

République Algérienne Démocratique Et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Ibn Khaldoun De Tiaret.

Faculté Des Sciences Appliquées

Département Génie Civil



Mémoire de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme de Master

Spécialité : Génie civile

Option : Géotechnique

Présenté par :

BENSAKHRIA Mhamed Elfarouk

KROUR Benaouda Abdel-illah

Sujet du mémoire :

**Modélisation du comportement d'un massif de sol par la
méthode des éléments finis**

Soutenue publiquement Le 28/06/2025 devant le jury composé de :

Pr, Hadji.L

Président

MCA, Hadj Henni.A

Rapporteur

MAB, Zouatnia.N

Examineur

Promotion : 2024/2025

Remerciement

Nous remercions tout d'abord Dieu le Tout-Puissant de nous avoir accordé le courage, la force et la patience nécessaires pour mener à bien ce modeste travail.

Nous tenons ensuite à exprimer nos remerciements les plus profonds, sincères et respectueux à notre encadreur, Monsieur Abdelaziz Hadj Henni, pour son accompagnement rigoureux tout au long de cette recherche. Son aide précieuse, sa patience et sa confiance ont constitué un soutien fondamental sans lequel ce travail n'aurait pu être mené à terme. Qu'il trouve à travers ce mémoire l'expression de notre profonde reconnaissance et un hommage à sa haute valeur humaine et scientifique.

Nos vifs remerciements s'adressent également aux membres du jury : Monsieur Ait Amer, Monsieur Rebahi Abdelrezzak et Madame Zouatnia Nafissa, pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre travail, ainsi que pour leurs remarques constructives et enrichissantes.

Nos remerciements vont aussi à l'ensemble de nos enseignants, qui par la qualité de leur enseignement et leur engagement, ont grandement contribué à notre formation et à l'enrichissement de nos connaissances.

Enfin, nous remercions chaleureusement toutes les personnes qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce mémoire.

Dédicaces

*À nos chers parents, source inépuisable de soutien et
d'affection inconditionnels.*

À nos frères et sœurs.

*À tous les membres de nos grandes familles :
BENSAKHERIA et KROUR.*

À tous nos amis et collègues.

*À tous les étudiants du Génie Civil, et à tous ceux qui
ont, de près ou de loin, contribué à cette aventure.*

Résumé

Ce travail traite la modélisation numérique du comportement des sols naturels soumis à des charges verticales, en s'appuyant sur la méthode des éléments finis (MEF). Une formulation par cette approche est développée en se basant sur des méthodes énergétiques afin de prédire les déplacements et les contraintes dans un élément quadrilatère à quatre nœuds. Dans ce cadre, nous avons validé notre modèle numérique avec d'autres modèles existants dans la littérature. Un programme de calcul par élément finis est développé pour traiter un exemple de massif de sol afin de déterminer la distribution des déplacements et des contraintes dans cette structure.

Mots clés : Méthode des éléments finis, contraintes, déplacements, massif de sol.

Abstract

This work deals with the numerical modeling of the behavior of natural soils subjected to vertical loads, based on the finite element method (FEM). A formulation by this approach is developed based on energy methods in order to predict displacements and stresses in a four-node quadrilateral element. In this framework, we validated our numerical model with other existing models in the literature. A finite element calculation program is developed to treat an example of a soil mass in order to determine the distribution of displacements and stresses in this structure.

Keywords : Finite element method, stresses, displacements, soil mass.

ملخص

يتناول هذا العمل النمذجة العددية لسلوك الترب الطبيعية المعرضة لأحمال رأسية، باستخدام طريقة العناصر المحدودة (FEM). طُوِّر نهج قائم على الرسم البياني، استنادًا إلى أساليب الطاقة، للتنبؤ بالإزاحات والإجهادات في عنصر رباعي الأضلاع ذي أربع عقد. في هذا السياق، تحققنا من صحة نموذجنا العددي مع نماذج أخرى موجودة في الأدبيات العلمية. طُوِّر برنامج حسابي بطريقة العناصر المحدودة لمعالجة مثال لكتلة تربة لتحديد توزيع الإزاحات والإجهادات في هذا الهيكل.

الكلمات المفتاحية طريقة العناصر المحدودة، الإجهادات، الإزاحات، كتلة التربة.

Table des matières

Résumé.....	iii
Abstract	iv
ملخص.....	v
Table des matières	vi
Liste des tableaux.....	1
Liste des figures	1
Chapitre I Généralité sur la mécanique des sols.....	2
I.1 Introduction	2
I.1.1 Définitions essentielles	3
I.1.2 Domaines d'application de la mécanique des sols.....	3
I.2 Caractéristique physique des sols.....	7
I.2.1 Introduction.....	7
I.2.2 Schéma des différentes phases du sol	8
I.2.3 Définitions de base.....	9
I.2.4 Echantillonnage.....	14
I.2.5 Mesures en laboratoire (Essais de bases).....	17
I.2.6 Contraintes dans le sol	22
I.2.7 Charges de surface en mécanique des sols	30
I.3 Consolidation et calcul pratique des tassements	41
I.3.1 Définition de la consolidation des sols	41
I.3.2 Théorie de la consolidation.....	41
I.3.3 Tassement dans le temps sous une charge donnée.....	42
I.3.4 Consolidation unidimensionnelle.....	44
I.4 Conclusion générale	45
Chapitre II Synthèse bibliographique sur la méthode des éléments finis	47
II.1 Introduction	47

II.2	Notions et principe de la méthode.....	48
II.3	Principe général de la méthode	49
II.3.1	Discrétisation du domaine.....	50
II.3.2	Approximation des champs inconnus	50
II.3.3	Formulation locale des équations.....	50
II.3.4	Assemblage global	51
II.3.5	Application des conditions aux limites	51
II.3.6	Résolution numérique	51
II.4	Applications de la MEF.....	52
II.4.1	Mécanique des solides	52
II.4.2	Transfert thermique.....	52
II.4.3	Électromagnétisme.....	53
II.4.4	Mécanique des fluides (MEF-CFD).....	53
II.4.5	Biomécanique et ingénierie médicale	53
II.5	Logiciels et implémentations	54
II.5.1	Logiciels commerciaux.....	54
II.5.2	Logiciels open source	54
II.5.3	Critères de choix d'un logiciel.....	55
II.6	Limites et perspectives	55
II.6.1	Limites actuelles de la MEF	56
II.6.2	Perspectives d'évolution	56
II.7	Conclusion.....	57
 Chapitre III Modélisation du comportement d'un massif de sol par la méthode des éléments finis.....		
III.1	Introduction	58
III.2	Formulation en éléments finis	59
III.3	Validation du modèle numérique	61
	Résultats obtenus	63
III.4	Exemple d'application.....	64
III.5	Cas du chargement concentré.....	64
III.5.2	Cas du chargement réparti	74
III.5.3	Conclusion	83

Conclusion générale.....	84
References bibliographie	85

Liste des tableaux

Tableau I-1 :- Caractéristiques physiques des sols (d'après Terzaghi et Peck).....	21
Tableau III-1 : comparaison des contraintes entre la solution analytique et solution avec MEF	62
Tableau III-2 : comparaison des contraintes entre la solution analytique et solution avec MEF	64
Tableau III-3 : Résultats numériques de la contrainte σ_{xx} cas du chargement concentré à travers et le long du massif.	66
Tableau III-4 : Résultats numériques de la contrainte σ_{yy} cas du chargement concentré à travers et le long du massif.	68
Tableau III-5 : Résultats numériques de la contrainte τ_{xy} cas du chargement concentré à travers et le long du massif.	70
Tableau III-6 : Résultats numériques des déplacements v cas du chargement concentré à travers du massif.	72
Tableau III-7 : Résultats numériques de la contrainte σ_{xx} cas du chargement réparti à travers et le long du massif.	74
Tableau III-8 : Résultats numériques de la contrainte σ_{yy} cas du chargement réparti à travers et le long du massif.	77
Tableau III-9 : Résultats numériques de la contrainte τ_{xy} cas du chargement réparti à travers et le long du massif.	79
Tableau III-10 : Résultats numériques des déplacements v cas du chargement réparti à travers du massif.	81

Liste des figures

Figure I-1 Mur de soutènement rigide	4
Figure I-2 Mur de soutènement flexible	4
Figure I-3 Fondations superficielles isolées	5
Figure I-4 Fondations semi profonde (Puits).....	5
Figure I-5 Glissement de terrain et étude de stabilité	6
Figure I-6 Éléments constitutifs d'un sol.....	8
Figure I-7 Les trois phases d'un sol.....	8

Figure I-8 Diagrammes des phases des sols	12
Figure I-9 Le quartage d'un échantillon de sol en laboratoire.....	15
Figure I-10 Le principe d'un échantillonneur	16
Figure I-11 Vue en coupe de l'outil de l'anneau volumétrique	18
Figure I-12 Densimètre à sable	Figure I-13 Densimètre à membrane..20
Figure I-14 Eprouvette graduée pour la détermination de γ_s	21
Figure I-15 État de contrainte lorsqu'une facette SS' tourne autour d'un point M	23
Figure I-16 Représentation de Mohr.....	23
Figure I-17 Caractéristiques du cercle de Mohr	24
Figure I-18 . Contraintes totale et effective dans un sol saturé.....	25
Figure I-19 . Sol inondé à surface horizontale	28
Figure I-20 . Contraintes principales dans un sol à surface horizontale	29
Figure I-21 . Contrainte sous une nappe phréatique	30
Figure I-22 . Contrainte due à une charge ponctuelle- solution de Boussinesq (McCarthy 2007 modifiée)	31
Figure I-23 . Distribution des contraintes d'après Boussinesq	31
Figure I-24 Contrainte due à une charge linéaire (McCarthy 2007 modifiée)	32
Figure I-25 Courbes d'égales contraintes verticales $\Delta\sigma_z$ sous une fondation filante, carrée ou circulaire, d'après l'équation de Boussinesq	34
Figure I-26 Courbes d'égales contraintes verticales $\Delta\sigma_z$ sous une fondation filante ou carrée, d'après l'équation de Westergaard.....	35
Figure I-27 Variation du coefficient d'influence I en fonction de Z/R_0 sous l'axe d'une fondation circulaire uniformément chargée par la contrainte q	35
Figure I-28. Méthode 2:1 pour la répartition des contraintes verticales avec la profondeur sous une fondation rectangulaire uniformément chargée	36
Figure I-29 Valeurs des coefficients d'influences I_z sous un chargement demi-trapézoïdal de grande longueur, d'après (l'US Navy 1971) et [19] (Osterberg 1957)[20]	38
Figure I-30. Modèle rhéologique de la consolidation des sols	42
Figure I-31. Évolution des contraintes et déformations dans le temps	44
Figure I-32 Couche drainée d'un seul côté (consolidation unidimensionnelle)	45

Figure III-1. Elément quadrilatère à quatre nœuds.	59
Figure III-2. Modèle d'une plaque soumise à la traction.....	62
Figure III-3. Modèle de plaque soumise à la compression	63
Figure III-4. Cas de chargement concentré.....	65
Figure III-5. Cas de chargement concentré après la division.....	65
Figure III-6. Variation de la contrainte horizontale (σ_{xx}) à travers et le long du massif de sol soumis à une charge concentrée.....	67
Figure III-7. Variation de la contrainte verticale (σ_{yy}) à travers et le long du massif de sol soumis à une charge concentrée.....	69
Figure III-8. Variation de la contrainte de cisaillement (τ_{xy}) à travers et le long du massif de sol soumis à une charge concentrée	71
Figure III-9. Variation du déplacement vertical (v) à travers du massif de sol soumis à une charge concentrée.....	73
Figure III-10. Cas de chargement réparti.....	74
Figure III-11. Variation de la contrainte horizontale (σ_{xx}) à travers et le long du massif de sol soumis à une charge réparti.....	76
Figure III-12. Variation de la contrainte verticale (σ_{yy}) à travers et le long du massif de sol soumis à une charge réparti.....	78
Figure III-13. Variation de la contrainte de cisaillement (τ_{xy}) à travers et le long du massif de sol soumis à une charge réparti.....	80
Figure III-14. Variation du déplacement vertical (v) à travers du massif de sol soumis à une charge réparti.	82

Introduction générale

L'étude du comportement des sols sous l'effet de chargements mécaniques est une composante essentielle de l'ingénierie géotechnique. Dans le contexte de la conception des ouvrages tels que les fondations, les barrages, les murs de soutènement ou encore les tunnels, la compréhension précise de la réponse du sol face aux sollicitations est indispensable pour garantir la stabilité et la sécurité des structures. La complexité du comportement des sols, caractérisé par une grande variabilité spatiale, des non-linéarités mécaniques et des interactions sol-structure, nécessite le recours à des outils numériques performants.

Parmi ces outils, la méthode des éléments finis (MEF) s'impose comme une approche particulièrement efficace pour résoudre des problèmes de mécanique des milieux continus. Elle permet une modélisation précise de la répartition des contraintes, déformations et déplacements dans le sol, en tenant compte des conditions aux limites, des propriétés du matériau et de la géométrie du domaine étudié. L'objectif de ce mémoire est de comparer l'efficacité et la précision de plusieurs maillages numériques appliqués à un même cas de chargement sur sol naturel. Trois modèles sont étudiés, dans le but d'évaluer l'impact du raffinement du maillage sur les résultats obtenus.

Cette étude s'inscrit dans une démarche de validation numérique, visant à optimiser le compromis entre précision des calculs et coût computationnel. Elle contribue également à une meilleure compréhension des effets locaux dans les milieux granulaires, et constitue un support pour la conception et le dimensionnement des structures géotechniques basées sur des données simulées.

Ce travail est structuré en plusieurs chapitres, organisés de manière progressive afin de présenter, développer, modéliser et analyser le comportement du sol naturel sous chargement : **Chapitre 1 : Généralités sur la mécanique des sols** : Ce chapitre présente les principes fondamentaux de la mécanique des sols, les propriétés physiques et mécaniques des sols naturels, ainsi que les problématiques liées au comportement des matériaux géotechniques. **Chapitre 2 : Méthode des éléments finis** : Il expose les fondements théoriques de la méthode des éléments finis (MEF), les types d'éléments utilisés en géomécanique, ainsi que les étapes de discrétisation, de formulation et de résolution. **Chapitre 3 : Modélisation du sol naturel** : Ce chapitre décrit la modélisation du sol soumis

à des charges verticales de compression, en précisant les hypothèses de calcul, les caractéristiques mécaniques du matériau, la géométrie et les conditions aux limites appliquées.

Chapitre I

Généralité sur la mécanique des sols

I.1 Introduction

La géotechnique constitue une discipline fondamentale de l'ingénierie civile, axée sur l'étude des matériaux naturels que sont les roches et les sols. Ces matériaux, bien que présents partout dans notre environnement, présentent une diversité de comportements physiques et mécaniques qui influencent de manière décisive la conception et la réalisation des ouvrages de génie civil.

Il est donc essentiel, avant toute analyse ou application, de bien comprendre la nature et les caractéristiques de ces matériaux. Du point de vue géotechnique, une distinction fondamentale est faite entre la roche, matériau dur, compact et résistant, et le sol, milieu meuble, poreux et tri-phasique, résultat de la désagrégation des roches et de l'action d'agents naturels. Cette distinction est à la base de toute étude géotechnique car elle détermine les méthodes d'analyse, les outils de modélisation ainsi que les techniques d'essai utilisées.

La mécanique des sols, branche centrale de la géotechnique, vise à comprendre et prévoir le comportement des sols soumis à différentes sollicitations. Elle permet notamment d'évaluer la stabilité des ouvrages, d'optimiser la conception des fondations, et de prévenir les désordres pouvant affecter les infrastructures.

Dans cette première partie, nous allons donc définir les notions de base indispensables pour aborder l'étude des sols et des roches, en précisant leur nature, leur composition et leur comportement sous l'effet des efforts mécaniques. Cette compréhension constitue le socle de

tout raisonnement en mécanique des sols et conditionne la réussite des projets de construction sur ou dans le sol.

I.1.1 Définitions essentielles

En géotechnique, une roche est un agrégat naturel massif de matière minérale. Les roches sont compactes, dures et résistantes. Elles ne peuvent être réduites en morceaux qu'à la suite de très gros effort mécanique. Elles sont généralement classées en trois grandes familles : les roches éruptives, les roches sédimentaires et les roches métamorphiques.

Du point de vue géotechnique, on peut définir un sol comme étant un agrégat naturel de grains minéraux, séparable par une action mécanique légère. Le sol est le résultat d'une altération physique, chimique ou biologique des roches et des matières organiques. Il consiste en un assemblage de particules solides et de quantité variables d'eau et de gaz. Le sol est un matériau meuble, poreux et non homogène, généralement non isotrope. Le sol présente deux originalités :

- C'est tout d'abord un milieu discontinu qu'il faudra donc étudié à la fois dans sa globalité et dans sa composition élémentaire.
- D'autre part, c'est un matériau tri-phasique formé de grains solides, d'eau et d'air. Nous verrons à travers ce cours que les phases non solides (eau et air) jouent un rôle fondamental dans le comportement mécanique des sols.

Mécanique des sols: c'est l'étude des propriétés physiques, hydrauliques et mécaniques des sols en vue de leur application à la construction. Sous cet aspect, les sols doivent être considérés comme support ou éléments constitutifs des ouvrages.

I.1.2 Domaines d'application de la mécanique des sols

Les domaines d'application de la mécanique des sols sont nombreux et variés. Ils concernent la profession des travaux publics, ainsi que celle du bâtiment. En effet, elle intervient dans les structures de soutènement rigides ou flexibles, les routes et chemin de fer ainsi que dans différents types de fondations (Figures 1.1 à 1.4). Le domaine d'application de

la mécanique des sols ne se limite pas uniquement aux constructions, il comprend également des milieux naturels tels que les versants (problèmes de glissement de terrain et stabilité des talus, Figure 1.5)

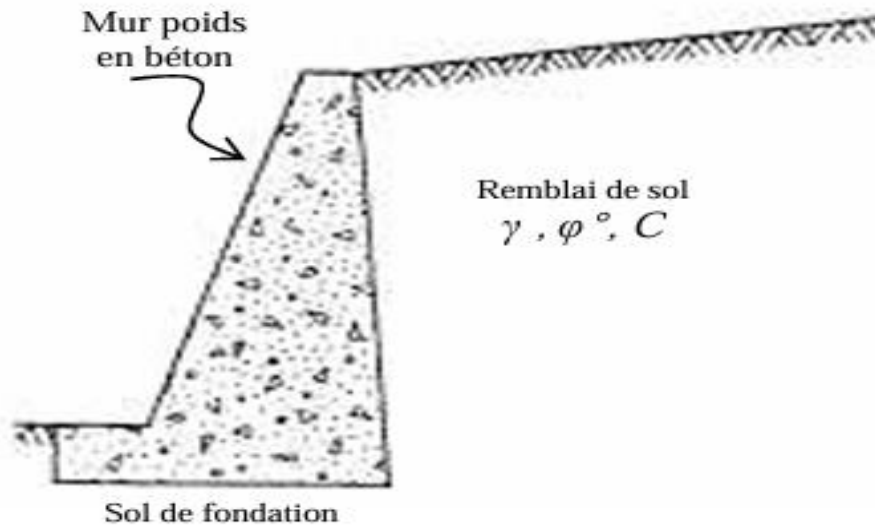


Figure I-1 Mur de soutènement rigide

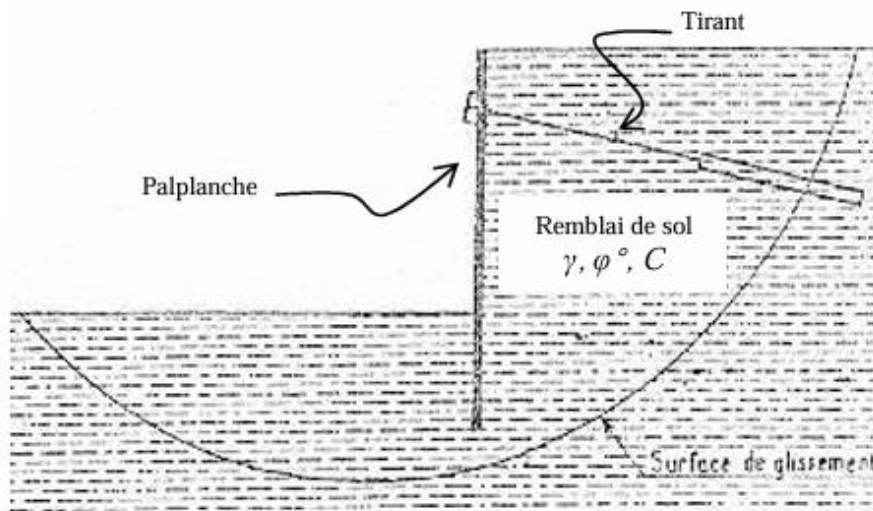


Figure I-2 Mur de soutènement flexible

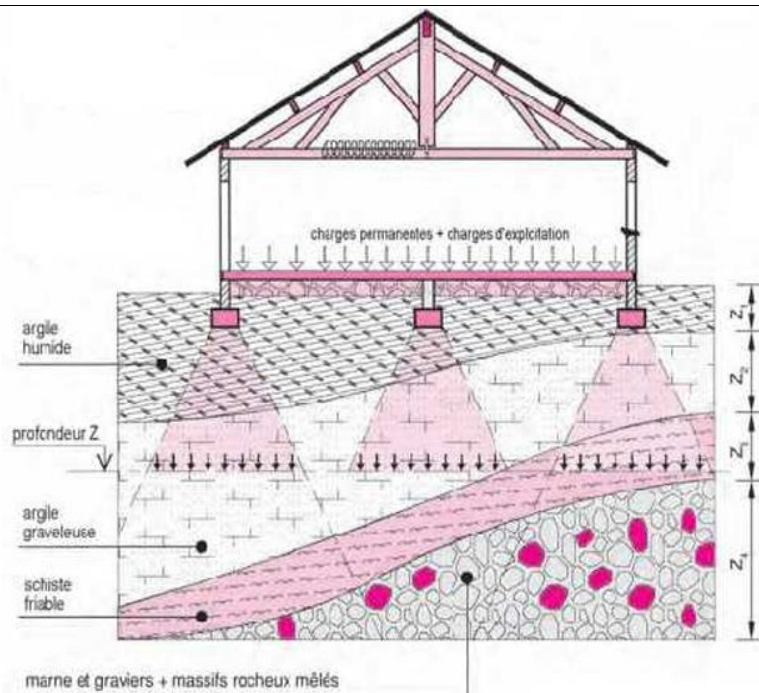


Figure I-3 Fondations superficielles isolées

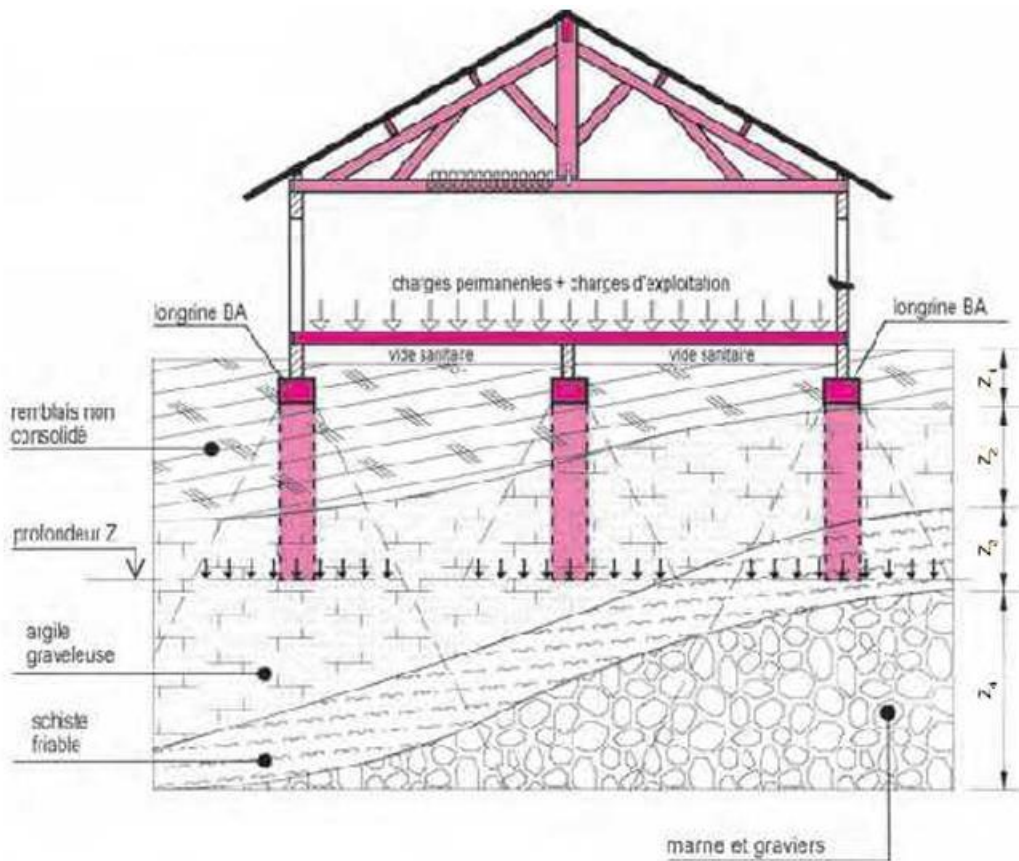


Figure I-4 Fondations semi profonde (Puits)

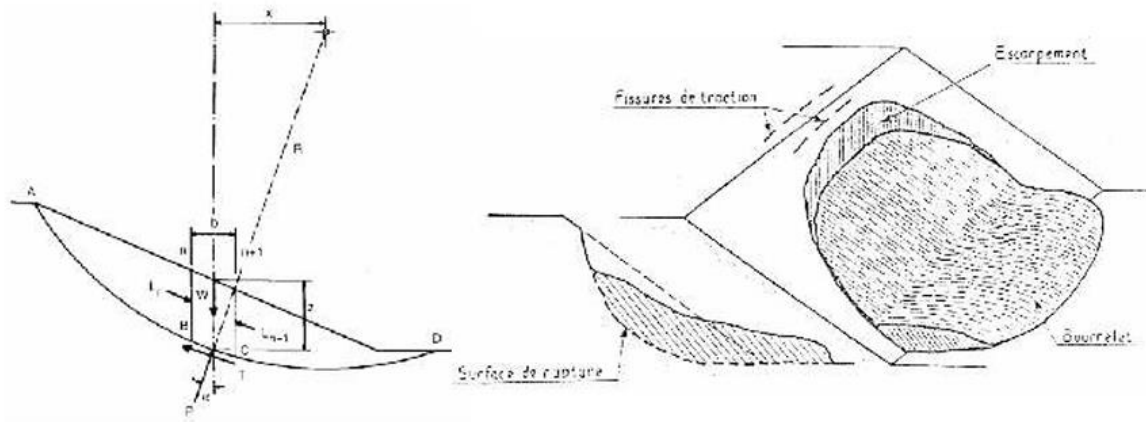


Figure I-5 Glissement de terrain et étude de stabilité

En ce qui concerne les fondations des structures tel que les bâtiments, les ponts, les barrages et les digues, elles demandent généralement la connaissance de certains facteurs comme :

- La charge qui sera transmise par la superstructure au système de fondation.
- Les recommandations des codes de construction tel le R.P.A (1).
- Les contraintes et les déformations du sol.
- Les conditions géologiques du sol de construction

Pour les ingénieurs les deux derniers facteurs sont extrêmement importants parce qu'ils concernent la mécanique des sols.

D'après les statistiques $\frac{3}{4}$ des sinistres proviennent des déformations par tassement excessif, le $\frac{1}{4}$ seulement étant attribué à un dépassement des contraintes par excès de charges. Donc pour les sols deux domaines sont toujours à examiner : les contraintes et les déformations.

