

République Algérienne Démocratique Et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Ibn Khaldoun De Tiaret.
Faculté Des Sciences Appliquées
Département Génie Civil



Mémoire de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme de Master

Spécialité : Travaux Publics

Option : VOA

Présenté par :

Aribi Ramzi Mohamed Anis

Chaa Aymen Abdelmohssen

Sujet du mémoire :

Solution analytique du comportement des poutres fonctionnellement bi- graduées en utilisant la théorie classique.

Soutenu publiquement Le/...../..... devant le jury composé de :

Mr Ait Amar.M.M	Président
Mr Hadj.Henni.A	Rapporteur
Mr Rabehi.A	Examineur
Mme Zouatnia.N	Examineur

Promotion : 2024/2025

Remerciements

Tout d'abord, nous tenons à remercier Allah, le clément et le miséricordieux de nous avoir donné la force et le courage de mener à bien ce modeste travail.

Nous voudrions exprimer nos vifs remerciements à notre encadreur Mr ABDELAZIZ. H.H ,pour les orientations et les conseils qu'il a su nous prodiguer durant l'évolution de notre projet.

Nous voudrions aussi remercier tous les professeurs qui ont contribué à notre formation Que tous les membres du jury trouvent ici l'expression de nos profonds Respects pour avoir pris la peine d'examiner le manuscrit.

Nos remerciements vont également à tous ceux et celles qui de près ou de loin nous ont apporté aide et encouragement. Qu'ils trouvent ici l'expression de notre profonde gratitude.

Dédicaces

C'est avec l'aide et la grâce d'Allah que nous avons pu mener à bien ce modeste travail.

Je le dédie, avec reconnaissance, à ceux qui m'ont soutenu dans les épreuves :

À ma chère famille, pour son amour et ses sacrifices, et à mes frères et sœurs, pour leur soutien.

À mon binôme ARIBI et sa famille,

À toute ma promotion, pour l'entraide et les souvenirs partagés,

Chaa Aymen Abdelmohssen

À mes très chers parents, Aucun mot, aucune dédicace ne peut exprimer tout le respect, la considération et l'amour éternel que je ressens pour vous, en raison des sacrifices que vous avez consentis pour mon instruction et mon bien-être,

À toute ma chère famille,

À mon binôme CHAA et à sa famille,

À mes professeurs,

À mes chers amis,

À mes chers collègues,

À tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin.

Aribi Ramzi Mohamed Anis

À la mémoire éternelle de nos martyrs, et spécialement aux martyrs de la Palestine bien-aimée, qui ont sacrifié leur vie et leur peuple pour leur terre.

Free Palestine

Résumé

Cette étude présente une solution analytique du comportement des poutres fonctionnellement bi-graduée en utilisant la théorie des poutres classique sans effet de cisaillement transversal. L'originalité de ce travail c'est bien est de reformuler l'expression du module de young en fonction de deux graduation à savoir la graduation matérielle et le rapport des module de young.

Une formulation a été développé en se basant sur le principe des travaux virtuels de cela on arrive à un système d'équation afin de prédire les déplacements ainsi les contraintes.

Mots clés : *poutre, théorie classique, matériau fonctionnellement gradue, contraintes, déplacements.*

Abstract

This study presents an analytical solution for the behavior of functionally bi-graded beams using classical beam theory without transverse shear effects. The originality of this work lies in reformulating Young's modulus expression through two grading parameters: material grading and Young's modulus ratio.

A formulation was developed based on the principle of virtual work, leading to a system of equations capable of predicting both displacements and stresses. The proposed model provides an efficient analytical approach for analyzing functionally graded beam structures under various loading conditions.

Keywords: *beam, classical theory, functionally graded material, stresses, displacements*

ملخص

تقدم هذه الدراسة حلاً تحليلياً لسلوك العوارض ثنائية التدرج وظيفياً باستخدام نظرية العوارض الكلاسيكية دون تأثيرات القص العرضي. تكمن أصالة هذا العمل في إعادة صياغة معامل يونغ كدالة لتدرجين تدرج المادة ونسبة معامل يونغ تم تطوير صيغة تعتمد على مبدأ الأعمال الافتراضية والتي نصل من خلالها إلى نظام من المعادلات من أجل التنبؤ بالنزوحات والقيود

الكلمات المفتاحية: عارضات، نظرية كلاسيكية، مواد متدرجة وظيفياً، إجهادات، إزاحات

Table des matières

INTRODUCTION GÉNÉRALE	1
1 Généralité Sur Les Matériaux FGM	3
1.1 Introduction	4
1.2 Définition	4
1.3 Historique	4
1.4 Domaines d'applications des matériaux fonctionnellement gradués	5
1.4.1 Aérospatiale	5
1.4.2 Défense	5
1.4.3 Médecine	6
1.4.4 Énergie nucléaire	6
1.4.5 Optoélectronique	6
1.4.6 Article de sports	6
1.5 Autres champs d'application	6
1.6 Type des matériaux fonctionnellement gradués	7
1.6.1 Gradient de composition chimique des Matériaux FGM	7
1.6.2 Gradient de porosité des Matériaux FGM	8
1.6.3 Gradient de la microstructure des Matériaux FGM	9
1.7 Propriétés matérielles des poutres FGM	9
1.7.1 Fonction de puissance (P-FGM)	9
1.7.2 Fonction sigmoïde(S-FGM)	10
1.7.3 Fonction exponentielle (E-FGM)	11
1.7.4 Fonction puissance symétrique SP-FGM	12
1.8 Loi de mélange	12
1.9 Porosité	13
1.10 Caractérisation de la porosité	13
1.11 Effet de la porosité sur les propriétés mécaniques des matériaux	14
1.11.1 Porosité et module d'élasticité longitudinale (le module de Young/porosité)	14
1.11.2 Porosité et le module de cisaillement	15
1.11.3 Porosité et le coefficient de Poisson ν	15
1.12 Caractéristiques matérielles des FGMs	16
1.12.1 Propriétés des métaux dans les FGM	16
1.12.2 Métaux couramment utilisés dans les FGM	16
1.12.3 Combinaison avec les céramiques	17
1.13 Avantages et inconvénient des FGMs	17
1.13.1 Avantage des matériaux FGM	17
1.13.2 Inconvénients des matériaux FGM	18
1.14 Les méthodes de réalisation des matériaux fonctionnellement gradués	18

1.14.1	La centrifugation pour réaliser des FGMs	18
1.14.2	Le coulage sous pression	19
1.15	Les théories plaques FGM	19
1.16	Conclusion	19
2	Différentes théorie des poutres	21
2.1	Introduction	22
2.2	Historique des théories des poutres	22
2.3	Comportement des poutres composite	22
2.4	Modèles des poutres	22
2.5	Les modèles des poutres pour les matériaux fonctionnellement gradués . . .	23
2.6	Les différents types de poutres	23
2.6.1	Poutre simple	24
2.6.2	Poutre console	24
2.6.3	Poutre avec porte-à-faux	24
2.6.4	Poutre continue	24
2.6.5	Poutre a double encastrement	24
2.6.6	Poutre supportée à double encastrement	24
2.7	Hypothèses cinématiques de la théorie des poutres	24
2.7.1	Modèle d'Euler Bernoulli (Classical Beam Theory- CBT)	25
2.7.2	Modèle de Timoshenko (First shear deformation beam theory-FSDBT)	26
2.7.3	Modèle d'ordre élevé (High shear deformation beam theory HSDBT)	27
2.8	Conclusion	28
3	Modélisation mathématique du comportement des poutres F-bi.G.M	
	Basée sur la théorie classique	29
3.1	Introduction	30
3.2	Modèle Mathématique	30
3.3	Champ de Déplacement	30
3.4	Le champ des contraintes	31
3.5	Équation du mouvement	32
3.6	Solution de Navier	33
3.7	Conclusion	34
4	Résultats et discussion	35
4.1	Introduction	36
4.2	Résultats numériques et discussion	36
4.3	Conclusion	40

CONCLUSION GÉNÉRALE

Références Bibliographiques

Liste des Figures

1.1	Matériaux à gradation fonctionnelle	4
1.2	Matériau FGM poreux	8
1.3	Géométrie d'une poutre FGM	9
1.4	Lois de puissance (P-FGM)	10
1.5	Fonction sigmoïde S-FGM	11
1.6	Variation du module de Young en fonction de l'épaisseur (E-FGM)	11
1.7	Lois de puissance symétrique (SP-FGM)	12
1.8	Modèle analytique pour une couche de matériau à gradient fonctionnel	13
1.9	La fonderie par centrifugation (Bodaghi & Saidi, 2011)	18
1.10	Procédé de coulage sous pression (Bodaghi & Saidi, 2011)	19
2.1	Schéma d'un élément de poutre (Berthelot et al., 2012)	23
2.2	Cinématique de la poutre d'Euler Bernoulli	25
2.3	Cinématique de la poutre de Timoshenko (Dufort et al., 2001)	26
2.4	Cinématique de la poutre d'ordre élevé	27
3.1	Goemtrie de poutre FGM	30
4.1	La variation du module de Young dans une poutre FGM	38
4.2	Variation du déplacement transversal sans dimension (w) le long de la longueur de la poutre soumise à une charge uniformément répartie avec un rapport ($L/h=10$)	39
4.3	Variation de la contrainte axiale sans dimension à travers l'épaisseur de la poutre FGM soumise à une charge uniformément répartie avec un rapport ($L/h =10$)	40

Liste des Tableaux

4.1	Tableau de comparaison des déplacements et contraintes	37
-----	--	----

List des Symboles

$E(z)$ Module de Young en fonction de l'épaisseur

E_m Module Young (Métal)

E_c Module Young (Céramique)

p Indice de puissance

h Épaisseur de la p outre

ℓ Longueur de la p outre

σ_x, τ_{xz} Composantes des contraintes

$\varepsilon_x, \gamma_{xz}$ Composantes des déformations

n Nombre naturel

Q_{ij} Coefficients de rigidité réduite

ν Coefficient de Poisson

u Déplacement suivant x

w Déplacement suivant z

u_0, w_0 Déplacements au niveau du plan moyen ($z = 0$)

$f(z)$ La fonction de forme (Fonction de gauchissement)

φ Rotation de la normale

$()$, Dérivée par rapport à x

δ Variationnel

E Énergie de déformation

T Énergie cinétique

N_x Effort normal

M_x moments de flexion

∂ Dérivée partielle

A_{11}, B_{11}, D_{11} Coefficients de rigidité d'extension

m Nombre de mode

$[K]$ Matrice de rigidité

det Déterminant

$[]$ Matrice

$\{ \}$ Vecteur

$[M]$ Matrice de masse

F-bi.G.M Matériaux fonctionnellement bi-gradué

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM, Functionally Graded Materials) représentent une classe de matériaux composites dont les propriétés varient continûment dans une ou plusieurs directions. Cette variation spatiale des propriétés mécaniques, thermiques ou physiques permet d'optimiser les performances des structures en répondant à des exigences spécifiques, telles que la résistance mécanique, la résistance à la corrosion, ou la gestion des contraintes thermiques. Les FGM sont largement utilisés dans des domaines de pointe tels que l'aérospatiale, le génie civil, l'énergie et la biomédecine, où les matériaux traditionnels homogènes ou à interfaces abruptes atteignent leurs limites.

Dans ce contexte, l'étude du comportement mécanique des poutres en matériaux fonctionnellement gradués revêt une importance particulière. Les poutres sont des éléments structurels fondamentaux dans de nombreuses applications industrielles et leur analyse précise est essentielle pour garantir la sécurité et la durabilité des structures. Cependant, la complexité inhérente aux FGM, due à la variation continue de leurs propriétés, nécessite des approches analytiques et numériques adaptées pour prédire leur réponse mécanique sous différentes conditions de chargement.

La théorie classique des poutres, basée sur les hypothèses d'Euler-Bernoulli, reste un outil puissant pour l'analyse des poutres minces. Elle permet de simplifier les équations gouvernantes tout en fournissant des résultats suffisamment précis pour de nombreuses applications pratiques. Cependant, l'application de cette théorie aux poutres FGM nécessite une adaptation pour tenir compte de la variation des propriétés matérielles, ce qui introduit des défis mathématiques et conceptuels supplémentaires.

Ce mémoire se concentre sur l'étude analytique du comportement des poutres utilisant la théorie classique des poutres. L'objectif est de développer des solutions analytiques pour prédire la flèche, les contraintes et les déformations dans ces poutres sous différentes conditions de chargement et de géométrie. Les résultats obtenus seront comparés à des solutions numériques ou expérimentales pour valider leur précision et leur applicabilité. La première partie de ce travail abordera les fondements théoriques des matériaux fonctionnellement gradués et de la théorie des poutres, en mettant l'accent sur les hypothèses et les limitations de la théorie d'Euler-Bernoulli. Ensuite, les équations gouvernantes pour les poutres FGM seront dérivées, en tenant compte de la variation des propriétés matérielles. Des solutions analytiques seront proposées pour des cas de chargement typiques, tels que les charges uniformes, ponctuelles ou thermiques. Enfin, des études paramétriques seront menées pour explorer l'influence des paramètres de gradation, des conditions aux limites et des géométries sur le comportement des poutres. Ce mémoire vise à contribuer à une meilleure compréhension du comportement mécanique des poutres FGM et à fournir des outils analytiques utiles pour la conception et l'optimisation de structures innovantes dans divers domaines d'ingénierie. Les résultats de cette étude pourront également servir de base pour des travaux futurs, notamment l'intégration de modèles plus complexes ou l'utilisation de méthodes numériques avancées.

Pour atteindre cet objectif, notre mémoire est divisée en quatre chapitres le premier chapitre présente les matériaux aborde une classification des matériaux selon leurs historique, leurs fonctions, leurs propriétés, leurs procédés de fabrication principaux et leurs domaines d'application. Une attention particulière est portée sur la porosité et son influence sur les propriétés mécaniques des matériaux. Seront notamment étudiées les relations entre la porosité et différentes caractéristiques mécaniques, telles que :

- le module de cisaillement en fonction de la porosité,
- le coefficient de Poisson (ν) en fonction de la porosité,
- et plus spécifiquement, l'impact de la porosité sur le module d'élasticité longitudinal (module de Young)

Le deuxième chapitre est consacré aux différentes théories de déformation des poutres. Il aborde d'abord les modèles historiques, tels que la théorie classique (théorie d'Euler-Bernoulli) et la théorie du premier ordre, avant de présenter les théories plus avancées prenant en compte les effets du cisaillement (comme la théorie de Timoshenko ou les modèles d'ordre supérieur).

