

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN DE TIARET



FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES
DÉPARTEMENT DE GÉNIE CIVIL

Mémoire de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme de Master

Spécialité : Génie civil

Option : Géotechnique

Présenté par :

MEKKI Meriem

HARRIR Khadidja

Sujet du mémoire

**EFFET DE FONDATION ELASTIQUE SUR LA
FLEXION DES STRUCTURES FGM**

Soutenu publiquement le 25/06/2025 *devant le jury composé de :*

M.BENFERHAT Rabia	MCA	Président
M. TLIDJI Youcef	Pr	Rapporteur
M. DRAICHE Kada	Pr	Examineur
M ^{lle} . OUAZIR Khatima	MCB	Examinatrice

PROMOTION : 2024-2025

Remerciement

Tout d'abord, nous tenons à remercier Allah, le clément et le miséricordieux de nous avoir donné la force et le courage de mener à bien ce modeste travail.

Nous adressons nos remerciements chaleureux à tous les professeurs qui nous ont enseignés au cours des études primaires jusqu'aux années du cursus universitaire pour l'obtention du diplôme de master.

Nous voudrions saisir cette occasion pour remercier notre encadreur M. TLIDJI Youcef pour l'aide et la précision conseils. Ainsi qu'à tous les membres de jury M, BENFERHAT Rabia, M. DRAICHE Kada et M^{lle}. OUAZIR Khatima.

Nos remerciements à tous les professeurs et cadres qui ont contribué de près ou de loin à notre formation.

Dédicace

A mon père Mohamed

A ma chère mère Aïcha

Dont le mérite, les sacrifices et les qualités humaines

M'ont permis de vivre ce jour.

A mon frère et mes sœurs

Habib, Abderrahmane, Meriem, Fatima

A ma chère binôme Mekki Meriem

A tous les gens m'aiment

Amel, Hanan, Yamou, Abir, Rofaida.....

KHADIDJA

Dédicace

Je dédie ce travail, humble mais chargé d'émotion, à :

- *La mémoire de mon père bien-aimé, dont le départ précoce a laissé un vide immense, mais dont la présence continue d'illuminer mon cœur. Que Dieu lui accorde Sa miséricorde infinie et l'accueille dans Son vaste paradis.*
- *Ma chère mère, femme de courage et de tendresse, qui a toujours été là, offrant son amour inconditionnel, ses sacrifices silencieux et son soutien inébranlable. Que Dieu te preserve et te comble de Sa bénédiction.*
- *Celui que je considère comme un second père, pour sa bonté, son affection sincère, et son soutien constant à chaque étape de ma vie. Puisse Dieu le récompenser pour tout ce qu'il m'a donné, avec générosité et bienveillance.*
- *À mes chers frères et sœur :*

*Mon frère bien-aimé Daoud, mes deux frères adorés Mohammed et Ismaïl,
Ma sœur bien-aimée fatima, à qui j'adresse tout mon amour et ma profonde
estime, et zohra l'épouse de mon frère.*

- *Aux petites lumières de la famille, mes nièces et neveux :
Khadidja, Salah, Maria et Anfal.*

- *À ma chère HarirrKhadidja.*
- *À mes amies les plus chères :*

*Tounes, Sabrine, Lamia et Faïza, merci pour votre soutien sincère et votre
fidélité.*

À tout ma famille

À tous mes amis

MERIE M

Sommaire

Remerciement.....	i
Dédicace	ii
Dédicace	iii
Sommaire	iv
Liste des figure	viii
Abstract	xi
Introduction générale.....	1
Chapitre 1. Généralités sur les matériaux	3
1.1 Introduction	4
1.2 Historique	4
1.3 Concept de matériaux fonctionnellement gradue.....	4
1.4 Matériaux composites traditionnels et matériaux FGM :.....	7
1.5 Propriétés effectives des matériaux FGM	9
1.6 Utilisation des FGM.....	9
1.6.1 Application de la FGM au génie civil :	10
1.7 Avantages et inconvénients des FGM :.....	11
1.7.1 Avantage des FGM :.....	11
1.7.2 Inconvénients des FGM :.....	11
1.8 Notions sur le gradient des FGM :	12
1.8.2 Propriétés matérielles de la plaque P-FGM :.....	14

