



**FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES**  
**DÉPARTEMENT DE GÉNIE CIVIL**

**Mémoire de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme de Master**

Spécialité : Génie Civil

Option : Ouvrage d'Art et Infrastructure (OAI)

Présenté par :

**M KOUCHIH AICHA**

**M KOUIDER ROKIYA**

*Sujet du mémoire*

**Analyse de flexion des plaques en matériaux à  
gradient de propriétés type E-FGM**

*Soutenu publiquement le juin 2017 devant le jury composé de :*

Mr : TLIDJI YUCEF

Mr : DRAICHE KADA

Mr : HADJI LAZREG

Mr : ABDE LAZIZ HADJ HENNI

M : KHELIFA ZOUBIDA

Président

Rapporteur

Examineur

Examineur

Examineur

# REMERCIEMENTS

*Avant tous, je remercie ALLAH le tout puissant qui m'a donné le courage de continuer mes études, et la volonté pour atteindre mon objectif,*

*J'aimerais exprimer toute ma reconnaissance à mes parents, mon oncle et sa femme, sans qui ce travail n'aurait pas connu le succès.*

*Je remercie vivement, mon promoteur Mr : DRACHE Kada de m'â avoir pris en charges,*

*Et pour sa disponibilité, son aide et ses précieux conseils.*

*Je porte avec gratitude et reconnaissance l'ensemble des professeurs du département de Génie Civil qui ont contribué à ma formation d'ingénieur en Génie Civil.*

*Je remercie SLIDJI Youcef et LAZREG Hadji de m'avoir aidé.*

*Notre profonde gratitude s'adresse aussi à l'ensemble des cadres de département de Génie Civil université IBN KHALDOUN de TARET qui nous a aidés beaucoup à titre de cette documentation.*

*Je ne saurais oublier de remercier tous les Membres du Jury qui ont consacré leur temps pour examiner ce travail.*

*Enfin, je remercie tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à ce travail.*



# Dédicace

*A mes très chers parents qui m'ont guidé durant les moments les plus pénibles  
chemin. Mon père qui a sacrifié toute sa vie afin de me voir devenir ce que je  
Ma mère qui a été à mes côtés et ma soutenu durant toute ma vie*

*Merci mes parents.*

*A mon très cher mari Samir qui m'a toujours encouragé et m'a soutenu à réaliser à faire  
ce travail*

*A mes très chers frères : Mohamed ; Omar ; nouer Eddine ; Yassine et Ahmed.*

*A mes sœurs : Yamina ; Mimouna ; Lila ; Miyada et Souhila.*

*Et toute la famille Kouidre et bouroumana.*

*Nous remercions notre encadreur Mr DRACHE KADA de son soutien et ses efforts  
pour nous encadrer et enformer.*

*Je voudrai bien remercier mon ami AICHA pour a tous.*

*Et à toute mes amies : Siham, Fatima, Ilham, Hanane, Mimouna, Souhila, Warda et...*

*A tous mes collègues de promotion de Génie Civil promotion O.A.I*

*Aussi à mes chers professeurs qui m'ont soutenu durant mon cycle d'étude universitaire  
et dont je suis fier d'eux.*

*Enfin à tous ceux qui me sont très chers.*

*Kouidre Rokiya*

# Dédicace

وما توفيقي إلا بالله عليه توكلت وإليه أنيب

*A mes très chers parents qui m'ont guidé durant les moments les plus pénibles des long chemin*

*Mon père qui a sacrifié toute sa vie afin de me voir devenir ce que je suis,*

*Sans oublier ma mère défunte qui a été à mes côtés quand elle était à vie.*

*A mon très cher mari islam qui m'a toujours encouragé et m'a soutenu à réaliser à faire ce travail.*

*A mes très chers frères : Brahim ; Abdelkader ; Qualid ; mon oncle djilali*

*A mes sœurs : Mimouna; Sana; Afnane, et Raghed.*

*Et toute la famille Kouchih et Chennoufi.*

*Nous remercions notre encadreur Mr DRAICHE KADA de son soutien et ses efforts pour nous encadrer et enseigner.*

*Je voudrai bien remercier mon ami Rokhya pour a tous.*

*Et à toute mes amies : Ilham, Hanane, Fatima, Siham, Mimoun, Souhila, Ouarda et...*

*A tous mes collègues de promotion de Génie Civil surtout promotion O.A.I*

*Aussi à mes chers professeurs qui m'ont soutenu durant mon cycle d'étude universitaire et dont je suis fier d'eux.*

*Enfin à tous ceux qui me sont très chers.*

*Kouchih Aicha*

## **SOMMAIRE**

ملخص.....	I
Résumé.....	II
Abstract .....	III
Liste des figures .....	VI
Liste des tableaux .....	V
Liste des notations .....	IV
Introduction générale .....	01
<i>Généralités sur les matériaux à gradient de propriétés « FGMs »</i> .....	04
<b>I.1. Introduction</b> .....	<b>05</b>
<b>I.2. Définition et le concept d'un matériau à gradient de propriétés</b> .....	<b>06</b>
<b>I.3. Historique du développement de FGM</b> .....	<b>07</b>
<b>I.4. L'intérêt d'utilisation des FGM</b> .....	<b>09</b>
<b>I.5. Les différents types des FGM</b> .....	<b>09</b>
<b>I.6. Type général des plaques</b> .....	<b>10</b>
<b>I.7. Les méthodes de fabrication du matériau à gradient de propriétés</b> .....	<b>11</b>
<b>I.7.1. Coulage en bande (Tape Casting ou Doctor-Blade)</b> .....	<b>11</b>
<b>I.7.2. Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting)</b> .....	<b>12</b>
<b>I.7.3. Compaction sèche des Poudres</b> .....	<b>13</b>
<b>I.7.4. Projection plasma</b> .....	<b>13</b>
<b>I.7.5. Frittage et infiltration</b> .....	<b>14</b>
<b>I.7.6. Dépôt physique en phase vapeur (PVD)</b> .....	<b>14</b>
<b>I.7.7. Dépôt chimique en phase vapeur (CVD)</b> .....	<b>15</b>
<b>I.7.8. Frittage Laser Différentiel</b> .....	<b>16</b>
<b>I.7.9. Dépôt par électrophorèse</b> .....	<b>17</b>
<b>I.8. Propriétés physiques et mécaniques des constituants de FGM</b> .....	<b>17</b>
<b>I.8.1. Propriétés de l'Aluminium</b> ... ..	<b>18</b>

a) Propriétés physiques .....	18
b) Propriétés mécaniques .....	18
I.8.2. Propriétés de la céramique .....	18
a) Propriétés physiques .....	19
b) Propriétés mécaniques.....	19
I.9. Propriétés matérielles effectives des FGM.....	19
I.9.1. La fonction de puissance (P-FGM) .....	20
I.9.1. La fonction sigmoïde (S-FGM) .....	21
I.9.1. Les propriétés matérielles de la poutre E-FGM .....	21
I.10. Domaines d'application des matériaux à gradients évalués FGM .....	22
I.11. Conclusion.....	23
<i>Théories des plaques FGM</i> .....	24
II.1. Introduction.....	25
II.2. Définition d'une plaque.....	25
II.3. Modèles analytiques des plaques FGM .....	26
II.3.1. Théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT) .....	26
II.3.2. Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) .....	28
II.3.3. Théorie de déformation en cisaillement D'ordre élevé (HSDT) .....	30
II.4. Revue sur les différents modèles de la théorie d'ordre élevé .....	31
II.5. Théorie de Zig-zag .....	34
II.4. Conclusion .....	35
<i>Etude du comportement statique des plaques en matériaux à gradient de propriétés</i>	
<i>type E-FGM</i> .....	36
III.1. Introduction .....	37
III.2. Configuration géométrique .....	37
III.2.1. Cinématique .....	38
III.2.2. Champ de déformation .....	39
III.3. Equations constitutives .....	40
III.4. Détermination des équations d'équilibre .....	41

<b>III.5. Détermination des coefficients de rigidité .....</b>	<b>43</b>
<b>III.6. Solution exacte pour une plaque E-FGM simplement appuyée .....</b>	<b>46</b>
<b>III.7. Conclusion .....</b>	<b>48</b>
<i>Résultats et discussions .....</i>	<i>49</i>
<b>IV.1. Introduction .....</b>	<b>50</b>
<b>IV.2. Résultats et discussions .....</b>	<b>50</b>
<b>IV.2.1. Résultats de flexion des plaques isotropes E-FGM .....</b>	<b>51</b>
<b>IV.3. Conclusion .....</b>	<b>62</b>
<b>Conclusion générale .....</b>	<b>64</b>
<b>Référence bibliographique .....</b>	<b>65</b>

---

---

## الملخص

---

---

يقدم هذا العمل (الانجاز) نظرية بسيطة لكازي D3 وهذا لتحليل ليونة الصفحات من مواد لها وظيفة بدرجات ذات مميزات مادية تتغير حسب الدالة الأسية E-FGM. تتطرق هذه النظرية في أن واحد إلى تشويه القص العرضي ومفعول امتداد السمك عن طريق تغيرات جيبي لكل التنقلات عن طريق السمك E-FGM بتقسيم التنقل العرضي إلى مكونين: الليونة والقص عدد المجاهيل و معدلات الحركات للنظرية الحالية يتقلص و نتيجة لذلك تصبح هذه النظرية بسيطة الاستعمال. معادلات الحركة و الشروط المحدودة مشتقون من مبادئ التنقلات الفرضية (الغير حقيقية). هناك حلول تحليلية متحصل عليها لصفحات مضغوطة ببساطة التأكيد على النظرية الحالية مؤكد فيه و ذلك بمقارنة النتائج المحصل عليها مع حلول مطاطية كازي D3 و D3 والآخرى بنظرية تشويه القص من الصنف الرفيع. دراسات المقارنة بينت ان النتائج المحصل عليها ليست فقط محددة مثل المحصل عليها عن طريق نظرية التشويه القصي للصنف الرفيع لكن يمكن أيضا مقارنتها بمن قدموه عن طريق نظرية كازي D3 مع عدد أكبر من المجاهيل. الكلمات الرئيسية: تشويه القص, كازي D3, حلول تحليلية, E-FGM.

---

---

## Résumé

---

---

Ce travail présente une simple théorie quasi-3D pour analyser la flexion des plaques en matériaux fonctionnellement gradués dont les propriétés matérielles varient selon une fonction exponentielle « E-FGM ». Cette théorie explique à la fois la déformation du cisaillement transversal et les effets d'étirement de l'épaisseur par une variation sinusoïdale de tous les déplacements à travers l'épaisseur. En divisant le déplacement transversal en deux composantes, de flexion et de cisaillement, le nombre d'inconnues et les équations de mouvements de la présente théorie est réduit et par conséquent, rend cette théorie simple à utiliser. Les équations de mouvements et les conditions aux limites sont dérivées du principe des déplacements virtuels. Des solutions analytiques sont obtenues pour les plaques simplement appuyées. La précision de la présente théorie est vérifiée en comparant les résultats obtenus avec les solutions d'élasticité 3D et quasi 3D et celles prédites par les théories de déformation du cisaillement d'ordre élève. Les études de comparaison montrent que les résultats obtenus ne sont pas seulement plus précis que ceux obtenus par des théories de déformation de cisaillement d'ordre élève, mais aussi comparables à ceux qui sont présentés par des théories quasi-3D avec un plus grand nombre d'inconnues.

**Mots clés:** Plaques E-FGM, Théorie quasi 3D, Flexion, Solutions analytiques.

---

---

## **Abstract**

---

---

This paper presents a simple quasi-3D theory for the bending analysis solution of functionally graded plates. This theory accounts for both shear deformation and thickness stretching effects by a sinusoidal variation of all displacements through the thickness. By dividing the transverse displacement into bending and shear parts, the number of unknowns and governing equations of the present theory is reduced, and hence, makes it simple to use. The governing equations and boundary conditions are derived using the principle of virtual displacements. Analytical solutions are obtained for simply supported plates. The accuracy of the present theory is verified by comparing the obtained results with 3D and quasi-3D analytical solutions and those predicted by higher-order shear deformation theories. The comparison studies show that the obtained results are not only more accurate than those obtained by higher-order shear deformation theories, but also comparable with those predicted by quasi-3D theories with a greater number of unknowns.

Keywords: FGM plate, exponential shear deformation theory, quasi-3D

## Liste des figures

Chapitre I		
Figure I.1	type d'un matériau <b>FGM</b> (céramique / métal)	7
Figure I.2	Modèle d'un FGM	7
Figure I.3	Caractéristiques de FGM.	9
Figure I.4	Principe de la méthode coulage en bande.	12
Figure I.5	Principe de la méthode coulage séquentiel en barbotine.	13
Figure I.6	Illustration conceptuelle d'une méthode de projection par plasma pour former un matériau thermoélectrique gradué. (La composition est graduée dans la direction plane)	14
Figure I.7	Schéma de l'installation pour la préparation d'un SiC/C FGM par le dépôt chimique en phase vapeur (CVD)	16
Figure I.8	Disposition du procédé frittage laser différentiel	16
Figure I.9	Vue schématique de l'installation d'EPD pour la production des matériaux FGM	17
Figure I.10	Géométrie d'une plaque en FGM	19
Figure I.11	Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.	20
Figure I.12	Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM [Nora Kassimi 2011]	21
Figure I.13	Variation du module de Young dans une plaque E-FGM. [HASSEN. Ait Atman 2011]	22
Chapitre II		
Figure II.1	Géométrie d'une plaque de forme géométrique arbitraire	26
Figure II.2	Illustration de la plaque de Love-Kirchhoff.	27
Figure II.3	Illustration de la plaque de Reissner- Mindlin [29]	29
Figure II.4	Illustration de la plaque d'ordre élève [Reddy 1984].	30
Figure II.5	Champ de déplacements des modèles ZIG-ZAG d'ordre élevé [Carrera 2004].	35
Chapitre III		

Figure III.1	Géométrie d'une Plaque FGM isotrope	37
Chapitre IV		
Figure IV.1	Variation du déplacement adimensionnel $\bar{u}$ dans une plaque E-FGM isotrope simplement appuyée, soumise à une charge sinusoïdale, $a/h = 4, p = 0.5$	59
Figure IV.2	Variation du déplacement transversal adimensionnel $\bar{w}$ dans une plaque E-FGM isotrope simplement appuyée, soumise à une charge sinusoïdale, $a/h = 4, p = 0.5$	59
Figure IV.3	Distribution des contraintes normales axiales $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur d'une plaque E-FGM isotrope simplement appuyée, soumise à une charge sinusoïdale, $a/h = 4, p = 0.5$	60
Figure IV.4	Distribution des contraintes de cisaillement $\bar{\tau}_{xy}$ à travers l'épaisseur d'une plaque E-FGM isotrope simplement appuyée, soumise à une charge sinusoïdale, $a/h = 4, p = 0.5$	60
Figure IV.5	Distribution des contraintes de cisaillement $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur d'une plaque E-FGM isotrope simplement appuyée, soumise à une charge sinusoïdale, $a/h = 4, p = 0.5$	61
Figure IV.6	Distribution des contraintes de cisaillement $\bar{\tau}_{yz}$ à travers l'épaisseur d'une plaque E-FGM isotrope simplement appuyée, soumise à une charge sinusoïdale, $a/h = 4, p = 0.5$	61

## Liste des tableaux

Chapitre I		
Tableau I.1	Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.	6
Chapitre II		
Tableau II.1	Différentes fonctions de cisaillement utilisées dans les théories des plaques isotropes et FGM	34
Chapitre IV		
Tableau IV.1	Les propriétés matérielles utilisées dans la plaque en E-FGM	51
Tableau IV.2	Les différents modèles du champ de déplacement	51
Tableau IV.3	Déplacement transversal adimensionnel $\bar{w}(z=0)$ dans une plaque E-FGM isotrope simplement appuyée, soumise à une charge sinusoïdale, $a/h = 2$	52
Tableau IV.4	Déplacement transversal adimensionnel $\bar{w}(z=0)$ dans une plaque E-FGM isotrope simplement appuyée, soumise à une charge sinusoïdale, $a/h = 4$	53
Tableau IV.5	Déplacement transversal adimensionnel $\bar{w}(z=0)$ dans une plaque E-FGM isotrope simplement appuyée, soumise à une charge sinusoïdale, $a/h = 10$	54
Tableau IV.6	Contraintes normales adimensionnelles $\bar{\sigma}_y(z=h/2)$ dans une plaque E-FGM isotrope simplement appuyée, soumise à une charge sinusoïdale, $a/h = 2$	55
Tableau IV.7	Contraintes normales adimensionnelles $\bar{\sigma}_y(z=h/2)$ dans une plaque E-FGM isotrope simplement appuyée, soumise à une charge sinusoïdale, $a/h = 4$	56

Tableau IV.8	Contraintes normales adimensionnelles $\bar{\sigma}_y(z = h/2)$ dans une plaque E-FGM isotrope simplement appuyée, soumise à une charge sinusoïdale, $a/h = 10$	57
Tableau IV.9	Contraintes normales adimensionnelles $\bar{\sigma}_x(z = h/2)$ dans une plaque E-FGM isotrope simplement appuyée, soumise à une charge sinusoïdale, $a/h = 10$	57
Tableau IV.10	Contraintes de cisaillement transversal adimensionnelles $\bar{\sigma}_{xz}(z = 0)$ dans une plaque E-FGM isotrope simplement appuyée, soumise à une charge sinusoïdale, $a/h = 10$	58

## Liste des notations

Notations	
$E$	Module de Young
$E_c$	Module de Young de la céramique
$E_m$	Module de Young de métal
$E_1$	Module de Young de la face supérieure
$E_2$	Module de Young de la face inférieure
$E(z)$	Module de Young effectif
$\nu$	Coefficient de Poisson
$\nu(z)$	Coefficient de Poisson en fonction de « z »
$V(z)$	Fraction volumique local
$P$	Paramètre de matériau
$B$	la largeur de la plaque
$\sigma_{ij}$	Contraintes de cisaillement
$\epsilon_{ii}$	Déformations normales
$\epsilon_{ij}$	Déformations de cisaillement
$\gamma_{ij}$	Déformations angulaires (distorsions)
$N_x, N_y, N_{xy}$	Efforts normaux
$M_x, M_y, M_{xy}$	Moments de flexion
$P_x, P_y, P_{xy}$	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse
$h$	L'épaisseur totale de la plaque
$L$	La longueur de la plaque
$u, v, w$	Les déplacements suivant les directions x, y et z
$u_0, v_0, w_0$	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
$(\phi_x, \phi_y)$	Les rotations autour des axes x, y

$f(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$f'(z)$	La première dérivée de la fonction de gauchissement par rapport à $z$
$\rho$	la densité massique
$\sigma_x, \sigma_y$	Contraintes normales
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	Contraintes de cisaillement
$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$	Déformations dans les directions $x$ et $y$ et $z$
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	Déformations de distors
$\Delta$	Opérateur de variation
$\delta u, \delta v, \delta w_b, \delta w_s$	Champ virtuel de déplacement
$w_b$	Composante de la flèche due à la flexion
$w_s$	Composante de la flèche due au cisaillement
$R$	Moments de flexion
$S$	Effort de cisaillement pur
$m, n$	Nombres de mode
$A_{ij}$	Termes de rigidité en membrane de la plaque
$B_{ij}$	Termes de rigidité de couplage de la plaque
$D_{ij}$	Termes de rigidité de flexion de la plaque
$E_{ij}$	Termes de rigidité de flexion de la plaque
$F_{ij}$	Termes de rigidité de flexion de la plaque
$H_{ij}$	Termes de rigidité de flexion de la plaque
$A_{ij}^s$	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement

**Liste des notations**

$B_{ij}^s$	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
$H_{ij}^s$	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
$D_{ij}^s$	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
$I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6$	constante d'inertie
$Q_{ij}$	Les coefficients de rigidité tridimensionnels
$A$	la surface supérieure de la plaque
$d_{ij}, d_{ijl}, d_{ijlm}$	Les opérateurs différentiels
$\partial$	Dérivée partielle
$a_{ij}$	Valeurs propres
$i, j$	Nombres naturels
$[K]$	Matrice de rigidité
$\{\Delta\}$	Le vecteur de colonne
$\bar{w}$	La flèche
$g(z)$	La fraction volumique
$U_{mn}, V_{mn}, W_{bmn}, W_{smn}, \Phi_{zmn}$	Paramètres arbitraires

# ***INTRODUCTION GÉNÉRALE***

---

---

## **Introduction générale**

---

---

Les matériaux fonctionnellement gradués (functionally graded materials : FGM) sont classés parmi les matériaux avancés dont les propriétés matérielles des constituants varient sans interruption et avec un changement doux et continu de la composition d'une surface à autre à travers l'épaisseur, de ce fait éliminant les problèmes d'interface et la concentration des contraintes observé au niveau des matériaux composites stratifiés. Un E-FGM est généralement constitué d'un mélange de deux phases matérielles, par exemple la céramique et le métal où les propriétés physiques comme par exemple le module de Young et le coefficient de dilation thermique varient selon une fonction exponentielle. La raison de l'utilisation croissante des matériaux en gradient de propriétés dans une variété de structures d'ingénierie aérospatiale, automobile, civile et mécanique est que leurs propriétés matérielles peuvent être adaptées à différentes applications et environnements de travail. L'augmentation des applications des FGMs nécessite le développement des théories précises pour prédire leurs réponses. Il convient de noter que la théorie classique des plaques (CPT), basée sur l'hypothèse de Kirchhoff, est adaptée aux plaques minces, mais insuffisante pour les plaques épaisses ou les plaques en composites avancés comme les FGM. La théorie de la déformation du cisaillement du premier ordre (FSDT) (S.Hosseini-Hashemi et al, 2011), (X. Zhao et al, 2009) explique l'effet de déformation du cisaillement par la variation linéaire des déplacements dans le plan à travers l'épaisseur. Ainsi, un facteur de correction de cisaillement est nécessaire pour compenser la différence entre les états de contrainte constante supposés et réels (HT. Thai et al 2013), La théorie de déformation du cisaillement d'ordre élevé (HSDT) (JN.Reddy et al, 2000), (HT. Thai et al 2013), explique l'effet de déformation du cisaillement par une variation d'ordre supérieur des déplacements dans le plan à travers l'épaisseur et, par conséquent, nécessite pas l'introduction d'un facteur de correction du cisaillement. Il convient de noter que les théories des plaque 2-D mentionnées ci-dessus, c'est-à-dire CPT, FSDT et HSDT éliminent l'effet d'étirement de l'épaisseur ( $\epsilon_z=0$ ) en raison d'un déplacement transversal constant dans l'épaisseur. Cette hypothèse est appropriée pour des plaques minces

ou moyennement épaisses fonctionnellement graduées, mais elle est insuffisante pour les plaques épaisses (LF.Qianet al, 2004). L'importance de l'effet d'étirement des épaisseurs dans les plaques FGM a été présentée dans le travail de Carrera et al. (E. Carrera et al, 2011). Cet effet joue un rôle important dans les plaques E-FGM moyennement épaisses et épaisses et doit être pris en considération.