Dans le troisième chapitre, un développement mathématique du problème de flexion de poutres à gradient de propriétés en utilisant la théorie classique.

Le quatrième chapitre présente les résultats numériques obtenus lors de l'analyse statique des poutres rectangulaires simplement appuyées à gradient de porosité. Cette étude s'achèvera par une conclusion générale, synthétisant l'ensemble des travaux réalisés, mettant en lumière les principaux résultats obtenus et ouvrant sur des perspectives futures.

Chapitre 1

Généralité Sur Les Matériaux FGM

1.1 Introduction

Les matériaux FGM sont des matériaux composites dont les propriétés varient progressivement en fonction de la position dans le matériau. Cette variation est généralement obtenue en modifiant la composition ou la microstructure du matériau de manière continue, ce qui permet d'obtenir des propriétés spécifiques adaptées à des applications particulières.

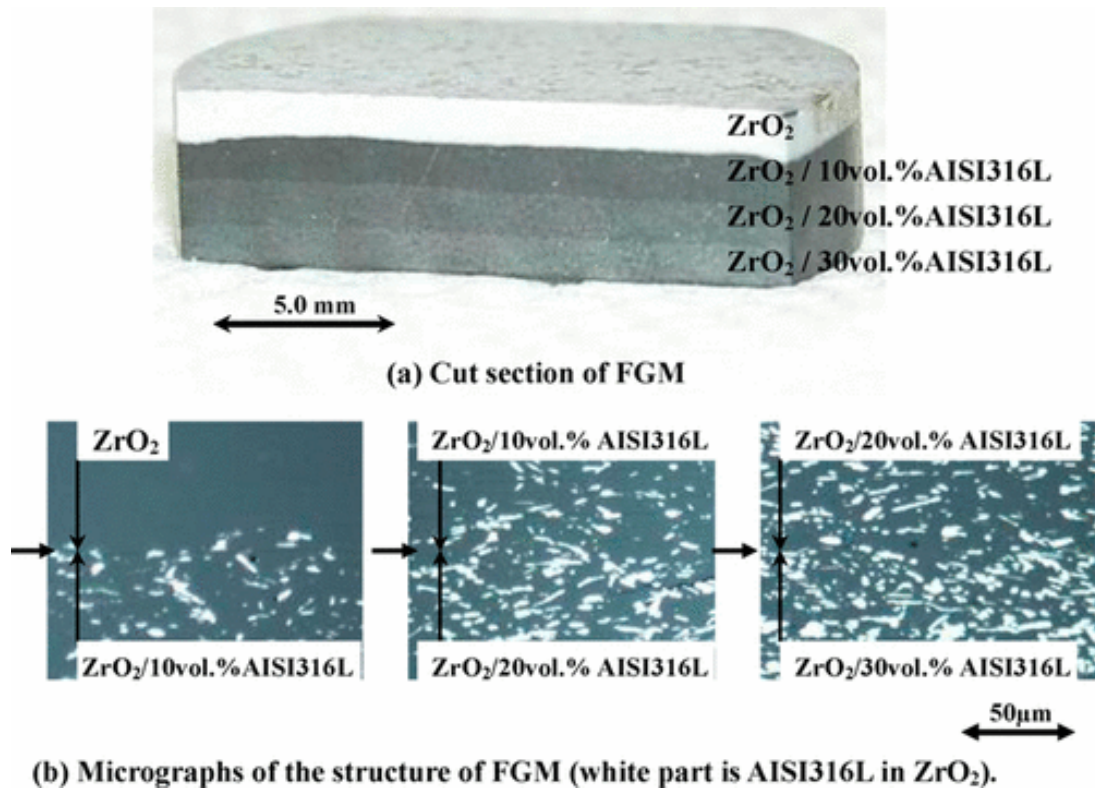


Figure 1.1: Matériaux à gradation fonctionnelle

1.2 Définition

Un matériau FGM (Functionally Graded Material) est une combinaison de deux ou plusieurs matériaux, généralement un métal et une céramique. Il est produit en faisant varier de manière continue les fractions volumiques des matériaux dans la direction de l'épaisseur, permettant ainsi d'obtenir un volume spécifique. Les FGM sont typiquement fabriqués à partir de matériaux isotropes, comme les céramiques et les métaux. Ces matériaux offrent une combinaison unique de propriétés, telles que la légèreté, une excellente résistance mécanique et chimique, une maintenance réduite, une dureté accrue, une résistance à la rupture améliorée, et une réduction des facteurs d'intensité de contrainte.

1.3 Historique

En 1987, le gouvernement Japonais a lancé une vaste recherche sur la technologie de base pour développement de matériaux à Gradient fonctionnel et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques. L'intérêt du projet est d'améliorer des matériaux présentant des

structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux.

Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux doivent supporter des températures de surface de 1800°C, ainsi qu'à un gradient de température de l'ordre de 1300°C. A cette année-là, aucun matériau industriel n'était connu pour supporter de telles sollicitations thermomécaniques.

Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux : Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau ; Ténacité du matériau coté basse température ; Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau.

Alors l'idée originale des FGM a été proposée pour élaborer un nouveau composite profitant à la fois des propriétés des céramiques (Coté haute températures) et des métaux (Coté basse température). A la fin de la première étape (1987-1989), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000K (Température de surface) et à un gradient de température de 1000K. Dans la seconde étape, le but était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première étape. Enfin, en 1990 la conférence internationale qui s'est tenue à Sendai, la technologie des FGM a vu le jour, et devenue non seulement au niveau des nations, mais aussi au niveau mondial.

1.4 Domaines d'applications des matériaux fonctionnellement gradués

Le concept des matériaux à gradient fonctionnel (FGM) trouve des applications dans de nombreux domaines. Initialement développé pour l'industrie aéronautique, ces matériaux permettent de combiner des propriétés contradictoires, comme la conductivité thermique et l'isolation thermique, au sein d'un même matériau. Aujourd'hui, ils sont utilisés pour produire des matériaux légers, résistants et durables, et sont applicables dans divers secteurs tels que les matériaux de construction, les matériaux de conversion d'énergie, le nucléaire et les semi-conducteurs.

1.4.1 Aérospatiale

Les matériaux à gradient fonctionnel peuvent être utilisés dans des conditions de haute température avec une de ses constituants à faible conductivité thermique. Ils peuvent résister à des gradients thermiques élevés, ce qui rend les matériaux à gradient fonctionnel appropriée beaucoup dans les structures aérospatiales comme les composants de véhicules spatiaux (moteur de fusée, corps des avions spatiaux. etc. ...).

1.4.2 Défense

Dans la demande de défense, tels que des plaques de blindage et des gilets pare-balles, la pénétration des matériaux résistants est nécessaire. Une des caractéristiques les plus importantes du matériau à gradient fonctionnel est la capacité à inhiber la propagation des

fissures, ce qui rend les matériaux à gradient fonctionnel appropriés pour les applications de défense.

1.4.3 Médecine

Le but d'utiliser les FGM pour produire des implants est d'utiliser les propriétés mécaniques des alliages, céramiques et composites gradués avec des matériaux biocompatibles. Ainsi, un implant osseux peut être constitué par un matériau solide et dur dans le noyau avec le tissu osseux gradué compatible à la surface et un matériau de faible coefficient de frottement dans les articulations.

1.4.4 Énergie nucléaire

Les FGM sont utilisés dans les dispositifs de conversion d'énergie. Ils fournissent également une barrière thermique et ils sont utilisés comme revêtement de protection sur des aubes de turbine dans le moteur à turbine à gaz et aussi dans le générateur thermoélectrique, pile à combustible, réacteurs nucléaires, pastilles de combustible.

1.4.5 Optoélectronique

Les FGM trouvent aussi leur application dans l'optoélectronique comme les matériaux à indice de réfraction gradués et des disques audio-vidéo ; support de stockage magnétique, semiconducteur à bande graduée. Autres domaines d'application sont: produits (matériaux de constructions, corps de voiture, verres de fenêtre), conversion d'énergie (générateur thermoélectrique, convertisseur thermoionique, pile à combustible), optiques (fibres optiques, lentilles), matières biologiques (implants, peau artificielle), chimique (échangeur de chaleur, tube de chaleur, récipient de réaction Kumar et Maruno (2002) ont également ajouté le verre à la poudre d'hydroxyapatite et des implants en titane revêtus pour une meilleure biocompatibilité.

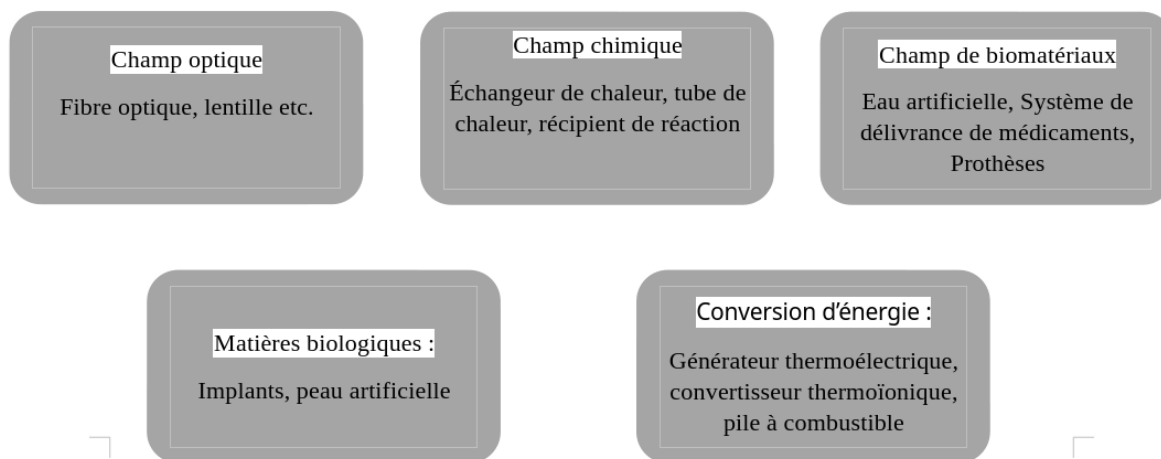
1.4.6 Article de sports

Divers composants et accessoires sportifs peuvent bénéficier de l'utilisation du FGM. Par exemple, pointes en carbure ont été fabriqués pour les chaussures de baseball afin de réduire l'usure. Entre la pointe et de la structure des chaussures une région à matériau gradué a été produite afin de réduire l'impact sur les extrémités (Niino & Kisara, 2004). Ceci est un excellent exemple comment les FGM pourraient être utilisées pour produire des articles de sport de haute performance.

Avec la même idée de réduction d'usure, des outils d'escalade sur glace tels que crampons et piolets pourraient être gradué avec le carbure de tungstène dans les arêtes vives qui capte la glace. Les outils de l'escalade de rocher auraient également le même avantage de réduire l'usure tels que sur les surfaces.(Hopkinson et al., 2006)(Benferhat, 2017)

1.5 Autres champs d'application

il existe autres domaines d'application des FGM:



1.6 Type des matériaux fonctionnellement gradués

1.6.1 Gradient de composition chimique des Matériaux FGM

Au début du développement des matériaux à gradient fonctionnel (FGM), l'objectif principal était de supprimer l'interface distincte présente dans les composites traditionnels, en la remplaçant par une interface à variation progressive. Cette transition est rendue possible par une composition chimique qui évolue graduellement dans la zone d'interface. L'intérêt croissant pour ces matériaux a conduit à la création de différents types de FGM, dont le choix dépend généralement de l'application envisagée. Parmi les types de FGM actuellement produits, on trouve notamment le gradient de composition chimique, le gradient de porosité et le gradient de microstructure. Chacun de ces types sera détaillé dans les sections suivantes.

Il s'agit d'un type des matériaux FGM, dans lesquels la composition chimique varie progressivement en fonction de la position spatiale dans le matériau. Cela pourrait être sous la forme d'une seule phase, ou dans un matériau multi phase. Une FGM monophasée est produite lorsque le composite est fabriqué à partir d'une seule phase, en raison de la solubilité des éléments chimiques d'une phase dans l'autre phase. Cela se produit généralement lors du processus de frittage. Le changement graduel de la répartition des éléments chimiques dans la phase unique entraîne la formation du matériau fonctionnellement gradué. Selon le diagramme de phase et les limitations thermodynamiques, lorsque certains matériaux sont ajoutés à un autre matériau, le matériau qui a été ajoutée à l'autre matériau serait soluble dans ce matériau sur une gamme de composition et des conditions de mélange. Ce matériau deviendrait ce qu'on appelle un matériau monophasé mais de composition chimique variable en raison de la solubilité. Ce type de FGM est moins habituel. Les matériaux FGM les plus couramment conçus et les plus habituellement utilisés sont ceux qui ont une composition chimique multi phase (Mahmood et al., 2012). Les phases et la composition chimique on fait varier à travers le volume apparent du matériau. Comme la composition du matériau varie d'un matériau à l'autre, il en résultera différentes phases avec différentes compositions chimiques qui permettraient de réaliser l'application souhaitée, pour laquelle la FGM a été conçue.

Les différentes phases produites dépendent de la quantité de composition du matériau

de renforcement et des conditions de fabrication, telles que la vitesse de refroidissement et le traitement thermique appliqué à ce matériau. Dans la métallurgie des poudres, le procédé de production de FGM est en plaçant la couche par couche de composition de poudre requise, et cela est suivi par le compactage et le frittage de la poudre par la suite. Au cours du processus de frittage, certaines poudres métalliques vont réagir pour former différents composés et phases chimiques. Celles-ci varieraient en fonction de la position spatiale dans le matériau fonctionnellement gradué.