Les propriétés géotechniques d'un sol comme : la distribution des grains, la plasticité, la compressibilité et la résistance au cisaillement peuvent être déterminés par des essais au laboratoire.

Récemment, des essais in situ ont été introduits pour la détermination des propriétés de résistance et de déformation du sol. Par cette dernière technique le remaniement de la structure des échantillons prélevés qui se produit durant l'exploitation est évité.

Cependant, dans certains cas, quelques paramètres nécessaires à l'étude ne peuvent pas être obtenus et des hypothèses concernant le sol doivent être faites afin de résoudre le problème posé. Dans ce cas l'ingénieur doit avoir une bonne connaissance des principes de base de la mécanique des sols.

En conclusion, la compréhension des bases de la mécanique des sols et de la géotechnique est essentielle :

- Dans la prévention des risques liés aux sols et aux fondations,
- Pour optimiser les choix technico-économiques des ouvrages à réaliser.

((1) R.P.A : Règlement Parasismique Algérien)

I.2 Caractéristique physique des sols

I.2.1 Introduction

En mécanique des sols, on étudie plus particulièrement les sols meubles, qui sont constitués par des grains de matières minérales, végétales ou animales. En première approximation les sols constituent un système triphasé : grains solides, eau interstitielle, air et/ou vapeur d'eau. On est ainsi amené à étudier des ensembles constitués par des grains laissant entre eux des interstices qui sont remplis de gaz (généralement l'air) ou de liquide (généralement l'eau). La masse d'un sol se présente donc sous trois phases : solide, liquide, et gazeuse. En un point quelconque, chaque phase se trouve dans un état d'équilibre particulier. Le sol est l'ensemble de ces trois phases (Figure I 6). Les propriétés d'un sol ne dépendent pas seulement de la phase solide, elles sont fortement influencées par la présence et la nature des fluides, liquide et gaz. On appelle sol, un massif de terre se trouvant dans un état de compacité et de structure déterminé.

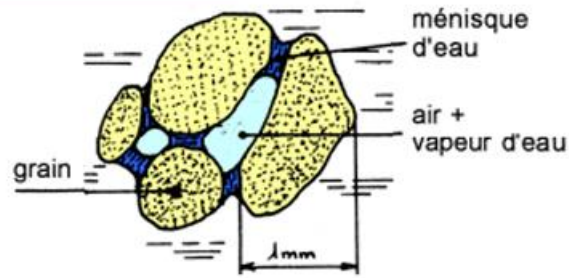


Figure I-6 Éléments constitutifs d'un sol

I.2.2 .Schéma des différentes phases du sol

Les termes sur la Figure I 7 sont utilisés dans la description des diagrammes des phases et dans la mécanique des sols en général.

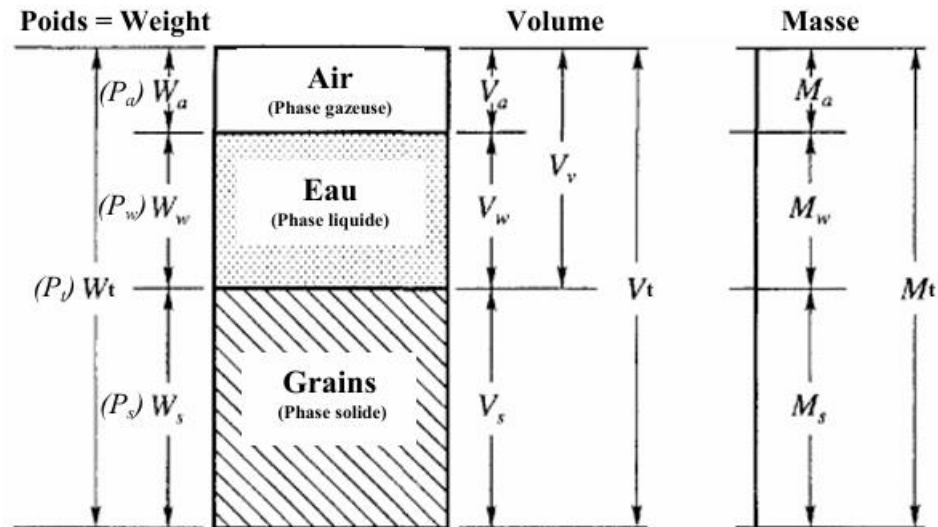


Figure I-7 Les trois phases d'un sol

Poids des différentes phases :

$W_t = P_t$: Poids total du sol (des trois phases) = $P_s + P_w$.

$W_s = P_s$: Poids des grains solides.

$W_w = P_w$: Poids de l'eau.

$W_a = P_a$: Poids de l'air (négligeable).

V_t : Volume total du sol = $V_v + V_s$

V_s : Volume occupé par les grains solides.

V_w : Volume occupé par l'eau.

V_a : Volume occupé par l'air.

V_v : Volume des vides = $V_a + V_w$

I.2.3 Définitions de base

I.2.3.1 Paramètres dimensionnels

- Le poids volumique total ou apparent du sol **γ_t** : c'est le poids de l'unité de volume, eau et air compris. On dit aussi poids volumique humide (total ou apparent) **γ_h**

$$\gamma_t = \gamma_h = \frac{P_t}{V_t} = \frac{W_t}{V_t} ; \text{ en } (KN/m^3), (N/m^3), \text{ etc.} \quad (I.1)$$

- Le poids volumique des grains solides **γ_s** : c'est le poids de l'unité de volume des grains solides, il est de l'ordre de $2,65 \text{ g/cm}^3$ pour les sables et on a une valeur moyenne statistique de l'ordre de $2,7 \text{ g/cm}^3$ pour les Argiles. On dit aussi poids volumique absolu.

$$\gamma_s = \frac{P_s}{V_s} = \frac{W_s}{V_s} \quad (I.2)$$

- Le poids volumique de l'eau **γ_w** : c'est le poids de l'unité de volume de l'eau, égal à $9,81(kN/m^3)$ généralement on prend $\approx 10(kN/m^3)$.
-

$$\gamma_w = \frac{P_w}{V_w} = \frac{W_w}{V_w} \quad (I.3)$$

- Le poids volumique du sol sec γ_d : c'est le poids de l'unité de volume du sol exempt d'eau interstitielle (après expulsion de l'eau libre). On dit aussi poids volumique sec.

$$\gamma_d = \frac{P_s}{V_t} = \frac{W_s}{V_t} \quad (I.4)$$

- Le poids volumique déjaugé (ou submergé) du sol γ' : c'est le poids de l'unité de volume d'un sol submergé sous une nappe d'eau compte tenue de la poussée d'Archimède

$$\gamma' = \gamma_{sat} - \gamma_w \quad (I.5)$$

I.2.3.2 Paramètres sans dimensions

- Notion de densité : c'est le poids volumique du sol par rapport à celui de l'eau.

On parle de, densité sèche $\rho_d = \frac{\gamma_d}{\gamma_w}$; densité humide $\rho_h = \frac{\gamma_h}{\gamma_w}$ et densité des

grains solides $\rho_s = \frac{\gamma_s}{\gamma_w}$.

La Porosité n : c'est le rapport du volume des vides au volume total du sol.

$$n = \frac{V_v}{V_t} \quad (I.6)$$

- ❖ L'indice de vides e : c'est le rapport du volume des vides au volume des grains solides.

$$e = \frac{V_v}{V_s} \quad (I.7)$$

- ❖ La teneur en eau **w** : c'est le rapport du poids de l'eau contenue dans un certain volume de sol au poids des éléments solides compris dans le même volume. La teneur en eau est exprimée en (%).

$$w = \frac{P_w}{P_s} \cdot 100 = \frac{W_w}{W_s} \cdot 100 \quad (\text{I.8})$$

- ❖ Le degré de saturation **Sr** : c'est le rapport du volume effectivement occupé par l'eau au volume des vides.

$$S_r = \frac{V_w}{V_v} \cdot 100 \quad (\text{I.9})$$

Pour un sol saturé $V_v = V_w$ et **Sr** = **1** = **100%** ; pour un sol sec $V_w = 0$ et **Sr** = **0**

- ❖ La compacité **C** : c'est le rapport du volume des grains solides au volume total du sol.

$$C = \frac{V_s}{V_t} \quad (\text{I.10})$$

I.2.3.3 Relations entre les paramètres du sol

Soit un élément de sol tel que le volume des grains solides V_s soit égal à l'unité (**Vs** = **1**), le poids volumique des grains de ce sol est par définition égal à γ_s . Donc, $\gamma_s = W_s/V_s$ et $V_s = 1 \Rightarrow W_s = \gamma_s$. D'autre part, le volume des vides à pour mesure la valeur de l'indice des vides, $e = \frac{V_v}{V_s}$ et $V_s = 1 \Rightarrow e = V_v$. En considérant que le poids de l'air est nul ($W_a = 0$), les schémas suivants permettent de retrouver facilement les relations suivantes :

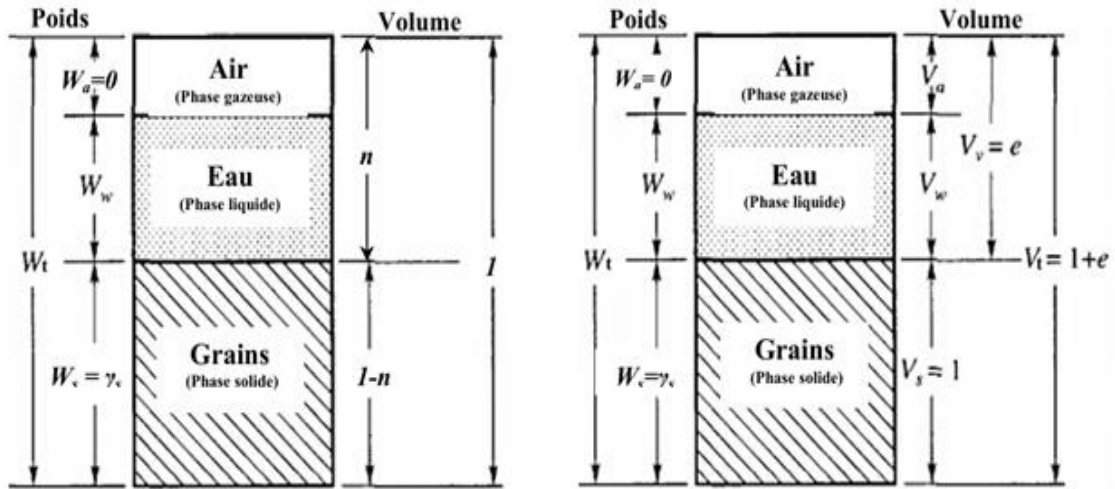
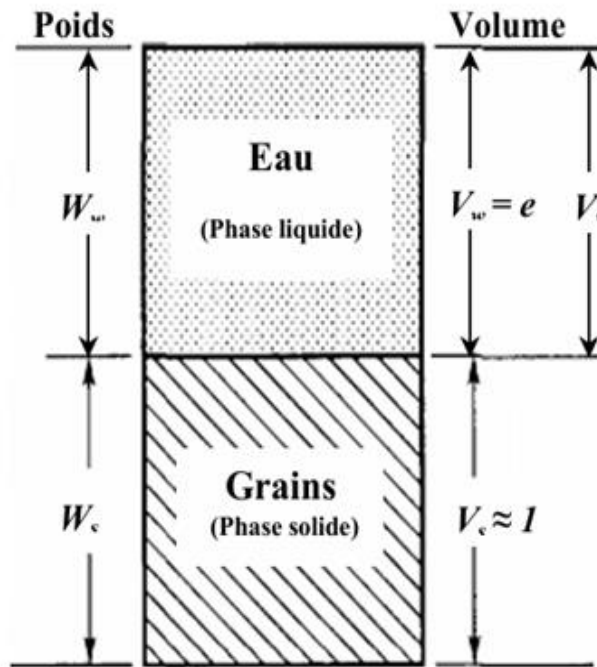
(a) Sol partiellement saturé, $V_s \approx 1$ (b) Sol saturé, $V_s \approx 1$ et $S_r = 100\%$

Figure I-8 Diagrammes des phases des sols

Quelques relations entre les paramètres du sol en utilisant les diagrammes de la Figure I 8:

$$\diamond n = \frac{V_v}{V_t} \text{ et comme } V_v = e \text{ et } V_t = 1 + e \Rightarrow n = \frac{e}{e+1}$$

$$\diamond e = \frac{V_v}{V_s} \text{ et comme } V_v = n \text{ et } V_s = 1 - n \Rightarrow e = \frac{n}{1-n}$$

$$\diamond V_w = f(e, S_r) : S_r = V_w / V_v \Rightarrow V_w = S_r \cdot V_v \text{ et comme}$$

$$V_v = e, \text{ on aura : } V_w = e \cdot S_r$$

$$\diamond w = f(\gamma_w, \gamma_s, e, S_r) : w = \frac{W_w}{W_s} = \frac{\gamma_w \cdot V_w}{\gamma_s} = \frac{\gamma_w \cdot e \cdot S_r}{\gamma_s}$$

$$\diamond e = f(w, \gamma_w, \gamma_s, S_r) : w = \frac{\gamma_w \cdot e \cdot S_r}{\gamma_s} \Rightarrow e = w \cdot \frac{\gamma_s}{\gamma_w \cdot S_r}, \text{ si le sol}$$

$$\text{est saturé } (S_r = 1) \Rightarrow e = w \cdot \frac{\gamma_s}{\gamma_w}$$

$$\diamond \gamma_d = \frac{W_s}{V_t} = \frac{\gamma_s}{1+e}$$

De la même manière on aura plusieurs relations utiles entre les paramètres physiques du sol:

- $\gamma_h = \gamma_d (1 + w)$
- $\gamma_h = (1 - n)\gamma_s + n \cdot S_r \cdot \gamma_w$
- $\gamma_h = \gamma_d + S_r + n$
- $\gamma_s = \gamma_d (1 + e)$
- $\gamma_d = \gamma_s (1 - n)$

- $\gamma_d = \gamma_h / (1 + W)$
- $\gamma_{sat} = \gamma_s / (1 + W) / (1 + e)$
- $\gamma_{sat} = (1 - n)\gamma_s + n \cdot \gamma_w$ (à saturation : $S_r = 1$)
- $\gamma_{sat} = \gamma_d + \left[1 - \frac{\gamma_d}{\gamma_s}\right] \cdot \gamma_w$
- $\gamma' = \gamma_{sat} - \gamma_w = (1 - n)(\gamma_s - \gamma_w)$
- $\gamma' \approx 0,62\gamma_d$
- $\gamma' = (\gamma_s - \gamma_w) / (1 + e)$
- $S_r = (\gamma_s \cdot w) / (\gamma_w \cdot e)$
- $e = (\rho_s \cdot w) / S_r$; si $S_r = 1 \Rightarrow e = \rho_s \cdot w$

I.2.4 Echantillonnage

I.2.4.1 But et principe de l'échantillonnage

Les essais effectués en laboratoire portent nécessairement sur des quantités réduites de matériaux, celles-ci devant permettre de mesurer des paramètres caractéristiques de l'ensemble du matériau dans lequel on a fait le prélèvement. Donc, il faut que l'échantillon utilisé au laboratoire soit représentatif de l'ensemble. Ce problème est complexe à résoudre mais il conditionne en grande partie la fiabilité des résultats obtenus au cours des essais de laboratoire. Le prélèvement d'échantillons se fait en deux temps :

Prélèvement sur le chantier, la carrière ou l'usine d'une quantité de matériaux nettement plus grande que celle qui sera utilisée pour l'essai proprement dit.

Prélèvement au laboratoire de la quantité nécessaire à l'essai et qui soit également représentative de l'échantillon de départ.

I.2.4.2 Prélèvement sur le tas (sables et graviers)

Lorsqu'un matériau granulaire est mis en stock, les gros éléments ont tendance à rouler en bas du tas tandis que le haut est plus riche en élément de faibles diamètres. On prélèvera donc les matériaux en haut, en bas, au milieu et à l'intérieur du tas de granulats, afin d'avoir un échantillon aussi représentatif que possible de l'ensemble. Ces diverses fractions seront mélangées avec soin. Dans le cas des matériaux de carrière, il faudra également prendre en compte l'hétérogénéité des différents bancs rocheux exploités.

I.2.4.3 Echantillonnage en laboratoire

Le passage de l'échantillon total prélevé sur le tas à l'échantillon réduit, nécessaire à l'essai, peut se faire par quartage ou à l'aide d'un échantillonneur. L'échantillon doit être séché à l'étuve à 105°C s'il est exempt de minéraux argileux, ce qui est rare, ou à 60°C dans le cas contraire.

Le quartage : l'échantillon est divisé en quatre parties égales dont on ne retient que la moitié en réunissant deux quarts opposés. Cette sélection est homogénéisée et un nouveau quartage est effectué, l'opération pouvant se répéter trois ou quatre fois. On obtient ainsi un échantillon représentatif du matériau initial (Figure I 9).

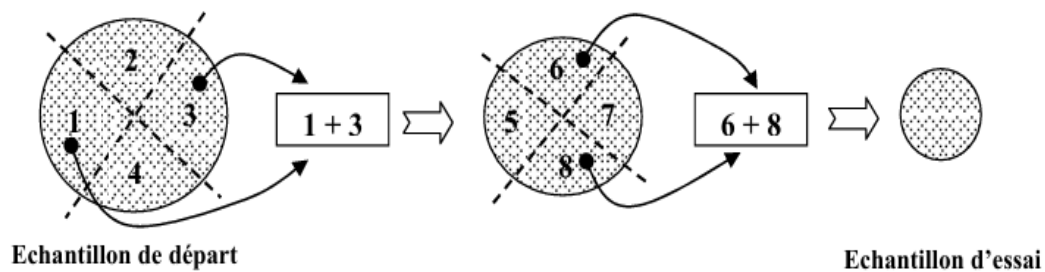


Figure I-9 Le quartage d'un échantillon de sol en laboratoire

L'échantillonneur : cet appareil de laboratoire permet de diviser facilement en deux parties représentatives la totalité d'un échantillon initial, chaque moitié étant recueillie dans bac de manière séparée. La répétition en cascade de cette opération, en retenant à chaque opération le contenu de l'un des bacs, permet d'obtenir, après trois ou quatre opérations identiques, la quantité de matériaux représentative et nécessaire à l'essai envisagé. L'échantillonneur sera choisi de telle manière que son ouverture soit de dimension comparable avec celle des plus gros grains du matériau traité. Le procédé peut être résumé par la Figure I 10. Celle-ci permet de sélectionner une masse (m) à partir d'un prélèvement de masse de ($3m$).

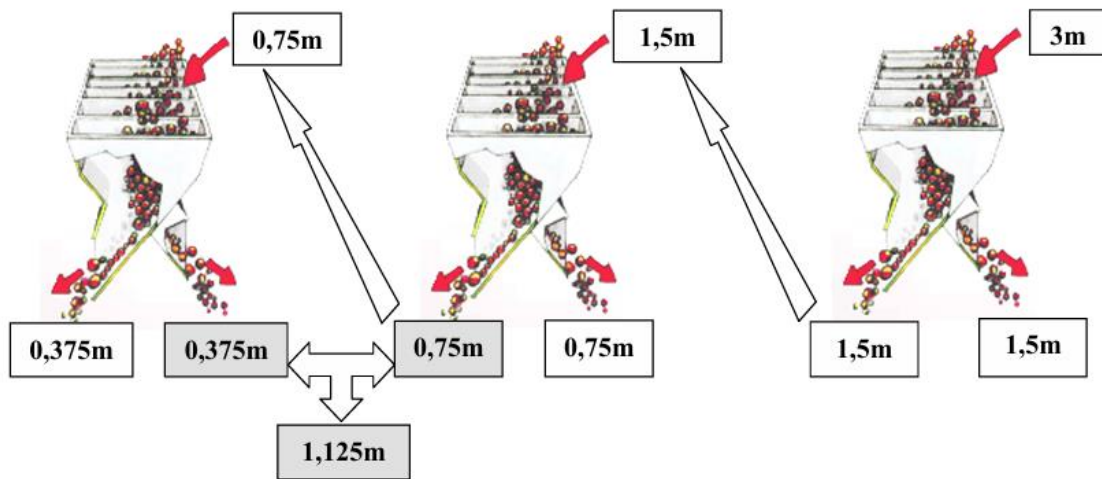


Figure I-10 Le principe d'un échantillonneur

I.2.4.4 .Choix du procédé

Ces deux procédés peuvent être utilisés séparément ou conjointement, en fonction de la quantité nécessaire à l'essai et de la grosseur maximale des grains. Si l'échantillon de départ est d'un volume très important, une ou deux opérations de quartage permettent de diminuer rapidement le volume des matériaux traités ensuite à l'aide de l'échantillonneur on termine l'opération.

I.2.5 Mesures en laboratoire (Essais de bases)

I.2.5.1 .Mesure de la teneur en eau d'un sol

La méthode la plus ancienne et la plus simple pour mesurer la teneur en eau d'un sol consiste à prélever du sol, à le peser, à le dessécher à l'étuve jusqu'à poids constant, et à le peser en suite.

- ✓ La différence des deux pesées donne le poids d'eau cherché (P_w)
- ✓ Rapporté au poids du sol sec P_s (2eme pesée) le poids d'eau donne la teneur en eau de

l'échantillon de sol : $w = (P_w/P_s) \times 100$ en (%).

- ✓ En général on dessèche 24 heures dans une étuve à $100^\circ C \pm (10^\circ C)$.

La méthode par séchage à l'alcool méthylique (alcool à brûler) : un échantillon d'environ 100 gr de sol est arrosé par 50 cm^3 d'alcool que l'on fait brûler. On recommence l'opération sur le même échantillon, avec la même quantité d'alcool. L'échantillon est pesé après chaque combustion.

- ✓ Si l'écart entre le poids n'est pas pratiquement négligeable l'opération est reproduite autant de fois qu'il est nécessaire pour que la différence entre les deux derniers poids le soit (c.à.d. négligeable). Ce qui nous donne (P_s) d'autre part $P_w = [(\text{poids initial de l'échantillon avant l'opération de séchage à l'alcool}) - (\text{poids final après cette dernière qui à donner } P_s)]$

- ✓ On aura donc : $w = (P_w/P_s) \times 100$ en (%).

Remarque : Il est important d'insister sur le fait que les échantillons de sol doivent être désagregés avant leur mise à l'étuve de manière à avoir une dessiccation complète. Si on

élève la température d'étuvage la dessiccation est plus rapide et elle peut ne pas être complète si l'échantillon n'est pas bien désagrégé. Dans certains cas (les tourbes, sols qui contiennent des quantités importantes en matière organiques par exemple) il est recommandé que la température d'étuvage ne dépasse pas 90°C et que la durée d'étuvage soit prolongée.

I.2.5.2 Détermination du poids volumique total γ^t et sec γ^d

Méthode de l'anneau volumétrique : cette méthode est utilisée soit en laboratoire soit in-situ. Le prélèvement s'effectue à l'aide d'un anneau volumétrique (ou carottier) dont les dimensions et les formes sont étudiées de manière à modifier le sol aussi faiblement que possible (Figure I 11). Connaissant le volume intérieur V_t du carottier et son poids vide P_0 , la seule pesée du carottier plein de sol et correctement arasé ($P + P_0$) permet de déterminer le poids volumique total (ou apparent) du sol :

$$\gamma_t = \frac{(P + P_0) - P_0}{V_t} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{La pesée de l'échantillon après séchage à l'étuve donne } P_s \text{ et l'on} \\ \text{obtient ainsi le poids volumique sec : } \gamma_d = \frac{P_s}{V_t} \end{array} \right.$$

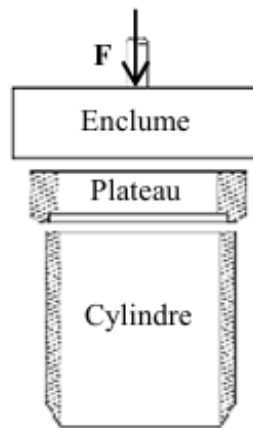


Figure I-11 Vue en coupe de l'outil de l'anneau volumétrique

Méthode au Densitomètre : cette méthode utilisée in-situ, consiste à creuser une cavité en pesant les matériaux extraits P_t et à déterminer le volume de cette cavité V_t occupé par les matériaux extraits, en remplissant cette cavité soit

- **à l'aide de sable de poids spécifique connu γ_s (densimètre à sable)**: on utilise à cet effet une bouteille à sable (Figure I 12) muni d'une ouverture réglable dont on détermine le poids avant P_i et après P_r remplissage de la cavité et du cône de garde. Connaissant le poids constant du sable contenu dans le cône de garde P_c , on calcul aisément le volume de la cavité :

$$V = \frac{P_i - P_r - P_c}{\gamma_s} \quad \text{et avec } V_t \approx V_s(\text{sable}) \Rightarrow \gamma_s = \frac{P_t}{V_t}$$

Les inconvénients majeurs de cet appareil sont : la nécessité de réaliser une surface initiale horizontale avant l'essai ; la possibilité de variation du γ_s du sable suite aux variations d'humidité ; la possibilité de pertes des grains de sable dans les fissures du terrain.

- **à l'aide d'un liquide (densimètre à membrane)**: ce système utilisant un densitomètre à membrane (Figure I 13), permet de remédier aux inconvénients du système précédent et de simplifier les manipulations concernant la détermination du volume, qui sont ramenées à deux lectures du niveau du liquide dans le corps du cylindre dont le fond est constitué par la membrane que l'on applique sur la surface de la cavité en agissant sur le piston à tige gradué. C'est la simple différence des lectures finale et initiale qui fournit le volume V_t de la cavité. La souplesse de la membrane lui permet d'épouser très exactement la forme de la cavité et d'assurer une grande précision à la mesure.

