



FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES
DÉPARTEMENT GÉNIE CIVIL

Mémoire de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme de Master

Spécialité : Génie Civil

Option : O.A.I

Présenté par :

REDJALA MIMOUNA

Sujet du mémoire

**APPLICATION DE LA METHODE DES
DIFFERENCES FINIES AU CALCUL DES POUTRES
EN FLEXION .**

Soutenu publiquement le 06/2017.devant le jury composé de :

| | | |
|-----|----------------|------------|
| Mr, | Y.TLIDJI | Président |
| Mr, | H.H. ABEDLAZIZ | Rapporteur |
| Mr, | L.HADJI | Examineur |
| Mr, | K.DRAICHE | Examineur |
| Mr, | Z.KHELIFA | Examineur |

PROMOTION : 2016-2017

Remerciements

*Avant tout propos, nous remercions **ALLAH** le tout puissant qui nous a donné la sagesse et la santé de faire ce modeste travail.*

Nous remercions tout particulièrement Monsieur H.H. ABEDLAZIZ qui par sa patience, son expertise et ses directives, nous a permis de persévérer dans la bonne voie jusqu'au couronnement final.

Mes remerciements s'adressent également à tous les membres du jury pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de juger mon travail.

Merci à toute personne qui a participé de près ou de loin pour l'accomplissement de ce modeste travail.

Dédicaces

*Je dédie ce modeste travail à celle qui m'a donné la vie, la source de tendresse, ma raison de vivre, à ma très chère mère **Kheira**.*

*A qui m'encourager et faciliter le chemin de réussite mon cher père **Ahmed**.*

A toutes ma famille, mes cousins et cousines.

A mes chères amis et collègues.

Et en fin à tout qui m'aider de réussir ce travail.

REDJALA MIMOUNA

Résumé

Le principal objectif de ce travail est de faire une application de la méthode des différences finies sur les poutres en flexion afin de faire une comparaison et une vérification avec la méthode analytique. Pour ce faire, un calcul analytique basé sur la théorie des poutres a été mené à l'extraction des expressions de la flèche, dans le but de les développer par la méthode des différences finies. Le modèle numérique a été fait en utilisant le code de calcul numérique Maple6.

Mots clés : Méthode des différences finies, Théorie des poutres, Poutres, Flexion, Maple.

Abstract :

The main objective of this work is to apply the method of finite differences on the beams in order to make a comparison and a verification with the analytical method. to do this an analytical calculation based on the beam theory has been led of the expressions of the arrow, in order to developpe them by the method of finite differences .The numerical model was made using the numerical calculation code **Maple6**.

Keywords : method of finite differences, beams theory, binding, bean, maple.

الملخص

الهدف الرئيسي من مشروع هذه المذكورة هو تطبيق طريقة الفروق المحددة على الحزم المنحنية. وهذا من اجل المقترنة والتأكيد مع الطريقة النظرية واعتمد ذلك على حساب نظري يتضمن نظرية الحزم والتي تؤ دي الى استخراج عبارات الانحناء بهدف **Maple 6** برنامج تطويرها بتطبيق نظرية الفروق المحددة. بحيث تم الاعتماد على Maple .

الكلمات المفتاحية : طريقة الفروق المحددة، نظرية الحزم، الحزم، الانحناء، Maple.

Table de matières

| | |
|---------------------------------------|-----|
| RESUME..... | i |
| ملخص..... | ii |
| ABSTRACT..... | iii |
| TABLE DE MATIERES..... | iv |
| LISTE DES FIGURE ET DES TABLEAUX..... | vii |
| NOTATIONS..... | x |
| INTRODUCTION..... | 1 |

Chapitre 1 : Généralités sur les poutres en flexion

| | |
|--|----|
| I.1. Introduction..... | 03 |
| I.2. Découvres des poutres..... | 03 |
| I.3. Les rôles des poutres..... | 04 |
| I.4. Les types de poutres..... | 05 |
| I.5. Résistance des matériaux..... | 06 |
| I.5.1 But de résistance des matériaux..... | 06 |
| I.5.2. La flexion..... | 07 |
| I.5.2.1. Hypothèses..... | 07 |
| I.5.3 Flexion simple..... | 08 |
| I.5.3.1 La flèche..... | 08 |
| I.5.3.2 Etude de la déformation..... | 08 |
| I.5.3.2.1 Equation d'équilibre..... | 09 |
| I.5.3.3 Modèle de Bernoulli..... | 09 |
| I.6 Flexion des poutres..... | 10 |
| I.6.1 Poutres en stratifié symétrique à section rectangulaire..... | 11 |
| I.6.2 poutre étroite (rapport b/h est faible)..... | 12 |
| I.6.3 Quelques exemples sur flexion des poutres..... | 13 |
| I.7 Conclusion..... | 17 |

Chapitre 2 : Synthèse bibliographique sur la méthode des différences finies

| | |
|---|----|
| II.1 Introduction..... | 18 |
| II.2 Définition..... | 18 |
| II.2.1 Principes généraux des méthodes des numériques sur Ordinateur..... | 18 |
| II.2.2 Principe de la méthode des différences finies..... | 19 |
| II.3 Formules d'approximation de dérivées par différences divisées en dimension 1..... | 19 |
| II.3.1 Sur la nécessité d'approcher numériquement des dérivées pour construire un schéma numérique..... | 19 |
| II.4. Un premier problème aux limites et sa discrétisation par différences finies..... | 21 |
| II.5. Conclusion..... | 24 |

Chapitre 3 :

| | |
|---|----|
| III.1 Introduction..... | 26 |
| III.2 Calcul analytique..... | 26 |
| III.3 Solution numérique par la méthode des différences finies..... | 28 |
| III.4. Traitement..... | 29 |
| III.5. Etapes de calcul numérique..... | 30 |
| III.5.1 Calcule des moments..... | 30 |
| III.5.2 Calcul des flèches..... | 32 |
| III.5.3 Calcul des contraintes..... | 33 |

| | |
|---|-----------|
| III.6. Présentations des résultats des moments et les flèches due la méthode des différences finies avec logiciel Maple6 | 34 |
| III.7 Conclusion | 37 |
| CONCLUSON GENERAL | 38 |
| ANEX..... | 39 |
| REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES..... | 63 |

Liste des figures et des tableaux

Liste des figures

Introduction

| | |
|------------------|----|
| Figure I.1 | 01 |
|------------------|----|

Chapitre 1 : Généralités sur les poutres en flexion

| | |
|--|----|
| Figure I.1 : Des poutres en bois..... | 04 |
| Figure I.2 : poutre en flexion..... | 05 |
| Figure I.3 : Modèle des poutres | 07 |
| Figure I.4 : Flexion des poutres | 07 |
| Figure I.5.Fibre moyenne d'une poutre | 10 |
| Figure I.6 : Poutre reposant sur deux appuis avec charge concentrée au milieu..... | 14 |
| Figure I.7 : Poutre reposant sur deux appuis avec charge uniformément répartie..... | 15 |
| Figure I.8 : Poutre encastree supportant une charge concentrée à une extrémité | 16 |

Chapitre II : Synthèse bibliographique sur la méthode des différences finies

| | |
|--|----|
| Figure. II.1. Maillages uniformes en dimension 1 et dimension 2 | 21 |
| Figure. II.2. Déformation $u(x)$ d'une barre élastique fixée sur ses bords, et chargée sous l'action d'une force extérieure $f(x)$ | 22 |

Chapitre III : Calcul numérique des poutres en flexion par la méthode des différences

finies

| | |
|--|----|
| Figure.III.1 Poutre simplement appuyée | 29 |
| Figure.III.2.Modèle numérique avec $nt = 32$ | 33 |
| Figure.III.3.Diagramme des moments | 34 |
| Figure.III.4.Diagramme des flèches..... | 35 |
| Figure.III.5.Diagramme des contraintes..... | 36 |

Liste des tableaux

Chapitre III : Calcul numérique des poutres en flexion par la méthode des différences

finies

| | |
|--|----|
| Tableau(III.1) Présentation des résultats des moments ($M(x = 0) = 0$) , ($M(x = l) = 0$).... | 34 |
| Tableau (III.2) Présentation des résultats des flèches ($w(x = 0) = 0$) , ($w(x = l) = 0$)..... | 35 |
| Tableau (III.3) . Présentation des résultats de la distribution des contraintes suivant la hauteur de la poutre en $(x = \frac{l}{2})$ | 36 |

Notations

Notation

| | |
|---|---|
| M.D.F : | Méthode des différences finies. |
| \int : | Intégrale |
| $\frac{\partial}{\partial x}$: | Dérivée partielle par rapport à x. |
| [] : | Matrice. |
| { } | Vecteur colonne. |
| [] ^T | Matrice transposée. |
| x, y, z | Coordonnées cartésiens. |
| u, v | Déplacements suivant les directions x et y et z respectivement. |
| $\theta_z,$ | Rotation dans le plan |
| $\theta_x,$ | Rotation autour de x. |
| θ_y | Rotation autour de y. |
| K | Courbures de flexion |
| M_x, M_y, M_{xy} | Moments de flexion et de torsion |
| h | Épaisseur pour les poutres |
| $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ | Déformations directes suivant x et y et z respectivement. |
| $\sigma,$ | Contrainte normal suivant les directions , y . |
| $E.$ | Module de Young. |
| I | Moment de L'inertie. |
| w | La flèche. |
| [A] | La matrice de connectivité des éléments. |

INTRODUCTION GENERALE

La poutre est une barre, un élément longiligne utilisé en conception de structures et en construction. Selon sa localisation et sa fonction, la poutre peut se retrouver appelée de plusieurs manières. La figure ci-dessous présente un grand nombre de barres utilisées pour des fonctions différentes, toutes utilisent le MODELE DE LA POUTRE.

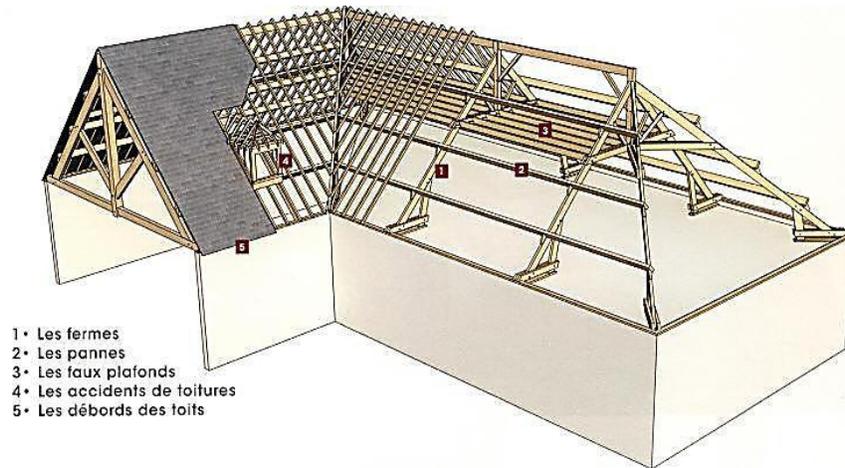


Figure 1 : Modèles des poutres. [1]

Considérons une poutre reposant sur deux appuis soumis à des charges verticale. Après déformation, cette poutre accuse un flèche (déplacement vertical des différents points, d'où le nom de flexion) et on constate que les fibres situées en partie supérieure sont sollicitées en compression tandis que celles qui sont situées en partie inférieure sont sollicitées en traction. Entre ces deux régions, il existe une fibre qui n'est ni tendue ni comprimée : c'est la fibre neutre.

La flexion des poutres est la déformation d'un objet qui se traduit par une courbure ; dans le cas d'une poutre, elle tend à rapprocher les deux extrémités de la poutre. Le tracé de ses courbures nécessite la résolution de certains systèmes d'équations d'où vient la méthode des différences finies la technique courante de recherche de solutions approchées d'équations aux dérivées partielles qui consiste à résoudre un système de relations (schéma numérique) liant les valeurs des fonctions inconnues en certains points suffisamment proches les uns des autres.

Notre travail est organisé en trois chapitres :

- ✓ **Le chapitre 1** est une présentation générale sur les poutres en flexion.
- ✓ **Le chapitre 2** est une présentation de la méthode des différences finies.

- ✓ **Le chapitre 3** est consacré pour l'application de la méthode des différences finies dans la résolution des équations des poutres en flexion avec deux méthodes de calcul : analytique et numérique a l'aide d'un code de calcul **Maple 6**

Chapitre I

Généralités sur les poutres en flexion

I.1 Introduction :

Dans ce chapitre on présente quelques généralités sur les poutres en flexion. D'abord une explication sur la découverte des poutres à travers les siècles, ensuite un aperçu sur les rôles, les types des poutres et enfin on consulte les lois de la résistance des matériaux et particulièrement les lois de la flexion des poutres.