Les théories quasi-3D sont des théories d'ordre élevé HSDT avec des variations d'ordre supérieur à travers l'épaisseur de la composante du déplacement transversal. En général, les théories quasi-3D peuvent être mises en œuvre en utilisant la formulation unifiée initialement proposée par Carrera (E. Carrera et al, 2001), (E. Carrera et al, 2005) et récemment étendue par Demasi (L.Demasi et al 2008), (L.Demasi et al 2009). Des informations plus détaillées et des applications de la formulation unifiée peuvent être trouvées dans les livres récents de Carrera et al. (E. Carrera et al, 2011). Étant donné que la théorie quasi-3D représente une variation d'ordre supérieur des déplacements dans le plan et de déplacement transversal à travers l'épaisseur, l'effet de déformation du cisaillement et l'effet d'étirement de l'épaisseur sont pris en considération. Beaucoup de théories quasi-3D ont été proposées dans la littérature (H.Matsunaga et al, 2009), (AMA.Neves et al, 2013). Ces théories sont lourdes et prendre beaucoup du temps en termes de calcul en raison d'un nombre important des variables inconnus, par exemple, les théories de Talha et Singh (M. Talha et al, 2010) avec treize inconnus; Chen et al. (CS. Chen et al, 2009) et Reddy (JN.Reddy et al, 2011) avec onze inconnus, et Ferreira et al. (AJM.Ferreira et al, 2011) et Neves et al. (AMA.Neves et al, 2012). (AMA.Neves et al, 2013) avec neuf inconnus. Bien que certaines théories quasi 3D connues développées par Zenkour (A. Zenkour, 2007) et récemment par Mantari et Guedes Soares (JL.Mantari et al, 2012), (JL.Mantari et al, 2013) ont six inconnues, elles sont encore plus compliquées que la théorie de déformation du cisaillement de premier ordre. A cet effet, il est nécessaire de développer une simple théorie quasi 3D.

Ce travail de mémoire vise à présenter une simple théorie quasi-3D avec seulement Cinq inconnus. Le champ de déplacement est choisi en fonction d'une Variation sinusoïdale des déplacements dans le plan et de la composante de déplacement transversal à travers l'épaisseur. Le déplacement transversal est devisé en trois quantité; de flexion et de cisaillement ce qui conduit à une réduction du nombre d'inconnus, et par la suite, rend la présente théorie simple à utilisation. Les équations de mouvement et les conditions aux limites sont dérivées En utilisant le principe des déplacements virtuels. Les solutions

analytiques de la flexion des plaques E-FGM rectangulaires et les contraintes sont obtenus pour le cas simplement appuyé. Des exemples numériques sont présentés pour vérifier la validité de la présente théorie.

La rédaction de notre mémoire se compose de quatre chapitres :

Le premier chapitre, consiste à présenter une étude bibliographique sur la nouvelle classe de composites désignés par les matériaux fonctionnellement gradués, en discutons sur la recherche scientifique pour le développement de ces derniers ainsi que les différents procédés de fabrication et leurs intérêts à travers les secteurs de l'industrie moderne.

Dans le deuxième chapitre nous décrivons selon une synthèse historique récente, les fameuses tendances concernant la formulation des différentes théories des plaques correspondantes. L'étude repose sur les travaux réalisés durant la dernière décennie.

Le troisième chapitre est consacré plus particulièrement à une étude analytique du comportement statique de flexion des plaques en matériaux à gradient de propriétés type E-FGM simplement appuyées, en utilisant une simple théorie quasi-3D à cinq variables qui tient en considération l'effet d'étirement à travers l'épaisseur des plaques -FGM.

Le quatrième chapitre est également réservé pour commenter les résultats numériques obtenus par la validation de la présente théorie quasi-3D.

Une conclusion générale sur l'ensemble de ces travaux permet de revenir sur les résultats importants mis en avant. C'est aussi l'occasion d'évoquer diverses perspectives dans le cadre de l'étude des effets des différents types de chargement et de conditions d'appuis sur le comportement mécanique des plaques E-FGM.

**CHAPITRE I:**

**GÉNÉRALITÉ SUR LES MATÉRIAUX  
À GRADIENTS DE PROPRIÉTÉS**

**FGMS**

## I.1. Introduction

Les matériaux à gradients de propriétés (FGM) ont été développés pour leurs excellentes propriétés mécaniques et thermiques. Ces matériaux ont de grandes performances et capables de résister aux températures ultra-hautes. Les FGM sont au microscope des matériaux composites non homogènes. Ces matériaux sont généralement faits à partir d'un mélange de métaux et de céramique. L'avantage d'utiliser ces matériaux est qu'ils peuvent résister à de hautes températures tout en maintenant leur propriété structurelle. Les FGM possèdent des propriétés qui changent graduellement et sans interruption afin de réaliser une fonction désirée. Un FGM typique, avec un effet élevé de couplage flexion-membrane, est un composite homogène fabriqué à partir de différentes phases de composants de matériaux (le plus souvent en céramique et métal). La composition change d'une surface en céramique à une surface en métal avec une variation voulue de la fraction volumique des deux matériaux entre les deux surfaces.

Le matériau à gradients de propriétés a été introduit pour la première fois au milieu des années 1980 par un groupe de chercheurs japonais. Depuis, un effort a été suivi pour développer des matériaux à haute résistance basée sur les matériaux à gradient fonctionnel. Ces matériaux ont été initialement conçus comme des matériaux de barrière thermique pour les structures aérospatiales et les réacteurs de fusion. Ils sont maintenant développés pour un usage général en tant que composants structuraux dans un environnement de haute température.

Au début, les FGM ont été conçus en tant que matériaux thermiques de barrière dans les applications aéronautiques et les réacteurs. C'est par la suite que les FGM ont été développés dans le domaine militaire, l'automobile, le biomédicale, l'industrie de semi-conducteur et toutes utilisations dans un environnement à hautes températures.

Ces types de matériaux, ont suscité beaucoup d'attention récemment en raison des avantages de diminuer la disparité dans les propriétés matérielles et de réduire les contraintes thermiques.

La variation continue des propriétés mécaniques confère au matériau un comportement optimisé. Les FGM sont particulièrement utilisés dans les applications de haute

technologique: aéronautique, aérospatiale, nucléaire, semi-conducteurs, et en Génie Civil et trouvent également des applications biomédicales.

La plupart des « FGM » sont constitués des céramiques et des métaux dont les propriétés mécaniques sont comparés dans le tableau I.1.

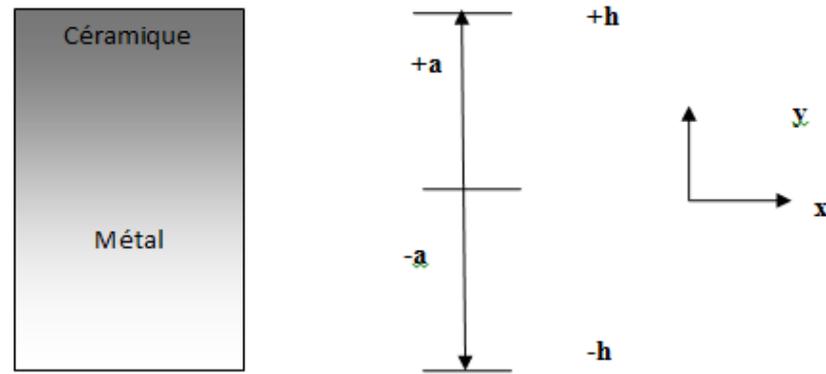
**Tableau I.1 :** Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.

Phase		Caractéristiques mécaniques
Céramique	La face à haute température	- Bonne résistance thermique ; - Bonne résistance à l'oxydation ; - Faible conductivité thermique.
Céramique-métal	Continuité du matériau d'un point à l'autre « couches intermédiaires »	-Élimination des problèmes de l'interface ; -Relaxer les contraintes thermiques.
Métal	La face à basse température	- Bonne résistance mécanique ; - Conductivité thermique élevée, - Très bonne ténacité.

## I.2.Définition et le concept d'un matériau à gradient de propriétés

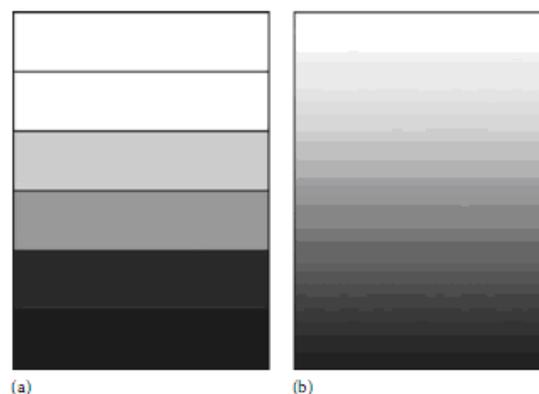
Un matériau a gradient de propriétés c'est une type de matériaux composites compose de deux ou plusieurs matériaux relatif à des fractions volumiques et microstructure qui sont conçus pour avoir une continuité spatiale des variable. Un FGM est produit en changeant sans interruption les fractions de volume dans la direction d'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminé.

Ces matériaux FGMs sont généralement faits à partir d'un mélange de métaux et de céramique (Figure I.1) par un processus de métallurgie de poudre, le côté métal riche est typiquement placé dans les régions ou les propriétés mécaniques, comme la dureté, le besoin d'être élevés. En revanche, le céramique riche, ce qui a la conductivité faible et peut résister aux températures plus élevées, est place dans les régions de grands gradient de la température.



**Figure I.1 :** Type d'un matériau FGM (céramique / métal)

Le concept des matériaux à gradient de propriétés a été développé dans le laboratoire national d'aérospatial du Japon en 1984 par M.Niino et ses collègues à Sendai. L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion. Les FGMs peuvent être utilisés pour différentes applications, telles que les enduits des barrières thermiques pour les moteurs en céramique, turbines à gaz, couches minces optiques. Les matériaux à gradient de propriétés sont donc des matériaux composites avec un caractère au microscope non homogène. Constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue les FGMs de la (figure I.2). [K. ELOMARI, 2011].



**Figure I.2 :** Modèle d'un FGM:

- a) Une plaque composite (multicouche),
- b) Une plaque FGM [K.ELOMARI, 2011].

### I.3. Historique du développement de FGM

Généralement, les FGM sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux.

Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement hétérogènes. Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue les FGM des matériaux composites conventionnels. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés des FGM dans certains cas.

En 1987, le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet intitulé " la recherche sur la technologie de base pour développement de matériaux à Gradient de propriétés et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques ». L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux.

Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux sont appelés à travailler à des températures de surface de 1800°C ainsi qu'à un gradient de température de l'ordre de 1300°C. A cette année-là, aucun matériau industriel n'était connu pour supporter de telles sollicitations thermomécaniques.

Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux :

- Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau ;
- Ténacité du matériau coté basse température ;
- Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau.

Pour répondre à un tel cahier des charges, L'idée originale des FGM a été proposée pour élaborer un nouveau composite profitant à la fois des propriétés des céramiques (Coté haute températures).

Et des métaux (Coté basse température). A la fin de la première étape (1987-1989), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000 K (Température de surface) et à un gradient de température de 1000 K. Quatre techniques ont été utilisées pour fabriquer les matériaux présentant un gradient de composition et de structure; les techniques utilisées dans la fabrication de tels matériaux sont les suivantes :

- Le système SIC/C par C.V.D ;
- Le système PSZ/Mo par la technique de la compaction sèche des poudres ;
- Le système TIB2/Cu par synthèse par auto-propagation à haute température ;

- Le système (Ni-Cr-Al-Y)/ (ZrO<sub>2</sub>-Y<sub>2</sub>O<sub>3</sub>) par projection plasma à double torches.

Dans la seconde étape (1990-19991), le but était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première étape. Pendant les années 90, non seulement les champs d'application des FGM s'est développé pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température, mais s'est aussi élargi à d'autres applications : biomécaniques, technologie de capteur, optique, etc...

On trouve une littérature très importante sur l'utilisation de ce matériau. Cependant, l'utilisation des structures en FGM dans les environnements avec de grands changements de température exige la connaissance des déformations.

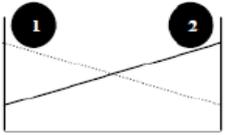
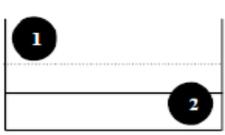
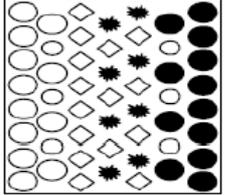
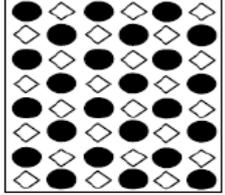
<b>Propriétés</b>	<p>1 Résistance mécanique</p> <p>2 Conductivité thermique</p>		
<b>Structure</b>	<p>Eléments constitutifs:</p> <p>céramique ○</p> <p>métal ●</p> <p>microporosité ◊</p> <p>fibre *</p>		
<b>Matériaux</b>	<b>exemple</b>	<b>FGM</b>	<b>NON-FGM</b>

Figure I.3: Caractéristiques de FGM.

#### I.4. L'intérêt d'utilisation des FGM

Il y a beaucoup d'intérêt pour la mise sur pied des structures ainsi les conditions fonctionnelles peuvent varier avec l'endroit. Dans la plupart des cas, ceci impliquera de varier les matériaux qui sont employés aux endroits spécifiques dans la structure ayant pour résultat les interfaces discrètes dans tout. A nombre de proposé des technologies manufacturières pour le traitement de FGM [N. Kassimi, 2011].

#### I.5. Les différents types des FGM

Les matériaux fonctionnellement gradué sont classé selon la fonction de changement des propriétés mécaniques à travers l'épaisseur.

Concernant les matériaux utilisés dans les poutres FGM, on doit choisir au minimum deux matériaux afin de satisfaire le besoin du problème posé. Dans cette étude, les poutres doivent

être caractérisées par une grande résistance thermique (plus de 1000°C à 1700°C) et les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure.

En partie résistante au champ thermique, les chercheurs utilisent généralement la céramique car elle se caractérise par un faible coefficient de dilatation thermique ainsi qu'une faible conduction thermique ; mais dans les environnements à haute température, c.à.d. à l'extérieur des milieux thermiques, les chercheurs utilisent du métal.

Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non-uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace. Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume.

Plusieurs modèles micromécaniques ont été développées au cours des dernières années pour estimer les propriétés efficaces de FGM biphasé. Le plus simple, et peut-être le plus commun, est la loi classique linéaire de mélanges qui suppose que les propriétés efficaces est la somme de chaque constituant de matériel et sa fraction de volume respective.

Une autre méthode est la règle des mélanges modifiés, ce qui est une formule empirique qui incorpore les effets d'interaction aux valeurs des contraintes et déformations liées à chaque phase. Fan et Miodownik ont proposé une loi généralisée des mélanges qui peuvent expliqué des variations de fraction de volume, la forme des grains et la distribution de la phase qui a été bien conforme à l'expérience. Toutefois, cette méthode nécessite un certain nombre de paramètres d'entrée, et en plus, elle est seulement appropriée pour déterminer l'efficacité de module Young ou l'efficacité des forces de rendement.

## I.6. Type général des plaques

On distingue trois types de plaques selon le rapport de son épaisseur par rapport à la petite dimension de son contour. On peut distinguer donc:

- 1- plaque épaisse.
- 2- plaque mince rigide.
- 3- plaque mince déformable.

On considère que la plaque est de type épais si le rapport entre son épaisseur et la plus petite dimension de sa configuration d'épaisseur  $1/2$  l'état de contraintes des plaques épaisses est donné par les équations générales de la théorie d'élasticité. Les plaques rigides minces leur rapport moins de  $1/2$ , mais les déflexions sont très petites en comparaison avec son épaisseur.

L'état de déformation de ce type de plaque est décrit par la théorie des déflexions. Plaque mince déformable se caractérise du fait que le rapport est très petit et ses déflexions ne sont pas petites par rapport à son épaisseur et ces caractéristiques favorisent l'application d'effort interne important, ce qui influe considérablement sur l'état de contraintes de ce type de plaque. Cette distinction est faite pour simplifier l'étude de la plaque en général.

Par exemple, si l'on s'occupe de l'étude des vibrations libre de la plaque, c'est-à-dire la détermination de ses fréquences et déformées propres on se repère à la théorie des déflexions; si l'on s'occupe de la détermination de l'état de contraintes de la plaque ou utilise les équations de la théorie d'élasticité.

### **I.7. Les méthodes de fabrication du matériau à gradient de propriétés**

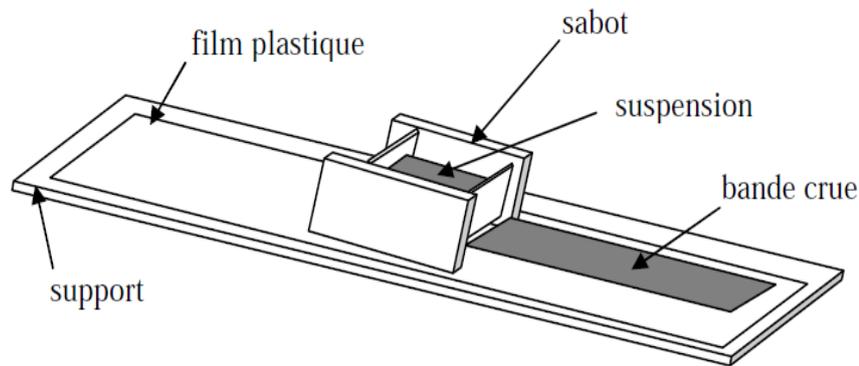
Le processus de fabrication des matériaux à gradient de propriétés peut être divisé en établissant la structure dans l'espace non homogène « gradation » et la transformation de cette structure en matériau ou bien en bloc « consolidation ».

Il existe de nombreux procédés d'élaboration des FGM, les paragraphes suivants s'attachent à les décrire et parlé de leurs utilisation dans l'industrie.

#### **I.7.1. Coulage en bande (Tape Casting ou Doctor-Blade)**

Le coulage en bande est une technique de mise en forme par voie liquide qui consiste à étaler une barbotine de poudres fines en suspension sur une surface plane en couches minces et régulières. L'étalement de la bande est obtenu par le mouvement relatif d'un réservoir ou sabot.

La suspension est ainsi laminée par son passage entre la lame du réservoir et le support, ce qui confère à la bande déposée une épaisseur uniforme sur toute sa longueur. La hauteur du couteau du réservoir par rapport au support détermine l'épaisseur de la bande. Les produits obtenus sont des feuillets avec des épaisseurs contrôlées (25-1000  $\mu\text{m}$ ). Après un raffermissement de la pâte, les feuillets sont démoulés et ensuite découpés (B. Fatima et al, 2015).



**Figure I.4 :** Principe de la méthode coulage en bande.

Le procédé de coulage en bande est largement utilisé pour réaliser des matériaux composites laminaires suivant deux méthodes :

Soit par réalisation directe de bandes multicouches grâce à un système de lames multiples, c'est le cas des tri-couches élaborés par Mistler; soit par empilage de couches élaborées séparément, dont la cohésion est ensuite assurée par une étape de thermo-compression.