1.6.2 Gradient de porosité des Matériaux FGM

Le Gradient de porosité des matériaux fonctionnellement gradués est un autre type de FGM, dans lequel la porosité dans le matériau est amenée à changer avec le changement de la position spatiale dans le matériau composite. Le diagramme schématique du gradient de porosité typique d'un matériau fonctionnellement gradué est représenté sur (Figure 1.2). Ce type de matériau à gradation fonctionnelle est très important pour les applications biomédicales, car le matériau naturel qu'elles entendent remplacer consiste en une porosité à gradation fonctionnelle, laquelle faciliterait également l'intégration de l'implant et des tissus environnants. La porosité est importante pour le processus de guérison de cet implant et contribue également à la circulation sanguine vers les tissus intégrés. La porosité graduée contribue également à réduire le poids total de l'implant et à améliorer le module d'élasticité du matériau de l'implant pour correspondre à celui du tissu humain. La porosité graduée contribue à réduire la densité du bio-implant. Cela est nécessaire pour éviter la protection contre les contraintes qui se produit lorsque le module d'élasticité de l'implant est supérieur à celui de l'os humain. Les matériaux à gradient de porosité sont produits par dépôt de poudre avec un mélange varié de formes et de tailles de particules différentes, ce qui aiderait à produire la porosité variable nécessaire en fonction de la forme et de la taille des pores. Les matériaux à gradient de porosité peuvent être un gradient de densité de porosité ou un gradient de taille de pores. La densité de porosité est produite lorsque la densité de porosité change en fonction de la position spatiale à travers le volume du matériau.

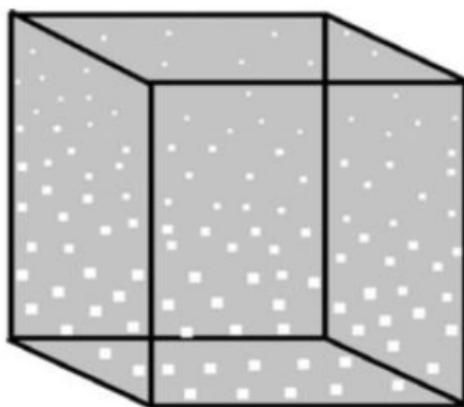


Figure 1.2: Matériau FGM poreux

1.6.3 Gradient de la microstructure des Matériaux FGM

Un matériau fonctionnellement gradué à gradient microstructural représente une autre catégorie de FGM (Functionally Graded Materials). Dans ce type de matériau, la microstructure est conçue de manière à varier progressivement à travers le matériau, permettant ainsi d'obtenir des propriétés spécifiques et adaptées. Cette gradation microstructurale peut être réalisée lors de la solidification, par exemple en trempant la surface du matériau pour obtenir une propriété de surface très dure, tandis que le noyau est laissé à refroidir lentement. Ce refroidissement différencié entraîne la formation de microstructures distinctes entre la surface et la partie interne du matériau. Par ailleurs, la gradation microstructurale peut également être obtenue grâce à un traitement thermique contrôlé, offrant ainsi une méthode supplémentaire pour ajuster les propriétés du matériau selon les besoins.

1.7 Propriétés matérielles des poutres FGM

Un FGM peut être définie par la variation des fractions volumiques. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume. Considérons une poutre de longueur L , de section rectangulaire avec la largeur b et l'épaisseur h comme représenté sur la (Figure 1.3).

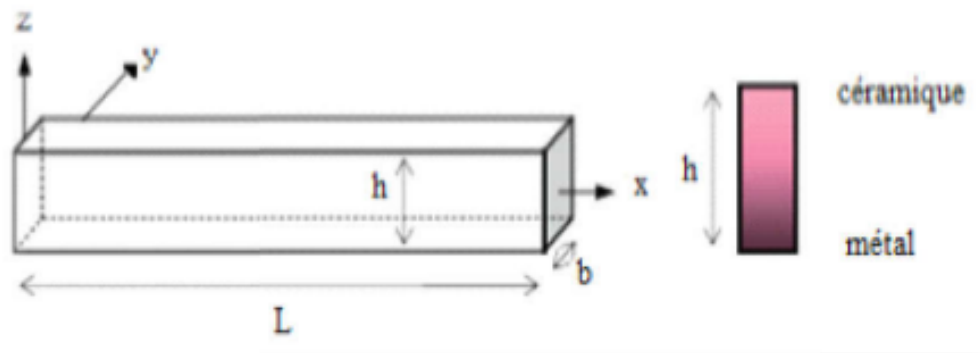


Figure 1.3: Géométrie d'une poutre FGM

1.7.1 Fonction de puissance (P-FGM)

La première fonction les propriétés matérielles obéit à une fonction en loi de puissance (P-FGM) comme suit (Kolahchi et al., 2015)(Bennai et al., 2015)(Tlidji et al., 2014)

$$P_e = P_m V_m + P_c V_c \quad \{1.1\}$$

sont les propriétés du métal et de la céramique, V_m et V_c représentent les fraction volumique du métal et de la céramique définies par :

$$V_c = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^k \quad (1.2.a)$$

$$V_m = 1 - V_c \quad (1.2.b)$$

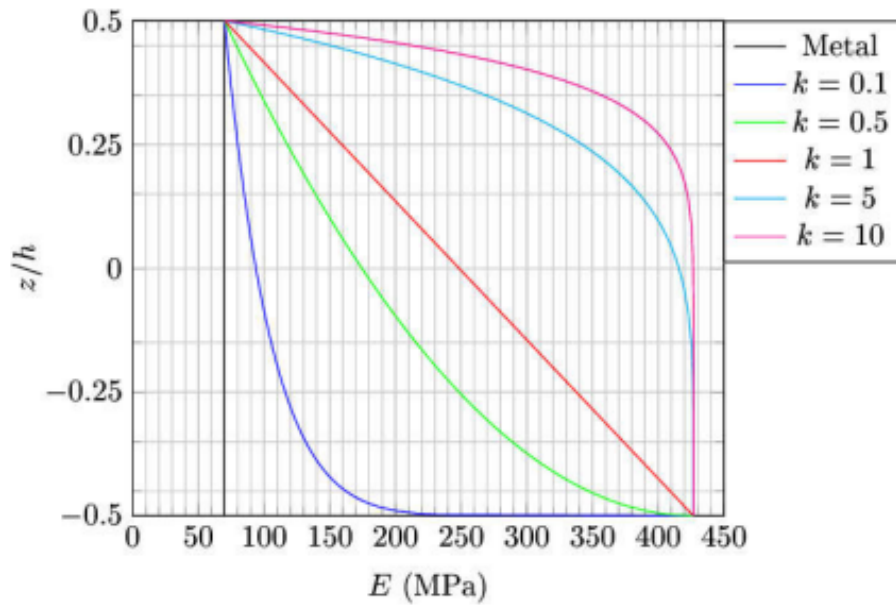


Figure 1.4: Lois de puissance (P-FGM)

1.7.2 Fonction sigmoïde(S-FGM)

La troisième fonction utilisée dans cette étude est la fonction sigmoïde (S-FGM), (Aldousari, 2017) (Bouguenina et al., 2015)

$$P_e = P_m + \frac{1}{2} (P_m - P_c) \left(1 + \frac{2z}{h}\right)^k \quad \left(-\frac{h}{2} \leq z \leq 0\right) \quad (1.3.a)$$

$$P_e = P_m + \frac{1}{2} (P_m - P_c) \left(1 - \frac{2z}{h}\right)^k \quad \left(0 \leq z \leq \frac{h}{2}\right) \quad (1.3.b)$$

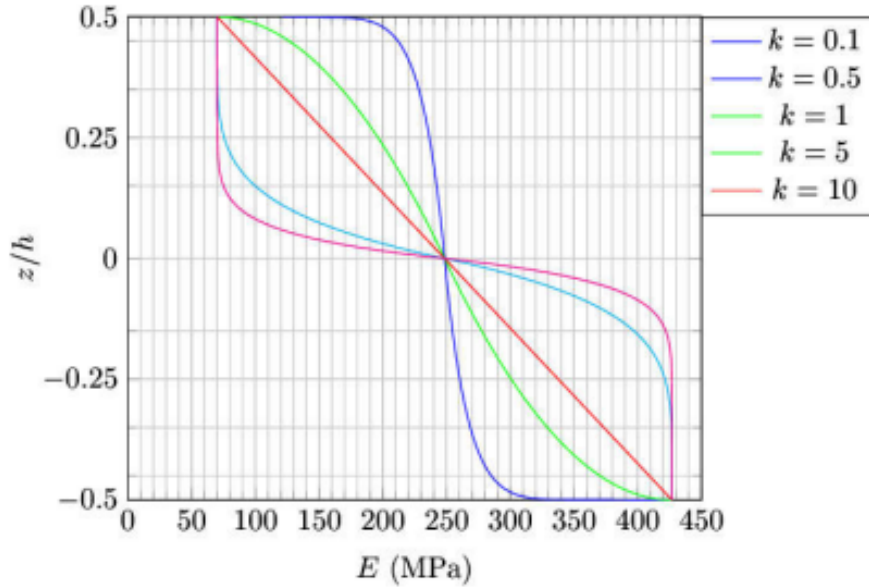


Figure 1.5: Fonction sigmoïde S-FGM

La distribution du module de Young à travers l'épaisseur d'une poutre P-FGM, SP-FGM et distribution sigmoïdale est présentée aux Fig. 1.3, 1.4 et 1.5, respectivement.

1.7.3 Fonction exponentielle (E-FGM)

La fonction exponentielle est utilisée pour décrire les propriétés matérielles d'une poutre FGM ; elle s'écrit comme suit (Delale & Erdogan, 1983) :

$$E(z) = E_m \cdot e^{\beta(z+h/2)} \quad \text{Avec :} \quad \beta = \frac{1}{h^*} \ln \left(\frac{E_c}{E_m} \right) \quad (1.4)$$

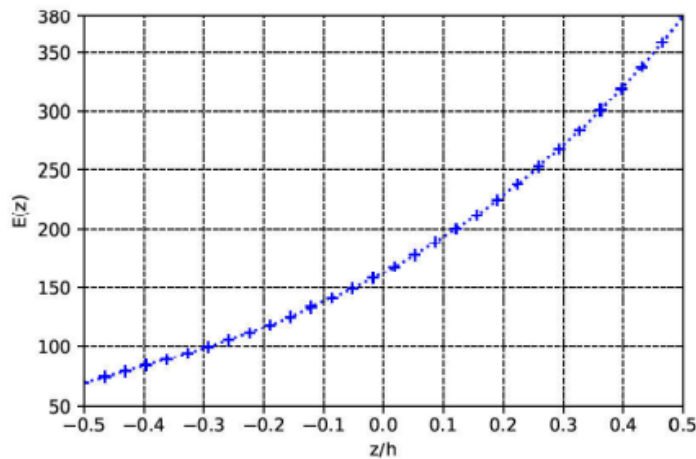


Figure 1.6: Variation du module de Young en fonction de l'épaisseur (E-FGM)

1.7.4 Fonction puissance symétrique SP-FGM

La loi de puissance symétrique modifiée (S-P-FGM), (Aldousari, 2017), a la forme suivante :

$$P_e = P_c + \left(P_m + P_c\right) \left(-\frac{2z}{h}\right)^k \quad \left(-\frac{h}{2} \leq z \leq 0\right) \quad (1.5.a)$$

$$P_e = P_c + \left(P_m + P_c\right) \left(\frac{2z}{h}\right)^k \quad \left(0 \leq z \leq \frac{h}{2}\right) \quad (1.5.b)$$

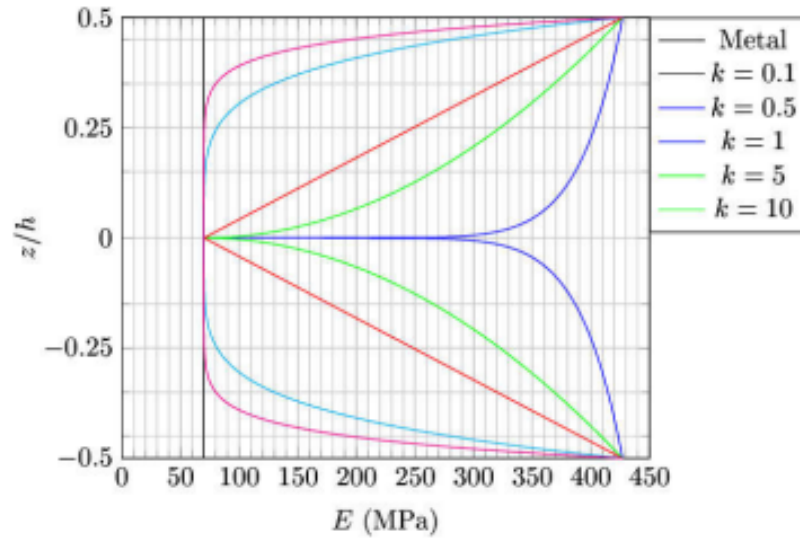


Figure 1.7: Lois de puissance symétrique (SP-FGM)

1.8 Loi de mélange

Plusieurs approches sont utilisées pour décrire la variation matérielle du FGM qui sont fabriqués à partir de deux phases de matériaux. En général, la plupart des approches sont basées sur la distribution de la fraction volumique plutôt que développé à partir de microstructures classées réelles (Bao & Wang, 1995)(Chen et al., 2007). Deux types de fraction volumique (variations/gradations) sont populaires dans la littérature qui couvre la plupart des modèles analytiques existants (figure 1.8).

Une variation continue de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumé, et celle du métal peut être représentée comme une fonction de coordonnées suivant l'épaisseur (z) (figure 1.8).

