

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN DE TIARET.



FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES

DÉPARTEMENT GÉNIE CIVIL

Mémoire de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme de Master

Spécialité : Génie Civil

Option : Géotechnique

Thème

Effet des fondations élastiques sur le comportement mécanique des structures en FGM

Soutenu publiquement le 3 Juin 2025

Présenté par :

- ALLOUCHE Roufaïda
- ANCEUR Abir

Devant le jury composé de :

M. AIT AMAR MEZIANE. M	Professeur	Président
M. HADJI Lzreg	Professeur	Encadreur
M. REBAHI Abderazak	Maître Conférences "A" (Univ.de Tiaret)	Examineur
M. ABDELAZIZ Hadj Henni	Maître Conférences "A" (Univ.de Tiaret)	Examineur
Mme. ZOUATNIA Nafissa	Maître Conférences "B" (Univ.de Tiaret)	Examineur

Année universitaire : 2024 - 2025

"بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ
الرَّحِيمِ"

Remerciements

*Tout d'abord, Nous tenons à remercier notre Dieu **ALLAH** tout puissant de nous avoir donné la patience et le courage pour réaliser ce modeste travail avec succès.*

*Nous exprimons notre profonde gratitude envers, **Monsieur HADJI lazreg**, notre directeur de mémoire, pour sa disponibilité, sa patience et ses conseils précieux. Grâce à son encadrement attentif et ses orientations pertinentes, nous avons pu avancer avec confiance dans nos recherches.*

*Mes vifs remerciements vont également aux membres du jury, Messieurs : **Pr AIT AMAR MEZIANE Mohamed** , **M ABDELAZIZ Hadj Henni**, **M RABAHI Abderrazak**, **Mme ZOUATNIA Nafissa** ; ils ont témoigné pour cette étude en acceptant de participer au jury.*

Nous adressons également nos remerciements à toute l'équipe pédagogique de l'Université Ibn Khaldoun de Tiaret pour la qualité de l'enseignement dispensé durant notre parcours et pour leur accompagnement constant.

Dédicace

À mes chers parents,

*Je dédie ce mémoire avec tout mon amour, mon respect et ma profonde reconnaissance.
À vous, pour tous les sacrifices que vous avez consentis, pour votre soutien inconditionnel, vos
prières silencieuses, vos encouragements dans les moments de doute, et votre foi en moi même
lorsque je doutais de moi.*

Vous avez toujours été mon pilier, et sans vous, je n'aurais jamais pu arriver jusque-là.

À mes chers « Inès, Amar et Youcef »

*Chacun de vos sourires a illuminé mon chemin
Chaque mot d'encouragement à nourrir mes rêves
Merci d'avoir été mes anges graders cette réussite est aussi la votre*

À mon binôme roufaïda

*Merci pour ta collaboration, ta patience et ton engagement tout au long de ce travail.
Ce mémoire est le fruit de nos efforts communs, de nos échanges et de notre entraide.
C'est avec plaisir et fierté que je partage cette réussite avec toi*

À Mon cher professeur M.HADJI lazerg

*Merci pour votre soutien, vos conseils et votre patience tout au long de ce travail.
Votre encadrement a été essentiel à ma réussite.*

Anceur abir

Dédicace

Louange à Dieu, grâce à qui les bonnes choses s'accomplissent, et je Lui demande que ce succès soit le début de nombreux progrès et contributions à venir.

J'exprime ma plus profonde gratitude à mes chers parents, qui ont toujours été mon soutien indéfectible à chaque étape de mon parcours. Grâce à leurs prières, leur amour et leurs encouragements constants, je n'aurais jamais pu atteindre ce jour mémorable.

*"Merci à mes chers petits **Abdelsamad** et **Firdous** pour votre amour et votre innocence qui remplissent ma vie de joie et de bonheur."*

*Je remercie tout particulièrement mon professeur respecté, **M. Hadji Lazreg**, qui n'a jamais ménagé son savoir ni son expérience. Son accompagnement précieux et ses conseils avisés ont joué un rôle déterminant dans mon orientation et la réussite de mes études.*

*J'adresse aussi mes remerciements sincères à ma chère amie **Abir**, qui a été à mes côtés à chaque étape de cette recherche, une véritable partenaire partageant idées et défis, et une source d'inspiration et de force indispensable.*

À vous tous, je présente mes plus sincères remerciements et prie Dieu de nous accorder à chacun réussite et satisfaction.

.

Allouche roufaida

Résumé

Dans ce mémoire, nous présenterons l'analyse des vibrations libres d'une plaque FG reposant sur une fondation élastique de type Winkler-Pasternak-Kerr, en utilisant la théorie d'ordre élevé pour étudier l'effet couplé de ces fondations variables, supposées avoir deux paramètres variantes simultanément. Les résultats de l'analyse des vibrations libres de la plaque FG seront exposés. L'objectif de ce mémoire est de présenter et de discuter les résultats de l'analyse des vibrations naturelles des plaques FGM en prenant en compte l'effet de la porosité. Trois profils de distribution de la porosité en gradient fonctionnel pour les plaques FGM, à savoir la distribution uniforme (UD) et non-uniforme, logarithmique- non uniforme, seront analysés afin d'évaluer l'effet de cette dispersion.

Mots clés : Vibration libre; Matériaux fonctionnellement gradués; Porosité; Principe d'Hamilton ; Fondation Élastique.

Abstract

In this thesis, we present the analysis of the free vibrations of an FG plate resting on a Winkler-Pasternak-Kerr type elastic foundation, using a higher-order theory to study the coupled effect of these variable foundations, assumed to have two parameters varying simultaneously. The results of the free vibration analysis of the FG plate will be presented. The objective of this thesis is to present and discuss the results of the natural vibration analysis of FGM plates by taking into account the effect of porosity. Three functional gradient porosity distribution profiles for FGM plates, namely uniform, non-uniform, and logarithmic non-uniform distributions, will be analyzed to evaluate the effect of this dispersion.

Keywords: Free vibration; Functionally graded materials; Porosity; Hamilton's principle; Elastic foundation.

في هذا البحث، تُقدّم تحليلاً للاهتزازات الحرة للوحة مصنوعة من مادة متدرجة وظيفياً (FG) موضوعة على أساس مرن من نوع وينكلر-باسترنك-كبير، وذلك باستخدام نظرية من الرتبة العليا لدراسة التأثير المتداخل للأساسات المتغيرة، حيث يُفترض أن هناك معاملين يتغيران في آنٍ واحد. سيتم عرض نتائج تحليل الاهتزازات الحرة لهذه اللوحة.

يهدف هذا البحث إلى تقديم ومناقشة نتائج تحليل الاهتزازات الطبيعية للصفائح المصنوعة من مواد متدرجة وظيفياً (FGM) مع أخذ تأثير المسامية في الحسبان. سيتم تحليل ثلاثة نماذج لتوزيع المسامية في الصفائح FGM ، وهي: التوزيع المنتظم، التوزيع غير المنتظم، والتوزيع غير المنتظم اللوغاريتمي، وذلك بهدف تقييم تأثير هذا التوزيع على سلوك الاهتزاز.

الكلمات المفتاحية: اهتزازات حرة؛ مواد متدرجة وظيفياً؛ المسامية؛ مبدأ هاملتون؛ أساس مرن.

Sommaire

Remerciements.....	i
Dédicace.....	ii
Résumé.....	iv
Abstract.....	v
ملخص.....	vi
Sommaire.....	vii
Liste des figures.....	x
Liste des tableaux.....	xiii
Liste d'abréviation.....	xiv
Introduction générale.....	1

Chapitre I : Généralités sur les matériaux (FGM).

I.1. Introduction	5
I.1.1.Définition de Matériaux à gradient fonctionnel(FGM).....	5
I.3. Historique des FGM.....	6
I.4.Développements récents et concept des FGM.....	7
I.5.La Différence entre FGM et les matériaux composites traditionnels.....	9
I.6.Propriétés matérielles effectives d'un matériau FGM.....	10
I.7.Propriétés physiques et mécaniques des FGM.....	11
I.7.1.Propriétés physiques.....	11
I.7.2.Propriétés mécaniques	11
I.8.Les Avantages et inconvénients des Matériaux Fonctionnellement Gradués (FGM).....	11
I.8.1.Les Avantages.....	11
I.8.2.Les inconvénients.....	12
I.9.Domaines d'Application.....	13
I.9.1.Biomédical.....	13
I.9.2.Applications d'énergie Solaire.....	14
I.9.3.Applications Industrielles.....	14
I.9.4.Industries Aérospatiales et Aéronautiques.....	15
I.10.Domaine d'application en Génie civil.....	17
I.11.Les FGMs minces ou massifs.....	18
I.12.Dépôt physique en phase vapeur "PVD" Et Dépôt chimique en phase vapeur "CVD"	18

I.13.	Le dépôt chimique en phase vapeur assisté par plasma (PACVD).....	18
I.14.	Les models de FGM.....	18
I.14.1.	Modèle Voigt.....	18
I.14.2.	Modèle Reuss.....	19
I.14.3.	Modèle de Mori-Tanaka.....	19
I.14.4.	Modèle auto-cohérent de Hill.....	20
I.15.	Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM.....	22
I.15.1.	Propriétés matérielles de la plaque P-FGM	23
I.15.2.	Propriétés matérielles de la plaque S-FGM	24
I.15.3.	Les propriétés matérielles de la plaque E-FGM	25
I.16.	conclusion.....	26

Chapitre II: Les théories régissant le comportement des structures en matériaux à gradient de propriétés.

II.1.	Introduction.....	27
II.2.	Définition de plaque.....	27
II.3.	Les catégories des théories des plaques.....	28
II.3.1	Les théories basées sur la contrainte.....	28
II.3.2	Les théories basées sur le déplacement.....	28
II.4.	Théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CLPT).....	29
II.5.	La théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT).....	30
II.6.	La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé Reddy HSDT (PSDT).....	31
II.7.	La théorie des plaques tridimensionnelles (Élasticité 3D).....	34
II.8.	La théorie raffinée de déformation des plaques (RPT).....	35
II.9.	Conclusion.....	36

Chapitre III : synthèse des travaux antérieurs sur l'effet de fondation élastiques.

III.1.	Introduction.....	37
III.2.	Les modèles analytiques de l'interaction sol-structure.....	37
III.2.1.	Fondation de Winkler.....	38
III.2.2.	Fondation de Pasternak.....	39
III.2.3.	Fondation Kerr.....	39
III.3.	Synthèse des travaux antérieurs sur l'effet de fondation.....	40
III.4.	Modèles de porosité.....	43
III.4.1.	Plaque FG avec porosité uniforme.....	43

III.4.2. Plaque FG avec porosité non uniforme.....	44
III.4.3. Plaque FG avec porosité logarithmique- non uniforme.....	44
III.5.Conclusion.....	46

Chapitre IV : analyse théorique des plaques poreuse en FGM

Sur une fondation élastique.

IV.1. Introduction.....	47
IV.2. Formulation du problème.....	47
IV.3.Théories raffinées d'ordre élevé à quatre variables	48
IV.3.1. Hypothèses de base.....	48
IV.3.2. Champs de déplacement.....	49
IV.3.3. Champs de déformation.....	50
IV.3.4. Relations constitutives.....	50
IV.4. Les équations d'équilibres.....	51
IV.5. Différentes modélisations de la fondation élastique.....	52
IV.5.1. Modèle de Winkler.....	53
IV.5.2. Modèle de Pasternak.....	53
IV.5.3. Modèle de Kerr.....	53
IV.6. Énergie cinétique.....	53
IV.7. Les équations de gouvernantes de la plaque.....	54
IV.8. Solution analytique pour les plaques FG simplement appuyées.....	56
IV.9. Conclusion.....	62

Chapitre v : Résultats Numériques Et Discussions.

V.1.Introduction.....	63
V.2.Résultats numériques et discussions.....	63
V.3. Les courbe relatives et leurs interprétations.....	69
V.4. Analyse de l'effet de la porosité sur la vibration naturelle des plaques FGM sur une fondation élastique	73
V.5.Les courbe relatives à la porosité et leurs interprétations	75
V.6.Conclusion	77
Conclusion générale.....	78
Références bibliographiques.....	80

Liste des figures

Chapitre I

Figure I.1: Représentation d'un matériau FGM. [2].....	6
Figure I.2 : Concept des matériaux à gradient.....	8
Figure I.3: Un type d'un matériaux FGM en céramique et métal.....	9
Figure I.4: représentation schématique du (a) matériau fonctionnellement gradué et (b) du matériau composite stratifié conventionnel [3].....	9
Figure.1.5 : (a) Matériaux composites classiques,(b) Matériaux à gradation fonctionnelle...10	
Figure I.6 : Utilisation dans Biomédical	13
Figure I.7 : Utilisation dans l'énergie Solaire.....	14
Figure I.8 : Utilisation dans l' industrie Électronique.....	15
Figure I.9 : Utilisation dans l'industrie de la défense.....	15
Figure I.10 : Application dans le domaine aérospace.....	16
Figure I.11 : Utilisation dans FGM sur génie civil.....	17
Figure I.12 : Les deux grandes familles de FGM (minces et massifs).....	18
Figure I.13 : Matériau FGM à deux phases avec microstructure particulaire.....	20
Figure I.14: Matériau FGM à deux phases avec microstructure squelettique.....	21
Figure.I.15: Géométrie d'une plaque en FGM.....	22
Figure I.16 : Les Dimensions De La Plaque FGM.....	23
Figure I.17 : La variation de la fraction volumique dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM.....	24
Figure I.18: Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.....	25
Figure I.19: Variation de la fraction volumique dans une plaque E-FGM.....	26

Chapitre II

Figure II.1 : Exemple d'une plaque à gradient fonctionnel.....	28
Figure II.2 : Géométries des bords d'une plaque avant et après la déformation (Hypothèses de Kirchhoff).....	29
Figure II. 3 : Géométries des bords d'une plaque avant et après la déformation (Hypothèses de Reissner-Mindlin).....	31

Figure II.5 : Géométries des bords d'une plaque avant et après la déformation (Théorie d'ordre élevé HSDT ou TSDT, [13]).....	32
---	----

Figure II.6 : Comparaison entre les différentes théories de plaques (CPT, FSDT, HSDT ou TSDT).....	32
---	----

Chapitre III

Figure III. 1 : Représentation physique de Fondation de Winkler.....	38
---	----

Figure III. 2 : Représentation physique de Fondation de Pasternak	39
--	----

Figure III.3 : La représentation physique de Fondation de Kerr.....	40
--	----

Figure III.4 : Géométrie et système de coordonnées des plaques carrées FG reposant sur des fondations élastiques : (a) fondation Winkler-Pasternak et (b) fondation Kerr [54].....	43
---	----

Figure III. 5 : Illustration de différents modèles de variations de la porosité.....	45
---	----

Chapitre IV

Figure IV.1 : Représentation schématique d'une plaque rectangulaire FGM reposant sur une fondation élastique.....	48
--	----

Figure IV.2: La configuration de plaques FG rectangulaires reposant sur a) la fondation Winkler, b) la fondation Pasternak et c) la fondation Kerr [52].....	48
---	----

Chapitre v

Figure V.1: Effet du paramètre h/a avec l'influence des parameters winkler-pasternak sur la fréquence fondamentale non dimensionnelle de plaques FGM.....	69
--	----

Figure V. 2: Effet du paramètre h/a avec différents indices de fraction volumique (p) sur la fréquence fondamentale non dimensionnelle de plaques FG reposant sur la fondation élastique.....	70
--	----

Figure V.3: Effet des paramètres ($k_w, k_p, h/a, p$) sur la fréquence fondamentale adimensionnelle des plaques FG reposant sur la fondation élastique.....	70
--	----

Figure V. 4 : Effect de parameter h/a avec variation de (k_u, k_s) sur la fréquence fondamentale de plaque FG avec ($k_l = 100$).....	71
--	----

Figure V. 5: le influence de indices de fraction volumique (p) avec variation de (k_u, k_s) sur la fréquence fondamentale de plaque FG avec ($k_l = 100$).....	71
---	----

Figure V. 6 : Effet des paramètres $(h/a, p)$ sur les plaques $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}$ FG à fréquence fondamentale adimensionnelle reposant sur la fondation Kerr ($k_f = 100$).....	72
FigureV.7: Système des coordonnées et la géométrie des plaques FG appuyées sur une fondation élastique.....	73
Figure V.8: Influence du rapport (h/a) avec variation de (k_w, k_p) , sur la fréquence fondamentale des plaques parfaites et imparfaites sur une fondation élastique avec trois distributions de porosité (Uniforme, non Uniforme, logarithmique inégale).....	76

Liste des tableaux

Chapitre v

Tableau V.1: propriétés du céramique et métal.....	64
Tableau V.2: Fréquence fondamentale adimensionnelle $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}$ des plaques FG avec simplement appuyée (b/a=2, b/a=1) avec différents indices de fraction volumique (p).....	64
Tableau V.3 : Fréquences fondamentales adimensionnelles $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}$ des plaques FG reposant sur des fondations Winkler – Pasternak.....	65
Tableau V.4: Fréquences fondamentales adimensionnelles $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}$ des plaques carrées FG reposant sur Kerr fondation ($k_f = 100$).....	67
Tableau V.5 : Variations des paramètres de fréquence des plaques parfaites et imparfaites en fonction de la raideur de la fondation de Winkler–Pasternak (a/b=1 et p=1).....	74

Liste d'abréviation

FGM : Les matériaux à gradient de propriétés.

(Al) : Aluminium .

(Al₂O₃) : Alumine.

E:Le module de Young.

E(z):Module de Young en fonction de « z ».

Ec:Module de Young de la céramique.

Em:Module de Young du métal.

ν :Le coefficient de Poisson.

$\nu(z)$: Coefficient de Poisson en fonction de « z ».

α : indice de porosité.

P : indice fraction volumique.

x,y,z:Les axes de coordonnées cartésiennes.

a : Longueur de la plaque suivant la direction de x.

b : Largeur de la plaque suivant la direction de y.

h : l'épaisseur de la plaque suivant la direction de z.

h/a : L'élancement.

$\rho(z)$: La masse volumique en fonction de « z ».

ρ_c :La masse volumique de la céramique.

ρ_m : La masse volumique du métal.

ξ : Fraction volumique des pores.

q : La charge transversale appliquée.

u, v, w : Les déplacements dans les directions x,y,z.

$\dot{u}_0, \dot{v}_0, \dot{w}_b, \dot{w}_s$: Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque.

Wb : Composante de la flèche due à la flexion.

Ws : Composante de la flèche due au cisaillement.

f(z) :Fonction de gauchissement.

$g(z)$: Fonction de forme de cisaillement.

σ : Tenseurs de contrainte.

ε : Tenseur de déformation.

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$: Contraintes normales.

τ_{xz}, τ_{yz} : Contraintes de cisaillement.

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$: Déformation dans la direction x, y et z.

γ_{xz}, γ_{yz} : Déformations de distorsion.

∂ : Dérivée partielle.

δU_p : La variation de l'énergie de déformation.

δV : La variation du travail extérieur.

δT : La variation de l'énergie cinétique.

δU_F : Le modèles de fondation élastique.

X_m, Y_n : les introduits pour satisfaire les conditions aux limites.

N_x, N_y, N_{xy} : Efforts normaux.

M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b : Moments de flexion pure.

M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s : Moments de flexion supplémentaire due au cisaillement transverse.

Q_{yz}, Q_{xz} : Contrainte normale.

$A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, A_{aij}, B_{aij}, C_{aij}$: Les composantes de rigidité.

C_{ij} : Coefficients de rigidité.

∇^2 : l'opérateur différentiel de Laplace en coordonnées cartésienne rectangulaire.

p : la pression appliquée en un point.

w : le déplacement vertical en ce point.

λ_m : Le paramètre de forme longitudinal

λ_n : Le paramètre de forme transversal.

K_w : le module de la fondation, Constante du ressort.

K_p : Constante de la couche de cisaillement.

K_s : est le module de cisaillement.

K_u : est le module élastique de la couche supérieure.

K_1 : le module élastique inférieur de la couche.

K :représente la matrice de rigidité.

M :la matrice de masse.

$\bar{\omega}$: Fréquence fondamentale adimensionnelle.

ω^2 : La fréquence circulaire.

Introduction générale

Introduction générale

Ces dernières années, le monde industriel a connu un développement notable, porté par les avancées scientifiques qui permettent de concevoir de nouveaux procédés et techniques soutenant l'évolution industrielle. Les matériaux constituent un axe principal de recherche et d'innovation, car toute pièce, composant ou structure repose essentiellement sur les matériaux utilisés. Par conséquent, l'innovation dans ce domaine contribue à une révolution dans le monde de la construction et de l'ingénierie.

Une nouvelle catégorie de matériaux est apparue, connue sous le nom de « matériaux à gradient de propriétés » (Functionally Graded Materials - FGM). En 1984, les Japonais ont introduit pour la première fois cette nouvelle philosophie de matériaux intelligents capables de résister à des gradients de température très importants. Depuis, des recherches sur les FGM sont activement menées dans différents pays à travers le monde.

Ce sont des matériaux composites hétérogènes à l'échelle macroscopique, généralement constitués d'un mélange de métal et de céramique. Ces matériaux se caractérisent par une variation progressive de la composition volumique à travers leur épaisseur, ce qui entraîne un changement continu des propriétés mécaniques d'une face à l'autre. Cette particularité élimine les problèmes liés aux interfaces traditionnelles et réduit les concentrations de contraintes thermiques, ce qui les rend idéaux pour une utilisation dans des environnements à haute température tels que l'aéronautique, l'espace, les réacteurs nucléaires et l'automobile. Ces matériaux sont largement utilisés dans divers domaines tels que la mécanique, le génie civil, ce qui a conduit au développement de modèles de calcul précis pour analyser la réponse des plaques fabriquées à partir de ces matériaux. Ces modèles reposent sur différentes théories d'analyse des plaques, notamment :

- La théorie classique des plaques (Classical Plate Theory - CPT), qui néglige les effets de cisaillement transverse et est précise uniquement pour les plaques minces.
- La théorie de déformation de cisaillement de premier ordre (First-Order Shear Deformation Theory - FSDT), qui prend en compte les effets de cisaillement transverse mais nécessite un facteur de correction de cisaillement.

- Les théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé (Higher-Order Shear Deformation Theories - HSDT), qui offrent une plus grande précision sans besoin de facteurs de correction, mais sont plus complexes au niveau des équations.

Pour surmonter la complexité des théories HSDT, une théorie simplifiée appelée «théorie raffinée des plaques » (Refined Plate Theory - RPT) a été développée. Elle utilise seulement deux variables et intègre les effets de cisaillement sans nécessiter de facteurs de correction, ce qui la rend à la fois pratique et précise.

Lors de la conception des matériaux à gradient fonctionnel (FGM), il est crucial de déterminer la répartition des composants, comme le métal et la céramique, à travers l'épaisseur pour atteindre la performance souhaitée. Plusieurs méthodes existent, notamment le gradient exponentiel (E-FGM), le gradient sigmoïde (S-FGM) et le gradient de la loi de puissance (P-FGM). Le gradient exponentiel permet une transition rapide ou lente mais peut causer des concentrations de contraintes, tandis que le gradient sigmoïde offre une transition douce réduisant ces concentrations. Le modèle P-FGM, utilisé dans cette étude, est le plus courant grâce à sa flexibilité et sa facilité à contrôler la distribution des composants, assurant une transition fluide des propriétés et une réduction des contraintes. Il permet aussi d'intégrer des effets comme la porosité liée à la fabrication, ce qui est essentiel pour étudier le comportement mécanique réel des matériaux. Pour ces raisons, le modèle P-FGM a été choisi pour sa précision et sa capacité à représenter l'impact de la porosité sur la performance globale des structures fabriquées.

Cependant, le processus de fabrication de ces matériaux peut entraîner l'apparition de pores ou de vides fins à l'intérieur de la structure, connus sous le nom de porosité, un phénomène qui affecte de manière significative les propriétés mécaniques et chimiques des matériaux. Un milieu poreux est un matériau contenant des vides partiellement ou totalement remplis d'un fluide (gaz ou liquide), et ces pores influencent la résistance et la solidité du matériau, tout en lui conférant des propriétés uniques telles que la perméabilité, l'échange thermique et la capacité à réagir électrochimiquement. Cela rend les matériaux poreux utiles dans des applications telles que la filtration, le contrôle des fluides et le stockage temporaire. Bien que la porosité réduise la rigidité et la résistance par rapport aux matériaux denses, elle améliore des caractéristiques comme l'échange thermique et l'efficacité catalytique grâce à l'augmentation de la surface spécifique.

Dans ce travail, nous étudions l'effet de la porosité des plaques à gradient fonctionnel (FGM) reposant sur des fondations élastiques de type Winkler, Pasternak ou Kerr. La présente étude se concentre sur l'analyse précise du comportement de la vibration libre de ces plaques. Les équations gouvernantes ont été dérivées en appliquant le principe d'énergie d'Hamilton.

Des solutions analytiques ont été obtenues pour les plaques fonctionnellement graduées en utilisant la méthode de Galerkin. Pour résoudre les équations résultant de ces théories, la méthode de Galerkin est employée ; il s'agit d'une technique numérique qui transforme les équations différentielles en un système d'équations algébriques pouvant être traité avec précision par calcul. De plus, le modèle de fondation élastique de type Kerr est intégré afin de décrire l'interaction des plaques avec leur support de manière plus réaliste comparée aux modèles traditionnels, ce qui améliore la compréhension du comportement des plaques sous différentes charges et conditions environnementales. Ces méthodologies fournissent un cadre solide pour l'analyse et la conception des structures fabriquées à partir de matériaux à gradient fonctionnel, avec une possibilité de contrôle précis de la distribution des composants du matériau. Les résultats numériques des déformations sont présentés sous conditions aux limites simplement appuyées.

La précision de cette étude a été confirmée par la comparaison des résultats obtenus avec ceux disponibles dans la littérature scientifique. De plus, l'effet de plusieurs paramètres importants, tels que le coefficient de porosité, le rapport d'élancement, l'indice du matériau, ainsi le paramètre de la fondation, a été analysé.

Ce mémoire se compose de cinq chapitres :

Dans le premier chapitre, une première partie rappellera des généralités sur les matériaux FGM, en discutons l'histoire de leur développement, ainsi que leurs domaines d'application. Leurs propriétés effectives, également les différents modèles des plaques FGM.

Dans Le deuxième chapitre, nous présentons les différentes théories des plaques, la théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT), la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT), la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT), la théorie raffinée de déformation des plaques (RPT), la théorie des plaques tridimensionnelles (Élasticité 3D) et la théorie de déformation des plaques quasi-3D.

Le troisième chapitre, nous présentons une modélisation des plaques reposées sur la fondation élastique type élastique (Winkler- Pasternaket et Kerr), et Nous avons présenté

plusieurs études portant sur l'influence des fondations sur divers types de structures, Nous avons également abordé la porosité et son effet sur les différents types.