### **I.7.2. Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting)**

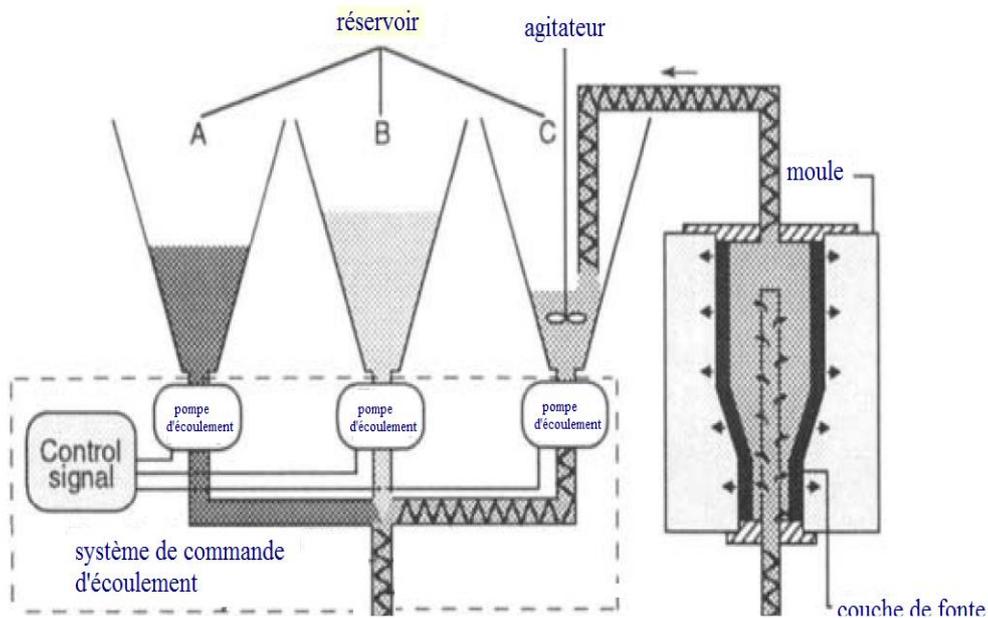
Le coulage en barbotine (slip casting) consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, laissant un tesson (couche de poudre compacte) sur la surface du moule. Après séchage, on obtient le corps en cru.

Donc le coulage se décompose en deux étapes essentielles :

- ✓ formation du tesson ou "prise"
- ✓ consolidation du tesson ou "raffermissement"

La filtration, c'est à dire la formation du tesson lors du coulage, peut être considéré comme un processus d'élimination d'une partie de l'eau de la barbotine; Cette eau migre à travers la couche de tesson déjà formée, sous l'effet :

- Du pouvoir de succion du plâtre (coulage classique);
- Ou d'une pression appliquée sur la barbotine (coulage sous pression).



**Figure I.5:** Principe de la méthode coulage séquentiel en barbotine.

Dans le cas de la fabrication de multicouches, après la formation du premier tesson, le dépôt de la deuxième couche s'effectue de manière telle que la barbotine ne pénètre pas dans le tesson formé. Ce procédé est successivement reproduit pour les autres couches [K. Draiche, 2010].

### I.7.3. Compaction sèche des Poudres

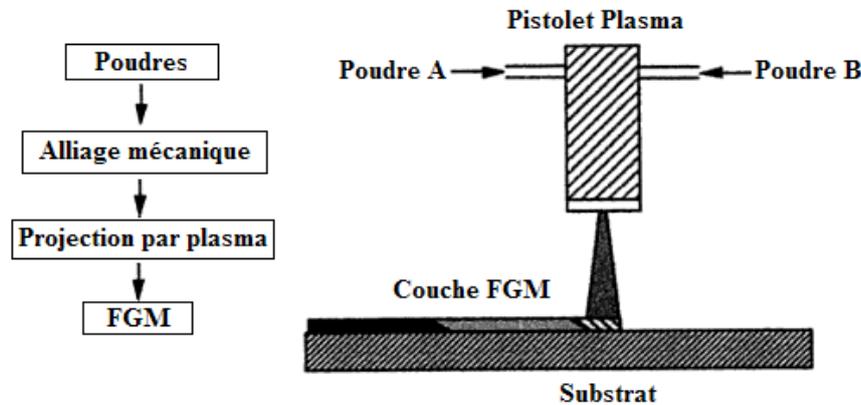
Dans cette technique les poudres sont successivement versées dans un moule en acier. Chaque fois qu'une poudre est versée, une faible compression est exercée. Ensuite, la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Ce procédé est suivi, généralement, par une pression isostatique et un délaitage. La densification sera enfin l'étape finale.

Ce procédé peut être envisagé pour la fabrication de pièces de formes complexes, il s'applique aussi avec la technique du pressage isostatique, et de façon industrielle (B. Fatima et al, 2015).

### I.7.4. Projection plasma

La projection plasma consiste à introduire des particules solides (de taille inférieure à  $100\mu\text{m}$ , environ) dans un jet de gaz, dont la température atteint couramment  $1100^\circ\text{C}$  et la vitesse  $1000\text{-}1500\text{m/s}$ . Le dépôt est ainsi formé par l'empilement des lamelles solidifiées obtenues par l'impact des particules sur le substrat préalablement préparé (E. Carrera, 2001), (E. Carrera, 2003). Ce procédé est utilisé en particulier pour déposer des matériaux à haute

température de fusion tels que des alliages réfractaires ou des céramiques. Les caractéristiques des dépôts réalisés par la projection plasma sont la résistance à l'usure et à la corrosion et l'isolation thermique et électrique [K. Draiche, 2010].



**Figure I.6 :** Illustration conceptuelle d'une méthode de projection par plasma pour former un matériau thermoélectrique gradué. (La composition est graduée dans la direction plane)

### I.7.5. Frittage et infiltration

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes. La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique.

La méthode de frittage et infiltration peut être généralement appliquée pour plusieurs combinaisons des matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres (B. Fatima et al, 2015).

### I.7.6. Dépôt physique en phase vapeur (PVD)

La technique de dépôt physique en phase vapeur (Physical Vapor Deposition) est une technologie prometteuse pour la production de revêtements de barrière thermique. Parmi les caractéristiques avantageuses de PVD que les revêtements fabriqués ont des surfaces lisses, sans exigence, enfin il n'y a pas de fermeture de trous de refroidissement. Toutefois, le principal avantage est leur résistance exceptionnelle aux chocs thermiques, ainsi que la durée de vie est considérablement plus longue. L'équipement utilisé pour déposer les revêtements d'isolation thermiques par l'intermédiaire de PVD, se compose de plusieurs récipients pour le

chargement, le préchauffage et le dépôt plus un dispositif de rotation et la manipulation des échantillons ...etc.

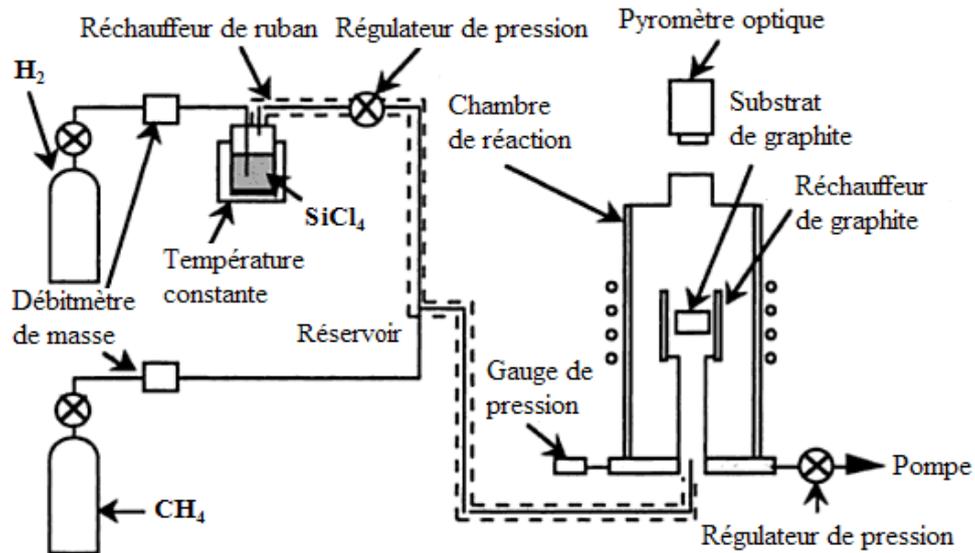
Une autre approche pour obtenir une structure à gradients est d'utiliser un mélange d'aluminium, l'alumine et de zircone, chimiquement contrôlés peuvent être fabriqués facilement par vaporisation à partir de sources multiples en utilisant un ou plusieurs pistolets électroniques. En ajustant les paramètres de faisceau d'électrons, différents taux de dépôt peuvent être obtenus pour chaque source. Si les taux d'évaporation de deux composants, par exemple alumine et de zircone, sont changés sans interruption, un gradient défini de composition est obtenu, c'est le FGM.

Pour les systèmes de barrières thermiques plus sollicités à l'environnement oxydant, notamment les aubes mobiles de turbines aéronautiques ou terrestres ne sont, toutefois, pas systématiquement élaborés par projection thermique ; dans le cas de la zircone yttrée  $ZrO_2$ , un autre procédé différent est également employé. En l'occurrence, il s'agit de la technique de l'évaporation sous faisceau d'électrons (EB-PVD) qui conduit à des microstructures et des propriétés thermomécaniques assez différentes de celles obtenues par la technique de la projection thermique [K. Draiche, 2010].

#### **I.7.7. Dépôt chimique en phase vapeur (CVD)**

Dans la technique de dépôt chimique en phase vapeur (Chemical Vapor Deposition), représenté schématiquement à la (figure I.7), un dépôt est formé sur un substrat en soumettant la source des gaz (par exemple, des hydrures, bromures ou chlorures) qui occupent la chambre de réaction, à différents types d'énergie comme la chaleur, la lumière et le plasma. Les FGM peuvent être synthétisés à lent pour modérer des taux de dépôt en modifiant le rapport de mélange de la source des gaz, ou par le contrôle de la température de dépôt, la pression de gaz, ou le débit de gaz. En raison de son faible taux de dépôt, CVD est largement utilisé pour l'infiltration de piles ou pour la fabrication de couches minces.

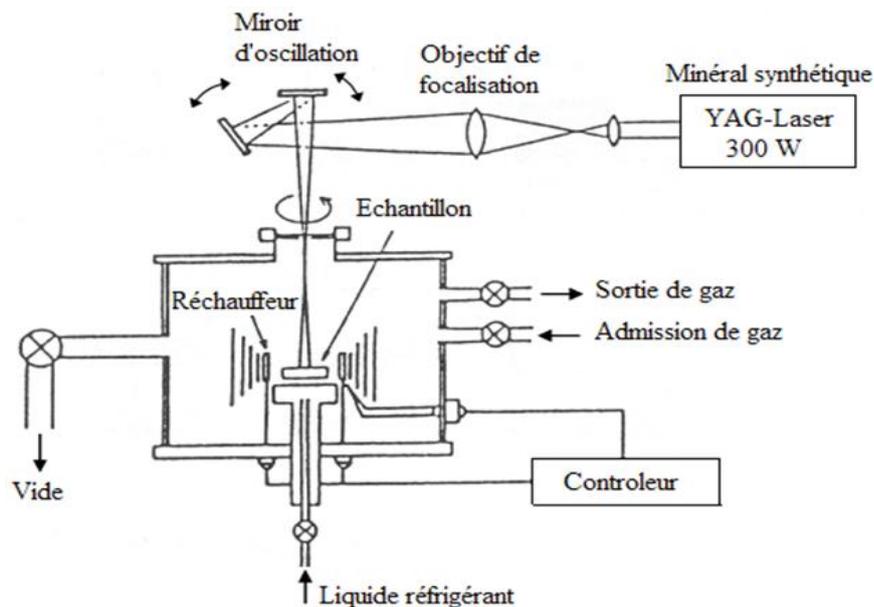
Un exemple typique d'une application de FGM par CVD est la formation d'un revêtement gradué de carbure de silicium SiC sur le graphite dans lequel il y a une transition continue de SiC au C. des compositions contrôlées la source de mélanges des gaz ( $CH_4$ - $SiCl_4$ - $H_2$ ) sont employés aux températures de dépôt entre 1400°C et 1500°C et aux pressions entre 1.3 et 6.5 KPa [K. Draiche, 2010].



**Figure I.7 :** Schéma de l'installation pour la préparation d'un SiC/C FGM par le dépôt chimique en phase vapeur (CVD)

### I.7.8. Frittage Laser Différentiel

Le rayonnement thermique du laser permet le contrôle de la température et la focalisation du point à chauffer. La différence de l'intensité de l'irradiation sur différents points du matériau, provoque un frittage différentiel le long de la pièce, ce qui résulte en des microstructures différentes, dépendant de la position du point irradié. Yuki et al. ont utilisé cette technique pour élaborer un F.G.M de PSZ/Mo. La (figure I.8) montre schématiquement la disposition du procédé utilisé par ces auteurs.

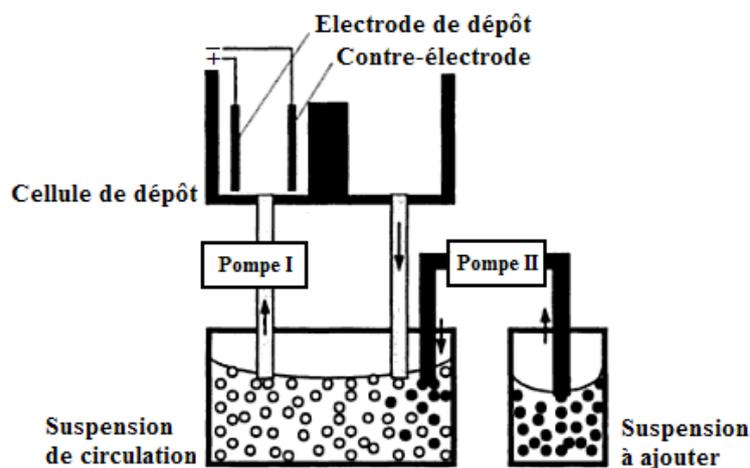


**Figure I.8 :** Disposition du procédé frittage laser différentiel.

### I.7.9. Dépôt par électrophorèse

Un autre processus est ajouté aux différentes techniques de la fabrication des FGM, ce qu'on appelle le dépôt par électrophorèse (EPD), est un processus assez rapide à faible coût, capable de produire les matériaux à gradient de propriétés changeant sans interruption avec la géométrie complexe. EPD se compose de deux processus, c'est-à-dire le mouvement des particules chargées en suspension dans un champ électrique entre deux électrodes (électrophorèse) et le dépôt de particules sur l'un des électrodes. EPD permet la conception des matériaux à gradient de propriétés en forme de plaque binaire en déposant d'une suspension de poudre à laquelle une deuxième suspension est sans interruption ajoutée pendant le processus [K. Draiche, 2010]. Le dépôt est un contrat de poudre emballé étroit qui a besoin de l'agglomération pour réaliser les composants matériels entièrement denses.

Depuis lors, de nombreuses applications d'EPD ont été développées pour la fabrication de la céramique, y compris l'application des matériaux sans interruption à gradient de propriétés peut être obtenu tels que le céramique-céramique  $ZrO_2/Al_2O_3$  et le céramique-métal, WC/Co puisque la composition des couches déposantes est déterminée par la suite composition de la suspension au moment du dépôt. Une installation générale de ce principe est illustrée sur la (figure I.9).



**Figure I.9:** Vue schématique de l'installation d'EPD pour la production des matériaux FGM

### I.8. Propriétés physiques et mécaniques des constituants de FGM

Puisque les matériaux à gradient de propriétés sont constitués en principe d'un mélange Aluminium-Céramique, on va discuter sur les différentes caractéristiques des deux matériaux à part.

### I.8.1. Propriétés de l'Aluminium

L'Aluminium est un métal blanc qui après polissage peut devenir réfléchissant

#### c) Propriétés physiques

L'Aluminium a une température de fusion relativement basse d'environ 660°C. Il en résulte une facilité de fusion qui présente un avantage certain pour les opérations de fonderie. L'Aluminium est très ductile, on peut facilement le mettre en forme. La masse volumique de l'Aluminium est de 2700 kg/m<sup>3</sup>. L'utilisation de l'Aluminium s'impose donc dans les domaines aéronautiques et du transport [N. Kassimi 2011].

#### d) Propriétés mécaniques

Les propriétés mécaniques des métaux présentent un grand intérêt dans la vie quotidienne, elles peuvent être classées en deux groupes : [N. Kassimi 2011]

Celles qui se rapportent à la résistance mécanique du métal :

- Résistance à la traction ;
- Bon rapport force/poids ;
- Résistance à la pénétration (dureté).

Celles qui concernent les modifications de forme que le métal peut subir sans se briser :

- La malléabilité (mise en feuilles) ;
- La ductilité (mise en fils) ;
- Entièrement recyclable.

Grâce à la couche d'oxyde qui se forme en surface, les alliages d'Aluminium résistent à la corrosion. On peut rendre cette couche protectrice d'oxyde plus épaisse par galvanisation. L'Aluminium et ses alliages peuvent être utilisés sans protection supplémentaire comme un revêtement extérieur de bâtiments Dans les milieux corrosifs et en l'absence de la couche d'oxyde les alliages d'Aluminium peuvent subir les effets de la corrosion. Des piqûres de la corrosion sous contrainte ou une corrosion généralisée peuvent se développer. Dans des conditions données, la sévérité de l'attaque dépend de l'alliage utilisé et de son état.[L. Hadji, 2012,N. Kassimi, 2011].

### I.8.2. Propriétés de la céramique

La céramique résulte des terres et des roches broyées (matériaux géologiques) ou bien d'une argile qui sera modelée puis cuite sous haute température (transformation irréversible) ce qui fait perdre au matériau sa plasticité donc il ne peut plus se réhydrater [N.Kassimi 2011].

### c) Propriétés physiques

La céramique a une facilité de fusion qui présente un avantage certain pour les opérations de fonderie. La masse volumique de la céramique est de 3800 kg/m<sup>3</sup>. L'utilisation de la céramique s'impose dans les domaines de l'habitat et du design, l'industrie céramique, métallurgique, aéronautique, spatiale, médicale et dans les revêtements. [L. Hadji, 2012]

### d) Propriétés mécaniques

Les propriétés mécaniques de la céramique sont :

- Un module de Young élevé (Liaisons, covalente, ioniques) ;
- Une dureté élevée (Abrasif, outils de coupe, surfaces de frottement qui doivent résister à l'usure, résistance mécanique élevée, bonne tenue à chaud, rigidité élevée) ;
- Une très bonne résistance à la compression non à la traction (Résistance à la compression = 200 MPa) [N. Kassimi 2011].

## I.9. Propriétés matérielles effectives des FGM

Les matériaux à gradient de propriétés sont généralement fabriqués par deux phases matérielles avec des propriétés différentes. Une description détaillée des microstructures graduées réelles n'est pas disponible, excepté peut-être pour l'information sur la distribution de fraction volumique. Puisque la fraction de volume de chaque phase varie graduellement dans la direction de la graduation, les propriétés effectives des FGM changent le long de cette direction.

Revue sur les différentes lois qui régissent la variation des propriétés matérielles suivant l'épaisseur d'une structure FGM.

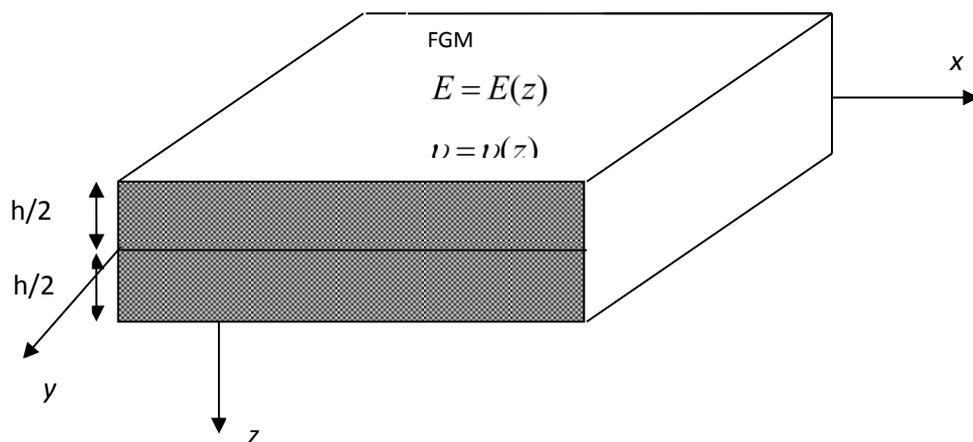


Figure I.10: Géométrie d'une plaque en FGM

La plupart des chercheurs emploient trois fonctions pour décrire la variation de la fraction volumique qui sont définies ci-après:

### I.9.1. La fonction de puissance (P-FGM)

La fraction volumique dans les P-FGM est assurée par une loi de puissance sous la forme :

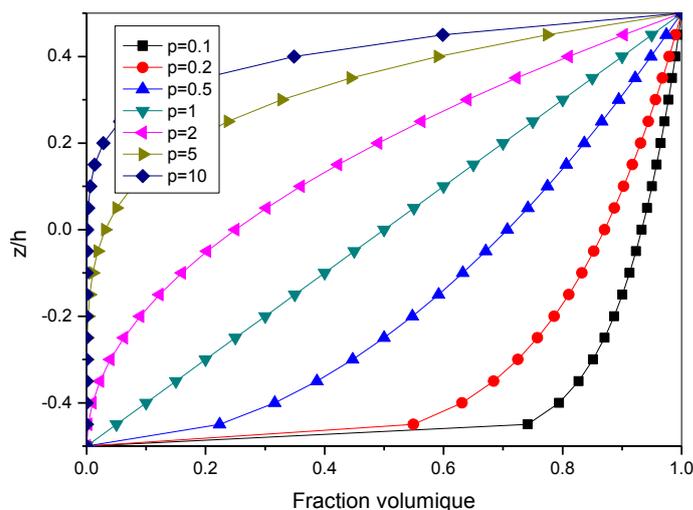
$$g(z) = \left( \frac{z + h/2}{h} \right)^p \quad (\text{I.1})$$

Où  $p$  est un paramètre du matériau et  $h$  est l'épaisseur de la plaque. Une fois que la fraction de volume local  $g(z)$  est définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges :

$$E(z) = g(z).E_1 + (1 - g(z))E_2 \quad (\text{I.2})$$

Où  $E_1$  et  $E_2$  sont respectivement les propriétés matérielles (modules de Young) de la surface inférieure ( $z = h/2$ ) et de la surface supérieure ( $z = -h/2$ ) de la plaque FGM.