Une variation par morceaux de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée, et le FGM est pris pour être posé avec la même fraction volumique dans chaque région, c.-à-d. une couche quasi-homogène de céramique-métal (figure 1.8)

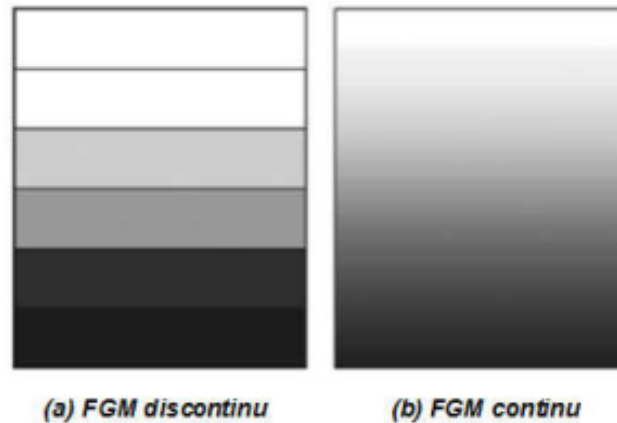


Figure 1.8: Modèle analytique pour une couche de matériau à gradient fonctionnel

1.9 Porosité

La porosité est la quantité de vides (pores) dans un matériau solide, qui sont remplis de fluides (liquide ou gaz). C'est une grandeur physique de 0 à 1 (ou un pourcentage de la grandeur physique de 0 à 1 (ou un pourcentage de entre 0 et 100%)) qui détermine le débit et la capacité de rétention de substrat La porosité est le volume de vide et le volume total du milieu poreux : la lumière totale du milieu poreux :

$$\varphi = \frac{V_{\text{pores}}}{V_{\text{total}}} \quad (1.7)$$

où :

- φ est la porosité,
- V_{pores} est le volume des pores,
- V_{total} est le volume total du matériau, du volume des pores

1.10 Caractérisation de la porosité

La variété des méthodes de caractérisation de la porosité est liée à la variété des matériaux poreux et aux objectifs de chaque approche. Par exemple, lors de l'étude des adsorbants ou des matériaux utilisés en catalyse, les mesures de surface peuvent être préférables. En revanche, si l'objectif est de contrôler la taille des pores, alors la méthode de détermination de la distribution granulométrique est recommandée (Felix, 2012).

Les méthodes de caractérisation poreuse sont souvent associées à la classification des matériaux poreux selon certains critères. Les matériaux poreux peuvent être classés selon le type de porosité principale (fermée ou ouverte), l'origine de la porosité (inter-particule ou intraparticule), la résistance mécanique (rigidité ou fragilité) ou la taille des pores.

1.11 Effet de la porosité sur les propriétés mécaniques des matériaux

Les études des propriétés mécaniques des matériaux poreux sont généralement résumées en qui détermine la corrélation entre la porosité et les propriétés mécaniques. Une augmentation de la fraction volumique des pores signifie une diminution des propriétés mécaniques. (Clément, 2013). La plupart des études disponibles dans la littérature se concentrent sur l'influence du principal facteur d'influence, la porosité, la forme des pores, leur distribution en taille, et même.

1.11.1 Porosité et module d'élasticité longitudinale (le module de Young/porosité)

De vastes travaux expérimentaux et théoriques ont été entrepris pour relier l'interaction complexe de la microstructure et des propriétés mécaniques. Dans le cas de notre étude on s'est focaliser sur l'effet de la porosité sur le module d'élasticité longitudinal (le module de Young/porosité). Les expressions (relations empiriques) suivantes sont celles utilisées le plus souvent pour décrire ce comportement : (Dean & Lopez, 1983)

$$E = E_0(1 - bP) \quad (1.8)$$

Où :

- E : est le module de Young à la porosité P
- E_0 : le module de Young à porosité nulle
- b : Paramètre dépendant de la nature et de la géométrie du matériau

Ce modèle linéaire (1.8) repris dans la théorie de l'élasticité d'Einstein (Einstein, 1906), qui l'utilisait pour décrire le comportement élastique d'un fluide avec une suspension de sphères dures.

$$E = E_0(e^{-bP}) \quad (1.9)$$

Cette relation exponentielle (1.9) a été utilisée pour la première fois par SPRIGGS (Spriggs, 1961) pour analyser l'effet de la porosité sur le module élastique de la matière réfractaire poly cristalline, oxyde d'aluminium.

$$E = E_0 \frac{1 - P}{1 + bP} \quad (1.10)$$

Ce modèle non linéaire (1.10) a été proposé par Hasselman en 1962 est directement basé sur les expressions obtenues par Hashin en 1962 pour les modules de matériaux avec suspensions diluées de pores sphériques.

$$E = E_0 \left(1 - bP^{\frac{2}{3}}\right) \quad (1.11)$$

Cette relation (1.11) à puissance (2/3) a été dérivée par Martin et Haynes en 1971 pour le module de Young des matériaux poreux et a été utilisée tardivement pour analyser les données de plusieurs matériaux. Le principal inconvénient de ces modèles est qu'ils

ne peuvent pas être utilisés pour toute la plage de porosité. Il semble que certaines conditions doivent être remplies par un bon modèle pour toute la plage de porosité : il doit être aussi simple que possible, doit posséder le plus petit nombre possible de paramètres d'ajustement et il est nécessaire d'intégrer la porosité critique (seuil de percolation) (Kováčik, 2008) au modèle. A cause cela, le modèle exponentiel de Knudsen et Spriggs équation (10) ne convient pas car aucun seuil de percolation n'est pris en compte. De plus, il est également inapplicable pour les mousses, car il ne satisfait pas la condition limite $E = 0$ pour $P = 1$ (E est le module de Young et P est la porosité).

1.11.2 Porosité et le module de cisaillement

Le même modèle de percolation est valable pour le module de cisaillement (Kausch et al., 2001) de matériaux poreux.

$$G = G_0 \left(1 - \frac{p}{p_c}\right)^{f_G} \quad (1.12)$$

Où f_G est l'exposant caractéristique du module de cisaillement. Du point de vue de la stabilité mécanique du système, on peut s'attendre à ce que le seuil de percolation soit évidemment le même pour le module de Young et le module de cisaillement. Cependant, les exposants caractéristiques du module de Young et du module de cisaillement ne sont pas identiques en général. Il existe de nombreux paramètres qui influencent le module de Young et le module de cisaillement des matériaux poreux (Kováčik, 2001).

1.11.3 Porosité et le coefficient de Poisson ν

Dans le cas de matériaux isotropes homogènes, le coefficient de Poisson peut être déterminé à l'aide du module d'élasticité E et du module de cisaillement G comme suit:

$$\nu = \frac{E}{2G} - 1 \quad (1.13)$$

Après le remplacement des équations 1.11 et 1.12 dans l'équation 1.13 nous obtenons:

$$\nu = \frac{E_0}{2G_0} \left[\frac{P_c - P}{P_c} \right] \quad \text{Pour } P \leq P_c \quad (1.14)$$

Puisque $\frac{E_0}{2G_0}$ détermine le coefficient de Poisson du matériau solide, nous pouvons simplifier l'équation comme suit:

$$\nu = (\nu_0 + 1) \left[\frac{P_c - P}{P_c} \right] - 1 \quad \text{Pour } P \leq P_c \quad (1.15)$$

Dans ce cas, le seuil de percolation est à nouveau considéré comme identique du point de vue de la stabilité mécanique. Cependant, comme les exposants caractéristiques du module de Young et du module de cisaillement ne sont pas toujours les mêmes, il est nécessaire de considérer un nouvel exposant caractéristique pour le coefficient de Poisson. Où $f_\nu = f_e + f_G$ (Kováčik, 2001).

1.12 Caractéristiques matérielles des FGMs

Lors de la conception de matériaux à gradation fonctionnelle, le choix des composants de base est basé sur les propriétés physiques de chaque constituant. Les FGM se composent généralement de deux types de matériaux de base dont les céramiques et les métaux. Les métaux ont leur part d'avantages car ils sont de bons conducteurs de chaleur et d'électricité en général, ils sont rigides et durs et peuvent également être déformés plastiquement. La majorité des métaux ont une température de fusion élevée. Les métaux suivants sont les plus utilisés dans les FGM: le fer, le nickel, le tungstène, le titane, le magnésium et l'aluminium.

Quant aux céramiques, elles résultent de la combinaison d'éléments métalliques tels que l'aluminium, le nickel, le titane, le zirconium, avec des éléments non métalliques, principalement l'oxygène. Elles sont utilisées notamment dans des environnements extrêmes, caractérisés par des températures élevées, par exemple. Les céramiques se distinguent par leur résistance mécanique et thermique très élevée, ce qui en fait des matériaux réfractaires. Elles sont généralement très dures et sont couramment utilisées comme abrasifs. Cependant, les céramiques ont tendance à présenter un comportement fragile, ce qui limite leur utilisation dans des applications soumises à des chocs mécaniques et thermiques importants (Kumar et al., 2018).

1.12.1 Propriétés des métaux dans les FGM

- **Conductivité thermique et électrique :** Les métaux sont d'excellents conducteurs de chaleur et d'électricité, ce qui les rend utiles dans les applications où la dissipation thermique ou la conduction électrique est nécessaire.

- **Rigidité et dureté :** Les métaux sont généralement rigides et durs, ce qui confère aux FGM une bonne résistance mécanique.

- **Déformabilité plastique :** Contrairement aux céramiques, les métaux peuvent subir une déformation plastique sans se fracturer, ce qui permet une meilleure absorption des chocs et des contraintes mécaniques.

- **Températures de fusion élevées :** De nombreux métaux, comme le tungstène et le nickel, ont des températures de fusion élevées, ce qui les rend adaptés aux environnements à haute température.

1.12.2 Métaux couramment utilisés dans les FGM

- **Fer :** Bonne résistance mécanique et conductivité thermique.

- **Nickel :** Excellente résistance à la corrosion et à la chaleur, souvent utilisé dans les superalliages

- **Tungstène :** Très haute température de fusion et excellente résistance à l'usure.

- **Titane :** Léger, résistant à la corrosion et biocompatible, souvent utilisé dans les applications aérospatiales et médicales.

- **Magnésium** : Léger et avec une bonne résistance spécifique, utilisé dans les applications où le poids est critique.
- **Aluminium** : Léger, bon conducteur thermique et électrique, et facile à usiner.

1.12.3 Combinaison avec les céramiques

Les céramiques, d'autre part, apportent des propriétés telles que la résistance à l'usure, la résistance aux hautes températures et la stabilité chimique. Cependant, elles sont généralement fragiles et ont une faible ténacité. En combinant les métaux et les céramiques dans un FGM, on peut créer un matériau qui offre à la fois la résistance mécanique et la ductilité des métaux, ainsi que la résistance thermique et chimique des céramiques.

Quant aux céramiques, elles résultent de la combinaison d'éléments métalliques tels que l'aluminium, le nickel, le titane, le zirconium, avec des éléments non métalliques, principalement l'oxygène. Elles sont utilisées notamment dans des environnements extrêmes, caractérisés par des températures élevées, par exemple. Les céramiques se distinguent par leur résistance mécanique et thermique très élevée, ce qui en fait des matériaux réfractaires. Elles sont généralement très dures et sont couramment utilisées comme abrasifs. Cependant, les céramiques ont tendance à présenter un comportement fragile, ce qui limite leur utilisation dans des applications soumises à des chocs mécaniques et thermiques importants (Zohra & Somia, 2018).

1.13 Avantages et inconvénient des FGMs

Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) sont de plus en plus utilisés dans différents domaines en raison de leurs caractéristiques uniques. Ces matériaux présentent à la fois des avantages et des inconvénients (Mohammadi et al., 2010).

1.13.1 Avantage des matériaux FGM

L'utilisation croissante des matériaux fonctionnellement gradués dans divers domaines est indéniable. Ces matériaux offrent de multiples avantages :

- Leur capacité à assurer une excellente adhérence entre différents matériaux, tels que la combinaison de céramique et de métal.
- La possibilité de créer des structures complexes, ce qui réduit les coûts d'assemblage.
- La capacité de fabriquer des matériaux aux propriétés particulières, comme un coefficient de Poisson négatif ou une dilatation quasi-nulle.
- La possibilité de dimensionner les structures avec des propriétés spécifiques uniquement dans les axes de chargement.
- Un meilleur contrôle des contraintes grâce à l'absence d'interfaces nettes.
- Une faible sensibilité à la fatigue.
- Une faible sensibilité à la corrosion.
- Une ténacité élevée en cas de rupture (Rahmoun & Yagoubi, 2020).

1.13.2 Inconvénients des matériaux FGM

- La fabrication des matériaux fonctionnellement gradués pose des défis en raison de l'inadéquation entre leurs différentes propriétés. Des contraintes telles que la taille, la morphologie et la température peuvent influencer leur fabrication.
- Les matériaux fonctionnellement gradués présentent une porosité élevée et une faible adhérence entre leurs différents composants. En effet, la composition d'un matériau FG est souvent déterminée par des températures incompatibles entre elles, comme la température des céramiques et celle des métaux. Cela résulte d'une application difficile du matériau FG.
- Les procédés de fabrication des matériaux fonctionnellement gradués sont coûteux, car ils nécessitent des conditions de production en atmosphère protectrice ou sous basse pression (Mohammadi et al., 2010).

1.14 Les méthodes de réalisation des matériaux fonctionnellement gradués

Il existe plusieurs méthodes pour réaliser des matériaux à gradient de fonction, voici les plus connues (Mohammadi et al., 2010).

1.14.1 La centrifugation pour réaliser des FGMs

La fonderie par centrifugation, qu'elle soit verticale ou horizontale, offre une solution pratique et économique pour créer un gradient de microstructure dans l'épaisseur des matériaux. C'est la méthode privilégiée pour la production de FGM à base d'aluminium, de cuivre ou d'autres matériaux ferreux.