Le quatrième chapitre, nous présentons les équations gouvernantes qui ont été dérivées en appliquant le principe d'hamilton. Les équations résultant de ces théories ont été résolues en utilisant la méthode de Galerkin, ce qui a permis d'obtenir les solutions analytiques pour les plaques à gradient fonctionnel. Le cinquième chapitre est réservé pour comparer, valider et commenter les résultats numériques élaborés pour les plaques précitées. Les résultats sont obtenus en utilisant la programmation sur le logiciel Maple, ils sont présentés sous forme de tableaux et de graphes, en fin ces résultats seront discutés.

Enfin, nous achevons notre travail par une conclusion générale relative aux résultats obtenus incluant des perspectives pour des travaux futurs.

Chapitre I

Généralités sur les matériaux composites avancés FGM

I.1.Introduction

Dans le contexte du développement accéléré des sciences et technologies modernes, les exigences croissantes concernant les matériaux d'ingénierie constituent un défi majeur pour les chercheurs et les ingénieurs. Les applications contemporaines dans des domaines tels que l'aérospatiale, la biomédecine, l'électronique avancée et les technologies énergétiques nécessitent des matériaux aux propriétés supérieures et multifonctionnelles, ce qui est difficile à réaliser avec des matériaux traditionnels ou même des composites simples.

C'est dans cette optique que les Matériaux à Gradient Fonctionnel (FGM) ont émergé comme une catégorie distinctive de matériaux avancés représentant une avancée qualitative dans le domaine de la science des matériaux. Le concept de ces matériaux a été développé pour la première fois au Japon dans le cadre d'un programme spatial visant à développer des matériaux capables de résister à des températures élevées et à des gradients thermiques extrêmes.

Les FGM constituent une révolution dans la conception des matériaux car ils dépassent le concept traditionnel des matériaux composites en éliminant les frontières nettes entre leurs composants et en les remplaçant par une variation graduelle et continue de la composition et de la structure. Cette approche innovante permet de personnaliser les propriétés du matériau selon des exigences fonctionnelles spécifiques, permettant ainsi d'obtenir des performances supérieures dans diverses conditions opérationnelles.

I.1.1.Définition de Matériaux à gradient fonctionnel (FGM)

Selon les recherches et études menées dans ce domaine, les matériaux à gradient fonctionnel peuvent être définis comme des matériaux avancés présentant une évolution progressive et contrôlée de leur composition ou de leur structure microscopique dans une ou plusieurs directions.

Le professeur Masayasu Koizumi, l'un des pionniers de ce domaine, définit les matériaux à gradient fonctionnel comme suit :

"Des matériaux d'ingénierie avancés caractérisés par une variation progressive et continue de la composition et de la structure, entraînant un gradient de propriétés physiques, chimiques et mécaniques à travers le volume du matériau" [1].

Ce gradient permet d'améliorer les propriétés du matériau en fonction des exigences spécifiques de chaque application. Ces matériaux sont souvent composés d'une phase céramique et d'une phase métallique, séparées par une zone de transition où elles se mélangent progressivement.

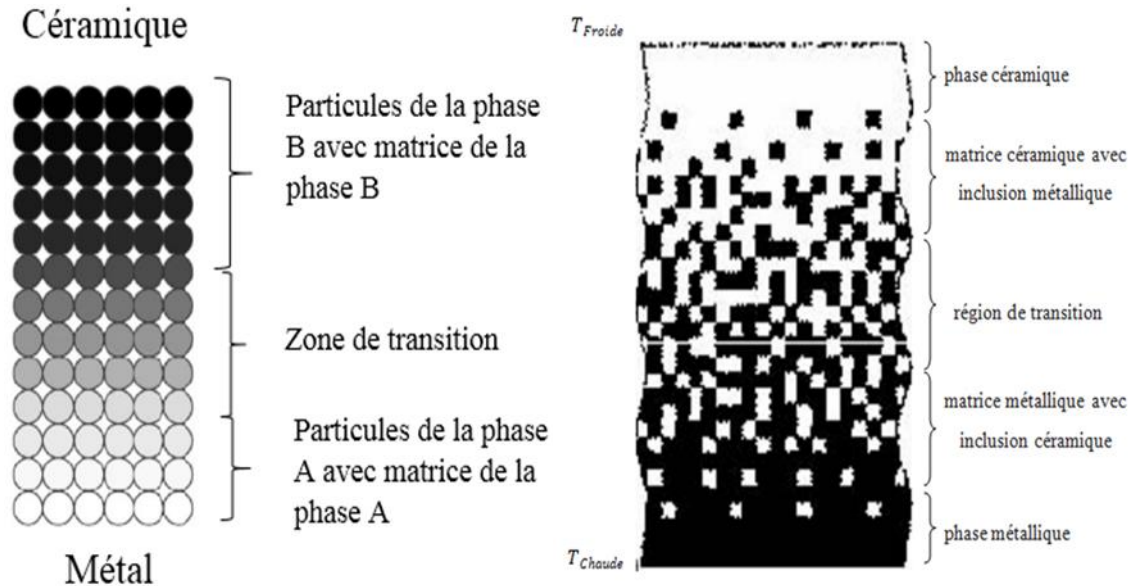


Figure I.1: Représentation d'un matériau FGM. [2].

Ce gradient continu, en fonction du volume déterminé, renforce la durabilité du matériau et réduit les contraintes internes, minimisant ainsi les risques de séparation entre les couches. De plus, il entraîne une transition fluide du module de Young et de la densité à travers l'épaisseur du matériau, assurant une transition plus homogène des propriétés mécaniques et thermiques. Par conséquent, les matériaux à gradient fonctionnel sont plus efficaces dans certaines applications spécialisées que les matériaux composites traditionnels.

I.3.Histoire des matériaux fonctionnellement gradués (FGM)

L'histoire des matériaux fonctionnellement gradués (FGM) trouve ses racines dans un projet de recherche spatial japonais lancé au milieu des années 1980, précisément en 1984-1985, sous la direction visionnaire du Dr. Masayasu Koizumi qui cherchait à résoudre le problème critique des boucliers thermiques pour les véhicules spatiaux devant supporter des écarts de température extrêmes atteignant 1000°C sur quelques millimètres d'épaisseur seulement. En 1987, cela s'est transformé en un projet national sous le titre "Recherche sur la technologie fondamentale pour le développement des matériaux à gradient de propriétés et l'étude de la relaxation des contraintes

thermiques", Cette innovation fondamentale a rapidement gagné en reconnaissance scientifique internationale avec l'organisation du premier symposium dédié aux FGM à Sendai (Japon) en 1992, événement qui a catalysé une vague de recherches focalisées initialement sur les combinaisons céramique-métal pour applications à haute température. La décennie suivante a vu une expansion méthodique des techniques de fabrication, notamment la métallurgie des poudres et les procédés de dépôt, parallèlement à l'élaboration de modèles mathématiques plus sophistiqués pour prédire le comportement de ces matériaux complexes. Les années 2000 ont marqué un tournant décisif avec la diversification spectaculaire des domaines d'application, s'étendant désormais de l'aérospatiale originelle vers la biomédecine (implants osseux personnalisés), l'électronique (composants thermoélectriques) et les technologies énergétiques (piles à combustible), s'accompagnant d'une exploration approfondie de nouvelles compositions intégrant polymères, composites et nanomatériaux. La véritable révolution technologique s'est produite durant la décennie 2010 avec l'avènement des techniques de fabrication additive (impression 3D) qui ont transformé radicalement les possibilités de conception et de production des FGM en permettant un contrôle précis de la gradation des propriétés à l'échelle microscopique, ouvrant la voie à l'incorporation de concepts biomimétiques inspirés des structures naturelles comme les os et les dents. Aujourd'hui, dans les années 2020, nous assistons à l'intégration sophistiquée de l'intelligence artificielle et des algorithmes d'apprentissage automatique pour optimiser la conception de ces matériaux, au développement de FGM multifonctionnels simultanément plusieurs propriétés gradées (mécaniques, thermiques, électriques, magnétiques), ainsi qu'à l'émergence prometteuse de FGM adaptatifs ou "intelligents" capables de modifier dynamiquement leurs caractéristiques en réponse à des stimuli environnementaux, illustrant parfaitement l'évolution remarquable de ce qui était à l'origine un concept théorique en une classe de matériaux avancés révolutionnant de nombreux secteurs technologiques contemporains.

I.4.Développements récents et concept des FGM

Au cours des dernières décennies, les matériaux à gradient fonctionnel (FGM) ont connu des avancées significatives. Initialement, ces matériaux présentaient une variation de leurs propriétés uniquement selon l'épaisseur. Cependant, les applications modernes exigent désormais des matériaux à gradient fonctionnel bidirectionnel (BDFGM), où les propriétés varient à la fois selon l'épaisseur et dans les directions axiales. La technique de dépôt de métal par laser s'est révélée être

la plus appropriée pour produire ces matériaux intelligents. Toutefois, plusieurs défis persistent, notamment l'absence de bases de données adaptées aux tests et aux normes d'évaluation des performances des FGM, nécessitant ainsi le développement de nouvelles méthodes de test avancées. En matière de recherche, le Japon a lancé en 1987 un projet ambitieux visant à étudier et développer ces matériaux pour les systèmes de protection thermique des véhicules spatiaux.

Les matériaux utilisés dans ces applications doivent être capables de supporter des températures de surface allant jusqu'à 1800°C, avec un gradient thermique atteignant 1300°C. À cette époque, aucun matériau industriel n'était connu pour résister à de telles sollicitations thermomécaniques extrêmes. Trois caractéristiques essentielles ont été définies pour ces matériaux: la résistance thermique et l'oxydation à haute température, la ténacité à basse température et la relaxation efficace des contraintes thermiques le long du matériau. Les recherches ont permis des avancées notables. Entre 1987 et 1989, les scientifiques ont réussi à produire des échantillons expérimentaux de FGM, d'une épaisseur comprise entre 1 et 10 mm, capables de résister à des températures allant jusqu'à 2000 K. Lors de la seconde phase (1990-1991), l'objectif était d'élaborer des structures de plus grande taille et de formes plus complexes. Avec les années, les applications des FGM se sont étendues bien au-delà des structures à haute température pour inclure des domaines tels que le biomédical, les capteurs et l'optique.

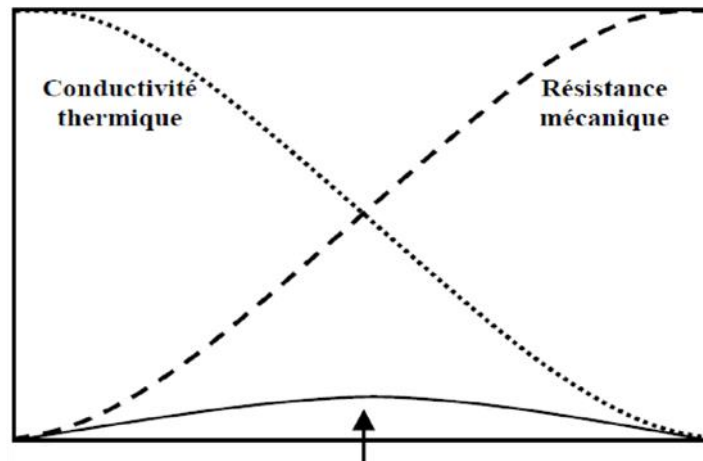


Figure I.2 : Concept des matériaux à gradient.

Néanmoins, l'utilisation de ces matériaux reste confrontée à plusieurs défis. L'un des principaux obstacles est le développement de techniques de traitement à faible coût permettant une production de masse, en particulier pour les structures complexes et de grande taille. De plus, la stabilité des

FGM dans des environnements à fortes variations thermiques nécessite une compréhension approfondie de leurs déformations et de leur comportement mécanique. Ainsi, la recherche future dans ce domaine est cruciale pour assurer leur viabilité dans les applications technologiques avancées.

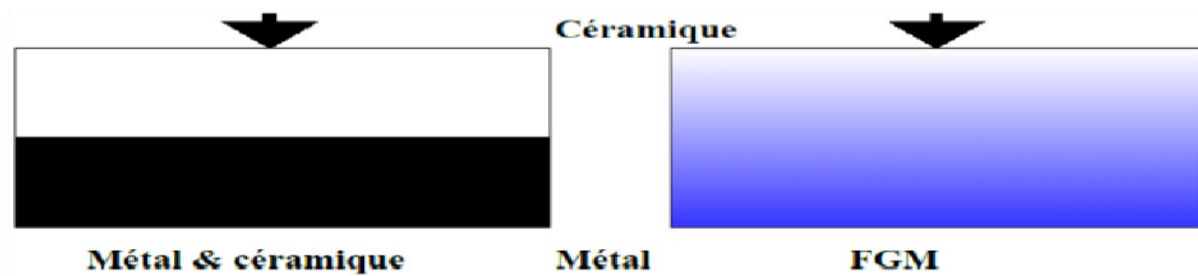


Figure I.3:Un type d'un matériau FGM en céramique et métal.

I.5.La Différence entre FGM et les matériaux composites traditionnels

Les matériaux à gradient de fonction (FGM) et les matériaux composites traditionnels diffèrent sur plusieurs aspects essentiels. Tout d'abord, les FGM présentent une variation.

Progressive et continue de leur composition et de leurs propriétés mécaniques dans une ou plusieurs directions, tandis que les composites traditionnels possèdent des interfaces bien définies entre leurs différentes phases, entraînant des discontinuités dans les propriétés.

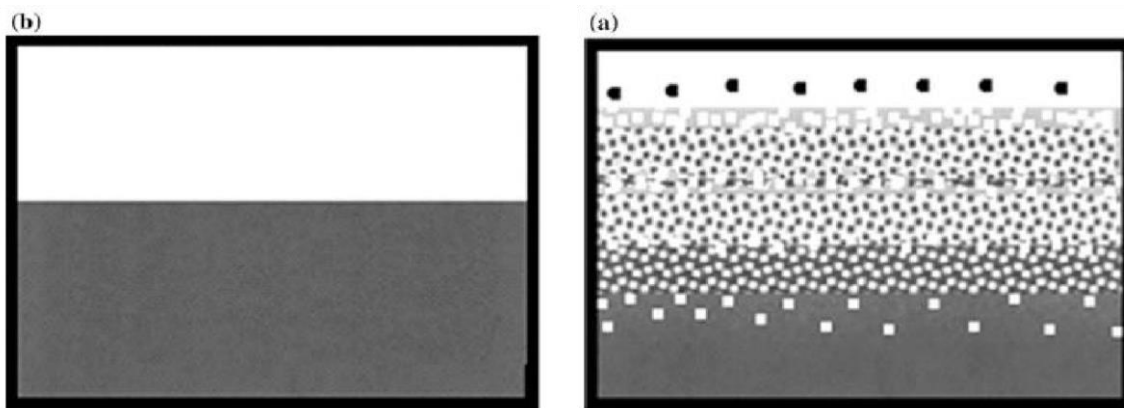


Figure I.4:représentation schématique du (a) matériau fonctionnellement gradué et (b) du matériau composite stratifié conventionnel [3]

Cette transition progressive dans les FGM permet de réduire les contraintes aux interfaces, diminuant ainsi le risque de délamination, contrairement aux composites traditionnels qui peuvent présenter des concentrations de contraintes et des ruptures aux interfaces. En termes de fabrication, les FGM sont produits par des méthodes avancées telles que la fabrication additive, le dépôt de couches en gradient ou la métallurgie des poudres, alors que les composites traditionnels utilisent des procédés plus classiques comme le moulage, le laminage ou l'infusion sous vide. Enfin, du point de vue des applications, les FGM sont privilégiés dans des environnements extrêmes tels que l'aérospatial, le domaine biomédical et les applications thermiques, où une transition progressive des propriétés est nécessaire, tandis que les composites traditionnels sont largement utilisés dans l'industrie automobile, l'aéronautique et le bâtiment en raison de leur légèreté et de leur résistance. Ainsi, les FGM offrent une meilleure performance dans certaines applications spécifiques par rapport aux matériaux composites traditionnels.

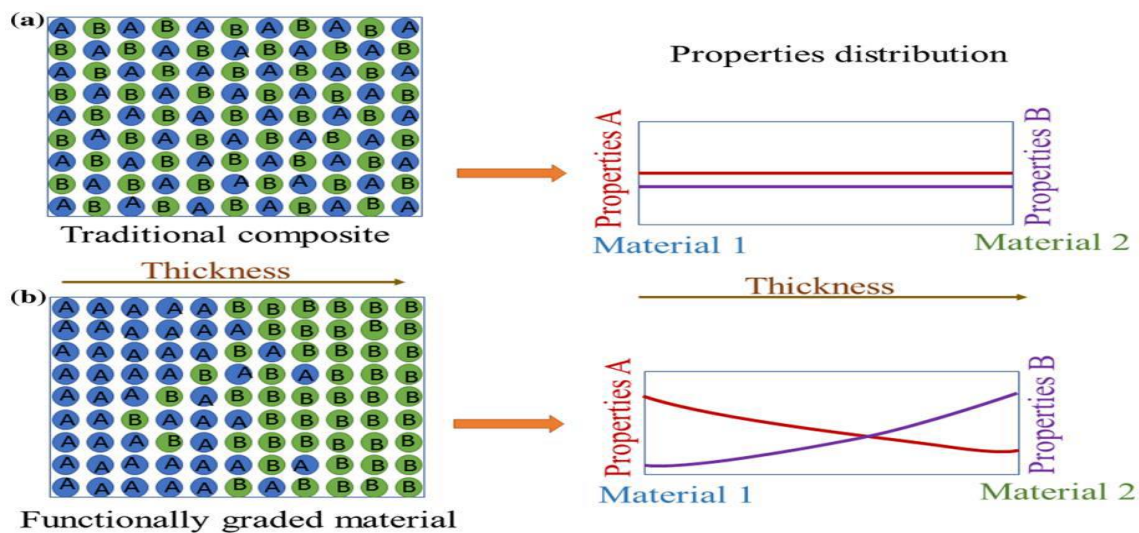


Figure.1.5 : (a) Matériaux composites classiques, (b) Matériaux à gradation fonctionnelle.

I.6. Propriétés matérielles effectives d'un matériau FGM

Les matériaux à gradient fonctionnel (FGM) sont des composites non homogènes composés de différentes phases de matériaux, généralement de la céramique et du métal. Les FGM présentent un fort effet de couplage flexion-étirement, et leurs microstructures se caractérisent par des fonctions différentes pour chaque phase, créant des variations continues des propriétés des matériaux d'une surface à l'autre.

I.7. Propriétés physiques et mécaniques des FGM

I.7.1. Propriétés physiques des FGM

- Excellents conducteurs de chaleur et d'électricité.
- Plusieurs métaux ont des températures de fusion élevées.
- La masse volumique de la céramique est de 3800 kg/m.

I.7.2. Propriétés mécaniques des FGM

- Rigides et durs.
- Plastiquement déformables.
- Haute résistance mécanique et thermique.
- Module de Young élevé.
- Dureté élevée.
- Bonne résistance à la compression.

Les propriétés mécaniques des céramiques dépendent des matières premières employées et des méthodes de fabrication qui fixent les microstructures finales et déterminent la répartition des différentes phases en présence.

I.8. Les Avantages et inconvénients des Matériaux Fonctionnellement Gradués (FGM)

I.8.1. Les Avantages

Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) connaissent une utilisation croissante dans divers domaines en raison de leurs nombreux avantages:

- **Excellente adhérence entre matériaux différents :**
Particulièrement efficace pour combiner des matériaux incompatibles comme la céramique et le métal, améliorant considérablement la force de liaison.
- **Création de structures complexes :** Permet de réaliser des formes complexes tout en réduisant les coûts d'assemblage.
- **Propriétés mécaniques spécifiques :** Possibilité de fabriquer des matériaux avec des propriétés particulières comme un coefficient de Poisson négatif ou une dilatation quasi-nulle.
- **Conception optimisée :** Capacité de dimensionner les structures avec des propriétés spécifiques uniquement dans les axes de chargement.

- **Meilleur contrôle des contraintes** : Grâce à l'absence d'interfaces nettes entre les matériaux.
- **Réduction des contraintes thermiques** : Diminution des contraintes causées par les différences de coefficients de dilatation thermique.
- **Résistance supérieure** : Faible sensibilité à la fatigue et à la corrosion, avec une ténacité élevée à la rupture.
- **Suppression du délaminage** : Amélioration de la cohésion entre différents matériaux.
- **Contrôle de performance** : Capacité de contrôler la déformation, la réponse dynamique, l'usure et la corrosion.

Ces avantages font des FGM une solution de choix pour des applications exigeant des performances mécaniques élevées et des propriétés spécifiques.

I.8.2. Les inconvénients

- **Difficulté de fabrication**

Les FGM nécessitent une fabrication complexe en raison des différences de propriétés des composants comme le point de fusion, la taille, la forme et la compatibilité chimique.

Par exemple, mélanger un métal à bas point de fusion avec une céramique à haut point de fusion rend difficile l'obtention d'une structure homogène.

- **Compatibilité thermique**

Les différences de température de fusion entre les composants (comme le métal et la céramique) posent des problèmes pendant la fabrication, entraînant la présence de particules non fondues et une structure poreuse.

- **Faible adhérence entre les composants**

L'adhésion entre les différents matériaux est souvent faible, ce qui réduit la performance globale et limite les applications industrielles des FGM.

- **Coûts de fabrication élevés**

La fabrication des FGM nécessite des environnements protégés (atmosphère inerte ou basse pression), ce qui augmente les coûts de production.

- **Réactions chimiques indésirables**

À haute température (comme celle de la céramique), des réactions indésirables ou l'évaporation des métaux peuvent survenir, affectant la qualité du produit final.

- **Besoin de recherches supplémentaires**

Des études et des essais sont encore nécessaires pour mieux comprendre les propriétés des FGMs et améliorer leurs modèles physiques.

I.9.Domaines d'Application

Les Matériaux à Gradient Fonctionnel sont très prisés dans de nombreuses industries grâce à leurs caractéristiques essentielles : ils sont légers, résistants et durables, offrant un potentiel d'application considérable dans divers secteurs industriels.

I.9.1.Biomédical

Comme illustré dans les images, les FGM peuvent être utilisés pour :

- Fabriquer des substituts osseux et articulaires aux propriétés similaires aux tissus naturels
- Fournir des matériaux avec une excellente biocompatibilité et résistance à la corrosion
- Résoudre les problèmes de douleurs osseuses et articulaires grâce à des substituts biologiquement compatibles.

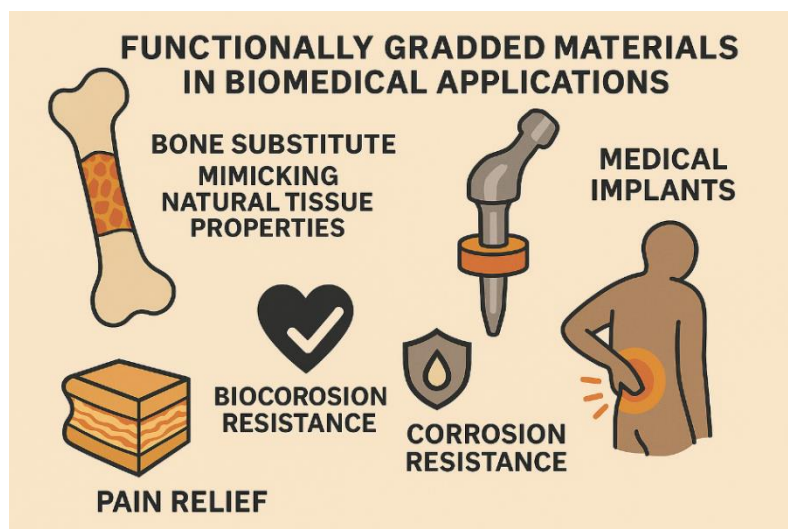


Figure I.6 : Utilisation dans Biomédical

I.9.2.Applications d'énergie Solaire

Les matériaux à gradient fonctionnel sont utilisés pour améliorer l'efficacité des cellules solaires par :

- L'amélioration de la réponse sur un large spectre de fréquences lumineuses.
- La combinaison de la génération photovoltaïque et thermoélectrique dans un système unique.
- Le développement de générateurs compacts fonctionnant au gaz ou au kérosène pour les régions éloignées.



Figure I.7 : Utilisation dans l'énergie Solaire

I.9.3.Applications Industrielles

La demande pour les FGM dans divers domaines industriels augmente en raison de leur capacité à :

- **Industries Électroniques**

Employés dans les composants électroniques nécessitant une gestion thermique exceptionnelle et des propriétés d'isolation électrique.

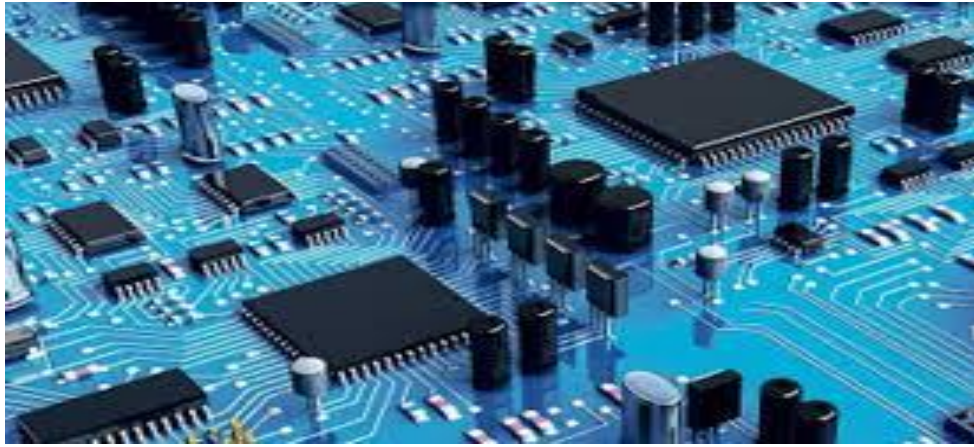


Figure I.8 : Utilisation dans l'industrie Électronique.

- **Industries de Défense**

Utilisés dans les blindages anti-projectiles et les applications nécessitant une haute résistance aux chocs et aux explosions.



Figure I.9 : Utilisation dans l'industrie de la défense

I.9.4. Industries Aérospatiales et Aéronautiques

Comme mentionné dans le texte, les matériaux à gradient fonctionnel sont une technologie essentielle dans la fabrication de fusées et la construction de stations spatiales, offrant :

- Des matériaux légers et résistants pour diverses structures.
- Des boucliers thermiques pour fusées et véhicules spatiaux.
- Des composants résistants à la chaleur dans les moteurs de fusées.



Figure I.10 : Application dans le domaine aérospatial.