I.2 Découvertes des poutres :

La mécanique des structures a pour but de rechercher les meilleures formes et dimensions à donner aux éléments d'une construction. Pour lui permettre de résister aux actions qui la sollicitent d'une manière aussi économique que possible. Les structures minces sont pour cela utilisées largement, au vu de leur excellente capacité à supporter et transmettre les sollicitations, couplée à une masse réduite.

-Une poutre est un type de structure mince très employé est un objet à la forme élancée (l'une des dimensions est très grande par rapport à l'autre); de section constant ou qui varie progressivement et ayant une fibre moyenne rectiligne ou à fort rayon de courbure.

-Une poutre est une pièce mécanique de forme ou d'enveloppe convexe parallélépipédique ; conçue pour résister à la flexion.

-Elle est placée en générale en position horizontale ; ou elle sert alors à supporter des charges au-dessus du vide ; les poids de la construction et du mobilier ; et à les transmettre sur le côté aux piliers ; colonnes ou aux murs sur lesquels elle s'appuie.

-La poutrelle est une poutre de faible section (moins de 20 cm d'âne).

-Une poutre est à l'origine un produit du sciage du bois dans la section est carrée ou sensiblement carrée, le côté d'une poutre est supérieur à 120 mm ; l'ensemble des poutres assemblées constitue la poutraison.

-La poutre visible est un élément d'architecture traditionnel dans les bâtisses où l'apparat est important. Aussi bien en architecture classique que moderne ; ses formes sont alors en générale travaillées donnant un aspect soigné ; voire sculpté ; pour par exemple former une ornementation ou un rythme de plafond ; les poutres de structure ne sont parfois qu'une partie renforcée par une

armature dans un élément de construction (par exemple dans un planches pour soutenir une cloison).

1. En 1638, Galilée publie un traité de mécanique dans lequel il analyse le comportement d'une poutre en bois de section rectangulaire encastrée dans un mur et soumise à un poids en son extrémité. Il donne les premières analyses de la résistance des matériaux. «Une poutre est un élément longiligne dont la section transversale varie peu dans sa longueur ; On l'obtient par déplacement d'une section le long d'une courbe. les poutres peuvent avoir des sections de forme très variées »[2].le modèle représentant la poutre de Galilée est une barre soumise à une force ponctuelle.

2. Dans l'architecture moderne du XX^e siècle les poutres sont des éléments de béton armé coulés sur place avec leur ferrailage, puis dans la deuxième moitié du XX^e siècle ,des poutres préfabriqués, coulés au sol hors-place , le système d'industrialisation de la construction individuelle a abouti au système .



Figure I.1 : Des poutres en bois

I.3 Les rôles des poutres :

Les poutres supportent les lambourdes pour faire le plancher entre murs pignons et murs log pans ou murs de refend. Elles peuvent servir d'ossature simple supportant les chevrons pour faire la toiture .Dans une charpente de toit composé ; poutre désigne surtout les arbalétriers. Les poutres ont servi dans les constructions de linteau à la place des pierres massives ; antérieurement aux arcs ; au-dessus des portes et fenêtres dans leurs baies. Elles servent de

structure de balcon en tant que poutres de plancher prolongées et débordantes à l'extérieur du bâtiment dans l'architecture du XVII^e siècle.

Les poutres précontraintes ; pourvues de câbles de précontraintes incorporés et tendus avant la prise du béton ; sont souvent utilisées lorsqu'il est nécessaire d'atteindre de grandes portées ou de supporter d'importantes charges. Le bois a aussi fait son retour avec le lamellé-collé. En construction ; le concept de poutre a , en premier lieu ; donné les fermes de la charpente ; poutres composées utilisées différemment de la conception habituelle des poutres ; l'utilité est ici la poutre versante et non le support horizontales ; le concept s'est étendu jusqu'à l'édification de grands caissons en métal et béton par exemple des bâtiments dont le premier étage surélevé au travers d'une rue constitue à lui seul une poutre à caisson dont les âmes sont percées des baies de fenêtre ; leurs allèges étant calculées et fabriquées en un assemblage de tirant renforcé en partie basse d'âme de poutres-cloisons ; et exemple extrême ; l'arche de la défense.

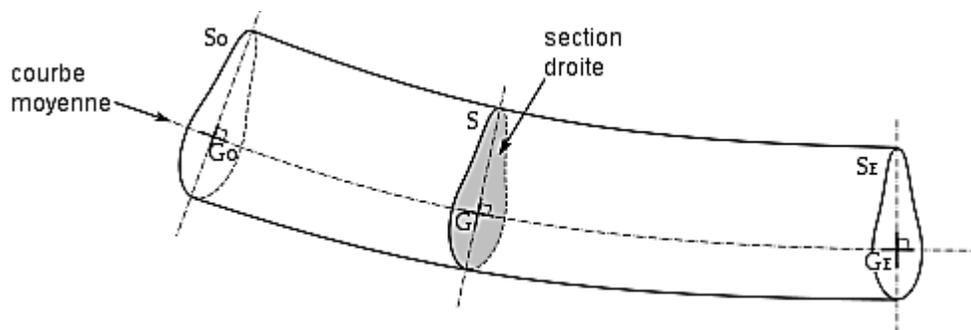


Figure I.2 : poutre en flexion.

I.4 Les types de poutres

les principaux types de poutres sont :

- Les poutres triangulées aluminium ou acier.
- Les poutres carrées aluminium ou acier.

- Les poutres sont classées en fonction de la distance entre membrures (par exemple ; une poutre de 500 a une distance entre deux membrures de 50 cm). Une poutre triangulée peut travailler pointe dirigée vers le haut ou vers le bas. On utilise des poutres pour plusieurs raisons :

*Ce sont des éléments qu'on peut fabriquer en usine ; transporter et assembler sur site pour réaliser de grandes structures.

*On peut leur donner de nombreuses géométries en modifiant la courbe porteuse (ligne droite ; courbes complexes)

* On peut utiliser diverses sections droites, et faire varier la section le long de la ligne moyenne.

*On peut utiliser un modèle de calcul simplifié très efficace pour modéliser leur comportement,

Sous réserve qu'on respecte plusieurs hypothèses. Pour étudier une poutre il faut :

* Etudier la géométrie de la courbe moyenne qui relie les centres de gravité des sections .Cette courbe peut être droite ou courbe mais son rayon de courbure est grand devant sa longueur.

* vérifier que le matériau est homogène et isotrope .et respecter les hypothèses de Navier et Bernoulli.

* vérifier que la dimension des sections est petite devant la longueur de la courbe moyenne.

* les sections droites restent planes et se déforment librement dans leur plan.

* la variation des déformations de la section le long de la poutre est très petite.

I.5 Résistance des matériaux

I.5.1 But de résistance des matériaux :

La résistance des matériaux est l'étude de la résistance et de la déformation des solides (arbres de transmission, bâtiments, fuséesetc.) dans le but de déterminer ou de vérifier leurs dimensions afin qu'ils supportent les charges dans des conditions de sécurité satisfaisantes et au meilleur coût (optimisation des formes ; des dimensions des matériaux.....).



Figure I.3 : Modèle des poutres

I.5.2 La flexion :

La flexion est la déformation d'un objet qui se traduit par une courbure ; dans le cas d'une poutre, elle tend à rapprocher les deux extrémités de la poutre. Il existe plusieurs types de flexions (pure ; plane ; déviée). Nous limiterons notre étude au cas de la flexion plans simple

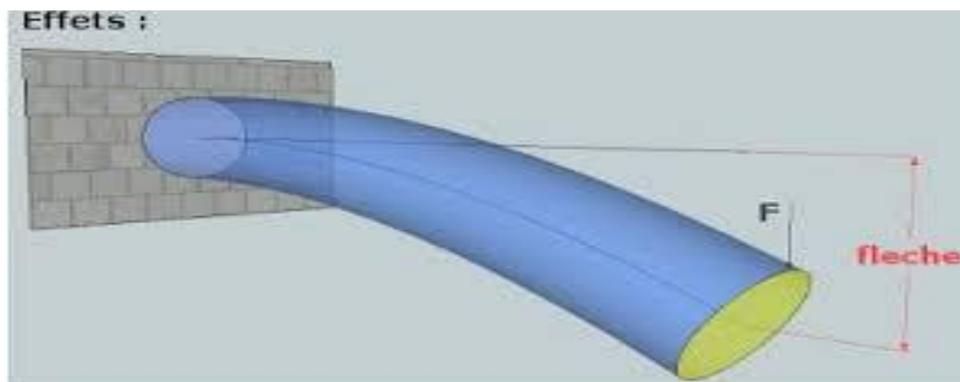


Figure I.4 : Flexion des poutres

I.5.2.1 Hypothèses :

La flexion simple nous amène à supposer que :

- La ligne moyenne de la poutre est rectiligne.
- La section droite de la poutre est rectiligne.
- La poutre admet un plan de symétrie longitudinal.
- Toutes les forces appliqués à la poutre sont disposées perpendiculairement à la ligne moyenne et dans le plans de système longitudinal (ou symétriquement par ra rapport à

celui-ci) les forces appliquées sont soit concentrées en un point ; soit réparties suivant une loi déterminée.

- Une poutre est sollicitée en flexion plane simple lorsque le système des forces extérieures se réduit à un système coplanaire et que toutes les forces sont perpendiculaires à la fibre moyenne.

I.5.3 Flexion simple :

C'est le cas où les sollicitations dans une section s'expriment sous la forme du torseur :

$$\begin{cases} V(x) \\ M(x) \end{cases}$$

Dans ce cas ; on mettra en évidence par le calcul l'effet de l'effort tranchant associé à celui du moment fléchissant.

I.5.3.1 La flèche :

La flèche est proportionnelle à l'effort F appliqué et ceci quel que soit le point D choisi, pour une même valeur de F , la flèche est maximum lorsque D est milieu de la poutre.

En effectuant l'essai avec différentes poutres, que la flèche en D est inversement proportionnelle au moment quadratique I_{GZ} de la section.

- Les fibres longitudinales situées au-dessus de la ligne moyenne se raccourcissent et celles situées en dessous de la ligne moyenne s'allongent.
- Les fibres appartenant au plan $(G^* Z)$ n'en changent pas de longueur.
- Les allongements et raccourcissements relatifs sont proportionnels à la distance de la fibre considérée au plan $(G * Z)$.
- les sections planes normales aux fibres restent planes et normales aux fibres après déformation.

I.5.3.2 Etude de la déformation

Cette étude permet de donner l'équation de la déformée de la poutre sous la forme $y=f(x)$. Elle est principalement basée sur la résolution de l'équation différentielle suivante :

$$MF = EIY .$$

Il faut alors procéder à deux intégrations successives. Les constants d'intégration s'obtiennent grâce aux conditions aux limites (appuis ; encastremets).

I.5.3.2.1 Equation d'équilibre:

La poutre une force et un couple répartis d'intensité linéique respectivement py et mz . L'équilibre de poutre compris entre les sections droites d'abscisses x et $x + dx$ s'écrit au premier ordre près [3] :

$$-T_y + T_x + I_x + \frac{dT_y}{dx} dx + p_y dx = \left(\int_A p \ddot{v} \cdot dA \right) dx = pA\ddot{u} dx \quad (I.1)$$

$$\begin{aligned} -Mf_x + Mf_z + \frac{dMf_z}{dx} dx + dx T_y + m_z dx &= \left(\int_A -yp\ddot{u} dA \right) dx \\ &= pI_z \ddot{\theta}_z dx \end{aligned}$$

$$\ddot{u} = \frac{d^2 u}{dx^2} = -y \ddot{\theta}_z ; \quad \ddot{v} = \frac{d^2 v}{dy^2} ; \quad \ddot{\theta}_z = \frac{d^2 \theta_z}{dx^2}$$

Après simplification ; on obtient les deux équations d'équilibre :

$$\frac{dT_y}{dx} + p_y = pA\ddot{u} \quad (I.2)$$

$$\frac{dMf_z}{dx} + T_y + m_z = pI_z \ddot{\theta}_z \quad (I.3)$$

Ces équations s'écrivent en fonction des déplacements :

$$* \frac{d}{dx} \left(GAK_y \left(\frac{dv}{dx} - \theta_z \right) \right) + p_y = pA\ddot{u}$$

$$* \frac{d}{dx} \left(EI_z \frac{d\theta_z}{dx} \right) + GAK_y \left(\frac{dv}{dx} - \theta_z \right) + m_z = pI_z \ddot{\theta}_z$$

I.5.3.3 Modèle de Bernoulli :

Le modèle ci-dessus est dit modèle de Timoshenko ; Si la poutre est Tongue ; on admet l'hypothèse de Navier – Bernoulli. La section droite reste normale à la déformée de la fibre moyenne d'où la relation cinématique :

$$\theta_z = \frac{dv}{dx} \quad (\text{I.4})$$

Dans ce cas ; la relation de comportement s'écrit :

$$Mf_z = EI_z \frac{d^2v}{dx^2} \quad (\text{I.5})$$

Remarque :

Si le problème est stationnaire ; la flèche $v(x)$ est solution de l'équation : $EI_z \frac{d^4v}{dx^4} = p_y$

I.6 Flexion des poutres :

Les poutres sont les pièces de base des structure d'où l'importance du développement de la méthode d'analyse de son comportement, Au point de vue pratique ; une poutre doit avoir une longueur très supérieure à sa largeur $L \gg b$, il est présenté dans ce chapitre. L'étude de la flexion des poutres constituées de stratifiés de composites.