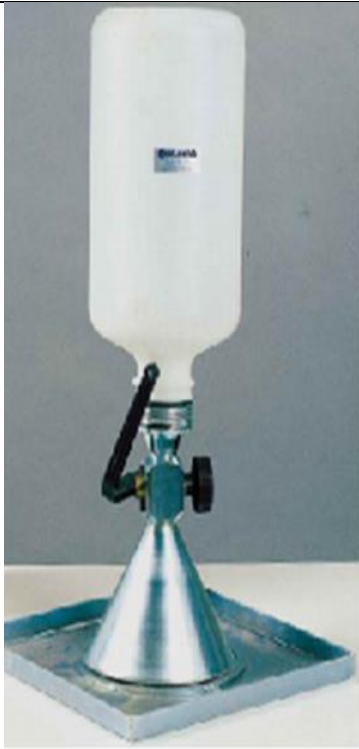


Figure I-12 Densimètre à sable

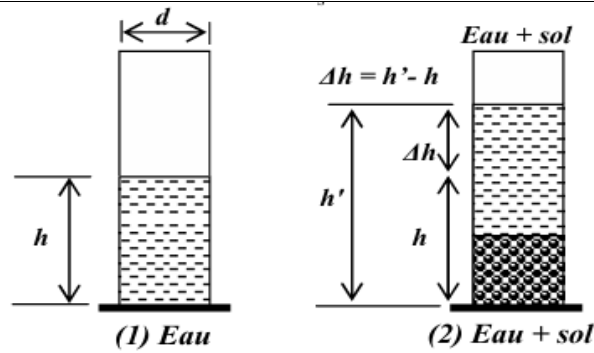


Figure I-13 Densimètre à membrane

I.2.5.3 Détermination du poids volumique des grains solides γ_s

Le poids volumique des grains solides est appelé aussi poids spécifique absolue du sol et peut être défini comme: le poids de l'unité de volume du sol supposé compact (c.à.d. considéré comme un ensemble formant un seul grain). V_s est mesuré à l'aide de l'éprouvette graduée dont le principe est le suivant : on plonge un échantillon de sol de poids P , dont on a déterminé au préalable la teneur en eau naturelle, dans une éprouvette graduée contenant de l'eau distillée sur une hauteur et on mesure son volume par le déplacement du liquide en h' (Figure I 14). Pour P_s voir la mesure de la teneur en eau,

$$\text{alors que } V_s = \left(\pi \frac{d^2}{4} \right) \Delta h \Rightarrow \gamma_s = \frac{P_s}{V_s}$$

Figure I-14 Eprouvette graduée pour la détermination de γ_s

I.2.5.4 Détermination de l'indice des vides d'un sol

Soit V_t le volume d'un échantillon non remanié. Il vient que : $\gamma_h = W_t/V_t$ et :

$\gamma_d = W_s/V_t$ come $e = \frac{V_v}{V_s} = (V_t - V_s)/V_s$ et $V_s = W_s/\gamma_s$ l'indice des vide e est donné par

la relation suivante:

$$e = \frac{V_t - \left(\frac{W_s}{\gamma_s}\right)}{\left(\frac{W_s}{\gamma_s}\right)} = \frac{V_t}{\left(\frac{W_s}{\gamma_s}\right)} - 1 \quad (\text{I.11})$$

Tableau I-1 :- Caractéristiques physiques des sols (d'après Terzaghi et Peck)

sol	Porosité $n(\%)$	Indice des vides e	Teneur en eau $w (\%)$	Densité ρ_d	Densité ρ_h
Sable à granulométrie serrée (état peu compact)	46	0,85	32	1,4 3	1,89
Sable à granulométrie serrée (état peu compact)	34	0,51	19	1,7 5	2,09
Sable à granulométrie étalée (état peu compact)	40	0,67	25	1,5 9	1,99
Sable à granulométrie étalée (état compact)	30	0,43	16	1,8 6	2,16
Argile molle	55	1,2	45	-	1,77
Argile raide	37	0,6	22	-	2,07
Bentonite molle	84	5,2	194	-	1,27

I.2.6 Contraintes dans le sol

I.2.6.1 Définition des contraintes dans un sol

Contrainte totale : soit une section unitaire S dans un massif de sol. La résultante des forces qui s'exercent sur cette section sous l'action des forces extérieures et du poids propre est la **contrainte totale** $\bar{F}$. On peut la décomposer en une **contrainte normale** $\bar{S}$ (normale au plan de la section S) et une **contrainte tangentielle** $\bar{\tau}$ (agissant dans le plan de la section S),

Le point d'application d'une force dans une masse de sol pourrait tout aussi bien être une particule ou un pore. Il est évident qu'un pore ne peut supporter de charge tandis que si la force s'applique directement sur une particule, les contraintes peuvent être très élevées. Donc, lorsqu'on parle de contraintes dans un contexte géotechnique, on désigne plutôt une force par unité d'aire, ou l'aire considérée correspond à l'aire totale ; cette aire contient à la fois les contacts grains à grains et les pores

Contrainte effective : c'est la contrainte transmise au squelette des grains solides par contact inter-granulaire. La notion des contraintes effectives a été développée par le professeur Karl Terzaghi en 1923 (postulat de Terzaghi). Les symboles correspondants sont affectés par l'indice 'prime' ce qui donne : la contrainte normale σ' et la contrainte tangentielle τ' . [12]

Pression interstitielle : c'est la pression de l'eau occupant les vides ou les interstices entre les grains solides d'un sol. En d'autres termes, c'est la pression existant dans l'eau interstitielle. Il s'agit d'une pression du type hydrostatique, c'est-à-dire normale à la section considérée. La pression interstitielle est désignée par le symbole μ

I.2.6.2 Tenseur des contraintes (cercle de Mohr)

La contrainte en un point quelconque M peut être vectoriellement décomposée en une contrainte perpendiculaire à la surface (SS') comme montré dans la Figure I 15, notée σ et appelée contrainte normale, et une contrainte parallèle à la surface (SS'), notée τ et appelée contrainte tangentielle.

$$\bar{F} = \bar{S} + \bar{\tau} \quad (I.12)$$

Si on change l'orientation de la facette (SS') passant par le point M, on obtient une nouvelle contrainte 1 au point M et donc de nouvelle valeur de contraintes comme montré sur la Figure I 15

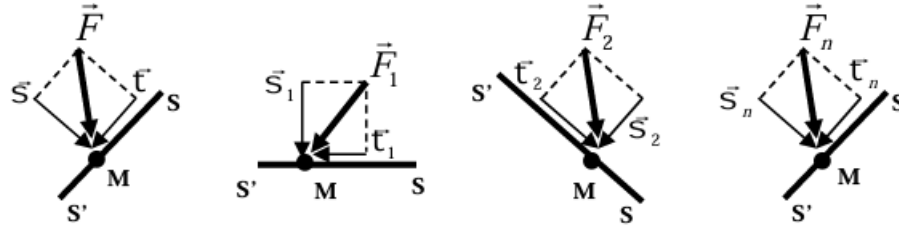


Figure I-15 État de contrainte lorsqu'une facette SS' tourne autour d'un point M

On appelle représentation de **Mohr (1)**, une représentation graphique qui permet de représenter tous les vecteurs des contraintes s'exerçant en un point M selon les différentes facettes dans un système d'axe (σ, τ) des composantes normales et tangentielles de chaque contrainte. Dans un graphique ayant σ pour abscisse et τ pour ordonnée, chaque contrainte peut être représentée par un point N_i (Figure I 16).

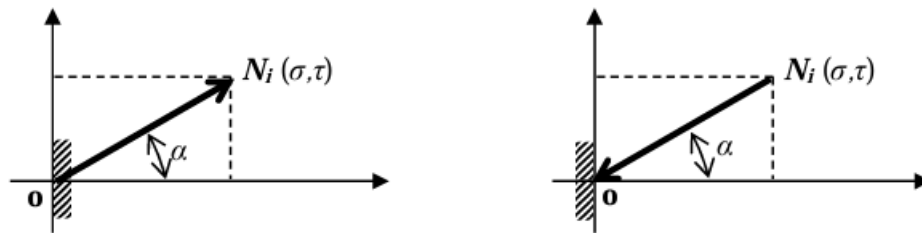


Figure I-16 Représentation de Mohr

On a vu qu'une contrainte pouvait être représentée par un point dans le plan (σ, τ) , comme illustré sur la Figure I 16. Les points représentatifs des contraintes formant le tenseur vont donc occuper un certain domaine du plan (σ, τ) puisqu'ils dépendent de deux paramètres. C'est là l'intérêt de la représentation de Mohr : les points représentatifs des contraintes qui s'exercent sur **les différentes facettes sont rassemblés sur une même figure plane** (Figure I 17).

Mohr a montré que ce domaine était limité par trois cercles tangents centrés sur l'axe des σ . Ces trois cercles sont déterminés par les trois contraintes principales σ_1, σ_2 et σ_3 représentées par les points N_1, N_2 et N_3 . Le plus grand des trois cercles porte le nom de « cercle de Mohr », on remarquera qu'il ne dépend pas de la contrainte principale

intermédiaire σ_2 , mais seulement des contraintes principales mineure et majeure : σ_3 et σ_1 .

On peut le caractériser également par l'abscisse σ_m de son centre et par son rayon τ_m .

Remarque : par souci de simplification très souvent, les points N1, N2 et N3 sont représentés respectivement par σ_1, σ_2 et σ_3 . Cela ne présente aucun inconvénient pourvu qu'on garde bien présente à l'esprit la différence entre les « points » σ_1, σ_2 et σ_3 et les contraintes correspondantes.

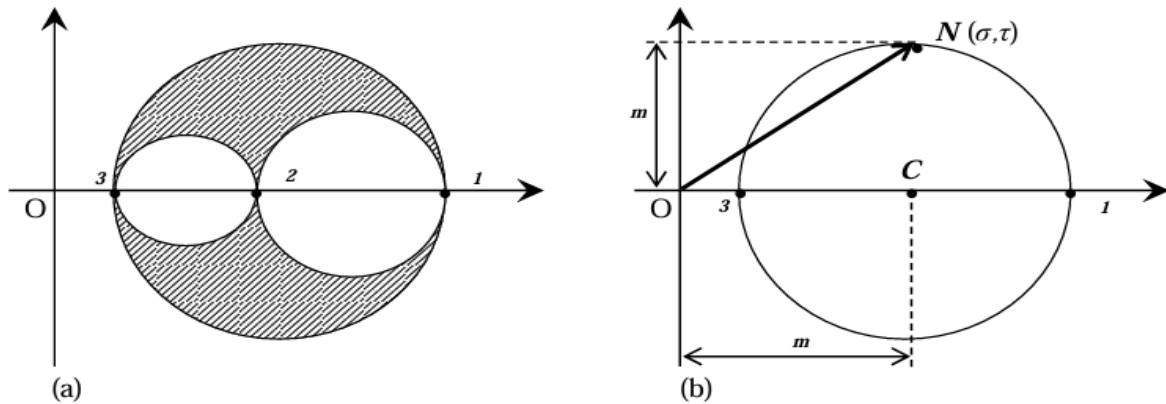


Figure I-17 Caractéristiques du cercle de Mohr

De la représentation graphique de Mohr nous définissons ce qui suit :

- La contrainte moyenne : $p = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / 3$ (I.13)

Cette contrainte moyenne est aussi désignée contrainte normale octaédrique σ_{oct} .

- Le déviateur des contraintes : $q = \sigma_1 - \sigma_3$ (I.14)

Ce déviateur des contraintes correspond au diamètre du cercle de Mohr.

- Les paramètres de **Lambe** :

$$s = \tau_m = (\sigma_1 + \sigma_3) / 2 \text{ (C'est la position du centre du cercle de Mohr)} \quad (\text{I.15})$$

$$t = \tau_m = (\sigma_1 - \sigma_3) / 2 \text{ (C'est le rayon du cercle de Mohr)}$$

Il faut noter que le cercle de Mohr est entièrement défini par ces deux paramètres.

Remarque : pour les études en contraintes effectives, les notions de $\sigma_1, \sigma_3, p, q, \tau_m, \sigma_m$ sont remplacées par $\sigma'_1, \sigma'_3, p', q', \tau'_m, \sigma'_m$.

I.2.6.3 Contraintes dans les sols saturés

I.2.6.3.1 Contraintes normales

La notion des contraintes normales totale et effective est représentée par le model physique de la Figure 2.6. Imaginons un cylindre de sol saturé qui repose sur une toile de tamis tendue à proximité immédiate du fond d'un réservoir de section A (Figure I 18). L'eau interstitielle est libre et le niveau de la nappe correspond à celui de la surface du sol. Par ailleurs, il est supposé que le poids du récipient et Δh sont négligeables.

(a) Si l'ensemble est posé sur une balance, le poids mesuré sera : $P = A \cdot h \cdot \gamma_{sat}$ et la

contrainte sur le fond sera **la contrainte normale totale** : $\sigma = P / A$, c'est-à-dire :

$\sigma = h \cdot \gamma_{sat}$ c'est le poids de la colonne de sol saturé. Par définition, **la contrainte**

normale totale σ est la force par unité de surface transmise dans la direction normale à un plan dans le sol qui est supposé être un matériau solide.

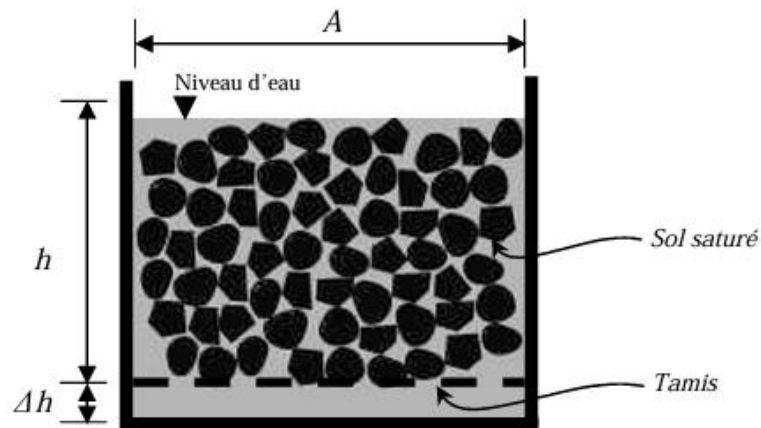


Figure I-18 . Contraintes totale et effective dans un sol saturé

(b) Dans la même Figure I 18, supposons qu'un dispositif permette de ne mesurer que la

résultante verticale P' des forces appliquées sur le tamis. Sachant que la pression de

l'eau est en équilibre du fait qu'elle est exercée sur les deux faces du tamis, alors P' sera

donnée par : $P' = A \cdot h \cdot \gamma'$ et la contrainte sur le tamis sera la contrainte effective

$\sigma' = P'/A$, c'est-à-dire $\sigma' = h \cdot \gamma'$ (c'est le poids de la colonne de sol déjaugé).

(c) La pression intertielle au niveau du fond du réservoir est : $\mu = \gamma_w \cdot h$. La pression

interstitielle agit d'une façon hydrostatique sur la surface des particules solides du sol sans changement de volume de ces dernières.

En comparant (a), (b) et (c) il apparaît que $\sigma = h \cdot \gamma_{sat}$ et comme $\gamma_{sat} = \gamma' + \gamma_w$, la contrainte normale totale sera : $\sigma = h (\gamma' + \gamma_w) = h \cdot \gamma' + h \cdot \gamma_w$; finalement :

$$\sigma = \sigma' + \mu \quad (I.16)$$

I.2.6.3.2 Contraintes tangentielles

La résistance de l'eau au cisaillement étant nulle, les phénomènes de viscosité mis à part, on a

$$\tau = \tau' \quad (I.17)$$

I.2.6.3.3 Postulat de Terzaghi (contrainte effective)

A côté des contraintes totales dont on a parlé plus haut, on sait définir la pression du fluide (l'air dans le cas du milieu sec, l'eau dans l'autre cas). L'idée fondamentale de Terzaghi (2) consiste à postuler l'existence d'un nouveau tenseur de contraintes : le tenseur des contraintes effectives qui gouverne à lui seul le comportement du squelette granulaire et du sol, c'est pourquoi d'ailleurs on qualifie ces contraintes d'effectives (c'est le principe des contraintes effectives).[12]

Terzaghi a donné ensuite la manière de calculer la valeur des contraintes effectives. Si l'on appelle σ et τ les composantes normale et tangentielle de la contrainte totale en un point sur

une facette quelconque, σ' et τ' les composantes de la contrainte effective et μ la pression interstitielle du fluide (aire ou eau), on a.

$$\sigma' = \sigma - \mu \quad (\text{I.18})$$

$$\tau' = \tau \quad (\text{I.19})$$

Remarque : lorsque les sols sont « partiellement saturés » la répartition des contraintes entre les phases (solide, eau et air) est plus complexe. Afin d'étendre le principe des contraintes effectives aux sols partiellement saturés, Bishop (1963) [13] a établi la formule suivante :

$$\sigma = \sigma' + \mu_a - \chi (\mu_a - \mu_w) \quad (\text{I.20})$$

Avec:

μ_a : Pression de l'aire interstitielle,

μ_w : Pression de l'eau interstitielle,

χ : Coefficient compris entre 0 et 1.

Pour les sols saturés : $\chi = 1$, donc : $\sigma = \sigma' + \mu_w$

Pour un sol parfaitement sec : $\chi = 0$; donc : $\sigma = \sigma' + \mu_a$

Dès que le sol n'est plus saturé la valeur de χ décroît rapidement.

I.2.6.3.4 Sol inondé à surface horizontale

On va maintenant appliquer cette notion de contraintes effectives à des cas simples de sols saturés. On supposera d'abord que l'eau est en équilibre, la répartition de la pression est donc hydrostatique. On considère une facette horizontale située à une profondeur Z dans le sol, la surface libre de la nappe d'eau se trouvant à une distance h_w au-dessus du sol comme le montre la Figure I 19. Costet et Sanglerat (1981)[14] et McCarthy (2007)[15] montrent qu'à partir de la Figure I 19 on a :

$$\sigma(M) = \gamma_w \cdot h_w + \gamma_{sat} Z \quad (\text{I.21})$$

Où γ_{sat} est le poids volumique du sol saturé, la pression interstitielle est :

$$\sigma_{(M)} = \gamma_w(h_w + Z) \quad (I.22)$$

et donc, la contrainte effective sera : $\sigma'_{(M)} = \sigma_{(M)} - \mu_{(M)} = (\gamma_{sat} - \gamma_w)Z = \gamma' \cdot Z$

Du point de vue des contraintes effectives, le sol se comporte donc comme s'il n'y avait pas d'eau à condition de remplacer le poids volumique sec ou saturé du sol par **le poids volumique déjaugé γ'** . Cette démonstration montre que la contrainte effective σ' est indépendante de la hauteur de la surface libre de l'eau h_w .

Remarque : il est incorrect de parler de la contrainte au point M car il en existe une infinité correspondant à l'infinité de surfaces ou facettes passant par le point M.

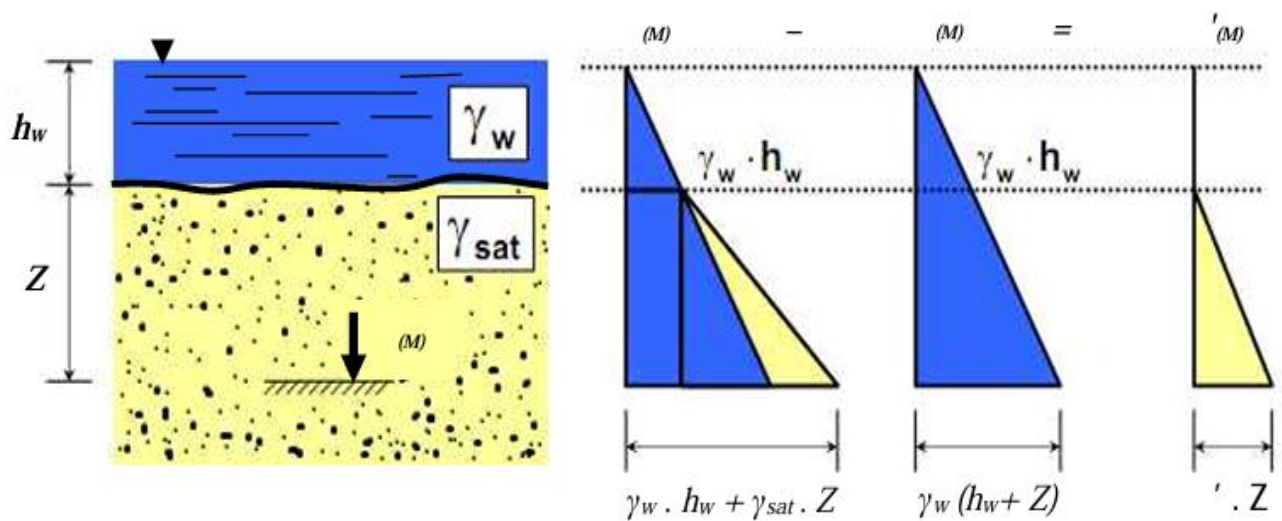


Figure I-19 . Sol inondé à surface horizontale

I.2.6.4 État de contrainte d'un sol sous son poids propre

Considérons un massif de sol semi-indéfini à surface horizontale et n'étant soumis à aucune force extérieure. Soit σ_v la contrainte verticale sur une facette horizontale en un point quelconque M du milieu et σ_h la contrainte horizontale sur un côté vertical de cette facette (Figure I 20).

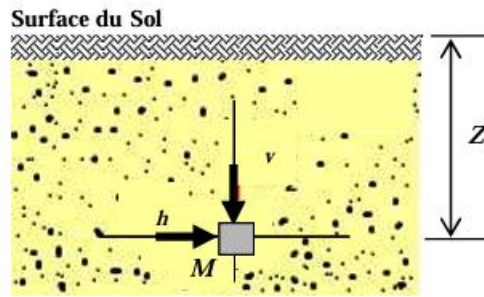


Figure I-20 . Contraintes principales dans un sol à surface horizontale

- **Calcul de la contrainte verticale σ_v et effective σ'_v**

La composante verticale de la contrainte due au poids propre du sol est égale à :

$$\sigma_v = \gamma \cdot Z \quad (2.23)$$

- Où **Z** désigne la profondeur à laquelle la contrainte verticale est calculée et γ le poids volumique apparent du sol en question.

Pour un sol multicouche la contrainte verticale est calculée comme suit :

$$\sigma_v = \sum \gamma_i \cdot h_i \quad (2.24)$$

Où h_i est γ_i sont respectivement l'épaisseur et le poids volumique apparent de la couche i

- Dans le cas d'une nappe phréatique située à la profondeur **H** avec ($H < Z$), comme illustré sur la Figure I 21; la contrainte verticale sera calculée de la manière suivante :

$$\sigma_v = \gamma_h \cdot H + \gamma_{sat} (Z - H) \quad (2.25)$$

$$\sigma'_v = \gamma_h \cdot H + \gamma' (Z - H) \quad (2.26)$$

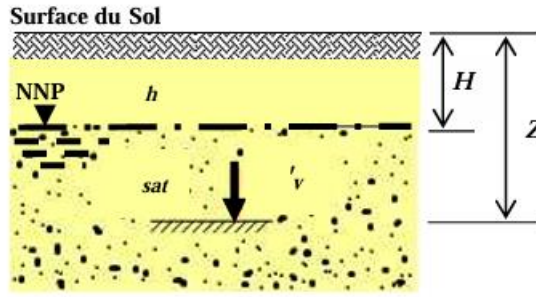


Figure I-21 . Contrainte sous une nappe phréatique

I.2.7 Charges de surface en mécanique des sols

I.2.7.1 Distribution des contraintes en profondeur sous l'effet des charges appliquées en surface

Cas des charges ponctuelles

- En 1885 **Boussinesq** a étudié la répartition des contraintes dans un massif élastique semi-infini homogène et isotrope sous l'action d'une force ponctuelle Q appliquée à la surface du massif. Il apparaît, entre autres, que la contrainte sur une facette horizontale, en un point M situé à la profondeur Z est orientée selon (OM) comme illustré sur la Figure I 22 et que l'accroissement de la contrainte verticale $\Delta\sigma_z$ par rapport à l'état de contrainte initial régnant dans le sol est donné par la formule classique de Boussinesq [1]

$$\Delta\sigma_z = 3Q \cdot Z^3 / 2\pi(r^2 + Z^2)^{\frac{5}{2}} = 3Q/2\pi \cdot Z^2 [1 / [(1 + (r/Z)^2)^{\frac{5}{2}}]] \quad (I.27)$$

$$\Delta\sigma_z = Q/Z^2 \cdot I_B \quad (I.28)$$

La formule (3.1) peut s'écrire aussi sous la forme suivante :

$$\Delta\sigma_z = 3Q \cdot \cos^5 \theta / 2\pi \cdot Z^2 \quad (I.29)$$

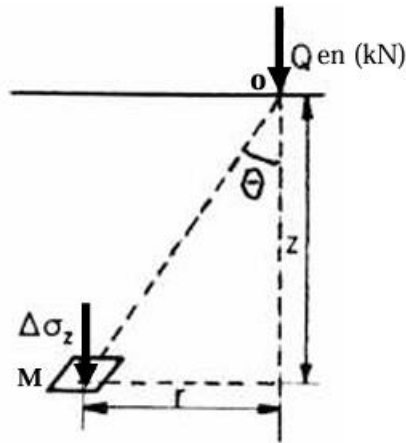


Figure I-22 . Contrainte due à une charge ponctuelle- solution de Boussinesq (McCarthy 2007 modifiée)

La Figure I 23 fourni les courbes d'égale contrainte verticale appelées aussi bulbes des contraintes ou isobares de pression. En remarque que, plus la profondeur Z augmente, plus l'intensité de la contrainte diminue, mais plus la zone influencée s'élargit.

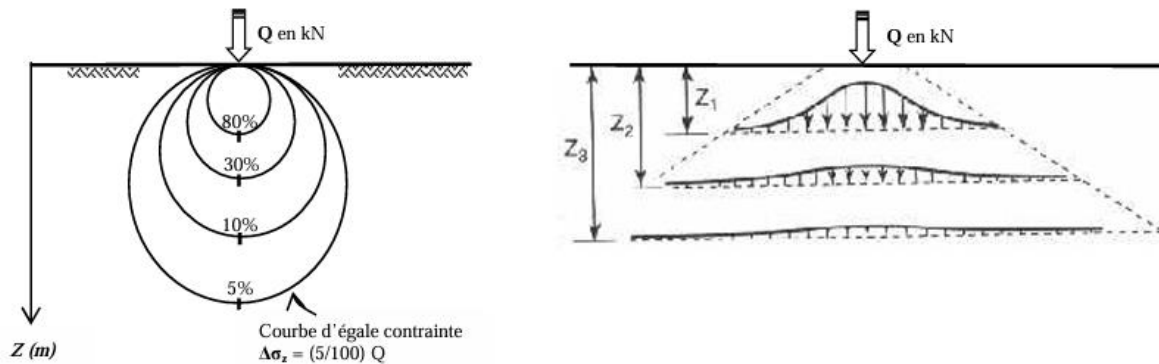


Figure I-23 . Distribution des contraintes d'après Boussinesq

- Certains dépôts de sols sédimentaires sont constitués d'une alternance de couches minces de sol sableux (grossier, matériau relativement incompressible) et des sols limono-argileux à grains fins (matériau compressible) ; tels que les dépôts d'argiles stratifiés. Dans ce cas de figure, l'équation de **Westergaard** (1938) [16] est recommandée pour évaluer l'accroissement de la contrainte verticale en profondeur sous l'effet des charges ponctuelles appliquées en surface. Dans cette situation, Westergaard suppose des couches minces d'un matériau homogène et anisotrope prises en sandwich entre des feuilles espacées étroitement, infiniment minces de

matériau rigide qui permettrait la compression, mais aucune déformation latérale.

Pour le cas où le coefficient de Poisson est nul, l'équation de l'accroissement de la

contrainte verticale $\Delta\sigma_z$ résultant de l'application d'une charge concentrée en surface

est réduite à (McCarthy 2007) :

$$\Delta\sigma_z = Q/\pi \cdot Z^2 [1 + 2(r/Z)^2]^{3/2} \quad (I.30)$$

$$\Delta\sigma_z = Q/Z^2 \cdot I_w \quad (I.31)$$

Où $I_w = 1/\pi \cdot [1 + 2(r/Z)^2]^{3/2}$ est le coefficient d'influence de Westergaard.

Les termes Q , r et Z sont tels que définis pour l'équation de Boussinesq dans la Figure I 22.

Dans le cas des charges ponctuelles, le déplacement élastique vertical Δ_z est calculé comme

suit (Budhu2007) [17]:

$$\Delta_z = \frac{Q(1+n)}{2p \cdot E \cdot Z \left[\left(\frac{r}{Z} \right)^2 \right]^{1/2}} \left[2(1-n) + \frac{1}{1 + \left(\frac{r}{Z} \right)^2} \right] \quad (I.32)$$

Où ν et E sont respectivement le coefficient de Poisson et le module de Young du sol.

Cas des charges linéaires

En se référant à la Figure I 24, l'accroissement de contrainte due à une charge linéaire,

Q (force /unité de longueur), est donné par la relation suivante:

$$\Delta\sigma_z = 2Q \cdot Z^3 / \pi (x^2 + Z^2)^2 \quad (I.33)$$

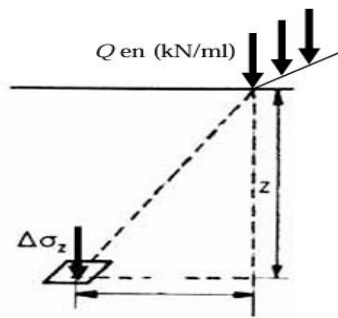


Figure I-24 Contrainte due à une charge linéaire (McCarthy 2007 modifiée)

Cas des charges uniformément répartis

- **Cas d'une charge uniforme sur une surface carrée, rectangulaire ou circulaire**

Dans la pratique de la construction, la situation d'une charge ponctuelle concentrée est rarement rencontrée. Plus couramment, les charges des ouvrages sont transmises par des fondations ou semelles qui couvrent une superficie finie (fondations carrées, rectangulaires ou circulaires). Dans d'autre cas, la nature de l'ouvrage lui-même impose directement le chargement sur une surface finie (exemple des ouvrages en terre tels que les barrages et les digues).