I.10.Domaine d'application en Génie civil

Les matériaux à propriétés gradées (FGM) jouent un rôle essentiel dans l'évolution du génie civil en offrant des solutions innovantes et durables pour la conception des éléments de construction. Ces matériaux permettent un gradient contrôlé des propriétés mécaniques ou thermiques à l'intérieur d'un même composant, ce qui améliore les performances structurales, réduit le poids des structures et facilite le recyclage. Dans ce domaine, les FGM sont utilisés notamment dans la conception des structures porteuses, où les propriétés varient du noyau (résistance élevée) vers la surface (résistance aux conditions environnementales), augmentant ainsi la durabilité et réduisant les besoins en entretien. On les retrouve également dans les dalles en béton exposées à des environnements agressifs, ou encore dans l'enveloppe des bâtiments, afin d'améliorer l'isolation thermique et acoustique. Des applications récentes incluent aussi leur intégration dans les fondations de ponts pour atténuer les effets des vibrations et des séismes. Les recherches menées à l'Université de Stuttgart ont démontré l'intérêt d'appliquer le concept FGM à divers matériaux comme le béton, le bois, les métaux ou les polymères, ouvrant ainsi la voie à une

nouvelle génération de structures civiles plus intelligentes et plus respectueuses de l'environnement.

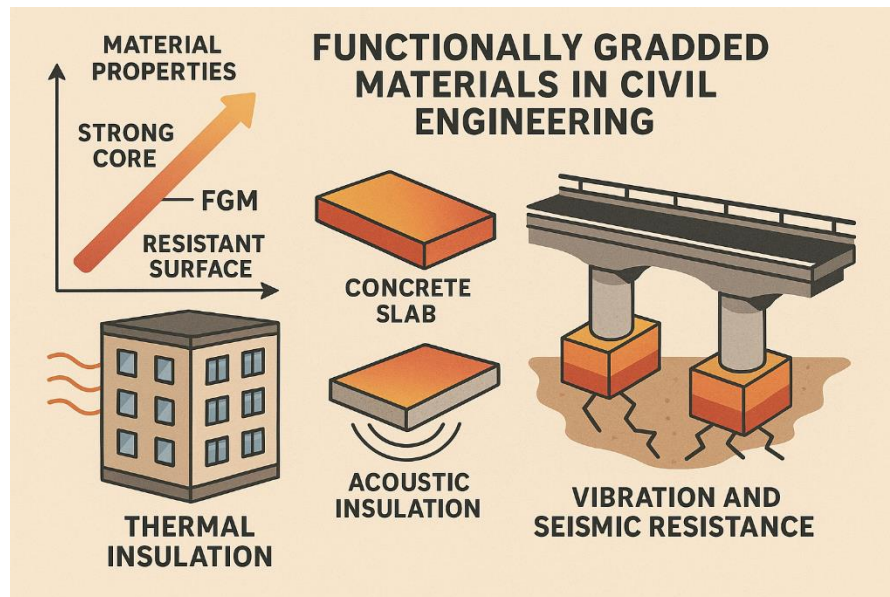


Figure I.11 : Utilisation dans FGM sur génie civil.

I.11. Les FGMs minces ou massifs

Les matériaux à gradient de composition fonctionnelle (FGM) se divisent principalement en deux catégories : les FGMs minces et les FGMs massifs. Les FGMs minces, souvent appelés revêtements FGM, sont appliqués uniquement à la surface des pièces. Ils sont fabriqués par des procédés tels que la pulvérisation physique en phase vapeur (PVD), la déposition chimique en phase vapeur assistée par plasma (PACVD), la déposition chimique en phase vapeur (CVD), ainsi que par des techniques de projection à froid ou par plasma. Ces méthodes permettent d'améliorer localement les propriétés de surface sans modifier la

Structure interne de la pièce. En revanche, les FGMs massifs concernent une grande partie, voire la totalité, de la pièce. Leur fabrication repose sur des procédés comme la métallurgie des poudres, la fabrication additive (notamment le dépôt laser ou laser cladding) et la fonderie. Ces techniques permettent d'obtenir des matériaux dont la composition et les propriétés varient progressivement à travers l'épaisseur, offrant ainsi des performances adaptées à des exigences spécifiques sur l'ensemble du volume du composant.

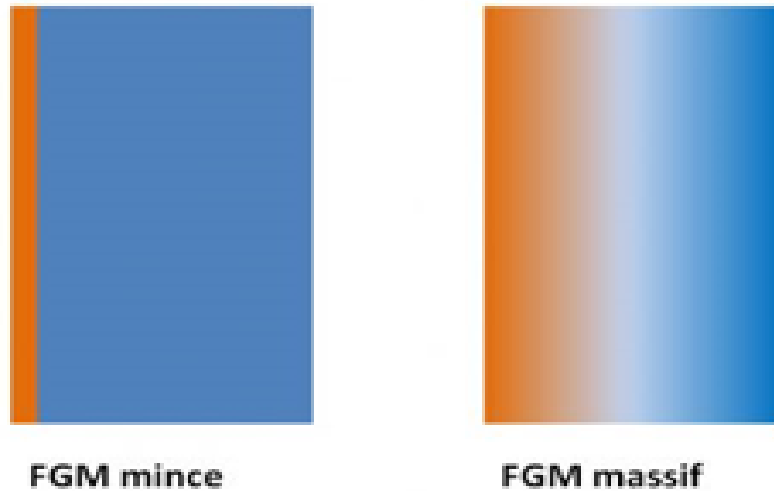


Figure.1.12: Les deux grandes familles de FGM (minces et massifs)

I.12.Dépôt physique en phase vapeur "PVD" Et Dépôt chimique en phase vapeur "CVD"

Les dépôts en phase vapeur, qu'ils soient chimiques (CVD) ou physiques (PVD), sont des procédés utilisés pour fabriquer des matériaux à gradient de composition (FGM) en déposant les atomes du matériau source directement sur la surface du substrat. Ces techniques permettent de réaliser des revêtements sur des substrats présentant des formes complexes, grâce à un contrôle précis du dépôt et à la possibilité d'adapter les paramètres du procédé selon la géométrie du substrat [4] [5].

I.13.Le dépôt chimique en phase vapeur assisté par plasma (PACVD)

Le dépôt chimique en phase vapeur assisté par plasma (PACVD) est une variante du procédé de dépôt chimique en phase vapeur (CVD) utilisée pour déposer des films minces en transformant des précurseurs gazeux (vapeur) en un film solide sur un substrat. Cette technique utilise le plasma pour activer les réactions chimiques nécessaires à la formation du film mince, ce qui permet de réaliser le dépôt à des températures relativement basses.

I.14.Les modèles de FGM

I.14.1.Modèle Voigt

Le modèle Voigt est l'un des modèles les plus simples utilisés dans l'analyse des matériaux à gradient de propriétés (FGM), et il est largement employé dans le processus d'homogénéisation

mécanique pour estimer les propriétés effectives des matériaux composites biphasés. Ce modèle repose sur l'hypothèse fondamentale que toutes les phases du matériau subissent la même déformation sous chargement, ce qui équivaut à une configuration mécanique en parallèle. Selon cette hypothèse, le module de Young effectif E et le coefficient de Poisson effectif ν peuvent être déterminés en fonction de la fraction volumique des constituants. Le modèle est apprécié pour sa simplicité et sa facilité d'application, mais sa précision peut être limitée dans les cas où la distribution des contraintes ou les interactions entre les phases sont plus complexe :

$$E(z) = E_c - E_m)V_c(z) \quad \text{I.1}$$

$$V = V_cV + V_m(1 - V) \quad \text{I.2}$$

I.14.2.Modèle Reuss

Le modèle de Reuss suppose que la contrainte moyenne totale à l'échelle macroscopique est identique dans chaque phase sous une contrainte uniforme. Il est donc appelé la règle inverse du modèle de Voigt. Les expressions du module de Young effectif et du coefficient de Poisson sont données en fonction des propriétés et des fractions volumiques des phases.

$$E(z) = \frac{E_c E_m}{E_c(1-V) + V E_m} \quad \text{I.3}$$

$$V = \frac{V_c V_m}{V_c(1-V) + V V_m} \quad \text{I.4}$$

I.14.3.Modèle de Mori-Tanaka

Le modèle Mori-Tanaka est un schéma d'homogénéisation largement utilisé pour prédire les propriétés élastiques effectives de différents types de matériaux FGM. Selon ce modèle, les modules de cisaillement effectifs (G) et le module de compression (K) peuvent être exprimés comme suit : Cette méthode repose sur l'hypothèse que le matériau composite biphasé est constitué d'une matrice renforcée par des particules sphériques distribuées aléatoirement dans la structure. Selon le schéma d'homogénéisation Mori-Tanaka, le module de compression effectif $K(z)$ et le module de cisaillement effectif $G(z)$ sont définis par [équations non précisées dans le texte initial].



Figure I.13: Matériau FGM à deux phases avec microstructure particulaire

Si on note par K le module de compressibilité, par G le module de cisaillement, par V la fraction volumique et par α le coefficient de dilatation thermique, les différentes propriétés locales obtenues par le modèle de Mori et Tanaka, pour une distribution aléatoire des particules isotropes dans une matrice isotrope, sont alors données par :

$$\frac{K-K_1}{K_2-K_1} = \frac{V_2}{1+V_1(K_2-K_1)/(K_1+4/3G_1)} \quad \text{I.5}$$

$$\frac{G-G_1}{G_2-G_1} = \frac{V_2}{1+V_1(G_2-G_1)/(G_1+F_1)} \quad \text{I.6}$$

$$\frac{\alpha-\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1} = \frac{\left(\frac{1}{K}\right)-\left(\frac{1}{K_1}\right)}{\left(\frac{1}{K_2}\right)-\left(\frac{1}{K_1}\right)} \quad \text{I.7}$$

I.14.4. Modèle auto-cohérent de Hill

Le modèle auto-cohérent de Hill est une approche de modélisation pour les matériaux composites qui considère chaque inclusion de renforcement comme étant intégrée dans un matériau continu avec les propriétés d'un composite. Cette méthode ne fait pas de distinction entre la phase matrice et la phase de renforcement, ce qui signifie que le même module global est estimé pour un autre composite où les rôles des deux phases seraient inversés. Ce modèle est particulièrement adapté pour estimer le module effectif dans les régions où le squelette de la microstructure présente une forme continue, comme illustré dans la figure I.5. Qui montre un matériau FGM à deux phases avec une microstructure squelettique.

Contrairement au modèle de Mori-Tanaka, qui est plus précis lorsque la continuité de la matrice et la discontinuité des inclusions sont bien définies, le modèle de Hill convient mieux aux microstructures squelettiques caractérisées par une large zone de transition entre les régions où l'un ou l'autre des constituants prédomine. Ce type de modélisation s'avère particulièrement utile pour les matériaux fonctionnellement gradués (FGM), qui se distinguent par une variation spatiale progressive de leurs propriétés permettant de créer des structures innovantes dans divers domaines d'application.

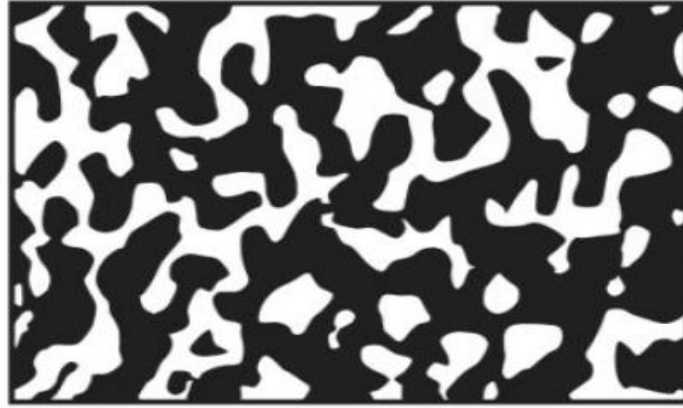


Figure I.14: Matériau FGM à deux phases avec microstructure squelettique.

Les modules élastiques effectifs sont donnés par :

$$\frac{g}{K} = \frac{V_1}{(K-K_2)} + \frac{V_2}{(K-K_1)} \quad \text{I.8}$$

$$\frac{\eta}{G} = \frac{V_1}{(G-G_2)} + \frac{V_2}{(G-G_1)} \quad \text{I.9}$$

Où g et η sont définis par :

$$g = \frac{K}{K_1 + (4/3)G} \quad \text{I.10}$$

$$\eta = 1 / 5(3 - g) \quad \text{I.11}$$

A partir des équations (I.1) et (I.2), l'expression du module de compressibilité est obtenue :

$$K = \frac{1}{V_1/(K_1 + (4/3)G) + V_2/(K_2 + (4/3)G)} - 4 / 3G \quad \text{I.12}$$

Le module G est obtenu en résolvant l'équation suivante :

$$\left[\frac{V_1 K_1}{(K_1 + (4/3)G)} + \frac{V_2 K_2}{(K_2 + (4/3)G)} \right] + 5 \left[\frac{V_1 G_2}{(G - G_2)} + \frac{V_2 G_1}{(G - G_1)} \right] + 2 = 0 \quad \text{I.13}$$

Pour les deux modèles précédents, le module de Young et le coefficient de Poisson sont calculés par :

$$E = \frac{9KG}{(3K+G)} \quad \text{I.14}$$

$$\nu = \frac{(3K-2G)}{2(3K+G)} \quad \text{I.15}$$

I.15. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM

Les matériaux à gradient de propriétés fonctionnelles (Functionally Graded Materials - FGM) sont des composites conçus par l'association de deux matériaux aux propriétés mécaniques et fonctionnelles distinctes, avec une transition graduelle et continue de la composition chimique, de la microstructure et de la distribution de la porosité à travers les dimensions spatiales, dans le but d'optimiser la performance structurelle et de réduire les concentrations de contraintes dues aux discontinuités abruptes des propriétés.

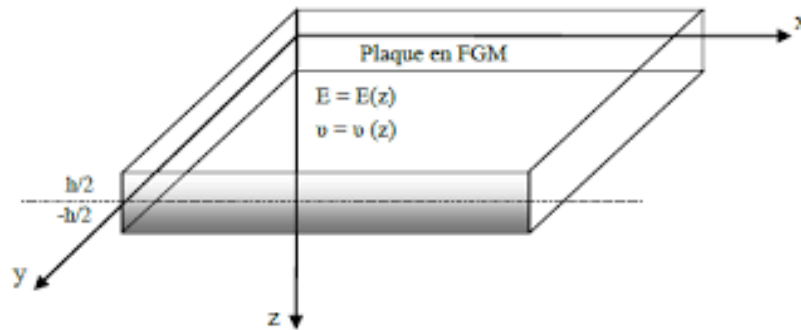


Figure.I.15: Géométrie d'une plaque en FGM.

Pour une plaque rectangulaire élastique, le plan de la plaque est défini par les coordonnées xx et yy , tandis que l'axe zz est perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque, représentant la direction de l'épaisseur. Les propriétés du matériau, telles que le module de Young E et le coefficient de Poisson ν , diffèrent entre les surfaces supérieure et inférieure, mais

varient de manière continue et graduelle à travers l'épaisseur, exprimées par des fonctions dépendant de la position z :

$$E=E(z) \text{ et } \nu=\nu(z).$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur des plaques FGM est modélisée à l'aide de différentes lois mathématiques, notamment les lois de puissance (Power-Law FGM – P-FGM), les fonctions exponentielles (Exponential FGM - E-FGM) et les fonctions sigmoïdes (Sigmoid FGM - S-FGM), permettant un contrôle précis du gradient pour répondre aux exigences mécaniques et thermiques, comme présenté dans les travaux de Chi et Chung (2006).

I.15.1. Les Propriétés matérielles de la plaque P-FGM

La fraction volumique des constituants dans une plaque FGM (matériau à gradient fonctionnel) est régie par une loi de puissance:

$$\nu(z) = \left(\frac{(z+h/2)}{h} \right)^p \quad \text{I.16}$$

p : paramètre de matériau

H : l'épaisseur de la plaque

Z : la coordonne suivant l'épaisseur

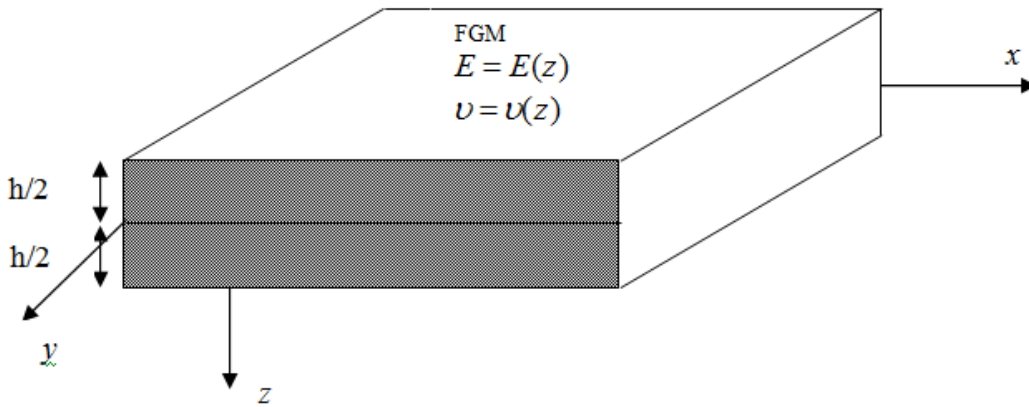


Figure I.16 : Les Dimensions De La Plaque FGM

Une fois que la fraction volumique locale $\nu(z)$ est définie, les propriétés du matériau de la plaque FGM peuvent être déterminées en utilisant les lois de mélanges

$$E(Z) = E_m + (E_c - E_m)V_c(z) \quad \text{I.17}$$

La figure I.16 illustre les dimensions d'une plaque FGM. Les propriétés du matériau (module de Young ou densité) varient entre la surface inférieure ($z = -h/2$) et la surface supérieure ($z = h/2$) de

la plaque FGM. La variation de ces propriétés à travers l'épaisseur de la plaque FGM est représentée à la figure I.17, On constate clairement que le module de Young, par exemple, change rapidement près de la surface inférieure lorsque $p < 1$, et augmente rapidement près de la surface supérieure lorsque $p > 1$.

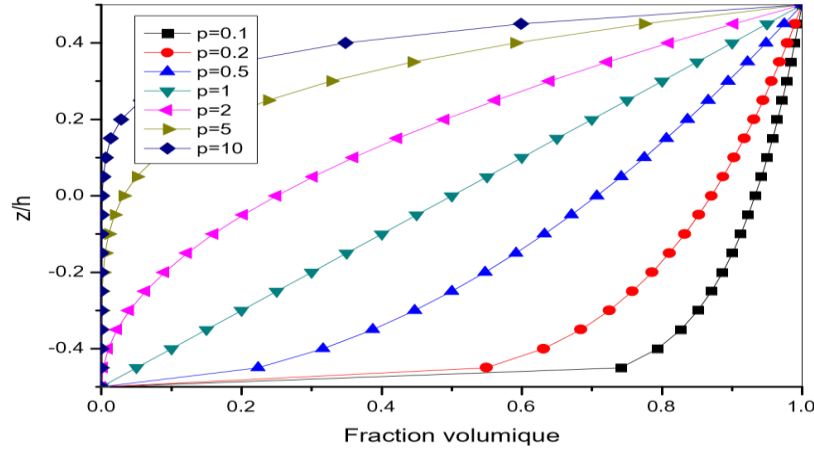


Figure .I.17 : La variation de la fraction volumique dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM

I.15.2. Les Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

Les propriétés matérielles de la plaque S-FGM (Sigmoidal Functionally Graded Material) sont caractérisées par une distribution particulière des propriétés à travers l'épaisseur du matériau.

Selon les travaux de Chung et Chi [7], la fraction de volume de cette plaque FGM est définie en utilisant deux fonctions de loi de puissance spécifiques qui assurent une bonne distribution des contraintes à toutes les interfaces.

Ces deux fonctions de loi de puissance sont exprimées mathématiquement par:

$$V_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{h}{2} + z}{h/2} \right)^p \quad \text{Pour} \quad -h/2 \leq z \leq 0 \quad \text{I.19}$$

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{h}{2} - z}{h/2} \right)^p \quad \text{Pour :} \quad 0 \leq z \leq h/2$$

Cette approche est particulièrement importante car lorsqu'on ajoute une plaque P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, des concentrations de contraintes apparaissent aux interfaces où le matériau est continu mais change rapidement.

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé selon les relations:

$$\begin{aligned}
 E(z) &= V_1(z) E_1 + [1 - V_1(z)] E_2 & \text{Pour} & -h/2 \leq z \leq 0 \\
 E(z) &= V_1(z) E_1 + [1 - V_1(z)] E_2 & \text{Pour} & 0 \leq z \leq h/2
 \end{aligned}
 \tag{I.20}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha(z) &= V_1(z) \alpha_c + [1 - V_1(z)] \alpha_m & \text{Pour} & -h/2 \leq z \leq 0 \\
 \alpha(z) &= V_2(z) \alpha_c + [1 - V_1(z)] \alpha_m & \text{Pour} & 0 \leq z \leq h/2
 \end{aligned}
 \tag{I.21}$$

Cette variation sigmoïdale du module de Young et des autres propriétés mécaniques permet d'optimiser la distribution des contraintes et d'améliorer les performances mécaniques de la plaque par rapport aux FGM traditionnel.

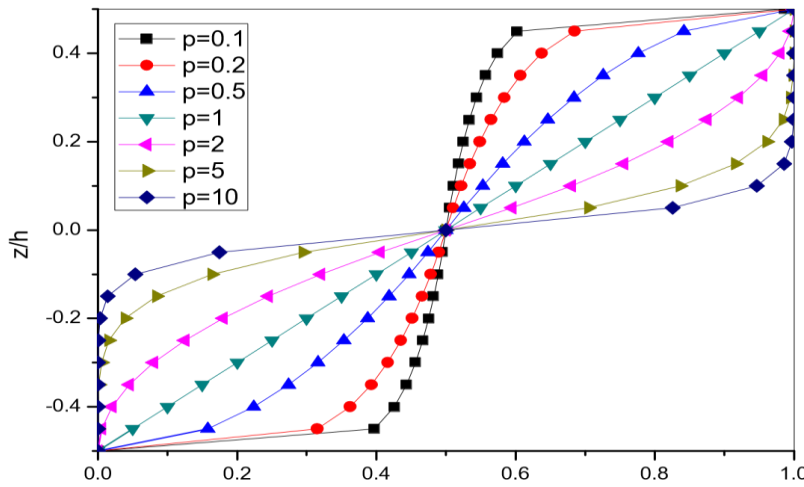


Figure .I.18: Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM

I.15.3. Les Propriétés matérielles de la plaque E-FGM

Les propriétés matérielles de la plaque E-FGM (Exponential Functionally Graded Material) se caractérisent par une distribution exponentielle des propriétés à travers l'épaisseur du matériau. Cette approche, exprimée par la fonction :

$$E(z) = E_2 e^{B(z+\frac{h}{2})} \tag{I.22}$$

Où

$$B = \frac{1}{h} \cdot \ln \left(\frac{S_1}{S_2} \right) \tag{I.23}$$

Est largement utilisée par les chercheurs pour modéliser le comportement des matériaux à gradient fonctionnel. La fraction volumique des constituants s'écrit :

$$V(z) = e^{p(z+h/2)/h} \tag{I.24}$$

Permettant ainsi de calculer le module de Young par :

$$E(z) = E_1 V(z) \quad \text{I.25}$$

Cette distribution exponentielle offre l'avantage d'une transition progressive des propriétés mécaniques, particulièrement utile dans les applications où la gestion des contraintes thermiques et mécaniques est essentielle.

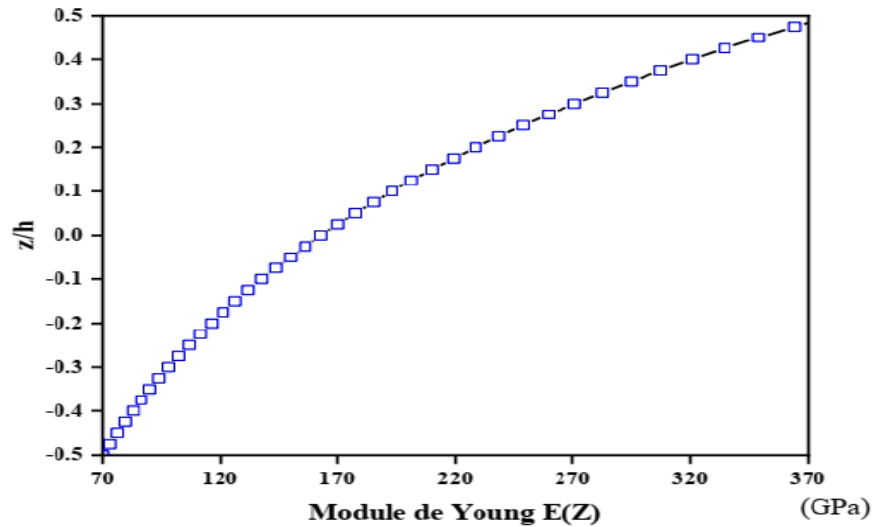


Figure I.19: Variation de la fraction volumique dans une plaque "E-FGM"

I.16. Conclusion

Dans ce chapitre, nous sommes attachés à présenter et à définir la notion d'un matériau FGM. Nous avons retracé l'histoire et leur développement, en mettant en lumière leurs avantages, leurs inconvénients, ainsi que leurs domaines d'application dans les structures et en génie civil, et puis en passant à décrire les différents types de modèles de FGM, qu'ils soient minces ou massifs. Enfin, nous avons terminé par une présentation des propriétés matérielles effectives du matériau FGM.

Chapitre II

Les théories régissant le comportement des structures en matériaux à gradient de propriétés

II.1. Introduction

Ce chapitre présente une analyse critique des modèles théoriques développés pour caractériser avec précision les champs de déplacement à travers l'épaisseur des plaques. La modélisation exacte du comportement mécanique des structures composées de poutres et de plaques à gradient fonctionnel de matériaux (FGM) nécessite une sélection rigoureuse tant de la théorie appropriée que de la méthodologie de résolution.

L'évolution historique des théories des plaques commence en 1888, lorsque Love formalisa les hypothèses de Gustav Kirchhoff, elles-mêmes dérivées des travaux d'Euler-Bernoulli, établissant ainsi la théorie classique des plaques minces, communément appelée théorie de Love-Kirchhoff. Ultérieurement, la théorie des plaques semi-épaisses, ou théorie des déformations du premier ordre, fut consolidée par Mindlin sur la base des contributions significatives de Rayleigh [8], Timoshenko [9] et Reissner [10]. Face aux limitations de ces approches pour les plaques d'épaisseur considérable, diverses théories d'ordre supérieur ont été élaborées pour améliorer la précision des modèles. Il existe aussi la théorie raffinée de déformation des plaques (RPT).

L'utilisation croissante des plaques isotropes et composites dans plusieurs secteurs industriels, notamment l'aéronautique, l'automobile et la construction navale, a motivé la communauté scientifique à développer des formulations théoriques capables de prédire avec exactitude leur comportement structural sous diverses conditions de chargement et de contraintes.