La variation de ces propriétés dans la direction de l'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la figure(I.11), il apparaît clairement que le module de Young par exemple change rapidement près de la surface inférieure pour  $P < 1$ , et augmente rapidement près de la surface supérieure pour  $P > 1$  [H. Ait Atman, 2011].



**Figure I.11:** Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM [K. Draiche, 2010]

### I.9.1. La fonction sigmoïde (S-FGM)

La fraction volumique dans les S-FGM est assurée par deux fonctions de loi de puissance sous la forme :

$$g_1(z) = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{h/2 - z}{h/2} \right)^p \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.3})$$

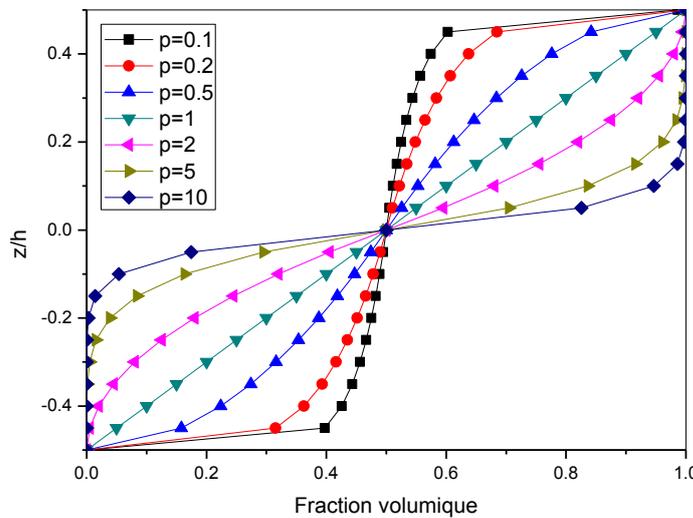
$$g_2(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{h/2 + z}{h/2} \right)^p \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.4})$$

En utilisant la loi des mélanges, la propriété S de la plaque S-FGM peut être calculée Par :

$$E(z) = g_1(z)E_1 + [1 - g_1(z)]E_2 \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.5})$$

$$E(z) = g_2(z)E_1 + [1 - g_2(z)]E_2 \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.6})$$

La figure I.12 montre que la variation de la fraction volumique dans les équations (I.5) et (I.6) représente les distributions sigmoïdes dans une plaque S-FGM.



**Figure I.12:** Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM [K. Draiche, 2010].

### I.9.1. Les propriétés matérielles de la poutre E-FGM

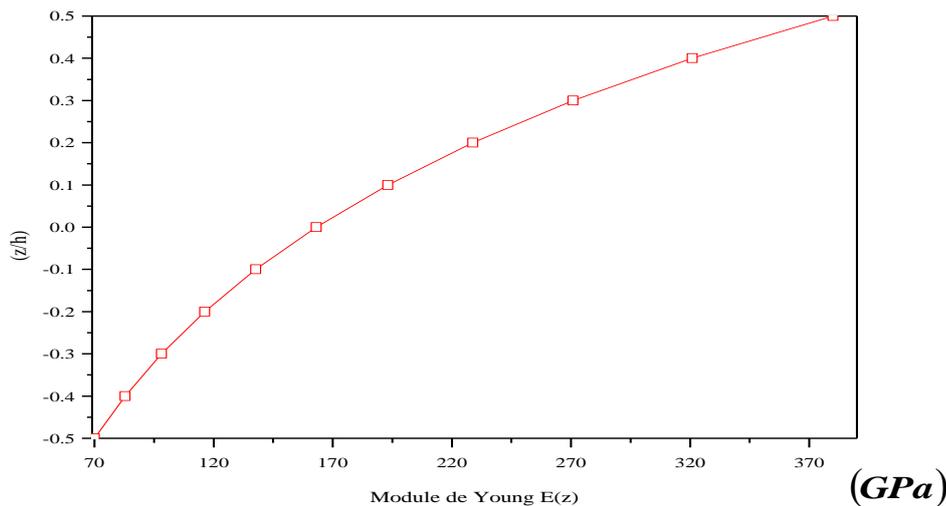
Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme (E. Carrera, 2001), (E. Carrera, 2003):

$$E(z) = E_2 e^{B(z+h/2)} \quad (\text{I.7})$$

Avec

$$B = \frac{1}{h} \ln \left( \frac{E_1}{E_2} \right) \quad (\text{I.8})$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans la (figure I.13).



**Figure I.13:** Variation du module de Young dans une plaque E-FGM  
[K. Draiche, 2010].

### I.10. Domaines d'application des matériaux à gradients évalués FGM

Le concept des matériaux à gradient évalués FGM est applicable dans des nombreux et larges intervalles de domaines tels que les matériaux de construction, mat aéronautique, aérospatiale, nucléaire et semi contradictoires : la conductivité thermique et l'isolation production des matériaux légers, résistants et durables.

Les principaux domaines d'application des FGM sont :

- **Génie civil :** ponts à poutre en caisson, les cheminées, les fondations élastiques (ces structures de plaques peuvent être trouvées dans différents types d'applications industrielles telles que radiers), réservoirs de stockage, les piscines.
- **Aéronautique :** composants de moteur-fusée, corps des avions spatiaux. [L. Hadji, 2012]
- **Chimique :** l'échangeur de chaleur, tube de chaleur, récipient de réaction.
- **Ingénierie :** outils de coupe, éléments de moteur.

- **L'énergie nucléaire** : composante des réacteurs nucléaires, pastilles de combustible.
- **Electronique** : semi-conducteur à bande graduée, capteurs. [L. Hadji, 2012]
- **Optique** : fibres optiques, lentilles. [L. Hadji, 2012]
- **Conversion d'énergie** : générateur thermoélectrique, convertisseur thermoïonique, pile à combustible.
- **Matières biologiques** : implants, peau artificielle.
- **Produits en générale** : matériaux de constructions, corps de voiture, verres de fenêtre.

### I.11. Conclusion

Nous avons vu dans la première partie de ce chapitre une brève introduction aux matériaux à gradient de propriété FGM , d'où une vue sur définition et concept ,l'historique de leur développement, ensuite l'intérêt de leur utilisation ,propriété et leur principale méthodes de fabrication et par la suite nous avons cité les différentes lois possibles qui servent à décrire la variation des propriétés matérielles du matériau FGM (module de Young, masse volumique et coefficient de poisson) suivant l'épaisseur d'une plaque, ces lois peuvent être de puissances, exponentielles ou même sigmoïde. On dernier s'est intéresser aux domaines d'application.

Le chapitre suivant va porter sur les différentes théories des plaques composites stratifiées.

**CHAPITRE II:**  
**THÉORIES DES PLAQUES**

## II.1. Introduction

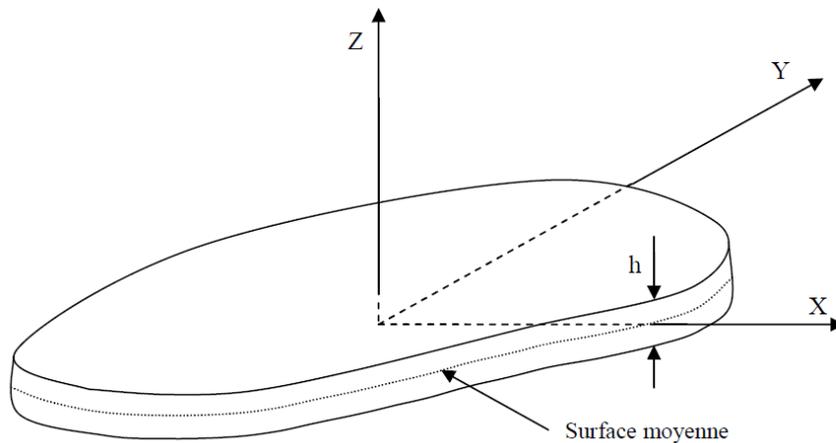
Afin de résoudre les problèmes des structures ayant comme éléments structuraux des poutres et des plaques FGM dans le domaine élastique, il est nécessaire de choisir la bonne théorie décrivant correctement le comportement statique et dynamique de la structure ainsi que la méthode de résolution à appliquer. C'est en 1888 que Love utilisa les hypothèses de Gustav Kirchhoff, elles-mêmes inspirées des hypothèses d'Euler-Bernoulli pour fonder une théorie des plaques minces (également appelée théorie classique ou théorie de Kirchhoff-Love). La théorie des plaques semi-épaisses (théorie des déformations du cisaillement de premier ordre) a été consolidée par Mindlin. Et ensuite, des théories d'ordre supérieur sont venues améliorer les hypothèses des théories classiques et du premier ordre lorsque l'épaisseur de la plaque devient importante. Il existe aussi la théorie basée sur l'élasticité tridimensionnelle (théorie 3-D) qui ne fait aucune hypothèse restrictive sur les déplacements de la plaque. Nous présentons dans ce chapitre quelques modèles sur les théories des plaques développées dans la littérature pour améliorer l'évolution de la variation du champ des déplacements à travers l'épaisseur des plaques.

## II.2. Définition d'une plaque

Une plaque est un solide délimitée par deux plans parallèles, les faces, et un cylindre au sens large (de section quelconque et pas nécessairement circulaire) dont l'axe est perpendiculaire aux faces (Figure II.1). On définit :

- le plan moyen, ou plan médian : plan situé à équidistance entre les faces (c'est l'équivalent de la courbe moyenne des poutres) ;
- le feuillet neutre : élément de matière d'épaisseur infinitésimale situé autour du plan moyen (c'est l'équivalent de la fibre neutre des poutres) ; c'est le plan  $(O, x, y)$ , d'équation  $z = 0$  ;
- une fibre normale : ensemble des points situés sur une normale au plan médian, à un endroit  $(x, y)$  donné ; elle a pour direction  $z$ .

On appelle  $h$  l'épaisseur de la plaque ; le plan inférieur est donc le plan  $z = -h/2$  et le plan supérieur est le plan  $z = h/2$ .



**Figure II.1 :** Géométrie d'une plaque de forme géométrique arbitraire

### II.3. Modèles analytiques des plaques FGM

#### II.3.1. Théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT)

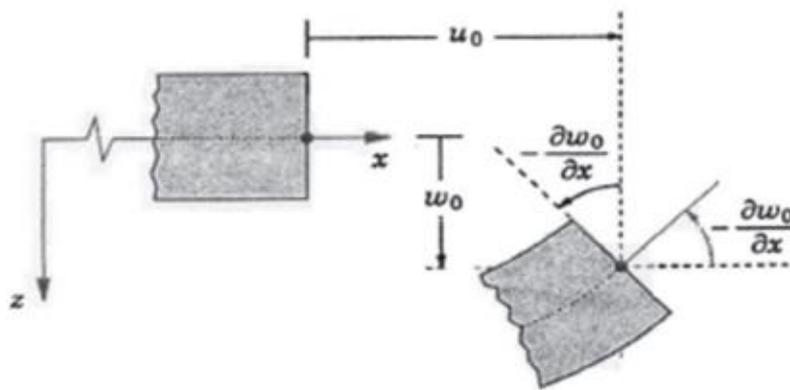
La théorie des plaques minces, ou théorie de Love-Kirchhoff s'inspire de celle des poutres minces d'Euler-Bernoulli. Les hypothèses cinématiques adoptées pour les plaques minces par Kirchhoff généralisent à deux dimensions celles adoptées pour les poutres sans déformation à l'effort tranchant (figure II.2). Dans le cas d'une plaque homogène isotrope, la part de cisaillement dans la flèche est directement liée à l'élancement ( $L/h$ ). Elle suppose les hypothèses ci-après:(G.Kirchhoff, 1850)

1. La plaque est d'épaisseur petite devant les autres dimensions. Elle possède un plan moyen aussi appelé plan neutre ;
2. Les sections droites, initialement normales au plan neutre, restent planes et normales à celui-ci. La déformation en cisaillement transverse est donc négligée ( $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ ). On admet dans ce cas que la déformation due à l'effort tranchant est nulle et ne participe pas à la rigidité ;
3. Le plan neutre ne subit pas de déformation dans son plan ; on ne considère que le déplacement transversal  $w$  des points du plan neutre ;
4. L'épaisseur est faible ; en conséquence, les contraintes dans le sens de l'épaisseur sont supposées nulles ( $\sigma_z = 0$ ).

En se basant sur les hypothèses ci-dessus, le champ de déplacement s'écrit pour la théorie classique des plaques sous la forme :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}, \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y}, \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y), \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

Avec  $u_0$  et  $v_0$  sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ( $z = 0$ ).



**Figure II.2 :** Illustration de la plaque de Love-Kirchhoff

La modélisation des structures multicouches modernes avec une forte anisotropie (par exemple : faible rapport du module de cisaillement transverse de l'âme par rapport au module d'élasticité longitudinal des peaux dans le cas des structures sandwich) exige des théories raffinées qui prennent en compte une bonne description des cisaillements transverse.

L'intérêt d'une plaque approche tridimensionnelle réside dans l'obtention des résultats exacts tridimensionnels, utiles notamment comme référence. L'adoption d'une approche tridimensionnelle ne présente toutefois d'utilité que dans la mesure où. Les équations différentielles finalement obtenues peuvent être résolues. L'approche tridimensionnelle (3D) est donc limitée à certains cas de géométrie, empilement et chargement simple.

Puisque ce modèle ne tient pas en compte l'effet de cisaillement transverse, il donne des résultats imprécis pour les plaques épaisses.

### II.3.2. Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)

Les effets du cisaillement transversal et de l'inertie de rotation deviennent importants lorsque la plaque est relativement épaisse ou lorsque des solutions précises pour des modes plus élevés de vibration sont désirées. Précisé qu'en excluant ces effets, l'erreur dans la théorie de plaque de Kirchhoff est proportionnelle à l'épaisseur. Si la théorie de plaque de Kirchhoff est employée, les fréquences obtenues sont au-dessus de celles prévues. Une théorie plus sophistiquée de plaque est ainsi nécessaire pour l'analyse des plaques épaisses. Il y a eu beaucoup de théories de plaques épaisses prenant en compte l'effet de cisaillement transversal avec un objectif implicite de minimiser l'erreur le plus possible. Reissner a proposé la théorie de plaque épaisse la plus simple en introduisant l'effet de cisaillement transversal par un complémentaire dans l'énergie principale. Mindlin a présenté un travail différent de Reissner, une théorie de premier ordre de plaques où il a expliqué la déformation de cisaillement en même temps qu'un facteur de correction de cisaillement. Dans cette théorie, les deux premières hypothèses de Kirchhoff sont maintenues.

Pour tenir compte de l'effet de cisaillement transversal, la théorie détend l'hypothèse de normalité de sorte que toute section droite et perpendiculaire à la surface moyenne non-déformée reste droite mais pas nécessairement perpendiculaire à la surface moyenne déformée.

Cette hypothèse implique que la déformation de cisaillement transversale est différente de zéro, mais elle mène également à la violation statique de la contrainte de cisaillement qui est nulle sur les surfaces extérieures puisque la contrainte de cisaillement devient constante suivant toute l'épaisseur de la plaque. Pour compenser cette erreur, Mindlin a proposé un facteur  $k$  de correction de cisaillement à appliquer pour la force de cisaillement. En outre, Mindlin a modifié la quatrième hypothèse de sorte que l'effet de l'inertie de rotation est inclus.

Dans la littérature, les vibrations des plaques fondées sur les hypothèses du premier ordre de cisaillement transversal sont largement mentionnées sous le nom de plaques de Mindlin, Reissner-Mindlin ou Hencky-Mindlin.

Dans la théorie du premier ordre des plaques, le champ de déplacement (figure II.3) est exprimé sous la forme :

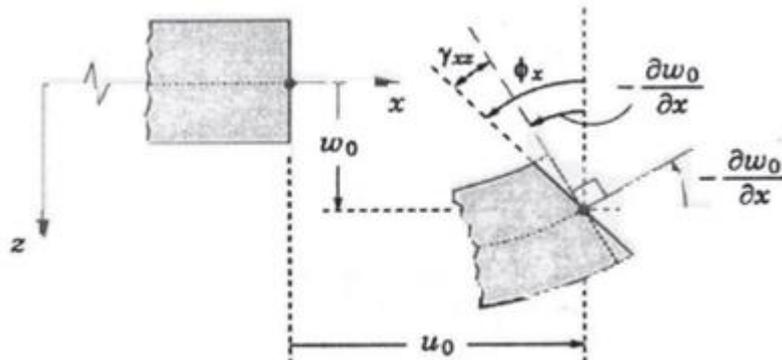
La théorie du premier ordre est basée sur le champ de déplacement suivant :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\phi_x(x, y), \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\phi_y(x, y), \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y),
 \end{aligned}
 \tag{II.2}$$

Avec :  $(u_0, v_0, w_0)$  et  $(\phi_x, \phi_y)$  sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes  $x$  et  $y$ , respectivement.

Le champ de déplacement définis dans l'expression ci-dessus permet de reprendre la théorie classique des plaques décrite dans la dernière section par le remplacement :

$$\phi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad \phi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y}.
 \tag{II.3}$$



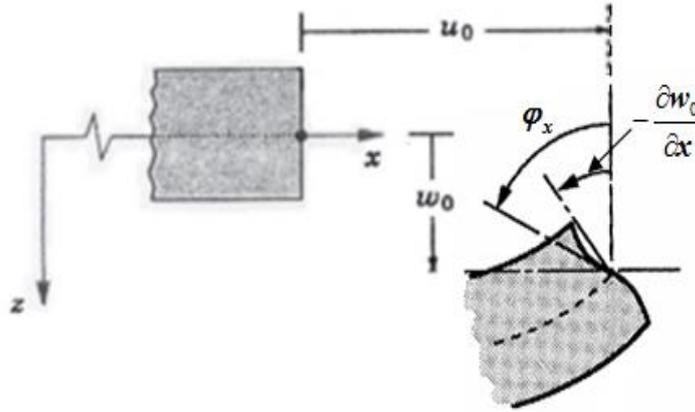
**Figure II.3 :** Illustration de la plaque de Reissner- Mindlin

Avec ce choix de la forme des champs de déplacement, les déformations transversales sont constantes en  $x^3$ . Les contraintes de cisaillement sont donc uniformes dans chaque couche discontinue entre les couches. Cette mauvaise description oblige à introduire des coefficients correcteurs pour mieux prendre en compte dans l'écriture de l'énergie, les effets de cisaillement transversal (J.M. Whitney, 1973). Les résultats obtenus dépendent essentiellement du choix empirique dans des situations complexes des coefficients correcteurs et l'étude du composite épais reste aléatoire par ce type d'approche cinématique. Pour éviter l'introduction d'un facteur de correction, des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevée ont été développées.

D'ailleurs pour éviter l'introduction d'un facteur de correction, des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevée ont été développées.

### II.3.3. Théorie de déformation en cisaillement D'ordre élève (HSDT)

La théorie d'ordre élève est basée sur une distribution non linéaire des champs dans l'épaisseur. Par conséquent, on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et / ou de la déformation normale transversale. Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction. Nous avons introduit ici quelques modèles de plaques utilisés pour analyser le comportement des matériaux à gradient de propriétés.



**Figure II.4 :** illustration de la plaque d'ordre élève

Le champ de déplacement est généralement comme suit :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + f(z) \varphi_x(x, y), \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + f(z) \varphi_y(x, y), \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{II.4}$$

Où  $u, v$  et  $w$  sont les déplacements dans les directions  $x, y$  et  $z$ .

Les déplacements  $u_0, v_0$  et  $w_0$  sont ceux d'un point du plan moyen ( $x, y, z = 0$ ).  $\varphi_x$  et  $\varphi_y$  sont les rotations due à la flexion des plans  $yz$  et  $xz$ .

$f(z)$  : La fonction de gauchissement qui représente la forme de distribution des contraintes et des déformations de cisaillement transverse dans l'épaisseur de la plaque.

Ainsi le choix de la fonction  $f(z)$  est basé sur les résultats de l'élasticité tridimensionnelle ou toute autre information sur la distribution des contraintes de cisaillement transverse.

En effet, les déplacements de la théorie classique de plaque CPT est obtenue par en prenant  $f(z) = 0$ , alors que la théorie de premier ordre FSDT peut être obtenue par  $f(z) = z$ .

#### II.4. Revue sur les différents modèles de la théorie d'ordre élève

Pour franchir les limites des théories du premier ordre, plusieurs auteurs proposent quelques contributions importantes de développement de modèles d'ordre élève qui se sont distingués dans la littérature par l'expression de la fonction de cisaillement  $f(z)$ . Ces modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs de déplacement dans l'épaisseur, et qui permettent de présenter le gauchissement de la section transversale dans la configuration déformée.