Il s'agit de connaître la distribution de $\Delta\sigma_z$ avec la profondeur par rapport à l'état de contrainte initial régnant dans le sol, apporté par une contrainte q uniformément réparti appliquée en surface. Toutes les solutions couramment utilisées ont été obtenues par intégration de la formule classique de Boussinesq ou de celle de Westergaard, avec l'hypothèse que le chargement sur des incréments infiniment petits de la surface de la fondation peut être supposé comme charge ponctuelle.

Les courbes d'égale contrainte verticale (appelées aussi isobares de pression) pour des fondations carrées, rectangulaires ou circulaires peuvent facilement être utilisées pour déterminer la pression verticale $\Delta\sigma_z$ à toute profondeur en dessous de la base d'une fondation. La profondeur Z à partir de la surface du sol, et la distance r (ou x) du centre de la fondation sont exprimées en fonction de la largeur de la fondation B . Dans le cas d'une fondation circulaire B représente le diamètre. Les isobares de pression ci-dessous sont données en fonction de l'équation de Boussinesq ou de celle de Westergaard. Les solutions les plus utilisées pour les fondations superficielles sont les suivantes :

- **Contraintes sous une fondation filante, carrée ou circulaire uniformément chargée** d'après l'équation de Boussinesq (Figure I 25).

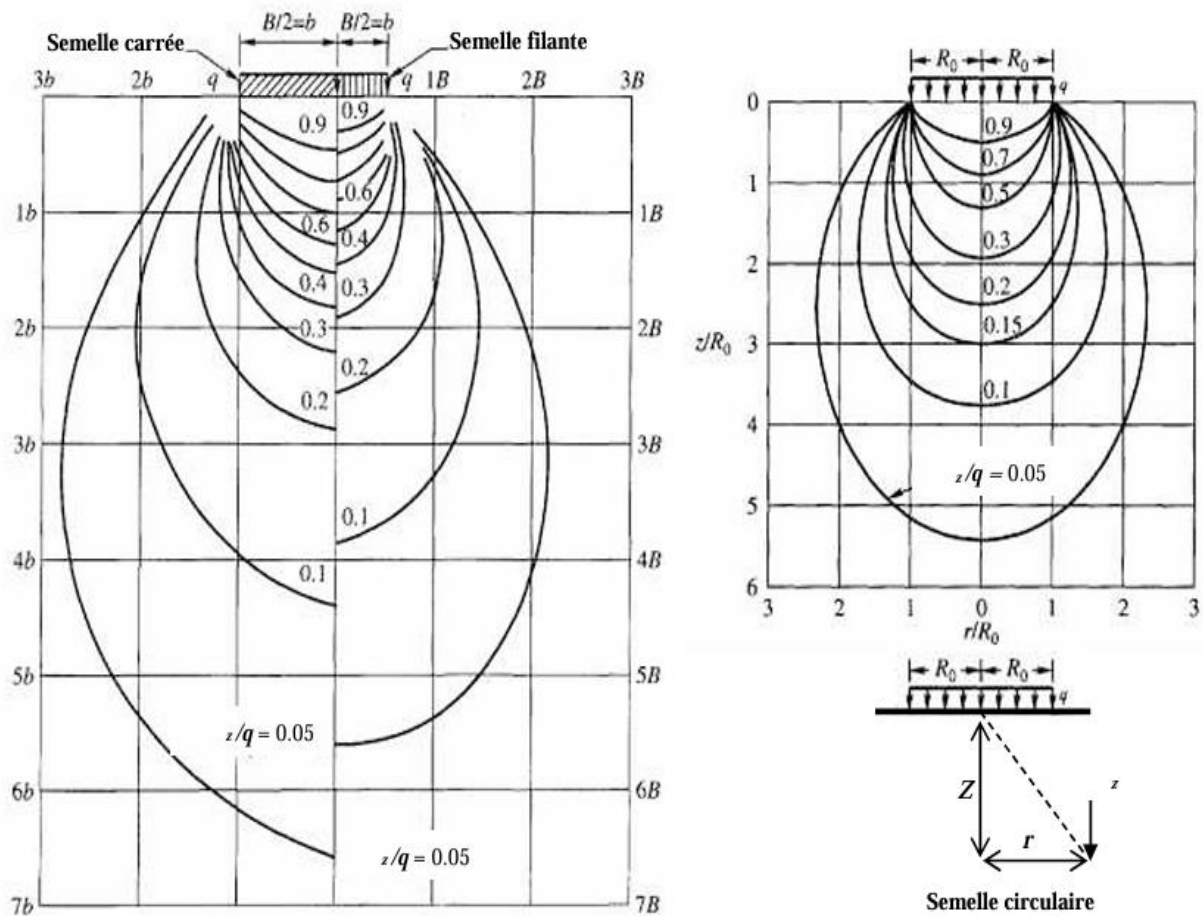


Figure I-25 Courbes d'égales contraintes verticales $\Delta\sigma_z$ sous une fondation filante, carrée ou circulaire, d'après l'équation de Boussinesq

- - Contraintes sous une fondation filante ou carrée uniformément chargée d'après l'équation de **Westergaard** (Figure I 26)

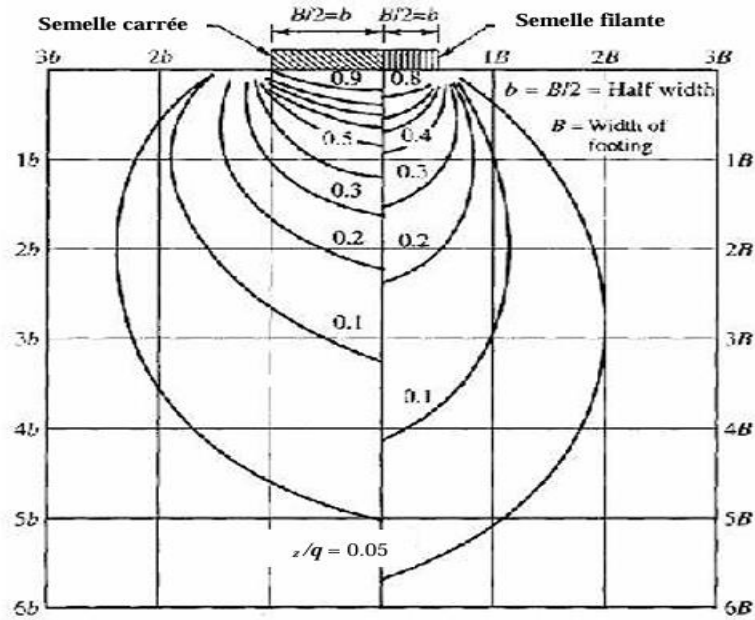


Figure I-26 Courbes d'égales contraintes verticales $\Delta\sigma_z$ sous une fondation filante ou carrée, d'après l'équation de Westergaard

- Contraintes sous une fondation circulaire uniformément chargée (Figure I 27).

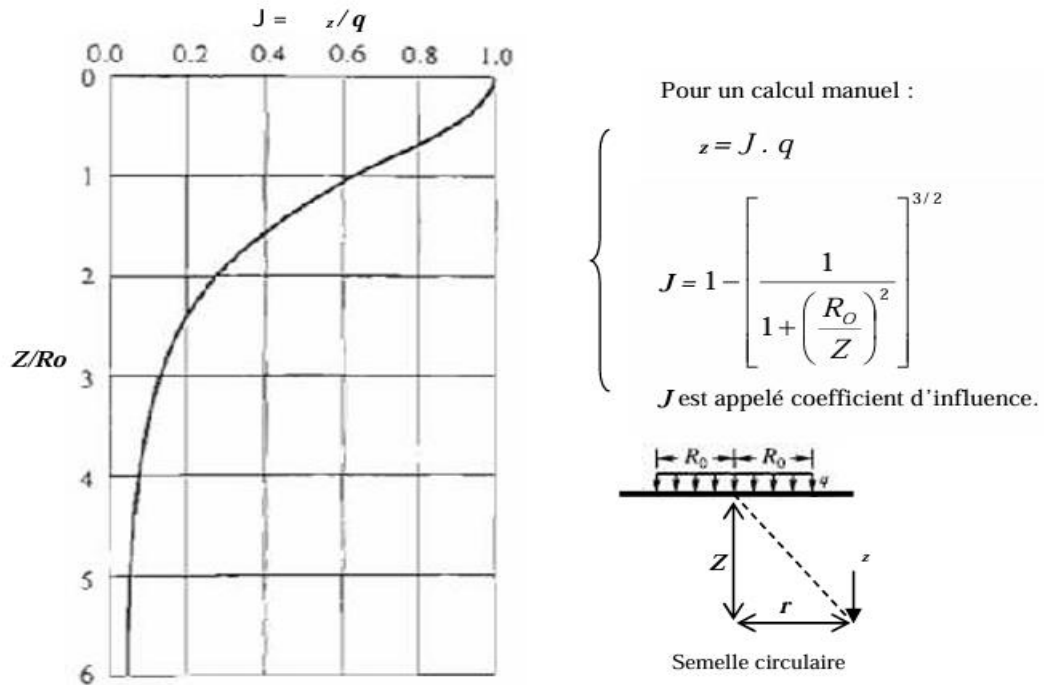


Figure I-27 Variation du coefficient d'influence J en fonction de Z/R_0 sous l'axe d'une fondation circulaire uniformément chargée par la contrainte q

• Méthode approximative pour une charge de forme rectangulaire

Dans certains cas, il peut être suffisant de se servir d'une méthode approchée consistant à supposer une diffusion en profondeur de la contrainte uniforme q suivant une pente de 2 en verticale pour 1 en horizontale. Cette méthode est parfois appelée la **méthode 2 pour 1**. Il s'agit d'une méthode empirique basée sur l'hypothèse que la surface sur laquelle agit la sollicitation augmente de façon systématique avec la profondeur (Holtz et Kovacs 1991). La même charge étant réparti sur une aire croissante, alors la contrainte unitaire résultante diminue avec la profondeur comme l'indique la Figure I-28

À la profondeur Z , l'accroissement de la contrainte $\Delta\sigma_z$ sous une fondation rectangulaire uniformément chargée de dimension $L \times B$ est alors estimé comme suit (Holtz et Kovacs 1999)[18] :

$$\Delta\sigma_z = q \cdot L \cdot B / (L + Z)(B + Z) \quad (\text{I.34})$$

Par analogie, dans le cas d'une semelle filante de largeur B , à la profondeur Z , la largeur de l'aire de répartition de la contrainte q est égale à $(B + Z)$ pour une longueur unitaire de $1m$ linéaire et l'accroissement de la contrainte $\Delta\sigma_z$ correspond à :

$$\Delta\sigma_z = q \cdot B(1m) / (B + Z) \cdot (1m) \quad (\text{I.35})$$

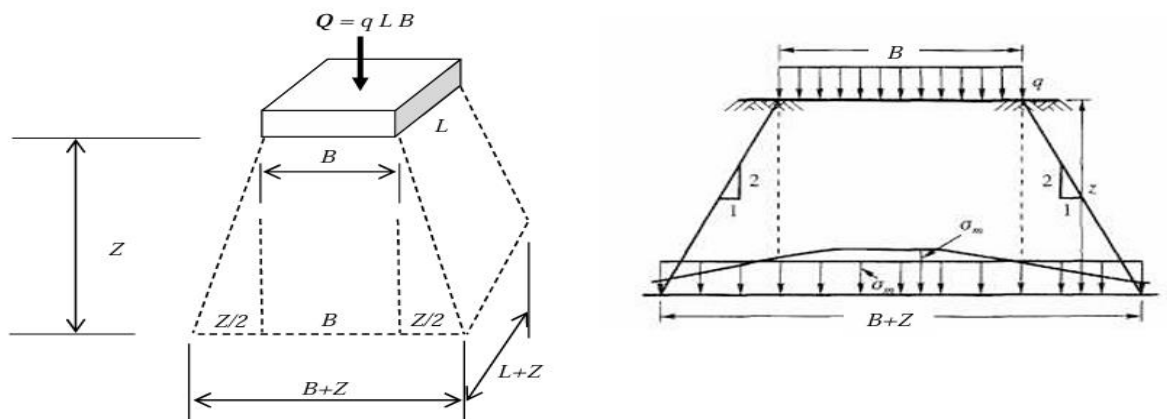


Figure I-28. Méthode 2:1 pour la répartition des contraintes verticales avec la profondeur sous une fondation rectangulaire uniformément chargée

- **Cas d'un chargement de forme trapézoïdal**

La distribution des contraintes en profondeur sous l'effet d'un chargement de forme trapézoïdale représente aussi une intégration des équations de Boussinesq. Ce type de chargement correspond à celui produit par un remblai de grande longueur tel qu'un remblai routier. Le coefficient d'influence I_z est exprimé en fonction des dimensions du remblai ***a et b*** définies sur la Figure I 29. L'accroissement de la contrainte **sous l'axe** pour **la moitié du remblai** à une profondeur ***Z*** est calculé par la formule suivante :

$$\Delta\sigma_z = q \cdot I_z \quad (I.36)$$

Avec I_z le coefficient d'influence de la contrainte déterminé par l'abaque de la Figure I 29. La valeur de la contrainte ***q*** à retenir est calculée à partir de la hauteur de remblai et de son poids volumique apparent.

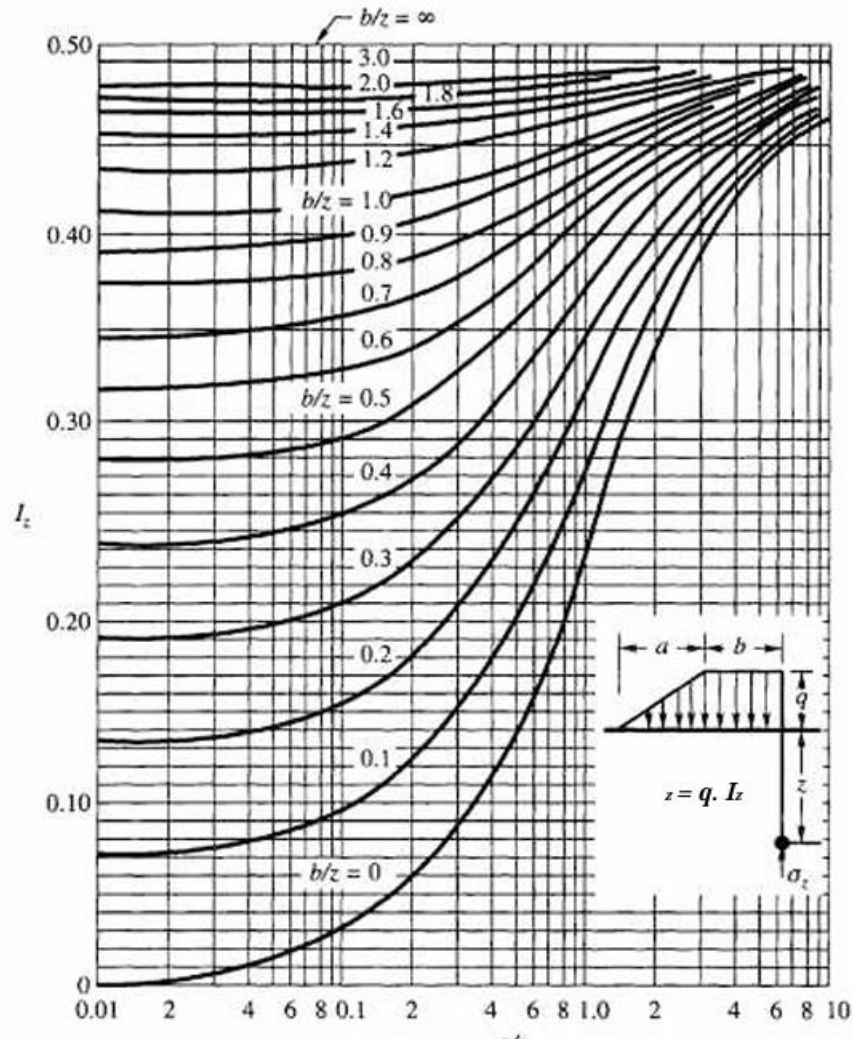


Figure I-29 Valeurs des coefficients d'influences I_z sous un chargement demi-trapézoïdal de grande longueur, d'après (l'US Navy 1971) et [19] (Osterberg 1957)[20]

I.2.7.2 Quelques notions de déformations des sols

Tassements des sols

Lorsqu'un sol est soumis à des surcharges t'elles que celles transmises par les fondations d'une structure, une digue ou un remblai, etc., il se produit des déformations dans le milieu. Comme ces surcharges sont le plus souvent verticales, ces déformations sont particulièrement marquées dans la direction même des forces appliquées qui s'ajoutent à la

pesanteur. Les déformations verticales en surface qui résulte de ces sollicitations sont appelées tassements.

Le tassement total S_t d'un sol sous une fondation est la résultante de trois composantes :

Avec

S_i : Le tassement immédiat ou instantané

S_c : Le tassement de consolidation,

S_s : Le tassement secondaire.

Consolidation des sols :

En **milieu complètement saturé**, après un chargement rapide, c'est l'eau même qui prend tout l'effort. Cette eau se met en mouvement conformément à la loi de Darcy et, dans la transmission des charges, les grains se substituent progressivement à l'eau qui s'écoule à une vitesse fonction de la perméabilité du milieu. Au bout d'un certain temps, toutes les charges se transmettent directement de grain à grain, l'eau interstitielle a repris en chaque point la pression initiale qui existait avant la mise en charge du milieu. On dit alors que le milieu est **consolidé** sous l'action des forces extérieures considérées. L'équilibre final en milieu saturé se produit au bout d'un certain temps, qui peut varier de quelques secondes ou minutes dans les milieux sablo-graveleux très perméables, à plusieurs années ou dizaines d'années dans les argiles très peu perméables (Costet et Sanglerat 1981)[21]. Par définition, **le tassement de consolidation** est le déplacement vertical de la surface du sol correspondant à un changement de volume à n'importe quel stade du processus de consolidation (Chelghoum 2006a)[22].

Gonflement et retrait des sols argileux :

En dehors du phénomène de tassement, certains sols argileux peuvent subir des variations de volume importantes, provoquées soit par un gonflement, soit par un retrait dus à une modification généralement lente de l'état d'humidité du terrain naturel au voisinage immédiat de la construction. Ces phénomènes sont particulièrement sensibles dans certains

pays et régions à climat sec, aride ou désertique. Dans le cas des ouvrages projetés sur des sols gonflants, l'ingénieur doit distinguer les sols sur consolidés des sols normalement consolidés [21].

- Gonflement des sols sur consolidés : une forte sur consolidation peut être provoquée par une cimentation des grains (dans ce cas il n'y a pas de risque de gonflement) soit par une succion élevée de l'eau interstitielle. La succion correspond à une pression interstitielle négative. L'équation classique

$$(\sigma' = \sigma - \mu)$$

montre que l'apparition d'un état de succion ($\Delta\mu$ négative)

correspond à une augmentation de la pression effective $\Delta\sigma'$ selon un tenseur sphérique, c'est-à-dire à une sur consolidation. Dans le cas d'un sol à succion élevée contenant des argiles actives, telles que la montmorillonite, une arrivée d'eau provoque un **gonflement** par élimination de cette pression de sur consolidation.

- **Retrait et gonflement des sols normalement consolidés** : le cas des sols argileux saturés normalement consolidés dans lesquels la pression interstitielle est voisine de zéro est très différent des sols sur consolidés. Si l'on provoque une succion dans un tel échantillon, il se produit un phénomène de consolidation par expulsion d'eau. Le volume du sol diminue, il y a donc **retrait**. Parallèlement il se produit une augmentation de la pression effective. Un tel état de succion dans les couches superficielles peut être provoqué soit par des racines des arbres qui absorbent souvent un volume d'eau important, soit par l'application d'un gradient thermique (par exemple, près des chaufferies ou de certaines parties d'usines qui génèrent de la chaleur). Naturellement, ces sols lorsqu'ils se réhydratent, soit sous l'action des intempéries, soit, accidentellement, lors de fuites de canalisations d'eau, sont susceptible de **gonfler**.

I.3 Consolidation et calcul pratique des tassements

I.3.1 Définition de la consolidation des sols

La **consolidation** est le processus par lequel un sol saturé en eau subit une diminution de volume due à l'évacuation de l'eau interstitielle sous l'effet d'une surcharge. Elle est particulièrement importante pour les sols fins comme les **argiles**, où le drainage est lent. Le **tassement** est le déplacement vertical vers le bas d'un sol sous une charge. En ingénierie géotechnique, il est essentiel de **prédire les tassements** pour assurer la stabilité des ouvrages.

I.3.2 Théorie de la consolidation

I.3.2.1 Consolidation Primaire (Théorie de Terzaghi)

La théorie classique de Terzaghi (1925)[23] considère la consolidation dans un sol **saturé, homogène et isotrope**, soumis à une surcharge verticale. Elle repose sur :

- L'équation de diffusion de la surpression interstitielle :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (\text{I.37})$$

où :

u = Surpression interstitielle,

t = temps,

z = profondeur,

c_v = coefficient de consolidation.

Solution analytique (cas d'une couche argileuse drainée sur deux faces) :

$$U(t) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 c_v t}{4H^2}\right) \quad (\text{I.38})$$

$U(t)$: Taux de consolidation à l'instant t ,

H : Demi-épaisseur drainante de la couche.

I.3.2.2 Consolidation Secondaire (Tassement de fluage)

Après la consolidation primaire, un **tassement secondaire** peut survenir par réarrangement des particules sans variation d'eau interstitielle, modélisé de manière empirique (e.g. loi logarithmique en temps).

I.3.3 Tassement dans le temps sous une charge donnée

Le sol et l'état de chargement peuvent être schématisés à l'aide du modèle de la Figure I 30 le schéma réel est représenté sur la Figure I 30.

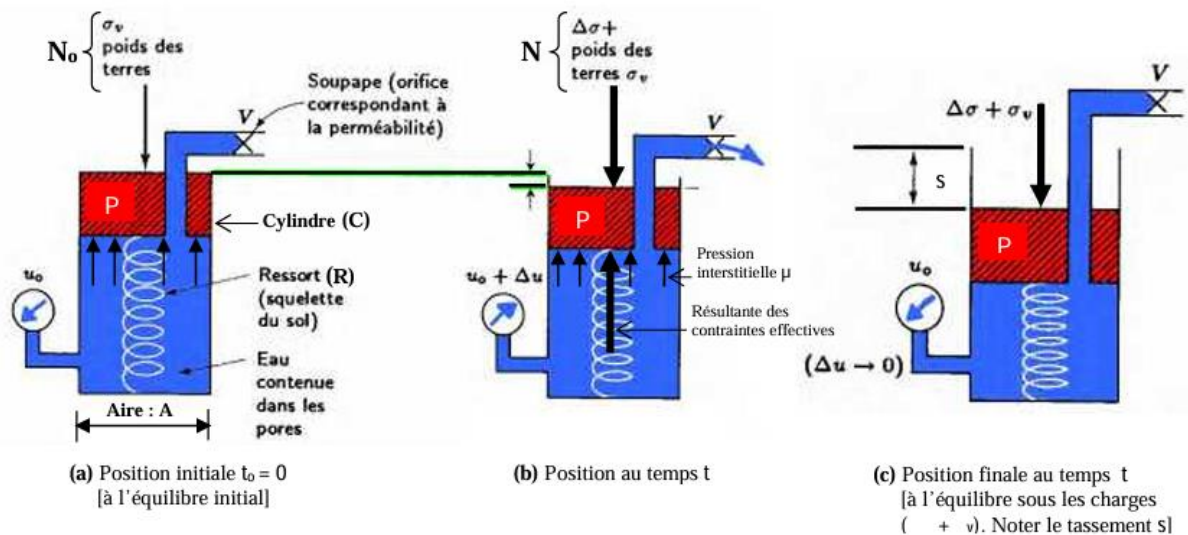


Figure I-30. Modèle rhéologique de la consolidation des sols

Le sol à étudier est contenu dans un cylindre (**C**) de section (**A**). Ce cylindre est rempli d'eau représentant l'eau interstitielle. Le ressort (**R**) modélise le squelette des grains solides. Le sol est chargé par une force normale (**N**) appliquée à l'aide d'un piston (**P**) coulissant d'une façon étanche dans le cylindre (**C**). Dans ce piston est ménagé un orifice (**V**) correspondant à la perméabilité du sol. Moins le sol est perméable, plus cet orifice est petit. Le déplacement (**s**) du piston vers le bas correspond au tassement du sol.

Voyons ce qui se passe lorsque la contrainte totale $\sigma = N / A$ est appliquée :

- **À l'instant « $t_0 = 0$ » :** (Figure I 31a) Correspondant au début du chargement, l'eau considérée comme incompressible absorbe toute la pression, nous avons donc :

$\sigma = \mu$ et $\sigma' = 0$. Avec μ la pression interstitielle et σ' la pression effective

($\sigma' = N'/A$), où N' : est la force transmise dans le ressort (qui représente les grains solides du sol). La relation de Terzaghi est vérifiée ($\sigma' = \sigma - \mu$).

Étant en pression, l'eau commence à s'évacuer par l'orifice. Son volume diminuant, le piston s'abaisse (le sol tasse) et le ressort se comprime en reprenant une part de la charge totale. Plus l'orifice est petit (c.à.d. plus le sol est imperméable) plus le phénomène est lent.

- **À un instant « t » quelconque** nous avons : $\sigma' \neq 0$ et $\mu \neq 0$ et toujours

$\sigma = N/A = \sigma' + \mu$. Au fur et à mesure que le temps passe, l'eau s'évacue, donc le

ressort se comprime : la contrainte effective σ' augmente et μ diminue. μ diminuant, l'eau sort de plus en plus lentement de l'orifice, la vitesse de tassement se ralentit progressivement.

- **Pour « $t = \infty$ » :** (Figure I 32) Les valeurs de μ , σ et σ' sont les suivantes : $\mu = 0$ et

$$\sigma = \sigma'$$

La Figure I 31 représente l'évolution des contraintes effectives et interstitielles en fonction du temps sous l'action de ce phénomène, appelé « **consolidation primaire** ». En pratique, le temps nécessaire à la consolidation primaire est fini. L'abaissement du piston à la fin de la consolidation primaire correspond au tassement final du sol appelé « **tassement primaire** ».

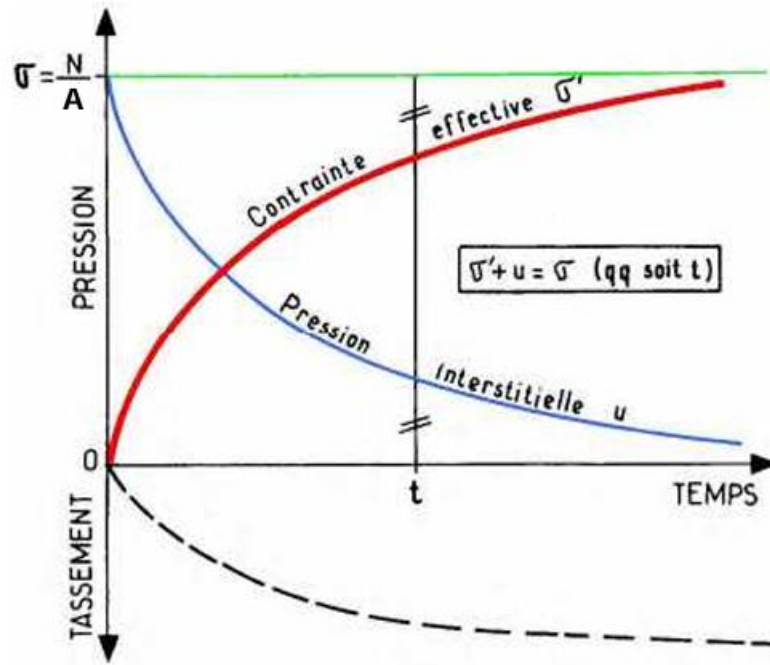


Figure I-31. Évolution des contraintes et déformations dans le temps

I.3.4 Consolidation unidimensionnelle

La forme la plus simple de tassement de consolidation est le tassement unidimensionnel (1), c.à.d. les déformations latérales sont supposées nulles ($\epsilon_2 = \epsilon_3 = 0$). C'est le type de tassement que la plupart des argiles subissent lors de leurs dépositions. Cette condition est aussi appliquée dans le cas d'une large surface de chargement sur une couche d'argile très fine.