II.2. Définition de plaque

Une plaque FG est un solide rectangulaire 3D reposant sur des appuis simples. Son épaisseur est faible comparée à sa longueur (a) et sa largeur (b). Soumise à des charges, elle se déforme par flexion et par effet de membrane.

Les plaques peuvent être classées en trois groupes : les plaques minces à petites déformations, les plaques minces à grandes déformations et les plaques épaisses.

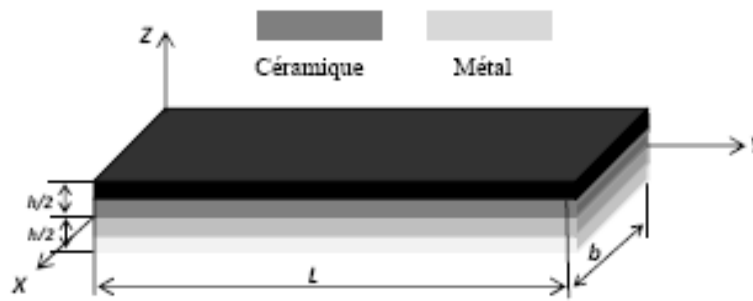


Figure II.1 : Exemple d'une plaque à gradient fonctionnel.

II.3. Les catégories des théories des plaques

Les théories de la déformation par cisaillement se divisent principalement en deux catégories, selon les champs supposés :

- Théories basées sur la contrainte.
- Théories basées sur le déplacement.

II.3.1. Les théories basées sur la contrainte

Les théories basées sur la contrainte partent d'hypothèses sur la distribution des contraintes axiales dans l'épaisseur de la plaque, généralement selon une variation linéaire. Les contraintes normales transversales et les contraintes de cisaillement sont ensuite calculées à partir des équations d'équilibre de la théorie de l'élasticité tridimensionnelle. Les équations d'équilibre fondamentales de cette théorie sont établies en appliquant le principe de stationnarité variationnelle.

II.3.2. Les théories basées sur le déplacement

Les théories basées sur le déplacement sont comme suit :

- Théorie classique des plaques (CPLT).
- Théorie de déformation de cisaillement de premier ordre (FSDT).
- Théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT).

II.4. Théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CLPT)

La théorie classique des plaques minces (CLPT) c'est le model le plus simple est le plus général. La CLPT est utilisée dans le domaine des petites déformations et des petits déplacements pour les plaques minces, Elle se basé sur l'hypothèse de Love Kirchhoff [11] suivantes:

Comme l'épaisseur est faible par rapport aux autres dimensions, on considère que les contraintes perpendiculaires à la surface de la plaque sont négligeables, on reste en petites déformations les sections normales au plan moyen de la plaque restent normales lors de la déformation en négligeant les effets de déformation de cisaillement transverse. Cette théorie est très bien décrite dans [12] et [13].

Ces hypothèses sont clairement résumées dans la figure II.2

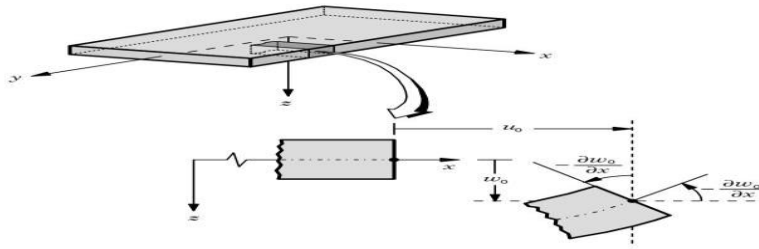


Figure II.2 : Géométries des bords d'une plaque avant et après la déformation (Hypothèses de Kirchhoff).

Le champ des déplacements requis par ces hypothèses est le suivant [14] :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{II.1}$$

Avec :

u_0 et v_0 sont les déplacements de membrane dans les directions x et y respectivement, et w_0 la flèche de la plaque,

$\frac{\partial w_0}{\partial x}$ et $\frac{\partial w_0}{\partial y}$: Les rotations dues à la flexion (sans cisaillement).

La validité de la théorie des plaques de Kirchhoff dépend du facteur de l'élancement de la plaque, plus il est important plus les résultats sont précis.

II.5. La théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT)

La théorie de déformation de cisaillement du premier ordre constitue une avancée importante par rapport à l'ancienne théorie classique des plaques stratifiées (CLPT), elle introduit un facteur de correction qui représente l'effet de cisaillement transverse, de telle façon que les résultats peuvent être cette fois plus précis lorsqu'on analyse des structures composites.

Cette théorie des plaques est généralement connue sous le nom de la théorie de Reissner-Mindlin depuis qu'elle a été développée par [10] et [15] d'où :

- Aucune déformation ne se produit dans le plan moyen de la plaque
- Les contraintes normales transversales (σ_z) sont négligeables devant les autres composantes
- Les sections droites initialement normales à la surface moyenne restent droites après déformation, mais pas nécessairement perpendiculaires à la surface moyenne

Cette hypothèse indique que la déformation de cisaillement transversale n'est pas nulle, mais conduit également à une violation de la condition de cisaillement statique, qui est nulle aux surfaces extérieures, car la contrainte de cisaillement devient uniforme sur toute l'épaisseur de la plaque. Pour compenser cette erreur, on applique le facteur de correction de cisaillement K à proposé par [15].

- Les déplacements sont petits comparés à l'épaisseur de la plaque
- L'effet de l'inertie de rotation est inclus [16].

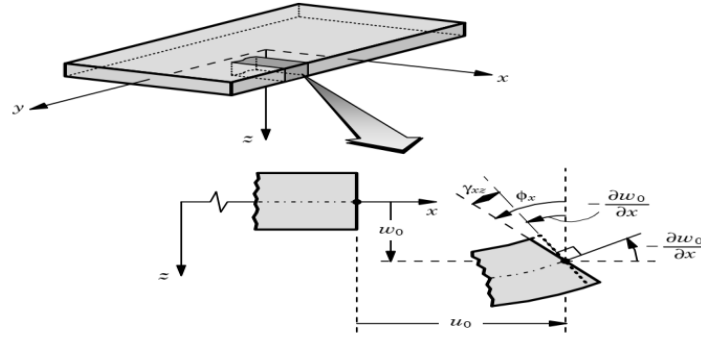


Figure II. 3 : Géométries des bords d'une plaque avant et après la déformation
(Hypothèses de Reissner-Mindlin).

Le champ de déplacements de Reissner-Mindlin s'écrit :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z \phi_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z \phi_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

u_0, v_0, w_0 les déplacements du plan moyen par rapport à l'axe x, y et z , respectivement. ϕ_x et ϕ_y les rotations de la section de la plaque par rapport à l'axe y et x , respectivement.

$$\phi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x} \quad \text{et} \quad \phi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (\text{II.3})$$

II.6 .La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé Reddy (HSDT)

Contrairement aux la théorie classique des plaques (CPT) et de la théorie du premier ordre (FSDT), qui présumant une distribution linéaire des champs de déplacement à travers l'épaisseur du matériau, la théorie d'ordre élevé adopte une distribution non linéaire de champs déplacement, Cette méthode permet d'intégrer les effets de déformation transversale de cisaillement et/ou de déformation normale transversale sans recourir à de facteur de correction ((Figure II. 3), Ont été développées par plusieurs chercheurs [17], [18], [19], [20], [21], [22], [23].

Voir la schématisation des déformations dans le cas de la théorie d'ordre élevé des plaques :

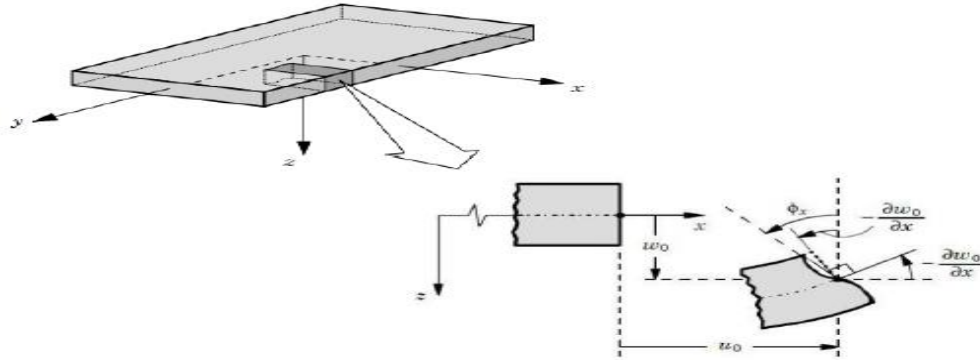


Figure II.5 : Géométries des bords d'une plaque avant et après la déformation
(Théorie d'ordre élevé HSDT ou TSDT, [Reddy JN, 1997]).

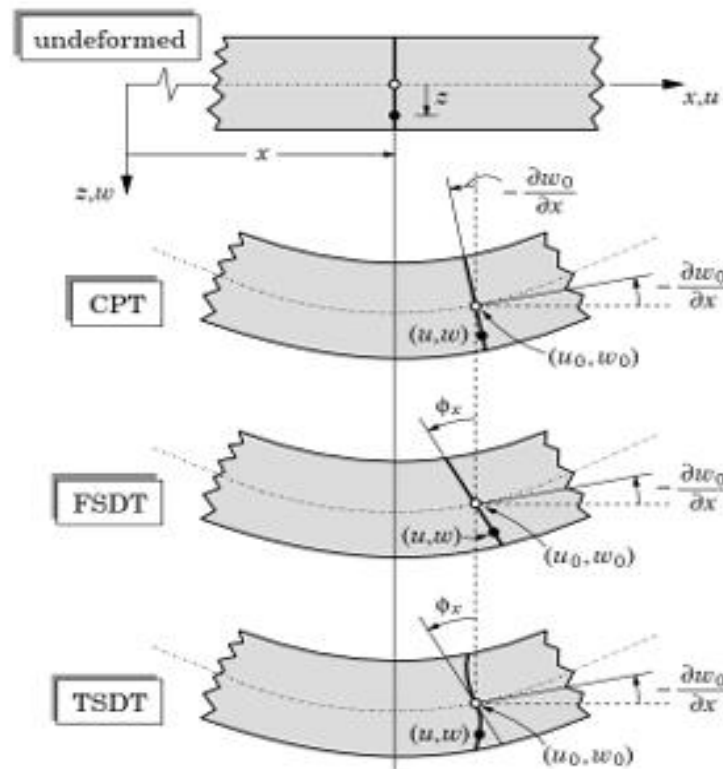


Figure II.6 : Comparaison entre les différentes théories de plaques (CPT, FSDT, HSDT ou TSDT).

Le champ des déplacements est généralement formulé comme suit :

$$\begin{aligned}
u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + f(z) \phi_x(x, y) \\
v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + f(z) \phi_y(x, y)
\end{aligned} \tag{II.4}$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y)$$

$$\text{Avec :} \quad \phi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x, \quad \phi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \tag{II.5}$$

u_0, v_0, w_0 les déplacements du plan moyen par rapport à l'axe x , y et z , respectivement. ϕ_x et ϕ_y les rotations de la section de la plaque par rapport à l'axe y et x , respectivement. $f(z)$ est la fonction de cisaillement caractérisant la théorie d'ordre élevé. On observe que cette équation constitue une généralisation de la théorie des plaques. Pour une valeur de $f(z) = 0$, elle se réduit à la théorie classique des plaques minces, tandis que pour $f(z) = z$, elle correspond à la théorie du cisaillement du premier ordre.

Parmi les théories fréquemment adoptées par la communauté scientifique, on trouve celle de Reddy où le champ de cisaillement est modélisé par une fonction cubique. Dans ce modèle, la distribution des contraintes de cisaillement suit une courbe parabolique à travers l'épaisseur, ce qui permet de satisfaire naturellement les conditions aux limites sur les surfaces libres

Cette approche est connue sous le nom de "Théorie de Déformation avec Cisaillement Cubique" (Three-parameter Shear Deformation Theory - TSDT) s'écrit dans un tel modèle comme suit [20]:

$$f(z) = \left(z - \frac{4}{3h^2} z^2 \right) \tag{II.6}$$

Une formulation plus avancée a été proposée par Touratier [24], dans laquelle le champ de cisaillement n'est plus représenté par une fonction polynomiale, mais une fonction de forme sinusoïdale. Cette approche, connue sous le nom de Sinus Shear Deformation Theory (SSDT), modélise le champ de cisaillement à l'aide d'une fonction sinusoïdale, offrant ainsi une description plus précise du comportement en cisaillement des structures, s'écrit dans un tel modèle comme suit :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \tag{II.7}$$

Les contraintes de cisaillement transverses, telles que calculées par les modèles sinusoïdaux, se distribuent selon une forme sinusoïdale à travers l'épaisseur de la poutre.

Ce type de modélisation offre une précision supérieure à celle de la théorie de Reddy lorsqu'on la compare à la solution exacte. [25] ont développé un nouveau modèle sinusoïdal (NSSDT) qui présente des similarités avec le modèle de Touratier. Dans ce modèle, la fonction décrivant le cisaillement transverse est formulée comme suit :

$$f(z) = \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) e^{m \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) + m\left(\frac{\pi z}{h}\right)} \quad \text{avec } m \geq 0 \quad (\text{II.8})$$

Par ailleurs, une version récente et améliorée de la théorie des plaques de déformation en cisaillement d'ordre élevé a été proposée par Afaq et al. En s'appuyant sur les travaux de [27]. Cette approche, désignée sous le nom d'Exponential Shear Deformation Plate Theory (ESDPT), a été développée par Karama et al. Elle se distingue par l'introduction d'une fonction de cisaillement transverse de forme exponentielle, déterminée selon une méthode décrite comme suit :

$$f(z) = z e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (\text{II.9})$$

II.7. La théorie des plaques tridimensionnelles (Élasticité 3D)

La reconversion vers les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) est de plus en plus fréquente dans des secteurs tels que l'aéronautique et l'aérospatial, ce qui motive le développement de théories capables de décrire précisément leur comportement structural sous charges mécaniques et thermiques. L'étude des plaques FGM, soumises à des sollicitations complexes, constitue un problème tridimensionnel, rendant l'utilisation des théories d'élasticité tridimensionnelle (3D) particulièrement pertinente.

Au cours des deux dernières décennies, de nombreux chercheurs ont proposé des solutions exactes ou approchées fondées sur l'élasticité 3D pour analyser le comportement thermo-mécanique des plaques FGM simplement appuyées. Parmi eux [28] ont développé des solutions exactes pour les contraintes thermiques, tandis que [29], ainsi que [30] [31] ont approfondi l'analyse thermoélastique et la conduction thermique transitoire dans ces plaques.

L'un des défis majeurs dans l'étude des plaques épaisses réside dans la description précise des champs de contraintes, notamment des contraintes de cisaillement transverse, sans simplifications excessives inhérentes aux théories classiques ou d'ordre un. Bien que les théories d'ordre supérieur

améliorent la modélisation, elles négligent souvent la déformation normale transverse, ce qui peut affecter la précision des résultats.

Ainsi, l'élasticité tridimensionnelle complète s'impose comme une approche essentielle, permettant de construire des champs de contraintes exacts ou approximatifs en se basant sur les équations différentielles de la dynamique. Cette démarche offre une meilleure compréhension et une modélisation plus rigoureuse du comportement des plaques FGM sous charges mécaniques et thermiques, contribuant à la validation des modèles simplifiés et à l'optimisation de ces matériaux dans les applications industrielles avancées.

II.8. La théorie raffinée de déformation des plaques (RPT)

Shimpi a proposé un modèle raffiné pour l'analyse des plaques isotropes, connu sous le nom de Refined Plate Theory (RPT). L'un des principaux atouts de cette approche réside dans sa formulation réduite, ne comportant que deux variables, ce qui limite le nombre d'inconnues à quatre, contre cinq dans le cadre de la théorie classique. De plus, cette théorie ne nécessite pas l'introduction d'un facteur de correction de cisaillement et permet de représenter une distribution parabolique du cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque. Par ailleurs, elle présente de nombreuses similitudes avec la théorie classique des plaques, tant au niveau des équations du mouvement que des conditions aux limites et des expressions des moments [32].

- Ait Atmane ont adaptée cette théorie pour la flexion des plaques FGM. Récemment [33].
- Thai et Kim et Hadji ont adapté la RPT, avec succès, au flambement des plaques orthotropes, et à la vibration libre des plaques stratifiées et Sandwichs respectivement [34]; [35].

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\
 w(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y)
 \end{aligned} \tag{II.11}$$

Où u_0 et v_0 sont les déplacements suivant les directions x et y d'un point sur le plan moyen de la plaque w_b et w_s sont les déplacements transversaux dus à la flexion et au cisaillement,

respectivement, $f(z)$ est une fonction de forme qui détermine la distribution des déformations et des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur.

II.9. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un aperçu des principaux modèles analytiques utilisés pour l'analyse des plaques épaisses en matériaux à gradients de propriétés (FGM). Nous avons également passé en revue les contributions de plusieurs chercheurs dans ce domaine, en abordant les différentes théories développées, telles que la théorie classique des plaques (CPT), la théorie de la déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT), la théorie de la déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT), la théorie tridimensionnelle de l'élasticité (Élasticité 3D), ainsi que la théorie raffinée des plaques (RPT).

Dans le cadre de nos travaux, nous avons adopté la nouvelle théorie raffinée de la déformation en cisaillement d'ordre élevé, intégrant un champ de déplacement innovant basé sur des fonctions d'intégrales variable.

Chapitre III

synthèse des travaux antérieurs sur l'effet de fondation élastiques

III.1. Introduction

L'interaction sol-structure désigne l'étude du comportement conjoint entre une structure et le sol sur lequel elle repose, prenant en compte la réciprocité des effets entre la déformation du sol et la réponse de la structure sous charges statiques ou dynamiques. Lorsqu'une charge est appliquée sur une fondation, elle provoque non seulement la déformation de la structure mais aussi celle du sol, entraînant une redistribution des contraintes dans le sol qui dépend de la rigidité respective du sol et des fondations. Comprendre cette interaction est essentiel pour évaluer correctement la capacité portante du sol et les contraintes à l'interface sol-fondation, surtout lorsque le sol subit des mouvements tels que des affaissements miniers ou des expansions.

Avant l'avènement des méthodes numériques avancées, des modèles simplifiés ont été développés pour estimer efficacement les contraintes et déplacements induits par cette interaction, en tenant compte principalement de la rigidité de la structure et du sol. La rigidité de la structure est influencée par ses matériaux, sa géométrie et sa typologie, souvent modélisée par des éléments de type plaque (comme la plaque Love Kirchhoff de ou celle de Reissner-Mindlin) pour simplifier l'analyse. La rigidité du sol, quant à elle, dépend de ses propriétés géotechniques et géologiques, et bien que le sol présente un comportement élastoplastique complexe, l'analyse commence généralement par un modèle élastique.

L'interaction sol-structure est donc un phénomène clé pour une conception réaliste et sûre des ouvrages, notamment dans le contexte sismique, où elle influence la transmission des mouvements du sol à la structure et peut modifier la réponse dynamique globale. Elle nécessite une modélisation précise pour intégrer les effets de couplage entre sol et structure, afin d'optimiser la conception des fondations et garantir la stabilité des ouvrages

III.2. Les modèles analytiques de l'interaction sol-structure

Les études portant sur l'interaction sol-structure reposent sur la modélisation distincte de deux éléments essentiels : d'une part le sol, d'autre part la structure elle-même. Si les chercheurs représentent invariablement la composante structurelle par des systèmes de plaques uniques ou multiples (Love Kirchhoff, Reissner-Mindlin HSDT, RPT) ils adoptent en revanche plusieurs modèles pour caractériser le comportement du sol, notamment les modèles de Winkler, Pasternak ou Kerr.

III.2.1. Fondation de Winkler

Le modèle de Winkler constitue une représentation simplifiée mais largement adoptée du comportement des sols sous charge. Cette approche conceptualise le sol comme un assemblage de ressorts élastiques indépendants et parallèles, où chaque ressort réagit exclusivement à la contrainte verticale qui lui est appliquée, sans transmission d'efforts aux éléments adjacents. Dans ce cadre théorique, la pression exercée par le sol en tout point est directement proportionnelle à l'enfoncement vertical de la fondation à cet endroit, suivant une relation mathématique linéaire.

$$p = K_w w_0 \quad (\text{III.1})$$

Où

p : La pression appliquée en un point.

w_0 : Le déplacement vertical en ce point.

K_w : Le module de la fondation, Constante du ressort.

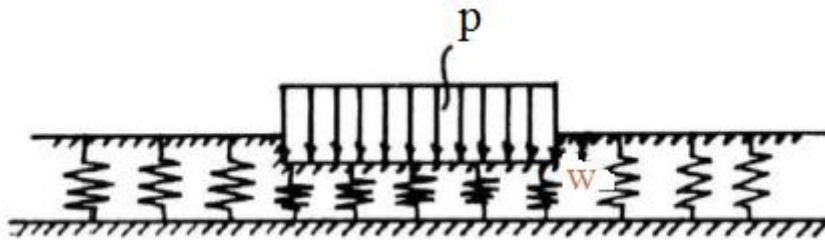


Figure III. 1 : Représentation physique de Fondation de Winkler

En dépit de son élégante simplicité, le modèle de Winkler présente deux limitations fondamentales. D'une part, l'absence de liaison entre les ressorts adjacents induit une représentation imparfaite du phénomène de cisaillement vertical dans le massif de sol. Cette approximation engendre une rupture non réaliste dans le profil de tassement à l'interface entre les zones sollicitées et non sollicitées de la fondation. D'autre part, cette approche purement élastique ne permet pas d'intégrer les comportements non-linéaires et irréversibles qui caractérisent la réponse des sols lorsqu'ils atteignent leur seuil de plasticité. En 1954, Pasternak a apporté une amélioration significative au modèle de Winkler en introduisant un paramètre supplémentaire. Cette avancée permettait de prendre en compte les interactions entre les ressorts et a rendu le modèle de Pasternak largement utilisé pour analyser le comportement mécanique des interactions structure-fondation.

III.2.2. Fondation de Pasternak

Le modèle de Pasternak introduit une amélioration significative au modèle de Winkler en établissant un degré d'interaction entre les ressorts adjacents. Cette interaction est caractérisée par l'introduction d'un coefficient de rigidité tangentielle K_p , qui opère conjointement avec la rigidité normale K_w issue du modèle de Winkler [36]. Deux distinctions fondamentales peuvent être identifiées entre ces deux modèles : tandis que le modèle de Winkler génère un tassement uniforme sous la structure et n'induit aucun déplacement en dehors de la zone chargée, le modèle de Pasternak présente une continuité des déplacements qui s'étend à la fois dans la zone sollicitée et dans les régions adjacentes non chargées, La relation pression déflexion est :

$$f_e = K_w w_0 - K_p \nabla^2 w \quad (\text{III.2})$$

Avec :

f_e : La charge linéique s'appliquant sur le radier

K_w : Constante du ressort couche de ressort.

K_p : Constante de la couche de cisaillement.

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \quad (\text{III.3})$$

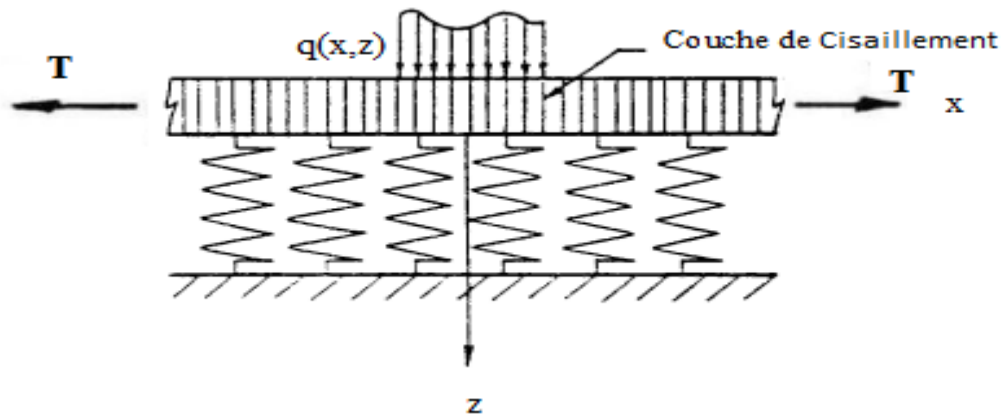


Figure III. 2 : Représentation physique de Fondation de Pasternak

III.2.3. Fondation Kerr

Le modèle de fondation de Kerr constitue une extension du modèle classique de Winkler en intégrant une couche de cisaillement, notée K_s entre deux couches élastiques caractérisées par des rigidités différentes K_u pour la couche supérieure et K_l pour la couche inférieure. Ce modèle élastique à trois paramètres permet de mieux représenter l'interaction sol-structure en tenant

compte du glissement relatif au sein de la fondation. L'introduction de la couche de cisaillement permet ainsi de simuler de manière plus réaliste les comportements mécaniques complexes observés dans les fondations. La densité de réaction associée à cette fondation est formulée selon les travaux [37].

$$f_e = \left(\frac{K_l K_u}{K_l + K_u} \right) - \left(\frac{K_s K_u}{K_l + K_u} \right) \nabla^2 w \quad (\text{III.4})$$

Ou :

K_s : C'est le module de cisaillement.

K_u : C'est le module élastique de la couche supérieure.

K_l : C'est le module élastique inférieur de la couche.

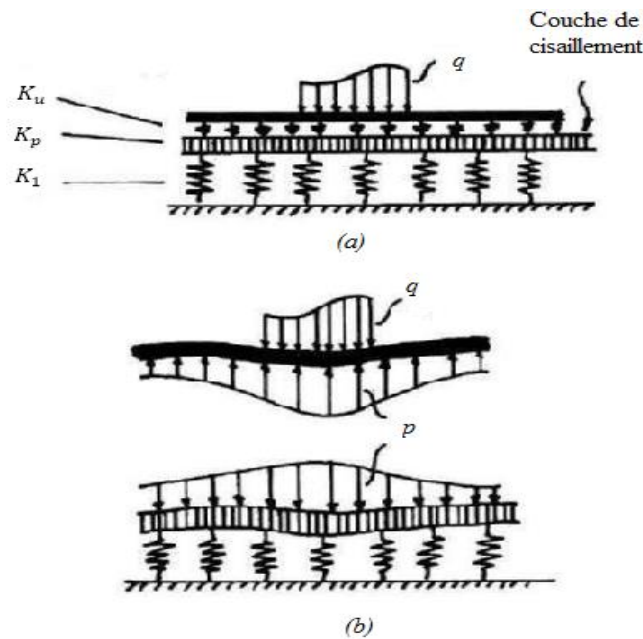


Figure III.3 : La représentation physique de Fondation de Kerr

III.3. Synthèse des travaux antérieurs sur l'effet de fondation

Plusieurs chercheurs ont exploré l'influence des fondations élastiques sur le comportement des structures composites et fonctionnellement graduées.