- Afin de faire l'étude des poutres en stratifié de composites ; il est important de passer en revue l'analyse des poutres en matériau isotrope.

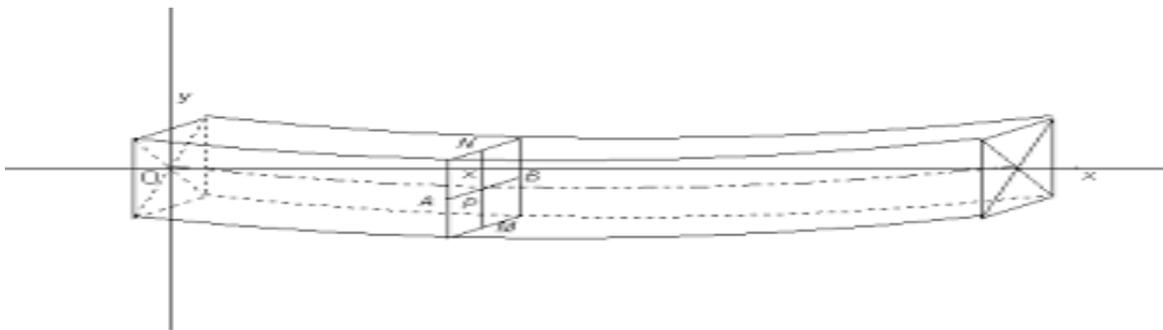


Figure I.5.Fibre moyenne d'une poutre

La flèche w d'une poutre en flexion est obtenue à partir de la relation avec le moment appliqué M et la rigidité en flexion $J=EI$. [4]

$$EI \frac{d^2w}{dx^2} = -M \quad (\text{I.6})$$

Ou E est le module d'élasticité du matériau et I désigne le second moment de la section de la poutre. La courbure est définie comme :

$$K_x = \frac{1}{p_x} = -\frac{d^2 w}{dx^2} \quad (I.7)$$

Les deux relations est valide que pour les matériaux isotropes ; dans le cas des poutres en stratifié de composites ; le module d'élasticité de chacun des plis varie selon le matériau et l'orientation des renforts. Par conséquent afin de calculer la flèche d'une poutre en stratifié de matériaux composites il est nécessaire d'établir sa rigidité apparente $J_a = E_a I$

I.6.1 Poutres en stratifié symétrique à section rectangulaire :

L'équation constitutive d'un stratifié symétrique en flexion cylindrique selon la théorie classique des stratifiés s'écrit :

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_x \\ M_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{12} & D_{22} & D_{23} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} k_x^0 \\ K_y^0 \\ K_{xy}^0 \end{bmatrix}.$$

Ou les courbures sont définies comme :

$$K_x^0 = -\frac{d^2 w_0}{dx^2} ; K_y^0 = -\frac{d^2 w_0}{dy^2} ; K_{xy}^0 = \frac{2d^2 w_0}{dxdy} \quad (I.8)$$

Les courbures peuvent s'obtenir en inversant l'équation.

$$\begin{bmatrix} K_x^0 \\ K_y^0 \\ K_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D'_{11} & D'_{12} & D'_{13} \\ D'_{12} & D'_{22} & D'_{23} \\ D'_{13} & D'_{23} & D'_{33} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix}$$

Ou D'_{ij} sont les éléments de la matrice inverse de la matrice de rigidité en flexion –torsion $[D]$ du stratifié de composites.

Il Ya deux cas distincts à considérer : les poutres étroites et les poutres larges. la distinction est basée sur le rapport b/h de la section ; le coefficient de poisson implique une distorsion transversale de la section : Cet effet est localisé seulement aux bords d'une poutre qui comporte comme une plaque.

I.6.2 poutre étroite (rapport b/h est faible) :

Dans le cas d'une flexion causée par un moment M suivant l'axe X ($M_x = \frac{M}{b} \neq 0$).

Alors :

$$M_y = M_{xy} = 0 . \quad (I.9)$$

Les équations conduisent à :

$$K_x^0 = -\frac{d^2 w_0}{dx^2} = D_{11} M_x$$

$$K_y^0 = -\frac{d^2 w_0}{dy^2} = D_{12} M_x$$

$$K_{xy}^0 = -\frac{d^2 w_0}{dx dy} = D_{16} M_x$$

Remarque :

Les courbures K_y sont fonction du M_x selon la relation. Elles dépendent alors de la variable y . cependant l'effet de la flexion et de la torsion induite est négligeable lorsque le rapport L/b est suffisamment élevé, c'est pourquoi la théorie des poutres considère que la flèche n'est fonction que de x pour une poutre dans le rapport L/b est élevé : $W_0 = W_0(x)$.

$$\text{D'où : } -\frac{d^2 w_0}{dx^2} = -K_x^0 = -D'_{11} M_x = -D'_{11} \frac{M}{b}$$

L'expression du module d'élasticité en flexion (Ef_x) du stratifié est obtenue en comparant les relations.

$$K_x^0 = \frac{1}{p_x}$$

$$\text{Et que } \frac{1}{p_x} = \frac{M}{Ef_x I_{yy}} = \frac{b M_x}{Ef_x \frac{bh^3}{12}} = D_{11} M_x$$

$$I_{yy} = \frac{bh^3}{12}$$

Où le module de rigidité en flexion devient : $Ef_x = \frac{12}{D_{11} h^3}$

Et la rigidité apparente est : $J_a = Ef_x I = \frac{b}{D_{11}}$

Sachant que. $\frac{d^2 w_0}{dx^2} = -\frac{M}{Efl_{yy}}$.

La flèche de la poutre en stratifié est déterminée en utilisant sa rigidité apparent à la place de la rigidité (EI) d'une poutre isotrope. par conséquent ; Les expressions de la flèche pour les poutres isotropes que se trouvent dans les références disponibles sont applicables pour les poutres en stratifiés de composite à condition que la rigidité soit remplacé par la rigidité apparente du stratifié .

- Etant donné que les déformations en membrues sont nulles dans le cas d'un stratif symétrique ; les déformations dans le K^0 pleine sont causées que par l'effet des courbures :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = Z_k \begin{Bmatrix} K_x^0 \\ K_y^0 \\ K_{xy}^0 \end{Bmatrix}$$

$$\text{Et les contraintes : } \{\sigma_{(xy)}\}_k = [\bar{\varphi}]_k \{\varepsilon_{(xy)}\}_y.$$

I.6.3 Quelques exemples sur flexion des poutres :

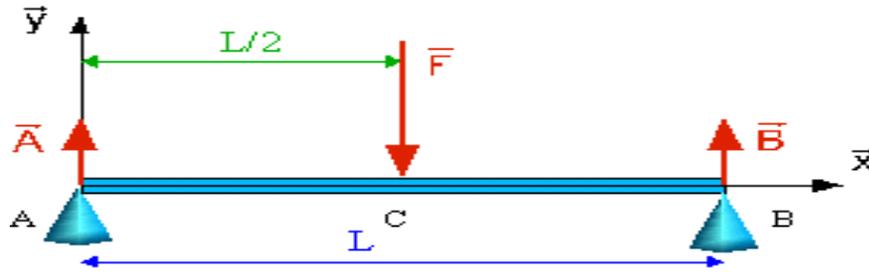
03 cas simples de détermination de l'équation de la déformée d'une poutre en flexion plane. Les cas plus complexes sont traités dans des ouvrages de RDM.

- 1 - Poutre reposant sur deux appuis avec charge concentrée au milieu
- 2 - Poutre reposant sur deux appuis avec charge répartie.
- 3 - Poutre encastree avec charge concentrée à une extrémité.

I.6.3.1 Hypothèses:

- les appuis sont sans adhérence.
- les charges sont perpendiculaires à la ligne moyenne.

1 - Poutre reposant sur deux appuis avec charge concentrée au milieu



Les efforts sont tels que:

$$A = B = F/2$$

Figure I.6 : Poutre reposant sur deux appuis avec charge concentrée au milieu

L'équation de la dérivée seconde de la déformée s'écrit

$$EI_{GZ} \cdot y'''' = Mf_z(x)$$

On écrit les primitives y'' et y

$$EI_{GZ} \cdot y'''' = \frac{F}{2} \cdot x$$

$$\frac{2}{F} \cdot EI_{GZ} \cdot y'''' = \frac{x^2}{2} + K_1$$

$$\frac{2}{F} \cdot EI_{GZ} \cdot y'' = \frac{x^3}{6} + K_1 \cdot x + K_2$$

avec $K_1 = -\frac{L^2}{8}$ et $K_2 = 0$

$$y_C = -\frac{FL^3}{48 EI_{GZ}}$$

Il faut deux intégrations successives pour déterminer l'équation $y(x)$ de la déformée.

Le calcul des constantes K se fait en choisissant des conditions aux limites de zones:

En C :

$$x = L/2 \text{ et } y''_C = 0$$

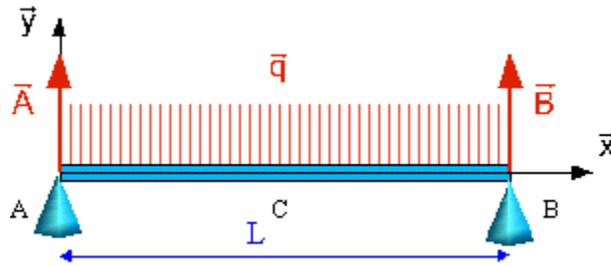
(y'' est l'équation de la tangente au point C)

En A :

$$x = 0 \text{ et } y_A = 0$$

y_C est la valeur de la flèche maxi en C

2 - Poutre reposant sur deux appuis avec charge uniformément répartie



Les efforts sont tels que:

$$A = B = (qL)/2$$

Figure I.7 : Poutre reposant sur deux appuis avec charge uniformément répartie.

L'équation de la dérivée seconde de la déformée s'écrit

$$EI_{GZ} \cdot y'''' = Mf_z(x)$$

On écrit les primitives y'' et y

$$EI_{GZ} \cdot y'''' = \frac{pLx}{2} - \frac{px^2}{2}$$

$$\frac{2}{p} \cdot EI_{GZ} \cdot y'' = -\frac{x^3}{3} + \frac{Lx^2}{2} + K_1$$

$$\frac{2}{p} \cdot EI_{GZ} \cdot y = -\frac{x^4}{12} + \frac{Lx^3}{6} + K_1 \cdot x + K_2$$

avec $K_1 = -\frac{L^3}{12}$ et $K_2 = 0$

$$y_C = -\frac{5pL^4}{384 EI_{GZ}}$$

intégrations successives pour déterminer l'équation $y(x)$ de la déformée.

Le calcul des constantes K se fait en choisissant des conditions aux limites de zones:

En C :

$$x = L/2 \text{ et } y''_C = 0$$

(y'' est l'équation de la tangente au point C)

En A :

$$x = 0 \text{ et } y_A = 0$$

y_C est la valeur de la flèche maxi en C

3 - Poutre encastrée supportant une charge concentrée à une extrémité

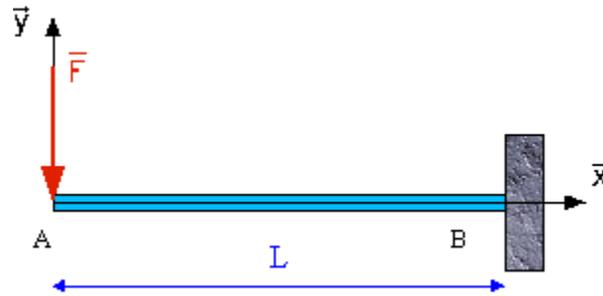


Figure I.8 : Poutre encastrée supportant une charge concentrée à une extrémité.