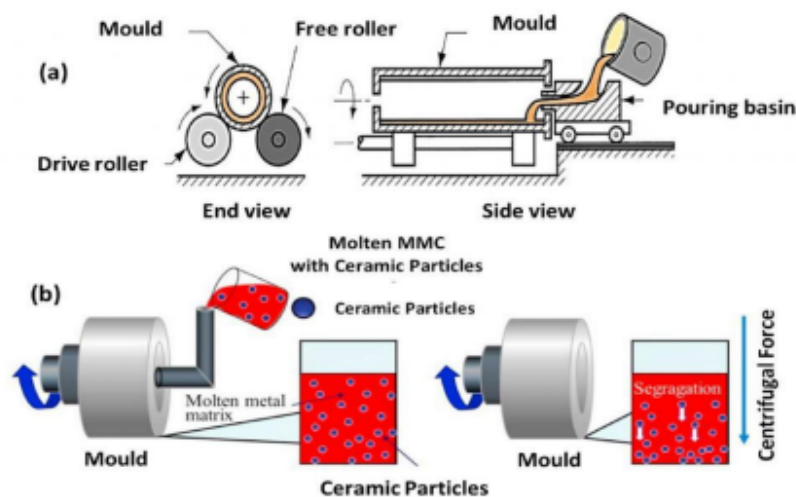


Figure 1.9: La fonderie par centrifugation (Bodaghi & Saidi, 2011)

1.14.2 Le coulage sous pression

Une autre approche pour créer des gradients de fonction est l'utilisation du procédé de squeeze casting direct, qui implique l'infiltration d'une préforme en céramique préalablement disposée dans le moule avec du métal liquide. Cette méthode est particulièrement adaptée à la fabrication de composites à base d'aluminium tels que Sic (carbure de silicium) et Al₂O₃ (alumine). Une autre option est la fonderie sous pression, où la préforme est maintenue en position verticale lors de la fermeture du moule. Tout comme avec le squeeze casting, l'application d'une pression permettra au métal de s'infiltrer dans la préforme (Bodaghi & Saidi, 2011).

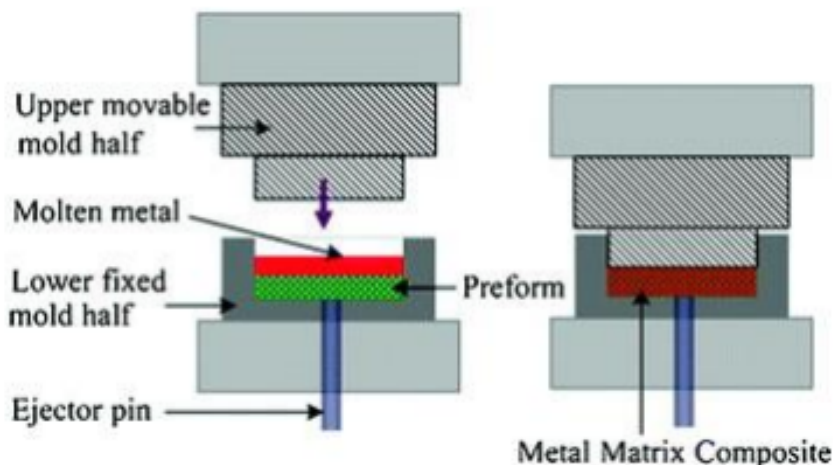


Figure 1.10: Procédé de coulage sous pression (Bodaghi & Saidi, 2011)

1.15 Les théories plaques FGM

Cette revue se concentre sur l'étude des plaques et présente trois hypothèses essentielles. La première hypothèse est la théorie classique de Love-Kirchhoff, qui s'applique aux couches minces. La deuxième hypothèse concerne la théorie de premier ordre pour les couches d'épaisseur moyenne, tandis que la troisième hypothèse concerne la théorie d'ordre supérieur pour les grandes épaisseurs. Pour entamer cette revue, nous nous appuyerons sur les travaux de Srinivas et Rao, qui ont développé une solution exacte pour les problèmes de flexion, de vibration et de flambage des plaques et stratifiés rectangulaires orthotropes épais. Il convient de noter que l'équilibre des plaques élastiques planes, ainsi que la formulation mathématique de ce problème, ont été abordés par de nombreux chercheurs, tels que Lagrange, Poisson, Kirchhoff, M. Boussinesq, M. Maurice Lévy, chacun utilisant des méthodes variées et aboutissant à des résultats parfois discordants (Della Croce & Venini, 2004).

1.16 Conclusion

En guise de conclusion, les FGM semblent être des matériaux remarquables en raison de leur composition et de leur microstructure évolutives à travers leur épaisseur. Ils deviennent largement utilisés dans des domaines aussi variés que l'aérospatiale, l'automobile, le

biomédical, la défense et même l'énergie. Les FGM n'ont pas seulement tout apparence d'avoir une excellente adhésion entre les matériaux; elle peut créer des conceptions complexes et il peut également jouer un rôle dans le processus de fabrication pour fabriquer des matériaux avec des propriétés spéciales. Néanmoins, ils ont des inconvénients_yield similaires.

En conclusion, les FGMs sont une famille de matériaux qui présentent des compositions et des microstructures évolutives à travers leur épaisseur, leur conférant ainsi des propriétés remarquables. Ils sont largement utilisés dans des domaines tels que l'aérospatiale, l'automobile, le biomédical, la défense et l'énergie. Les FGM offrent des avantages tels qu'une excellente adhérence entre différents matériaux, la possibilité de créer des structures complexes et la capacité de fabriquer des matériaux aux propriétés particulières. Cependant, ils ont aussi des inconvénients liés à leur fabrication complexe et coûteuse. Différents modèles, tels que le modèle Voigt, le modèle Reuss, le modèle Tamura et le modèle Mori-Tanaka, sont utilisés pour prédire les propriétés des FGM. Il existe deux grandes catégories de FGM : les FGM minces et les FGM massifs, qui sont réalisés à l'aide de différentes méthodes. Les matériaux FGM continuent d'être étudiés et développés pour ouvrir de nouvelles perspectives d'application et répondre aux besoins des environnements de travail sévères (Ganapathi et al., 2006).

Chapitre 2

Différentes théorie des poutres

2.1 Introduction

Les poutres sont des éléments structurels fondamentaux dans le domaine de la construction et du génie civil. Elles jouent un rôle crucial dans la répartition des charges et la stabilité des bâtiments, des ponts et de nombreuses autres structures. Pour analyser et concevoir ces éléments de manière optimale, plusieurs théories et modèles ont été développés en mécanique des structures. Ces théories permettent de prédire le comportement des poutres sous différentes conditions de charge, en tenant compte de facteurs tels que la déformation, la résistance des matériaux et les contraintes internes. Parmi les approches les plus couramment utilisées, on retrouve la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli, la théorie de Timoshenko, ainsi que des méthodes plus avancées prenant en compte les effets de la plasticité ou des matériaux composites. Chacune de ces théories offre des outils spécifiques pour répondre aux besoins variés des ingénieurs et des architectes dans la conception de structures sûres et efficaces.

2.2 Historique des théories des poutres

La paternité de la théorie des poutres est attribuée à Galilée, mais des études récentes indiquent que Léonard De Vinci l'aurait précédé. De Vinci avait supposé que la déformation varie de manière linéaire en s'éloignant de la surface neutre, mais il ne put finaliser ses calculs car il ne connaissait pas la loi de Hooke. De son côté, Galilée était parti sur une hypothèse incorrecte il supposait que la contrainte était répartie uniformément en flexion), et c'est Antoine Parent qui obtint la distribution correcte. Ce sont Leonard Euler et Jacques Bernoulli qui émirent la première théorie utile vers les années 1750, alors que Daniel Bernoulli, le neveu du précédent, écrivit l'équation différentielle pour l'analyse vibratoire. A cette époque, le génie mécanique n'était pas reconnu comme une science, et on ne considérait pas que les travaux d'une académie des mathématiques puissent avoir des applications pratiques, et on continua à bâtir les ponts et les bâtiments de manière empirique. Ce n'est qu'au XIX siècle, avec la Tour Eiffel et les grandes roues, qu'on démontra la validité de la théorie à grande échelle.

2.3 Comportement des poutres composite

L'analyse sur le comportement statique des poutres est liée d'une part à l'utilisation des poutres comme éléments de base dans la réalisation des structures, et la structure composite est plus complexe que la structure en matériaux traditionnels comme métallique. D'autre part à la caractérisation des propriétés mécanique des matériaux composites et ceci à partir des différents essais réalisés sur des éprouvettes en forme de poutres (BESBES & CHABIL, 2022).

2.4 Modèles des poutres

Une poutre est un élément de structure utilisée dans la construction des bâtiments, des navires, et dans la fabrication de machines. Cependant, le modèle des poutres peut être utilisé pour des pièces très diverses à condition qu'elles respectent certaines normes. La théorie des poutres s'applique sur le solide élancé (les prismes dont la longueur vaut 10 fois la plus grande dimension transversal). L'a où la détermination de la solution exacte pour

les champs de contrainte et de déformation n'est pas possible, elle permet d'obtenir une solution approchée, qui donne une bonne idée sur les efforts et les déplacements (Sallai, 2011).

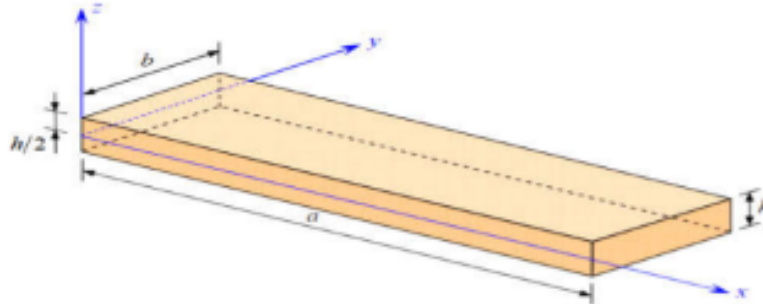


Figure 2.1: Schéma d'un élément de poutre (Berthelot et al., 2012)

2.5 Les modèles des poutres pour les matériaux fonctionnellement gradués

Le terme (poutre) désigne un objet dont la longueur est grande comparée aux dimensions transverses (section fine) 2.1. Une poutre est un élément de structure utilisée dans la construction des bâtiments, des navires, autres véhicules et dans la fabrication de machines. Cependant, le modèle des poutres peut être utilisé pour des pièces très diverses à condition qu'elles respectent certaines normes. Les théories de poutres impliquent essentiellement la réduction d'un problème en trois dimensions de la théorie de l'élasticité à un problème unidimensionnel. Elles s'appliquent sur des solides élancés [les prismes dont la longueur vaut 10 fois la plus grande dimension transversale]. Là où la détermination de la solution exacte pour les champs de contrainte et de déformation n'est pas possible, elle permet d'obtenir une solution approchée, qui donne une bonne idée sur les efforts et les déplacements (Sallai, 2011).

Définition du cisaillement

Le cisaillement est une notion très importante et ce paragraphe vise à expliquer le plus clairement possible en quoi il consiste. Par soucis de simplicité l'exemple qui suit traite d'une poutre homogène et isotrope dont l'axe longitudinal est x .

Lorsqu'une charge dirigée vers les z positifs est appliquée à l'extrémité droite de la poutre, elle induit un moment de flexion et du cisaillement et se déforme vers le haut selon une certaine courbe:

2.6 Les différents types de poutres

La poutre est l'élément structural le plus répandu, puisqu'elle fait partie intégrante de la plupart des ouvrages de construction ou des pièces machines En réaction aux charges ap-

pliées, des forces et des moments internes se développent dans la poutre pour maintenir l'équilibre.

2.6.1 Poutre simple

C'est une poutre reposant sur deux supports : l'appui double et l'appui simple. Les points d'appui sont articulés de façon à ce que les extrémités puissent se mouvoir librement pendant la flexion.

2.6.2 Poutre console

C'est une poutre encastrée dans un mur à une extrémité. L'extrémité encastrée ne bouge pas pendant la flexion, tandis que l'autre extrémité est entièrement libre. On appelle aussi cette poutre, poutre en porte-à-faux ou poutre encastrée à une extrémité.

2.6.3 Poutre avec porte-à-faux

C'est une poutre sur deux appuis (un simple et l'autre double), elle a une ou deux extrémités qui dépassent de façon appréciable les appuis (porte-à-faux). Les poutres sont classées suivant leurs appuis. Ces trois précédents types de poutres entrent dans la catégorie des poutres statiquement déterminées (poutre isostatique), parce qu'elles possèdent trois inconnues reliées aux trois degrés de liberté et par le fait même des équations d'équilibre.

2.6.4 Poutre continue

C'est une poutre supportée par l'un des deux supports, c'est donc une poutre en équilibre hyperstatique.

2.6.5 Poutre à double encastrement

C'est une poutre supportée par deux encastresments, elle est donc une poutre en équilibre hyperstatique.

2.6.6 Poutre supportée à double encastrement

C'est une poutre supportée par deux encastresments ayant un ou plusieurs supports. C'est donc une poutre en équilibre hyperstatique. Elle a plus de fixation ou support que nécessaire, Cependant, ces supports augmentent la capacité portante de la poutre mais les équations de la statique ne suffisent pas à analyser ces poutres. On aura donc recours à différentes méthodes.

2.7 Hypothèses cinématiques de la théorie des poutres

- **L'hypothèse cinématique fondamentale de la théorie des poutres** (Coffignal, 2001): est l'hypothèse de Navier. (Navier -Bernoulli et Navier -Timoshenko) : "Toute section droite de la configuration de référence est supposée rester plane et inaltérée au cours du mouvement".

- **L'hypothèse de Navier** s'énonce aussi de la façon équivalente suivante : "Toute section droite est considérée comme ayant un mouvement de solide indéformable".
- **L'hypothèse d'Euler- Bernoulli** énonce que la section droite de la poutre est indéformable reste plane et perpendiculaire à la fibre moyenne avant et après déformation, et la déformation transversale est nulle.
- **L'hypothèse de Timoshenko** énonce que la section droite de la poutre est indéformable ne reste pas perpendiculaire à la fibre moyenne après déformation (il y a une rotation de la section droite), et l'effet de cisaillement n'est pas nul et pris en compte.

Remarques

1. L'hypothèse énoncée de Navier montre que la section reste plane. Il n'est donc pas imposé a priori que la section reste perpendiculaire à la ligne moyen.
2. L'hypothèse de Navier n'est pas suffisante pour définir l'état de contrainte dans une section droite. Des hypothèses supplémentaires doivent être faites pour passer des "contraintes généralisées" (effort normal, effort tranchant, moment fléchissant) aux contraintes en chaque point de la section droite.