Nous citons en particulier :

- L'approche d'Ambartsumian (S.A.Ambartsumyan, 1969) avec :

$$f(z) = \frac{z}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad (\text{II.5})$$

- L'approche de Reissner (E. Reissner, 1945) avec :

$$f(z) = \frac{5}{4} z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.6})$$

- L'approche de Reddy (J.N Reddy, 1987) avec :

$$f(z) = z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.7})$$

Dans le modèle de (J.N Reddy, 1989), le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal ( $w$ ) est constant. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle. La distribution des contraintes de cisaillement transversal est parabolique dans l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

- L'approche de TOURATIER (M. Touratier, 1991) avec :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (\text{II.8})$$

Touratier propose le modèle "sinus" qui est différent des autres modèles d'ordre supérieur puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est

donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme ci-dessous:

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) = \frac{h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi z}{h}\right)^{2n+1} \quad (\text{II.9})$$

$$= z \left( 1 - \frac{\pi^2}{3!} \frac{z^2}{h^2} + \frac{\pi^4}{5!} \frac{z^4}{h^4} - \frac{\pi^6}{7!} \frac{z^6}{h^6} + \dots \right)$$

Les différents termes du développement correspondent aux différents modèles cités précédemment. Suivant la troncature choisie, on obtient la théorie LOVE-KIRCHHOFF, la théorie REISSNER-MINDLIN ou les modèles d'ordre supérieur (aux coefficients près).

Les contraintes de cisaillement transversales déterminées par le modèle "sinus" prennent une forme sinusoïdale dans l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de (S.A.Ambartsumyan, 1969).

Récemment, (K.S.Afaq et al, 2003) proposent un modèle exponentiel avec une cinématique plus riche. La fonction de cisaillement transverse est de la forme suivante :

$$f(z) = z e^{-2(z/h)^2} \quad (\text{II.10})$$

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance pair et impair de la variable ( $x_3$ ) alors que la fonction "sinus" TOURATIER ne permet qu'un développement en puissance impaires.

Il faut remarquer que les modèles issus d'une approche monocouche équivalente présentent des contraintes de cisaillement transverse discontinues aux interfaces si les couches ont des propriétés différentes, même si la continuité du champ de déformation est assurée. Ceci présente un inconvénient sérieux lors de l'analyse locale à l'interface des structures multicouches (effets de bord sur les contraintes, délaminage...).

➤ L'approche d'AYDOGDU (M. Aydogdu, 2005) avec :

$$f(z) = z \alpha \frac{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}{\ln(a)} \quad a > 0 \quad (\text{II.11})$$

h: étant l'épaisseur de la plaque FGM.

La version hyperbolique de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (the hyperbolic shear deformation plate theory HSDPT) développée par (H.Ait atman ,2011) est obtenue en prenant

$$f(z) = \frac{\cosh(\pi/2)}{[\cosh(\pi/2)-1]} z - \frac{(h/\pi)\sinh\left(\frac{\pi}{h}z\right)}{[\cosh(\pi/2)-1]} \text{ Et } \varphi_z = 0 \quad (\text{II.12})$$

**Tableau II.1:** Différentes fonctions de cisaillement utilisées dans les théories des plaques isotropes et FGM

Théories	intitulé	Fonction de cisaillement $f(z)$	$\gamma_{xz}$ $\gamma_{yz}$	Coefficient de correction
CPT, Kirchoff (Kirchhoff, G.R. 1850 a) et (Kirchhoff, G.R. 1850 b)	Théorie classique des plaques	0	---	---
FSDT, Mindlin (Mindlin. R.D 1951)	Théorie de déformation des plaques du 1er ordre	$z$	Constante	Requis
Ambartsumian (Ambartsumian, S.A. 1958)	Théorie d'ordre supérieur	$\frac{z}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right)$	Quadratique	Non Requis
Reissner (Reissner. E 1975)	Théorie d'ordre supérieur	$\frac{5}{4} z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$	Parabolique	Non Requis
TSDPT, Touratier (Touratier. M 1991)	Théorie de déformation trigonométrique des plaques	$\frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$	Parabolique	Non Requis
ESDPT, Karama et al. (Karama et al. 2003)	Théorie de déformation exponentielle des plaques	$ze^{-2(z/h)^2}$	Parabolique	Non Requis

PSDPT, levinson (Levinson, M. 1980), Reddy (Reddy. J.N, 1984)	Théorie de déformation parabolique des plaques	$z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$	Parabolique	Non Requis
Aydogdu (Aydogdu, M. 2009)	Théorie de déformation exponentielle des plaques	$z \alpha^{\frac{2(z/h)^2}{\ln(\alpha)}},$ $\alpha > 0$	Parabolique	Non Requis
El meiche, Tounsi et al. (El Meiche et al. 2011)	Théorie raffinée des plaques	$\frac{(h/\pi) \sin(hz/\pi) - z}{(\cosh(\pi/2) - 1)}$	Parabolique	Non Requis
Ait Atmane et al. (Ait Atmane et al. 2010)	Théorie raffinée des plaques	$\frac{\cosh(\pi/2)}{[\cosh(\pi/2) - 1]} z -$ $\frac{(h/\pi) \sinh\left(\frac{\pi}{h} z\right)}{[\cosh(\pi/2) - 1]}$	Parabolique	Non Requis
Shimpi (Shimpi, R.P. 2002)	Théorie raffinée des plaques	$h \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{z}{h} \right) - \frac{5}{3} \left( \frac{z}{h} \right)^3 \right]$	Parabolique	Non Requis

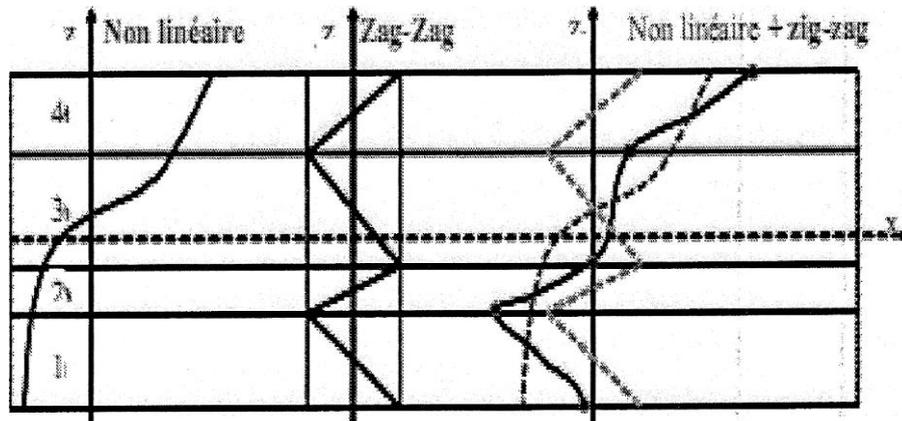
### II.5. Théorie de Zig-zag

Pour mieux décrire la déformation en cisaillement des matériaux composites, certains auteurs ont associé la théorie d'ordre élevé à celle dite de zig-zag [CHO 1993], Cette dernière est destinée justement à mieux décrire les effets d'interface. Ainsi, différents modèles issus de l'approche par couche ont été proposés.

Le multicouche est subdivisée en sous-structures (correspondant en fait à chaque couche ou chaque ensemble de couches). On applique à chaque sous-structure une théorie du premier ordre ou un modèle d'ordre élevé. La cinématique des modèles zig-zag satisfait a priori les conditions de contact et elle est indépendante du nombre de couches.

L'avantage principal du champ de déplacement des modèles zig-zag réside dans la bonne modélisation de la distorsion de la normale à la surface déformée, ainsi que dans la vérification des conditions de continuité, et ce sans augmenter pour autant le nombre et l'ordre des équations fondamentales de la théorie du premier ordre. Le recours à des coefficients de correction pour cisaillement transverse est évité. En se basant sur le concept de « DI SCIUVA », plusieurs auteurs ont réalisé des améliorations significatives pour le modèle zig-zag.

L'amélioration principale est l'introduction d'une distribution non linéaire des déplacements. On superpose le champ zig-zag (linéaire par morceau) à un champ de déplacement d'ordre élevé (souvent cubique) (figure II-4). Les conditions de compatibilité sont satisfaites sur les surfaces supérieures et inférieures des plaques pour réduire le nombre de paramètres (K.Alomari, 2011).



**Figure II.5:** Champ de déplacements des modèles ZIG-ZAG d'ordre élevé (K.Alomari, 2011).

#### II.4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons donné un aperçu sur la théorie des plaques ainsi que les modèles analytiques des plaques FGM à savoir la théorie classique des plaques (CPT), la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) et la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT). Sa formulation est basée sur les hypothèses de chaque théorie dans une approche bidimensionnelle d'élasticité suivie par les équations cinématiques d'un point quelconque dans la plaque en fonction des déplacements généralisés.

Le chapitre suivant portera sur la présentation d'étude du comportement statique des plaques en matériaux à gradient de propriétés type E-FGM.

**CHAPITRE III:**  
***ETUDE DU COMPORTEMENT***  
***STATIQUE DES PLAQUES EN***  
***MATÉRIAUX À GRADIENT DE***  
***PROPRIÉTÉS TYPE E-FG***

### III.1. Introduction

Le concept des matériaux à gradient de propriétés caractérisé par une propriété sans interruption changeante due à un changement continu de la composition, dans la morphologie et effectivement dans la structure cristalline, représente un saut technologique rapide à travers les différents domaines d'application potentiels, des recherches ont été établis afin de préparer des matériaux de barrière thermique performants à longue durée de vie. Leur but principal est pour l'usage d'améliorer la résistance à l'usure ou à l'oxydation, avoir un matériau blindé léger avec une haute efficacité balistique et peut résister au milieu à haute température. Du fait de l'importance de cette nouvelle classe de matériaux composites, nous avons besoin d'une théorie efficace pour prévoir exactement les caractéristiques structurales des plaques FGM. En effet, plusieurs auteurs ont proposés des théories se basant sur des approches analytiques aux problèmes des plaques en matériaux à gradient de propriétés.

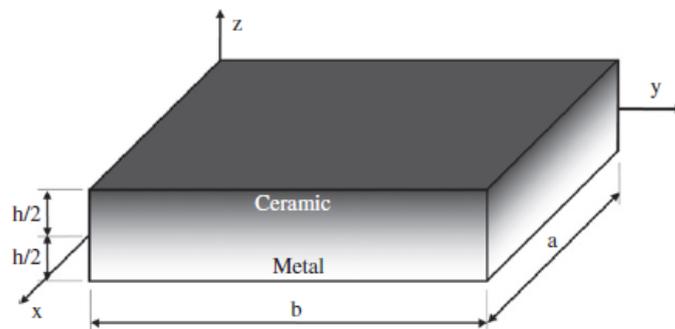
L'objectif de notre étude est l'identification du comportement élastique de flexion des plaques en matériaux à gradient de propriétés type E-FGM simplement appuyées, en utilisant une simple théorie quasi-3D à cinq variables qui tient en considération l'effet de déformation normale, de déformation du cisaillement et l'effet d'étirement à travers l'épaisseur des plaques.

### III.2. Configuration géométrique

Considérons une plaque rectangulaire de dimensions  $a$  et  $b$  d'épaisseur  $h$  en matériau à gradient de propriétés (FGM). Les faces (supérieure et inférieure) de la plaque sont à position  $z = \pm h/2$ , et les bords de la plaque sont parallèles aux axes  $x$  et  $y$ .

Le système de coordonnées choisies occupe les intervalles donnés par l'équation (III.1).

$$0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, -h/2 \leq z \leq h/2. \quad (\text{III.1})$$



**Figure III.1 :** Géométrie d'une Plaque FGM isotrope

### III.2.1. Cinématique

Cette théorie est développée sur une étude 3 dimensions dans laquelle les déplacements dans le plan et transversal sont développés comme une variation sinusoïdale à travers l'épaisseur. Les fonctions sinusoïdales sont avantageuses par rapport aux fonctions polynomiales, car elles sont simples à utilisées et précises et les conditions aux limites en contraintes sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque peuvent être assurées (JL.Mantari et al, 2012), (JL.Mantari et al, 2013). En effet, l'utilisation des fonctions sinusoïdales a été d'abord proposée par Levy (M. Levy, 1877) et évaluée par [Stein M], puis largement utilisée par (M.Touratier ,1991) et (A.Zenkour ,2007). Dans cette étude, des simplifications sont rapportées aux hypothèses de la théorie quasi-3D de [A.Zenkour, 2007] afin que le nombre des inconnus soit réduit d'un seul inconnu. Selon (A.Zenkour, 2007), le champ de déplacement de la théorie quasi-3D sinusoïdale est donné par :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial x}(x, y) + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \varphi_x(x, y); \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial y}(x, y) + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \varphi_y(x, y); \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) + \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \varphi_z(x, y) \end{aligned} \quad (III.2)$$

Où  $u_0, v_0, w_0, \varphi_x, \varphi_y$  et  $\varphi_z$  sont les six fonctions de déplacement inconnues du plan médian de la plaque; et  $h$  est l'épaisseur de la plaque. D'autres hypothèses sont données comme :

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) + \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \varphi_z(x, y), \quad \varphi_x = \frac{\partial w_s}{\partial x}, \quad \varphi_y = \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (III.3)$$

En substituant l'équation (III.3) Dans (III.2), le nouveau champ de déplacement utilisé par la présente théorie en un point quelconque de coordonnées  $(x, y, z)$  dans la plaque comprend alors un déplacement transversal ( $w$ ) qui est composé de trois composantes, à savoir: de flexion, de cisaillement et de l'étirement et peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y) + g(z) \varphi_z(x, y) \end{aligned} \quad (III.4)$$

$$\text{Avec :} \quad f(z) = z - \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (\text{III.5})$$

$$\text{Et :} \quad g(z) = 1 - f'(z) = \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (\text{III.6})$$

### III.2.2. Champ de déformation

Le champ de déformation est obtenu en substituant les termes de l'équation (III.4) dans la relation d'élasticité linéaire déformations-déplacements. Il est donné comme suit:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \quad (\text{III.7})$$

En remplaçons (III.4) dans (III.7), nous obtenons les expressions suivantes:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} - f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ \varepsilon_z &= g'(z) \varphi \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} - 2f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \\ \gamma_{yz} &= g(z) \left( \frac{\partial w_s}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} \right) \\ \gamma_{xz} &= g(z) \left( \frac{\partial w_s}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.8})$$

La relation linéaire déformation-déplacement peut être réécrite aussi sous la forme simplifiée suivante :

$$\varepsilon = \varepsilon^{(0)} + z\varepsilon^{(1)} + f(z)\varepsilon^{(2)} \quad (\text{III.9})$$

Avec

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon^{(0)} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(0)} = \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \varepsilon_y^{(0)} = \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \varepsilon_{xy}^{(0)} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon^{(1)} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(1)} = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y^{(1)} = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \\ \varepsilon_{xy}^{(1)} = -2\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.10a})$$

$$\varepsilon^{(2)} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(2)} = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y^{(2)} = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ \varepsilon_{xy}^{(2)} = -2\frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon_z = g'(z) \varepsilon_z^0 = g'(z) \varphi_z \quad (\text{III.10b})$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = 1 - \frac{df(z)}{dz} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_s}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} \\ \frac{\partial w_s}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.10c})$$

### III.3. Equations constitutives

Considérons des plaques FGM fabriquées à partir d'un mélange de deux phases matérielles, par exemple, un métal et une céramique comme le montre la figure(III.1) ci-dessus. Le coefficient de Poisson ( $\nu$ ) est supposé être constant, tandis que le module de Young  $E(z)$  varie sans interruption à travers l'épaisseur de la plaque, soit par une loi de variation des propriétés matérielles exponentielle ou polynomiale. Dans cette étude nous avons choisi la loi exponentielle, pour laquelle le module de Young effectif  $E(z)$  est exprimé par la relation suivante [A.Zenkour, 2007 ] :

$$E(z) = E_0 \exp^{p\left(0.5 + \frac{z}{h}\right)} \quad (\text{III.11})$$

Où  $E_m = E_0$  et  $E_c = \exp^p$  désignent respectivement le module de Young de la face inférieure (en tant que métal) et de la surface supérieure (céramique) de la plaque E-FGM;  $E_0$  est le module de Young de la plaque homogène; Et ( $p$ ) est un paramètre matériel qui indique la

variation des propriétés du matériau à travers l'épaisseur de la plaque et prend des valeurs supérieures ou égales à zéro. Selon la loi de variation des propriétés matérielles polynomiale, le module de Young effectif  $E(z)$  est estimé à (A.Zenkour ,2007) :

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m) \left( 0.5 + \frac{z}{h} \right)^p \quad (\text{III.12})$$

Ainsi en se limitant à un comportement élastique linéaire, l'expression des contraintes pour un FGM isotrope peut être déterminée en écrivant la relation qui existe entre ces dernières et les déformations, le champ des contraintes s'écrit donc :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.13})$$

Où  $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{yx})$  et  $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{yx})$  sont les composantes des contraintes et des déformations, respectivement. Les coefficients de rigidité tridimensionnels  $Q_{ij}$  sont exprimés en fonction des constantes d'ingénieur par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} Q_{11} = Q_{22} = Q_{33} &= \frac{(1-\nu)E(z)}{(1-2\nu)(1+\nu)}; \\ Q_{12} = Q_{13} = Q_{23} &= \frac{\nu E(z)}{(1-2\nu)(1+\nu)}; \\ Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} &= \frac{E(z)}{2(1+\nu)}. \end{aligned} \quad (\text{III.14})$$

#### III.4. Détermination des équations d'équilibre

Afin d'établir de façon systématique l'ensemble des équations d'équilibre ainsi que les conditions au limites, le principe des travaux virtuels est appliquée, celui-ci indique que, pour tout champ de contrainte en équilibre avec les efforts extérieurs, la somme de travail des efforts internes et le travail des efforts externes est nulle pour tout champ virtuel. Le principe des travaux virtuels dans le cas présent peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\delta U_d + \delta V_p = 0 \quad (\text{III.15})$$

Où  $\delta U_d$  est la variation de l'énergie de déformation et  $\delta V_p$  est la variation de l'énergie potentielle.

La variation de l'énergie de déformation  $\delta U_d$ , peut être exprimée en fonction des tenseurs de contraintes  $[\sigma]$  et de déformations  $[\epsilon]$ :

$$\delta U_d = \int_V \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV \quad (\text{III.16})$$

Qui s'écrit :

$$\delta U_d = \int_A \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \sigma_z \delta \epsilon_z + \sigma_{xy} \delta \gamma_{xy} + \sigma_{xz} \delta \gamma_{xz} + \sigma_{yz} \delta \gamma_{yz}) dz dA \quad (\text{III.17})$$

Et l'énergie potentielle :

$$\delta V = - \int_A q \delta w dA \quad (\text{III.18})$$

Où  $A$  est la surface supérieure de la plaque. En remplaçant les déformations virtuelles par leurs expressions définies par les équations (III.10) dans l'équation (III.15), ensuite en introduisant les efforts globaux, on obtient la forme suivante:

$$\begin{aligned} 0 = \int_A \left[ N_x \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} - M_x \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x^2} - P_x \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial \delta v_0}{\partial y} - M_y \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial y^2} - \right. \\ \left. P_y \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial y^2} + R_z \delta \rho_z + N_{xy} \left( \frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} \right) - 2M_{xy} \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x \partial y} - 2P_{xy} \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial x \partial y} + \right. \\ \left. Q_x \left( \frac{\partial \delta w_s}{\partial x} + \frac{\partial \delta w_z}{\partial x} \right) + Q_y \left( \frac{\partial \delta w_s}{\partial y} + \frac{\partial \delta w_z}{\partial y} \right) - q \delta (w_b + w_s + g(z) \rho_z) \right] dA \end{aligned} \quad (\text{III.19})$$

Où  $N, M, P, Q$  et  $R$  sont les résultantes des contraintes par unité de longueur de la plaque définies par :

$$\begin{aligned} (N_x, N_y, N_{xy}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) dz \\ (M_x, M_y, M_{xy}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) z dz \\ (P_x, P_y, P_{xy}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) f(z) dz \\ (Q_x, Q_y) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xz}, \sigma_{yz}) g(z) dz \\ R_z &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_z g'(z) dz \end{aligned} \quad (\text{III.20})$$

Et en faisant l'intégration par partie de l'équation (III.19), on obtient:

$$0 = \int_A \left[ \left( \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \right) \delta u_0 + \left( \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \right) \delta v_0 - \left( \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + q \right) \delta w_b \right. \\ \left. - \left( \frac{\partial^2 P_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 P_{xy}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial Q_x}{\partial x} - \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q \right) \delta w_s + \left( \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - R_z + g(z)q \right) \delta \varphi_z \right] dA. \quad (\text{III.21})$$

L'équation (III.15) devra être vérifiée quel que soit les déplacements virtuels  $\delta u_0, \delta v_0, \delta w_b, \delta w_s$  et  $\delta \varphi_z$  cinématiquement admissible, on en déduit les équations différentielles d'équilibre du mouvement de la plaque en utilisant le principe des travaux virtuels comme suit :

$$\begin{aligned} \delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \delta v_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= 0 \\ \delta w_b : \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q &= 0 \\ \delta w_s : \frac{\partial^2 P_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 P_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 P_y}{\partial y^2} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q &= 0 \\ \delta \varphi_z : \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - R_z + g(z)q &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.22})$$