La Figure I 32 présente une couche de sol compressible, d'épaisseur H , indéfinie dans le sens horizontal, à la surface de laquelle est appliquée une pression uniforme σ . Le temps du tassement est donné par la relation suivante :

$$t = T_v \cdot H^2 / C_v \quad (\text{I.39})$$

Avec, C_v le coefficient de consolidation du sol tel que :

$$C_v = K \cdot E_{oed} / \gamma_w \quad (\text{I.40})$$

C_v s'exprime en (cm^2/s) et dépend de la perméabilité du sol (K) et, t_v un nombre sans dimension appelé facteur temps déterminé comme suit :

$$T_v = C_v \cdot t / H^2 \quad (I.41)$$

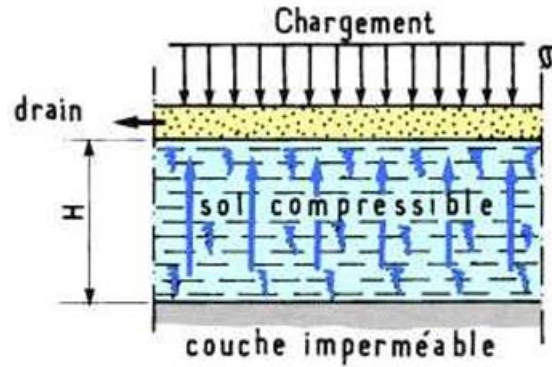


Figure I-32 Couche drainée d'un seul côté (consolidation unidimensionnelle)

I.4 Conclusion générale

La mécanique des sols constitue un pilier fondamental de la géotechnique, en fournissant les outils nécessaires pour comprendre, caractériser et prévoir le comportement des sols en interaction avec les ouvrages de construction. Ce chapitre a mis en évidence la complexité et la spécificité des sols, matériaux triphasés, hétérogènes et souvent non isotropes, dont le comportement est fortement influencé par la présence d'eau et d'air. Les propriétés physiques essentielles, telles que la porosité, la densité, la teneur en eau, ainsi que les notions de contrainte (totale, effective, interstitielle), sont à la base de toute analyse géotechnique fiable.

L'étude des contraintes dans le sol, des effets des charges appliquées en surface et des phénomènes de déformation (tassement, consolidation, retrait et gonflement) permet aux ingénieurs d'anticiper les réactions du sol sous différentes sollicitations. Grâce à des outils théoriques (comme le cercle de Mohr ou la théorie de Terzaghi) et pratiques (essais en laboratoire ou in situ), on peut modéliser les comportements et assurer la stabilité et la durabilité des ouvrages.

En somme, maîtriser les principes fondamentaux de la mécanique des sols est indispensable pour toute conception et exécution d'infrastructures sûres, efficaces et adaptées aux conditions géotechniques rencontrées.

Chapitre II

Synthèse bibliographique sur la méthode des éléments finis

II.1 Introduction

De nombreuses structures utilisées par les ingénieurs sont constituées d'un ensemble de parties indépendantes reliées entre elles par des points appelés *nœuds*. Ces assemblages forment des treillis, comme c'est le cas pour les poutres continues, les cadres, etc.

Les ingénieurs ont constaté qu'il était possible d'analyser ce type de structures en étudiant le comportement de chaque élément indépendamment, puis en les assemblant tout en assurant l'équilibre des efforts. Cette approche, appelée *méthode matricielle*, permet de modéliser la structure globale à partir des composants élémentaires. À l'origine, ces calculs étaient complexes et fastidieux, mais l'apparition des ordinateurs a grandement facilité leur résolution.

Dans l'industrie, les ingénieurs sont aussi confrontés à des structures continues, telles que les dalles ou les plaques, pour lesquelles les méthodes matricielles traditionnelles ne sont plus adaptées. C'est dans ce contexte qu'est apparue la *méthode des éléments finis* (MEF).

La méthode des éléments finis est une généralisation des méthodes matricielles, permettant d'appliquer la même logique à l'étude de structures continues. Elle consiste à subdiviser la structure continue en petits éléments indépendants reliés entre eux par des nœuds. Cette méthode est extrêmement puissante car elle permet une analyse précise de structures aux formes complexes et soumises à des conditions de chargement variées.

Bien qu'elle implique des calculs répétés, la MEF se prête parfaitement à la programmation numérique et à la résolution assistée par ordinateur.

Il est important de noter que la mise en œuvre de la méthode des éléments finis repose sur trois disciplines fondamentales :

La modélisation : formulation mathématique des phénomènes physiques, basée sur la répartition spatiale des grandeurs et les lois qui les relient.

L'analyse numérique : développement de méthodes de calcul pour résoudre les équations issues des modèles physiques.

L'informatique appliquée : conception de logiciels permettant de manipuler les données numériques, en intégrant des modules de résolution et des interfaces homme-machine.

II.2 Notions et principe de la méthode

La MEF a vu le jour au milieu du XXe siècle, initialement développée pour l'analyse des structures dans le domaine du génie civil. Son origine remonte aux travaux de Courant (1943), qui a utilisé une approche de type éléments finis pour résoudre un problème en théorie des plaques. Le développement industriel de la MEF a été conduit dans les années 1950-1960 par des chercheurs comme Clough (1960), considéré comme le premier à avoir utilisé le terme *finite element method*.

Ces formulations permettent d'assurer la stabilité numérique, la convergence de la solution, et d'aboutir à un système d'équations linéaires ou non linéaires, assemblé à partir de contributions élémentaires.

- La formulation faible des équations aux dérivées partielles.
- Le principe de Galerkin en mathématiques appliquées.
- Le principe des travaux virtuels en mécanique.

La MEF repose sur la formulation variationnelle des problèmes physiques. Elle s'appuie généralement sur :

En parallèle, les travaux de Argyris, Turner, Zienkiewicz [2], et Cheung ont permis d'élargir le champ d'application de la méthode, notamment avec la définition de matrices de rigidité élémentaire et de fonctions d'interpolation nodales, qui ont permis de relier les éléments entre eux dans une formulation globale.

Le véritable essor de la méthode est survenu dans les années 1950-1960, grâce à des ingénieurs et chercheurs en mécanique des structures. Parmi eux, Ray W. Clough [3] a joué un rôle déterminant. En 1960, il a utilisé le terme *finite element method* pour la première fois dans un article traitant de l'analyse des contraintes planes. Ses travaux ont permis de formaliser la MEF pour l'analyse des poutres, des plaques et des coques, en posant les bases pratiques de son application en ingénierie.

Les fondements mathématiques de la MEF remontent aux travaux du mathématicien Richard Courant [4] (1943). Il a introduit l'idée d'approximations par morceaux (éléments triangulaires) pour résoudre des équations aux dérivées partielles dans un cadre variationnel. Courant [4] utilisait des fonctions de forme définies localement sur chaque élément triangulaire pour approximer les solutions, ce qui constitue l'essence même de la méthode des éléments finis.

La méthode des éléments finis (MEF) a émergé progressivement au cours du XXe siècle, en réponse aux limites des méthodes analytiques traditionnelles face à la complexité croissante des structures à analyser dans le domaine du génie civil et mécanique. Son développement a été le fruit d'une convergence entre les besoins de l'ingénierie structurelle, les progrès en mathématiques appliquées et la montée en puissance de l'informatique.

II.3 Principe général de la méthode

Le domaine à étudier est discrétisé en un ensemble fini d'éléments simples (triangles, quadrilatères, tétraèdres, etc.) appelés éléments finis. Sur chacun de ces éléments, les champs inconnus sont approchés à l'aide de fonctions d'interpolation définies au niveau des nœuds.

Les étapes principales : discrétisation, formulation locale, assemblage global, application des conditions aux limites et résolution numérique.

II.3.1 Discrétisation du domaine

Le domaine à analyser (structure, volume, surface, etc.) est tout d'abord maillé en un nombre fini d'éléments géométriques simples : triangles, quadrilatères en 2D ; tétraèdres, hexaèdres en 3D. Chaque élément est relié à ses voisins par des nœuds, situés en général aux sommets, et parfois à l'intérieur ou sur les arêtes pour des éléments d'ordre supérieur.

Le choix du type d'éléments dépend de la géométrie du problème, du degré de précision souhaité et du type d'analyse (statique, dynamique, linéaire ou non linéaire).

II.3.2 Approximation des champs inconnus

Sur chaque élément, les grandeurs physiques inconnues (déplacements, température, potentiel, etc.) sont approchées à l'aide de fonctions d'interpolation (ou fonctions de forme) associées aux nœuds. Ces fonctions sont souvent polynomiales et permettent d'exprimer la solution dans l'élément en fonction de ses valeurs nodales.

Par exemple, dans le cas d'un déplacement $u(x)$, on écrira :

$u(x) \approx \sum N_i(x) \cdot u_i$, où $N_i(x)$ est la fonction de forme associée au nœud i , et u_i le déplacement au nœud i .

II.3.3 Formulation locale des équations

L'étape suivante consiste à établir, pour chaque élément, la formulation locale du problème physique. Cela se fait par des méthodes telles que :

- Le principe des travaux virtuels (en mécanique),
- Le principe variationnel (formulation faible),
- Le formalisme de Galerkin (dans le cas général des EDP).

Ces formulations mènent à la création de matrices locales (matrices de rigidité, de masse, etc.) et de vecteurs de force associés à chaque élément.

II.3.4 Assemblage global

Les équations locales sont ensuite assemblées dans un système global, en tenant compte des connexions entre les éléments via les nœuds partagés. On obtient ainsi un grand système linéaire (ou non linéaire) global du type :

$\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F}$, où :

- $\mathbf{K}$ est la matrice de rigidité globale,
- $\mathbf{U}$ est le vecteur des inconnues (déplacements, températures...),
- $\mathbf{F}$ est le vecteur des forces appliquées ou des sources.

II.3.5 Application des conditions aux limites

Les conditions aux limites (Dirichlet, Neumann, Robin) sont ensuite imposées sur le système global. Elles sont essentielles pour garantir l'unicité et la stabilité de la solution. Par exemple, en mécanique, les conditions de déplacement nul sur certaines surfaces doivent être imposées explicitement.

II.3.6 Résolution numérique

Enfin, le système d'équations est résolu numériquement à l'aide de méthodes adaptées :

- Méthodes directes (factorisation LU, Cholesky) pour les petits systèmes,
- Méthodes itératives (conjugate gradient, GMRES) pour les grands systèmes,
- Méthodes spécifiques pour les systèmes non linéaires (Newton-Raphson, etc.).

II.4 Applications de la MEF

La MEF est utilisée dans une large gamme de disciplines : mécanique des solides, thermique, électromagnétisme, mécanique des fluides. Elle permet la résolution de problèmes complexes dans chacun de ces domaines, notamment dans l'ingénierie et la recherche appliquée.

II.4.1 Mécanique des solides

En mécanique des solides et des structures, la MEF est largement utilisée pour l'analyse des contraintes, déformations, flambements, modes propres, et comportements dynamiques des structures. Elle permet d'évaluer la tenue des composants mécaniques, des bâtiments, des ponts, des avions et des véhicules sous diverses charges.

Exemples :

- Vérification de la résistance d'un châssis automobile sous des charges d'impact.
- Simulation du comportement d'un pont sous des charges cycliques (fatigue).
- Analyse modale de structures aéronautiques.

II.4.2 Transfert thermique

La MEF permet de modéliser la conduction thermique, les transferts convectifs et radiatifs dans les solides et les fluides. Elle est utilisée dans la conception thermique d'équipements industriels, l'électronique, ou encore la simulation de procédés de soudage.

Exemples :

- Calcul de la distribution de température dans un échangeur de chaleur.
- Analyse thermique d'un processeur électronique en fonctionnement.

II.4.3 Électromagnétisme

Dans le domaine électromagnétique, la MEF est utilisée pour résoudre les équations de Maxwell dans des configurations complexes. Elle sert à concevoir des dispositifs tels que les transformateurs, moteurs électriques, antennes ou capteurs.

Exemples :

- Simulation du champ magnétique dans une machine électrique.
- Étude des pertes par courants de Foucault dans des structures métalliques.

II.4.4 Mécanique des fluides (MEF-CFD)

Couplée à des méthodes spécifiques comme la méthode des volumes finis (CFD), la MEF permet de modéliser les écoulements de fluides compressibles ou incompressibles, turbulents ou laminaires. Elle est aussi employée dans les simulations multiphysiques (fluides-structures, thermo-fluides).

Exemples :

- Simulation de l'écoulement de l'air autour d'une aile d'avion.
- Étude d'un écoulement dans une conduite sous pression.

II.4.5 Biomécanique et ingénierie médicale

La MEF est également utilisée pour simuler le comportement mécanique des tissus biologiques, la circulation sanguine, ou encore la réponse des implants médicaux. Elle contribue au développement de dispositifs médicaux plus sûrs et efficaces.

Exemples :

- Simulation du stress sur une prothèse de hanche.
- Analyse de la déformation de la cornée dans la chirurgie réfractive.

Grâce à son adaptabilité, la MEF constitue un pilier central dans la modélisation et la conception assistée par ordinateur (CAO) dans de nombreuses disciplines scientifiques et industrielles.

II.5 Logiciels et implémentations

Des logiciels tels qu'ANSYS, Abaqus, COMSOL (commerciaux) ou Code_Aster, FEniCS (open source) permettent la mise en œuvre pratique de la MEF. Ces outils offrent des environnements de simulation complets adaptés aux différents besoins industriels et scientifiques.

II.5.1 Logiciels commerciaux

Les logiciels commerciaux offrent des interfaces conviviales, une grande richesse de fonctionnalités et un support technique professionnel. Ils sont très utilisés dans l'industrie pour leur robustesse et leur précision.

- ANSYS [5]: l'un des logiciels les plus répandus, couvrant un large éventail de domaines (mécanique, thermique, électromagnétique, fluides). Il permet aussi des simulations multiphysiques complexes.
- Abaqus [6]: particulièrement utilisé en mécanique non linéaire, dynamique explicite, et analyse de contact. Il est très prisé dans l'automobile et l'aéronautique.
- COMSOL [7] Multiphysics : outil puissant de modélisation multiphysique, permettant de coupler facilement différentes physiques dans un environnement intégré.

II.5.2 Logiciels open source

Les outils open source, bien qu'exigeant une plus grande maîtrise technique, sont de plus en plus utilisés dans le domaine académique et pour des applications personnalisées.

- Code_Aster [8]: développé par EDF, il est très utilisé en France dans les domaines de la mécanique des structures et de la thermique.
- FEniCS [9]: bibliothèque Python/C++ permettant une formulation souple des équations variationnelles et leur résolution. Adaptée à la recherche et à l'enseignement.
- Elmer FEM [10]: logiciel open source pour les simulations multiphysiques, notamment utilisé dans l'électromagnétisme et la mécanique des fluides.

II.5.3 Critères de choix d'un logiciel

Le choix du logiciel dépend du domaine d'application, de la complexité du problème à résoudre, des ressources disponibles et du niveau d'automatisation souhaité.

Critères importants :

- Capacité à gérer les non-linéarités (géométries, matériaux, contact).
- Options de maillage adaptatif et raffinement local.
- Compatibilité avec d'autres outils de CAO et post-traitement.
- Documentation, communauté d'utilisateurs et support technique.

En résumé, les logiciels de MEF jouent un rôle crucial dans la démocratisation de cette méthode en ingénierie et en recherche, en rendant accessible la résolution de problèmes complexes à l'aide d'interfaces et d'algorithmes performants.

II.6 Limites et perspectives

Malgré ses nombreux avantages, la MEF présente certaines limites : coût computationnel élevé, complexité du maillage, sensibilité aux conditions aux limites. Les perspectives incluent l'analyse isogéométrique, le couplage avec l'intelligence artificielle, et l'intégration dans les jumeaux numériques.

II.6.1 Limites actuelles de la MEF

- Coût computationnel élevé : Les simulations nécessitent souvent des ressources importantes en mémoire et en temps de calcul, en particulier pour les modèles 3D, les problèmes transitoires ou non linéaires.
- Difficulté de génération du maillage : Le maillage d'un domaine complexe reste un défi. La qualité du maillage influence fortement la précision et la stabilité de la solution.
- Sensibilité aux conditions aux limites : Une mauvaise modélisation des conditions aux limites peut entraîner des erreurs importantes dans les résultats.
- Limites en contact et non-linéarités : Le traitement des problèmes de contact, de plasticité, ou de grandes déformations reste numériquement coûteux et parfois instable.
- Difficulté d'interprétation des résultats : Les solutions peuvent être sensibles à des paramètres numériques comme la taille du maillage ou le choix des fonctions d'interpolation.

II.6.2 Perspectives d'évolution

Face à ces limites, plusieurs axes de développement sont actuellement explorés pour faire évoluer la MEF vers plus de robustesse, de flexibilité et de précision.

- ❖ Analyse isogéométrique [11]: Cette approche consiste à utiliser les mêmes fonctions pour représenter la géométrie (issues de la CAO, comme les NURBS) et pour interpoler les champs physiques. Elle permet de réduire les erreurs de géométrie et d'améliorer la continuité des solutions.
- ❖ Couplage avec l'intelligence artificielle : L'apprentissage automatique (machine learning) et les réseaux de neurones peuvent être utilisés pour accélérer certaines étapes (réduction de modèle, prévision de champs, identification de matériaux) ou améliorer le post-traitement.
- ❖ Intégration dans les jumeaux numériques : La MEF joue un rôle central dans les jumeaux numériques (digital twins), qui combinent données temps réel et modèles prédictifs pour surveiller et optimiser les systèmes industriels.

- ❖ Calcul haute performance (HPC) : L'optimisation de la MEF sur des architectures parallèles permet d'accroître la taille et la complexité des modèles simulés, ouvrant la voie à des applications à très grande échelle.
- ❖ Simulations multi-échelles et multi-physiques : Le développement de méthodes capables de prendre en compte plusieurs échelles spatiales et temporelles, ainsi que des couplages physiques complexes (thermo-mécaniques, électromagnétiques-fluides...) est un axe majeur de recherche.

En conclusion, la MEF continue d'évoluer rapidement, en réponse aux défis technologiques et aux exigences croissantes de précision et de rapidité dans la simulation numérique. Elle reste au cœur de la modélisation avancée dans l'ingénierie moderne.

II.7 Conclusion

La méthode des éléments finis représente aujourd'hui une approche incontournable dans le domaine de la modélisation numérique. Son évolution continue, combinée aux progrès de l'informatique et à l'émergence de nouvelles approches hybrides, ouvre la voie à des simulations de plus en plus précises, rapides et intégrées à la conception industrielle.

Chapitre III

Modélisation du comportement d'un massif de sol par la méthode des éléments finis

III.1 Introduction

Dans ce chapitre, on a l'intérêt d'appliquer la méthode numérique des éléments finis au calcul du comportement du massif de sol. Ce type de structures est bidimensionnelles pour cette raison on a choisi le type d'élément quadrilatère à quatre nœuds. A cet effet nous validons notre modèle numérique tout en exécutant un programme de calcul en langage Maple sur des plaques minces en traction ou compression. Et à la fin nous traitons un exemple de massif de sol sous des charges concentrés ou réparties afin de prédire la distribution des contraintes et des déplacements dans cette structure.

III.2 Formulation en éléments finis

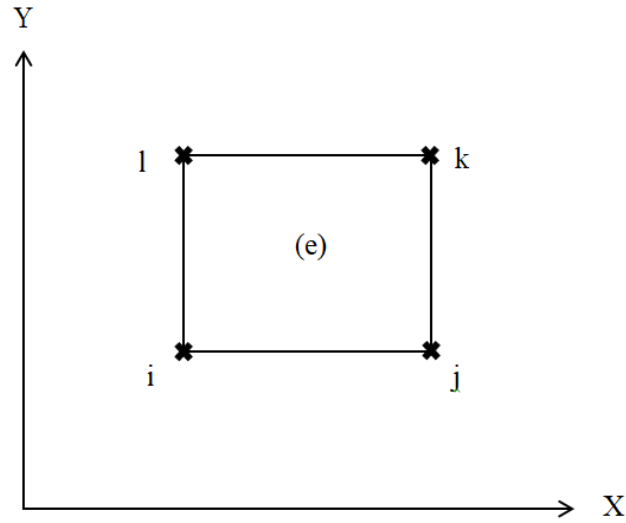


Figure III-1. Élément quadrilatère à quatre nœuds.

Dans notre cas la structure est liée à deux axes x et y . A cet effet les champs de déplacement s'écrivent sous cette forme :

$$u(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (\text{III.1})$$

$$v(x,y) = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \quad (\text{III.2})$$

Avec u, v sont les déplacements suivant $\vec{x}$ et $\vec{y}$ respectivement.

Et α_i ($i=1,6$) sont les paramètres de l'approximation.

A partir des conditions de déplacements aux nœuds i, j, k et l on a :

$$\text{Nœud (i)} : u(x_i, y_i) = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i = u_i \quad (\text{III.3})$$

$$v(x_i, y_i) = \alpha_4 + \alpha_5 x_i + \alpha_6 y_i = v_i \quad (\text{III.4})$$

$$\text{Nœud (j)} : u(x_j, y_j) = \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j = u_j \quad (\text{III.5})$$

$$v(x_j, y_j) = \alpha_4 + \alpha_5 x_j + \alpha_6 y_j = v_j \quad (\text{III.6})$$

$$\text{Nœud (k)} : u(x_k, y_k) = \alpha_1 + \alpha_2 x_k + \alpha_3 y_k = u_k \quad (\text{III.7})$$

$$v(x_k, y_k) = \alpha_4 + \alpha_5 \cdot x_k + \alpha_6 \cdot y_k = v_k \quad (\text{III.8})$$

Nœud (I) : $u(x_1, y_1) = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x_1 + \alpha_3 \cdot y_1 = u_1 \quad (\text{III.9})$

$$v(x_1, y_1) = \alpha_4 + \alpha_5 \cdot x_1 + \alpha_6 \cdot y_1 = v_1 \quad (\text{III.10})$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.11})$$

$$\begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix} = [P(x, y)] \cdot \{\alpha\} \quad (\text{III.12})$$

On encore :

$$u(x, y) = [q(x, y)] \cdot \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.13})$$

$$\text{et : } \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \\ 1 & x_l & y_l \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \\ u_l \end{Bmatrix} \quad (\text{III.14})$$

$$(A)(\alpha) = (u)^e \quad (\text{III.15})$$

$(u)^e$ vecteur de déplacements aux nœuds

$$\text{D'où : } (\alpha) = (A)^{-1} \cdot (u)^e \quad (\text{III.16})$$

En substituant cette dernière équation dans l'équation (III.13) on aura :

$$u(x, y) = [q(x, y)] \cdot (A)^{-1} \cdot (u)^e \quad (\text{III.17})$$

$$u(x, y) = \sum N(x, y) \cdot (u)^e \quad (\text{III.18})$$

$N(x, y)$ sont les fonctions d'interpolation.

En appliquant le principe des travaux virtuels on tire l'expression de la matrice de rigidité de l'élément selon :

$$[K]^e = \int_v [B]^T \cdot [C] \cdot [B] dv \quad (\text{III.19})$$

Avec : $[B]$ est la matrice de dérivée des fonctions d'interpolation et $[C]$ est la matrice des propriétés matricielles.

En se basant sur la loi de comportement des matériaux on tire la relation contrainte déplacement selon :

$$\{\sigma\} = [C] \cdot \{\varepsilon\} ; \{\sigma\} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \quad (\text{III.20})$$

$$\{\varepsilon\} = \begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad (\text{III.21})$$

III.3 Validation du modèle numérique

Dans le cadre de la validation numérique, en premier lieu une plaque mince est modélisée pour étudier son comportement sous une traction. La plaque est supposée élastique linéaire, avec un module de Young $E = 2.10^5$ MPa et un coefficient de Poisson $\nu = 0,3$. La charge de traction $p = 50$ N/mm est appliquée sur une plaque d'épaisseur $t = 10$ mm. Le calcul est réalisé à l'aide de la méthode des éléments finis avec des éléments quadrilatéraux. Le programme permet d'obtenir les déplacements et les contraintes dans la plaque, et les résultats sont comparés à une solution analytique pour valider la précision du modèle.

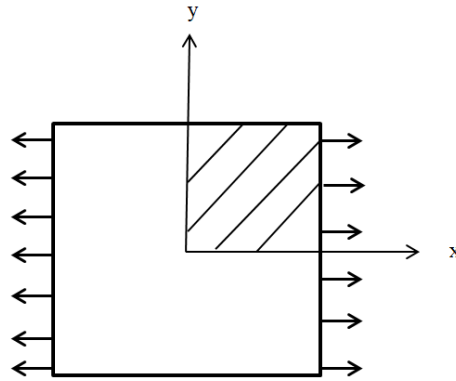


Figure III-2. Modèle d'une plaque soumise à la traction

Après avoir exécuté le programme de calcul, on exploite les résultats suivants :

Le déplacement vertical v de chaque nœud

$$v_1 := 0$$

$$v_2 := 0$$

$$v_3 := -0.000750000001346618$$

$$v_4 := -0.000749999999295382$$

La contrainte σ_{xx}

$$\sigma_{xx} := 5.00000000039000$$

La contrainte σ_{yy}

$$\sigma_{yy} := -6.60000276653250 \cdot 10^{-10}$$

La contrainte τ_{xy}

$$\tau_{xy} := -1.85651964651585 \cdot 10^{-10}$$

Tableau III-1 : comparaison des contraintes entre la solution analytique et solution avec MEF

Contrainte	Solution avec MEF	Solution analytique
σ_{xx}	5.000	$P/e=-5$
σ_{yy}	$-6.600 \cdot 10^{-10}$	0
τ_{xy}	$-1.856 \cdot 10^{-10}$	0

Les résultats montrent que la méthode des éléments finis reproduit fidèlement le comportement mécanique attendu du sol sous traction. Les faibles écarts constatés sont dus à

Chapitre III : Modélisation du comportement d'un massif de sol par la méthode des éléments finis

des effets numériques insignifiants. Le modèle est donc bien validé pour ce type de sollicitation.

En second lieu considérons la même plaque de dimension (50x100) mm² soumise à une charge de compression d'intensité $q = 200 \text{ N/mm}$.