L'équation de la dérivée seconde de la déformée s'écrit

$$EI_{GZ} \cdot y'' = Mf_z(x)$$

On écrit les primitives y' et y

$$EI_{GZ} \cdot y'' = -F \cdot x$$

$$\frac{EI_{GZ}}{F} \cdot y' = -\frac{x^2}{2} + K_1$$

$$\frac{EI_{GZ}}{F} \cdot y = -\frac{x^3}{6} + K_1 \cdot x + K_2$$

avec $K_1 = \frac{L^2}{2}$ et $K_2 = -\frac{L^3}{3}$

$$y_A = -\frac{FL^3}{3EI_{GZ}}$$

Il faut deux intégrations successives pour déterminer l'équation $y(x)$ de la déformée.

Le calcul des constantes K se fait en choisissant des conditions aux limites de zones:

En B :

$$x = L \text{ et } y'_B = 0$$

$$x = L \text{ et } y_B = 0$$

(y' est l'équation de la tangente au point C)

y_C est la valeur de la flèche maxi en C

I.7 Conclusion :

La poutre est une barre, un élément longiligne utilisé en conception des structures en construction selon sa localisation et sa fonction, la poutre peut se retrouver de plusieurs manières. La flexion est la déformation ou l'action qui tend à rapprocher les deux extrémités de la poutre. L'étude de la déformation permet de donner l'équation de la déformée de la poutre (équations différentielle).

Une étude sur Méthode des différences finies sera traitée dans le chapitre suivant.

Chapitre II :

Synthèse bibliographique sur la
méthode des différences finies

II.1 Introduction :

Après avoir présenté quelques généralités sur les poutres en flexion dans chapitre précédent, nous allons entamer la méthode des différences finies. Dans ce contexte, en premier lieu, nous définirons cette méthode et on donne ces principes,

En deuxième lieu, nous présentons des formules d'approximation de dérivées par différences divisées en dimension 1 ainsi que Un premier problème aux limites et sa discrétisation par différences finies,

En troisième lieu, on termine par une Approximation de dérivées par différences divisées en dimension supérieures.

II.2 Définition :

La méthode des différences finies est une technique courante de recherche de solutions approchées d'équations aux dérivées partielles qui consiste à résoudre un système de relations (schéma numérique) liant les valeurs des fonctions inconnues en certains points suffisamment proches les uns des autres.

Cette méthode apparaît comme étant la plus simple à mettre en œuvre car elle procède en deux étapes : d'une part la discrétisation par différences finies des opérateurs de dérivation/différentiation, d'autre part la convergence du schéma numérique ainsi obtenu lorsque la distance entre les points diminue.

II.2.1 Principes généraux des méthodes des numériques sur Ordinateur:

Les mathématiques utilisent couramment les notions d'infini et de continu. La solution exacte d'un problème d'équations différentielles ou aux dérivées partielles est une fonction continue. Les ordinateurs ne connaissent que le fini et le discret. Les solutions approchées seront calculées en définitive comme des collections de valeurs discrètes sous la forme de composantes d'une vectrice solution d'un problème matriciel.

En vue du passage d'un problème exact (continu) au problème approché (discret); On dispose de plusieurs techniques concurrentes:

Les différences finies ; les éléments finis et les volumes finis ; chacune de ces trois méthodes

correspond à une formulation différente des équations de la physique:

- équilibre des forces en chaque point pour les différences finies.
- minimisation de l'énergie ou principe des travaux virtuels pour les éléments finis.
- loi de conservation et calcul des flux pour la méthode des volumes finis.

II.2.2 Principe de la méthode des différences finies :

De nombreux phénomènes physiques (au sens large) peuvent être représentés / modélisés par une Equation aux Dérivées Partielles (EDP)[5].

Une EDP est une équation reliant une fonction de *plusieurs variables* et ses dérivées partielles.

Par exemple en dimension 2, l'équation : $-\left(\frac{d^2 u}{dx_1^2} + \frac{d^2 u}{dx_2^2}\right)(x_1, x_2) = f(x_1, x_2)$. (II.1)

La résolution d'une EDP est difficile; rares sont les situations où nous savons calculer explicitement la solution. Les approches classiques de résolution numérique des EDP sont les méthodes des différences finies, des éléments finis et des volumes finis. La méthode des Différences Finies (D.F.) se base sur l'approximation par Différences Divisées (D.D.) des dérivées partielles figurant dans l'équation. Dans ce cas, nous allons commencer par étudier comment approcher numériquement des dérivées uniquement à l'aide des valeurs de la fonction.

II.3 Formules d'approximation de dérivées par différences divisées en dimension 1 :

II.3.1 Sur la nécessité d'approcher numériquement des dérivées pour construire un schéma numérique :

Le principe de la méthode des différences finies consiste à remplacer la fonction inconnue $u(x)$ d'une EDP, équation *continue*, par un *nombre fini* de valeurs u_i , $0 \leq i \leq n$.

L'objectif étant de calculer ces valeurs discrètes u_i comme étant une bonne approximation de $u(x_i)$, valeur de la solution exacte aux points de discrétisation, points de grille, x_i , $0 \leq i \leq n$:

$$u_i \approx u(x_i) \text{ Avec } i = 0, \dots, N$$

Autrement dit, la résolution d'un problème continu est remplacée par la recherche de $(N + 1)$ valeurs discrètes, approchant la valeur de la solution exacte aux points du maillage, points de grille, x_i .

Se pose alors la question de l'approximation des dérivées de la fonction u qui apparaissent dans l'équation différentielle, Equation aux Dérivées Partielles (EDP), par exemple $\frac{du}{dx_i}(x)$

Ces dérivées sont remplacées par une approximation numérique basée sur des différences divisées.

Remarque :

Du point de vue de la terminologie, nous employons également par abus de langage le terme "différences finies" pour désigner l'approximation numérique de ces dérivées.

Les Différences Divisées (DD) sont tout particulièrement employées de manière récursive en interpolation polynomiale; la notion de schémas aux Différences Finis (DF) est propre aux EDP, tandis que les opérateurs ou formules aux différences finies, une fois divisés, deviennent un taux d'accroissement ou encore une différence divisée...

Etant donnée un segment $[a, b]$, nous le "discrétisons" en N petits segments $[x_i, x_{i+1}]$, avec $x_0 = a$ et $x_N = b$, cf figure.

Cette discrétisation du domaine géométrique est appelée maillage ou grille de calcul (y compris en dimensions supérieures). Elle peut être uniforme ou non.

Dans le cas 1d uniforme, chaque "maille" est de longueur égale notée h . On a alors:

$$x_i = a + ih, i = 0..N, \text{ et } h = \frac{(b - a)}{n}$$

$$\text{Soit : } x_{i+1} = x_i + h, \forall_i .$$

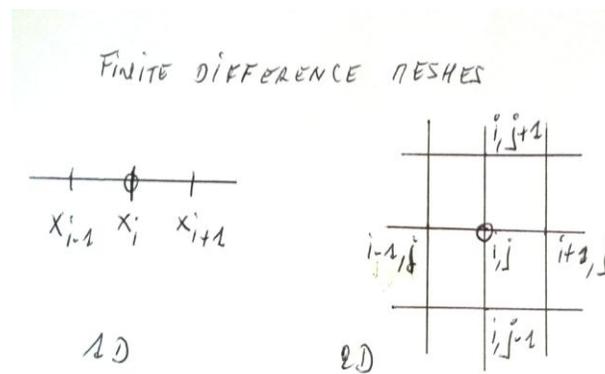


Figure. II.1. Maillages uniformes en dimension 1 et dimension 2.

II.4. Un premier problème aux limites et sa discrétisation par différences finies :

Considérons l'équation différentielle d'ordre 2 suivante:

$$-u''(x) = f(x) \text{ pour } x \in]a, b[\quad (\text{II.2})$$

avec f fonction donnée.

Supposons que nous ne savons pas intégrer f et que nous ne savons donc pas calculer une solution u de cette équation différentielle.

Le problème de Cauchy correspondant à cette équation différentielle linéaire d'ordre deux consisterait à fermer le système en considérant 2 "conditions initiales": $u(0)$ et $u'(0)$ donnés.

Contrairement au problème de Cauchy, le problème aux limites correspondant à cette équation différentielle linéaire d'ordre deux, consiste à fermer le système en considérant des conditions aux bords du domaine de calcul.

On parle également de conditions aux limites.

Cherchons alors à résoudre le problème aux limites suivant:

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) \\ u(a) = 0 \text{ et } u(b) = 0 \end{cases} \quad (\text{II.3})$$

pour $x \in]a, b[$

Lorsque c'est la valeur de la fonction qui est imposée sur les bords (et non sa dérivée par exemple), on parle de conditions aux limites de Dirichlet.

on peut montrer que la solution $u(x)$ de ce problème aux limites existe, est unique. Par ailleurs sa solution est continue par rapport aux données. On dit que le problème est bien posé.

Ce système peut modéliser la déformation d'une barre $1d$ élastique, fixée sur ses bords, et sous l'effet du chargement $f(x)$. L'inconnue $u(x)$ désigne le déplacement de la barre à l'état d'équilibre (en effet, le problème ne dépend que de la variable d'espace x et pas d'une variable temporelle supplémentaire t).

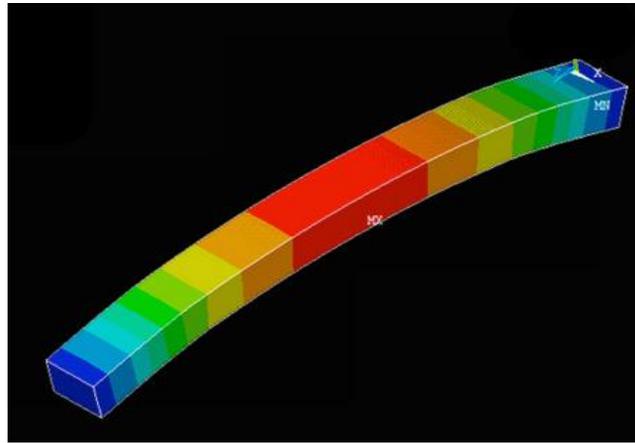


Figure. II.2. Déformation $u(x)$ d'une barre élastique fixée sur ses bords, et chargée sous l'action d'une force extérieure $f(x)$.

Pour résoudre numériquement ce problème, nous allons employer la méthode aux différences finies.

Cela consiste dans un premier temps à discrétiser (mailler) le domaine géométrique, ici le simple segment $[a, b]$.

Ensuite, nous allons remplacer les dérivées apparaissant dans l'équation (II.3) (le problème continu) par des formules aux différences divisées vues précédemment

On considère une discrétisation uniforme de $[a, b]$. L'équation continue, $-u''(x) = f(x)$, doit être vérifiée en tout point x de $]a, b[$ donc a-fortiori en tout point interne au maillage :

$$-u''(x_i) = f(x_i) \text{ pour } i = 1, \dots, N - 1$$

En approximant la dérivée seconde par la formule aux différences finies centrée précédente (ordre 2), on obtient le *schéma numérique*:

$$-\frac{1}{h^2} [u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}] = f_i \quad (\text{II.4})$$

Où : $f_i = f(x_i)$. Et avec les conditions aux limites discrètes:

$$u_0 = 0 \text{ et } u_n = 0$$

Nous sommes donc passé d'une équation différentielle continue à un système algébrique discret, de $(N - 1)$ Équations à $(N - 1)$ inconnues. Les inconnues sont les valeurs (u_1, \dots, u_{n-1}) .

Etant linéaire en $\{u_i\}_{0 \leq i \leq N}$, ce schéma numérique (II.3)-(II.4) peut s'écrire sous forme matricielle. Cela donne:

$$\frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} +2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & +2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & +2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow AUh = h^2 F$$

avec $Uh = (u_1, \dots, u_{n-1})^T$ le vecteur inconnu et $Fh = (f_1, \dots, f_{n-1})^T$ le second membre.

Notons que la première et la dernière équation s'écrivent bien:

$$-\frac{1}{h^2} [u_2 - 2u_1] = f_1 \text{ et } \left[-\frac{1}{h^2} - 2u_{n-1} + u_{n-2} \right] = f_{N-1}$$

du fait des conditions au limites: $u_0 = 0 = u_N$.

II.5. Conclusion

Dans ce présent chapitre une présentation de la méthode numérique des différences finies a été réalisée afin de savoir le principe de cette approche qui est basé sur la construction d'un schéma numérique plus adéquat qui converge vers une solution approchée. De même, la connaissance des démarches de résolution par cette présente méthode nous a permis de l'appliquer au traitement des problèmes des poutres en flexion présenté au chapitre III.

Chapitre III

Numérique des poutres en flexion par la méthode des différences finies

III.1 Introduction :

Après avoir connaître des notions sur la méthode des différences finies précédemment, a cet effet, on a l'intérêt de l'appliquer dans ce chapitre sur une poutre soumise en sollicitation de flexion. Pour cela, on calcule analytiquement le moment fléchissant et la flèche d'une poutre soumise a une charge uniformément répartie et de les comparer avec ceux exploités numériquement à l'aide du logiciel Maple 6.