### III.5. Détermination des coefficients de rigidité

En substituant les équations (III.8) et (III.13) dans l'équation (III.20), on obtient les expressions qui représentent des résultantes en membrane  $N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^{Tr}$ , en flexion pure  $M = \{M_x, M_y, M_{xy}\}^{Tr}$ , en flexion supplémentaire dû au cisaillement  $P = \{P_x, P_y, P_{xy}\}^{Tr}$ , et en cisaillement pur  $Q = \{Q_x, Q_y\}^{Tr}$  et  $R = \{R_z\}^{Tr}$  :

$$N_x = A_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} - B_{11} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - E_{11} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + A_{12} \frac{\partial v_0}{\partial y} - B_{12} \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} - E_{12} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + \varphi_z B s_{13}$$

$$\begin{aligned}
N_y &= A_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} - B_{12} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - E_{12} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial v_0}{\partial y} - B_{22} \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} - E_{22} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + \varphi_z B s_{23} \\
N_{xy} &= A_{66} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - B_{66} \left( 2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \right) - E_{66} \left( 2 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \right) \\
M_x &= B_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} - D_{11} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - F_{11} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial v_0}{\partial y} - D_{12} \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} - F_{12} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + F s_{13} \varphi_z \\
M_y &= B_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} - D_{12} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - F_{12} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + B_{22} \frac{\partial v_0}{\partial y} - D_{22} \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} - F_{22} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + F s_{23} \varphi_z \\
M_{xy} &= B_{66} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - D_{66} \left( 2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \right) - F_{66} \left( 2 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \right) \\
P_x &= E_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} - F_{11} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - H_{11} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + E_{12} \frac{\partial v_0}{\partial y} - F_{12} \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} - H_{12} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + H s_{13} \varphi_z \\
P_y &= E_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} - F_{12} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - H_{12} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + E_{22} \frac{\partial v_0}{\partial y} - F_{22} \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} - H_{22} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + H s_{23} \varphi_z \quad (III.23) \\
P_{xy} &= E_{66} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - F_{66} \left( 2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \right) - H_{66} \left( 2 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \right) \\
Q_x &= A s_{55} \left( \frac{\partial w_s}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \\
Q_y &= A s_{44} \left( \frac{\partial w_s}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \\
R_z &= B s_{13} \frac{\partial u_0}{\partial x} - F s_{13} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - H s_{13} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + B s_{23} \frac{\partial v_0}{\partial y} - F s_{23} \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} - H s_{23} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + E s_{33} \varphi_z
\end{aligned}$$

Où  $A_{ij}, B_{ij}, \dots$  etc. représentent les coefficients de rigidité de la plaque, sont définis comme :

$$(A_{ij}, B_{ij}, E_{ij}, D_{ij}, F_{ij}, H_{ij}) = \int_{h/2}^{h/2} Q_{ij} (1, z, f(z), z^2, z f(z), f^2(z)) dz \quad (III.24)$$

$$(B s_{ij}, F s_{ij}, H s_{ij}, E s_{ij}) = \int_{h/2}^{h/2} Q_{ij} (g'(z), z g'(z), f(z) g'(z), g'^2(z)) dz \quad (III.25)$$

$$A s_{44} = A s_{55} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{2(1+\nu)} [g(z)]^2 dz \quad (III.26)$$

Ainsi que les expressions des contraintes en fonction des déplacements sont obtenues, en reportant les relations (III.8) et (III.14) dans l'expression (III.13), on obtient :

$$\sigma_x = \frac{\nu E(z)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left[ \begin{aligned} & \left( \frac{1}{\nu} - 1 \right) \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \left( \left( \frac{1}{\nu} - 1 \right) \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \right) + \\ & f(z) \left( \left( \frac{1}{\nu} - 1 \right) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \frac{\partial w_s}{\partial y^2} \right) + g'(z) \varphi_z \end{aligned} \right], \quad (\text{III.27.a})$$

$$\sigma_y = \frac{\nu E(z)}{(1-\nu)(1+\nu)} \left[ \begin{aligned} & \frac{\partial u_0}{\partial x} + \left( \frac{1}{\nu} - 1 \right) \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \left( \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \left( \frac{1}{\nu} - 1 \right) \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \right) + \\ & f(z) \left( \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \left( \frac{1}{\nu} - 1 \right) \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \right) + g'(z) \varphi_z \end{aligned} \right], \quad (\text{III.27.b})$$

$$\sigma_z = \frac{\nu E(z)}{(1-\nu)(1+\nu)} \left[ \begin{aligned} & \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \left( \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \right) + \\ & f(z) \left( \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \right) + \left( \frac{1}{\nu} - 1 \right) g'(z) \varphi_z \end{aligned} \right], \quad (\text{III.27.c})$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \left[ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} - 2f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \right], \quad (\text{III.27.d})$$

$$\sigma_{xz} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} g(z) \left( \frac{\partial w_s}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} \right) \quad (\text{III.27.e})$$

$$\sigma_{yz} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} g(z) \left( \frac{\partial w_s}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} \right), \quad (\text{III.27.f})$$

### III.6. Solution exacte pour une plaque E-FGM simplement appuyée

La recherche de solutions analytiques des problèmes des structures composites multicouches sous diverses conditions aux limites fait appel à la résolution d'équations aux dérivées partielles classiques et linéaires à coefficients constants.

Les plaques rectangulaires sont généralement classées en fonction du type d'appuis utilisé. Dans cette partie nous sommes concernés par la solution exacte des équations (III.22) pour une plaque simplement appuyée sur les quatre cotés en matériau à gradient de propriété E-FGM. Pour ce cas d'étude, les conditions aux limites pour la présente théorie quasi 3-D d'ordre élevé s'écrivent:

- Les conditions aux limites sur les bords  $x=0$  et  $x=a$  sont exprimées sous la forme suivante:

$$v_0 = w_b = w_s = N_x = M_x = P_x = 0 \quad (\text{III.28})$$

- Les conditions aux limites sur les bords  $y=0$  et  $y=b$  sont exprimées sous la forme suivante:

$$u_0 = w_b = w_s = N_y = M_y = P_y = 0 \quad (\text{III.29})$$

A partir de la solution de Navier, on peut résoudre le problème du comportement élastique de flexion des plaques en E-FGM. Elle peut être alors recherchée en écrivant les déplacements  $u_0, v_0, w_b, w_s$  et  $\varphi_z$  sous forme de doubles séries de Fourier, satisfaisant les conditions aux limites.

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0(x, y) \\ v_0(x, y) \\ w_b(x, y) \\ w_s(x, y) \\ \varphi_z(x, y) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} \cos \alpha x \sin \beta y \\ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} \sin \alpha x \cos \beta y \\ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{bmn} \sin \alpha x \sin \beta y \\ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{smn} \sin \alpha x \sin \beta y \\ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{zmn} \sin \alpha x \sin \beta y \end{array} \right\}, \quad (\text{III.30})$$

Où

$$\alpha = m\pi/a, \beta = n\pi/b \quad (\text{III.31})$$

Où  $U_{mn}, V_{mn}, W_{bmn}, W_{smn}$  et  $\Phi_{mn}$  sont les composantes du vecteur déplacement inconnues. La charge transversale ( $q$ ) est également exprimée en fonction d'une double série de Fourier comme suit :

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn} \sin \alpha x \cos \beta y \quad (\text{III.32})$$

Le coefficient  $Q_{mn}$  est donné pour certaines charges typiques par :

$$Q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \alpha x \sin \beta y dx dy \quad (\text{III.33})$$

$$Q_{mn} = \begin{cases} q_0 & \text{Pour le cas d'une charge sinusoïdale} \\ \frac{16q_0}{mn\pi^2} & \text{Pour le cas d'une charge uniformément répartie} \end{cases} \quad (\text{III.34})$$

En remplaçant les équations (IV.23), (IV.30) et (IV.32) dans l'équation (IV.22), les solutions analytiques peuvent être obtenues à partir de la relation suivante :

$$[K]\{\Delta\} = \{q\} \quad (\text{III.35})$$

Avec :

$\{\Delta\}$  Est un vecteur déplacement donné par :

$$\{\Delta\} = \{U_{mn}, V_{mn}, W_{bmn}, W_{smn}, \Phi_{zmn}\}^{Tr} \quad (\text{III.36})$$

$\{q\}$  Est un vecteur de charge donné par :

$$\{q\} = \{0, 0, Q_{mn}, Q_{mn}, 0\}^{Tr} \quad (\text{III.37})$$

$[K]$  Est une matrice de rigidité symétrique exprimée par :

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} & k_{34} & k_{35} \\ k_{14} & k_{24} & k_{34} & k_{44} & k_{45} \\ k_{15} & k_{25} & k_{35} & k_{45} & k_{55} \end{bmatrix} \quad (\text{III.38})$$

Où :

$$\begin{aligned}
k_{11} &= -\alpha^2 A_{11} - \beta^2 A_{66} \\
k_{12} &= -\alpha\beta A_{12} - \alpha\beta A_{66} \\
k_{13} &= 2\alpha\beta^2 B_{66} + \alpha\beta^2 B_{12} + \alpha^3 B_{11} \\
k_{14} &= 2\alpha\beta^2 E_{66} + \alpha^3 E_{11} + \alpha\beta^2 E_{12} \\
k_{15} &= \alpha B s_{13} \\
k_{22} &= -\beta^2 A_{22} - \alpha^2 A_{66} \\
k_{23} &= 2\alpha^2 \beta B_{66} + \beta^3 B_{22} + \alpha^2 \beta B_{12} \\
k_{24} &= \alpha^2 \beta E_{12} + \alpha^2 \beta E_{66} + \beta^3 E_{22} \\
k_{25} &= \beta B s_{23} \\
k_{33} &= -2\alpha^2 \beta^2 D_{12} - \alpha^4 D_{11} - 4\alpha^2 \beta^2 D_{66} - \beta^4 D_{22} - \alpha^4 D_{11} \\
k_{34} &= -\alpha^4 F_{11} - 2\alpha^2 \beta^2 F_{12} - 4\alpha^2 \beta^2 F_{66} - \beta^4 F_{22} \\
k_{35} &= -\alpha^2 F s_{13} - \beta^2 F s_{23} \\
k_{44} &= -4\alpha^2 \beta^2 H_{66} - 2\alpha^2 \beta^2 H_{12} - A s_{44} \beta^2 - \beta^4 H_{22} - \alpha^4 H_{11} \\
k_{45} &= -A s_{55} \alpha^2 - A s_{44} \beta^2 - \alpha^2 H s_{13} - \beta^2 H s_{13} - \beta^2 H s_{23} \\
k_{55} &= -E s_{33} - A s_{55} \alpha^2 - A s_{44} \beta^2
\end{aligned}$$

### III.7. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une solution générale du comportement mécanique de flexion des plaques en matériaux à gradient de propriétés type E-FGM en utilisant une théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé quasi 3-D à cinq variables. Cette tient en considération l'effet d'étirement de l'épaisseur (déformation normale suivant la direction  $z$  est différent à zéro,  $\varepsilon_z \neq 0$ ), néanmoins elle n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description trigonométrique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres de la plaque. Les équations de mouvements de la présente théorie sont déterminées en employant le principe des travaux virtuels et par suite les solutions exactes des plaques E-FGM simplement appuyées, ont été obtenues en utilisant la solution de Navier. Les résultats présentés dans les chapitres suivants permettent d'apprécier clairement l'apport de cette théorie en les comparants avec les résultats des autres théories quasi 3D et d'ordre élevé.

## **CHAPITRE IV:**

### ***RÉSULTATS ET DISCUSSIONS***

### IV.1. Introduction

Ce travail de mémoire de fin d'étude a pour but l'analyse du comportement en flexion des plaques composites en matériaux à gradient de propriétés types E-FGM, où les propriétés matérielles varient selon une fonction exponentielle. Dans la présente analyse ont tenu en compte l'effet d'étirement de l'épaisseur et de la déformation de cisaillement transversal à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres de la plaque, plusieurs variations où la distribution des contraintes de cisaillement est considérée selon la forme de la fonction utilisée, à savoir la variation parabolique, trigonométrique, exponentielle, ...etc. Il apparaît clairement que le paramètre du matériau joue un rôle très important dans la distribution des contraintes et des déformations dans les plaques fonctionnellement graduées et simplement appuyées soumises à une condition de chargement sinusoïdale.

Dans le cadre général notre étude est développée sur un modèle de solution analytique pour analyser le comportement statique de la flexion des plaques E-FGM en utilisant une théorie simple de déformation de cisaillement d'ordre élevé "HSDT quasi-3D". Seulement cinq inconnus indépendants sont utilisés dans la présente théorie au lieu de six inconnus indépendants ou plus employés dans les autres théories correspondantes de cisaillement et de déformations normales. La performance de la présente formulation est vérifiée en comparant les résultats obtenus avec d'autres HSDT quasi-3D et HSDT 2D disponibles dans la littérature et la solution exacte d'élasticité proposée par Zenkour (A.Zenkour, 2007).

### IV.2. Résultats et discussions

Dans ce chapitre, divers exemples numériques sont présentés et discutés afin de vérifier l'exactitude de la présente théorie quasi 3D pour analyser le comportement de la flexion des plaques en matériaux à gradient de propriétés type E-FGM. Pour obtenir des résultats numériques, la combinaison choisie pour cette plaque E-FGM est Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> dont les constituants de matériaux choisis sont : pour le métal, l'Aluminium et pour la céramique, Alumina. Pour la simplicité, on suppose que le coefficient de poisson est constant en tout

point de la plaque. Les modules de Young et le coefficient de poisson des deux constituants sont alors résumés dans le tableau IV.1 suivant:

**Tableau IV.1:** Les propriétés matérielles utilisées dans la plaque E-FGM

Propriétés	Métal	Céramique
$E$ (GPa)	70	<b>380</b>
$\nu$	<b>0.3</b>	<b>0.3</b>

Dans cette section, on présente les résultats de flexion des plaques E-FGM simplement appuyées sous chargement sinusoïdale. À des fins de vérification, les résultats obtenus sont comparés à la solution exacte de la théorie de l'élasticité 3D et à celles prédites par les théories FSDT, HSDT et quasi-3D. La description de différents modèles de déplacement et leur nombre correspondant d'inconnus sont listés dans le tableau IV.2 ci-après.

**Tableau IV.2:** Les différents modèles du champ de déplacement

Modèles	Théories	$\varepsilon_z$	Inconnus
FSDT [25]	Théorie de la déformation de cisaillement du premier ordre	$\varepsilon_z=0$	5
HSDT [12]	Théorie d'ordre élevé avec fonction trigonométrique	$\varepsilon_z=0$	5
Quasi-3D [42]	Théorie quasi-3D avec fonction sinusoïdale et parabolique	$\varepsilon_z \neq 0$	9
Quasi-3D [43]	Théorie quasi-3D avec fonction hyperbolique et parabolique	$\varepsilon_z \neq 0$	9
Quasi-3D [44]	Théorie quasi-3D avec fonctions cubiques et paraboliques	$\varepsilon_z \neq 0$	9
Quasi-3D [45]	Théorie quasi-3D avec fonction sinusoïdale	$\varepsilon_z \neq 0$	6
Quasi-3D [46]	Théorie quasi-3D avec fonction sinusoïdale	$\varepsilon_z \neq 0$	6
Présente	Théorie quasi-3D avec fonction sinusoïdale	$\varepsilon_z \neq 0$	5

#### IV.2.1. Résultats de flexion des plaques isotropes E-FGM

Dans cet exemple, une plaque rectangulaire isotrope E-FGM avec un module de Young varie dans le sens de l'épaisseur selon une fonction exponentielle comme considéré dans l'équation III.11 et même indiqué par la figure III.1 du chapitre précédent. Les formes adimensionnelles utilisées dans la présente étude sont les suivantes:

$$(\bar{u}, \bar{w}) \left( 0, \frac{b}{2}, z \right) = 10 \frac{E_0 h^3}{q_0 a^4} (u, w), \quad (\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y) \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{z}{h} \right) = \frac{h^2}{q_0 a^2} (\sigma_x, \sigma_y), \quad (\text{IV. 1})$$

$$\bar{\tau}_{xy}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{z}{h}\right) = \frac{h^2}{q_0 a^2} \tau_{xy}, \quad \bar{\tau}_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, \frac{z}{h}\right) = \frac{h}{q_0 a} \tau_{xz}, \quad \bar{\tau}_{yz}\left(\frac{a}{2}, 0, \frac{z}{h}\right) = \frac{h}{q_0 a} \tau_{yz}$$

Les tableaux IV.3 à IV.10 expriment les déplacements transversaux et les contraintes adimensionnelles dans les plaques en matériaux à gradient de propriétés (E-FGM) pour diverses valeurs du rapport géométrique ( $b/a$ ), le rapport d'élancement ( $a/h$ ) et le paramètre de matériau ( $p$ ). Les résultats de calcul obtenues sont comparées avec la solution exacte d'élasticité 3D de Zenkour (A.Zenkour, 2007), les solutions quasi 3D de Zenkour (A.Zenkour, 2007). et Mantari et Guedes Soares (JL.Mantari et al, 2012), et enfin avec la solution HSDT de Mantari et Guedes Soares (JL.Mantari et al, 2012).

**Tableau IV.3:** Déplacement transversal adimensionnel  $\bar{w}(z=0)$  dans une plaque E-FGM isotrope simplement appuyée, soumise à une charge sinusoïdale,  $a/h = 2$

b/a	Méthodes	P					
		0.1	0.3	0.5	0.7	01	1.5
6	3D [45]	1.6377	1.4885	1.3518	1.2269	1.0593	0.8261
	Quasi 3D [45]	1.6294	1.4731	1.3307	1.2010	1.0282	0.7906
	HSDT [12]	1.7347	1.5688	1.4182	1.2815	1.1003	0.8500
	Présente	1.6294	1.4731	1.3307	1.2010	1.0282	0.7906
5	3D [45]	1.6065	1.4601	1.3261	1.2035	1.0391	0.8102
	Quasi 3D [45]	1.5983	1.4449	1.3052	1.1780	1.0086	0.7754
	HSDT [12]	1.7025	1.5397	1.3919	1.2576	1.0798	0.8340
	Présente	1.5982	1.4449	1.3052	1.1780	1.0086	0.7754
4	3D [45]	1.5515	1.4101	1.2807	1.1624	1.0035	0.7824
	Quasi 3D [45]	1.5435	1.3954	1.2605	1.1376	0.9740	0.7487
	HSDT [12]	1.6458	1.4885	1.3455	1.2157	1.0437	0.8060
	Présente	1.5435	1.3954	1.2605	1.1376	0.9739	0.7487
3	3D [45]	1.4430	1.3116	1.1913	1.0812	0.9334	0.7275
	Quasi 3D [45]	1.4354	1.2977	1.1722	1.0579	0.9057	0.6962
	Quasi 3D [46]	1.4354	1.2977	1.1722	1.0579	0.9057	0.6962
	HSDT [12]	1.5341	1.3784	1.2540	1.1329	0.9725	0.7506
Présente	1.4354	1.2977	1.1722	1.0579	0.9057	0.6961	
2	3D [45]	1.1945	1.0859	0.9864	0.8952	0.7727	0.6017
	Quasi 3D [45]	1.1880	1.0740	0.9701	0.8755	0.7494	0.5758
	Quasi 3D [46]	1.1880	1.0740	0.9701	0.8755	0.7494	0.5758
	HSDT [12]	1.2776	1.1553	1.0441	0.9431	0.8093	0.6238
Présente	1.1880	1.0740	0.9701	0.8755	0.7494	0.5758	
1	3D [45]	0.5769	0.5247	0.4766	0.4324	0.3727	0.2890
	Quasi 3D [45]	0.5731	0.5181	0.4679	0.4222	0.3612	0.2771
	Quasi 3D [46]	0.5731	0.5181	0.4679	0.4222	0.3612	0.2771
	HSDT [12]	0.6363	0.5752	0.5195	0.4687	0.4018	0.3079
Présente	0.5731	0.5181	0.4679	0.4222	0.3612	0.2771	

Il convient de noter que les solutions quasi-3D (A.Zenkour, 2007) et (JL.Mantari et al, 2012). Leurs dérivées sont basées en fonction d'une variation sinusoïdale des déplacements dans le plan et transversal à travers l'épaisseur, tandis que la solution HSDT (JL.Mantari et al, 2012). est obtenue en fonction d'une variation trigonométrique des déplacements dans le plan et un déplacement transversal constant à travers l'épaisseur (c'est-à-dire, l'effet d'étirement d'épaisseur est négligé,  $\varepsilon_z=0$ ). On peut voir que les résultats des déplacements transversaux et les contraintes obtenus par la nouvelle théorie quasi-3D sinusoïdale avec cinq inconnus sont presque identiques à ceux générés par les théories quasi-3D de Zenkour (A.Zenkour, 2007) et Mantari et Guedes Soares (JL.Mantari et al, 2012) avec six inconnus.