- Shen et Zhu ont analysé le comportement post-flambement de plaques sandwich à tôles de face CNT-RC sur fondations élastiques via une approche multi-échelle. Leurs

travaux démontrent l'impact significatif de la rigidité de la fondation sur la charge critique de flambement et la réponse post-flambement [38].

- Tabassian et al. Se sont penchés sur la stabilité dynamique de poutres sandwich intelligentes sur fondation de Winkler sous charges axiales harmoniques, en manipulant le noyau électro-rhéologique par champ électrique. Leurs résultats indiquent que la présence de la fondation élastique restreint la zone d'instabilité et augmente la charge dynamique critique [39].

L'étude de Behravan Rad et Shariyat porte sur des plaques annulaires bidirectionnelles à gradation fonctionnelle (FG) placées sur des fondations Winkler-Pasternak non homogènes. Ces plaques, soumises à des forces de traction normale et de cisaillement dans le plan, ont été analysées via la théorie tridimensionnelle exacte de l'élasticité. Les chercheurs ont observé que lorsque les couches supérieures de la plaque présentent un module d'élasticité plus élevé, le pic de contrainte de cisaillement transversal migre vers ces mêmes couches supérieures. L'étude démontre également que les fondations de type Winkler ou Pasternak jouent un rôle secondaire dans la distribution des charges appliquées à ces structures [40].

- Daouadji et al. ont étudié la flexion de plaques à gradient fonctionnel sur fondation élastique soumises à des sollicitations hygro-thermomécaniques, en employant une théorie de cisaillement d'ordre élevé [41].
- Kanani et al. ont évalué les vibrations libres et forcées de grande amplitude d'une poutre FG reposant sur une fondation élastique non linéaire avec couche de cisaillement et non-linéarité cubique. Leurs résultats révèlent que l'augmentation de la rigidité non linéaire de la fondation intensifie la non-linéarité de la réponse fréquentielle et temporelle, tandis que l'augmentation de la rigidité linéaire produit l'effet inverse [42].
- Ma et al. ont examiné la réponse non linéaire d'une poutre sur fondation élastique soumise à une excitation harmonique. Ils concluent que dans la réponse linéaire, le paramètre de Winkler (k_0) est dominant, mais que le paramètre de cisaillement (k_1) influence significativement la réponse non linéaire tant quantitativement que qualitativement [43].
- Akavci en présente une nouvelle théorie raffinée de la déformation en cisaillement hyperbolique appliquée à l'étude des plaques sandwich à gradient fonctionnel reposant sur une fondation élastique. Cette théorie est utilisée pour analyser la réponse statique, les vibrations libres et le flambement de ces plaques. Les résultats montrent que

l'augmentation des coefficients de rigidité de la fondation élastique élève la charge critique de flambement, ce qui signifie que la fondation joue un rôle important dans le comportement mécanique des plaques sandwich. Plus précisément, l'effet du coefficient de rigidité en cisaillement (lié au modèle de fondation de type Pasternak) est plus marqué que celui du coefficient de rigidité de Winkler, indiquant que la prise en compte des effets de cisaillement dans la fondation est cruciale pour une modélisation précise [44].

- Diverses théories de cisaillement raffinées ont été développées pour l'analyse statique, vibratoire, de flambement et hygro-thermomécanique des plaques à gradient fonctionnel sur fondations élastiques (Lee et al [45] ; Thai et al [46] ; Zaoui et al [47] ; Zenkour et al. [48] Wattanasakulpong et Chaikittiratana [49] ont investigué le comportement statique et dynamique des plaques composites renforcées de nanotubes de carbone sur fondation Winkler-Pasternak.
- Gupta et al. ont analysé le comportement en flexion et en vibration d'une plaque à gradient fonctionnel sur fondation élastique en utilisant une théorie non polynomiale d'ordre supérieur avec éléments finis [50].
- Zenkour et Radwan ont étudié les contraintes et déplacements d'une plaque FGM sur fondation Winkler-Pasternak sous diverses conditions limites, appliquant une théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé [51].
- Shahsavari, et al. ils ont présenté une nouvelle théorie hyperbolique quasi-3D pour analyser les vibrations libres de plaques poreuses fonctionnellement graduées (FG) reposant sur des fondations élastiques Winkler, Pasternak et Kerr, Ils ont constaté que la couche de cisaillement de la fondation Pasternak et la couche de ressorts supplémentaire de la fondation Kerr joue un rôle dominant dans la fréquence de vibration des plaques FG. Ils ont conclu que l'élasticité des fondations est un facteur déterminant dans les distributions poreuses FG qui permettent d'obtenir la rigidité de plaque la plus élevée possible [52].
- Nebab et al. ont examiné la flexion de plaques à gradient fonctionnel sur fondations Pasternak-Winkler soumises à des charges mécaniques, utilisant une théorie de cisaillement supérieur à quatre variables [53].
- Récemment, Mamen, et al. il a été estimé une formulation analytique présentait des résultats thermodynamiques non linéaires de plaques fonctionnellement graduées basées sur Winkler/Pasternak et Kerr comme montre dans la figure III.4. Ils ont

démontré qu'augmenter les paramètres élastiques de la fondation améliorerait la réponse thermodynamique des plaques FG, néanmoins cette amélioration n'aurait aucun effet sur l'effet du changement de température (ΔT) sur les fréquences fondamentales de ces structures [54].

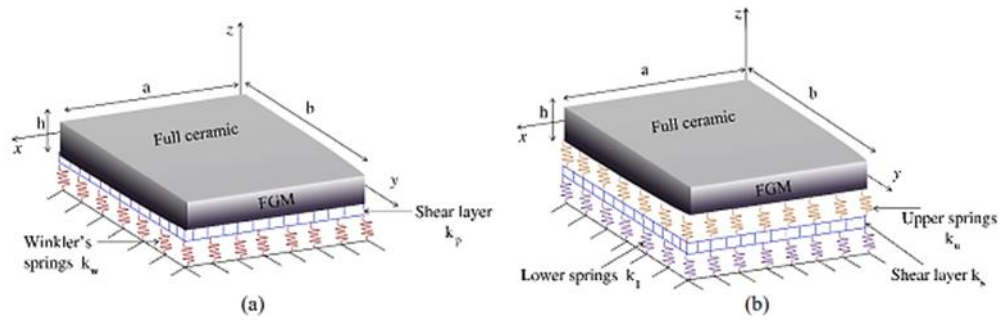


Figure III.4 : Géométrie et système de coordonnées des plaques carrées FG reposant sur des fondations élastiques : (a) fondation Winkler-Pasternak et (b) fondation Kerr [54]

III.4. Modèles de porosité

L'apparition des pores durant le processus de fabrication est modélisée à l'aide de diverses fonctions mathématiques, notamment la loi exponentielle, la loi de puissance et la règle du cosinus. Pour l'analyse des structures à matériaux fonctionnellement gradués (FGM), plusieurs modèles ont été proposés afin de décrire la distribution des micro-vides. Parmi ces modèles, on distingue les porosités uniformes, non uniformes, logarithmiques non uniformes ainsi que celles basées sur la masse volumique. Ces différentes formulations permettent de représenter avec précision la répartition des pores dans les structures FGM, facilitant ainsi leur étude et leur optimisation.

III.4.1. Plaque FG avec porosité uniforme

Le premier modèle décrivant une distribution homogène de la porosité a été élaboré par Wattanasakulpong et Ungbhakorn [55]. Selon cette approche, les micro-vides sont répartis de manière constante sur l'ensemble de l'épaisseur de la plaque FG (Fig. III.4a). Les propriétés matérielles effectives de la plaque, intégrant cette porosité uniforme, sont quantifiées à l'aide de l'équation (III .5)

$$P(z) = P_c \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p - \frac{\xi}{2} \right) + P_m \left(1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p + \frac{\xi}{2} \right) \quad (\text{III.5})$$

Où ξ est le paramètre qui tient compte de l'effet de la porosité. III.4 En appliquant l'équation (III.5) sur les propriétés effectives de la plaque FG, les formulations du module de Young " $E(z)$ ", de la densité massique " $\rho(z)$ " et du coefficient de Poisson " $\nu(z)$ " peuvent être exprimées par les équations (III.6) [55].

$$\begin{aligned} E(z) &= (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + E_m - \frac{\xi}{2} (E_c + E_m) \\ \nu(z) &= (\nu_c - \nu_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + \nu_m - \frac{\xi}{2} (\nu_c + \nu_m) \\ \rho(z) &= (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + \rho_m - \frac{\xi}{2} (\rho_c + \rho_m) \end{aligned} \quad (\text{III.6})$$

III.4.2. Plaque FG avec porosité non uniforme

Les plaques fonctionnellement graduées (FG) à porosité non uniforme se caractérisent par une répartition variable des micro-vides selon l'épaisseur, contrairement aux modèles à porosité uniforme. Cette distribution hétérogène résulte souvent de défauts de fabrication ou de contraintes lors de l'infiltration des matériaux. Se basant sur ces considérations, Wattanasakulpong et Ungbhakorn ont développé un autre modèle de distribution de porosité (la porosité varie en fonction de l'épaisseur). Les propriétés effectives des matériaux avec une distribution impaire (voir Figure.III.4b) [56].

$$\begin{aligned} E(z) &= (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + E_m - \frac{\xi}{2} (E_c - E_m) \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right) \\ \nu(z) &= (\nu_c - \nu_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + \nu_m - \frac{\xi}{2} (\nu_c - \nu_m) \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right) \\ \rho(z) &= (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + \rho_m - \frac{\xi}{2} (\rho_c - \rho_m) \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.7})$$

III.4.3. Plaque FG avec porosité logarithmique- non uniforme

Le troisième modèle a été proposé par [50]. Où la distribution de la porosité varie selon une fonction logarithmique à travers l'épaisseur de la plaque comme le montre la figure III.4c. Les propriétés effectives du matériau avec une distribution logarithmique impaire sont résumées dans les équations (III.8) [56].

$$\begin{aligned}
 E(z) &= (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + E_m - \log \left(1 + \frac{\xi}{2} (E_c - E_m) \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right) \right) \\
 v(z) &= (v_c - v_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + v_m - \log \left(1 + \frac{\xi}{2} (v_c - v_m) \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right) \right) \\
 \rho(z) &= (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + \rho_m - \log \left(1 + \frac{\xi}{2} (\rho_c - \rho_m) \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right) \right)
 \end{aligned} \tag{III.8}$$

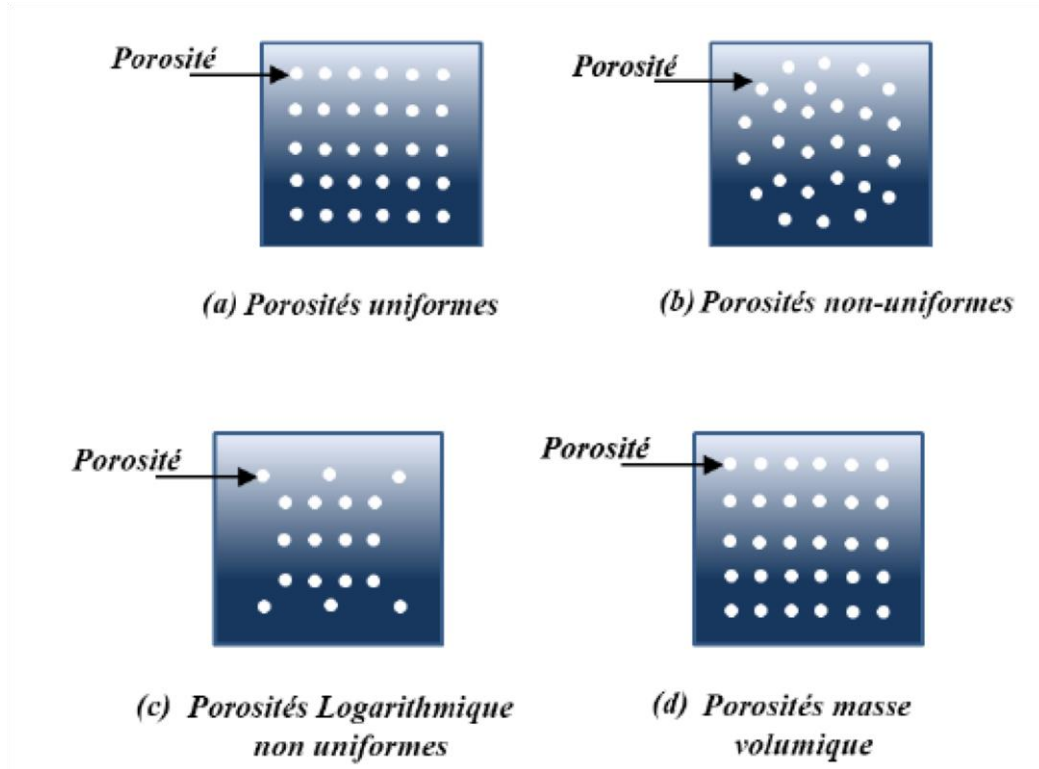


Figure III. 4 : Illustration de différents modèles de variations de la porosité.

III.5.Conclusion

Ce chapitre présente les fondations élastiques sont décrites à travers les modèles de Winkler (paramètre unique de rigidité), Pasternak (intégrant un cisaillement de couche) et Kerr (ajoutant une couche compressible intermédiaire). Nous avons présent quelques travaux sur l'effet de fondation sur différents types de structure.

La présence de micro-vides dans les plaques FGM altère significativement leurs propriétés mécaniques, notamment le module de Young et le module de cisaillement, ce qui influence directement leur réponse en flexion, vibration et flambement. Cette hétérogénéité microstructurale, qu'elle soit uniforme ou à gradient, doit être intégrée dans les modèles théoriques pour une prédiction réaliste du comportement.

Chapitre IV

Analyse théorique des plaques poreuse en FGM sur une fondation élastique

IV.1. Introduction

Dans ce chapitre, une théorie raffinée de déformation (RPT) est développée pour analyser la vibration d'une plaque fonctionnellement graduée (FGM) reposant sur une fondation élastique, sous différentes conditions aux limites. Cette théorie prend en compte la présence possible de porosités dans la plaque FGM, susceptibles de réduire la résistance mécanique du matériau. Afin de modéliser avec précision le comportement en vibration de cette plaque imparfaite, une nouvelle distribution de la porosité à travers l'épaisseur de la plaque est introduite. On considère que les propriétés matérielles de la plaque varient conformément à la loi de puissance caractéristique des matériaux fonctionnellement gradués (P-FGM). Les équations du mouvement pour ces plaques épaisses sont dérivées à partir du principe d'Hamilton, puis résolues analytiquement à l'aide des équations de Galerkin. Cette approche permet d'étudier efficacement l'influence des porosités, des paramètres de fondation, du rapport d'élancement, de l'indice de matériau ainsi que des conditions aux limites sur les déformations et contraintes de la plaque fonctionnellement graduée.

IV.2. Formulation du problème

Dans cette étude, nous examinons une plaque composite céramo-métallique à gradient de propriétés (FG) de dimensions données dans le système de coordonnées (x, y, z) . Cette plaque est composée d'aluminium (Al) et d'alumine (Al_2O_3), dont les propriétés mécaniques, notamment le module d'Young $E(Z)$ et la masse volumique $\rho(Z)$, et le coefficient de poisson $\nu(z)$ évoluent de manière continue uniquement selon l'épaisseur. La surface supérieure de la plaque (située à $z=h/2$) est constituée de céramique, tandis que sa surface inférieure (située à $z=-h/2$) est en métal. La plaque repose sur une fondation élastique est représentée mathématiquement par le modèle à deux paramètres de Winkler-Pasternak et Kerr.

Distribution de la loi de puissance selon [52] :

$$\begin{aligned} E(z) &= (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + E_m - \frac{\xi}{2} (E_c + E_m) \\ \nu(z) &= (\nu_c - \nu_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + \nu_m - \frac{\xi}{2} (\nu_c + \nu_m) \\ \rho(z) &= (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + \rho_m - \frac{\xi}{2} (\rho_c + \rho_m) \end{aligned} \quad (IV.1)$$

Où les indices c et m désignent respectivement la céramique et le métal. P l'indice de fraction volumique (indice de loi de puissance) définit la caractérisation de la variation des matériaux à travers l'épaisseur de la plaque, et ξ représente la fraction volumique de porosité.

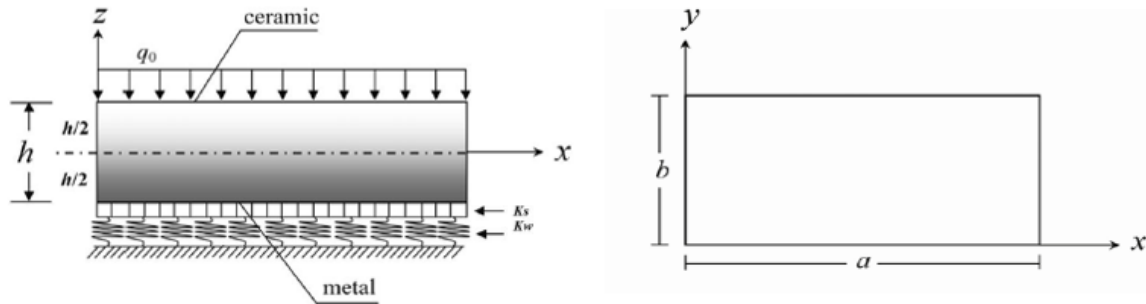


Figure IV.1 : Représentation schématique d'une plaque rectangulaire FGM reposant sur une fondation élastique.

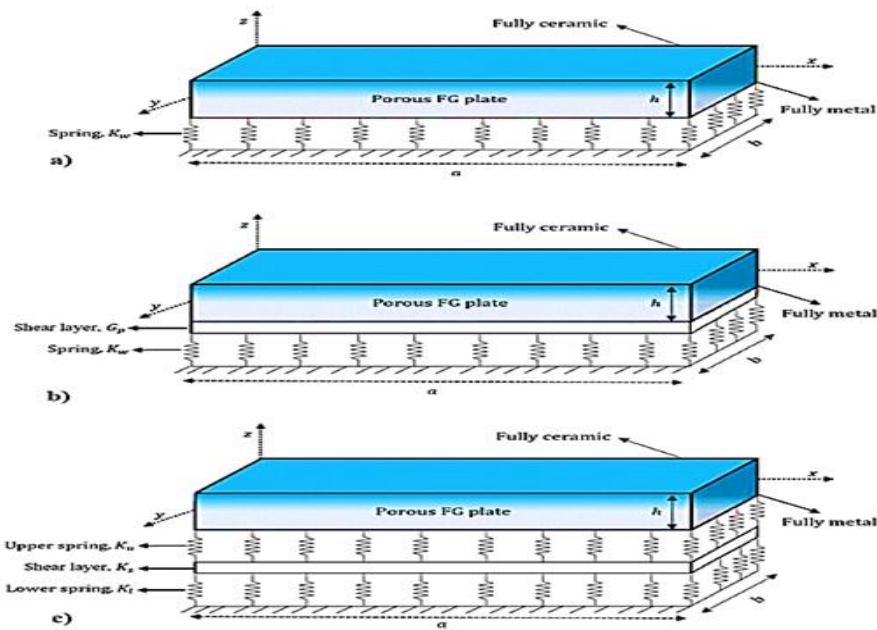


Figure IV.2 : La configuration de plaques FG rectangulaires reposant sur a) la fondation Winkler, b) la fondation Pasternak et c) la fondation Kerr, [52].

IV.3. Théories raffinées d'ordre élevé à quatre variables

IV.3.2. Hypothèses de base

Pour modéliser le comportement de cette plaque FG, nous adoptons les hypothèses suivantes :

- Le système de coordonnées cartésiennes a son origine située au plan neutre de la plaque.
- Les déplacements longitudinaux sont le résultat combiné de l'extension, de la flexion et du cisaillement.
- Les déplacements dans le plan médian (u et v) sont décomposés en contributions membranaire, de flexion et de cisaillement.
- Le déplacement transversal (w) est la somme d'une composante liée à la flexion (w_b) et d'une composante due au cisaillement (w_s), s'exprimant comme

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \quad (IV.2)$$

- Nous considérons de petites déformations (linéaires) en raison de déplacements négligeables par rapport à l'épaisseur de la plaque. De plus, la contrainte normale à travers l'épaisseur (σ_{zz}) est supposée négligeable face aux contraintes dans le plan de la plaque (σ_{xx} et σ_{yy}).

IV.3.3. Champs de déplacement

En nous appuyant sur les hypothèses établies précédemment, nous obtenons le champ de déplacement sous la forme analytique suivante :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y) \end{aligned} \quad (IV.3)$$

Ou :

$$f(z) = z - \frac{2}{3\pi} \left(z \cosh \left(\frac{\pi}{2} \right) - \frac{h}{\pi} \sinh \left(\frac{\pi z}{h} \right) \right) \quad (IV.4)$$

Les variables u_0 et v_0 représentent les déplacements membranaires dans le plan selon les directions (x) et (y) respectivement. Les composantes w_b et w_s correspondent aux déplacements transversaux attribuables respectivement à la flexion et au cisaillement. Quant à la fonction $f(z)$, elle est définie à partir d'une combinaison de fonctions hyperboliques.

IV.3.4. Champs de déformation

Le champ de déformation associé au champ de déplacement précédent est obtenu comme suit

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad (IV.5)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (IV.6)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{yx}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ \frac{\partial w_s}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (IV.7)$$

$$g(Z) = 1 - \frac{df(z)}{dz} \quad (IV.8)$$

Avec $(\varepsilon^0, k^0, k^s, \gamma^0)$ sont respectivement des déformations et les distorsions.

IV.3.5. Relations constitutives

Pour la plaque FG élastique et isotrope, les relations contraintes-déformations sont exprimées comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (IV.9)$$

$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz})$ sont les composantes de contraintes et déformations respectivement.

En utilisant les propriétés du matériau définies dans l'équation IV.1, les coefficients de rigidité c_{ij} , peuvent être écrits comme :

$$\begin{aligned}
c_{11} &= c_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu(z)^2} \\
c_{12} &= \frac{E(z)\nu(z)}{1-\nu(z)^2} \\
c_{44} &= c_{55} = \frac{E(z)}{2(1+\nu(z))}
\end{aligned} \tag{IV. 10}$$

IV.4. Les équations d'équilibres

Le principe de Hamilton est utilisé pour établir les équations du mouvement des plaques à gradient de fonction (FG) présentant des imperfections.

$$\int_0^t (\delta U_P - \delta U_F + \delta V - \delta T) dt = 0 \tag{IV. 11}$$

Où : δU_P est la variation de l'énergie de déformation qui est calculée par

$$\delta U_P = \int_A \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dA dz \tag{IV. 12}$$

La variation de l'énergie de déformation est finalement formulée à l'aide des expressions des contraintes et des déformations :

$$\begin{aligned}
&= \int_A N_x \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} - M_x^b \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x^2} - M_x^s \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} - M_y^b \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial y^2} - M_y^s \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial y^2} \\
&+ N_{xy} \left(\frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} \right) - 2M_{xy}^b \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x \partial y} - 2M_{xy}^s \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial x \partial y} + Q_{yz} \left(\frac{\partial \delta w_s}{\partial y} \right) + \\
&Q_{xz} \left(\frac{\partial \delta w_s}{\partial x} \right) dA
\end{aligned} \tag{IV. 13}$$

Où les résultantes de contraintes peuvent être définies comme :

$$\begin{aligned}
(N_x, N_y, N_{xy}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) dz \\
(M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) z dz \\
(M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) f(z) dz \\
(Q_{yz}, Q_{xz}) &= (Q_{yz}, Q_{xz}) g(z) dz
\end{aligned} \tag{IV. 13}$$

En insérant l'équation (IV.5-IV.6-IV.7-IV.8) dans l'équation (IV.9), puis en intégrant les résultats dans l'équation (IV. 13), on peut exprimer les résultantes des contraintes en fonction des champs de déplacement ($u_0 v_0 w_b w_s$)

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x^b \\ M_y^b \\ M_{xy}^b \\ M_x^s \\ M_y^s \\ M_{xy}^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 & B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 & B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & B_{66}^s \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 & D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 & D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} & 0 & 0 & D_{66}^s \\ B_{11}^s & B_{12}^s & 0 & D_{11}^s & D_{12}^s & 0 & H_{11} & H_{12} & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 & D_{12}^s & D_{22}^s & 0 & H_{12} & H_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s & 0 & 0 & D_{66}^s & 0 & 0 & H_{66} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \\ -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (IV.14)$$

$$\begin{bmatrix} Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{55}^s & 0 \\ 0 & A_{44}^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ \frac{\partial w_s}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (IV.14a)$$

Les coefficients de rigidité $A_{ij}, A_{ij}^s, B_{ij}, B_{ij}^s, D_{ij}, D_{ij}^s, H_{ij}$, sont défini comme :

$$= \int_{-h/2}^{h/2} (1, g^2(z), z, f(z), z^2, f(z)z, f^2(z)) c_{ij} dz \quad (IV.14b)$$

IV.5. Différentes modélisations de la fondation élastique

L'énergie de déformation introduite par les fondations élastiques peut être définie comme suit :

$$\begin{aligned} U_F &= - \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \{U_{winkler} + U_{Pasternak} + U_{Kerr}\} dA dz \\ &= -(q_{Winkler} + q_{Pasternak} + q_{Kerr}) \end{aligned} \quad (IV.15)$$

Ou :

δU_F : Le modèles de fondation élastique.

Dans laquelle l'indice indique le nom du modèle de fondation utilisé.

IV.5.1. Modèle de Winkler

Dans le cas du modèle de fondation de Winkler, la charge répartie peut être définie par

$$q_{Winkler} = K_w(w_b + w_s) \quad (IV.16)$$

Où K_w est la constante de proportionnalité qui est appelée le module de réaction du milieu

IV.5.2. Modèle de Pasternak

La réaction répartie entre le modèle de fondation de Pasternak et la face inférieure de la plaque FG peut s'exprimer par :

$$q_{Pasternak} = K_w(w_b + w_s) - G_p \nabla^2(w_b + w_s) \quad (IV.17)$$

Où $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ désigne l'opérateur différentiel de Laplace en coordonnées cartésiennes rectangulaires.