III.2 Calcul analytique :

D'après la théorie des poutres, l'équation d'équilibre s'écrite :

$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} = -q \quad (\text{III.1})$$

La solution analytique :

$$\frac{dM(x)}{dx} = -qx + c_1$$

$$M(x) = -\frac{qx^2}{2} + c_1x + c_2$$

D après les conditions aux limites on a :

$$x = 0 \quad \text{=====> } M=0$$

$$x = L \quad \text{=====> } M=0$$

$$M(0) \quad \text{=====> } c_2 = 0$$

$$M(L) = -\frac{qL^2}{2} + c_1L = 0 \quad \text{=====>} \quad c_1 = \frac{qL}{2}$$

Donc :

$$M(x) = -\frac{qx^2}{2} + \frac{qlx}{2} \quad (\text{II.2})$$

Equation cinématique :

$$M(x) = -EI \frac{d^2w}{dx^2} \quad (\text{III.3})$$

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{M_i(x)}{EI}$$

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \int -\frac{M_i(x)}{EI}$$

$$= -\frac{1}{EI} \int M_I(x)$$

$$= -\frac{1}{EI} \int -\frac{qx^2}{2} + \frac{qlx}{2}$$

$$= -\frac{q}{2EI} \int -x^2 + Lx$$

$$\frac{dw}{dx} = -\frac{q}{2EI} \left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}lx^2 + c_3 \right)$$

$$W = -\frac{qx^3}{2EI} \int -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}lx^2 + c_3$$

$$W = -\frac{q}{2EI} \left(-\frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{6}lx^3 + c_3x + c_4 \right)$$

D'après les conditions aux limites on a :

$$x = 0 \quad \text{=====> } W = 0$$

$$x = L \quad \text{=====> } W = 0$$

$$c_4 = 0$$

$$+ \frac{ql^4}{24EI} - \frac{ql^4}{12EI} - \frac{qlc_3}{2EI} - 0 = 0$$

$$C_3 = -\frac{l^3}{12}$$

Donc :

$$w(x) = \frac{qx}{24EI}(-x^3 + 2lx - l^3) \quad (\text{III.4})$$

Le déplacement et le moment sont maximaux au centre de la poutre : $x = \frac{l}{2}$

$$W\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{5ql^4}{384EI} \quad M\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{-ql^2}{8} \quad (\text{III.5})$$

III.3 Solution numérique par la méthode des différences finies :

Solution des moments :

$$\frac{d^2M_x}{dx^2} = -q$$

$$\frac{dM}{dx} = \frac{\Delta M}{\Delta x} = \frac{M_{i+1} - M_i}{\Delta x}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2M_x}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dM}{dx} \right) = \frac{\Delta}{\Delta x} \left(\frac{\Delta M}{\Delta x} \right) \\ &= \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{M_{i+2} - M_{i+1}}{\Delta x} - \frac{M_{i+1} - M_i}{\Delta x} \right) \\ &= \frac{M_{i+2} - 2M_{i+1} + M_i}{\Delta x^2} \end{aligned}$$

Donc :

$$M_{i+2} - 2M_{i+1} + M_i = -\Delta x^2 q \quad (\text{III.6})$$

Solution des flèches :

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{M_i(x)}{EI}$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{\Delta w}{\Delta x} = \frac{w_{i+1} - w_i}{\Delta x}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2w_x}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dw}{dx} \right) = \frac{\Delta}{\Delta x} \left(\frac{\Delta w}{\Delta x} \right) \\ &= \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{w_{i+2} - w_{i+1}}{\Delta x} - \frac{w_{i+1} - w_i}{\Delta x} \right) \\ &= \frac{w_{i+2} - 2w_{i+1} + w_i}{\Delta x^2} \end{aligned}$$

Donc :

$$w_{i+2} - 2w_{i+1} + w_i = -\frac{M_i(x)}{EI} \Delta x^2 \quad (\text{III.7})$$

III.4. Traitement :

Considérons une poutre simplement appuyée de longueur (l), soumise à une charge uniformément répartie (q).

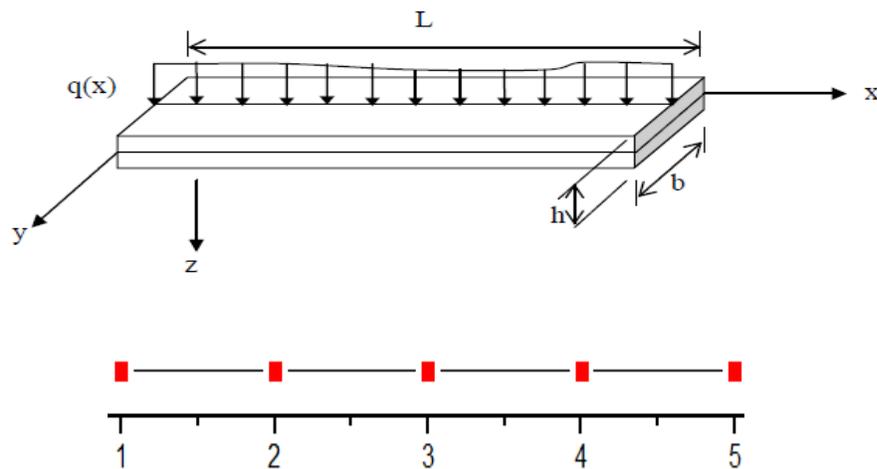


Figure.III.1 Poutre simplement appuyée.

III.5. Etapes de calcul numérique :

Nombres des éléments $ne = 3$

Nombres des points $np = 5$

Nombres des tranches $nt = 4$

Soit : $\Delta x = \frac{l}{4}$

III.5.1 Calcul des moments :

$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ est la matrice de localisation des éléments

$$[A] * \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q\Delta x^2 \\ q\Delta x^2 \\ q\Delta x^2 \end{Bmatrix} ; M_1 = M_5 = 0 \quad (\text{III.8})$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} * \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q\Delta x^2 \\ q\Delta x^2 \\ q\Delta x^2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} M_1 - 2M_2 + M_3 \\ M_2 - 2M_3 + M_4 \\ M_3 - 2M_4 + M_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q\Delta x^2 \\ q\Delta x^2 \\ q\Delta x^2 \end{Bmatrix}$$

$$M_1 - 2M_2 + M_3 = q\Delta x^2 \Rightarrow 1$$

$$M_2 - 2M_3 + M_4 = q\Delta x^2 \Rightarrow 2$$

$$M_3 - 2M_4 + M_5 = q\Delta x^2 \Rightarrow 3$$

Equation 1 :

$$M_1 - 2M_2 + M_3 = q\Delta x^2$$

$$-M_2 = \frac{q\Delta x^2 - M_3}{2}$$

$$\Rightarrow M_2 = \frac{M_3 - q\Delta x^2}{2} \Rightarrow 4$$

Equation 2 :

$$M_3 - 2M_4 + M_5 = q\Delta x^2$$

$$M_4 = \frac{M_3 - q\Delta x^2}{2} \Rightarrow 5$$

On remplace équations 4 et 5 dans équation 2 :

$$\frac{M_3 - q\Delta x^2}{2} - 2M_3 + \frac{M_3 - q\Delta x^2}{2} = q\Delta x^2$$

$$M_3 = -2q\Delta x^2 \Rightarrow 6$$

$$\text{On } \Delta x = \frac{l}{2}$$

$$M_3 = \frac{-ql^2}{8} \quad (\text{III.9})$$

Donc :

$$M_2 = \frac{-2q\Delta x^2 - q\Delta x^2}{2}$$

$$M_2 = -\frac{3}{2}q\Delta x^2$$

$$M_2 = -\frac{3}{32}ql^2 \quad (\text{III.10})$$

Et :

$$M_4 = -\frac{2q\Delta x^2 - q\Delta x^2}{2}$$

$$M_4 = -\frac{3}{2}q\Delta x^2$$

$$M_4 = -\frac{3}{2}q\Delta x^2 \quad (\text{III.11})$$

Alor :

$$M_1 = 0, M_2 = -\frac{3}{32}ql^2, M_3 = -\frac{1}{8}ql^2, M_4 = -\frac{3}{32}ql^2, M_5 = 0$$

III.5.2 Calcul des flèches :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[A] * \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{M_1}{EI} \Delta x^2 \\ -\frac{M_2}{EI} \Delta x^2 \\ -\frac{M_3}{EI} \Delta x^2 \end{Bmatrix} ; w_1 = w_5 = 0 \quad (\text{III.12})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{M_1}{EI} \Delta x^2 \\ -\frac{M_2}{EI} \Delta x^2 \\ -\frac{M_3}{EI} \Delta x^2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} w_1 - 2w_2 + w_3 \\ w_2 - 2w_3 + w_4 \\ w_3 - 2w_4 + w_5 \end{cases} = \begin{cases} -\frac{M_1}{EI} \Delta x^2 \\ -\frac{M_2}{EI} \Delta x^2 \\ -\frac{M_3}{EI} \Delta x^2 \end{cases}$$

$$w_1 - 2w_2 + w_3 = -\frac{M_1}{EI} \Delta x^2 = 7$$

$$w_2 - 2w_3 + w_4 = -\frac{M_2}{EI} \Delta x^2 = 8$$

$$w_3 - 2w_4 + w_5 = -\frac{M_3}{EI} \Delta x^2 = 9$$

Alors :

$$w_1 = 0, w_2 = 0.0097 \frac{ql^4}{EI}, w_3 = 0.013 \frac{ql^4}{EI}, w_4 = 0.0097 \frac{ql^4}{EI}, w_5 = 0. \quad (\text{III.13})$$

III.5.3 Calcul des contraintes :

$$\delta = \frac{M_i}{I} y_i \quad (\text{III.14})$$

$$y = [-0.5h, -0.4h, -0.3h, -0.2h, -0.1h, 0, 0.1h, 0.2h, 0.3h, 0.4h, 0.5h]$$

Par la suite, on subdivise la longueur de la poutre en un nombre de tranches $nt = 32$.

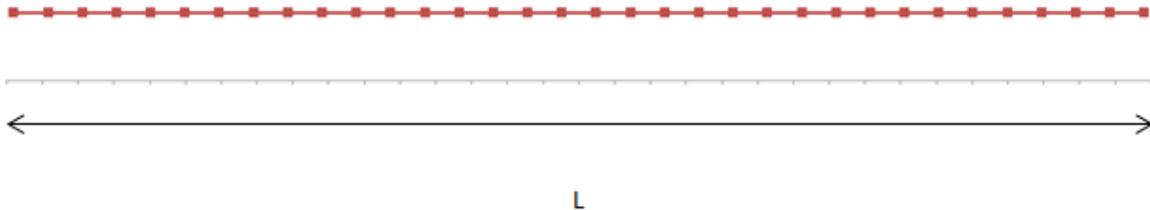


Figure.III.2.Modèle numérique avec $nt = 32$.

III.6. Présentations des résultats des moments et les flèches due la méthode des différences finies avec logiciel maple6.