Dans notre travail on utilise les modèles d'Euler Bernoulli, Timochenko et quelques modèles d'ordre élevé.

2.7.1 Modèle d'Euler Bernoulli (Classical Beam Theory- CBT)

Cette théorie est basée sur la théorie élémentaire de flexion des poutres qui ne tient pas compte des effets de la déformation de cisaillement. Comme hypothèse de cette théorie, les déformations dues au cisaillement transversal sont négligées car il n'existe pas de cisaillement sur la hauteur de la poutre, (La section reste plane et perpendiculaire à l'axe neutre de la poutre avant et après la déformation) (Fig. 2.2).

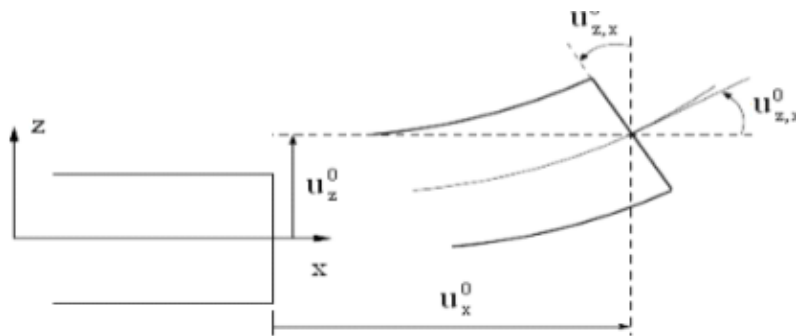


Figure 2.2: Cinématique de la poutre d'Euler Bernoulli

La répartition de déplacement (le gauchissement) est décrite par la fonction nulle : D'après la CBT le champ de déplacement de n'importe point M est donné par les deux composantes suivantes :

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u_0 - z u_{0,x}(x) \\ w(x, z) = w_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Avec:

$u(x, z)$ C'est le déplacement suivant X et $w(x, z)$ est le déplacement dans la direction de Z ou bien la flèche.

La rotation autour de l'axe Y , provoquée par la flexion est tel que :

$$w_0(x) = \frac{\partial w_0}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (2.2)$$

$u_0(x)$ et $w_0(x)$ sont les composantes de déplacement au milieu de la section et sur la ligne moyenne de la poutre, respectivement le long des axes X et Z .

2.7.2 Modèle de Timoshenko (First shear deformation beam theory-FSDBT)

La théorie de Timoshenko est plus riche et plus générale que la théorie élémentaire des poutres au prix d'une fonction supplémentaire. Cette solution permet d'affiner les solutions analytiques issues de la théorie classique. Toutefois ces solutions sont entachées d'erreurs au voisinage des appuis et de la zone indentation où nous pouvons avoir des concentrations de contrainte et des champs de déplacement non homogènes.

Elle est basée sur le principe : "qu'après déformation, la section plane reste plane mais elle perd sa perpendicularité par rapport à la ligne moyenne de la poutre" (Nickel & Secor, 1972) (Fig 2.3).

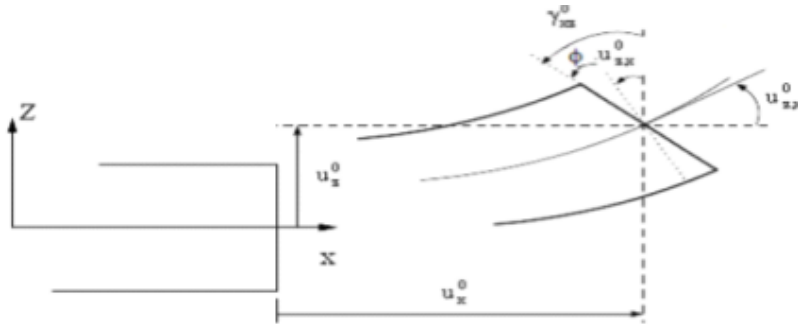


Figure 2.3: Cinématique de la poutre de Timoshenko (Dufort et al., 2001)

Dans le cas où nous avons un élancement faible, l'effet du cisaillement devient plus important sur la déformée. Dans ce cas, la fonction s'écrit comme suit :

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u_0(x) - w_0(x) + z\gamma_{xz}^0(x) \\ w(x, z) = w_0(x) \end{cases} \quad (2.3)$$

Il existe un cisaillement uniforme et les déformations dues au cisaillement transversal ne sont pas négligées. C'est la théorie de premier ordre (FSDBT). Le champ de déplacements de Timoshenko s'écrit alors

Avec :

γ_{xz}^0 , c'est la distorsion ou la déformation angulaire mesurée sur la ligne moyenne de la poutre.

Tel que:

$$\gamma_{xz}^0 = w_x^0(x) - \varphi^0(x) \quad (2.4)$$

$\varphi^0(x)$, Etant la rotation totale de la section mesurée sur la ligne moyenne de la poutre. La contrainte de cisaillement est :

$$\tau_{xz} = G_{xz}\gamma_{xz} = G_{xz}\gamma_{xz}^0 \quad (2.5)$$

G_{xz} , est le module de cisaillement transversal qui est supposé constant. La théorie de Timoshenko est plus riche et plus générale que la théorie élémentaire des poutres au prix d'une fonction supplémentaire. Cette solution permet d'affiner les solutions analytiques issues de la théorie classique.

Le non nullité des contraintes tangentielles sur les bords extrêmes de la poutre et l'introduction des coefficients de correction de cisaillement ont menés d'autres chercheurs à essayer de trouver une autre théorie pouvant tenir compte de ces facteurs c'est "la théorie d'ordre élevé".

2.7.3 Modèle d'ordre élevé (High shear deformation beam theory HSDBT)

Dans cette théorie la distribution des champs de déplacement est non linéaire selon l'épaisseur de la poutre. Elle est plus précise que la théorie du premier ordre puisqu'elle introduit une fonction qui tient compte du phénomène de "gauchissement".

Ce phénomène apparaît lorsque la section transversale de la poutre perd sa planéité. La fonction représente le gauchissement et sa dérivée représente le cisaillement (fig 2.4).

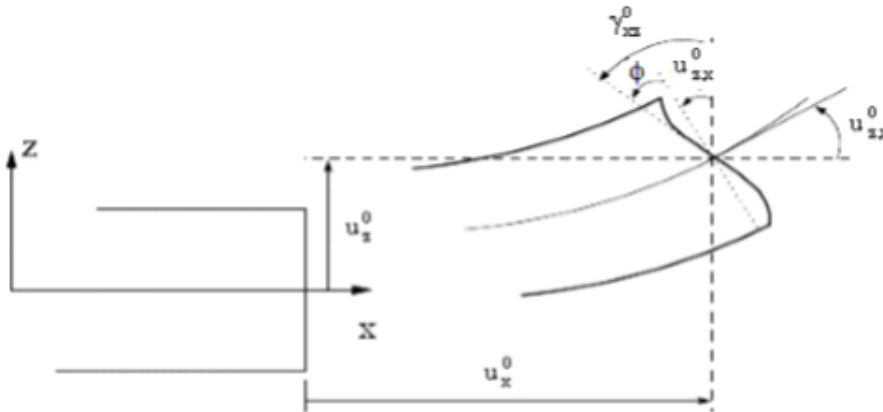


Figure 2.4: Cinématique de la poutre d'ordre élevé

Le champ de déplacement devient :

Pour que les contraintes tangentielles soient nulles sur les bords extrêmes de la poutre, on doit avoir :

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u_0(x) - zw_{0,x}(x) + \varphi(z)\gamma_{xz}^0(x) \\ w(x, z) = w_0(x) \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\gamma_{xz}(x) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} = -w^x(x) + \varphi'(z)\gamma_{xz}^0(z) + w_0x(x) \quad (2.7)$$

$$\gamma_{xz}(x) = \varphi'(z)\gamma_{xz}^0(x) \quad (2.8)$$

Cette condition qui nous permet d'avoir une répartition parabolique des contraintes de cisaillement sur l'épaisseur de la poutre d'une part et de choisir correctement des fonctions cubiques qui répondent à la condition.

- **Quelques modèles de gauchissement :**

- Approche de Levinson1980, Murthy1981 et Reddy 1945 :

$$f(z) = \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2}\right)$$

- Modèle exponentiel proposé par Afaq et al :

$$f(z) = ze^{-z\left(\frac{z}{h}\right)^2}$$

- L'approche de Reissner 1945 :

$$f(z) = \frac{5}{4}z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2}\right)$$

- Touratier:

$$f(z) = \left(\frac{z}{h}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$$

2.8 Conclusion

Dans cette partie de la recherche ; nous avons présenté les différents types des théories des poutres telles que la théorie de Bernoulli (CBT), Timochenko (FSDBT) et la théorie d'ordre élevé (HSDBT).

On a aussi présenté les différents modèles des poutres avec une approche monocouche. Le modèle monocouche équivalent est mieux adaptée pour les matériaux FGM car il n'y a pas de changement brusque dans les caractéristiques mécaniques contrairement aux composites conventionnels ou le délaminage est un problème à ne pas écarter.

Chapitre 3

Modélisation mathématique du comportement des poutres F-bi.G.M Basée sur la théorie classique

3.1 Introduction

Dans les études de réponse des structures fonctionnellement graduées (FGM), la loi de distribution est choisie pour assurer la variation des propriétés mécaniques de la poutre sur la gamme d'épaisseur, Une simple loi de puissances en termes de la fraction volumique des constituants, par exemple. L'effet de la porosité sur le comportement des structures FGM est introduit dans ces lois en ajoutant un indice de porosité. Pour étudier la flexion des poutres poreuses.

3.2 Modèle Mathématique

Les propriétés du FGM varient de façon continue en fonction de la fraction volumique des matériaux suivant la direction de l'épaisseur h d'une poutre de longueur L .

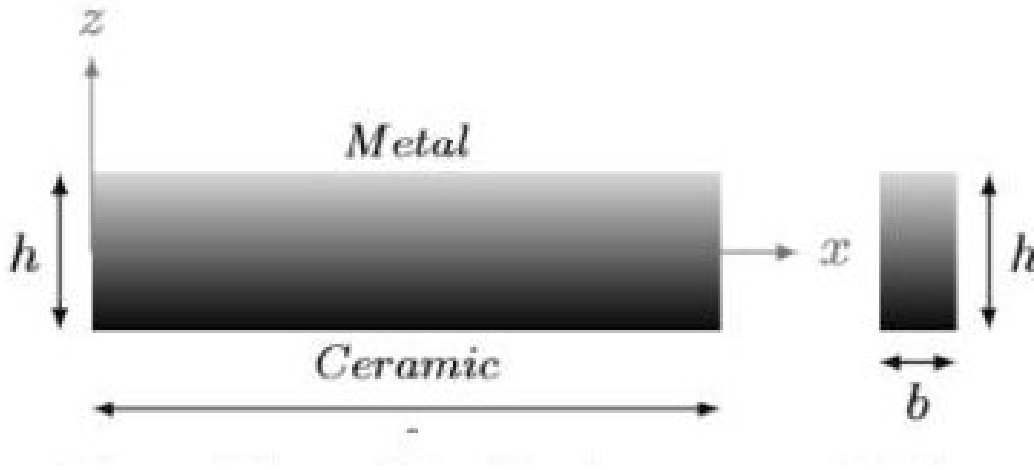


Figure 3.1: Goemtrie de poutre FGM

Dans la poutre , le module de Young sont calculés par les expressions

$$E(z) = E_2 \left[(K - 1) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^P + 1 \right] \quad (3.1)$$

$$K = \frac{E_1}{E_2} \quad (3.2)$$

K = rapport de module de Young.

P = l'indice de graduation de matérielle.

3.3 Champ de Déplacement

Le champ de déplacement de n'importe quel point M est le suivant :

$$u(x, z) = u_0(x) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (3.3)$$

$$w(x, z) = w_0(x) \quad (3.4)$$

Dans notre travail nous utilisons les théories suivantes :

Euler Bernoulli:

$$f(z) = 0$$

Le champ des déformations se déduit du champ des déplacements comme suit :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_0(x)}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0(x)}{\partial x^2} \quad (3.5)$$

$$\gamma_{xz} = 0 \quad (3.6)$$

3.4 Le champ des contraintes

On peut déduire le champ des contraintes avec les relations suivantes :

$$\sigma_x = Q_{11} \varepsilon_x \quad (3.7)$$

$$\tau_{xz} = 0 \quad (3.8)$$

Avec:

$$Q_{11} = E(Z)$$

Les relations entre les contraintes et les déformations sont les suivants :

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dz \quad (3.9)$$

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_x dz \quad (3.10)$$

N_x : Effort normal.

M_x : Moment fléchissant.

Nous obtenons les relations fondamentales suivantes:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ M_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} \\ B_{11} & D_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0(x)}{\partial x} \\ -\frac{\partial^2 w_0(x)}{\partial x^2} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$Q_{xz} = 0 \quad (3.12)$$

Les coefficients de rigidité d'extension et de flexion sont donnés par les expressions :

$$(A_{11}, B_{11}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q(1, z) dz \quad (3.13)$$

3.5 Équation du mouvement

Les équations du mouvement sont établies à partir du principe d'Hamilton.

En statique, l'énergie cinétique est nulle, l'équation d'équilibre dérive de la condition de stationnarité du potentiel. Elle se traduit par la relation suivante:

$$\delta \int (U_e - V) dt \quad (3.14)$$

Avec :

U_e : Énergie de déformation

V : Travail des forces extérieures

La variation du travail des forces extérieures est:

$$\delta V = \frac{1}{2} \int_0^L q(x) \delta w dx \quad (3.15)$$

$q(x)$: La charge transversale.