De toute évidence, le modèle de Pasternak se réduit au modèle de fondation de Winkler pour $G_p=0$

IV.5.3. Modèle de Kerr

La réaction répartie dans ce modèle est formulée comme suit :

$$q_{Kerr} = -\left(\frac{K_l K_u}{K_l + K_u}\right)(w_b + w_s) - \left(\frac{K_s K_u}{K_l + K_u}\right)(w_b + w_s) \quad (IV.18)$$

IV.6. Énergie cinétique

On peut obtenir la variation de l'énergie cinétique en se basant sur la théorie de raffinées d'ordre élevé à quatre variables de la plaque

$$\delta T = \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \{[\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + \dot{w} \delta \dot{w}] \rho(z)\} dA dz \quad (IV.19)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_A I_0 \{ [\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + (\dot{w}_b + \dot{w}_s)(\delta \dot{w}_b + \delta \dot{w}_s)] \\
&\quad - I_1 \left[\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right] \\
&\quad - J_1 \left[\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right] \\
&\quad + I_2 \left[\frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial y} \right] \\
&\quad + K_2 \left[\frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial y} \right] + \\
&\quad J_2 \left[\frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial y} \right] \} dA
\end{aligned}$$

Dans lequel les moments d'inertie de masse sont définis par :

$$\begin{aligned}
&\{I_0, I_1, I_2, J_0, J_1, J_2, K_0, K_2\} \\
&= \int_{-h/2}^{h/2} \{1, z, z^2, g(z), f(z), zf(z), g^2(z), f^2(z)\} \rho(z) dz \quad (IV.19a)
\end{aligned}$$

IV.7. Les équations de gouvernantes de la plaque

Les équations gouvernantes de la plaque à gradient fonctionnel (FG) comportant des porosités et reposant sur des fondations élastiques, exprimées en termes de déplacements, sont obtenues en substituant les expressions de l'énergie de déformation, de l'énergie due aux fondations et de l'énergie cinétique (issues respectivement des équations IV.13, IV.17 et IV.21) dans l'équation (IV.11). En appliquant une intégration par parties, on extrait alors les coefficients associés aux variations virtuelles $\delta u_0, \delta v_0, \delta w_b, \delta w_s$ comme suit :

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} - J_1 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x} \quad (IV.20)$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y} - J_1 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial y} \quad (IV.21)$$

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} \right) - q_{Winkler} - q_{Pasternak} - q_{kerr} \\
&= I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - J_2 \nabla^2 \ddot{w}_s \quad (IV.22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} \right) - q_{Winkler} - q_{Pasternak} - q_{kerr} \\
& = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + J_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - J_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - K_2 \nabla^2 \ddot{w}_s
\end{aligned} \tag{IV.23}$$

En substituant les Eqs (IV.14, IV.16, IV.17, IV.18) dans les Eqs (IV.20-IV.23) les équations du mouvement de la théorie présentée peuvent être réécrites en termes de déplacement $\delta u_0, \delta v_0, \delta w_b, \delta w_s$ comme suit :

$$\left[\begin{aligned}
& A_{22} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - B_{11} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} \\
& -(B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial y^2} - B_{11}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial y^2} \\
& = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} - J_1 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x}
\end{aligned} \right. \tag{IV.24}$$

$$\left[\begin{aligned}
& A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} - B_{22} \frac{\partial^3 w_b}{\partial y^3} \\
& -(B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^2 \partial y} - B_{11}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial y^3} - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^2 \partial y} \\
& = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y} - J_1 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial y}
\end{aligned} \right. \tag{IV.25}$$

$$\left[\begin{aligned}
& B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} \right) + B_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} \\
& - D_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - D_{22} \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} \\
& - D_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - D_{22}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} \\
& - \left(K_w (w_b + w_s) - G_p \nabla^2 (w_b + w_s) \right) \\
& - \left(\left(\frac{K_l K_u}{K_l + K_u} \right) (w_b + w_s) - \left(\frac{K_s K_u}{K_l + K_u} \right) (w_b + w_s) \right) \\
& = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - J_2 \nabla^2 \ddot{w}_s
\end{aligned} \right. \tag{IV.26}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{aligned}
& B_{11}^s \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} \right) + B_{22}^s \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} \\
& -D_{11}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - D_{22}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} \\
& -D_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - D_{22}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} \\
& -H_{11} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - H_{22} \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} - 2(H_{12} + 2H_{66}) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} \\
& A_{55}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + A_{44}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} - \left(K_w(w_b + w_s) - G_p \nabla^2(w_b + w_s) \right) \\
& - \left(\left(\frac{K_l K_u}{K_l + K_u} \right) (w_b + w_s) - \left(\frac{K_s K_u}{K_l + K_u} \right) (w_b + w_s) \right) \\
& = I_0(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + J_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - J_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - K_2 \nabla^2 \ddot{w}_s
\end{aligned} \right. \quad (IV.27)
\end{aligned}$$

IV.8. Solution analytique pour les plaques FG simplement appuyées

La méthode de Galerkin est employée dans ce contexte pour satisfaire les conditions aux limites d'appuis simples. Pour ce faire, les coefficients de déplacement sont exprimés sous forme suivants :

$$\begin{aligned}
u_0 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} \frac{\partial X_m(x)}{\partial x} Y_n(y) e^{-i\omega_n t} \\
v_0 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} X_m(x) \frac{\partial Y_n(y)}{\partial y} e^{-i\omega_n t} \\
w_b &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{bmn} X_m(x) Y_n(y) e^{-i\omega_n t} \\
w_s &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{smn} X_m(x) Y_n(y) e^{-i\omega_n t}
\end{aligned} \quad (IV.28)$$

La fréquence circulaire ω_{mn} (en rad/s) est caractérisée par les indices de mode m et n .

Les coefficients $U_{mn}, V_{mn}, W_{bmn}, W_{smn}$ sont les inconnues du problème à déterminer. Les fonctions X_m et Y_n sont choisies pour respecter les conditions aux limites.

Le modèle présenté combine des conditions aux limites classiques et non classiques

$$w_b = w_s = \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \quad (\text{IV.29})$$

En substituant l'équation (IV.28) dans les équations (IV.24-IV.27) le système peut formuler matricielle-ment :

$$\left[\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} - \omega_{mn}^2 \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{bmn} \\ W_{smn} \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{IV.30})$$

Où K représente la matrice de rigidité et M la matrice de masse.

Notez que les racines positives réelles de l'équation (IV.30) représentent la fréquence naturelle circulaire avec différents numéros de mode, la plus basse valeur propre donne la fréquence naturelle fondamentale de vibration de la plaque FG.

Les fonctions pour les conditions aux limites sont définie par :

$$X_m(x) = \sin(\lambda_m x), Y_n(y) = \sin(\lambda_n y) \quad (\text{IV.31})$$

$$\lambda_m = \frac{m\pi}{a}, \lambda_n = \frac{n\pi}{b}$$

Avec :

$$K_{11} = +A_{11} \left(\int_0^b \int_0^a \left(\frac{\partial^3 X_m}{\partial x^3} Y_n \frac{\partial X_m}{\partial x} Y_n \right) dx dy \right) \quad (\text{IV.32})$$

$$+A_{66} \left(\int_0^b \int_0^a \left(\frac{\partial X_m}{\partial x} \frac{\partial^2 Y_n}{\partial y^2} \frac{\partial X_m}{\partial x} Y_n \right) dx dy \right)$$

$$K_{12} = +(A_{12} + A_{66}) \left(\int_0^b \int_0^a \left(\frac{\partial X_m}{\partial x} \frac{\partial^2 Y_n}{\partial y^2} X_m \frac{\partial Y_n}{\partial y} \right) dx dy \right)$$

$$K_{13} = -B_{11} \left(\int_0^b \int_0^a \left(\frac{\partial^3 X_m}{\partial x^3} Y_n X_m Y_n \right) dx dy \right)$$

$$-(B_{12} + 2B_{66}) \left(\int_0^b \int_0^a \left(\frac{\partial X_m}{\partial x} \frac{\partial^2 Y_n}{\partial y^2} X_m Y_n \right) dx dy \right)$$

$$K_{14} = -B_{11}^s \left(\int_0^b \int_0^a \left(\frac{\partial^3 X_m}{\partial x^3} Y_n X_m Y_n \right) dx dy \right)$$

$$-(B_{12}^s + 2B_{66}^s) \left(\int_0^b \int_0^a \left(\frac{\partial X_m}{\partial x} \frac{\partial^2 Y_n}{\partial y^2} X_m Y_n \right) dx dy \right)$$

$$K_{21} = (A_{12} + A_{66}) \left(\int_0^b \int_0^a \left(\frac{\partial^2 X_m}{\partial x} \frac{\partial Y_n}{\partial y} X_m \frac{\partial Y_n}{\partial y} \right) dx dy \right)$$

$$K_{22} = +A_{22} \left(\int_0^b \int_0^a \left(\frac{\partial^3 Y_n}{\partial y^3} X_m \frac{\partial Y_n}{\partial y} X_m \right) dx dy \right)$$

$$+A_{66} \left(\int_0^b \int_0^a \left(\frac{\partial^2 X_m}{\partial x^2} \frac{\partial Y_n}{\partial y} X_m \frac{\partial Y_n}{\partial y} \right) dx dy \right)$$

$$K_{23} = -B_{22} \left(\int_0^b \int_0^a \left(X_m \frac{\partial^3 Y_n}{\partial y^3} X_m Y_n \right) dx dy \right)$$

$$-(B_{12} + 2B_{66}) \left(\int_0^b \int_0^a \left(\frac{\partial^2 X_m}{\partial x} \frac{\partial Y_n}{\partial y} X_m Y_n \right) dx dy \right)$$

$$K_{24} = -B_{11}^s \left(\int_0^b \int_0^a \left(X_m \frac{\partial^3 Y_n}{\partial y^3} X_m Y_n \right) dx dy \right)$$

$$-(B_{12}^s + 2B_{66}^s) \left(\int_0^b \int_0^a \left(\frac{\partial^2 X_m}{\partial x^2} \frac{\partial Y_n}{\partial y} X_m Y_n \right) dx dy \right)$$

$$K_{31} = +B_{11} \left(\int_0^b \int_0^a \left(\frac{\partial^4 X_m}{\partial x^4} Y_n \frac{\partial X_m}{\partial x} Y_n \right) dx dy \right)$$

$$-(B_{12} + 2B_{66}) \left(\int_0^b \int_0^a \left(\frac{\partial^2 X_m}{\partial x^2} \frac{\partial^2 Y_n}{\partial y^2} \frac{\partial X_m}{\partial x} Y_n \right) dx dy \right)$$

$$K_{32} = +(B_{12} + 2B_{66}) \left(\int_0^b \int_0^a \left(\frac{\partial^2 X_m}{\partial x^2} \frac{\partial^2 Y_n}{\partial y^2} X_m \frac{\partial Y_n}{\partial y} \right) dx dy \right)$$

$$+B_{22} \left(\int_0^b \int_0^a \left(X_m \frac{\partial^4 Y_n}{\partial y^4} X_m \frac{\partial Y_n}{\partial y} \right) dx dy \right)$$

$$K_{33} = -D_{11} \left(\int_0^b \int_0^a \left(\frac{\partial^4 X_m}{\partial x^4} Y_n X_m Y_n \right) dx dy \right)$$

$$-D_{22} \left(\int_0^b \int_0^a \left(X_m \frac{\partial^4 X_m}{\partial x^4} X_m Y_n \right) dx dy \right)$$

$$2(D_{12} + 2D_{66}) \left(\int_0^b \int_0^a \left(\frac{\partial^2 X_m}{\partial x^2} \frac{\partial^2 Y_n}{\partial y^2} X_m Y_n \right) dx dy \right) F_{\text{fondation}}$$

$$K_{34} = -D_{11}^s \left(\int_0^b \int_0^a \left(\frac{\partial^4 X_m}{\partial x^4} Y_n X_m Y_n \right) dx dy \right)$$

$$-D_{22}^s \left(\int_0^b \int_0^a \left(X_m \frac{\partial^4 Y_m}{\partial y^4} X_m Y_n \right) dx dy \right)$$

$$2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \left(\int_0^b \int_0^a \left(\frac{\partial^2 X_m}{\partial x^2} \frac{\partial^2 Y_n}{\partial y^2} X_m Y_n \right) dx dy \right) + F_{\text{fondation}}$$

$$K_{41} = +B_{11}^s \left(\int_0^b \int_0^a \left(\frac{\partial^4 X_m}{\partial x^4} Y_n \frac{\partial X_m}{\partial x} Y_n \right) dx dy \right)$$

$$+(B_{12}^s + 2B_{66}^s) \left(\int_0^b \int_0^a \left(\frac{\partial^2 X_m}{\partial x^2} \frac{\partial^2 Y_n}{\partial y^2} \frac{\partial X_m}{\partial x} Y_n \right) dx dy \right)$$

$$K_{42} = +(B_{12}^s + 2B_{66}^s) \left(\int_0^b \int_0^a \left(\frac{\partial^2 X_m}{\partial x^2} \frac{\partial^2 Y_n}{\partial y^2} \frac{\partial X_m}{\partial x} Y_n \right) dx dy \right)$$

$$+B_{22}^s \left(\int_0^b \int_0^a \left(\frac{\partial^4 Y_n}{\partial y^4} X_m \frac{\partial Y_n}{\partial y} \right) dx dy \right)$$

$$K_{43} = -D_{11}^s \left(\int_0^b \int_0^a \left(\frac{\partial^4 X_m}{\partial x^4} Y_n X_m Y_n \right) dx dy \right)$$

$$-D_{22}^s \left(\int_0^b \int_0^a \left(X_m \frac{\partial^4 Y_m}{\partial y^4} X_m Y_n \right) dx dy \right)$$

$$2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \left(\int_0^b \int_0^a \left(\frac{\partial^2 X_m}{\partial x^2} \frac{\partial^2 Y_n}{\partial y^2} X_m Y_n \right) dx dy \right) + F_{\text{fondation}}$$

$$K_{44} = -H_{11} \left(\int_0^b \int_0^a \left(\frac{\partial^4 X_m}{\partial x^4} Y_n X_m Y_n \right) dx dy \right)$$

$$-H_{22} \left(\int_0^b \int_0^a \left(X_m \frac{\partial^4 X_m}{\partial x^4} X_m Y_n \right) dx dy \right)$$

$$2(H_{12} + 2H_{66}) \left(\int_0^b \int_0^a \left(\frac{\partial^2 X_m}{\partial x^2} \frac{\partial^2 Y_n}{\partial y^2} X_m Y_n \right) dx dy \right)$$

$$+A_{55}^s \left(\int_0^b \int_0^a \left(\frac{\partial^2 X_m}{\partial x^2} Y_n X_m Y_n \right) dx dy \right)$$

$$+A_{44}^s \left(\int_0^b \int_0^a \left(X_m \frac{\partial^2 Y_m}{\partial y^2} X_m Y_n \right) dx dy \right) + F_{\text{fondation}}$$

$$F_{\text{fondation}} = \left(-K_w - \left(\frac{K_l K_u}{K_l + K_u} \right) \left(\int_0^b \int_0^a (X_m Y_n X_m Y_n) dx dy \right) + \right. \\ \left. \left(G_P + \left(\frac{K_s K_u}{K_l + K_u} \right) \right) \times \left(\left(\int_0^b \int_0^a \left(\frac{\partial^2 X_m}{\partial x^2} Y_n X_m Y_n \right) dx dy \right) \left(\int_0^b \int_0^a \left(X_m \frac{\partial^2 Y_n}{\partial y^2} Y_n X_m Y_n \right) dx dy \right) \right) \right)$$

Avec :

$$M_{11} = +I_0 \left(\int_0^b \int_0^a \left(\frac{\partial X_m}{\partial x} Y_n \frac{\partial X_m}{\partial x} Y_n \right) dx dy \right) \quad (\text{IV.33})$$

$$M_{13} = -I_1 \left(\int_0^b \int_0^a \left(\frac{\partial X_m}{\partial x} Y_n X_m Y_n \right) dx dy \right)$$

$$M_{14} = -J_1 \left(\int_0^b \int_0^a \left(\frac{\partial X_m}{\partial x} Y_n X_m Y_n \right) dx dy \right)$$

$$M_{22} = +I_0 \left(\int_0^b \int_0^a \left(X_m \frac{\partial Y_n}{\partial y} X_m \frac{\partial Y_n}{\partial y} \right) dx dy \right)$$

$$M_{23} = -I_1 \left(\int_0^b \int_0^a \left(X_m \frac{\partial Y_n}{\partial y} X_m Y_n \right) dx dy \right)$$

$$M_{24} = -J_1 \left(\int_0^b \int_0^a \left(X_m \frac{\partial Y_n}{\partial y} X_m Y_n \right) dx dy \right)$$

$$M_{31} = +I_1 \left(\int_0^b \int_0^a \left(\frac{\partial^2 X_m}{\partial x^2} Y_n \frac{\partial X_m}{\partial x} Y_n \right) dx dy \right)$$

$$M_{32} = +I_1 \left(\int_0^b \int_0^a \left(X_m \frac{\partial^2 Y_n}{\partial y^2} X_m \frac{\partial Y_n}{\partial y} \right) dx dy \right)$$

$$M_{33} = +I_0 \left(\left(\int_0^b \int_0^a (X_m Y_n X_m Y_n) dx dy \right) \right.$$

$$\left. -I_2 \left(\int_0^b \int_0^a \left(\frac{\partial^2 X_m}{\partial x^2} Y_n X_m Y_n \right) dx dy \right) \right.$$

$$\left. + \left(\int_0^b \int_0^a \left(X_m \frac{\partial^2 Y_n}{\partial y^2} X_m Y_n \right) dx dy \right) \right)$$

$$M_{34} = +I_0 \left(\left(\int_0^b \int_0^a (X_m Y_n X_m Y_n) dx dy \right) \right.$$

$$\left. -J_2 \left(\int_0^b \int_0^a \left(\frac{\partial^2 X_m}{\partial x^2} Y_n X_m Y_n \right) dx dy \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\int_0^b \int_0^a \left(X_m \frac{\partial^2 Y_n}{\partial y^2} X_m Y_n \right) dx dy \right) \\
M_{41} &= +J_1 \left(\int_0^b \int_0^a \left(\frac{\partial^2 X_m}{\partial x^2} Y_n \frac{\partial X_m}{\partial x} Y_n \right) dx dy \right) \\
M_{42} &= +J_1 \left(\int_0^b \int_0^a \left(X_m \frac{\partial^2 Y_n}{\partial y^2} X_m \frac{\partial Y_n}{\partial y} \right) dx dy \right) \\
M_{33} &= +I_0 \left(\int_0^b \int_0^a (X_m Y_n X_m Y_n) dx dy \right) \\
& -J_2 \left(\int_0^b \int_0^a \left(\frac{\partial^2 X_m}{\partial x^2} Y_n X_m Y_n \right) dx dy \right) \\
& + \left(\int_0^b \int_0^a \left(X_m \frac{\partial^2 Y_n}{\partial y^2} X_m Y_n \right) dx dy \right) \\
M_{44} &= +I_0 \left(\int_0^b \int_0^a (X_m Y_n X_m Y_n) dx dy \right) \\
& -K_2 \left(\int_0^b \int_0^a \left(\frac{\partial^2 X_m}{\partial x^2} Y_n X_m Y_n \right) dx dy \right) \\
& + \left(\int_0^b \int_0^a \left(X_m \frac{\partial^2 Y_n}{\partial y^2} X_m Y_n \right) dx dy \right) \\
M_{12} &= M_{21} = 0
\end{aligned}$$

IV.9. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons mis en œuvre une théorie raffinée d'ordre supérieur à quatre variables pour examiner le comportement en vibration libre d'une plaque à gradient fonctionnel de matériaux (FGM). Cette analyse prend en compte la présence potentielle de porosité dans le matériau et considère que la plaque est supportée par une fondation élastique combinant les modèles de Winkler-Pasternak et de Kerr, tout en étudiant diverses conditions aux limites.

Les équations gouvernantes régissant cette théorie avancée de déformation de cisaillement ont été développées en appliquant le principe du travail virtuel. Pour résoudre ce système

d'équations, nous avons employé la méthode de Galerkin, permettant ainsi d'obtenir des solutions adaptées aux conditions spécifiques du problème.

Chapitre V

Résultats numériques et discussions

V.1.Introduction

Ce chapitre présente une étude consacrée à l'analyse des vibrations libres d'une plaque en matériau fonctionnellement gradué (FGM) reposant sur une fondation élastique de type Winkler-Pasternak-Kerr. L'analyse est menée à l'aide d'une nouvelle théorie d'ordre élevé raffinée à quatre variables, qui permet d'examiner simultanément l'effet de trois paramètres variables des fondations Winkler-Pasternak-Kerr à la surface des plaques FG soumises à diverses charges. Cette étude prend également en compte l'effet de la porosité sur les vibrations naturelles des plaques FGM.

La méthode de résolution utilisée est celle de Galerkin, qui repose sur des solutions exprimées sous forme de séries de Fourier respectant les conditions aux limites, afin de résoudre les équations d'équilibre. Par ailleurs, l'étude détaille l'impact de plusieurs facteurs, notamment l'indice d'épaisseur, l'indice de la loi de puissance, le rapport géométrique, le rapport d'aspect de la plaque, le type de charge ainsi que les paramètres des fondations Winkler-Pasternak-Kerr, sur le comportement mécanique des structures en FGM.

Enfin, les résultats obtenus sont comparés aux données disponibles dans la littérature afin de valider la méthodologie adoptée.

V.2.Résultats numériques et discussions

Dans cette section, divers exemples numériques et graphiques sont présentés et discutés pour vérifier l'exactitude de la théorie actuelle et également pour présenter l'effet de la porosité sur les vibrations libre des plaques FGM, est considéré reposé sur un fondation élastique, Pour les résultats numériques, En revanche, la plaque FG (Al/Al₂O₃) en aluminium (comme le phase métallique) et l'alumine (comme phase céramique) est considérée.

Pour présenter les différents résultats numériques, les quantités sans dimensions suivantes sont utilisées :

$$\bar{K}_w = \frac{K_w a^4}{D_{11}} \quad \bar{G}_p = \frac{G_p a^2}{D_{11}} \quad \bar{K}_u = \frac{K_u a^4}{D_{11}} \quad \bar{K}_s = \frac{K_s a^2}{D_{11}} \quad \bar{K}_l = \frac{K_l a^4}{D_{11}}$$

V.1

$$D_{11} = \frac{E_c h^3}{12(1-\nu_c^2)} \quad \bar{\omega} = \omega h \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}} \quad \bar{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}$$

Les caractéristiques mécaniques de métal et de la céramique utilisée dans les plaques FGM sont répertoriées dans le tableau V.1 :

Tableau V.1 : propriétés du céramique et métal.

Propriétés	Aluminium (Al)	Alumine (Al ₂ O ₃)
Module de Young (GPa)	70	380
Coefficient de poisson(ν)	0,3	0,3
Masse volumique (Kg/m ³)	2702	3800

Tableau V.2 : Fréquence fondamentale adimensionnelle $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}$ des plaques FG avec simplement appuyée ($b/a=2$, $b/a=1$) avec différents indices de fraction volumique (p).

h/a	Modèle	$b/a=1$			$b/a=2$		
		$p=0$	$p=1$	$p=2$	$p=0$	$p=1$	$p=2$
10	3D exact [58]	0,1135	0,087	0,0789	0,0719	0,055	0,0499
	Quasi-3D [59]	0,1135	0,0882	0,0806	0,0718	0,0557	0,051
	Quasi-3D [60]	0,1136	0,0882	0,0806	0,0719	0,0558	0,051
	Quasi-3D [61]	0,1135	0,0882	0,0806	0,0718	0,0557	0,051
	Présent	0,1133	0,0868	0,0787	0,0717	0,0548	0,0498
5	3D exact [58]	0,4169	0,3222	0,2905	0,2713	0,2088	0,1888
	Quasi-3D [59]	0,4168	0,326	0,2961	0,2712	0,2115	0,1926
	Quasi-3D [60]	0,417	0,3262	0,2961	0,2714	0,2116	0,1926
	Quasi-3D [61]	0,4168	0,326	0,2961	0,2712	0,2115	0,1926
	Présent	0,0415	0,320	0,2893	0,2704	0,2080	0,1882
2	3D exact [58]	1,847	1,4687	1,3095	0,957	0,7937	0,7149
	Quasi-3D [59]	1,8505	1,4774	1,3219	1,304	1,0346	0,9293
	Quasi-3D [60]	1,8528	1,4788	1,3226	0,957	0,7961	0,7193
	Quasi-3D [61]	1,8503	1,4772	1,3218	1,3039	1,0345	0,9293
	Présent	1,8259	1,4447	1,2891	1,2903	1,0133	0,9067

Le tableau V.2 présente les valeurs numériques de la fréquence fondamentale adimensionnelle des plaques à gradient de propriétés (FG) simplement appuyées, en fonction de l'indice de fraction

volumique (p), du rapport d'épaisseur à la longueur (h/a) et du rapport de largeur à la longueur (b/a).

D'après les résultats affichés, on constate que la fréquence fondamentale diminue progressivement avec l'augmentation de l'indice de fraction volumique, ce qui s'explique par la diminution de la proportion de la phase céramique et l'augmentation de la phase métallique, moins rigide, entraînant ainsi une réduction de la rigidité globale de la plaque. Les résultats montrent également que les fréquences sont plus élevées pour les plaques les plus minces ($h/a=0,1$) et diminuent à mesure que le rapport d'épaisseur à la longueur augmente ($h/a=0,2$ puis $0,5$), en raison de l'augmentation de la masse et des effets de cisaillement dans les plaques épaisses.

De plus, il apparaît que l'augmentation du rapport de largeur à la longueur ($b/a=2$ par rapport à $b/a=1$) conduit à une élévation de la fréquence fondamentale, en raison d'une rigidité accrue dans la direction transversale. Ces résultats soulignent l'importance du contrôle de la distribution des matériaux et des dimensions géométriques des plaques pour atteindre les performances dynamiques souhaitées dans diverses applications d'ingénierie.