Tableau(III.1) Présentation des résultats des moments ($M(x = 0) = 0$), ($M(x = l) = 0$)

| Points | moments | Points | Moments | Points | Moments | points | Moments |
|--------|-----------------------|--------|-----------------------|--------|-----------------------|--------|-----------------------|
| 1 | 0.0151 ql^2 | 9 | 0.1010 ql^2 | 17 | 0.1245 ql^2 | 25 | 0.0854 ql^2 |
| 2 | 0.0292 ql^2 | 10 | 0.1074 ql^2 | 18 | 0.1230 ql^2 | 26 | 0.0761 ql^2 |
| 3 | 0.0424 ql^2 | 11 | 0.1127 ql^2 | 19 | 0.1206 ql^2 | 27 | 0.0659 ql^2 |
| 4 | 0.0546 ql^2 | 12 | 0.1171 ql^2 | 20 | 0.1171 ql^2 | 28 | 0.0546 ql^2 |
| 5 | 0.0659 ql^2 | 13 | 0.1206 ql^2 | 21 | 0.1127 ql^2 | 29 | 0.0424 ql^2 |
| 6 | 0.0761 ql^2 | 14 | 0.1230 ql^2 | 22 | 0.1074 ql^2 | 30 | 0.0292 ql^2 |
| 7 | 0.0854 ql^2 | 15 | 0.1245 ql^2 | 23 | 0.1010 ql^2 | 31 | 0.0151 ql^2 |
| 8 | 0.0937 ql^2 | 16 | 0.1250 ql^2 | 24 | 0.0937 ql^2 | - | - |

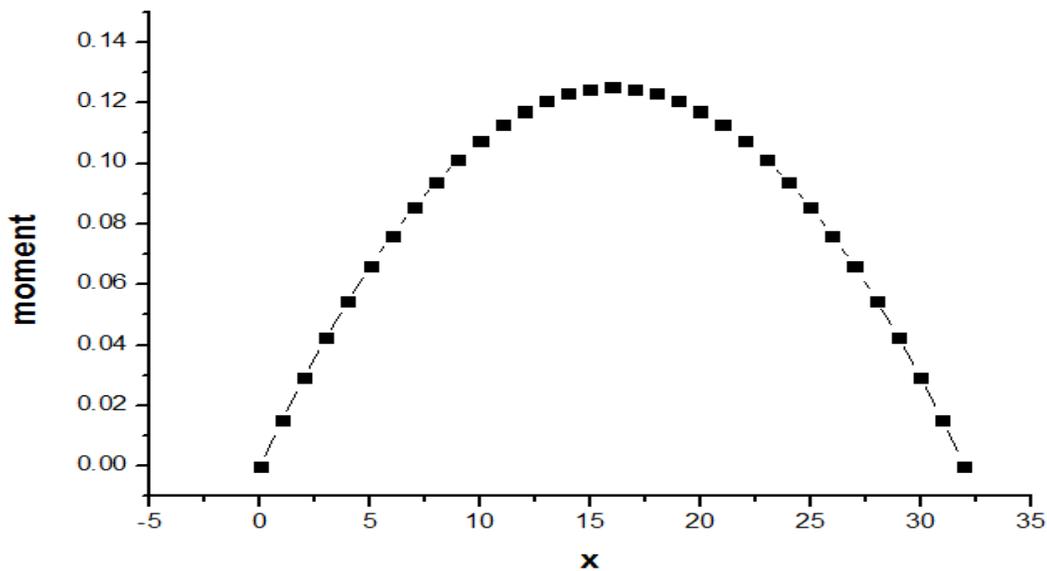


Figure.III.3.Diagramme des moments.

Tableau (III.2) Présentation des résultats des flèches ($w(x = 0) = 0$) , ($w(x = l) = 0$)

| Point | Flèches | Point | Flèches | Point | Flèches | Point | Flèche |
|-------|--------------------------|-------|--------------------------|-------|--------------------------|-------|--------------------------|
| 1 | $0.0013 \frac{ql^4}{EI}$ | 9 | $0.0101 \frac{ql^4}{EI}$ | 17 | $0.0129 \frac{ql^4}{EI}$ | 25 | $0.0083 \frac{ql^4}{EI}$ |
| 2 | $0.0025 \frac{ql^4}{EI}$ | 10 | $0.0108 \frac{ql^4}{EI}$ | 18 | $0.0127 \frac{ql^4}{EI}$ | 26 | $0.0073 \frac{ql^4}{EI}$ |
| 3 | $0.0038 \frac{ql^4}{EI}$ | 11 | $0.0115 \frac{ql^4}{EI}$ | 19 | $0.0124 \frac{ql^4}{EI}$ | 27 | $0.0062 \frac{ql^4}{EI}$ |
| 4 | $0.0050 \frac{ql^4}{EI}$ | 12 | $0.0120 \frac{ql^4}{EI}$ | 20 | $0.0120 \frac{ql^4}{EI}$ | 28 | $0.0050 \frac{ql^4}{EI}$ |
| 5 | $0.0062 \frac{ql^4}{EI}$ | 13 | $0.0124 \frac{ql^4}{EI}$ | 21 | $0.0115 \frac{ql^4}{EI}$ | 29 | $0.0038 \frac{ql^4}{EI}$ |
| 6 | $0.0073 \frac{ql^4}{EI}$ | 14 | $0.0127 \frac{ql^4}{EI}$ | 22 | $0.0108 \frac{ql^4}{EI}$ | 30 | $0.0025 \frac{ql^4}{EI}$ |
| 7 | $0.0083 \frac{ql^4}{EI}$ | 15 | $0.0129 \frac{ql^4}{EI}$ | 23 | $0.0101 \frac{ql^4}{EI}$ | 31 | $0.0013 \frac{ql^4}{EI}$ |
| 8 | $0.0092 \frac{ql^4}{EI}$ | 16 | $0.0130 \frac{ql^4}{EI}$ | 24 | $0.0092 \frac{ql^4}{EI}$ | - | - |

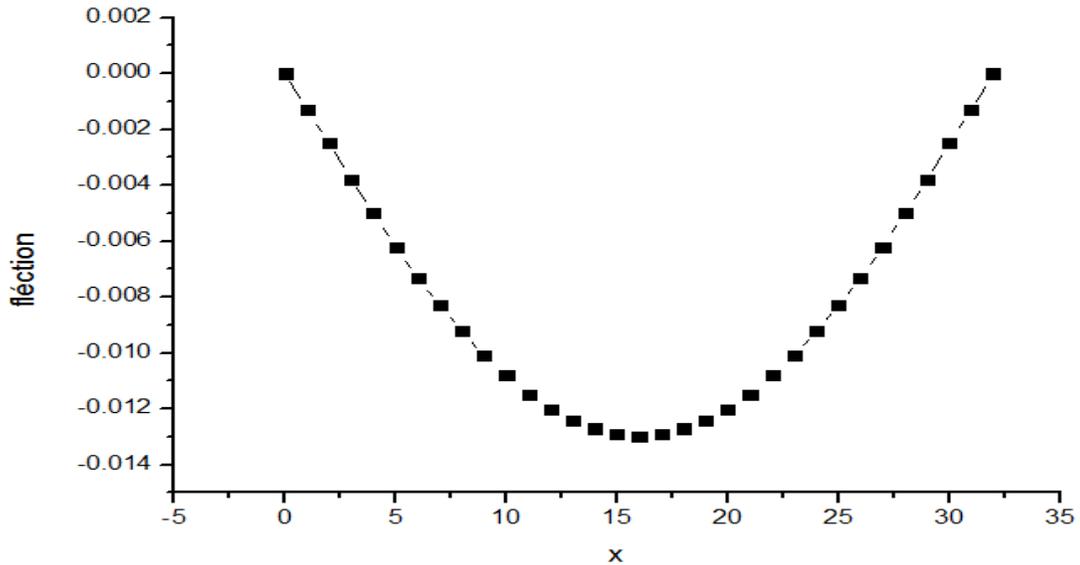


Figure.III.4.Diagramme des flèches.

Tableau (III.3) . Présentation des résultats de la distribution des contraintes suivant la hauteur de la poutre en $(x = \frac{l}{2})$

| y | Contraintes | Y | contraintes |
|-------|-----------------------------|-----|----------------------------|
| -0.5h | $-0.0625 \frac{ql^2 h}{mi}$ | 0.1 | $0.0125 \frac{ql^2 h}{mi}$ |
| -0.4h | $-0.0500 \frac{ql^2 h}{mi}$ | 0.2 | $0.0250 \frac{ql^2 h}{mi}$ |
| -0.3h | $-0.0375 \frac{ql^2 h}{mi}$ | 0.3 | $0.0375 \frac{ql^2 h}{mi}$ |
| -0.2h | $-0.0250 \frac{ql^2 h}{mi}$ | 0.4 | $0.0500 \frac{ql^2 h}{mi}$ |
| -0.1h | $-0.0125 \frac{ql^2 h}{mi}$ | 0.5 | $0.0625 \frac{ql^2 h}{mi}$ |
| 0 | 0 | - | - |

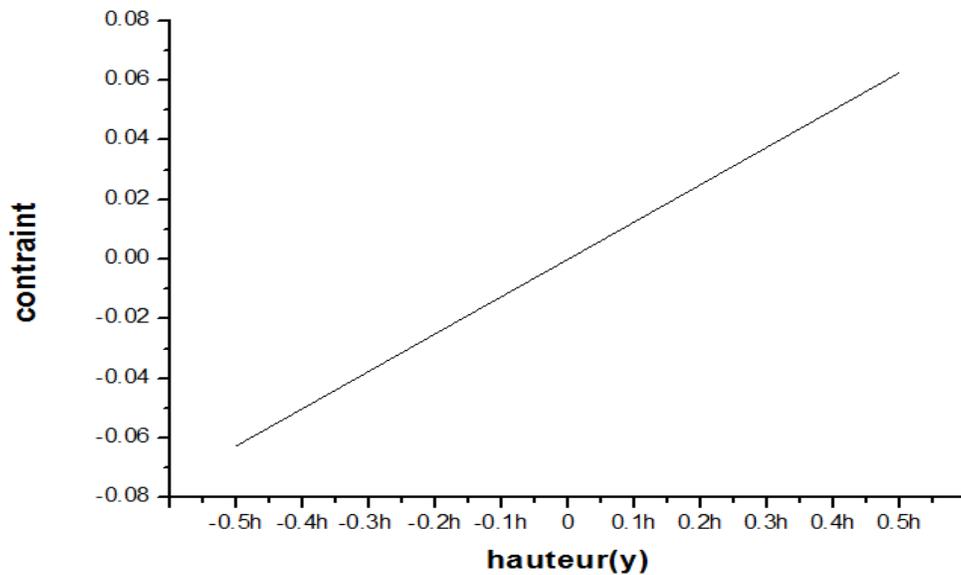


Figure.III.5.Diagramme des contraintes

Après avoir calculé les moments et les flèches numériquement par la méthode des différences finies on a constaté que ces résultats sont satisfaisant en comparaison avec ceux donnés par la résistance des matériaux.

III.7 Conclusion :

Lorsqu'une poutre est soumise à une action mécanique elle se déforme. Donc on permet d'étudier ces déformation en fonctions des contraintes aux quelles elle est soumise .donc vu que pour prédire ces déformations ; il était nécessaire de résoudre des équations différentielles .certaines méthodes mathématique tel que la méthode de différence finies étaient adéquates pour la résolution ; et de les compare avec certes analytiques talque la résistance des matériaux.

CONCLUSION GENERALE

Le but principal de ce travail est de valider un modèle numérique fiable et simple pour l'étude du comportement des poutres en flexion en utilisant une méthode est celle des différences finies.

Ce modèle numérique a été programmé et développé par le logiciel **Maple 6** pour étudier le comportement des poutres en flexion. Donc le modèle numérique qui a été validé nous a permis de tirer les constatations suivantes :

Les résultats des moments et les flèches calculés numériquement par la méthode des différences finies ont prouvés que sont satisfaisants en comparaison avec ceux qui ont donnés par la résistance des matériaux.

Il reste toutefois à valider ce modèle à deux dimension sous effets mécanique et thermique.

ANNEXE

Anex Pr entes des résultats des moments et les flèches es les contraintes due la méthode des différences finies avec logiciel maple6.

1. Résultats des moment :

$$\text{mom (1)} := .01513671875 \quad q L^2$$

$$\text{mom (2)} := .02929687500 \quad q L^2$$

$$\text{mom (3)} := .04248046875 \quad q L^2$$

| | |
|----------------------------|---------|
| mom (4) := .05468750000 | $q L^2$ |
| mom (5) := .06591796875 | $q L^2$ |
| mom (6) := .07617187500 | $q L^2$ |
| mom (7) := .08544921875 | $q L^2$ |
| mom (8) := .09375000000 | $q L^2$ |
| mom (9) := .1010742188 | $q L^2$ |
| mom (10) := .1074218750 | $q L^2$ |
| mom (11) := .1127929688 | $q L^2$ |
| mom (12) := .1171875000 | $q L^2$ |
| mom (13) := .1206054688 | $q L^2$ |
| mom (14) := .1230468750 | $q L^2$ |
| mom (15) := .1245117188 | $q L^2$ |
| mom (16) := .1250000000 | $q L^2$ |
| mom (17) := .1245117188 | $q L^2$ |
| mom (18) := .1230468750 | $q L^2$ |
| mom (19) := .1206054688 | $q L^2$ |
| mom (20) := .1171875000 | $q L^2$ |
| mom (21) := .1127929688 | $q L^2$ |
| mom (22) := .1074218750 | $q L^2$ |
| mom (23) := .1010742188 | $q L^2$ |
| mom (24) := .09375000000 | $q L^2$ |
| mom (25) := .08544921875 | $q L^2$ |
| mom (26) := .07617187500 | $q L^2$ |
| mom (27) := .06591796875 | $q L^2$ |
| mom (28) := .05468750000 | $q L^2$ |
| mom (29) := .04248046875 | $q L^2$ |
| mom (30) := .02929687500 | $q L^2$ |
| mom (31) := .01513671875 | $q L^2$ |