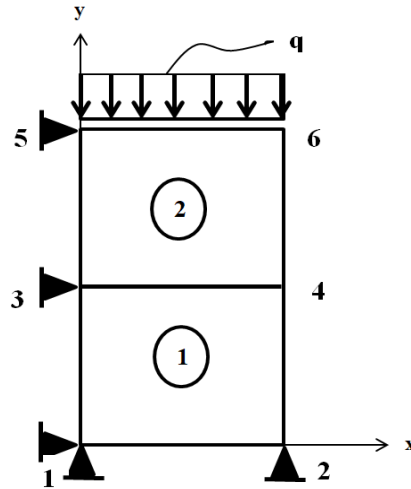


Figure III-3. Modèle de plaque soumise à la compression

Résultats obtenus

La contrainte σ_{xx} des deux éléments

$$\sigma_{xx}(1) := -1.60575996943635 \cdot 10^{-9}$$

$$\sigma_{xx}(2) := -4.00289579260971 \cdot 10^{-9}$$

La contrainte σ_{yy} des deux éléments

$$\sigma_{yy}(1) := -20.0000000005600$$

$$\sigma_{yy}(2) := -20.0000000028326$$

La contrainte τ_{xy} des deux éléments

$$\tau_{xy}(1) := -4.44454085736747 \cdot 10^{-10}$$

$$\tau_{xy}(2) := 6.40865649367951 \cdot 10^{-10}$$

Tableau III-2 : comparaison des contraintes entre la solution analytique et solution avec MEF

Contrainte	Solution avec MEF	Solution analytique
$\sigma_{xx} (1)$	$-1.6057 * 10^{-9}$	0
$\sigma_{xx} (2)$	$-4.0028 * 10^{-9}$	0
$\sigma_{yy} (1)$	-20.0000	-P/e=-20
$\sigma_{yy} (2)$	-20.0000	-P/e=-20
$\tau_{xy} (1)$	$-4.4445 * 10^{-10}$	0
$\tau_{xy} (2)$	$6.4086 * 10^{-10}$	0

Les tableaux (III 1 et III 2) montrent une comparaison des résultats des contraintes dans la plaque. Il est remarquable que les résultats obtenues numériquement sont parfaitement identiques avec ceux de la solution analytique ce qui entraîne que notre modèle numérique est validé.

III.4 Exemple d'application

Dans cette modélisation du comportement d'un sol naturel, on utilise un modèle élastique linéaire ($E = 10000\text{MPa}$, $\nu = 0,3$). Contrairement au cas avec un seul élément, un maillage composé d'un nombre d'éléments quadrilatéraux soit de 288 est adopté afin d'obtenir une meilleure précision. Ce maillage permet de mieux représenter les variations de déplacements et contraintes,

III.5 Cas du chargement concentré

Le sol est soumis à une charge concentrée de 50 KN sur une couche de 1 m d'épaisseur.

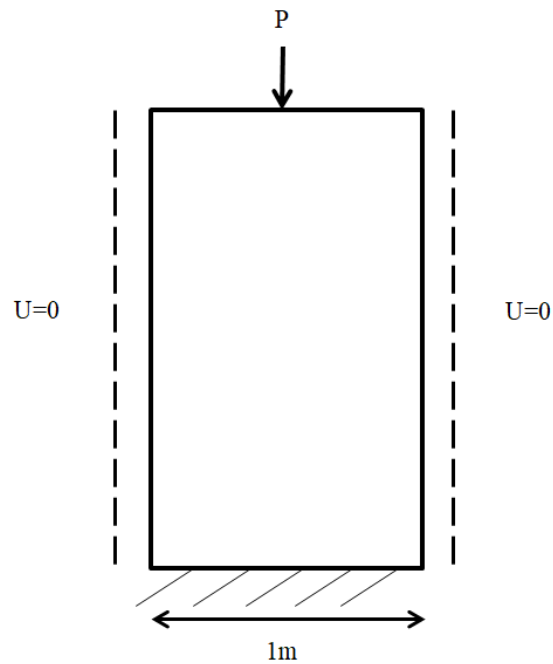


Figure III-4.Cas de chargement concentré

Étant donné que le sol est soumis à une force concentrée en son centre, elle peut être divisée en deux moitiés symétriques. La modélisation a été réalisée sur la moitié en exploitant cette symétrie, avec une discrétisation en 144 éléments.

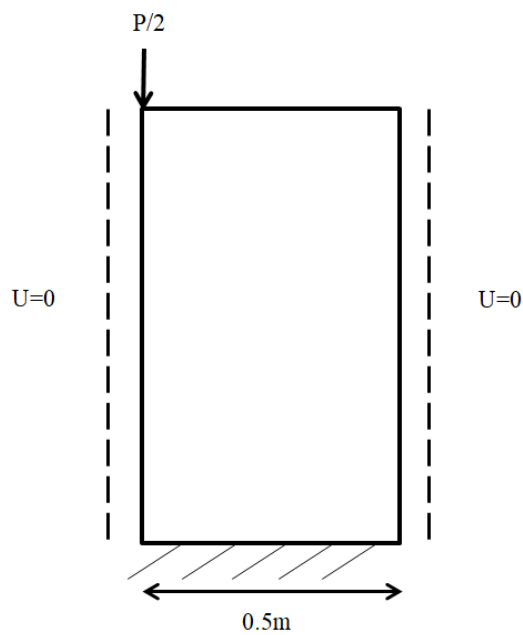


Figure III-5.Cas de chargement concentré après la division

III.5.1.1 Présentation des résultats

Tableau III-3 : Résultats numériques de la contrainte σ_{xx} cas du chargement concentré à travers et le long du massif.

profondeur	σ_{xx} (x=0.0416)	σ_{xx} (x=0.2083)	σ_{xx} (x=0.4584)
0.0416	14.993	15.001	15.009
0.125	14.995	15.003	15.007
0.208	15.002	15.006	15.002
0.291	15.018	15.014	14.988
0.374	15.05	15.028	14.955
0.457	15.114	15.055	14.901
0.54	15.235	15.102	14.791
0.623	15.455	15.185	14.587
0.706	15.848	15.329	14.221
0.789	16.531	15.572	13.581
0.872	17.699	15.978	12.485
0.955	19.652	16.641	10.654
1.038	22.855	17.699	7.672
1.121	27.993	19.328	2.962
1.204	36.04	21.711	4.184
1.287	48.347	24.887	14.406
1.37	66.612	28.325	27.633
1.453	92.916	29.733	41.434
1.536	129.722	22.614	47.564
1.619	179.126	11.964	25.684
1.702	246.051	101.132	56.133
1.785	291.2	371.629	223.196
1.868	398.615	83.985	447.734
1.951	5408.824	1399.359	623.727

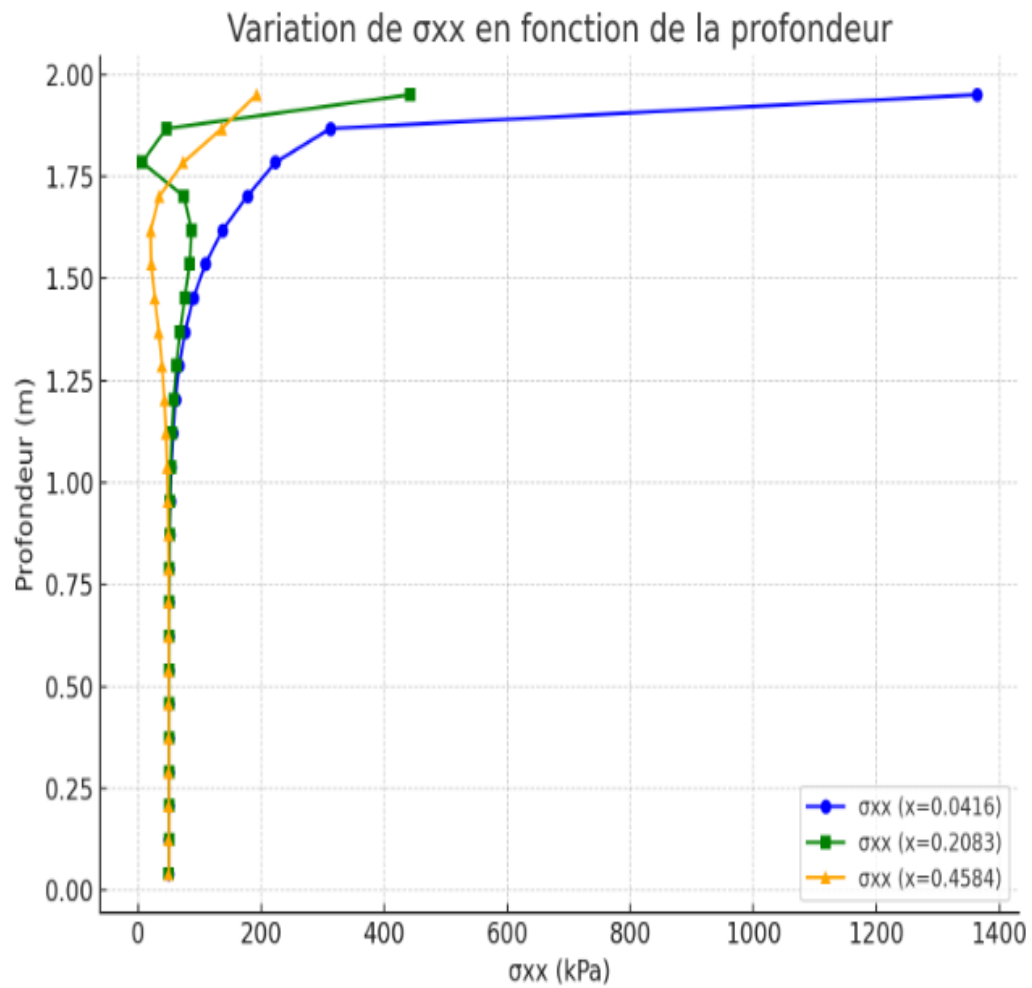


Figure III-6. Variation de la contrainte horizontale (σ_{xx}) à travers et le long du massif de sol soumis à une charge concentrée

Tableau III-4 : Résultats numériques de la contrainte σ_{yy} cas du chargement concentré à travers et le long du massif.

profondeur	σ_{yy} (x=0.0416)	σ_{yy} (x=0.2083)	σ_{yy} (x=0.4584)
0.0416	50.007	50.013	49.999
0.125	50.01	50.017	49.998
0.208	50.018	50.025	49.995
0.291	50.032	50.041	49.988
0.374	50.058	50.067	49.975
0.457	50.104	50.11	49.95
0.54	50.183	50.181	49.90
0.623	50.318	50.298	49.825
0.706	50.545	50.488	49.684
0.789	50.924	50.794	49.442
0.872	51.55	51.285	49.035
0.955	52.57	52.064	48.361
1.038	54.209	53.287	47.27
1.121	56.803	55.179	45.545
1.204	60.842	58.047	42.9
1.287	67.014	62.267	39.023
1.37	76.261	68.183	33.701
1.453	89.834	75.766	27.217
1.536	109.43	83.8	21.243
1.619	137.207	86.905	20.459
1.702	177.335	74.59	34.627
1.785	223.185	6.528	73.475

1.868	312.338	45.834	135.973
1.951	1363.003	441.815	192.667

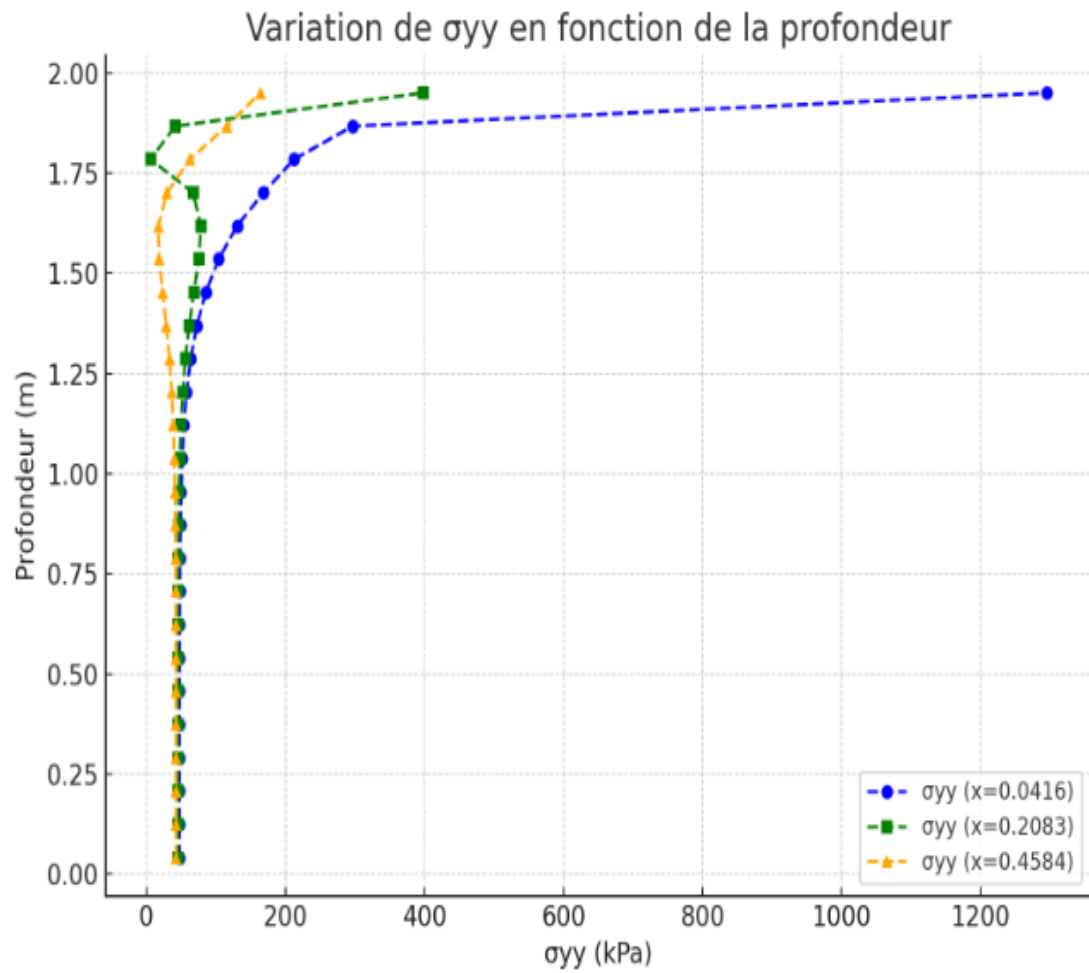


Figure III-7. Variation de la contrainte verticale (σ_{yy}) à travers et le long du massif de sol soumis à une charge concentrée

Tableau III-5 : Résultats numériques de la contrainte τ_{xy} cas du chargement concentré à travers et le long du massif.

Profondeur	$\tau_{xy}(x=0.0416)$	$\tau_{xy}(x=0.2083)$	$\tau_{xy}(x=0.4584)$
0.0416	0.0004	0.0015	0.0024
0.125	0.0008	0.0025	0.073
0.208	0.001	0.0024	0.0135
0.291	0.0005	0.00019	0.0219
0.374	0.0011	0.0082	0.0338
0.457	0.0056	0.027	0.051
0.54	0.015	0.0664	0.075
0.623	0.034	0.144	0.109
0.706	0.071	0.291	0.155
0.789	0.14	0.562	0.215
0.872	0.266	1.049	0.288
0.955	0.489	1.907	0.368
1.038	0.881	3.395	0.435
1.121	1.56	5.931	0.446
1.204	2.729	10.193	0.318
1.287	4.745	17.256	0.098
1.37	8.265	28.814	1.029
1.453	14.595	47.496	2.743
1.536	26.679	77.29	5.42
1.619	51.705	123.249	8.685
1.702	113.778	187.254	13.424
1.785	289.295	232.609	20.475

1.868	1174.725	27.306	33.598
1.951	5054.197	102.792	46.783

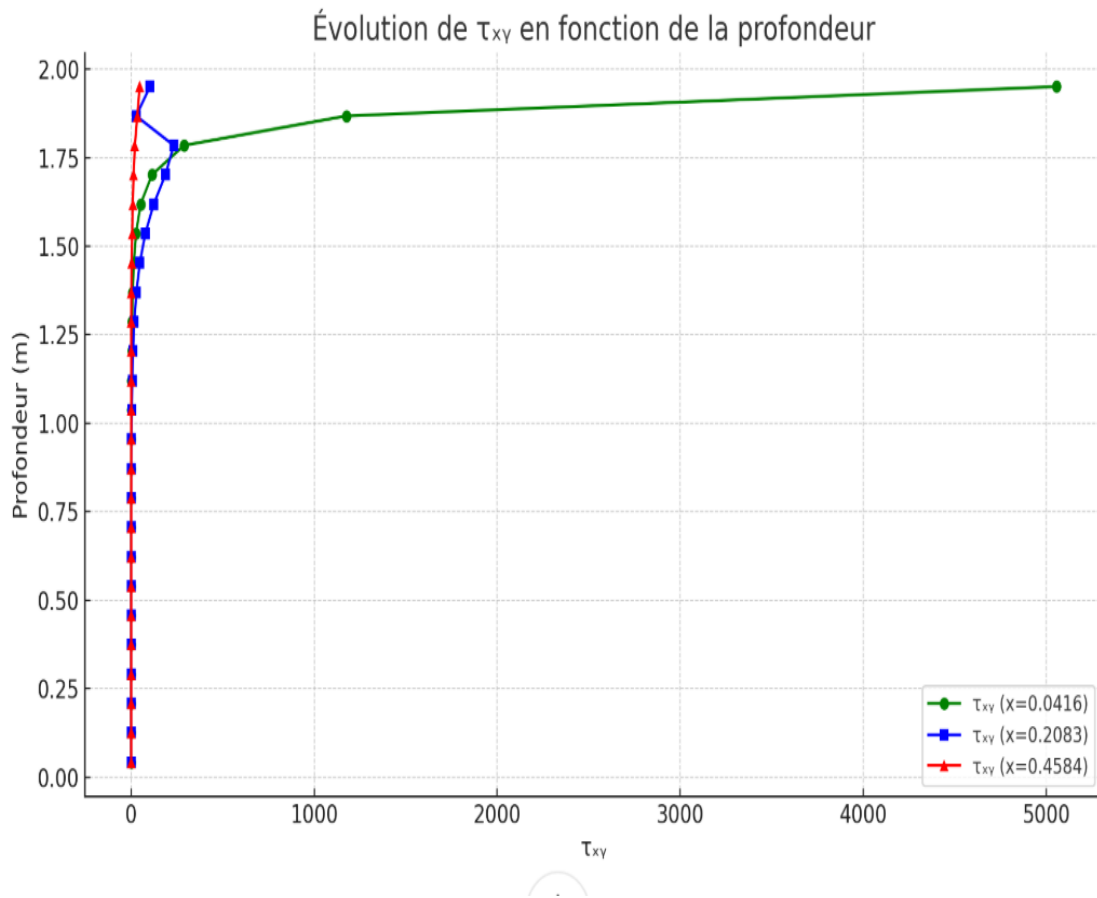


Figure III-8. Variation de la contrainte de cisaillement (τ_{xy}) à travers et le long du massif de sol soumis à une charge concentrée

Tableau III-6 : Résultats numériques des déplacements v cas du chargement concentré à travers du massif.

Profondeur	V
0.08	0
0.16	0.00003
0.24	0.00007
0.32	0.00011
0.40	0.00015
0.48	0.00018
0.56	0.00022
0.64	0.00026
0.72	0.0003
0.80	0.00034
0.88	0.00038
0.96	0.00041
1.04	0.00045
1.12	0.00049
1.2	0.00053
1.28	0.00057
1.36	0.00062
1.44	0.00067
1.52	0.00072
1.6	0.00078
1.68	0.00085

1.76	0.00095
1.84	0.001
1.92	0.0013
2	0.0017

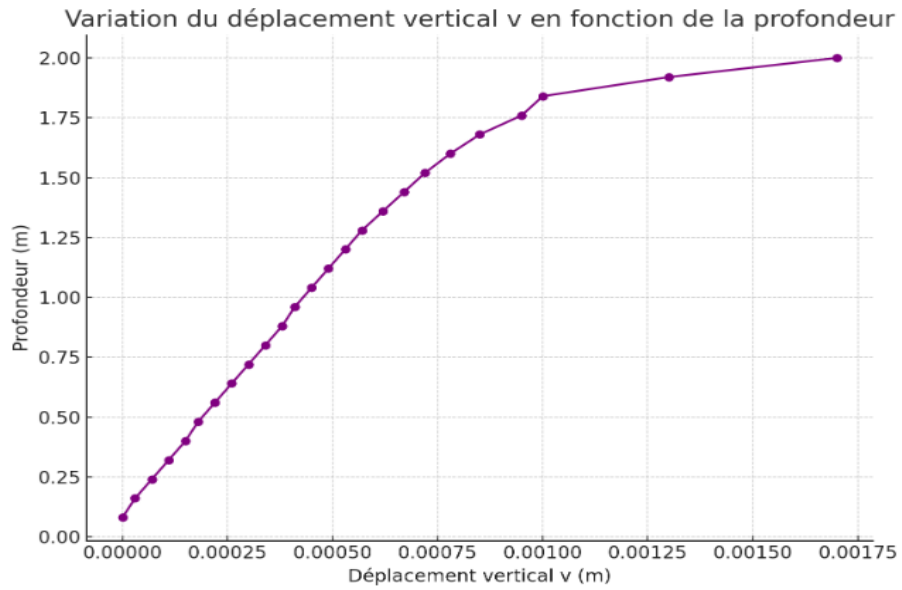


Figure III-9. Variation du déplacement vertical (v) à travers du massif de sol soumis à une charge concentrée.

III.5.2 Cas du chargement réparti

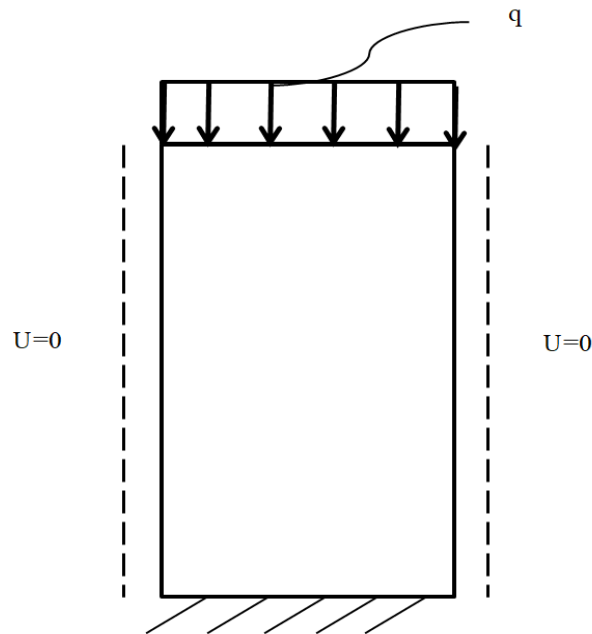


Figure III-10. Cas de chargement réparti.

Le sol est soumis à une charge répartie de 50 KN/ml vers le bas, simulant une surcharge structurelle, sur une couche de 1 m d'épaisseur.

III.5.2.1 La contrainte σ_{xx}

Tableau III-7 : Résultats numériques de la contrainte σ_{xx} cas du chargement réparti à travers et le long du massif.

profondeur	σ_{xx} (x=0.0416)	σ_{xx} (x=0.2083)	σ_{xx} (x=0.4584)
0.0416	-5.999	-5.999	-5.999
0.125	-5.999	-5.999	-5.999
0.208	-5.999	-5.999	-5.999
0.291	-5.999	-6	-5.999
0.374	-5.999	-5.999	-5.999
0.457	-6	-5.999	-5.999
0.54	-5.999	-6	-5.999
0.623	-6	-5.999	-5.999
0.706	-6	-6.000	-5.999

0.789	-6	-5.999	-5.999
0.872	-5.999	-6	-6
0.955	-6	-5.999	-6
1.038	-6	-6	-6
1.121	-5.999	-5.999	-6
1.204	-5.999	-6	-6
1.287	-6	-6	-5.999
1.37	-6	-5.999	-6
1.453	-5.999	-6	-6
1.536	-6	-5.999	-6
1.619	-5.999	-6	-6
1.702	-5.999	-5.999	-6
1.785	-5.999	-6	-6
1.868	-5.999	-6	-5.999
1.951	-6	-5.999	-5.999

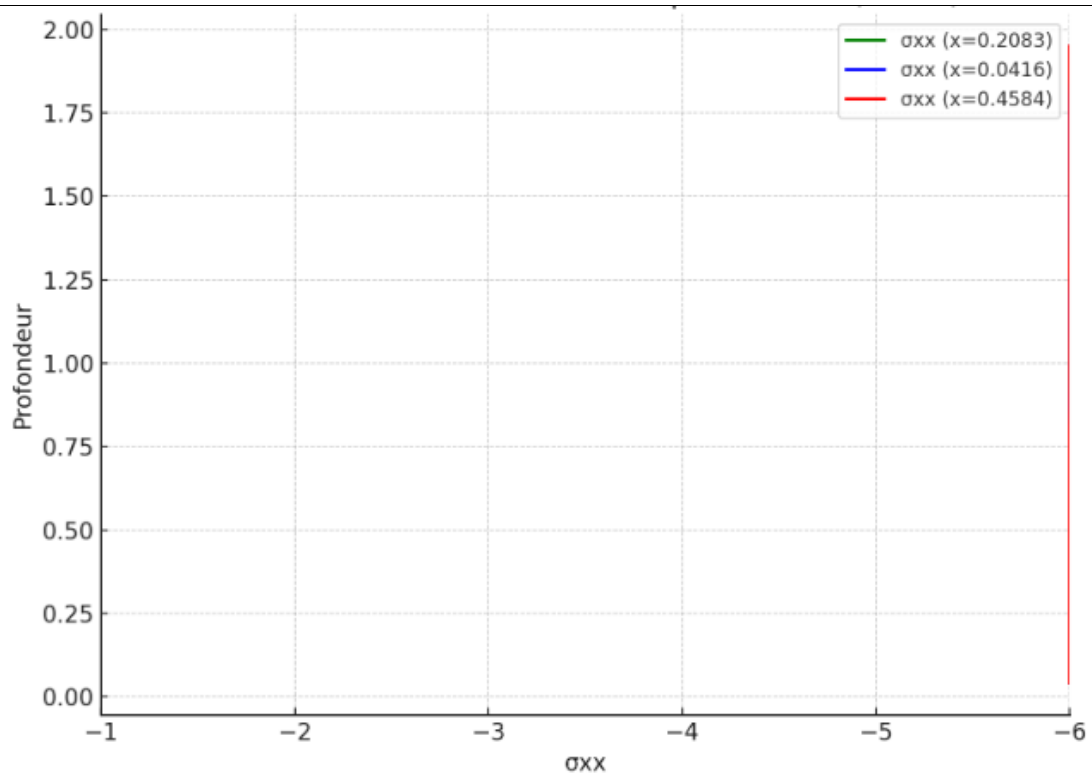


Figure III-11. Variation de la contrainte horizontale (σ_{xx}) à travers et le long du massif de sol soumis à une charge réparti

III.5.2.2 La contrainte σ_{yy}

Tableau III-8 : Résultats numériques de la contrainte σ_{yy} cas du chargement réparti à travers et le long du massif.

profondeur	σ_{yy} (x=0.0416)	σ_{yy} (x=0.2083)	σ_{yy} (x=0.4584)
0.0416	-5.999	-5.999	-5.999
0.125	-5.999	-5.999	-5.999
0.208	-5.999	-5.999	-5.999
0.291	-5.999	-6.000	-5.999
0.374	-5.999	-5.999	-5.999
0.457	-6.000	-5.999	-5.999
0.54	-5.999	-6.000	-5.999
0.623	-6.000	-5.999	-5.999
0.706	-6.000	-6.000	-5.999
0.789	-6.000	-5.999	-5.999
0.872	-5.999	-6.000	-6.000
0.955	-6.000	-5.999	-6.000
1.038	-6.000	-6.000	-6.000
1.121	-5.999	-5.999	-6.000
1.204	-5.999	-6.000	-6.000
1.287	-6.000	-6.000	-5.999
1.37	-6.000	-5.999	-6.000
1.453	-5.999	-6.000	-6.000
1.536	-6.000	-5.999	-6.000
1.619	-5.999	-6.000	-6.000
1.702	-5.999	-5.999	-6.000
1.785	-5.999	-6.000	-6.000
1.868	-5.999	-6.000	-5.999
1.951	-6.000	-5.999	-5.999