Tableau V.3 : Fréquences fondamentales adimensionnelles $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}$ des plaques FG reposant sur des fondations Winkler – Pasternak.

k_w	k_p	h/a	Modèle	p				
				0	0,5	1	2	5
0	0	20	Quasi-3D [62]		-	0,0226	0,0207	-
			TSDT [63]	0,029	0,0249	0,0227	0,0209	0,0197
			Présent	0,0290	0,0246	0,0222	0,0201	0,0191
		10	Quasi-3D [62]	0,1136	-	0,0883	0,0807	-
			TSDT [63]	0,1134	0,0975	0,0891	0,0819	0,0767
			Présent	0,1133	0,0962	0,0868	0,0787	0,0740
		6,67	Quasi-3D [62]	0,2461	-	0,1918	0,1748	-
			TSDT[63]	0,2454	0,2121	0,1939	0,1778	0,1648
			Présent	0,2449	0,2087	0,1883	0,1704	0,1588
		5	Quasi-3D [62]	0,4174	-	0,3264	0,2965	-
			TSDT [63]	0,4154	0,3606	0,3299	0,3016	0,2765
			Présent	0,4150	0,3550	0,3204	0,2893	0,2669
100	0	20	Quasi-3D [62]	0,0298	-	0,0238	-	-
			TSDT [63]	0,0298	0,0258	0,0238	0,0221	0,021

100	100	10	Présent	0,0304	0,0264	0,0242	0,0225	0,0217
			Quasi-3D [62]	0,1164	-	0,0924	0,0854	-
			TSDT [63]	0,1162	0,1012	0,0933	0,0867	0,0821
		6,67	Présent	0,1188	0,1034	0,0950	0,0882	0,0846
			Quasi-3D [62]	0,2524	-	0,2011	0,1855	-
			TSDT [63]	0,2519	0,2204	0,2036	0,1889	0,1775
		5	Présent	0,2576	0,2250	0,2071	0,1921	0,1833
			Quasi-3D [62]	0,4286	-	0,3431	0,3158	-
			TSDT [63]	0,4273	0,3758	0,3476	0,3219	0,2999
		20	Présent	0,4384	0,3848	0,3547	0,3288	0,3119
			Quasi-3D [62]	0,0411	-	0,0386	0,0383	-
			TSDT [63]	0,0411	0,0395	0,0388	0,0386	0,0388
			Quasi-3D [61]	0,0411	0,0393	0,0386	0,0383	0,0385
			Présent	0,0415	0,0397	0,0390	0,0387	0,0390
		10	Quasi-3D [62]	0,1614	-	0,1521	0,1509	-
			TSDT[63]	0,1619	0,1563	0,1542	0,1535	0,1543
			Quasi-3D [61]	0,1616	0,1551	0,1525	0,1512	0,1521
			Présent	0,1637	0,1571	0,1543	0,1530	0,1542
		6,67	Quasi-3D [62]	0,3537	-	0,3349	0,3323	-
			TSDT [63]	0,356	0,346	0,3422	0,3412	0,3427
			Présent	0,3598	0,3598	0,3411	0,3383	0,3407
		5	Quasi-3D [62]	0,6089	-	0,5794	0,5752	-
			TSDT [63]	0,6162	0,6026	0,5978	0,597	0,5993
			Présent	0,6236	0,6041	0,5950	0,5904	0,5943

Le tableau V.3 présente les résultats des fréquences fondamentales adimensionnelles pour les plaques FG reposant sur des fondations de type Winkler et Pasternak. Les valeurs montrent clairement que la présence d'une fondation, qu'il s'agisse du modèle de Winkler ou de Pasternak, augmente de manière significative la fréquence fondamentale des plaques par rapport à celles sans fondation, en raison de l'effet de rigidité supplémentaire apporté par la fondation. Plus la rigidité de la fondation est élevée, plus les fréquences augmentent, ce qui met en évidence le rôle de la fondation dans le renforcement de la résistance de la plaque aux vibrations.

En analysant l'influence de l'indice de fraction volumique (p), on remarque que son effet sur la fréquence fondamentale est relativement faible dans le cas de la fondation de Winkler, les fréquences restant proches malgré la variation de p . En revanche, pour la fondation de Pasternak, à la fois l'indice de fraction volumique et le rapport d'épaisseur à la longueur (h/a) ont un impact marqué sur les fréquences : une augmentation de p ou de h/a conduit à une diminution de la

fréquence fondamentale, ce qui correspond au comportement attendu pour des plaques FG supportées par une fondation élastique plus complexe.

Le tableau montre également que les résultats obtenus sont en bon accord avec ceux issus de solutions d'ordre élevé raffinée, et ce pour toutes les gammes de rapports d'épaisseur étudiées (des plaques très minces $h/a=0,05$ aux plaques épaisses $h/a=0,2$). Dans l'ensemble, les résultats du tableau V.3 soulignent l'importance de la fondation dans l'augmentation de la rigidité du système, et mettent en évidence que le type de fondation, les propriétés du matériau à gradient de propriétés et les dimensions géométriques sont tous des facteurs déterminants pour le comportement dynamique des plaques FG dans les applications pratiques.

Tableau V.4: Fréquences fondamentales adimensionnelles $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}$ des plaques carrées FG reposant sur Kerr fondation ($k_t = 100$)

k_u	k_s	h/a	Modèle	Plaque FGM			
				$p = 0.5$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 5$
100	0	20	Quasi-3D[61]	0,0253	0,0231	0,0212	0,0202
			Présent	0,0255	0,0232	0,0213	0,0204
		10	Quasi-3D [61]	0,0988	0,0903	0,083	0,0783
			Présent	0,0999	0,0910	0,083	0,0795
		6,67	Quasi-3D [61]	0,2149	0,1964	0,1801	0,1685
			Présent	0,2170	0,1979	0,1816	0,1715
		5	Quasi-3D [61]	0,3661	0,3347	0,3061	0,2838
			Présent	0,3702	0,3380	0,3097	0,2903
100	100	20	Quasi-3D [61]	0,0329	0,0316	0,0308	0,0305
			Présent	0,3309	0,0317	0,0308	0,0307
		10	Quasi-3D [61]	0,1294	0,1245	0,1212	0,1201
			Présent	0,1303	0,1252	0,1217	0,1210
		6,67	Quasi-3D [61]	0,2842	0,274	0,2666	0,2637
			Présent	0,2863	0,275	0,2679	0,2659
		5	Quasi-3D [61]	0,4906	0,4739	0,4615	0,456
			Présent	0,4955	0,4780	0,4651	0,461
200	100	20	Quasi-3D [61]	0,0351	0,0341	0,0335	0,0334
			Présent	0,0354	0,0343	0,0336	0,0337
		10	Quasi-3D[61]	0,1385	0,1345	0,132	0,1316
			Présent	0,1398	0,1356	0,132	0,1330
		6,67	Quasi-3D [61]	0,3047	0,2964	0,2909	0,2897

200	200	5	Présent	0,3078	0,2990	0,2933	0,2930
			Quasi-3D [61]	0,5273	0,5139	0,5047	0,5024
		20	Présent	0,5342	0,5199	0,5103	0,5095
			Quasi-3D[61]	0,0427	0,0423	0,0422	0,0426
		10	Présent	0,0429	0,4246	0,0423	0,0428
			Quasi-3D [61]	0,1687	0,167	0,1668	0,1684
		6,67	Présent	0,1699	0,168	0,1676	0,1696
			Quasi-3D [61]	0,3728	0,3694	0,3689	0,3725
		5	Présent	0,3758	0,3719	0,3711	0,3752
			Quasi-3D [61]	0,6484	0,6436	0,6431	0,6494
			Présent	0,6557	0,6497	0,6482	0,6552

Le tableau V.4 examine les variations de la fréquence fondamentale adimensionnelle des plaques carrées à gradient de propriétés (FG) reposant sur une fondation de type Kerr, en fonction de l'indice de fraction volumique (p) et du rapport d'épaisseur à la longueur (h/a).

Les résultats montrent que l'augmentation de l'indice de fraction volumique entraîne une diminution de la fréquence fondamentale, comme observé pour les autres types de fondations, en raison de la réduction de la rigidité de la plaque liée à une proportion plus élevée de la phase métallique. Toutefois, l'effet de la fondation Kerr se distingue particulièrement, puisque la présence de la couche de cisaillement et du ressort supérieur confère à la plaque une rigidité supplémentaire par rapport aux fondations de Winkler et de Pasternak.

Les valeurs indiquent que les paramètres associés à la couche de cisaillement et au ressort supérieur de la fondation Kerr augmentent significativement la fréquence, avec un effet de la couche de cisaillement plus marqué que celui des ressorts supérieur et inférieur. Cela signifie que le contrôle des propriétés de la couche de cisaillement constitue un levier efficace pour ajuster la réponse dynamique des plaques FG dans des applications d'ingénierie avancées.

De plus, les fréquences adimensionnelles des plaques FG sur fondation Kerr sont généralement plus élevées que celles calculées pour les plaques reposant sur les fondations de Winkler ou de Pasternak, grâce à la rigidité additionnelle apportée par le ressort supérieur.

En somme, les résultats du tableau V.4 montrent que la fondation Kerr confère au système une rigidité dynamique élevée et soulignent l'importance d'étudier l'effet de la couche de cisaillement

et des ressorts dans la conception et l'analyse des plaques FG, notamment dans les applications nécessitant une résistance accrue aux vibrations.

V.3. Les courbes relatives aux tableaux 3 et 4 et leur interprétation

La figure V.1 illustre la variation des paramètres h/a ainsi que des paramètres de la fondation de type Winkler-Pasternak. Il est observé que l'augmentation de h/a et des paramètres de la fondation entraîne une augmentation de la fréquence fondamentale. Par ailleurs, la figure V.2 présente la fréquence principale en fonction de la variation de l'indice de fraction volumique et du rapport h/a , montrant que l'augmentation de ces deux paramètres provoque une élévation significative de la fréquence principale.

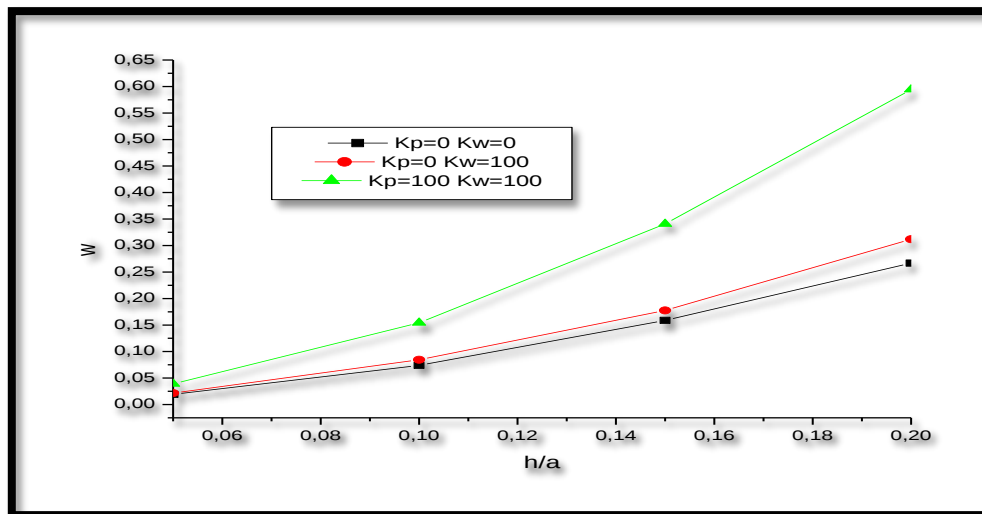


Figure V.1 : Effet du paramètre h/a avec l'influence des paramètres winkler-pasternak sur la fréquence fondamentale non dimensionnelle de plaques FGM.

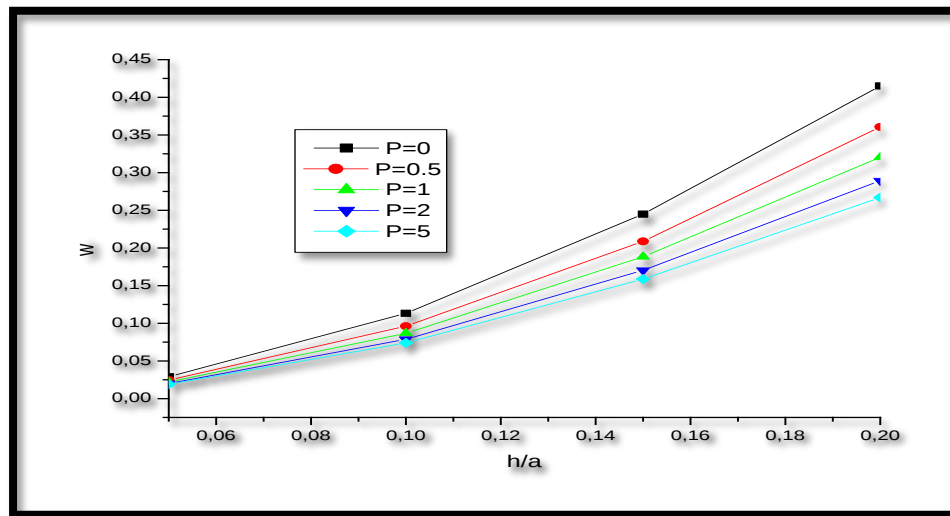


Figure V.2 : Effet du paramètre h/a avec différents indices de fraction volumique (p) sur la fréquence fondamentale non dimensionnelle de plaques FG reposant sur la fondation élastique.

La figure V.3 montre la fréquence fondamentale en fonction de la fraction volumique (p), des différentes épaisseurs (h/a) et des variations des paramètres de la fondation élastique. On observe que l'augmentation de la fraction volumique (p), de fondamentale.l'épaisseur, ainsi que des coefficients de la fondation élastique, entraîne une diminution de la fréquence.

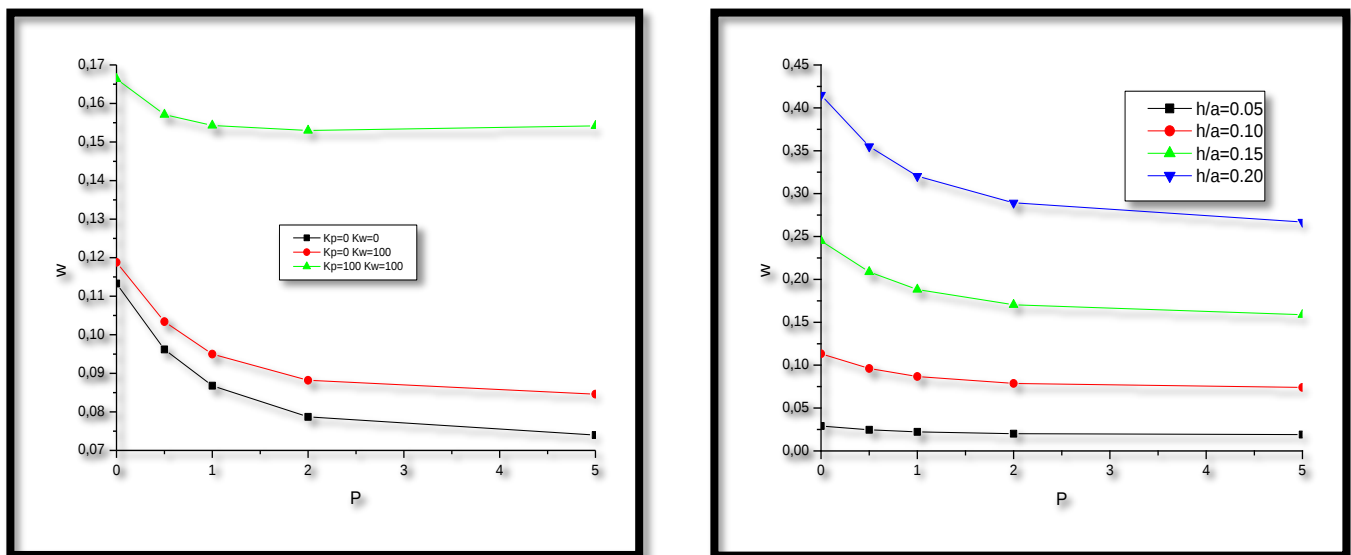


Figure V.3 : Effet des paramètres ($k_w, k_p, h/a, p$) sur la fréquence fondamentale adimensionnelle des plaques FG reposant sur la fondation élastique.

De plus, il est observable sur la figure V.4 que l'augmentation de $(k_u, k_s, h/a)$ à une influence négligeable sur l'effet de l'indice de loi de puissance sur la fréquence propre, et figure V.5 tandis qu'une augmentation de (k_u, k_s, p) a une influence négligeable sur l'effet de h/a sur la fréquence propre avec $k_l = 100$.

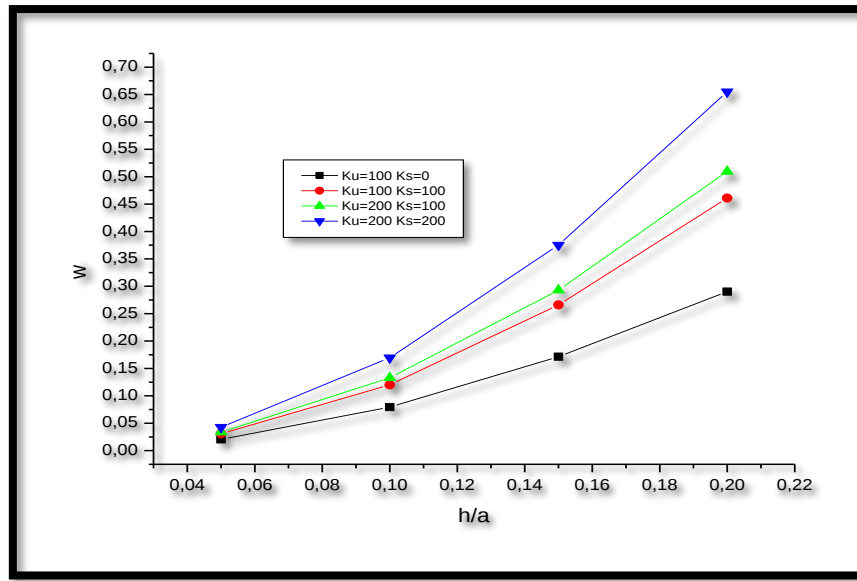


Figure V. 4 : Effect de parameter h/a avec variation de (k_u, k_s) sur la fréquence fondamentale de plaque FG avec $(k_l = 100)$.

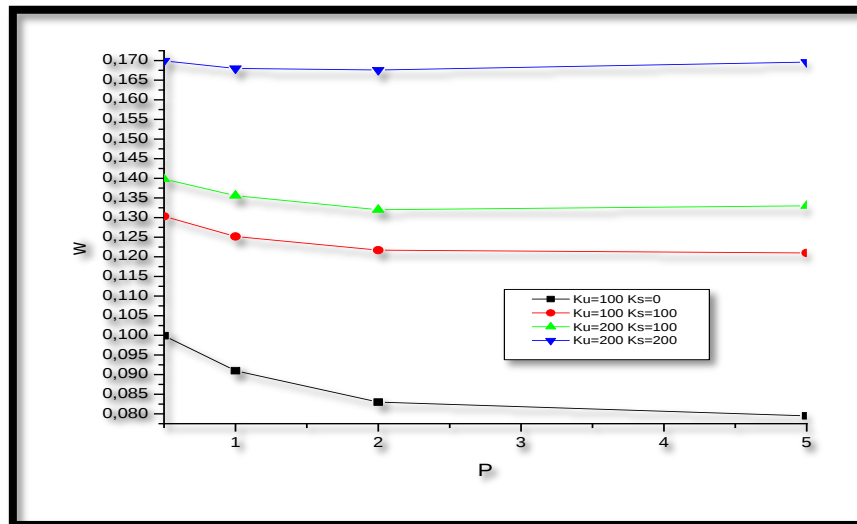


Figure V. 5 : le influence de indices de fraction volumique (p) avec variation de (k_u, k_s) sur la fréquence fondamentale de plaque FG avec $(k_l = 100)$.

La figure V.6 montre l'influence conjointe des paramètres d'épaisseur (h/a) et de fraction volumique (p) sur la fréquence naturelle. Il est constaté que l'augmentation simultanée de l'épaisseur et de la fraction volumique entraîne une diminution de la fréquence fondamentale.

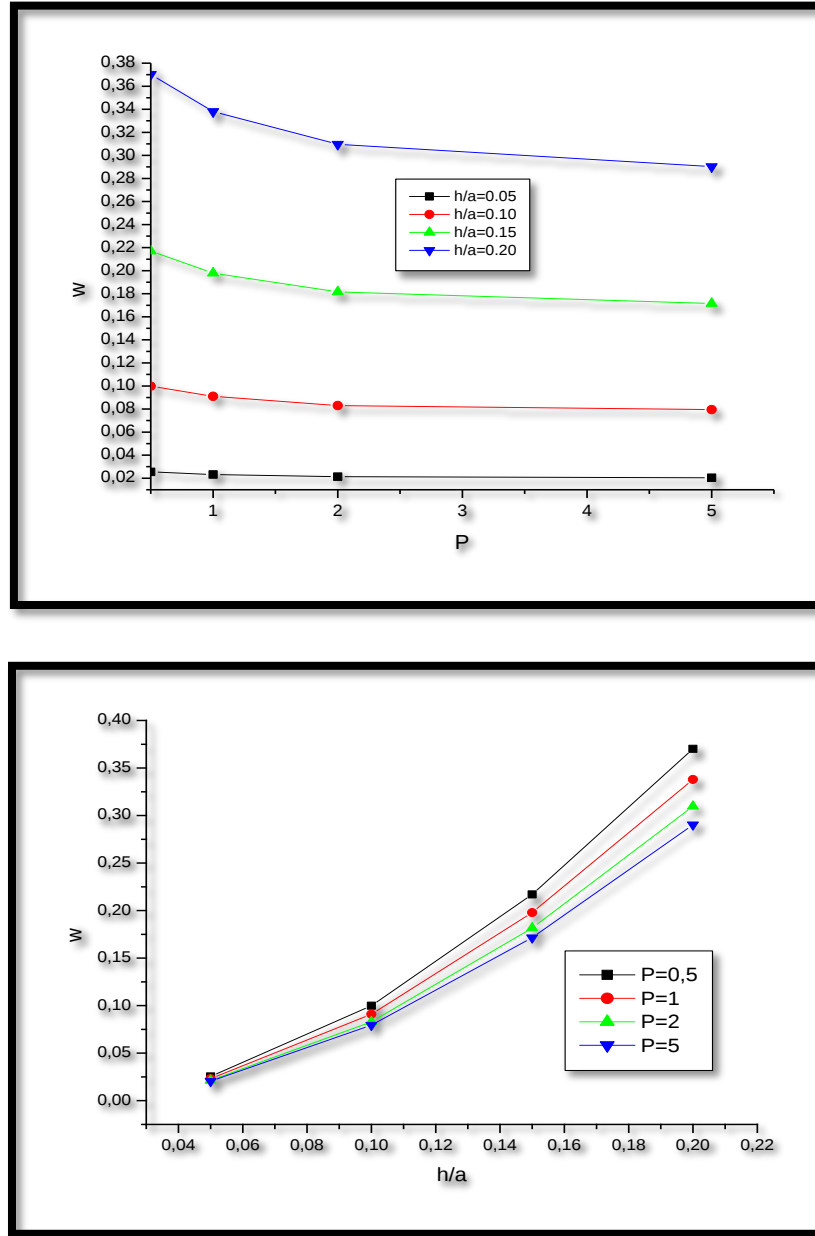


Figure V. 6 : Effet des paramètres (h/a , p) sur les plaques $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}$ FG à fréquence fondamentale adimensionnelle reposant sur la fondation Kerr ($k_l = 100$).

V.4. Analyse de l'effet de la porosité sur la vibration naturelle des plaques FGM sur une fondation élastique

Dans cette section, une plaque constituée d'un matériau à gradient fonctionnel (FGM) reposant sur une fondation élastique a été présentée, comme illustré dans la figure V.7 (a) et (b). La plaque possède une épaisseur h ainsi que des dimensions a et b . Elle repose sur des fondations élastiques au niveau de sa surface inférieure. Le modèle de Pasternak a été utilisé pour décrire l'interaction entre la fondation élastique et la plaque, où K_w et K_s représentent respectivement les coefficients d'élasticité de Winkler et de la couche de cisaillement des fondations, en plus de la fondation Kerr. Deux distributions différentes du gradient de porosité dans le matériau fonctionnel ont été considérées : distribution parfait, distribution imparfait il a trois cas, (uniforme, non uniforme, logarithmique inégale).

Ce cadre analytique permet d'étudier l'influence des propriétés matérielles variables et de la distribution de la porosité sur le comportement mécanique et vibratoire de la plaque, tout en offrant la possibilité d'évaluer les effets des fondations élastiques sur la propagation des ondes et des vibrations dans les structures à gradient fonctionnel, fournissant ainsi un outil précis et efficace pour l'analyse et la conception de ces systèmes avancés.

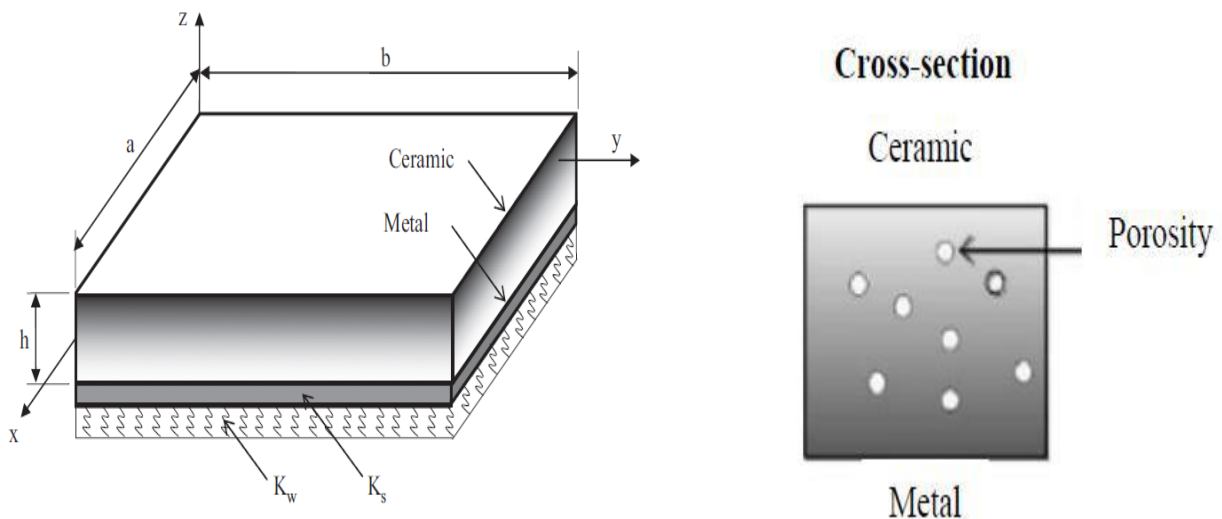


Figure.7 : Système des coordonnées et la géométrie des plaques FG appuyées sur une fondation élastique.

Tableau V.5 : Variations des paramètres de fréquence des plaques parfaites et imparfaites en fonction de la raideur de la fondation de Winkler–Pasternak ($a/b=1$ et $p=1$).

