin(beta*y);
> Wbar:=10*h^3*E11*W1/(a^4*q0);

```

Programme dynamique : les fréquences

```

> restart;
Ec:=200*10^9;E11:=Ec;E22:=Em;Em:=70*10^9;rho11:=5700;rho22:=27
02;nu:=0.3;m:=1;n:=1;a:=1;pi:=3.141592654;u:=(1-nu)/2;
> k:=0;
> ah:=2;
> h:=a/ah;
> S:=1;
> b:=a/S;
> f:=(z*((5/4)-((5*z*z)/(3*h*h)))));
> g:=diff(f,z);
> V1:=((z/h)+(1/2))^k;
> E1:=(Ec-Em)*V1+Em;rho1:=(rho11-rho22)*V1+rho22;
> C11:=C22;C22:=E1/(1-(nu^2));C12:=nu*E1/(1-
(nu^2));C44:=E1/(2*(1+nu));C55:=E1/(2*(1+nu));C66:=E1/(2*(1+nu
));
> A11:=int(C11,z=-h/2..h/2);B11:=int(C11*z,z=-
h/2..h/2);D11:=int(C11*z^2,z=-h/2..h/2);B11s:=int(C11*f,z=-
h/2..h/2);D11s:=int(C11*z*f,z=-h/2..h/2);H11s:=int(C11*f^2,z=-
h/2..h/2);A12:=int(C11*nu,z=-h/2..h/2);B12:=int(C11*z*nu,z=-
h/2..h/2);D12:=int(C11*z^2*nu,z=-
h/2..h/2);B12s:=int(C11*f*nu,z=-
h/2..h/2);D12s:=int(C11*z*f*nu,z=-
h/2..h/2);H12s:=int(C11*f^2*nu,z=-h/2..h/2);A66:=int(C11*u,z=-
h/2..h/2);B66:=int(C11*z*u,z=-h/2..h/2);D66:=int(C11*z^2*u,z=-
h/2..h/2);B66s:=int(C11*f*u,z=-
h/2..h/2);D66s:=int(C11*z*f*u,z=-
h/2..h/2);H66s:=int(C11*f^2*u,z=-
h/2..h/2);A22:=A11;B22:=B11;D22:=D11;B22s:=B11s;D22s:=D11s;H22
s:=H11s;A44s:=int(C44*g^2,z=-h/2..h/2);A55s:=int(C44*g^2,z=-
h/2..h/2);
> alpha:=(m*pi)/a;beta:=(n*pi)/b;A1:=-1/(alpha^2);B1:=-
1/(beta^2);k1:=alpha^2;k2:=beta^2;I0:=int(rho1,z=-
h/2..h/2);I1:=int(rho1*z,z=-h/2..h/2);I2:=int(rho1*z*z,z=-
h/2..h/2);J1:=int(rho1*f,z=-h/2..h/2);J2:=int(rho1*f*z,z=-
h/2..h/2);K2:=int(rho1*f*f,z=-h/2..h/2);
> m11:=-I0;m12:=0;m13:=alpha*I1;m14:=-
J1*k1*A1*alpha;m21:=0;m22:=-I0;m23:=beta*I1;m24:=-
k2*B1*beta*J1;m31:=m13;m32:=m23;m33:=-I0-
I2*(alpha^2+beta^2);m34:=J2*(k1*A1*alpha^2+k2*B1*beta^2);m41:=
m14;m42:=m24;m43:=m34;m44:=-
K2*((k1*A1)^2*alpha^2+(k2*A1)^2*beta^2);
> S11:=-((A11*alpha^2)+(A66*beta^2));S12:=-
alpha*beta*(A12+A66);S13:=alpha*((B11*alpha^2)+(B12*beta^2)+(2
*B66*beta^2));S14:=alpha*((k1*B11s)+(k2*B12s)-
((k1*A1)+(k2*B1))*B66s*beta^2);S22:=-
((A66*alpha^2)+(A22*beta^2));S23:=beta*((B22*beta^2)+(B12*alph
a^2)+(2*B66*alpha^2));S24:=beta*((k2*B22s)+(k1*B12s)-
((k1*A1)+(k2*B1))*B66s*alpha^2);S33:=-
((D11*alpha^4)+2*(D12+2*D66)*(alpha^2*beta^2)+(D22*beta^4));S3

```

```

4:=-
k1*(D11s*alpha^2+D12s*beta^2)+2*(k1*A1+k2*B1)*D66s*alpha^2*bet
a^2-k2*(D22s*beta^2+D12s*alpha^2);S44:=(-k1*(H11s*k1+H12s*k2)-
(k1*A1+k2*B1)^2*H66s*alpha^2*beta^2-k2*(H12s*k1+H22s*k2)-
(k1*A1)^2*A55s*alpha^2-((k2*B1)^2)*A44s*beta^2);
> with(linalg):
> H:=array(1..4,1..4,[[S11-w**2*m11,S12,S13-w**2*m13,S14-
w**2*m14],[S12,S22-w**2*m22,S23-w**2*m23,S24-w**2*m24],[S13-
w**2*m13,S23-w**2*m23,S33-w**2*m33,S34-w**2*m34],[S14-
w**2*m14,S24-w**2*m42,S34-w**2*m34,S44-w**2*m44]]);
> det(H);
> equs:=det(H);
> W:=solve(equs,w);
> S:=8:
> MIN:=abs(W[1]):
> for i from 1 to S-1 do
if MIN < abs(W[i+1]) then
MIN:=MIN;
else
MIN:=abs(W[i+1]);
end if;
end do;
W1:=MIN;
> wbar:=W1*h*sqrt(rho22/E22);
> evalf(wbar);

```