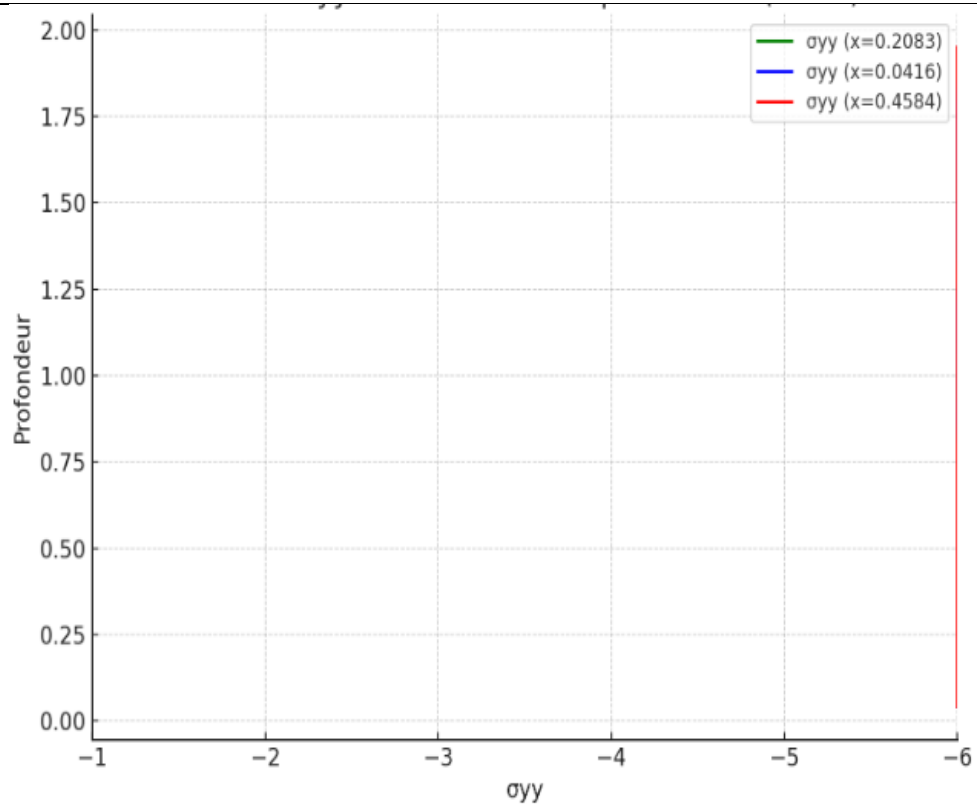
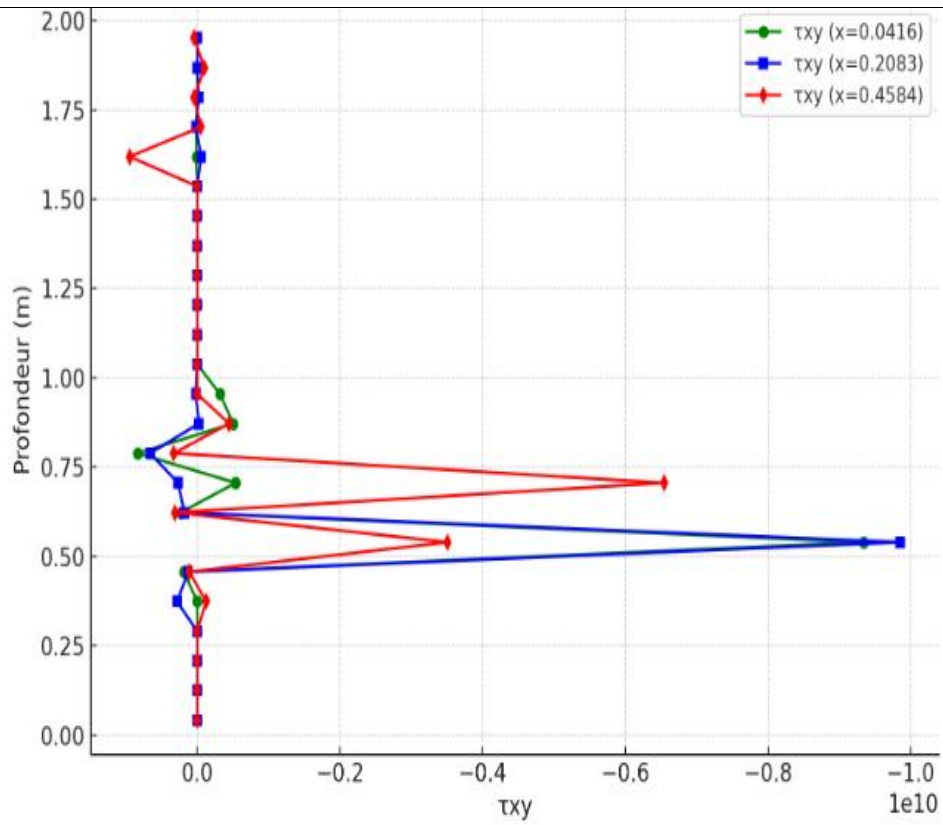


Figure III-12. Variation de la contrainte verticale (σ_{yy}) à travers et le long du massif de sol soumis à une charge répartie

III.5.2.3 La contrainte tangentielle τ_{xy} Tableau III-9 : Résultats numériques de la contrainte τ_{xy} cas du chargement réparti à travers et le long du massif.

Profondeur	$\tau_{xy}(x=0.0416)$	$\tau_{xy}(x=0.2083)$	$\tau_{xy}(x=0.4584)$
0.0416	-2.925×10^{-10}	2.556×10^{-9}	-1.042×10^{-9}
0.125	8.466×10^{-10}	-9.865×10^{-9}	-5.152×10^{-9}
0.208	4.402×10^{-10}	3.166×10^{-8}	-7.902×10^{-9}
0.291	2.684×10^{-9}	-5.438×10^{-8}	-3.619×10^{-9}
0.374	-1.235×10^{-8}	2.835×10^8	-1.235×10^8
0.457	1.862×10^8	1.243×10^8	1.090×10^8
0.54	-9.3410×10^9	-9.852×10^9	-3.510×10^9
0.623	2.311×10^8	1.788×10^8	3.145×10^8
0.706	-5.406×10^8	2.682×10^8	-6.544×10^9
0.789	8.365×10^8	6.616×10^8	3.275×10^8
0.872	-5.053×10^8	-2.562×10^7	-4.463×10^8
0.955	-3.184×10^8	2.237×10^7	2.283×10^{-8}
1.038	3.847×10^{-8}	-7.487×10^{-8}	-5.536×10^{-8}
1.121	5.343×10^{-9}	-8.326×10^{-8}	4.206×10^{-8}
1.204	-6.621×10^{-10}	1.097×10^{-7}	-7.827×10^{-8}
1.287	-8.893×10^{-8}	-6.321×10^{-8}	7.913×10^{-8}
1.37	1.0179×10^{-7}	2.738×10^{-7}	-6.387×10^{-8}
1.453	-7.841×10^{-9}	-6.691×10^{-7}	9.290×10^{-8}
1.536	-1.803×10^{-7}	6.941×10^{-7}	-8.847×10^{-8}
1.619	1.252×10^7	-5.79×10^7	9.474×10^8
1.702	1.2807×10^7	1.928×10^7	-5.028×10^7
1.785	1.218×10^{-6}	-2.385×10^7	3.955×10^7
1.868	-1.478×10^{-6}	1.826×10^{-6}	-9.951×10^7
1.951	-1.040×10^{-6}	6.013×10^{-6}	4.167×10^7



III.5.2.4 Déplacement verticale v

Tableau III-10 : Résultats numériques des déplacements v cas du chargement réparti à travers du massif.

Profondeur	V
0.08	0
0.16	-1.516×10^{-5}
0.24	-3.033×10^{-5}
0.32	-4.549×10^{-5}
0.40	-6.066×10^{-5}
0.48	-7.583×10^{-5}
0.56	-9.999×10^{-5}
0.64	-1.061×10^{-4}
0.72	-1.213×10^{-4}
0.80	-1.364×10^{-4}
0.88	-1.566×10^{-4}
0.96	-1.668×10^{-4}
1.04	-1.8190×10^{-4}
1.12	-1.911×10^{-4}
1.2	-2.123×10^{-4}
1.28	-2.274×10^{-4}
1.36	-2.426×10^{-4}
1.44	-2.578×10^{-4}
1.52	-2.729×10^{-4}
1.6	-2.881×10^{-4}
1.68	-3.033×10^{-4}
1.76	-3.184×10^{-4}
1.84	-3.386×10^{-4}
1.92	-3.488×10^{-4}
2	-3.639×10^{-4}

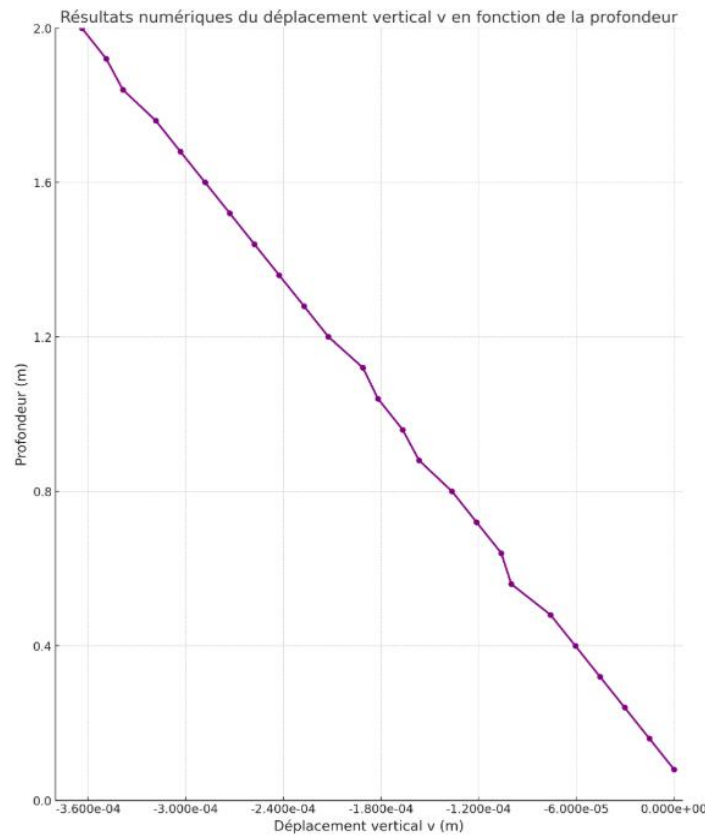


Figure III-14. Variation du déplacement vertical (v) à travers du massif de sol soumis à une charge répartie.

Les figures représentées précédemment montrent, la distribution des contraintes et déplacements pour les deux cas de charges concentré et uniforme. Les différentes figures analysées montrent clairement que le comportement du sol varie selon le type de chargement appliqué. En cas de chargement concentré, les contraintes normales (σ_{xx} , σ_{yy}) et de cisaillement (τ_{xy}) sont très élevées près de la charge, puis diminuent rapidement avec la profondeur, indiquant une forte concentration des efforts autour du point de charge. Le déplacement vertical (v) présente une déformation maximale au niveau de la charge qui s'atténue également en profondeur. En revanche, avec un chargement réparti, les contraintes sont distribuées de façon plus uniforme : les valeurs de σ_{xx} et σ_{yy} restent presque constantes, les cisaillements τ_{xy} sont très faibles et localisés en surface, tandis que le déplacement vertical augmente progressivement à travers du massif et elle est importante au mi profondeur. Ces

observations confirment l'impact du type de chargement sur la réponse mécanique du sol, et démontrent la validité du modèle élastique linéaire utilisé dans cette modélisation.

III.5.3 Conclusion

L'étude comparative entre les cas de chargement concentré et réparti a permis de mettre en évidence l'influence significative du mode de sollicitation sur la distribution des contraintes et des déplacements dans un sol naturel modélisé par un comportement élastique linéaire. Le chargement concentré génère des concentrations de contraintes et de déformations localisées près de la charge, tandis que le chargement réparti induit une réponse plus uniforme et régulière en profondeur pour les contraintes normales contrairement pour la contrainte de cisaillement. Ces résultats confirment la cohérence du modèle utilisé et soulignent l'importance de bien caractériser les conditions de chargement dans l'analyse du comportement mécanique des sols.

Conclusion générale

Ce travail a permis d'apporter plusieurs contributions significatives à la modélisation du comportement des sols naturels sous chargement vertical à travers la méthode des éléments finis. L'analyse comparative a mis en évidence l'impact du raffinement sur la précision des résultats, et l'implémentation dans un environnement symbolique a facilité l'automatisation des calculs de rigidité, de contraintes et de déplacements. Toutefois, certaines limites ont été identifiées, notamment la simplification des hypothèses avec un comportement linéaire, l'absence de prise en compte des effets dynamiques, hydrauliques ou des hétérogénéités du sol, ainsi que l'usage de maillages réguliers sans raffinement localisé. Ces constats ouvrent des perspectives de recherche intéressantes, telles que l'intégration de comportements non linéaires (plasticité, endommagement), la simulation de sollicitations dynamiques (séismes, vibrations), ou encore l'introduction d'effets de pression interstitielle. Le recours à des éléments adaptatifs et à des modèles tridimensionnels permettrait également d'enrichir la représentativité des résultats. Enfin, à l'échelle plus large, la modélisation géotechnique est appelée à évoluer en s'appuyant sur les avancées en intelligence artificielle, en calcul haute performance et en traitement de données géospatiales, afin d'aboutir à des simulations plus réalistes, durables et utiles pour la gestion des risques et la conception d'ouvrages fiables en interaction avec le sol.

References bibliographie

- [1] Boussinesq, J. (1885). Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques. Gauthier-Villars, Paris.
- [2] Zienkiewicz, O. C., & Taylor, R. L. (2005). The finite element method (6th ed.). Elsevier.
- [3] Clough, R. W. (1960). The finite element method in plane stress analysis. In Proceedings of the 2nd ASCE Conference on Electronic Computation (pp. 345–378). ASCE.
- [4] Courant, R. (1943). Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. Bulletin of the American Mathematical Society, 49(1), 1–23.
<https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1943-07866-0>
- [5] ANSYS Inc. (2023). ANSYS® Academic Research Mechanical, Release 2023 R1 [Computer software].
- [6] Dassault Systèmes. (n.d.). Abaqus Unified FEA [Computer software].
- [7] COMSOL Inc. (n.d.). COMSOL Multiphysics® [Computer software].
- [8] EDF R&D. (n.d.). Code_Aster [Open-source software].
- [9] FEniCS Project. (n.d.). FEniCS [Open-source software]. <https://fenicsproject.org/>
- [10] CSC – IT Center for Science. (n.d.). Elmer FEM [Open-source software].
- [11] Cottrell, J. A., Hughes, T. J. R., & Bazilevs, Y. (2009). Isogeometric analysis: Toward integration of CAD and FEA. Wiley.
- [12] Terzaghi, K. (1923). Die Berechnung der Durchlässigkeitsziffer des Tones aus dem Verlauf der hydrodynamischen Spannungserscheinungen. Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften in Wien, 132, 125–138.
- [13] Bishop, A. W. (1963). The principle of effective stress. Teknisk Ukeblad, 39, 859–863.
- [14] Costet, J., & Sanglerat, G. (1981). Ingénierie géotechnique. Tome 1 : Sols. Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées.

- [15] McCarthy, D. F. (2007). Essentials of soil mechanics and foundations: Basic geotechnics (7th ed.). Pearson Prentice Hall.
- [16] Westergaard, H. M. (1938). A problem of elasticity suggested by a problem in soil mechanics. Harvard University Graduate School of Engineering Publication, No. 7, 1–5.
- [17] Budhu, M. (2007). Soil mechanics and foundations (2nd ed.). Wiley.
- [18] Holtz, R. D., & Kovacs, W. D. (1991). An introduction to geotechnical engineering. Prentice Hall.
- [19] U.S. Navy. (1971). Soil mechanics, foundations, and earth structures (NAVFAC DM-7.1). Naval Facilities Engineering Command.
- [20] Osterberg, J. O. (1957). Influence values for stresses and displacements beneath trapezoidal areas. In Proceedings of the 4th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering (Vol. 1, pp. 410–415).
- [21] Costet, J., & Sanglerat, G. (1981). Cours pratique de mécanique des sols. Dunod.
- [22] Chelghoum, N. (2006a). Les ouvrages de soutènement en mécanique des sols (2e éd.). Publications de l'Université de Badji Mokhtar, Annaba.
- [23] Terzaghi, K. (1925). Erdbaumechanik auf bodenphysikalischer Grundlage. Franz Deuticke.

Annexe

Exemple d'application

Cas du chargement concentré

ne=144

ne : nombre d'éléments.

Déplacements vertical:

Les contraintes σ_{xx} σ_{yy} τ_{xy} :

Cas du chargement réparti

ne=144

Déplacements vertical v:

$$v_1 := 0$$

$$v_2 := 0$$

$$v_3 := 0$$

$$v_4 := 0$$

$$v_5 := 0$$

$$v_6 := 0$$

$$v_7 := 0$$

$$v_8 := -0.0000151666666161946$$

$$v_9 := -0.0000151666666135244$$

$$v_{10} := -0.0000151666666102395$$

$$v_{11} := -0.0000151666666071358$$

$$v_{12} := -0.0000151666666028720$$

$$v_{13} := -0.0000151666666014590$$

$$v_{14} := -0.0000151666666019110$$

$$v_{15} := -0.00003033333332316926$$

$$v_{16} := -0.00003033333332262933$$

$$v_{17} := -0.00003033333332218620$$

$$v_{18} := -0.00003033333332158003$$

$$v_{19} := -0.00003033333332060405$$

$v_{20} := -0.0000303333332037612$
 $v_{21} := -0.0000303333332056559$
 $v_{22} := -0.0000454999998483951$
 $v_{23} := -0.0000454999998402173$
 $v_{24} := -0.0000454999998297133$
 $v_{25} := -0.0000454999998231388$
 $v_{26} := -0.0000454999998102316$
 $v_{27} := -0.0000454999998096002$
 $v_{28} := -0.0000454999998130345$
 $v_{29} := -0.0000606666664605880$
 $v_{30} := -0.0000606666664543168$
 $v_{31} := -0.0000606666664414563$
 $v_{32} := -0.0000606666664285022$
 $v_{33} := -0.0000606666664206391$
 $v_{34} := -0.0000606666664196517$
 $v_{35} := -0.0000606666664280360$
 $v_{36} := -0.0000758333330714770$
 $v_{37} := -0.0000758333330564097$
 $v_{38} := -0.0000758333330486261$
 $v_{39} := -0.0000758333330493782$
 $v_{40} := -0.0000758333330299865$
 $v_{41} := -0.0000758333330319024$
 $v_{42} := -0.0000758333330392289$
 $v_{43} := -0.0000909999996807243$
 $v_{44} := -0.0000909999996708984$
 $v_{45} := -0.0000909999996630219$
 $v_{46} := -0.0000909999996564080$
 $v_{47} := -0.0000909999996473809$
 $v_{48} := -0.0000909999996489035$
 $v_{49} := -0.0000909999996618433$
 $v_{50} := -0.000106166666294524$
 $v_{51} := -0.000106166666279637$
 $v_{52} := -0.000106166666273126$

$v_{53} := -0.000106166666278757$
 $v_{54} := -0.000106166666260087$
 $v_{55} := -0.000106166666264786$
 $v_{56} := -0.000106166666274892$
 $v_{57} := -0.000121333332906314$
 $v_{58} := -0.000121333332896529$
 $v_{59} := -0.000121333332895226$
 $v_{60} := -0.000121333332895388$
 $v_{61} := -0.000121333332883954$
 $v_{62} := -0.000121333332883154$
 $v_{63} := -0.000121333332899489$
 $v_{64} := -0.000136499999535655$
 $v_{65} := -0.000136499999507388$
 $v_{66} := -0.000136499999513329$
 $v_{67} := -0.000136499999533979$
 $v_{68} := -0.000136499999495914$
 $v_{69} := -0.000136499999496838$
 $v_{70} := -0.000136499999508685$
 $v_{71} := -0.000151666666173695$
 $v_{72} := -0.000151666666162143$
 $v_{73} := -0.000151666666145934$
 $v_{74} := -0.000151666666131834$
 $v_{75} := -0.000151666666116608$
 $v_{76} := -0.000151666666113908$
 $v_{77} := -0.000151666666134079$
 $v_{78} := -0.000166833332813529$
 $v_{79} := -0.000166833332791589$
 $v_{80} := -0.000166833332771012$
 $v_{81} := -0.000166833332768669$
 $v_{82} := -0.000166833332732553$
 $v_{83} := -0.000166833332731339$
 $v_{84} := -0.000166833332745885$
 $v_{85} := -0.000181999999447740$

$$\begin{aligned}v_{86} &:= -0.000181999999416251 \\v_{87} &:= -0.000181999999410947 \\v_{88} &:= -0.000181999999407142 \\v_{89} &:= -0.000181999999367322 \\v_{90} &:= -0.000181999999360091 \\v_{91} &:= -0.000181999999382845 \\v_{92} &:= -0.000197166666091329 \\v_{93} &:= -0.000197166666064245 \\v_{94} &:= -0.000197166666041189 \\v_{95} &:= -0.000197166666038946 \\v_{96} &:= -0.000197166665992831 \\v_{97} &:= -0.000197166665989002 \\v_{98} &:= -0.000197166666005301 \\v_{99} &:= -0.000212333332737532 \\v_{100} &:= -0.000212333332709828 \\v_{101} &:= -0.000212333332688701 \\v_{102} &:= -0.000212333332670775 \\v_{103} &:= -0.000212333332635972 \\v_{104} &:= -0.000212333332630098 \\v_{105} &:= -0.000212333332657746 \\v_{106} &:= -0.000227499999377437 \\v_{107} &:= -0.000227499999348212 \\v_{108} &:= -0.000227499999324939 \\v_{109} &:= -0.000227499999326368 \\v_{110} &:= -0.000227499999276972 \\v_{111} &:= -0.000227499999274244 \\v_{112} &:= -0.000227499999293603 \\v_{113} &:= -0.000242666666028590 \\v_{114} &:= -0.000242666665983378 \\v_{115} &:= -0.000242666665981877 \\v_{116} &:= -0.000242666665984902 \\v_{117} &:= -0.000242666665934218 \\v_{118} &:= -0.000242666665930090\end{aligned}$$

$v_{119} := -0.000242666665962251$
 $v_{120} := -0.000257833332699101$
 $v_{121} := -0.000257833332664134$
 $v_{122} := -0.000257833332626923$
 $v_{123} := -0.000257833332622205$
 $v_{124} := -0.000257833332575783$
 $v_{125} := -0.000257833332583983$
 $v_{126} := -0.000257833332610280$
 $v_{127} := -0.000272999999370918$
 $v_{128} := -0.000272999999334697$
 $v_{129} := -0.000272999999294154$
 $v_{130} := -0.000272999999264310$
 $v_{131} := -0.000272999999241534$
 $v_{132} := -0.000272999999256317$
 $v_{133} := -0.000272999999297710$
 $v_{134} := -0.000288166666041876$
 $v_{135} := -0.000288166665980954$
 $v_{136} := -0.000288166665943804$
 $v_{137} := -0.000288166665950674$
 $v_{138} := -0.000288166665901192$
 $v_{139} := -0.000288166665933894$
 $v_{140} := -0.000288166665970255$
 $v_{141} := -0.000303333332709310$
 $v_{142} := -0.000303333332660753$
 $v_{143} := -0.000303333332606340$
 $v_{144} := -0.000303333332582133$
 $v_{145} := -0.000303333332591279$
 $v_{146} := -0.000303333332647511$
 $v_{147} := -0.000303333332708659$
 $v_{148} := -0.000318499999349655$
 $v_{149} := -0.000318499999314921$
 $v_{150} := -0.000318499999231930$
 $v_{151} := -0.000318499999200087$

$$\begin{aligned} v_{152} &:= -0.000318499999291277 \\ v_{153} &:= -0.000318499999428282 \\ v_{154} &:= -0.000318499999458384 \\ v_{155} &:= -0.000333666665809247 \\ v_{156} &:= -0.000333666665911298 \\ v_{157} &:= -0.000333666665805379 \\ v_{158} &:= -0.000333666665801249 \\ v_{159} &:= -0.000333666666107697 \\ v_{160} &:= -0.000333666666271452 \\ v_{161} &:= -0.000333666666365822 \\ v_{162} &:= -0.000348833332101550 \\ v_{163} &:= -0.000348833332063325 \\ v_{164} &:= -0.000348833332379927 \\ v_{165} &:= -0.000348833332723489 \\ v_{166} &:= -0.000348833332992948 \\ v_{167} &:= -0.000348833333270388 \\ v_{168} &:= -0.000348833333223555 \\ v_{169} &:= -0.000363999998539546 \\ v_{170} &:= -0.000363999998388386 \\ v_{171} &:= -0.000363999999045345 \\ v_{172} &:= -0.000363999999715316 \\ v_{173} &:= -0.000363999999793647 \\ v_{174} &:= -0.000364000000010889 \\ v_{175} &:= -0.000363999999916497 \end{aligned}$$

Les contraintes σ_{xx} σ_{yy} τ_{xy} :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(1) &:= -5.99999997695268 \\ \sigma_{xx}(2) &:= -5.99999997906078 \\ \sigma_{xx}(3) &:= -5.99999997958928 \\ \sigma_{xx}(4) &:= -5.99999998235190 \\ \sigma_{xx}(5) &:= -5.99999997904018 \\ \sigma_{xx}(6) &:= -5.99999997567957 \\ \sigma_{xx}(7) &:= -5.99999997995903 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}(8) &:= -5.99999996760169 \\ \sigma_{xx}(9) &:= -5.99999998694938 \\ \sigma_{xx}(10) &:= -5.99999998147282 \\ \sigma_{xx}(11) &:= -5.99999998052011 \\ \sigma_{xx}(12) &:= -5.99999997537671 \\ \sigma_{xx}(13) &:= -5.99999997723530 \\ \sigma_{xx}(14) &:= -6.00000003877870 \\ \sigma_{xx}(15) &:= -5.99999991456374 \\ \sigma_{xx}(16) &:= -5.99999997662679 \\ \sigma_{xx}(17) &:= -5.99999998013446 \\ \sigma_{xx}(18) &:= -5.99999997879845 \\ \sigma_{xx}(19) &:= -5.99999993121544 \\ \sigma_{xx}(20) &:= -5.99999982932381 \\ \sigma_{xx}(21) &:= -6.00000012781560 \\ \sigma_{xx}(22) &:= -6.00000001771674 \\ \sigma_{xx}(23) &:= -5.99999998156751 \\ \sigma_{xx}(24) &:= -5.99999997394273 \\ \sigma_{xx}(25) &:= -5.99999997362923 \\ \sigma_{xx}(26) &:= -6.00000000842187 \\ \sigma_{xx}(27) &:= -5.99999993235512 \\ \sigma_{xx}(28) &:= -5.99999997415802 \\ \sigma_{xx}(29) &:= -5.99999999585609 \\ \sigma_{xx}(30) &:= -5.99999998374050 \\ \sigma_{xx}(31) &:= -6.00000002268728 \\ \sigma_{xx}(32) &:= -6.00000015059082 \\ \sigma_{xx}(33) &:= -5.99999983117178 \\ \sigma_{xx}(34) &:= -5.99999996434815 \\ \sigma_{xx}(35) &:= -5.99999994164356 \\ \sigma_{xx}(36) &:= -5.99999995175677 \\ \sigma_{xx}(37) &:= -5.99999996540970\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}(38) &:= -5.99999973159224 \\ \sigma_{xx}(39) &:= -6.00000025714803 \\ \sigma_{xx}(40) &:= -6.00000001496289 \\ \sigma_{xx}(41) &:= -5.99999996431510 \\ \sigma_{xx}(42) &:= -5.99999994628150 \\ \sigma_{xx}(43) &:= -6.00000003951047 \\ \sigma_{xx}(44) &:= -6.00000031944788 \\ \sigma_{xx}(45) &:= -5.99999970994750 \\ \sigma_{xx}(46) &:= -6.00000000313669 \\ \sigma_{xx}(47) &:= -5.99999990404213 \\ \sigma_{xx}(48) &:= -5.99999990488325 \\ \sigma_{xx}(49) &:= -6.00000023315152 \\ \sigma_{xx}(50) &:= -5.99999954679082 \\ \sigma_{xx}(51) &:= -6.00000046315018 \\ \sigma_{xx}(52) &:= -5.99999983886348 \\ \sigma_{xx}(53) &:= -5.99999990059894 \\ \sigma_{xx}(54) &:= -5.99999992561387 \\ \sigma_{xx}(55) &:= -6.00000022550256 \\ \sigma_{xx}(56) &:= -6.00000203283338 \\ \sigma_{xx}(57) &:= -5.99999798604708 \\ \sigma_{xx}(58) &:= -5.99999977016763 \\ \sigma_{xx}(59) &:= -5.99999993750081 \\ \sigma_{xx}(60) &:= -5.99999995256703 \\ \sigma_{xx}(61) &:= -5.99999938780926 \\ \sigma_{xx}(62) &:= -5.99999659254131 \\ \sigma_{xx}(63) &:= -6.00000330702513 \\ \sigma_{xx}(64) &:= -6.00000044037681 \\ \sigma_{xx}(65) &:= -6.00000014520358 \\ \sigma_{xx}(66) &:= -6.00000005759564 \\ \sigma_{xx}(67) &:= -6.00000026340118\end{aligned}$$