L'énergie de déformation U_e s'écrit en coordonnées cartésiennes suivant :

$$U_e = \frac{1}{2} \iint (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx}) dx dz \quad (3.16)$$

La variation de l'énergie de déformation U_e s'écrit :

$$\delta U_e = \frac{1}{2} \iint (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx}) dx dz \quad (3.17)$$

Ou encore :

$$\delta U_e = \frac{1}{2} \int \left(N_x \frac{\partial \delta u_0(x)}{\partial x} + M_x \frac{\partial^2 \delta w_0(x)}{\partial x^2} \right) dx \quad (3.18)$$

en faisant l'intégration par partie de l'énergie de déformation (3.18) et l'énergie cinétique, tout en conservant alors le second terme sous forme intégrale, nous obtenons les équations du mouvement.

$$N_{x,x} = 0 \quad (3.19)$$

$$M_{x,xx} - q(x) = 0 \quad (3.20)$$

Pour une poutre en appuis simples, les conditions aux frontières en $x = 0$ et $x =$ sont :

$$\delta u = 0 \quad \text{Ou} \quad N_x = 0 \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial \delta w}{\partial x} = 0 \quad \text{Ou} \quad M_x = 0 \quad (3.22)$$

$$\delta w = 0 \quad \text{Ou} \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} = 0 \quad (3.23)$$

3.6 Solution de Navier

Une solution de type Navier de (3.24, 3.25, 3.26), satisfaisant aux conditions aux frontières, est de la forme :

$$u_0 = \sum A_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad (3.24)$$

$$w_0 = \sum B_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad (3.25)$$

$$q(x) = \sum q_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad (3.26)$$

Avec :

A_m, B_m sont des coefficients indéterminés.

q_m coefficient d'expansion de Fourier.

charge Sinusoïdale : $q_m = q_0$ pour $m = 1$

charge Uniformément répartie :

$$q_m = \begin{cases} \frac{4q_0}{m\pi} & m = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & m = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

En reportant ces expressions dans les équations(3.24, 3.25, 3.26), il vient :

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ w_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ q_m \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Où $[K_{ij}]$ est la matrice de rigidité symétrique, les éléments de cette matrice sont exprimés par les expressions suivantes :

$$K_{11} = A_{11} \cdot \left(\frac{m\pi x}{L}\right)^2$$

$$K_{12} = K_{21} = -B_{11} \cdot \left(\frac{m\pi x}{L}\right)^3$$

$$K_{22} = D_{11} \cdot \left(\frac{m\pi x}{L}\right)^4$$

Avec :

$$A_{11} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(Z) dz$$

$$B_{11} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(Z) \cdot Z dz$$

$$D_{11} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(Z) \cdot Z^2 dz$$

3.7 Conclusion

Ce chapitre a permis de mettre en évidence la pertinence de la théorie classique des poutres pour l'analyse du comportement des poutres bi-graduées. Malgré ses hypothèses simplificatrices, cette approche offre une base fiable pour une première approximation du comportement mécanique des structures composites, notamment lorsqu'elle est couplée à une méthode numérique comme les éléments finis.

L'intégration des variations de propriétés mécaniques dans la modélisation permet de mieux représenter la réalité des poutres constituées de matériaux hétérogènes. Les résultats numériques obtenus valident l'efficacité de la méthode pour différents cas de chargement et de conditions aux limites. Cette étude ouvre également la voie à des approches plus avancées, telles que la théorie des poutres de Timoshenko ou l'analyse multi-échelle, pour affiner la modélisation du cisaillement et des comportements non linéaires.

Chapitre 4

Résultats et discussion

4.1 Introduction

Ce chapitre présente et analyse les résultats obtenus à partir de la solution analytique développée pour l'étude du comportement des poutres fonctionnellement bi-graduées (Functionally Graded Materials, FGM), en se basant sur la théorie classique des poutres (CBT). L'objectif est d'évaluer l'influence des lois de distribution des propriétés mécaniques le long des directions longitudinales et transversales de la poutre, ainsi que d'examiner la validité du modèle proposé dans différents cas de charges et de conditions aux limites. Les résultats analytiques sont comparés avec ceux issus de la littérature afin de valider la formulation adoptée. Une attention particulière est portée sur les effets de la variation bi-graduée des propriétés des matériaux sur la flèche, les contraintes normales, ainsi que la répartition des contraintes le long de la hauteur de la poutre. La discussion met également en évidence les avantages et les limitations de l'approche analytique dans la modélisation des poutres FGB, en particulier dans les cas où la variation des propriétés est non linéaire.

Ce chapitre vise ainsi à démontrer la pertinence de la solution analytique pour la conception et l'analyse des structures en matériaux fonctionnellement gradués, tout en fournissant une base comparative pour de futures approches numériques ou expérimentales.

4.2 Résultats numériques et discussion

Les résultats de notre flexion du faisceau à gradient de variation de la porosité L'analyse est inconnue de manquer. Cependant, certains résultats de notre recherche peuvent être valides de manière fiable en comparant les solutions publiées des faisceaux FGM avec la littérature. Les déplacements et les contraintes adimensionnels d'une poutre FGM composée des matériaux métalliques et céramiques sous charges uniformément répartie et sinus et contraintes tridimensionnelles pour une poutre FGM composée d'un matériau métallique d'élément FEM sous charge. Pour cet objectif, les résultats de notre analyse ont été comparés à ceux qui sont obtenus par :

$$E_2 = 70GPA$$

- **Flexions de la poutre FGM :**

La réponse de flexion de la poutre de FGM sous une charge transversale uniforme a été étudiée. Les déplacements et les contraintes sont présentés sous la forme non dimensionnelle suivante :

- **Déplacement transversal (\bar{w}) :**

$$\bar{w} \left(\frac{L}{2}, \frac{h}{2} \right) = \omega \frac{10E_2h^3}{q_0L^4}$$

- **Contrainte axiale ($\bar{\sigma}_x$) :**

$$\bar{\sigma}_x \left(\frac{L}{2}, \frac{h}{2} \right) = \frac{\sigma_x h}{q_0}$$

Table 4.1: Tableau de comparaison des déplacements et contraintes

(p, k)	Théorie	$\bar{w} (X = \frac{L}{2}, Z = 0)$	$\bar{\sigma}_x (x = \frac{L}{2}, z = \frac{h}{2})$
(0,1)	Présente	1.562	7.499
	Elasticité [*]	1.598	7.520
(0,2)	Présente	0.781	7.499
	Elasticité [*]	0.799	7.519
(0,5)	Présente	0.312	7.499
	Elasticité [*]	0.319	7.519
(1,1)	Présente	1.562	7.499
	Elasticité [*]	1.598	7.520
(1,2)	Présente	1.081	10.384
	Elasticité [*]	1.104	9.258
(1,5)	Présente	0.611	14.673
	Elasticité [*]	0.621	11.443
(2,1)	Présente	1.562	7.499
	Elasticité [*]	1.598	7.520
(2,2)	Présente	1.168	11.210
	Elasticité [*]	1.194	9.848
(2,5)	Présente	0.770	18.485
	Elasticité [*]	0.784	13.254

[*]: (Hadj.Henni.A, 2004)

A fin de valider notre présence modèle on a représenté en tableau (4.1) une comparaison des résultats obtenus des déplacements et contraintes avec ceux de la théorie de l'élasticité. On a constaté que pour les matériaux homogènes les résultats de déplacements et contraintes sont comparables par contre pour les matériaux hétérogènes il existe une différence remarquable sur tout pour les contraintes et ce l'est du a la négligence de l'effet de cisaillement dans notre modèle.

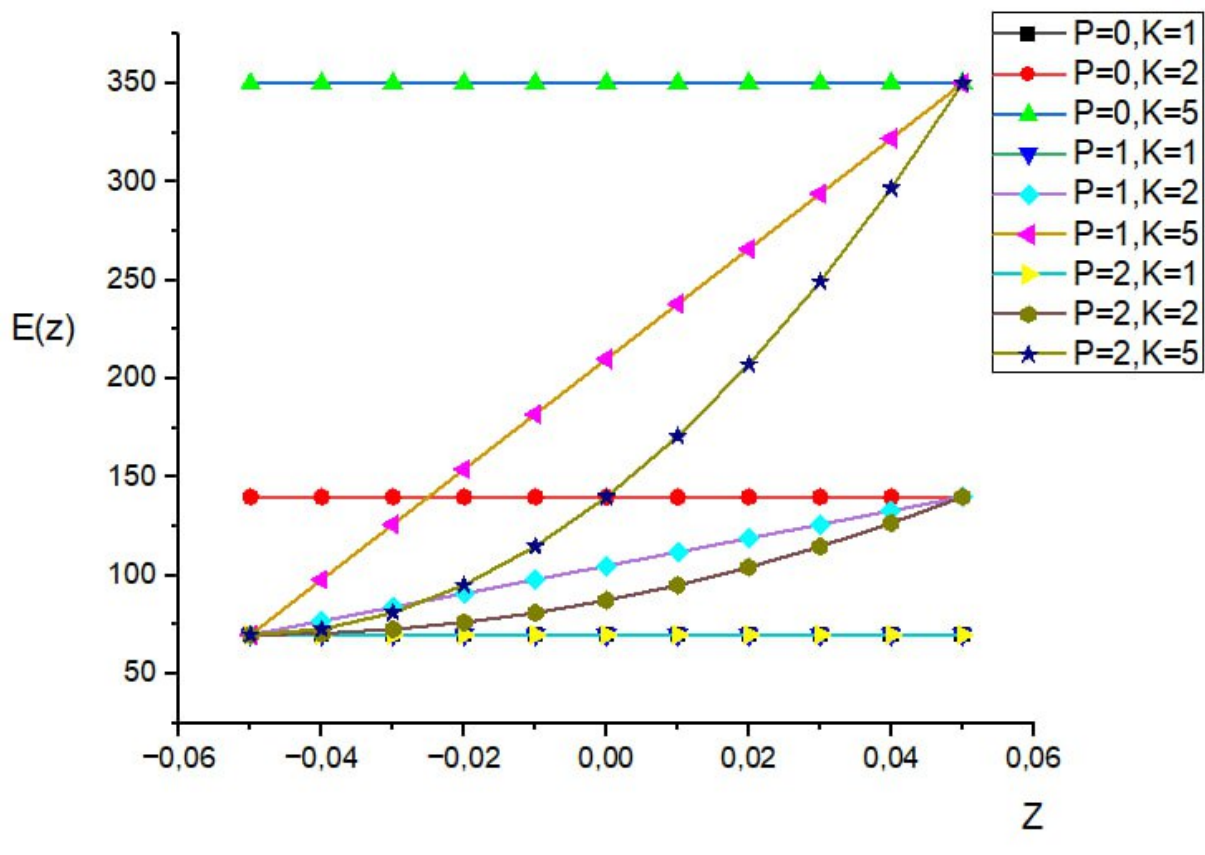


Figure 4.1: La variation du module de Young dans une poutre FGM

La figure (4.1) montre la variation du module de Young dans les matériaux fonctionnellement bigradués, pour différentes valeurs de l'indice de la loi de puissance p et le rapport du module de Young. On constate que ce module est constant à travers l'épaisseur lorsque le matériau est homogène ($P = 0$, $K = 1$), par contre ce module est important pour un matériau hétérogène ($P \neq 0$, $K \neq 1$) dans la face la plus rigide.

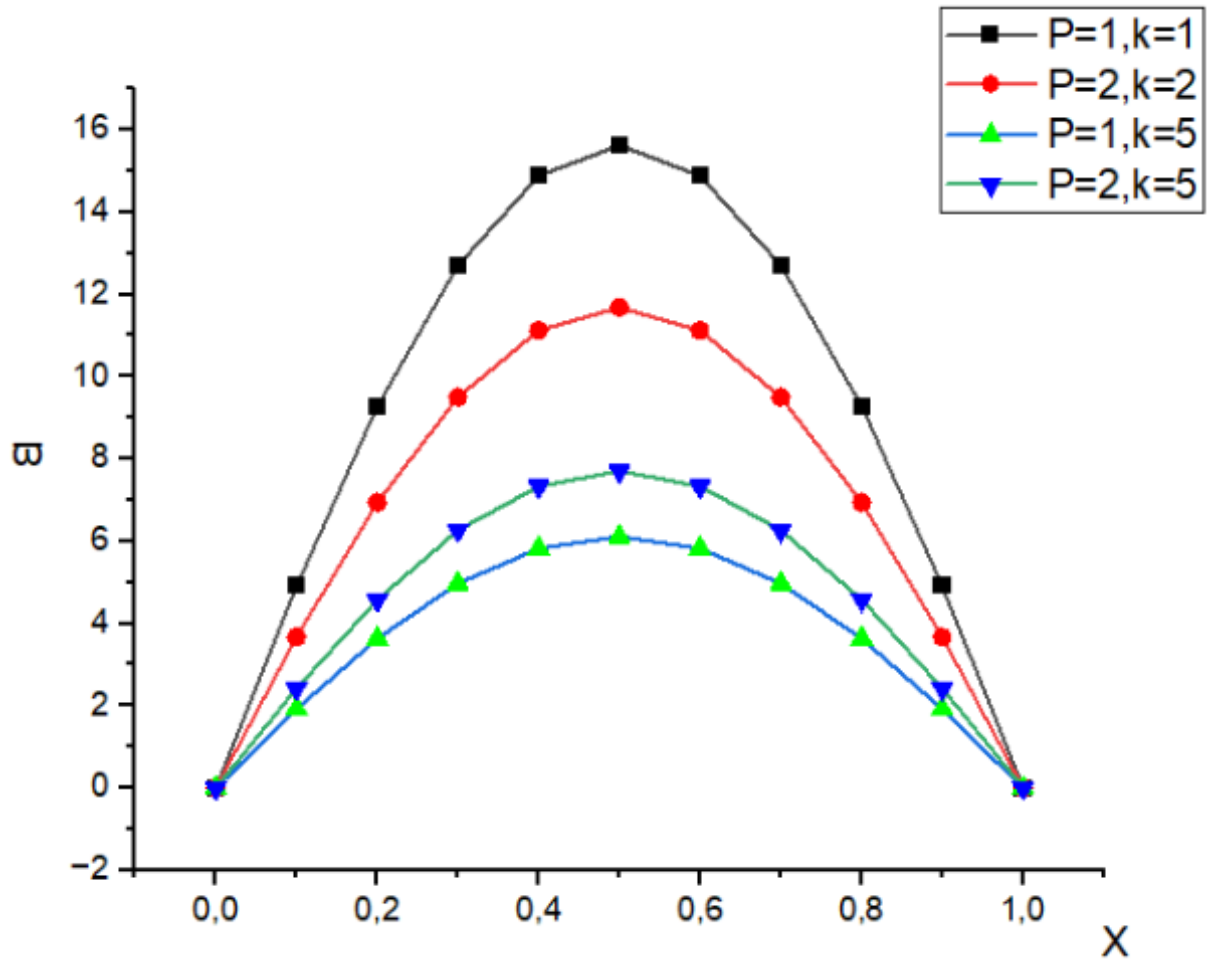


Figure 4.2: Variation du déplacement transversal sans dimension (w) le long de la longueur de la poutre soumise à une charge uniformément répartie avec un rapport ($L/h=10$)

La figure (4.2) montre la variation du déplacement axial sur la longueur de la poutre dans des matériaux fonctionnellement bi-gradués, soumis à une charge uniformément répartie et simplement appuyés, pour différentes valeurs de l'indice de la loi de puissance p et le rapport du module de Young k .