2. Résultats des flèches:

$$ww(1) := .001300811768 \frac{q L^4}{ei}$$

$$ww(2) := .002586841584 \frac{q L^4}{ei}$$

$$ww(3) := .003844261170 \frac{q L^4}{ei}$$

$$ww(4) := .005060195922 \frac{q L^4}{ei}$$

$$ww(5) := .006222724915 \frac{q L^4}{ei}$$

$$ww(6) := .007320880894 \frac{q L^4}{ei}$$

$$ww(7) := .008344650269 \frac{q L^4}{ei}$$

$$ww(8) := .009284973149 \frac{q L^4}{ei}$$

$$ww(9) := .01013374328 \frac{q L^4}{ei}$$

$$ww(10) := .01088380814 \frac{q L^4}{ei}$$

$$ww(11) := .01152896882 \frac{q L^4}{ei}$$

$$ww(12) := .01206398011 \frac{q L^4}{ei}$$

$$ww(13) := .01248455048 \frac{q L^4}{ei}$$

$$ww(14) := .01278734206 \frac{q L^4}{ei}$$

$$ww(15) := .01296997071 \frac{q L^4}{ei}$$

$$ww(16) := .01303100586 \frac{q L^4}{ei}$$

$$ww(17) := .01296997070 \frac{q L^4}{ei}$$

$$ww(18) := .01278734207 \frac{q L^4}{ei}$$

$$ww(19) := .01248455047 \frac{q L^4}{ei}$$

$$ww(20) := .01206398011 \frac{q L^4}{ei}$$

$$ww(21) := .01152896881 \frac{q L^4}{ei}$$

$$ww(22) := .01088380813 \frac{q L^4}{ei}$$

$$ww(23) := .01013374329 \frac{q L^4}{ei}$$

$$ww(24) := .009284973146 \frac{q L^4}{ei}$$

$$ww(25) := .008344650269 \frac{q L^4}{ei}$$

$$ww(26) := .007320880895 \frac{q L^4}{ei}$$

$$ww(27) := .006222724917 \frac{q L^4}{ei}$$

$$ww(28) := .005060195924 \frac{q L^4}{ei}$$

$$ww(29) := .003844261170 \frac{q L^4}{ei}$$

$$ww(30) := .002586841583 \frac{q L^4}{ei}$$

$$ww(31) := .001300811768 \frac{q L^4}{ei}$$

3. Résultats des contraintes:

$$1, 1, \sigma_x(1, 1) = -.007568359375 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$1, 2, \sigma_x(1, 2) = -.006054687500 \quad \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$1, 3, \sigma_x(1, 3) = -.004541015625 \quad \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$1, 4, \sigma_x(1, 4) = -.003027343750 \quad \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$1, 5, \sigma_x(1, 5) = -.001513671875 \quad \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$1, 6, \sigma_x(1, 6) = 0.$$

$$1, 7, \sigma_x(1, 7) = .001513671875 \quad \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$1, 8, \sigma_x(1, 8) = .003027343750 \quad \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$1, 9, \sigma_x(1, 9) = .004541015625 \quad \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$1, 10, \sigma_x(1, 10) = .006054687500 \quad \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$1, 11, \sigma_x(1, 11) = .007568359375 \quad \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$2, 1, \sigma_x(2, 1) = -.01464843750 \quad \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$2, 2, \sigma_x(2, 2) = -.01171875000 \quad \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$2, 3, \sigma_x(2, 3) = -.008789062500 \quad \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$2, 4, \sigma_x(2, 4) = -.005859375000 \quad \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$2, 5, \sigma_x(2, 5) = -.002929687500 \quad \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$2, 6, \sigma_x(2, 6) = 0.$$

$$2, 7, \sigma_x(2, 7) = .002929687500 \quad \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$2, 8, \sigma_x(2, 8) = .005859375000 \quad \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$2, 9, \sigma_x(2, 9) = .008789062500 \quad \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$2, 10, \sigma_x(2, 10) = .01171875000 \quad \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$2, 11, \sigma_x(2, 11) = .01464843750 \quad \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$3, 1, \sigma_x(3, 1) = -.02124023438 \quad \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$3, 2, \sigma_x(3, 2) = -.01699218750 \quad \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$3, 3, \sigma_x(3, 3) = -.01274414062 \quad \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$3, 4, \sigma_x(3, 4) = -.008496093750 \quad \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$3, 5, \sigma_x(3, 5) = -.004248046875 \quad \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$3, 6, \sigma_x(3, 6) = 0.$$

$$3, 7, \sigma_x(3, 7) = .004248046875 \quad \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$3, 8, \sigma_x(3, 8) = .008496093750 \quad \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$3, 9, \sigma_x(3, 9) = .01274414062 \quad \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$3, 10, \sigma_x(3, 10) = .01699218750 \quad \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$3, 11, \sigma_x(3, 11) = .02124023438 \quad \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$4, 1, \sigma_x(4, 1) = -.02734375000 \quad \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$4, 2, \sigma_x(4, 2) = -.02187500000 \quad \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$4, 3, \sigma_x(4, 3) = -.01640625000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$4, 4, \sigma_x(4, 4) = -.01093750000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$4, 5, \sigma_x(4, 5) = -.005468750000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$4, 6, \sigma_x(4, 6) = 0.$$

$$4, 7, \sigma_x(4, 7) = .005468750000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$4, 8, \sigma_x(4, 8) = .01093750000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$4, 9, \sigma_x(4, 9) = .01640625000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$4, 10, \sigma_x(4, 10) = .02187500000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$4, 11, \sigma_x(4, 11) = .02734375000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$5, 1, \sigma_x(5, 1) = -.03295898438 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$5, 2, \sigma_x(5, 2) = -.02636718750 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$5, 3, \sigma_x(5, 3) = -.01977539062 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$5, 4, \sigma_x(5, 4) = -.01318359375 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$5, 5, \sigma_x(5, 5) = -.006591796875 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$5, 6, \sigma_x(5, 6) = 0.$$

$$5, 7, \sigma_x(5, 7) = .006591796875 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$5, 8, \sigma_x(5, 8) = .01318359375 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$5, 9, \sigma_x(5, 9) = .01977539062 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$5, 10, \sigma_x(5, 10) = .02636718750 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$5, 11, \sigma_x(5, 11) = .03295898438 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$6, 1, \sigma_x(6, 1) = -.03808593750 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$6, 2, \sigma_x(6, 2) = -.03046875000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$6, 3, \sigma_x(6, 3) = -.02285156250 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$6, 4, \sigma_x(6, 4) = -.01523437500 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$6, 5, \sigma_x(6, 5) = -.007617187500 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$6, 6, \sigma_x(6, 6) = 0.$$

$$6, 7, \sigma_x(6, 7) = .007617187500 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$6, 8, \sigma_x(6, 8) = .01523437500 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$6, 9, \sigma_x(6, 9) = .02285156250 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$6, 10, \sigma_x(6, 10) = .03046875000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$6, 11, \sigma_x(6, 11) = .03808593750 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$7, 1, \sigma_x(7, 1) = -.04272460938 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$7, 2, \sigma_x(7, 2) = -.03417968750 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$7, 3, \sigma_x(7, 3) = -.02563476562 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$7, 4, \sigma_x(7, 4) = -.01708984375 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$7, 5, \sigma_x(7, 5) = -.008544921875 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$7, 6, \sigma_x(7, 6) = 0.$$

$$7, 7, \sigma_x(7, 7) = .008544921875 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$7, 8, \sigma_x(7, 8) = .01708984375 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$7, 9, \sigma_x(7, 9) = .02563476562 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$7, 10, \sigma_x(7, 10) = .03417968750 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$7, 11, \sigma_x(7, 11) = .04272460938 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$8, 1, \sigma_x(8, 1) = -.04687500000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$8, 2, \sigma_x(8, 2) = -.03750000000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$8, 3, \sigma_x(8, 3) = -.02812500000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$8, 4, \sigma_x(8, 4) = -.01875000000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$8, 5, \sigma_x(8, 5) = -.009375000000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$8, 6, \sigma_x(8, 6) = 0.$$

$$8, 7, \sigma_x(8, 7) = .009375000000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$8, 8, \sigma_x(8, 8) = .01875000000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$8, 9, \sigma_x(8, 9) = .02812500000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$8, 10, \sigma_x(8, 10) = .03750000000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$8, 11, \sigma_x(8, 11) = .04687500000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$9, 1, \sigma_x(9, 1) = -.05053710940 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$9, 2, \sigma_x(9, 2) = -.04042968752 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$9, 3, \sigma_x(9, 3) = -.03032226564 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$9, 4, \sigma_x(9, 4) = -.02021484376 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$9, 5, \sigma_x(9, 5) = -.01010742188 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$9, 6, \sigma_x(9, 6) = 0.$$

$$9, 7, \sigma_x(9, 7) = .01010742188 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$9, 8, \sigma_x(9, 8) = .02021484376 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$9, 9, \sigma_x(9, 9) = .03032226564 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$9, 10, \sigma_x(9, 10) = .04042968752 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$9, 11, \sigma_x(9, 11) = .05053710940 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$10, 1, \sigma_x(10, 1) = -.05371093750 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$10, 2, \sigma_x(10, 2) = -.04296875000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$10, 3, \sigma_x(10, 3) = -.03222656250 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$10, 4, \sigma_x(10, 4) = -.02148437500 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$10, 5, \sigma_x(10, 5) = -.01074218750 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$10, 6, \sigma_x(10, 6) = 0.$$

$$10, 7, \sigma_x(10, 7) = .01074218750 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$10, 8, \sigma_x(10, 8) = .02148437500 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$10, 9, \sigma_x(10, 9) = .03222656250 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$10, 10, \sigma_x(10, 10) = .04296875000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$10, 11, \sigma_x(10, 11) = .05371093750 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$11, 1, \sigma_x(11, 1) = -.05639648440 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$11, 2, \sigma_x(11, 2) = -.04511718752 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$11, 3, \sigma_x(11, 3) = -.03383789064 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$11, 4, \sigma_x(11, 4) = -.02255859376 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$11, 5, \sigma_x(11, 5) = -.01127929688 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$11, 6, \sigma_x(11, 6) = 0.$$

$$11, 7, \sigma_x(11, 7) = .01127929688 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$11, 8, \sigma_x(11, 8) = .02255859376 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$11, 9, \sigma_x(11, 9) = .03383789064 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$11, 10, \sigma_x(11, 10) = .04511718752 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$11, 11, \sigma_x(11, 11) = .05639648440 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$12, 1, \sigma_x(12, 1) = -.05859375000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$12, 2, \sigma_x(12, 2) = -.04687500000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$12, 3, \sigma_x(12, 3) = -.03515625000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$12, 4, \sigma_x(12, 4) = -.02343750000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$12, 5, \sigma_x(12, 5) = -.01171875000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$12, 6, \sigma_x(12, 6) = 0.$$

$$12, 7, \sigma_x(12, 7) = .01171875000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$12, 8, \sigma_x(12, 8) = .02343750000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$12, 9, \sigma_x(12, 9) = .03515625000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$12, 10, \sigma_x(12, 10) = .04687500000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$12, 11, \sigma_x(12, 11) = .05859375000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$13, 1, \sigma_x(13, 1) = -.06030273440 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$13, 2, \sigma_x(13, 2) = -.04824218752 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$13, 3, \sigma_x(13, 3) = -.03618164064 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$13, 4, \sigma_x(13, 4) = -.02412109376 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$13, 5, \sigma_x(13, 5) = -.01206054688 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$13, 6, \sigma_x(13, 6) = 0.$$

$$13, 7, \sigma_x(13, 7) = .01206054688 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$13, 8, \sigma_x(13, 8) = .02412109376 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$13, 9, \sigma_x(13, 9) = .03618164064 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$13, 10, \sigma_x(13, 10) = .04824218752 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$13, 11, \sigma_x(13, 11) = .06030273440 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$14, 1, \sigma_x(14, 1) = -.06152343750 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$14, 2, \sigma_x(14, 2) = -.04921875000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$14, 3, \sigma_x(14, 3) = -.03691406250 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$14, 4, \sigma_x(14, 4) = -.02460937500 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$14, 5, \sigma_x(14, 5) = -.01230468750 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$14, 6, \sigma_x(14, 6) = 0.$$

$$14, 7, \sigma_x(14, 7) = .01230468750 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$14, 8, \sigma_x(14, 8) = .02460937500 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$14, 9, \sigma_x(14, 9) = .03691406250 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$14, 10, \sigma_x(14, 10) = .04921875000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$14, 11, \sigma_x(14, 11) = .06152343750 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$15, 1, \sigma_x(15, 1) = -.06225585940 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$15, 2, \sigma_x(15, 2) = -.04980468752 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$15, 3, \sigma_x(15, 3) = -.03735351564 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$15, 4, \sigma_x(15, 4) = -.02490234376 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$15, 5, \sigma_x(15, 5) = -.01245117188 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$15, 6, \sigma_x(15, 6) = 0.$$