$(\bar{k}_w, \bar{G}_p)$	h/a	Parfait $\xi = 0$	Imparfait I (uniforme)		Imparfait II (Non uniforme)		Imparfait III (logarithmique irrégulière)	
			$\xi = 0.2$	$\xi = 0.5$	$\xi = 0.2$	$\xi = 0.5$	$\xi = 0.2$	$\xi = 0.5$
(0, 0)	20	8.885	8.407	5.885	8,978	9,100	8.974	9,082
	10	8.682	8.227	5.796	8,762	8,859	8,758	8.845
	6.67	8.379	7.956	5.658	8,441	8,505	8.438	8,498
	5	8.012	7.627	5.484	8,055	8,086	8.054	8,085
(100, 0)	20	9.701	9.467	8.057	9,871	10,149	9,863	10,098
	10	9.506	9.294	7.963	9,664	9,919	9,656	9,873
	6.67	9.216	9.038	7.819	9.359	9,585	9,352	9,544
	5	8.869	8.728	7.638	8,996	9,193	8,990	9,158
(100, 100)	20	15.610	16.630	19.072	16,236	17,386	16,204	17,157
	10	15.433	16.462	18.909	16,046	17,171	16,015	16,947
	6.67	15.176	16.216	18.649	15,772	16,866	15,742	16.649
	5	14.875	15.922	18.286	15,455	16,514	15,425	16,304

En se basant sur le tableau joint qui illustre la variation des paramètres de fréquence des plaques parfaites et imparfaites en fonction de la raideur de la fondation de Winkler–Pasternak (avec $a/b = 1$ et $p = 1$), on peut constater qu’une augmentation de la raideur de la fondation entraîne une élévation notable des valeurs de la fréquence naturelle pour les deux types de plaques.

De plus, les plaques parfaites présentent des valeurs de fréquence supérieures à celles des plaques imparfaites dans les mêmes conditions de fondation, ce qui reflète l’influence des défauts structuraux sur le comportement dynamique des plaques. Cependant, il est à noter qu’avec l’augmentation de la raideur de la fondation, l’écart entre les paramètres de fréquence des plaques

parfaites et imparfaites diminue, ce qui indique que l'effet des défauts devient moins significatif avec des fondations plus rigides.

Dans le cas d'une distribution uniforme, les propriétés ou les charges sont réparties de manière égale sur la plaque, ce qui conduit à une réponse dynamique régulière et à des fréquences naturelles élevées, comme c'est le cas pour les plaques parfaites. Pour la distribution non uniforme, la présence de variations dans la répartition des propriétés ou des charges crée des zones de faiblesse ou de résistance différentes, ce qui se traduit par une diminution des fréquences naturelles pour les plaques imparfaites par rapport aux plaques parfaites. Quant au cas logarithmique, la variation des propriétés ou des charges suit une courbe logarithmique, c'est-à-dire que l'effet est important au début puis diminue progressivement ; ce type de distribution est souvent utilisé pour analyser les systèmes présentant des variations non linéaires.

Ces résultats soulignent l'importance de prendre en compte à la fois la qualité de la plaque et les caractéristiques de la fondation lors de l'étude des vibrations dans les applications d'ingénierie.

V.5.Les courbe relatives du tableau V.5.et leur interprétation

En se basant sur la figure V.8, on constate que l'augmentation du rapport h/a entraîné une élévation de la fréquence fondamentale des plaques, qu'elles soient parfaites ou imparfaites, en raison de l'augmentation de la rigidité.

De plus, les plaques parfaites présentent des fréquences plus élevées que les plaques imparfaites. L'effet de la distribution de la porosité est également notable : la distribution uniforme donne la fréquence la plus élevée, tandis que la distribution logarithmique inégale conduit à la fréquence la plus basse. Enfin, l'augmentation des paramètres de la fondation contribue aussi à l'élévation de la fréquence fondamentale des plaques.

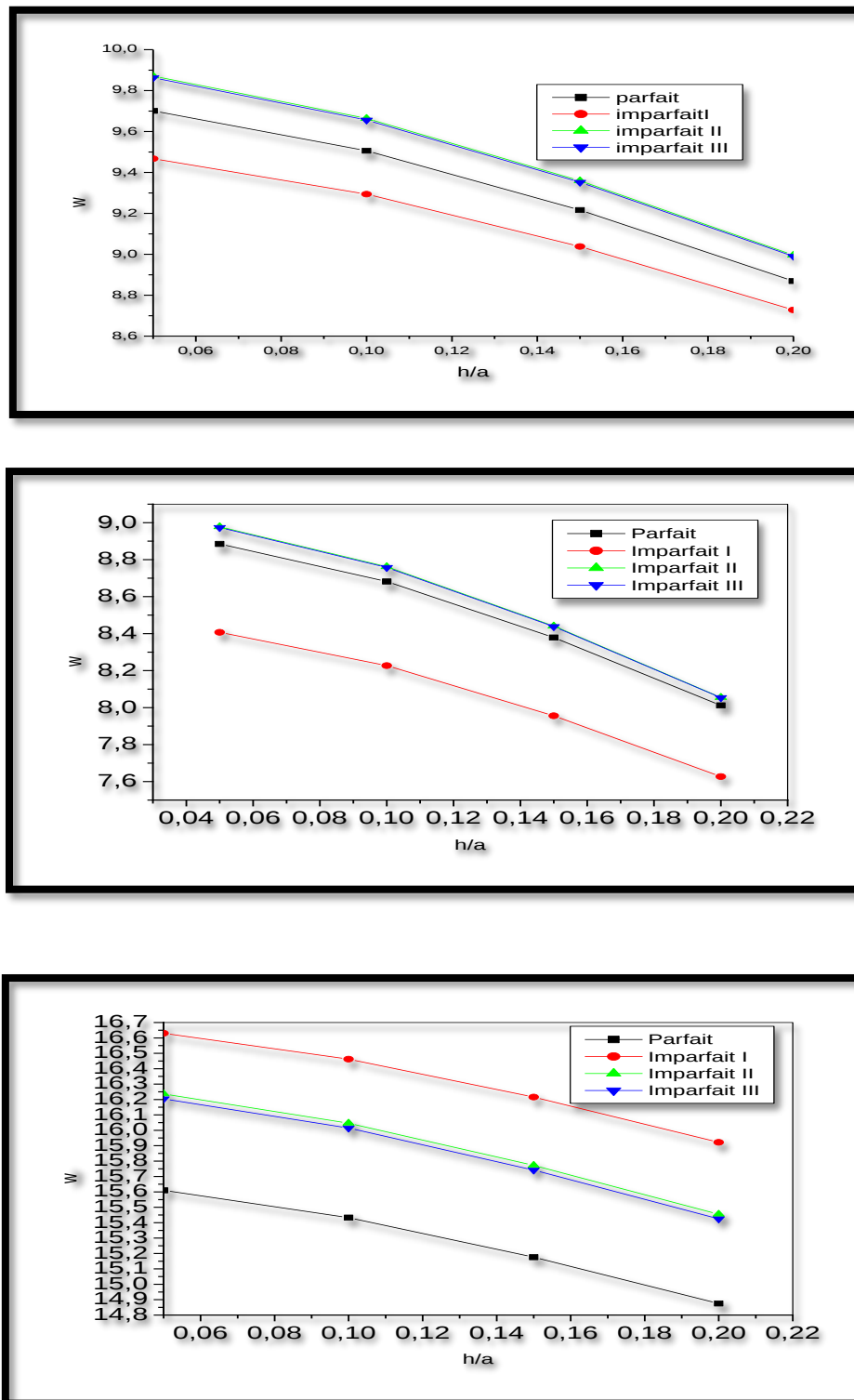


Figure V.8 : Influence du rapport h/a avec variation de (k_w, k_p) , sur la fréquence fondamentale des plaques parfaites et imparfaites sur une fondation élastique avec trois distributions de porosité (Uniforme, non Uniforme, logarithmique inégale)

V.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats de l'analyse des vibrations naturelles des plaques en matériaux fonctionnellement gradués (FGM) en tenant compte de l'effet de la porosité. Pour cela, nous avons utilisé une théorie raffinée de déformation en cisaillement d'ordre élevé à quatre variables, ainsi que la méthode de Galerkin pour résoudre analytiquement le problème des plaques simplement appuyées.

L'étude porte sur plusieurs paramètres influençant le comportement des plaques FGM : le coefficient de porosité, les différents modèles ou formes de distribution de la porosité, le paramètre de distribution des propriétés dans la FGM, ainsi que le rapport entre la longueur du côté et l'épaisseur de la plaque.

Les résultats numériques montrent que le rapport entre les dimensions des côtés et l'épaisseur a une influence significative sur les effets de la porosité. En effet, la porosité agit comme un facteur d'imperfection qui réduit la rigidité des matériaux FGM, rendant leur comportement mécanique plus vulnérable aux déformations et aux défaillances. De plus, la forme de distribution de la porosité joue un rôle important dans ces effets.

Conclusion générale

Conclusion générale

Les matériaux à gradient de propriétés constituent un domaine en pleine expansion dans les sciences et l'ingénierie, offrant de nombreuses applications concrètes. Les besoins en recherche dans ce secteur sont vastes et diversifiés, car les matériaux à gradient de propriétés (FGM) présentent des avantages prometteurs qui justifient des investissements de recherche significatifs.

Lors du processus de fabrication des matériaux à gradient fonctionnel (FGM), des micro-vides et des porosités peuvent apparaître en raison de difficultés techniques inhérentes à la production. Ces défauts structurels doivent être pris en considération dans la conception des structures FGM destinées à supporter des charges, qu'elles soient statiques ou dynamiques.

Ce travail a contribué à l'analyse du comportement mécanique (vibration libres) des plaques à gradient fonctionnel (FGM) reposant sur différentes fondations élastiques types Winkler-Pasternak et de type Kerr tout en intégrant l'influence de la porosité. Sous des conditions aux limites simplement appuyées, une théorie de cisaillement raffinée à quatre variables a été utilisée et développée en détail pour l'analyse la vibration libres des plaques FGM.

Les différentes études comparatives menées dans cette recherche ont confirmé que les résultats obtenus pour l'analyse du comportement des plaques poreuses sont très proches de ceux issus d'autres théories raffinées de déformation de cisaillement. Cette investigation présente également, sous forme numérique et graphique, l'influence de plusieurs paramètres des plaques dans diverses combinaisons de matériaux à gradient fonctionnel (FGM).

Les résultats caractéristiques obtenus ont permis de tirer les conclusions suivantes concernant le comportement des plaques FGM poreuses :

- La fréquence fondamentale $\bar{\omega}$ diminue progressivement avec l'augmentation de l'indice de fraction volumique p . Ce comportement est attribué à la diminution de la phase en céramique (matériau plus rigide) au profit de la phase métallique (moins rigide), ce qui réduit la rigidité globale de la plaque.
- Les plaques plus minces $h/a=0,1$ présentent des fréquences fondamentales plus élevées. En revanche, lorsque l'épaisseur augmente $h/a=0,2$ puis $0,5$, la fréquence diminue. Cela est dû à l'augmentation de la masse et aux effets de cisaillement plus prononcés dans les plaques épaisses.

- L'augmentation du rapport de largeur à la longueur b/a (de 1 à 2) entraîne également une élévation de la fréquence fondamentale, en raison d'une rigidité accrue dans la direction transverse.
- la présence d'une fondation augmente significativement la fréquence fondamentale, en raison de la rigidité additionnelle apportée. Cet effet est d'autant plus marqué que la rigidité de la fondation est élevée.
- L'indice de fraction volumique p influence peu les fréquences dans le cas d'une fondation de Winkler, mais son impact devient notable pour la fondation de Pasternak.
- La couche de cisaillement a un effet plus marqué que les ressorts sur l'élévation des fréquences.
- La fondation Kerr permet d'obtenir des fréquences généralement plus élevées, traduisant une meilleure résistance dynamique du système.
- L'augmentation de la raideur de la fondation Winkler–Pasternak élève les fréquences naturelles des plaques parfaites et imparfaites.
- Les plaques parfaites conservent des fréquences plus élevées, mais l'écart avec les plaques imparfaites diminue à mesure que la fondation devient plus rigide.
- Les distributions uniformes favorisent des fréquences plus élevées, tandis que les distributions non uniformes ou logarithmiques réduisent la rigidité et donc les fréquences.

En conclusion, la théorie proposée s'est révélée précise pour l'analyse de la vibration libre des plaques fonctionnellement graduées (FGM) en tenant compte de la porosité. Dans le prolongement de ce travail, il est envisagé d'étendre l'application de cette théorie à l'étude de l'effet de la porosité sur le flambement et la flexion des plaques FGM, sous diverses conditions d'appui.

Bibliographie

Bibliographie

- [1] **Koizumi (1997).** M. Koizumi, FGM activities in Japan. *Composites*; 28 (1-2):1– 4. (1997).
- [2] **Yin H.M., (2004).** Micromechanics-based elastic model for functionally graded materials, *Acta Materialia*», Volume 52, Pages 3535-3543.
- [3] **Mahamood et Akinlabi, (2017).** Functionally graded materials, *Springer Science Publisher*, Cham, and Suisse. DOI : 10.1007/978-3-319-53756-6.
- [4] **Kawai C., Wakamatsu S., Sakagami S., Igarashi T., (1990).** “Oxidation Resistant Coating with TiC-SiC Gradient Composition on Carbon Fiber Reinforced composite by CVD”, *Proceedings of the First International Symposium on Functionally Gradient Materials*, Sendai, Japan, 77– 82.
- [5] **Uemura S., Sohda Y., Kude Y., (1990).** SiC/C Functionally Gradient Material Prepared by Chemical Vapor Deposition, *Proceedings of the First International Symposium on Functionally Gradient Materials*, Sendai, Japan, 237–242.
- [6] **Bao G., Wang L. (1995).** Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings, *International Journal of Solids and Structures*, Volume 32, Pages 2853–2871.
- [7] **Chi S.H. et Chung Y.L. (2006).** Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load, Part I: Analysis, *International Journal of Solids and Structures*, Volume 43, Pages 6186-6205.
- [8] **Rayleigh, (1877).** On Progressive Waves. *Proc. Lond. Math. Soc.* s1-9, 21–26. <https://doi.org/10.1112/plms/s1-9.1.21>
- [9] **Timoshenko, P.S.P., (1921).** LXVI. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *Lond. Edinb. Dublin Philos. Mag. J. Sci.* 41, 744–746. <https://doi.org/10.1080/14786442108636264>
- [10] **Reissner, E., (1945).** The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates. *J. Appl. Mech.* 12, A69–A77. <https://doi.org/10.1115/1.4009435>
- [11] **Kirchhoff, G. R. (1850).** *Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Platte* (Sur l'équilibre et le mouvement d'une plaque élastique). Thèse, Université de Berlin.

- [12] **Timoshenko, S., & Woinowsky-Krieger, S. (1959).** Theory of Plates and Shells. McGraw-Hill Book Company, Inc.
- [13] **Reddy, J. N. (1997).** Relationships between bending solutions of classical and shear deformation beam theories. *Int. J. Solids Struct.* 34, 3373–3384. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(96\)00211-9](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(96)00211-9)
- [14] **Reddy, (2004).** Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis, Second Edition [WWW Document]. Routledge CRC Press. URL <https://www.routledge.com/Mechanics-of-Laminated-Composite-Plates-and-Shells/Theory-and-Analysis/Reddy/p/book/9780849315923> (accessed 5.11.21).
- [15] **Mindlin, R.D., (1951).** Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates. *J. Appl. Mech.* 18, 31–38. <https://doi.org/10.1115/1.4010217>
- [16] **Wang, C. M., Reddy, J. N., & Lee, K. H. (Eds.) (2000).** Shear Deformable Beams and Plates: Relationships with Classical Solutions. Elsevier.
- [17] **Abdelbari, S., Fekrar, A., Heireche, H., Said, H., Tounsi, A., & Adda Bedia, E. A. (2016).** An efficient and simple shear deformation theory for free vibration of functionally graded rectangular plates on Winkler-Pasternak elastic foundations. *Wind & structures*, 22(3), 329-348.
- [18] **Mantari, J. L., Oktem, A. S., & Soares, C. G. (2012).** A new higher order shear deformation theory for sandwich and composite laminated plates. *Composites Part B: Engineering*, 43(3), 1489-1499.
- [19] **Nguyen-Thoi, T., Luong-Van, H., & Lieu Xuan, Q. (2014).** Geometrically nonlinear analysis of functionally graded plates using a cell-based smoothed three-node plate element (CS-MIN3) based on the C0-HSDT. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 270, 15-36.
- [20] **Reddy, J. (2000).** Analysis of functionally graded plates. *International Journal for numerical methods in engineering*, 47(1-3), 663-684.
- [21] **Taibi, F. Z., Benyoucef, S., Tounsi, A., Bachir Bouiadjra, R., Adda Bedia, E. A., & Mahmoud, S. R. (2015).** A simple shear deformation theory for thermo mechanical behaviour of functionally graded sandwich plates on elastic foundations. *Journal of Sandwich Structures & Materials*, 17(2), 99-129.
- [22] **Tebboune, W., Benrahou, K. H., Houari, M. S. A., & Tounsi, A. (2015).** Thermal buckling analysis of FG plates resting on elastic foundation based on an efficient and simple trigonometric shear deformation theory. *Steel Compos. Struct*, 18(2), 443-465.

- [23] **Thai, C. H., & Nguyen-Xuan, H. (2013).** An isogeometric finite element formulation for thermal buckling analysis of functionally graded plates. *Finite Elements in Analysis and Design*, 73, 65-76.
- [24] **Touratier, M., (1991).** An efficient standard plate theory. *Int. J. Eng. Sci.* 29, 901–916. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(91\)90165-Y](https://doi.org/10.1016/0020-7225(91)90165-Y) V. Z. Vlasov, 1949. *Structural Mechanics of Thin Walled Three-Dimensional Systems* [in Russian].
- [25] **Mantari, J.L., Guedes Soares, C., (2012).** Generalized hybrid quasi-3D shear deformation theory for the static analysis of advanced composite plates. *Compos. Struct.* 94, 2561–2575. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.02.019>
- [26] **Afaq, A., et al. (2006).** "A new simple third-order shear deformation theory of plates." Cet article propose une nouvelle théorie simple de déformation par cisaillement d'ordre trois pour l'analyse des plaques flexibles au cisaillement, améliorant la précision sans nécessiter de facteur de correction du cisaillement
- [27] **Karama M., Afaq K.S., Mistou S. (2003).** Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity, *Int. J. Solids Structures*; 40 (6): 1525-1546. [Karman, Th et al. 1952]: Karman, Th., Sechler, E.E. and Nadai, L.H. (1952), The strength of thin plates in compression, *Trans ASME*, 54, 53–57.
- [28] **Tanigawa, Y. O., Yoshinobu. (1999).** THREE DIMENSIONAL TRANSIENT THERMAL STRESSES OF FUNCTIONALLY GRADED RECTANGULAR PLATE DUE TO PARTIAL HEATING. *Journal of Thermal Stresses*, 22(1), 35–55.
- [29] **Reddy, J. N., & Cheng, Z.-Q. (2001).** Three-dimensional thermomechanical deformations of functionally graded rectangular plates. *Composite Structures*, 53(4), 843-854. DOI : 10.1016/S0997-7538(01)01174-3
- [30] **Vel, S. S., & Batra, R. C. (2002).** Exact solution for thermoelastic deformations of functionally graded thick rectangular plates. *AIAA Journal*, 40(7), 1421–1433.
- [31] **Vel, S. S., & Batra, R. C. (2003).** Three-dimensional analysis of transient thermal stresses in functionally graded plates. *Composite Structures*.
- [32] **[Shimpi RP, 2002]: Shimpi, R.P. (2002).** "Refined plate theory and its variants", *AIAA Journal*, 137– 146.
- [33] **Ait Atmane H., Tounsi A., Mechab I., Adda Bedia E.A. (2010).** Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory. *Int. J. Mech. Mater. Design*; 6 (2): 113-121.

- [34] **Thai, H.-T., & Kim, S.-E. (2013).** A simple higher-order shear deformation theory for bending and free vibration analysis of functionally graded plates. *Composite Structures*, 96, 165–173.
- [35] **Hadji, L., Ait Atmane, H., Tounsi, A., Mechab, I. and Adda Bedia, E.A. (2011).** “Free vibration of functionally graded sandwich plates using four-variable refined plate theory”, *Appl. Math. Mech. -Engl. Ed.*, 32(7), 925-942. <https://doi.org/10.1007/s10483-011-1470-9>.
- [36] **Foroughi, H., Azhari, M., 2014.** Mechanical buckling and free vibration of thick functionally graded plates resting on elastic foundation using the higher order B-spline finite strip method. *Meccanica* 49, 981–993. <https://doi.org/10.1007/s11012-013-9844-2>
- [37] **Ahmed Amine Daikh, Temperature dependent vibration analysis of functionally graded sandwich plates resting on Winkler/Pasternak/Kerr foundation, Materials Research Express, 6 (2019) 065702,** <https://doi.org/10.1088/2053-1591/ab097b>.
- [38] **Shen, H. S., & Zhu, Z. (2012).** *Analytical study on bending of functionally graded plates based on von Karman theory.* *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 8(3), 237-247. DOI : 10.1007/s10999-012-9207-3
- [39] **Tabassian, P., et al. (2013).** Static Study of Functionally Graded Material (FGM) Sandwich Plates Using a New Refined Hyperbolic Shear Deformation Theory.
- [40] **Behravan Rad, M., & Shariyat, M. (2013).** Three-dimensional magneto-elastic analysis of asymmetric variable thickness porous FGM circular plates with non-uniform tractions. *Composite Structures*, 105, 36-48. DOI : 10.1016/j.compstruct.2013.05.021
- [41] **Daouadji, T. H., & Tounsi, A. (2013).** Analytical solution for bending analysis of functionally graded plates. *Scientia Iranica*, 20(3), 516-523.
- [42] **Kanani, M., Aghdam, M. M., & Fallah, H. (2014).** *Nonlinear free and forced vibration analysis of functionally graded beams resting on elastic foundation using Galerkin method.* *Applied Mathematical Modelling*, 38(5–6)
- [43] **Ma, H., Lee, Y. Y., & Wang, L. (2015).** *Nonlinear dynamic response of functionally graded beams on nonlinear elastic foundation subjected to harmonic excitation.* *Applied Mathematical Modelling*, 39(3–4), 1094–1110.
- [44] **Akavci, S. (2016).** Mechanical behavior of functionally graded sandwich plates on elastic foundations. *Composite Structures*, 152, 1-12. DOI : 10.1016/j.compstruct.2016.05.020
- [45] **Lee, Y. Y., Ma, H., & Wang, L. (2015).** *Nonlinear dynamic response of functionally graded beams on nonlinear elastic foundation subjected to harmonic excitation.* *Applied Mathematical Modelling*, 39(3–4), 1094–1110. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2014.07.012>

- [46] **Thai, H. T., & Kim, S. E. (2013).** *A refined plate theory for functionally graded plates resting on elastic foundation.* Composite Structures, 96, 1–10 <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.07.032>
- [47] **Zaoui, M., Younsi, M., & Tounsi, A. (2019).** *Free vibration of functionally graded plates resting on elastic foundations based on quasi-3D hybrid-type higher-order shear deformation theory.* Journal of Sandwich Structures & Materials, 21(6), 1906–1928. <https://doi.org/10.1177/1099636217738909>
- [48] **Zenkour, A. M. (2014).** *Free vibration and buckling analyses of functionally graded plates based on a refined plate theory.* Composite Structures, 107, 447–456. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.08.004>
- [49] **Wattanasakulpong, N., & Chaikittiratana, A. (2015).** *Flexural vibration of imperfect functionally graded beams based on Timoshenko beam theory: Chebyshev collocation method.* Meccanica, 50(5), 1331–1342. <https://doi.org/10.1007/s11012-014-0044-6>
- [50] **Gupta, A., & Talha, M. (2018).** *Influence of porosity on the flexural and free vibration responses of functionally graded plates in thermal environment.* International Journal of Structural Stability and Dynamics, 18(08), 1850106. <https://doi.org/10.1142/S021945541850013X>
- [51] **Zenkour, A. M., & Radwan, A. F. (2018).** *Compressive Study of Functionally Graded Plates Resting on Winkler–Pasternak Foundations under Various Boundary Conditions Using Hyperbolic Shear Deformation Theory.* Archives of Civil and Mechanical Engineering, 18(2), 645-658.
- [52] **Shahsavari, H., et al. (2018).** *A novel quasi-3D hyperbolic theory for free vibration of functionally graded porous plates resting on Winkler/Pasternak/Kerr foundation.* Composite Structures, 204, 496-507.
- [53] **Nebab, M., Atmane, H.A., Bennai, R., Tahar, B., 2019.** *Effect of nonlinear elastic foundations on dynamic behavior of FG plates using four-unknown plate theory.* Earthq. Struct. 17, 447–462.
- [54] **Mamen, B., Bouhadra, A., Bourada, F., Bourada, M., Tounsi, A., & Hussain, M. (2024).** *"Four-variable Quasi-3D model for nonlinear thermal vibration of FG plates lying on Winkler-Pasternak-Kerr foundation."* Scientia Iranica.
- [55] **Wattanasakulpong, N., & Ungbhakorn, V. (2014).** *"Linear and nonlinear vibration analysis of elastically restrained ends FGM beams with porosities."* Aerospace Science and Technology, 32(1), 111–120.
- [56] **GUELLIL Moustafa Khadhir (2022).** « Etude de Comportement mécanique des plaques FGM reposant sur des fondations élastiques sous diverses conditions aux limites »

- [58] **Jin, G.Y., Su, Z., Shi, S.X., Ye, T.G., & Gao, S.A. (2014).** *Three-Dimensional Exact Solution for the Free Vibration of Arbitrarily Thick Functionally Graded Rectangular Plates with General Boundary Conditions.* Composite Structures, 108, 565–577.
- [59] **Mantari, J.L., Granados, E.V., Hinostroza, M.A., & Guedes Soares, C. (2014).** *Modelling advanced composite plates resting on elastic foundation by using a quasi-3D hybrid type HSDT.* Composite Structures, 118, 455–471.
DOI : [10.1016/j.compstruct.2014.07.039](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.07.039)
- [60] **Farzam-Rad, S.A., Hassani, B., & Karamodin, A. (2017).** *Isogeometric analysis of functionally graded plates using a new quasi-3D shear deformation theory based on physical neutral surface.* Composites Part B: Engineering, 108, 174–189.
DOI : [10.1016/j.compositesb.2016.09.087](https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2016.09.087)
- [61] **Shahsavari, D., & Shahsavari, M. (2017).** *A novel quasi-3D hyperbolic theory for free vibration of FG plates with porosities resting on Winkler/Pasternak/Kerr foundation.* Aerospace Science and Technology, 72, 134–149.
DOI : [10.1016/j.ast.2017.11.004](https://doi.org/10.1016/j.ast.2017.11.004)
- [62] **Benahmed, A., Houari, M.S.A., Benyoucef, S., Belakhdar, K., & Tounsi, A. (2017).** *A novel quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for functionally graded thick rectangular plates on elastic foundation.* Geomechanics and Engineering, 12(1), 9–34.
DOI : [10.12989/gae.2017.12.1.009](https://doi.org/10.12989/gae.2017.12.1.009)
- [63] **Baferani, A.H., Saidi, A.R., & Ehteshami, H. (2011).** *Accurate solution for free vibration analysis of functionally graded thick rectangular plates resting on elastic foundation.* Composite Structures, 93(7), 1842–1853.
DOI : [10.1016/j.compstruct.2011.01.020](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.01.020)