**Tableau IV.4:** Déplacement transversal adimensionnel  $\bar{w}(z=0)$  dans une plaque E-FGM isotrope simplement appuyée, soumise à une charge sinusoïdale,  $a/h = 4$

$b/a$	Méthodes	$P$					
		0.1	0.3	0.5	0.7	01	1.5
6	3D [45]	1.1714	1.0622	0.9633	0.8738	0.7550	0.5919
	Quasi 3D [45]	1.1668	1.0551	0.9535	0.8611	0.7382	0.5697
	HSDT [12]	1.1920	1.0789	0.9767	0.8844	0.7623	0.5955
	Présente	1.1668	1.0551	0.9534	0.8611	0.7382	0.5697
5	3D [45]	1.1459	1.0391	0.9424	0.8548	0.7386	0.5790
	Quasi 3D [45]	1.1414	1.0321	0.9327	0.8423	0.7221	0.5573
	HSDT [12]	1.1663	1.0556	0.9556	0.8653	0.7458	0.5825
	Présente	1.1414	1.0321	0.9327	0.8423	0.7221	0.5573
4	3D [45]	1.1012	0.9985	0.9056	0.8215	0.7098	0.5564
	Quasi 3D [45]	1.0968	0.9918	0.8963	0.8094	0.6939	0.5355
	HSDT [12]	1.1211	1.0147	0.9186	0.8317	0.7169	0.5599
	Présente	1.0968	0.9918	0.8962	0.8094	0.6939	0.5355
3	3D [45]	1.0134	0.9190	0.8335	0.7561	0.6533	0.5121
	Quasi 3D [45]	1.0094	0.9127	0.8248	0.7449	0.6385	0.4927
	Quasi 3D [46]	1.0094	0.9127	0.8248	0.7449	0.6385	0.4927
	HSDT [12]	1.0325	0.9345	0.8459	0.7659	0.6601	0.5154
Présente	1.0094	0.9127	0.8248	0.7449	0.6385	0.4927	
2	3D [45]	0.8153	0.7395	0.6707	0.6085	0.5257	0.4120
	Quasi 3D [45]	0.8120	0.7343	0.6635	0.5992	0.5136	0.3962
	Quasi 3D [46]	0.8120	0.7343	0.6635	0.5992	0.5136	0.3962
	HSDT [12]	0.8325	0.7534	0.6819	0.6173	0.5319	0.4150
Présente	0.8120	0.7343	0.6635	0.5992	0.5136	0.3962	
1	3D [45]	0.3490	0.3167	0.2875	0.2608	0.2253	0.1805
	Quasi 3D [45]	0.3475	0.3142	0.2839	0.2563	0.2196	0.1692
	Quasi 3D [46]	0.3475	0.3142	0.2839	0.2563	0.2196	0.1692
	HSDT [12]	0.3602	0.3259	0.2949	0.2668	0.2295	0.1785
Présente	0.3475	0.3142	0.2839	0.2563	0.2196	0.1692	

Pour illustrer l'exactitude des résultats obtenus par la présente théorie quasi 3-D pour une large gamme de l'indice de puissance ou bien le paramètre matériel et le rapport géométrique (longueur/largeur), la variation de déplacement transversal adimensionnel  $\bar{w}$  par rapport au paramètre matériel ( $p$ ) et même le rapport ( $b/a$ ) sont illustrés sur les tableaux (IV.3), (IV.4) et (IV.5) respectivement, pour des plaques en matériaux à gradient de propriétés type E-FGM soumises à un chargement sinusoïdal. On observe également que la valeur du déplacement transversal adimensionnel  $\bar{w}$  est diminuée avec la diminution du rapport géométrique de la plaque.

**Tableau IV.5:** Déplacement transversal adimensionnel  $\bar{w}(z = 0)$  dans une plaque E-FGM isotrope simplement appuyée, soumise à une charge sinusoïdale,  $a/h = 10$

$b/a$	Méthodes	$P$					
		0.1	0.3	0.5	0.7	01	1.5
<b>3</b>	Quasi 3D [45]	0.8849	0.8002	0.7233	0.6534	0.5605	0.4333
	Quasi 3D [46]	0.8849	0.8002	0.7233	0.6534	0.5605	0.4333
	HSDT [12]	0.8909	0.8066	0.7307	0.6622	0.5720	0.4489
	Présente	<b>0.8849</b>	<b>0.8002</b>	<b>0.7233</b>	<b>0.6534</b>	<b>0.5605</b>	<b>0.4333</b>
<b>2</b>	Quasi 3D [45]	0.7015	0.6344	0.5734	0.5180	0.4444	0.3435
	Quasi 3D [46]	0.7015	0.6344	0.5734	0.5180	0.4444	0.3435
	HSDT [12]	0.7066	0.6397	0.5795	0.5252	0.4536	0.3560
	Présente	<b>0.7015</b>	<b>0.6344</b>	<b>0.5734</b>	<b>0.5180</b>	<b>0.4444</b>	<b>0.3435</b>
<b>1</b>	Quasi 3D [45]	0.2790	0.2523	0.2280	0.2060	0.1767	0.1366
	Quasi 3D [46]	0.2790	0.2523	0.2280	0.2060	0.1767	0.1366
	HSDT [12]	0.2816	0.2550	0.2309	0.2093	0.1807	0.1417
	Présente	<b>0.2790</b>	<b>0.2523</b>	<b>0.2280</b>	<b>0.2060</b>	<b>0.1767</b>	<b>0.1366</b>

Néanmoins cette étude indique que l'utilisation des autres hypothèses données dans l'équation (III.3) a un effet minimal sur la précision des résultats, mais il peut améliorer le coût de calcul en raison de la réduction du nombre d'inconnus de la théorie. En général, la présente théorie quasi-3D à cinq variables et quasi-3D (A.Zenkour, 2007) à six variables donnent des résultats comparables avec la théorie de l'élasticité 3D (A.Zenkour, 2007) même dans le cas des plaques très épaisses ( $a/h=2$ ). Alors que la théorie de déformation du cisaillement d'ordre élevé (HSDT) (JL.Mantari et al, 2012) ne donne que de bons résultats pour les plaques épaisses ( $a/h=4$ ), mais donnent des résultats imparfaits pour des plaques très épaisses ( $a/h=2$ ). Par exemple, par rapport à la solution 3D (A.Zenkour, 2007), les différences

dans les valeurs de déplacement et de contrainte prédites par la présente théorie et la théorie quasi 3D (A.Zenkour, 2007) sont de 0,66% et 4,77% respectivement, tandis que ces différences pour la théorie HSDT (JL.Mantari et al, 2012) sont de 10,29% et 18,72% pour la même plaque E-FGM avec ( $a=b=2h$ ) et ( $p=0.1$ ) (voir tableau IV.5). Les erreurs dans HSDT (JL.Mantari et al, 2012) sont négligeables pour le cas des plaques moyennement épaisses avec ( $a/h=10$ ) (voir les tableaux IV.6 à IV.9). Ceci est dû à l'effet d'étirement de l'épaisseur.

**Tableau IV.6:** Contraintes normales adimensionnelles  $\bar{\sigma}_y(z = h/2)$  dans une plaque E-FGM isotrope simplement appuyée, soumise à une charge sinusoïdale,  $a/h = 2$

$b/a$	Méthodes	$p$					
		0.1	0.3	0.5	0.7	0.1	1.5
<b>6</b>	3D [45]	0.2943	0.3101	0.3270	0.3451	0.3746	0.4305
	Quasi 3D [45]	0.2912	0.3118	0.3339	0.3573	0.3955	0.4679
	HSDT [12]	0.2187	0.2345	0.2512	0.2690	0.2980	0.3498
	Présente	0.2912	0.3118	0.3339	0.3339	0.3955	0.4679
<b>5</b>	3D [45]	0.2967	0.3128	0.3299	0.3483	0.3782	0.4350
	Quasi 3D [45]	0.2935	0.3144	0.3366	0.3603	0.3988	0.4719
	HSDT [12]	0.2219	0.2378	0.2548	0.2729	0.3024	0.3549
	Présente	0.2935	0.3144	0.3366	0.3603	0.3989	0.4719
<b>4</b>	3D [45]	0.3008	0.3173	0.3349	0.3537	0.3844	0.4426
	Quasi 3D [45]	0.2974	0.3186	0.3412	0.3653	0.4045	0.4786
	HSDT [12]	0.2272	0.2435	0.2610	0.2795	0.3097	0.3634
	Présente	0.2974	0.3186	0.3413	0.3653	0.4045	0.4786
<b>3</b>	3D [45]	0.3081	0.3252	0.3436	0.3633	0.3953	0.4562
	Quasi 3D [45]	0.3042	0.3261	0.3493	0.3741	0.4143	0.4904
	Quasi 3D [46]	0.3042	0.3261	0.3493	0.3741	0.4143	0.4904
	HSDT [12]	0.2368	0.2539	0.2721	0.2914	0.3230	0.3788
	Présente	0.3042	0.3261	0.3493	0.3741	0.4143	0.4904
<b>2</b>	3D [4>5]	0.3200	0.3385	0.3583	0.3796	0.4142	0.4799
	Quasi 3D [45]	0.3146	0.3376	0.3620	0.3880	0.4300	0.5093
	Quasi 3D [46]	0.3146	0.3376	0.3620	0.3880	0.4300	0.5093
	HSDT [12]	0.2539	0.2723	0.2919	0.3128	0.3469	0.4064
	Présente	0.3146	0.3376	0.3620	0.3880	0.4300	0.5093
<b>1</b>	3D [45]	0.3103	0.3292	0.3495	0.3713	0.4067	0.4741
	Quasi 3D [45]	0.2955	0.3181	0.3421	0.3675	0.4085	0.4851
	Quasi 3D [46]	0.2955	0.3181	0.3421	0.3675	0.4085	0.4851
	HSDT [12]	0.2522	0.2710	0.2910	0.3123	0.3477	0.4035
	Présente	0.2955	0.3181	0.3421	0.3675	0.4085	0.4851

L'importance de l'effet d'étirement de l'épaisseur a été observée par (E. Carrera et al, 2011). Les variations des déplacements et des contraintes à travers l'épaisseur sont également illustrées sur les figures IV.1 à IV.6, pour les plaques épaisses avec un rapport d'élancement ( $a/h=4$ ) et le paramètre du matériau ( $p=0.5$ ). Les plaques carrées ( $b/a=1$ ) et rectangulaires ( $b/a=2$ ) sont considérées dans cette analyse. Encore une fois, la nouvelle théorie quasi-3D et la théorie quasi-3D de Zenkour (A.Zenkour, 2007) donnent des solutions identiques, et leurs résultats sont en accord avec ceux présentés par la théorie de l'élasticité 3D (A.Zenkour, 2007).

**Tableau IV.7:** Contraintes normales adimensionnelles  $\bar{\sigma}_y(z = h/2)$  dans une plaque E-FGM isotrope simplement appuyée, soumise à une charge sinusoïdale,  $a/h = 4$

$b/a$	Méthode	$p$					
		0.1	0.3	0.5	0.7	0.1	1.5
<b>6</b>	3D [45]	0.2181	0.2321	0.2470	0.2628	0.2886	0.3373
	Quasi 3D [45]	0.2369	0.2520	0.2683	0.2857	0.3144	0.3699
	HSDT [12]	0.2010	0.2149	0.2298	0.2455	0.2711	0.3192
	Présente	0.2369	0.2521	0.2683	0.2858	0.3144	0.3699
<b>5</b>	3D [45]	0.2206	0.2348	0.2498	0.2659	0.2920	0.3413
	Quasi 3D [45]	0.2391	0.2545	0.2710	0.2886	0.3176	0.3737
	HSDT [12]	0.2037	0.2178	0.2329	0.2488	0.2747	0.3235
	Présente	0.2391	0.2545	0.2710	0.2887	0.3177	0.3737
<b>4</b>	3D [45]	0.2247	0.2392	0.2546	0.2710	0.2977	0.3482
	Quasi 3D [45]	0.2429	0.2586	0.2754	0.2934	0.3230	0.3800
	HSDT [12]	0.2082	0.2226	0.2380	0.2544	0.2808	0.3307
	Présente	0.2429	0.2586	0.2754	0.2934	0.3230	0.3801
<b>3</b>	3D [45]	0.2319	0.2469	0.2629	0.2800	0.3077	0.3602
	Quasi 3D [45]	0.2493	0.2656	0.2831	0.3017	0.3323	0.3911
	Quasi 3D [46]	0.2493	0.2656	0.2831	0.3017	0.3323	0.3911
	HSDT [12]	0.2162	0.2312	0.2472	0.2642	0.2917	0.3435
	Présente	0.2493	0.2656	0.2831	0.3018	0.3323	0.3911
<b>2</b>	3D [45]	0.2431	0.2591	0.2762	0.2943	0.3238	0.3797
	Quasi 3D [45]	0.2588	0.2761	0.2946	0.3143	0.3464	0.4079
	Quasi 3D [46]	0.2588	0.2761	0.2946	0.3143	0.3464	0.4079
	HSDT [12]	0.2294	0.2454	0.2624	0.2805	0.3097	0.3647
	Présente	0.2588	0.2761	0.2946	0.3143	0.3465	0.4079
<b>1</b>	3D [45]	0.2247	0.2399	0.2562	0.2736	0.3018	0.3588
	Quasi 3D [45]	0.2346	0.2510	0.2684	0.2870	0.3171	0.3739
	Quasi 3D [46]	0.2346	0.2510	0.2684	0.2870	0.3171	0.3739
	HSDT [12]	0.2164	0.2316	0.2477	0.2649	0.2927	0.3451
	Présente	0.2346	0.2510	0.2684	0.2870	0.3171	0.3739

**Tableau IV.8:** Contraintes normales adimensionnelles  $\bar{\sigma}_y(z = h/2)$  dans une plaque E-FGM isotrope simplement appuyée, soumise à une charge sinusoïdale,  $a/h = 10$

$b/a$	Méthodes	$p$					
		0.1	0.3	0.5	0.7	01	1.5
<b>3</b>	Quasi 3D [45]	0.2347	0.2495	0.2654	0.2825	0.3104	0.3645
	Quasi 3D [46]	0.2347	0.2495	0.2654	0.2825	0.3104	0.3645
	HSDT [12]	0.2104	0.2248	0.2402	0.2565	0.2829	0.3328
	<b>Présente</b>	<b>0.2347</b>	<b>0.2496</b>	<b>0.2654</b>	<b>0.2825</b>	<b>0.3104</b>	<b>0.3645</b>
<b>2</b>	Quasi 3D [45]	0.2441	0.2599	0.2768	0.2949	0.3244	0.3810
	Quasi 3D [46]	0.2441	0.2599	0.2768	0.2949	0.3244	0.3810
	HSDT [12]	0.2225	0.2378	0.2541	0.2713	0.2993	0.3521
	<b>Présente</b>	<b>0.2441</b>	<b>0.2600</b>	<b>0.2769</b>	<b>0.2949</b>	<b>0.3244</b>	<b>0.3811</b>
<b>1</b>	Quasi 3D [45]	0.2196	0.2345	0.2503	0.2671	0.2944	0.3460
	Quasi 3D [46]	0.2196	0.2345	0.2503	0.2671	0.2944	0.3460
	HSDT [12]	0.2062	0.2204	0.2355	0.2515	0.2774	0.3264
	<b>Présente</b>	<b>0.2196</b>	<b>0.2345</b>	<b>0.2503</b>	<b>0.2671</b>	<b>0.2944</b>	<b>0.3460</b>

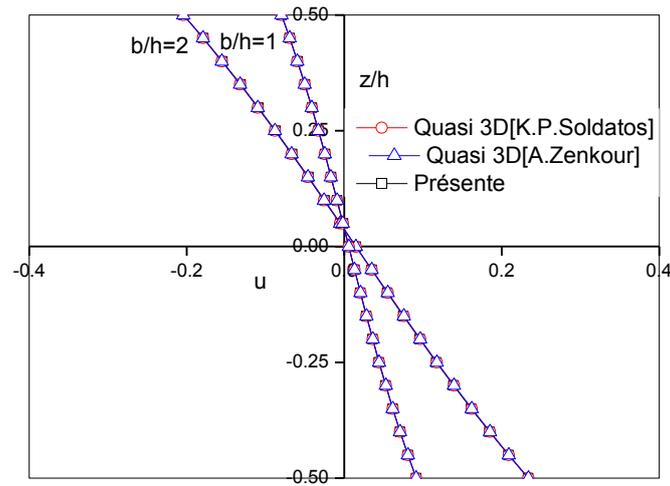
**Tableau IV.9:** Contraintes normales adimensionnelles  $\bar{\sigma}_x(z = h/2)$  dans une plaque E-FGM isotrope simplement appuyée, soumise à une charge sinusoïdale,  $a/h = 10$

$b/a$	Méthodes	$p$					
		0.1	0.3	0.5	0.7	1	1.5
<b>3</b>	Quasi 3D [45]	0.5514	0.5896	0.6302	0.6733	0.7427	0.8730
	Quasi 3D [46]	0.5514	0.5896	0.6302	0.6733	0.7427	0.8730
	HSDT [12]	0.5288	0.5651	0.6037	0.6447	0.7112	0.8365
	<b>Présente</b>	<b>0.5514</b>	<b>0.5897</b>	<b>0.6302</b>	<b>0.6733</b>	<b>0.7427</b>	<b>0.8730</b>
<b>2</b>	Quasi 3D [45]	0.4552	0.4867	0.5200	0.5554	0.6126	0.7201
	Quasi 3D [46]	0.4552	0.4867	0.5200	0.5554	0.6126	0.7201
	HSDT [12]	0.4350	0.4649	0.4966	0.5303	0.5850	0.6881
	<b>Présente</b>	<b>0.4552</b>	<b>0.4867</b>	<b>0.5201</b>	<b>0.5555</b>	<b>0.6126</b>	<b>0.7201</b>
<b>1</b>	Quasi 3D [45]	0.2196	0.2345	0.2503	0.2671	0.2944	0.3460
	Quasi 3D [46]	0.2196	0.2345	0.2503	0.2671	0.2944	0.3460
	HSDT [12]	0.2062	0.2204	0.2355	0.2515	0.2774	0.3264
	<b>Présente</b>	<b>0.2196</b>	<b>0.2345</b>	<b>0.2503</b>	<b>0.2671</b>	<b>0.2944</b>	<b>0.3460</b>

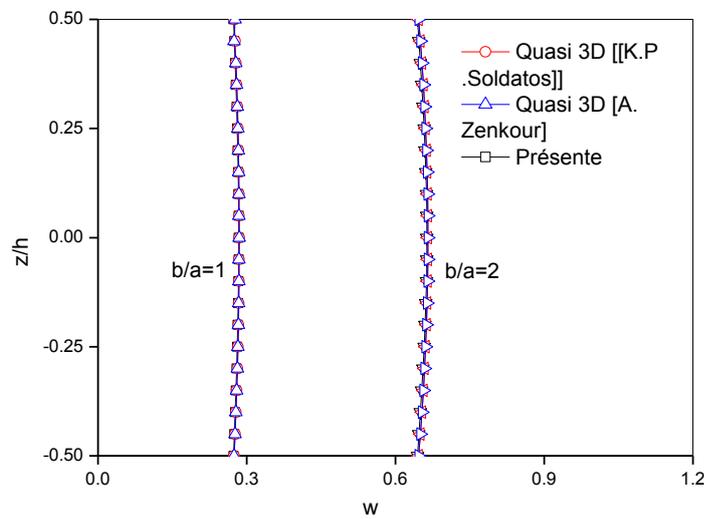
**Tableau IV.10:** Contraintes de cisaillement transversal adimensionnelles  $\bar{\sigma}_{xz}$  ( $z = 0$ ) dans une plaque E-FGM isotrope simplement appuyée, soumise à une charge sinusoïdale,  $a/h = 10$

$b/a$	Méthodes	$p$					
		0.1	0.3	0.5	0.7	01	1.5
<b>3</b>	Quasi 3D [45]	0.4418	0.4411	0.4396	0.4375	0.4330	0.4221
	Quasi 3D [46]	0.4418	0.4411	0.4396	0.4375	0.4330	0.4221
	HSDT [12]	0.4285	0.4278	0.4263	0.4241	0.4195	0.4084
	<b>Présente</b>	<b>0.4418</b>	<b>0.4411</b>	<b>0.4396</b>	<b>0.4375</b>	<b>0.4330</b>	<b>0.4222</b>
<b>2</b>	Quasi 3D [45]	0.3927	0.3921	0.3908	0.3889	0.3849	0.3752
	Quasi 3D [46]	0.3927	0.3921	0.3908	0.3889	0.3849	0.3752
	HSDT [12]	0.3809	0.3803	0.3789	0.3770	0.3729	0.3630
	<b>Présente</b>	<b>0.3927</b>	<b>0.3920</b>	<b>0.3908</b>	<b>0.3889</b>	<b>0.3849</b>	<b>0.3752</b>
<b>1</b>	Quasi 3D [45]	0.2454	0.2450	0.2442	0.2430	0.2405	0.2344
	Quasi 3D [46]	0.2454	0.2450	0.2442	0.2430	0.2405	0.2344
	HSDT [12]	0.2380	0.2376	0.2368	0.2356	0.2330	0.2268
	<b>Présente</b>	<b>0.2454</b>	<b>0.2450</b>	<b>0.2442</b>	<b>0.2430</b>	<b>0.2405</b>	<b>0.2344</b>

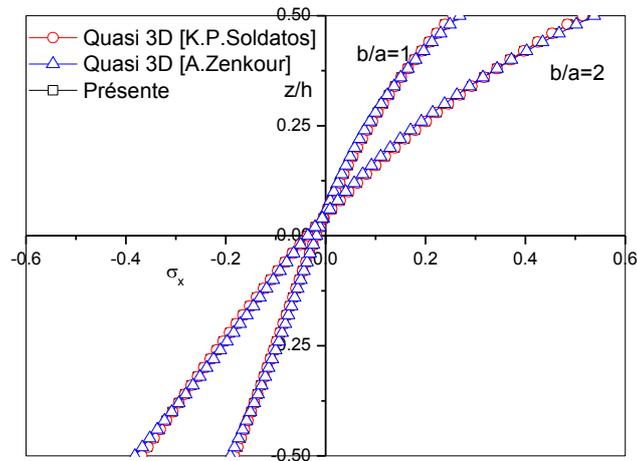
La variation du déplacement adimensionnel dans le plan ( $\bar{u}$ ), le déplacement transversal ( $\bar{w}$ ) et la distribution des contraintes adimensionnelles ( $\bar{\sigma}_x$ ,  $\bar{\sigma}_{xy}$ ,  $\bar{\tau}_{xz}$  et  $\bar{\tau}_{yz}$ ) dans les plaques en matériaux graduellement évalués E-FGM à travers l'épaisseur est représentée sur les figures IV.1 à IV.6 en utilisant la présente théorie de déformation du cisaillement d'ordre élevé quasi 3-D à cinq variables. On observe que cette théorie de cisaillement et les autres théories quasi 3-D proposées par Soldatos (K.P.Soldatos, 1992) et Zenkour (A.Zenkour, 2007) sont identiques.