$$15, 7, \sigma_x(15, 7) = .01245117188 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$15, 8, \sigma_x(15, 8) = .02490234376 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$15, 9, \sigma_x(15, 9) = .03735351564 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$15, 10, \sigma_x(15, 10) = .04980468752 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$15, 11, \sigma_x(15, 11) = .06225585940 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$16, 1, \sigma_x(16, 1) = -.06250000000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$16, 2, \sigma_x(16, 2) = -.05000000000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$16, 3, \sigma_x(16, 3) = -.03750000000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$16, 4, \sigma_x(16, 4) = -.02500000000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$16, 5, \sigma_x(16, 5) = -.01250000000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$16, 6, \sigma_x(16, 6) = 0.$$

$$16, 7, \sigma_x (16, 7) = .01250000000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$16, 8, \sigma_x (16, 8) = .02500000000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$16, 9, \sigma_x (16, 9) = .03750000000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$16, 10, \sigma_x (16, 10) = .05000000000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$16, 11, \sigma_x (16, 11) = .06250000000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$17, 1, \sigma_x (17, 1) = -.06225585940 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$17, 2, \sigma_x (17, 2) = -.04980468752 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$17, 3, \sigma_x (17, 3) = -.03735351564 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$17, 4, \sigma_x (17, 4) = -.02490234376 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$17, 5, \sigma_x (17, 5) = -.01245117188 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$17, 6, \sigma_x (17, 6) = 0.$$

$$17, 7, \sigma_x (17, 7) = .01245117188 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$17, 8, \sigma_x (17, 8) = .02490234376 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$17, 9, \sigma_x (17, 9) = .03735351564 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$17, 10, \sigma_x (17, 10) = .04980468752 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$17, 11, \sigma_x (17, 11) = .06225585940 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$18, 1, \sigma_x (18, 1) = -.06152343750 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$18, 2, \sigma_x(18, 2) = -.04921875000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$18, 3, \sigma_x(18, 3) = -.03691406250 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$18, 4, \sigma_x(18, 4) = -.02460937500 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$18, 5, \sigma_x(18, 5) = -.01230468750 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$18, 6, \sigma_x(18, 6) = 0.$$

$$18, 7, \sigma_x(18, 7) = .01230468750 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$18, 8, \sigma_x(18, 8) = .02460937500 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$18, 9, \sigma_x(18, 9) = .03691406250 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$18, 10, \sigma_x(18, 10) = .04921875000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$18, 11, \sigma_x(18, 11) = .06152343750 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$19, 1, \sigma_x(19, 1) = -.06030273440 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$19, 2, \sigma_x(19, 2) = -.04824218752 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$19, 3, \sigma_x(19, 3) = -.03618164064 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$19, 4, \sigma_x(19, 4) = -.02412109376 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$19, 5, \sigma_x(19, 5) = -.01206054688 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$19, 6, \sigma_x(19, 6) = 0.$$

$$19, 7, \sigma_x(19, 7) = .01206054688 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$19, 8, \sigma_x(19, 8) = .02412109376 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$19, 9, \sigma_x(19, 9) = .03618164064 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$19, 10, \sigma_x(19, 10) = .04824218752 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$19, 11, \sigma_x(19, 11) = .06030273440 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$20, 1, \sigma_x(20, 1) = -.05859375000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$20, 2, \sigma_x(20, 2) = -.04687500000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$20, 3, \sigma_x(20, 3) = -.03515625000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$20, 4, \sigma_x(20, 4) = -.02343750000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$20, 5, \sigma_x(20, 5) = -.01171875000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$20, 6, \sigma_x(20, 6) = 0.$$

$$20, 7, \sigma_x(20, 7) = .01171875000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$20, 8, \sigma_x(20, 8) = .02343750000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$20, 9, \sigma_x(20, 9) = .03515625000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$20, 10, \sigma_x(20, 10) = .04687500000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$20, 11, \sigma_x(20, 11) = .05859375000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$21, 1, \sigma_x(21, 1) = -.05639648440 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$21, 2, \sigma_x(21, 2) = -.04511718752 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$21, 3, \sigma_x(21, 3) = -.03383789064 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$21, 4, \sigma_x(21, 4) = -.02255859376 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$21, 5, \sigma_x(21, 5) = -.01127929688 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$21, 6, \sigma_x(21, 6) = 0.$$

$$21, 7, \sigma_x(21, 7) = .01127929688 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$21, 8, \sigma_x(21, 8) = .02255859376 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$21, 9, \sigma_x(21, 9) = .03383789064 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$21, 10, \sigma_x(21, 10) = .04511718752 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$21, 11, \sigma_x(21, 11) = .05639648440 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$22, 1, \sigma_x(22, 1) = -.05371093750 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$22, 2, \sigma_x(22, 2) = -.04296875000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$22, 3, \sigma_x(22, 3) = -.03222656250 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$22, 4, \sigma_x(22, 4) = -.02148437500 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$22, 5, \sigma_x(22, 5) = -.01074218750 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$22, 6, \sigma_x(22, 6) = 0.$$

$$22, 7, \sigma_x(22, 7) = .01074218750 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$22, 8, \sigma_x(22, 8) = .02148437500 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$22, 9, \sigma_x(22, 9) = .03222656250 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$22, 10, \sigma_x(22, 10) = .04296875000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$22, 11, \sigma_x(22, 11) = .05371093750 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$23, 1, \sigma_x(23, 1) = -.05053710940 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$23, 2, \sigma_x(23, 2) = -.04042968752 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$23, 3, \sigma_x(23, 3) = -.03032226564 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$23, 4, \sigma_x(23, 4) = -.02021484376 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$23, 5, \sigma_x(23, 5) = -.01010742188 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$23, 6, \sigma_x(23, 6) = 0.$$

$$23, 7, \sigma_x(23, 7) = .01010742188 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$23, 8, \sigma_x(23, 8) = .02021484376 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$23, 9, \sigma_x(23, 9) = .03032226564 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$23, 10, \sigma_x(23, 10) = .04042968752 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$23, 11, \sigma_x(23, 11) = .05053710940 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$24, 1, \sigma_x(24, 1) = -.04687500000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$24, 2, \sigma_x(24, 2) = -.03750000000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$24, 3, \sigma_x(24, 3) = -.02812500000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$24, 4, \sigma_x(24, 4) = -.01875000000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$24, 5, \sigma_x(24, 5) = -.009375000000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$24, 6, \sigma_x(24, 6) = 0.$$

$$24, 7, \sigma_x(24, 7) = .009375000000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$24, 8, \sigma_x(24, 8) = .01875000000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$24, 9, \sigma_x(24, 9) = .02812500000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$24, 10, \sigma_x(24, 10) = .03750000000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$24, 11, \sigma_x(24, 11) = .04687500000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$25, 1, \sigma_x(25, 1) = -.04272460938 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$25, 2, \sigma_x(25, 2) = -.03417968750 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$25, 3, \sigma_x(25, 3) = -.02563476562 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$25, 4, \sigma_x(25, 4) = -.01708984375 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$25, 5, \sigma_x(25, 5) = -.008544921875 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$25, 6, \sigma_x(25, 6) = 0.$$

$$25, 7, \sigma_x(25, 7) = .008544921875 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$25, 8, \sigma_x(25, 8) = .01708984375 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$25, 9, \sigma_x(25, 9) = .02563476562 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$25, 10, \sigma_x(25, 10) = .03417968750 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$25, 11, \sigma_x(25, 11) = .04272460938 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$26, 1, \sigma_x(26, 1) = -.03808593750 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$26, 2, \sigma_x(26, 2) = -.03046875000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$26, 3, \sigma_x(26, 3) = -.02285156250 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$26, 4, \sigma_x(26, 4) = -.01523437500 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$26, 5, \sigma_x(26, 5) = -.007617187500 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$26, 6, \sigma_x(26, 6) = 0.$$

$$26, 7, \sigma_x(26, 7) = .007617187500 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$26, 8, \sigma_x(26, 8) = .01523437500 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$26, 9, \sigma_x(26, 9) = .02285156250 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$26, 10, \sigma_x(26, 10) = .03046875000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$26, 11, \sigma_x(26, 11) = .03808593750 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$27, 1, \sigma_x(27, 1) = -.03295898438 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$27, 2, \sigma_x(27, 2) = -.02636718750 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$27, 3, \sigma_x(27, 3) = -.01977539062 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$27, 4, \sigma_x(27, 4) = -.01318359375 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$27, 5, \sigma_x(27, 5) = -.006591796875 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$27, 6, \sigma_x(27, 6) = 0.$$

$$27, 7, \sigma_x(27, 7) = .006591796875 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$27, 8, \sigma_x(27, 8) = .01318359375 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$27, 9, \sigma_x(27, 9) = .01977539062 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$27, 10, \sigma_x(27, 10) = .02636718750 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$27, 11, \sigma_x(27, 11) = .03295898438 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$28, 1, \sigma_x(28, 1) = -.02734375000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$28, 2, \sigma_x(28, 2) = -.02187500000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$28, 3, \sigma_x(28, 3) = -.01640625000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$28, 4, \sigma_x(28, 4) = -.01093750000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$28, 5, \sigma_x(28, 5) = -.005468750000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$28, 6, \sigma_x(28, 6) = 0.$$

$$28, 7, \sigma_x(28, 7) = .005468750000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$28, 8, \sigma_x(28, 8) = .01093750000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$28, 9, \sigma_x(28, 9) = .01640625000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$28, 10, \sigma_x(28, 10) = .02187500000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$28, 11, \sigma_x(28, 11) = .02734375000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$29, 1, \sigma_x(29, 1) = -.02124023438 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$29, 2, \sigma_x(29, 2) = -.01699218750 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$29, 3, \sigma_x(29, 3) = -.01274414062 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$29, 4, \sigma_x(29, 4) = -.008496093750 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$29, 5, \sigma_x(29, 5) = -.004248046875 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$29, 6, \sigma_x(29, 6) = 0.$$

$$29, 7, \sigma_x(29, 7) = .004248046875 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$29, 8, \sigma_x(29, 8) = .008496093750 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$29, 9, \sigma_x(29, 9) = .01274414062 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$29, 10, \sigma_x(29, 10) = .01699218750 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$29, 11, \sigma_x(29, 11) = .02124023438 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$30, 1, \sigma_x(30, 1) = -.01464843750 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$30, 2, \sigma_x(30, 2) = -.01171875000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$30, 3, \sigma_x(30, 3) = -.008789062500 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$30, 4, \sigma_x(30, 4) = -.005859375000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$30, 5, \sigma_x(30, 5) = -.002929687500 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$30, 6, \sigma_x(30, 6) = 0.$$

$$30, 7, \sigma_x(30, 7) = .002929687500 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$30, 8, \sigma_x(30, 8) = .005859375000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$30, 9, \sigma_x(30, 9) = .008789062500 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$30, 10, \sigma_x(30, 10) = .01171875000 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$30, 11, \sigma_x(30, 11) = .01464843750 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$31, 1, \sigma_x(31, 1) = -.007568359375 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$31, 2, \sigma_x(31, 2) = -.006054687500 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$31, 3, \sigma_x(31, 3) = -.004541015625 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$31, 4, \sigma_x(31, 4) = -.003027343750 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$31, 5, \sigma_x(31, 5) = -.001513671875 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$31, 6, \sigma_x(31, 6) = 0.$$

$$31, 7, \sigma_x(31, 7) = .001513671875 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$31, 8, \sigma_x(31, 8) = .003027343750 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$31, 9, \sigma_x(31, 9) = .004541015625 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$31, 10, \sigma_x(31, 10) = .006054687500 \frac{q L^2 h}{mi}$$

$$31, 11, \sigma_x(31, 11) = .007568359375 \frac{q L^2 h}{mi}$$

REFERENCES
BIBLIOGRAPHIQUES

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1],[2] STI2D – SSI : Comportement des structures Formation académie Nancy-Metz–
Mai2012 .
- [3] F. Guttman, R. Sauer et W. Wagner { Shear stresses in prismatic beams with
arbitrary cross-sections }, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 45
(1999), p. 865-889. et J. Hutchison { Shear coefficients for Timoshenko beam theory } *Journal
of Applied Mecha- nice, ASME* 68 (2001), p. 8-92.
- [4] Matériaux composites-Comportement mécanique et analyse des structures, J.M. Berthelot,
Masson, ISBN 2-225-85425-4, 1996
Et Introduction to Design and Analysis with Advanced Composite Materials, Stephen R.
Swanson, Prentice-Hall Inc, ISBN 0-02-418554-X, 1997.
- [5] B. Mohammadi, J.-H. Saïac, “Pratique de la simulation numérique”. Dunod (Industries et
Technologies), 2003.