On remarque que le déplacement axial est minimal (plus rigide) lorsque le rapport du module de Young est augmenté et relatif à l'indice de graduation matérielle et linéaire. De même, il est remarquable que ces allures sont symétriques.

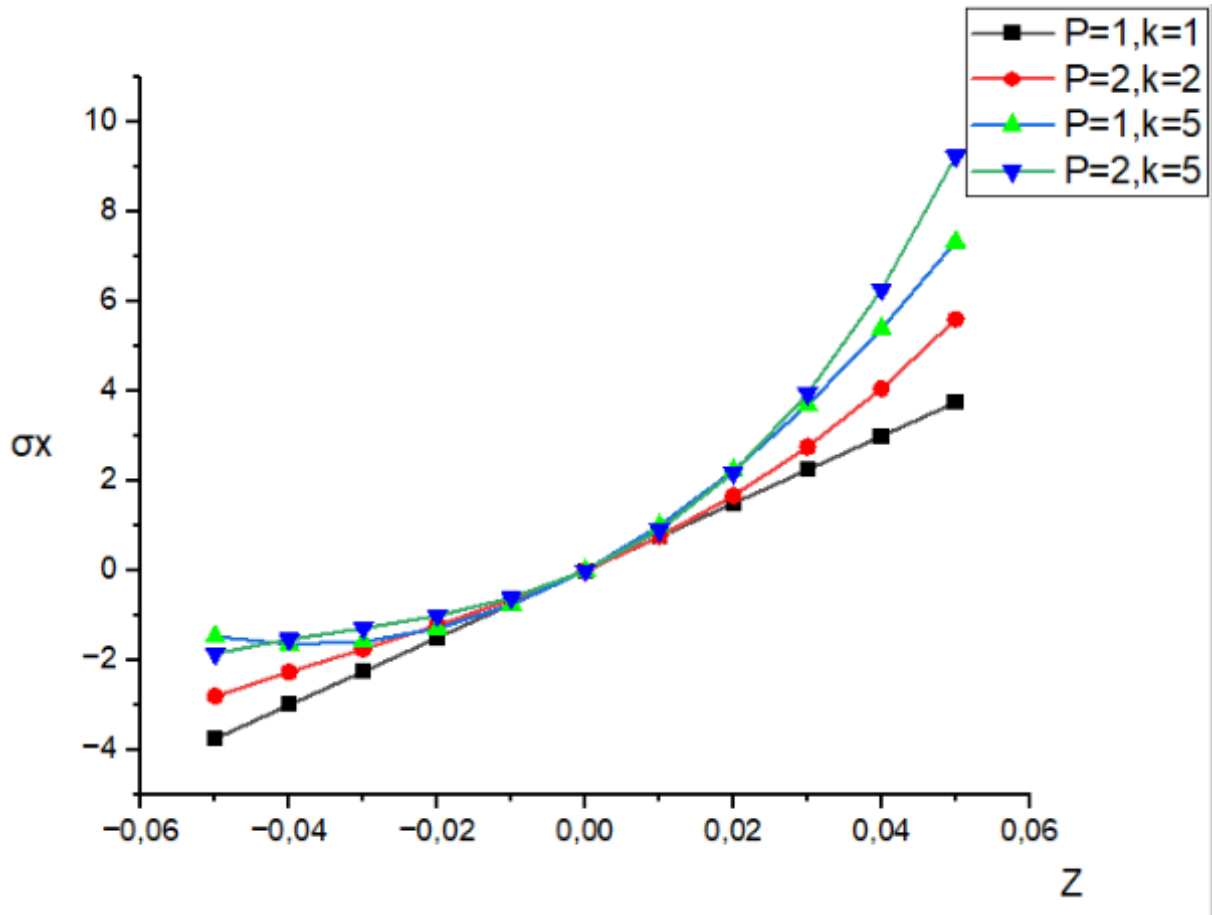


Figure 4.3: Variation de la contrainte axiale sans dimension à travers l'épaisseur de la poutre FGM soumise à une charge uniformément répartie avec un rapport ($L/h = 10$)

La figure (4.3) montre la variation de la contrainte axiale à travers l'épaisseur de la poutre, soumise à une charge uniformément répartie et simplement appuyée, pour différentes valeurs de l'indice de la loi de puissance p et le rapport du module de Young k .

On remarque que la contrainte axiale est maximale au niveau de la face supérieure (plus rigide) lorsque le rapport du module de Young est augmenté et avec un indice de gradation matérielle non-linéaire (quadratique). De même, on observe que cette variation est linéaire pour un matériau homogène, par contre elle est non-linéaire pour un matériau hétérogène.

4.3 Conclusion

Dans ce chapitre on a développé les équations de bas de la théorie classique des poutres en introduisant l'expression des modules du Young en fonction de deux paramètres (bi-graduée) pour les matériaux fonctionnellement gradués. Après avoir exécuté le programme de calcul numérique on a exploité les résultats obtenus pour prédire la variation des contraintes et des déplacements en négligeant l'effet de cisaillement transversal.

CONCLUSION GÉNÉRALE

En conclusion, l'application de la théorie classique des poutres, en particulier la théorie d'Euler-Bernoulli, pour étudier le comportement des poutres fonctionnellement bi-graduées permet d'obtenir des solutions analytiques permettant de comprendre les déformations et les contraintes dans ces structures complexes. L'étude des poutres bi-graduées, avec leurs propriétés variables, ouvre de nouvelles perspectives pour la conception et l'optimisation d'éléments de structure performants, notamment en termes de légèreté et de résistance.

La théorie d'Euler-Bernoulli, avec ses hypothèses simplificatrices (sections transversales planes et perpendiculaires à l'axe de la poutre après déformation, etc.), permet d'obtenir des équations analytiques pour déterminer la déflexion, les moments fléchissants et les efforts tranchants dans les poutres. Cependant, cette théorie ne prend pas en compte les effets de cisaillement et de torsion, ce qui peut limiter son application dans certains cas.

L'étude des poutres fonctionnellement bi-graduées, dont les propriétés varient selon la hauteur de la poutre, nécessite une adaptation des équations de la théorie classique. Les modèles analytiques développés permettent de déterminer les déformations et les contraintes, en tenant compte de l'inhomogénéité des matériaux.

En résumé, la théorie classique permet d'obtenir des solutions analytiques pour les poutres spécifiquement élancées et non profondes, et à la fin on tire l'attention que dans ce présent travail on a reformulé la variation du module de Young en termes de la graduation matérielle et du rapport des modules des Young constituant le matériaux afin d'examiner l'influence de ces paramètres sur la réponse statique des poutres.

Références Bibliographiques

- Aldousari, S. (2017). Bending analysis of different material distributions of functionally graded beam. *Applied Physics A*, 123(4), 296.
- Bao, G., & Wang, L. (1995). Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings. *International Journal of Solids and Structures*, 32(19), 2853–2871.
- Benferhat, R. (2017). *Analyse et modélisation de l'influence du cisaillement transverse sur le comportement mécanique des plaques en matériaux à gradient de propriétés* [Doctoral dissertation].
- Bennai, R., Ait Atmane, H., & Tounsi, A. (2015). A new higher-order shear and normal deformation theory for functionally graded sandwich beams. *Steel Compos. Struct.*, 19(3), 521–546.
- Berthelot, S., Coulmont, M., & Serret, V. (2012). Do investors value sustainability reports? a canadian study. *Corporate social responsibility and environmental management*, 19(6), 355–363.
- BESBES, D. M., & CHABIL, R. (2022). *Comportement statique des poutres poreuses en fgm* [Doctoral dissertation, FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES DÉPARTEMENT GÉNIE CIVIL].
- Bodaghi, M., & Saidi, A. (2011). Stability analysis of functionally graded rectangular plates under nonlinearly varying in-plane loading resting on elastic foundation. *Archive of Applied Mechanics*, 81, 765–780.
- Bouguenina, O., Belakhdar, K., Tounsi, A., & Bedia, E. A. (2015). Numerical analysis of fgm plates with variable thickness subjected to thermal buckling. *Steel Compos. Struct.*, 19(3), 679–695.
- Chen, W., Wang, H., & Bao, R. (2007). On calculating dispersion curves of waves in a functionally graded elastic plate. *Composite structures*, 81(2), 233–242.
- Clément, P. (2013). *Détermination des propriétés mécaniques de céramiques poreuses par essais de microindentation instrumentée sphérique* [Doctoral dissertation, INSA de Lyon].
- Coffignal, G. (2001). Mécanique non-linéaire et éléments finis. *Version Electronique e*, 1.
- Dean, E., & Lopez, J. (1983). Empirical dependence of elastic moduli on porosity for ceramic materials. *Journal of the American Ceramic Society*, 66(5), 366–370.
- Delale, F., & Erdogan, F. (1983). The crack problem for a nonhomogeneous plane.
- Della Croce, L., & Venini, P. (2004). Finite elements for functionally graded reissner–mindlin plates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(9–11), 705–725.
- Dufort, L., Drapier, S., & Grédiac, M. (2001). Closed-form solution for the cross-section warping in short beams under three-point bending. *Composite structures*, 52(2), 233–246.
- Einstein, A. (1906). Eine neue Bestimmung der Moleküldimensionen [DOI: 10.1002/andp.19063240204]. *Annalen der Physik*, 324(2), 289–306.

- Felix, B. (2012). *Structure et porosité de systèmes lamellaires sous haute pression: Cas du graphite et de la vermiculite* [Doctoral dissertation, Université Claude Bernard-Lyon I].
- Ganapathi, M., Prakash, T., & Sundararajan, N. (2006). Influence of functionally graded material on buckling of skew plates under mechanical loads. *Journal of engineering mechanics*, 132(8), 902–905.
- Hadj.Henni.A. (2004). *Elasticité: Cours de 4ème année ingénieur en génie civil* [Promotion 2004].
- Hopkinson, Naguib, U., Ajoku, Saleh, N., Hague, R., & Erasenthiran, P. (2006). Investigating mechanical anisotropy and end-of-vector effect in laser-sintered nylon parts. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B: Journal of Engineering Manufacture*, 220(7), 1077–1086.
- Kausch, H.-H., Heymans, N., Plummer, C. J., & Decroly, P. (2001). *Matériaux polymères: Propriétés mécaniques et physiques* (Vol. 14). EPFL Press.
- Kolahchi, R., Bidgoli, M. R., Beygipoor, G., & Fakhar, M. H. (2015). A nonlocal nonlinear analysis for buckling in embedded fg-swnt-reinforced microplates subjected to magnetic field. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 29, 3669–3677.
- Kováčik, J. (2001). Correlation between shear modulus and porosity in porous materials. *Journal of materials science letters*, 20(21), 1953–1955.
- Kováčik, J. (2008). Correlation between elastic modulus, shear modulus, poisson's ratio and porosity in porous materials. *Advanced Engineering Materials*, 10(3), 250–252.
- Kumar, A., Sharma, A., Vaish, R., Kumar, R., & Jain, S. C. (2018). A numerical study on anomalous behavior of piezoelectric response in functionally graded materials. *Journal of Materials Science*, 53(4), 2413–2423.
- Mahmood, R. M., Akinlabi, E. T., Shukla, M., & Pityana, S. (2012). Functionally graded material: An overview [Retrieved from <http://researchspace.csir.co.za/dspace/handle/10204/6548>].
<http://researchspace.csir.co.za/dspace/handle/10204/6548>
- Mohammadi, M., Saidi, A. R., & Jomehzadeh, E. (2010). Levy solution for buckling analysis of functionally graded rectangular plates. *Applied Composite Materials*, 17, 81–93.
- Nickel, R., & Secor, G. (1972). Convergence of consistently derived timoshenko beam finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 5(2), 243–252.
- Niino, M., & Kisara, K. (2004). The present status of the functionally graded materials, and future prediction. *Journal of the Japan Society of Powder and Powder Metallurgy*, 51(4), 242–249.
- Rahmoun, Y., & Yagoubi, Z. (2020). *Effet de la température sur les matériaux fgm en utilisant la théorie de déformation non local* [Master's thesis]. University Name [2019/2020].
- Sallai, B.-O. (2011). *Etude et analyse des structures en fgm : Comparaison entre e-fgm, p-fgm et s-fgm* [Thèse de Doctorat]. Université de Djillali Liabes de Sidi Bel Abbès [2010].
- Spriggs, G. (1961). A preliminary study of the reactions between tungsten carbide and tungsten carbide-6% cobalt powders and wet and dry hydrogen. *Powder Metallurgy*, 4(7), 296–311.
- Tlidji, Y., Daouadji, T. H., Hadji, L., Tounsi, A., & Bedia, E. A. A. (2014). Elasticity solution for bending response of functionally graded sandwich plates under thermomechanical loading. *Journal of Thermal Stresses*, 37(7), 852–869.

Zohra, D. F., & Somia, G. (2018). Analyse des contraintes d'une plaque fgm avec des couches de surface piézoélectriques par la théorie de déformation en cisaillement.