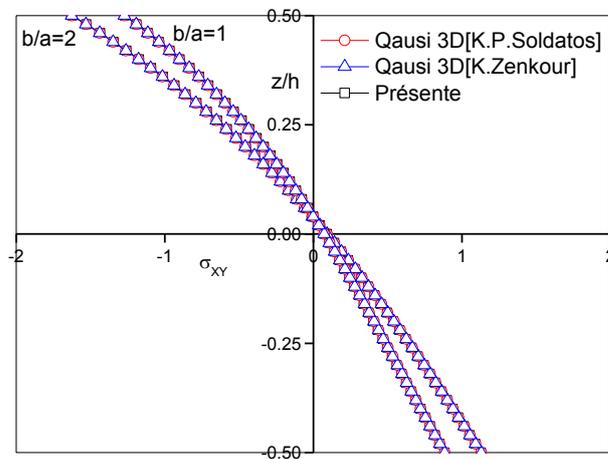
**Figure IV.1:** Variation du déplacement adimensionnel  $\bar{u}$  dans une plaque E-FGM isotrope simplement appuyée, soumise à une charge sinusoïdale,  $a / h = 4$ ,  $p = 0.5$



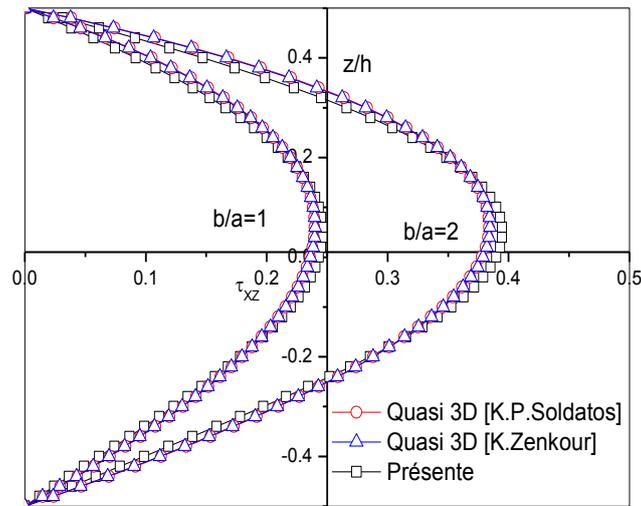
**Figure IV.2 :** Variation du déplacement transversal adimensionnel  $\bar{w}$  dans une plaque E-FGM isotrope simplement appuyée, soumise à une charge sinusoïdale,  $a / h = 4$ ,  $p = 0.5$



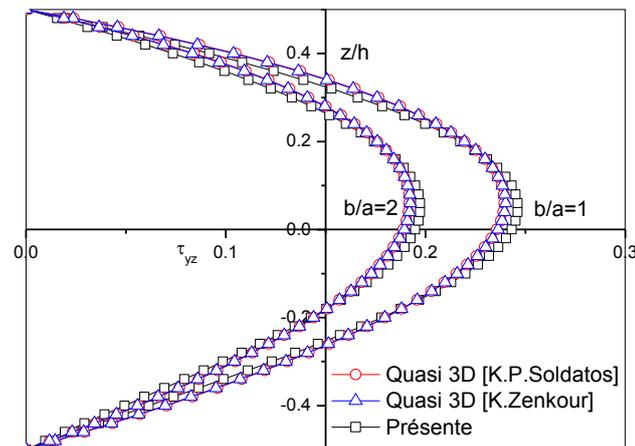
**Figure IV.3 :** Distribution des contraintes normales axiales  $\bar{\sigma}_x$  à travers l'épaisseur d'une plaque E-FGM isotrope simplement appuyée, soumise à une charge sinusoïdale,  $a/h = 4$ ,  $p = 0.5$



**Figure IV.4 :** Distribution des contraintes de cisaillement  $\bar{\tau}_{xy}$  à travers l'épaisseur d'une plaque E-FGM isotrope simplement appuyée, soumise à une charge sinusoïdale,  $a/h = 4$ ,  $p = 0.5$



**Figure IV.5 :** Distribution des contraintes de cisaillement  $\bar{\tau}_{xz}$  à travers l'épaisseur d'une plaque E-FGM isotrope simplement appuyée, soumise à une charge sinusoïdale,  $a/h = 4$ ,  $p = 0.5$



**Figure IV.6 :** Distribution des contraintes de cisaillement  $\bar{\tau}_{yz}$  à travers l'épaisseur d'une plaque E-FGM isotrope simplement appuyée, soumise à une charge sinusoïdale,  $a/h = 4$ ,  $p = 0.5$

### IV.3. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les résultats numériques de l'analyse du comportement statiques des plaques en matériau à gradient de propriétés, type E-FGM en utilisant une théorie d'ordre élevé quasi 3-D à cinq variables qui tient en considération l'effet d'étirement de l'épaisseur. La présente théorie de déformation de cisaillement a été appliquée avec succès pour étudier ce type de matériaux composites avancés caractérisés par une gradation des propriétés matérielles selon une fonction exponentielle à travers l'épaisseur. Cette théorie assure la nullité des contraintes de cisaillement transversal sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Les résultats de la flexion des plaques et la distribution des contraintes à travers l'épaisseur de la plaque graduée sans interruption ont été comparés avec Les résultats de la solution exacte d'élasticité 3D de Zenkour (A.Zenkour, 2007), les solutions quasi 3D de Zenkour (A.Zenkour, 2007) et Mantari et Guedes Soares (K.P.Soldatos, 1992). En fin toutes les études comparatives ont montré que le déplacement transversal, les contraintes normales axiales et les contraintes de cisaillement transversal obtenues par la présente théorie quasi 3-D à cinq variables et les autres théories quasi 3-D de déformation de cisaillement sont en excellent accord.

# ***CONCLUSION GÉNÉRALE***

---

---

## **Conclusion générale**

---

---

Dans le cadre de ce travail, Nous avons présenté une méthode analytique qui utilise les champs de déplacement et de déformation des plaques en matériaux à gradient de propriétés type E-FGM, prenant en compte les effets de cisaillement transversal de l'étirement à travers l'épaisseur. Ils sont pour la plupart basés sur des théories d'ordre élevés quasi 3-D qui permettent en effet de modéliser des structures composites fonctionnellement gradués ou sandwichs sans recourir aux facteurs de correction de cisaillement. Il est bien connu que les théories classiques des plaques stratifiées basées sur les hypothèses de Kirchhoff, négligeant les cisaillements transverses ne sont adéquates que pour l'analyse des plaques composite minces. Ces théories prévoient mal les réponses des structures multicouches modernes épaisses; par contre la théorie linéaire du premier ordre, communément associée à Reissner-Mindlin pour le cas des plaques épaisses, mène à une déformation de cisaillement transversale constante dans la direction de l'épaisseur et nécessite de ce fait l'utilisation de ces facteurs correctifs de cisaillement.

L'objectif assigné à cette étude est de présenter une simple théorie de déformation du cisaillement sinusoïdal quasi-3D pour étudier le comportement statique des plaques E-FGM. Les équations de mouvements et les conditions aux limites sont dérivées du principe des déplacements virtuels. Des solutions analytiques sont obtenues pour les plaques rectangulaires simplement appuyées. En faisant les mêmes étapes pour simplifier les équations basées sur les hypothèses de la théorie quasi-3D de Zenkour (K. Zenkour ,2007), le nombre d'inconnues de la présente théorie quasi-3D est réduit d'un seul inconnu et rend ainsi cette théorie simple et efficace à utiliser. Les résultats numériques montrent que ces hypothèses ont un effet minimal sur la précision des résultats pour les problèmes considérés. Par conséquent, on peut conclure que la présente théorie quasi-3D n'est pas seulement précise mais aussi simple pour prédire le comportement de flexion des plaques E-FGM.

Nous présentons ici, un certain nombre de pistes de recherches qui peuvent être envisagées pour poursuivre la démarche de validation de la présente théorie quasi 3-D .

## REFERENCE BIBLIOGRAPHIQUE

- Nora Kassimi, «étude des contraintes d'interface d'une poutre FGM renforcée par une plaque en matériaux composites» mémoire de master de l'université Djilali Liabes de Sidi Bel Abbes, 2011.
- Kawthar Elomari« Analyse de la vibration libre des poutres en E-FGM à section transversale variable »mémoire de master ii de l'université Djilali Liabes de Sidi Bel Abbes, 2011.
- Kada Draiche, « Détermination des contraintes résiduelles dans les matériaux à gradient de propriétés –FGM, mémoire de magistère en génie civil, université de Mascara, 2010
- Lazreg Hadji, «contribution à l'étude de la vibration des plaques sandwichs en FGM», Thèse de Doctorat de l'université Djilali Liabes de Sidi Bel Abbes, 2012.
- HASSEN Ait Atman, «Vibration des structures composites en tenant compte de l'effet du cisaillement », Thèse Doctorat de l'université Djilali Liabes de Sidi Bel Abbes, 2011.
- Bousri Fatima« Analyse du flambement des plaques en matériaux à gradient de propriétés en utilisant la théorie de déformation de cisaillement exponentielle» mémoire de master ii de l'université Ibn Khaldoun de Tiaret, 2015.
- Hosseini-Hashemi S, Fadaee M, Atashipour SR. A new exact analytical approach for free vibration of Reissner–Mindlin functionally graded rectangular plates. *Int J Mech Sci* 2011; 53(1):11–22.
- E.Reissner & Y.Stavsky .Bending and stretching of certain types of heterogeneous anisotropic elastic plate.*J.Appl.Mech.*vol.28, pages 402, 408, 1961.
- E.Reissner. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic.*J.Appl.Mech.*vol.12, pages 51,88,1850.
- G.Kirchhoff.Uber das gleichgewicht und die beweg un geinerel astischens cheibe. *Jouranl fur reine und angewandte Mathematik*, vol.40, pages 51,88,1850.
- J.M.Whitney. «Shear correction factors for orthotropic laminates under static loads». *J.Applied Mechanics*, Vol.40, pages 302-304, 1973.
- J.N Reddy. A generalization of two-dimensional theories of laminated composite plates. *Commun.Appl.Numer.Methods*, vol. pages 173,180, 1987.

- 
- J.N Reddy (1987). A generalization of two-dimensional theories of laminated composite plates. *Commun.Appl.Numer.Methods*, vol. pages 173,180.
  - K.S.Afaq, M. Karama & S.Mistou.Un nouveau modèle raffine pour les structures multicouches. In *Comptes-rendus des 13 éméés Journées Nationales sur les Composites* pages 289-292.Strasbourg, March 2003.
  - Metin Aydogdu, [vibration analysis of cross-ply laminated beam with generale boundary condition by ritz method, *internationnel journal of mechanical science*, 47.1740-1755.2005.
  - M.Touratier. An efficient standard plat theory *EngngSci*, vol.29, no.8, pages 901, 916, 1991.
  - S.A.Ambartsumyan. *Theory of anisotropic plate*.Technomic Publishing Co, 1969.
  - Nguyen TK, Sab K, Bonnet G. First-order shear deformation plate models for functionally graded materials. *Compos Struct* 2008; 83(1):25–36.
  - Zhao X, Lee YY, Liew KM. Free vibration analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method. *J Sound Vib* 2009; 319(3–5): 918–39.
  - Thai HT, Vo TP. A new sinusoidal shear deformation theory for bending, buckling, and vibration of functionally graded plates. *Appl Math Model* 2013; 37(5):3269–81.
  - Thai HT, Vo TP. A size-dependent functionally graded sinusoidal plate model based on a modified couple stress theory. *Compos Struct* 2013; 96:376–83.
  - Reddy JN. Analysis of functionally graded plates. *Int J Numer Meth Eng*. 2000; 47(1–3):663–84.
  - Ferreira AJM, Batra RC, Roque CMC, Qian LF, Martins PALS. Static analysis of functionally graded plates using third-order shear deformation theory and a meshless method. *Compos Struct* 2005; 69(4):449–57.
  - Ferreira AJM, Batra RC, Roque CMC, Qian LF, Jorge RMN. Natural frequencies of functionally graded plates by a meshless method. *Compos Struct* 2006; 75(1–4):593–600.
  - Zenkour AM. Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates. *Appl Math Model* 2006; 30(1):67–84.
  - Pradyumna S, Bandyopadhyay JN. Free vibration analysis of functionally graded curved panels using a higher-order finite element formulation. *J Sound Vib* 2008; 318(1–2):176–92.

- 
- Xiang S, Jin YX, Bi ZY, Jiang SX, Yang MS. A n-order shear deformation theory for free vibration of functionally graded and composite sandwich plates. *Compos Struct* 2011; 93(11):2826–32.
  - Mantari JL, Guedes Soares C. Bending analysis of thick exponentially graded plates using a new trigonometric higher order shears deformation theory. *Compos Struct* 2012; 94(6):1991–2000.
  - Mantari JL, Oktem AS, Guedes Soares C. Bending response of functionally graded plates by using a new higher order shears deformation theory. *Compos Struct* 2012; 94(2):714–23.
  - Mantari JL, Oktem AS, Guedes Soares C. A new higher order shears deformation theory for sandwich and composite laminated plates. *Compos B: Eng.* 2012; 43(3):1489–99.
  - Mantari JL, Oktem AS, Guedes Soares C. A new trigonometric layerwise shear deformation theory for the finite element analysis of laminated composite and sandwich plates. *Comput Struct* 2012; 94–95:45–53.
  - Kim SE, Thai HT, Lee J. A two variable refined plate theory for laminated composite plates. *Compos Struct* 2009; 89(2):197–205.
  - Kim SE, Thai HT, Lee J. Buckling analysis of plates using the two variable refined plate theory. *Thin-Walled Struct* 2009; 47(4):455–62.
  - Thai HT, Kim SE. Free vibration of laminated composite plates using two variable refined plate theory. *Int J Mech Sci* 2010; 52(4):626–33.
  - Thai HT, Kim SE. Levy-type solution for buckling analysis of orthotropic plates based on two variable refined plate theory. *Compos Struct* 2011;93(7): 1738–46.
  - Thai HT, Kim SE. A simple higher-order shear deformation theory for bending and free vibration analysis of functionally graded plates. *Compos Struct* 2013; 96:165–73.
  - Thai HT, Kim SE. Analytical solution of a two variable refined plate theory for bending analysis of orthotropic Levy-type plates. *Int J Mech Sci* 2012; 54(1):269–76.
  - Thai HT, Kim SE. Levy-type solution for free vibration analysis of orthotropic plates based on two variable refined plate theory. *Appl Math Model* 2012; 36(8):3870–82.
  - Thai HT, Kim SE. A size-dependent functionally graded Reddy plate model based on a modified couple stress theory. *Compos B: Eng* 2013; 45(1):1644–53.
-

- 
- Qian LF, Batra RC, Chen LM. Static and dynamic deformations of thick functionally graded elastic plates by using higher-order shear and normal deformable plate theory and meshless local Petrov–Galerkin method. *Compos B: Eng* 2004; 35(6–8):685–97.
  - Carrera E, Brischetto S, Cinefra M, Soave M. Effects of thickness stretching in functionally graded plates and shells. *Compos B: Eng* 2011; 42(2):123–33.
  - Carrera E. Developments, ideas, and evaluations based upon Reissner’s mixed variational theorem in the modeling of multilayered plates and shells. *Appl Mech Rev* 2001; 54(4):301–29.
  - Carrera E. Theories and finite elements for multilayered plates and shells: a unified compact formulation with numerical assessment and benchmarking. *Arch Comput Meth Eng* 2003; 10(3):215–96.
  - Carrera E, Ciuffreda A. A unified formulation to assess theories of multilayered plates for various bending problems. *Compos Struct* 2005; 69(3):271–93.
  - Demasi L. 13 Hierarchy plate theories for thick and thin composite plates: the generalized unified formulation. *Compos Struct* 2008; 84(3):256–70.
  - Demasi L. 16 Mixed plate theories based on the generalized unified formulation. Part I: Governing equations. *Compos Struct* 2009; 87(1):1–11.
  - Demasi L. 16 Mixed plate theories based on the generalized unified formulation. Part III: Advanced mixed high order shear deformation theories. *Compos Struct* 2009; 87(3):183–94.
  - Demasi L. 16 Mixed plate theories based on the generalized unified formulation. Part IV: Zig-zag theories. *Compos Struct* 2009; 87(3):195–205.
  - Demasi L. 16 Mixed plate theories based on the generalized unified formulation. Part V: Results. *Compos Struct* 2009; 88(1):1–16.
  - Demasi L. 16 Mixed plate theories based on the generalized unified formulation. Part II: Layerwise theories. *Compos Struct* 2009; 87(1):12–22.
  - Carrera E, Brischetto S, Nali P. *Plates and shells for smart structures: classical and advanced theories for modeling and analysis*. Wiley; 2011.
  - Carrera E, Giunta G, Petrolo M. *Beam structures: classical and advanced theories*. Wiley; 2011.
  - Matsunaga H. Stress analysis of functionally graded plates subjected to thermal and mechanical loadings. *Compos Struct* 2009; 87(4):344–57.

- 
- Chen CS, Hsu CY, Tzou GJ. Vibration and stability of functionally graded plates based on a higher-order deformation theory. *J Reinf Plast Compos* 2009; 28(10):1215–34.
  - Talha M, Singh BN. Static response and free vibration analysis of FGM plates using higher order shear deformation theory. *Appl Math Model* 2010; 34(12):3991–4011.
  - Ferreira AJM, Carrera E, Cinefra M, Roque CMC, Polit O. Analysis of laminated shells by a sinusoidal shear deformation theory and radial basis functions collocation, accounting for through-the-thickness deformations. *Compos B: Eng* 2011; 42(5):1276–84.
  - Reddy JN. A general nonlinear third-order theory of functionally graded plates. *Int J Aerospace Lightweight Struct* 2011; 1(1):1–21.
  - Neves AMA, Ferreira AJM, Carrera E, Roque CMC, Cinefra M, Jorge RMN, et al. A quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates. *Compos B: Eng* 2012;43(2):711–25.
  - Neves AMA, Ferreira AJM, Carrera E, Cinefra M, Roque CMC, Jorge RMN, et al. A quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates. *Compos Struct* 2012;94(5):1814–25.
  - Neves AMA, Ferreira AJM, Carrera E, Cinefra M, Roque CMC, Jorge RMN, et al. Static, free vibration and buckling analysis of isotropic and sandwich functionally graded plates using a quasi-3D higher-order shear deformation theory and a meshless technique. *Compos B: Eng* 2013; 44(1):657–74.
  - Zenkour A. Benchmark trigonometric and 3-D elasticity solutions for an exponentially graded thick rectangular plate. *Arch Appl Mech* 2007; 77(4): 197–214.
  - Mantari JL, Guedes Soares C. Generalized hybrid quasi-3D shear deformation theory for the static analysis of advanced composite plates. *Compos Struct* 2012; 94(8):2561–75.
  - Mantari JL, Guedes Soares C. A novel higher-order shear deformation theory with stretching effect for functionally graded plates. *Compos B: Eng* 2013; 45(1):268–81.
  - Mantari JL, Oktem AS, Guedes Soares C. A new trigonometric shear deformation theory for isotropic, laminated composite and sandwich plates. *Int J Solids Struct* 2012;49(1):43–53.
  - Levy M. Memoire sur la theorie des plaques elastique planes. *J Math Pures Appl* 1877; 30:219–306.
-

- Stein M. Nonlinear theory for plates and shells including the effects of transverse shearing. *AIAA J* 1986; 24(9):1537–44.
- Touratier M. An efficient standard plate theory. *Int J Eng Sci* 1991; 29(8):901–16.
- Brischetto S. Classical and mixed advanced models for sandwich plates embedding functionally graded cores. *J Mech Mater Struct* 2009; 4(1):13–33.
- Soldatos, K.P.: A transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates. *Acta Mech.* **94**(3), 195–220 (1992)
- Zenkour A. Benchmark trigonometric and 3-D elasticity solutions for an exponentially graded thick rectangular plate. *Arch Appl Mech* 2007;77(4): 197–214.