$\sigma_{xx}(68) := -6.00000276258210$
 $\sigma_{xx}(69) := -5.99999714194406$
 $\sigma_{xx}(70) := -5.99999969827069$
 $\sigma_{xx}(71) := -6.00000001649879$
 $\sigma_{xx}(72) := -6.00000003507904$
 $\sigma_{xx}(73) := -6.00000002364021$
 $\sigma_{xx}(74) := -5.99999874383604$
 $\sigma_{xx}(75) := -6.00000117445414$
 $\sigma_{xx}(76) := -5.99999991738174$
 $\sigma_{xx}(77) := -6.00000002097539$
 $\sigma_{xx}(78) := -6.00000006347947$
 $\sigma_{xx}(79) := -5.99999972750200$
 $\sigma_{xx}(80) := -6.00000013437202$
 $\sigma_{xx}(81) := -5.99999975535879$
 $\sigma_{xx}(82) := -6.00000016017895$
 $\sigma_{xx}(83) := -6.00000007784836$
 $\sigma_{xx}(84) := -6.00000007100268$
 $\sigma_{xx}(85) := -5.99999969484317$
 $\sigma_{xx}(86) := -5.99999976608652$
 $\sigma_{xx}(87) := -6.00000011745067$
 $\sigma_{xx}(88) := -6.00000002379362$
 $\sigma_{xx}(89) := -6.00000026433135$
 $\sigma_{xx}(90) := -6.00000009294949$
 $\sigma_{xx}(91) := -6.00000040416341$
 $\sigma_{xx}(92) := -5.99999864988409$
 $\sigma_{xx}(93) := -6.00000136145056$
 $\sigma_{xx}(94) := -5.99999996817669$
 $\sigma_{xx}(95) := -5.99999962038283$
 $\sigma_{xx}(96) := -5.99999993751481$
 $\sigma_{xx}(97) := -6.00000068792431$

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}(98) &:= -6.00000568454380 \\ \sigma_{xx}(99) &:= -5.99999428832425 \\ \sigma_{xx}(100) &:= -5.99999908448736 \\ \sigma_{xx}(101) &:= -6.00000018639993 \\ \sigma_{xx}(102) &:= -6.00000004634027 \\ \sigma_{xx}(103) &:= -5.99999860656438 \\ \sigma_{xx}(104) &:= -5.99999119838061 \\ \sigma_{xx}(105) &:= -6.00000874933734 \\ \sigma_{xx}(106) &:= -6.00000141103732 \\ \sigma_{xx}(107) &:= -5.99999994934370 \\ \sigma_{xx}(108) &:= -6.00000004048901 \\ \sigma_{xx}(109) &:= -6.00000028773739 \\ \sigma_{xx}(110) &:= -6.00000768984523 \\ \sigma_{xx}(111) &:= -5.99999203498867 \\ \sigma_{xx}(112) &:= -5.99999973323667 \\ \sigma_{xx}(113) &:= -5.99999998729497 \\ \sigma_{xx}(114) &:= -6.00000024958000 \\ \sigma_{xx}(115) &:= -5.99999914020856 \\ \sigma_{xx}(116) &:= -5.99999305348146 \\ \sigma_{xx}(117) &:= -6.00000601169955 \\ \sigma_{xx}(118) &:= -6.00000042326062 \\ \sigma_{xx}(119) &:= -6.00000038518812 \\ \sigma_{xx}(120) &:= -6.00000089678840 \\ \sigma_{xx}(121) &:= -5.99999798551556 \\ \sigma_{xx}(122) &:= -6.00000537845428 \\ \sigma_{xx}(123) &:= -5.99999260808418 \\ \sigma_{xx}(124) &:= -5.99999950805310 \\ \sigma_{xx}(125) &:= -6.00000242013283 \\ \sigma_{xx}(126) &:= -6.00000198565439 \\ \sigma_{xx}(127) &:= -5.99998939354497\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}(128) &:= -5.99999086413046 \\
\sigma_{xx}(129) &:= -6.00000711381738 \\
\sigma_{xx}(130) &:= -6.00000861349885 \\
\sigma_{xx}(131) &:= -6.00000174864422 \\
\sigma_{xx}(132) &:= -6.00000187695828 \\
\sigma_{xx}(133) &:= -5.99999574246473 \\
\sigma_{xx}(134) &:= -5.99996512071708 \\
\sigma_{xx}(135) &:= -6.00003969367510 \\
\sigma_{xx}(136) &:= -5.99999666546638 \\
\sigma_{xx}(137) &:= -6.00000745971101 \\
\sigma_{xx}(138) &:= -5.99999506499652 \\
\sigma_{xx}(139) &:= -6.00001550399793 \\
\sigma_{xx}(140) &:= -6.00007424121675 \\
\sigma_{xx}(141) &:= -5.99993667210913 \\
\sigma_{xx}(142) &:= -6.00002694977363 \\
\sigma_{xx}(143) &:= -5.99995703509373 \\
\sigma_{xx}(144) &:= -5.99998965950692
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{yy}(1) &:= -19.9999999325552 \\
\sigma_{yy}(2) &:= -19.9999999335564 \\
\sigma_{yy}(3) &:= -19.9999999333888 \\
\sigma_{yy}(4) &:= -19.9999999376981 \\
\sigma_{yy}(5) &:= -19.9999999247311 \\
\sigma_{yy}(6) &:= -19.9999999136516 \\
\sigma_{yy}(7) &:= -19.9999999325858 \\
\sigma_{yy}(8) &:= -19.9999999279291 \\
\sigma_{yy}(9) &:= -19.9999999369944 \\
\sigma_{yy}(10) &:= -19.9999999429649 \\
\sigma_{yy}(11) &:= -19.9999999232344 \\
\sigma_{yy}(12) &:= -19.9999999092238
\end{aligned}$$

$\sigma_{yy}(13) := -19.9999999331845$
 $\sigma_{yy}(14) := -19.9999999536241$
 $\sigma_{yy}(15) := -19.9999999063516$
 $\sigma_{yy}(16) := -19.9999999328746$
 $\sigma_{yy}(17) := -19.9999999137866$
 $\sigma_{yy}(18) := -19.9999999139700$
 $\sigma_{yy}(19) := -19.9999999167781$
 $\sigma_{yy}(20) := -19.9999998887685$
 $\sigma_{yy}(21) := -19.9999999855574$
 $\sigma_{yy}(22) := -19.9999999182566$
 $\sigma_{yy}(23) := -19.9999999300929$
 $\sigma_{yy}(24) := -19.9999998991527$
 $\sigma_{yy}(25) := -19.9999999215159$
 $\sigma_{yy}(26) := -19.9999999236298$
 $\sigma_{yy}(27) := -19.9999998852773$
 $\sigma_{yy}(28) := -19.9999999735225$
 $\sigma_{yy}(29) := -19.9999999194175$
 $\sigma_{yy}(30) := -19.9999999371732$
 $\sigma_{yy}(31) := -19.9999999426858$
 $\sigma_{yy}(32) := -19.9999999842574$
 $\sigma_{yy}(33) := -19.9999999015233$
 $\sigma_{yy}(34) := -19.9999998882843$
 $\sigma_{yy}(35) := -19.9999999266565$
 $\sigma_{yy}(36) := -19.9999998972539$
 $\sigma_{yy}(37) := -19.9999999247840$
 $\sigma_{yy}(38) := -19.9999998507822$
 $\sigma_{yy}(39) := -19.9999999888678$
 $\sigma_{yy}(40) := -19.9999999818723$
 $\sigma_{yy}(41) := -19.9999999128407$
 $\sigma_{yy}(42) := -19.9999999398845$

$\sigma_{yy}(43) := -19.9999999506998$
 $\sigma_{yy}(44) := -20.0000000346180$
 $\sigma_{yy}(45) := -19.9999998709851$
 $\sigma_{yy}(46) := -19.9999999208293$
 $\sigma_{yy}(47) := -19.9999999445851$
 $\sigma_{yy}(48) := -19.9999998815090$
 $\sigma_{yy}(49) := -20.0000000157037$
 $\sigma_{yy}(50) := -19.9999997943595$
 $\sigma_{yy}(51) := -20.0000000454282$
 $\sigma_{yy}(52) := -19.999999994990$
 $\sigma_{yy}(53) := -19.9999998989295$
 $\sigma_{yy}(54) := -19.9999999399762$
 $\sigma_{yy}(55) := -20.0000000449661$
 $\sigma_{yy}(56) := -20.0000006104849$
 $\sigma_{yy}(57) := -19.9999994191283$
 $\sigma_{yy}(58) := -19.9999997815998$
 $\sigma_{yy}(59) := -19.9999999429408$
 $\sigma_{yy}(60) := -19.9999998829417$
 $\sigma_{yy}(61) := -19.9999997795490$
 $\sigma_{yy}(62) := -19.9999989373566$
 $\sigma_{yy}(63) := -20.0000009226761$
 $\sigma_{yy}(64) := -20.0000001606216$
 $\sigma_{yy}(65) := -19.9999999780934$
 $\sigma_{yy}(66) := -19.999999902091$
 $\sigma_{yy}(67) := -20.0000000359816$
 $\sigma_{yy}(68) := -20.0000007708424$
 $\sigma_{yy}(69) := -19.9999991147749$
 $\sigma_{yy}(70) := -19.9999998883974$
 $\sigma_{yy}(71) := -19.999999935791$
 $\sigma_{yy}(72) := -19.9999999223441$

$\sigma_{yy}(73) := -19.999999836797$
 $\sigma_{yy}(74) := -19.9999996130323$
 $\sigma_{yy}(75) := -20.0000003074530$
 $\sigma_{yy}(76) := -19.9999999539044$
 $\sigma_{yy}(77) := -19.9999999442522$
 $\sigma_{yy}(78) := -20.0000000102350$
 $\sigma_{yy}(79) := -19.9999998949608$
 $\sigma_{yy}(80) := -20.0000000154932$
 $\sigma_{yy}(81) := -19.9999999334887$
 $\sigma_{yy}(82) := -19.9999999739523$
 $\sigma_{yy}(83) := -20.0000000053546$
 $\sigma_{yy}(84) := -19.9999999309598$
 $\sigma_{yy}(85) := -19.9999998770641$
 $\sigma_{yy}(86) := -19.9999998988119$
 $\sigma_{yy}(87) := -19.9999999655220$
 $\sigma_{yy}(88) := -20.0000000392621$
 $\sigma_{yy}(89) := -20.0000000369259$
 $\sigma_{yy}(90) := -20.0000000472633$
 $\sigma_{yy}(91) := -20.0000000946782$
 $\sigma_{yy}(92) := -19.9999995457387$
 $\sigma_{yy}(93) := -20.0000003955232$
 $\sigma_{yy}(94) := -19.9999999862000$
 $\sigma_{yy}(95) := -19.9999998823211$
 $\sigma_{yy}(96) := -19.9999999007802$
 $\sigma_{yy}(97) := -20.0000002187754$
 $\sigma_{yy}(98) := -20.0000017453344$
 $\sigma_{yy}(99) := -19.9999982761288$
 $\sigma_{yy}(100) := -19.9999996789611$
 $\sigma_{yy}(101) := -19.9999999756634$
 $\sigma_{yy}(102) := -20.0000000318699$

$\sigma_{yy}(103) := -19.9999995890353$
 $\sigma_{yy}(104) := -19.9999973678268$
 $\sigma_{yy}(105) := -20.0000026723436$
 $\sigma_{yy}(106) := -20.0000003245354$
 $\sigma_{yy}(107) := -19.9999999576908$
 $\sigma_{yy}(108) := -19.9999999390759$
 $\sigma_{yy}(109) := -20.0000000782882$
 $\sigma_{yy}(110) := -20.0000022820643$
 $\sigma_{yy}(111) := -19.9999975256291$
 $\sigma_{yy}(112) := -20.0000000253633$
 $\sigma_{yy}(113) := -19.9999999141606$
 $\sigma_{yy}(114) := -20.0000001167709$
 $\sigma_{yy}(115) := -19.9999997520403$
 $\sigma_{yy}(116) := -19.9999979437994$
 $\sigma_{yy}(117) := -20.0000018561295$
 $\sigma_{yy}(118) := -19.9999999104834$
 $\sigma_{yy}(119) := -20.0000000464744$
 $\sigma_{yy}(120) := -20.0000001931620$
 $\sigma_{yy}(121) := -19.9999993740007$
 $\sigma_{yy}(122) := -20.0000016173234$
 $\sigma_{yy}(123) := -19.9999977485163$
 $\sigma_{yy}(124) := -19.9999995494693$
 $\sigma_{yy}(125) := -20.0000004284268$
 $\sigma_{yy}(126) := -20.0000009019113$
 $\sigma_{yy}(127) := -19.9999966532825$
 $\sigma_{yy}(128) := -19.9999971902850$
 $\sigma_{yy}(129) := -20.0000019740397$
 $\sigma_{yy}(130) := -20.0000018613051$
 $\sigma_{yy}(131) := -20.0000005935838$
 $\sigma_{yy}(132) := -20.0000004294845$

$$\begin{aligned}
\sigma_{yy}(133) &:= -19.9999981909760 \\
\sigma_{yy}(134) &:= -19.9999886667743 \\
\sigma_{yy}(135) &:= -20.0000111733518 \\
\sigma_{yy}(136) &:= -19.9999994189365 \\
\sigma_{yy}(137) &:= -20.0000020243750 \\
\sigma_{yy}(138) &:= -19.9999996823558 \\
\sigma_{yy}(139) &:= -20.0000043106714 \\
\sigma_{yy}(140) &:= -20.0000216598616 \\
\sigma_{yy}(141) &:= -19.9999804142353 \\
\sigma_{yy}(142) &:= -20.0000090501430 \\
\sigma_{yy}(143) &:= -19.9999875258395 \\
\sigma_{yy}(144) &:= -19.9999972449094
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{xy}(1) &:= -2.92503672346688 \cdot 10^{-10} \\
\tau_{xy}(2) &:= -2.14858585892349 \cdot 10^{-9} \\
\tau_{xy}(3) &:= 2.55602278031471 \cdot 10^{-9} \\
\tau_{xy}(4) &:= -2.29781377793509 \cdot 10^{-9} \\
\tau_{xy}(5) &:= 2.89359277546188 \cdot 10^{-9} \\
\tau_{xy}(6) &:= -1.04200168788400 \cdot 10^{-9} \\
\tau_{xy}(7) &:= 8.46673283999753 \cdot 10^{-10} \\
\tau_{xy}(8) &:= 4.40844005079804 \cdot 10^{-9} \\
\tau_{xy}(9) &:= -9.86527649729331 \cdot 10^{-9} \\
\tau_{xy}(10) &:= 1.76592035091735 \cdot 10^{-9} \\
\tau_{xy}(11) &:= -4.44610773627369 \cdot 10^{-9} \\
\tau_{xy}(12) &:= -5.15203698326121 \cdot 10^{-9} \\
\tau_{xy}(13) &:= 4.40223612086707 \cdot 10^{-10} \\
\tau_{xy}(14) &:= -7.88353423642837 \cdot 10^{-9} \\
\tau_{xy}(15) &:= 3.16621019921202 \cdot 10^{-8} \\
\tau_{xy}(16) &:= 3.88402084250658 \cdot 10^{-9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{xy}(17) &:= -6.04326784904207 \cdot 10^{-9} \\
\tau_{xy}(18) &:= -7.90233263409518 \cdot 10^{-9} \\
\tau_{xy}(19) &:= 2.68463469926753 \cdot 10^{-9} \\
\tau_{xy}(20) &:= 4.69690559130342 \cdot 10^{-9} \\
\tau_{xy}(21) &:= -5.43890270006099 \cdot 10^{-8} \\
\tau_{xy}(22) &:= -1.05555504904120 \cdot 10^{-8} \\
\tau_{xy}(23) &:= -5.89777625751705 \cdot 10^{-9} \\
\tau_{xy}(24) &:= -3.61999259346678 \cdot 10^{-9} \\
\tau_{xy}(25) &:= -1.23519650699314 \cdot 10^{-8} \\
\tau_{xy}(26) &:= 1.19436211717228 \cdot 10^{-8} \\
\tau_{xy}(27) &:= 2.83534547325036 \cdot 10^{-8} \\
\tau_{xy}(28) &:= -1.59421587836894 \cdot 10^{-8} \\
\tau_{xy}(29) &:= -9.10526328443644 \cdot 10^{-9} \\
\tau_{xy}(30) &:= -1.23527823915691 \cdot 10^{-8} \\
\tau_{xy}(31) &:= 1.86280278054302 \cdot 10^{-8} \\
\tau_{xy}(32) &:= -4.41954165554259 \cdot 10^{-10} \\
\tau_{xy}(33) &:= 1.24321293105584 \cdot 10^{-8} \\
\tau_{xy}(34) &:= 3.13426501620268 \cdot 10^{-8} \\
\tau_{xy}(35) &:= 7.44396531565349 \cdot 10^{-9} \\
\tau_{xy}(36) &:= 1.09082414571074 \cdot 10^{-8} \\
\tau_{xy}(37) &:= -9.34115231709300 \cdot 10^{-9} \\
\tau_{xy}(38) &:= 1.28815894911527 \cdot 10^{-8} \\
\tau_{xy}(39) &:= -9.85229526128249 \cdot 10^{-9} \\
\tau_{xy}(40) &:= -2.55586150524156 \cdot 10^{-8} \\
\tau_{xy}(41) &:= 9.34332072143789 \cdot 10^{-9} \\
\tau_{xy}(42) &:= -3.51024631356551 \cdot 10^{-9} \\
\tau_{xy}(43) &:= 2.31150568761990 \cdot 10^{-8} \\
\tau_{xy}(44) &:= 1.25713408695000 \cdot 10^{-8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{xy}(45) &:= 1.78842651151349 \cdot 10^{-8} \\
\tau_{xy}(46) &:= 2.92756604203494 \cdot 10^{-8} \\
\tau_{xy}(47) &:= 3.31779208794031 \cdot 10^{-9} \\
\tau_{xy}(48) &:= 3.14518043007416 \cdot 10^{-8} \\
\tau_{xy}(49) &:= -5.40623902461199 \cdot 10^{-8} \\
\tau_{xy}(50) &:= 4.65132739997730 \cdot 10^{-8} \\
\tau_{xy}(51) &:= 2.68230283059511 \cdot 10^{-8} \\
\tau_{xy}(52) &:= -5.49241474928438 \cdot 10^{-8} \\
\tau_{xy}(53) &:= 2.57881323123049 \cdot 10^{-8} \\
\tau_{xy}(54) &:= -6.54437775312811 \cdot 10^{-9} \\
\tau_{xy}(55) &:= 8.36518354552075 \cdot 10^{-8} \\
\tau_{xy}(56) &:= -1.20251565110972 \cdot 10^{-7} \\
\tau_{xy}(57) &:= 6.61660896985955 \cdot 10^{-8} \\
\tau_{xy}(58) &:= 1.36608539645838 \cdot 10^{-7} \\
\tau_{xy}(59) &:= -2.01014418777457 \cdot 10^{-9} \\
\tau_{xy}(60) &:= 3.27517126653994 \cdot 10^{-8} \\
\tau_{xy}(61) &:= -5.05331620545200 \cdot 10^{-8} \\
\tau_{xy}(62) &:= 2.69914966435152 \cdot 10^{-8} \\
\tau_{xy}(63) &:= -2.56286445047353 \cdot 10^{-7} \\
\tau_{xy}(64) &:= -1.44909058037787 \cdot 10^{-7} \\
\tau_{xy}(65) &:= -1.84748050184140 \cdot 10^{-8} \\
\tau_{xy}(66) &:= -4.46308321478787 \cdot 10^{-8} \\
\tau_{xy}(67) &:= -3.18400487586764 \cdot 10^{-8} \\
\tau_{xy}(68) &:= 4.85015339836976 \cdot 10^{-8} \\
\tau_{xy}(69) &:= 2.23706069685267 \cdot 10^{-7} \\
\tau_{xy}(70) &:= 2.80109802862792 \cdot 10^{-8} \\
\tau_{xy}(71) &:= -3.27721290263082 \cdot 10^{-8} \\
\tau_{xy}(72) &:= 2.28376345603212 \cdot 10^{-8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{xy}(73) &:= 3.84764335761613 \cdot 10^{-8} \\
\tau_{xy}(74) &:= -7.28833393181112 \cdot 10^{-8} \\
\tau_{xy}(75) &:= -7.48742681073834 \cdot 10^{-8} \\
\tau_{xy}(76) &:= -9.80585804823513 \cdot 10^{-9} \\
\tau_{xy}(77) &:= 1.42499527129752 \cdot 10^{-8} \\
\tau_{xy}(78) &:= -5.53632994127831 \cdot 10^{-8} \\
\tau_{xy}(79) &:= 5.34374894739911 \cdot 10^{-9} \\
\tau_{xy}(80) &:= 1.28257447392552 \cdot 10^{-8} \\
\tau_{xy}(81) &:= -8.32669937240908 \cdot 10^{-8} \\
\tau_{xy}(82) &:= 6.41244536077199 \cdot 10^{-8} \\
\tau_{xy}(83) &:= -2.34806832088133 \cdot 10^{-8} \\
\tau_{xy}(84) &:= 4.20667774102201 \cdot 10^{-8} \\
\tau_{xy}(85) &:= -6.62130606727124 \cdot 10^{-10} \\
\tau_{xy}(86) &:= -8.58688120574172 \cdot 10^{-9} \\
\tau_{xy}(87) &:= 1.09701243811038 \cdot 10^{-7} \\
\tau_{xy}(88) &:= -8.63942998303498 \cdot 10^{-8} \\
\tau_{xy}(89) &:= -1.34585184871593 \cdot 10^{-8} \\
\tau_{xy}(90) &:= -7.82795302905896 \cdot 10^{-8} \\
\tau_{xy}(91) &:= -8.89355362822868 \cdot 10^{-8} \\
\tau_{xy}(92) &:= 1.81958081073811 \cdot 10^{-7} \\
\tau_{xy}(93) &:= -6.32106546567188 \cdot 10^{-8} \\
\tau_{xy}(94) &:= 2.51235997807650 \cdot 10^{-8} \\
\tau_{xy}(95) &:= 3.04147732628174 \cdot 10^{-8} \\
\tau_{xy}(96) &:= 7.91346155239446 \cdot 10^{-8} \\
\tau_{xy}(97) &:= 1.01790637880365 \cdot 10^{-7} \\
\tau_{xy}(98) &:= -3.02231530388633 \cdot 10^{-7} \\
\tau_{xy}(99) &:= 2.73872537885033 \cdot 10^{-7} \\
\tau_{xy}(100) &:= 1.18505899533139 \cdot 10^{-7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{xy}(101) &:= 6.68044679377294 \cdot 10^{-8} \\
\tau_{xy}(102) &:= -6.38714508607721 \cdot 10^{-8} \\
\tau_{xy}(103) &:= -7.84121699163629 \cdot 10^{-9} \\
\tau_{xy}(104) &:= 5.37558779519538 \cdot 10^{-8} \\
\tau_{xy}(105) &:= -6.69195735123693 \cdot 10^{-7} \\
\tau_{xy}(106) &:= 9.70006660425825 \cdot 10^{-8} \\
\tau_{xy}(107) &:= 4.68556817258636 \cdot 10^{-8} \\
\tau_{xy}(108) &:= 9.29075192810452 \cdot 10^{-8} \\
\tau_{xy}(109) &:= -1.80354395940469 \cdot 10^{-7} \\
\tau_{xy}(110) &:= -2.32279473424003 \cdot 10^{-8} \\
\tau_{xy}(111) &:= 6.94177354459968 \cdot 10^{-7} \\
\tau_{xy}(112) &:= -1.92077657190651 \cdot 10^{-7} \\
\tau_{xy}(113) &:= 1.29933990911883 \cdot 10^{-7} \\
\tau_{xy}(114) &:= -8.84746335987649 \cdot 10^{-8} \\
\tau_{xy}(115) &:= 1.25221948190249 \cdot 10^{-7} \\
\tau_{xy}(116) &:= -8.28066248016385 \cdot 10^{-8} \\
\tau_{xy}(117) &:= -5.79058168912869 \cdot 10^{-7} \\
\tau_{xy}(118) &:= 4.63396415238614 \cdot 10^{-7} \\
\tau_{xy}(119) &:= 1.31358065445335 \cdot 10^{-7} \\
\tau_{xy}(120) &:= 9.47431235990900 \cdot 10^{-8} \\
\tau_{xy}(121) &:= 1.28077569912127 \cdot 10^{-7} \\
\tau_{xy}(122) &:= -3.15859518015362 \cdot 10^{-7} \\
\tau_{xy}(123) &:= 1.92828659015452 \cdot 10^{-7} \\
\tau_{xy}(124) &:= 6.74679863232373 \cdot 10^{-7} \\
\tau_{xy}(125) &:= 4.58822616633983 \cdot 10^{-7} \\
\tau_{xy}(126) &:= -5.02818940310482 \cdot 10^{-7} \\
\tau_{xy}(127) &:= 0.00000121853061823929 \\
\tau_{xy}(128) &:= -2.84580585581008 \cdot 10^{-7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{xy}(129) &:= -2.38557571123580 \cdot 10^{-7} \\ \tau_{xy}(130) &:= 0.00000139563574366912 \\ \tau_{xy}(131) &:= 7.93756086468284 \cdot 10^{-9} \\ \tau_{xy}(132) &:= 3.95593280339831 \cdot 10^{-7} \\ \tau_{xy}(133) &:= -0.00000147809061992595 \\ \tau_{xy}(134) &:= 0.00000444834447037549 \\ \tau_{xy}(135) &:= 0.00000182698994814398 \\ \tau_{xy}(136) &:= -3.81874553331286 \cdot 10^{-7} \\ \tau_{xy}(137) &:= 5.63254571166818 \cdot 10^{-7} \\ \tau_{xy}(138) &:= -9.95133462773007 \cdot 10^{-7} \\ \tau_{xy}(139) &:= -0.00000104096699205076 \\ \tau_{xy}(140) &:= 0.00000305347467384111 \\ \tau_{xy}(141) &:= 0.00000601347337286216 \\ \tau_{xy}(142) &:= -0.00000275403311256281 \\ \tau_{xy}(143) &:= 0.00000238167712038410 \\ \tau_{xy}(144) &:= 4.16784128560447 \cdot 10^{-7}\end{aligned}$$