Liste des tableaux

1.8.3	Fraction volumique E-FGM :	16
1.8.4	Fraction volumique S-FGM :	17
1.9	Conclusion :	19
Chapitre 2. Théories des structures fonctionnellement graduées (FG).....		20
2.1	Introduction :	21
2.2	Modèles analytiques des plaques FGM.....	21
2.2.1	Théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT)	21
2.2.2	Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) :	22
2.2.3	Théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT) :	23
2.3	Conclusion :	27
Chapitre 3. Formulation mathématique du problème étudié.....		28
3.1	Introduction :	29
3.2	Analyse des plaques FGM :	29
3.2.1	Propriétés des matériaux :	29
□	plaques P-FGM :	29
3.3	Théorie raffinée à quatre variables d'ordre élevé :	30
3.3.1	Hypothèses de base :	30
3.3.2	Champ de déplacement :	30
3.3.3	Champ de déformation :	30
3.3.4	Relations constitutives	31
3.3.5	Equations mouvement :	32
3.3.6	Modèles de fondations	33
3.3.7	Equations gouvernantes de la plaque.....	35
3.5	Conclusion.....	38
Chapitre 4. Interprétation des principaux résultats.....		39

Liste des tableaux

4.1 Introduction	40
4.2 Résultats numériques et discussion	41
4.2.1 Effets de l'indice de fraction volumique (p).....	43
4.2.2 Effets de la porosité	43
4.2.3 Effets de la fondation élastique	43
4.3 Conclusion.....	53
Conclusion générale	54
Références bibliographiques	55

Liste des tableaux

Tableau (1.1) caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels [Koizumi,1996].	8
Tableau (4.1) Flèche maximale des plaques carrées et rectangulaires sans fondations élastiques sous charge uniforme.....	41
Tableau (4.2) Effets des paramètres de la fondation élastique sur la flèche adimensionnelle (10w) d'une plaque carrée simplement appuyée en FGM sous charge uniforme	41
Tableau (4.3) Effets des paramètres de la fondation élastique sur la flèche adimensionnelle (10w) d'une plaque simplement appuyée en FGM sous charge uniforme	42
Tableau (4.4) Comparaison de la flèche adimensionnelle de la plaque carrée sous charge uniforme	44
Tableau (4.5) Comparaison de la Contrainte axiale adimensionnelles d'une plaque carrée sous charge uniforme.....	45
Tableau (4.6) Comparaison de la Contrainte de cisaillement adimensionnelles (τ_{xy}) d'une plaque carrée sous charge uniforme.	46
Tableau (4.7) Comparaison de la contrainte de cisaillement adimensionnelles (τ_{xz}) d'une plaque carrée sous charge uniforme.	47

Liste des figure

Chapitre 01 : Généralités sur les matériaux FGM

Figure (1.1) Montre les concentrations de contraintes dans les panneaux de protection.	5
Figure (1.2) Protection thermique.	6
Figure (1.3) Variation continue de la microstructure Yin(2004).	6
Figure (1.4) distribution des composantes des matériaux Yoshihisa(2004).	8
Figure (1.5) Modèles analytiques pour une couche en FGM	9
Figure (1.6) Principaux domaines d'application des FGM.	10
Figure (1.7) Changement de la microstructure d'un FGM d'après [Kahraman.2022].	13
Figure (1.8) Microstructure optique de MWCNT renforce Alesi FGM d'après [Rajaprakash B.M2022].	14
Figure (1.9) Variation de la fraction volumique dans la direction d'épaisseur de la P-FGM.	15
Figure (1.10) Variation du module de Young dans une plaque P-FGM.	16
Figure (1.11) Variation du module de Young dans une plaque E-FGM.	17
Figure (1.12) Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.	18

Chapitre 02 : théories des structures fonctionnellement graduées

Figure (2.1) Illustration de la plaque de Love Kirchhoff [Reddy, 1997].	22
Figure (2.2) Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin [Reddy,1997].	23
Figure (2.3) Illustration de la plaque d'ordre élevé [Reddy, 1997].	23

Chapitre 03 : formulation mathématique du problème étudié

Figure (3.1) Modèle de Winkler.	34
Figure (3.2) Modèle de Pasternak.	35

Chapitre 04 : Interprétation des principaux résultats

Figure (4.1) Effet des paramètres de la fondation élastique sur la contrainte axiale adimensionnelle d'une plaque poreuse carrée en FG.	49
Figure (4.2) Effet des paramètres de la fondation élastique sur la contrainte de cisaillement adimensionnelle d'une plaque poreuse carrée en FG	50
Figure (4.3) Effet des paramètres de la fondation élastique sur la contrainte de cisaillement adimensionnelle d'une plaque poreuse carrée en FG	51
Figure (4.4) Effets des paramètres de la fondation sur la flèche adimensionnelle en fonction du rapport d'aspect a/b des plaques poreuses ($a = 10h$, $P=2$).	52
Figure (4.5) Effets des paramètres de la fondation sur les flèches adimensionnelle en fonction du rapport longueur/épaisseur a/h de plaque poreuse carrée ($P=2$).	53

Liste des symboles

E	Module de Young
$E(z)$	Module de Young en fonction de « z »
E_c	Module de Young de la céramique
E_m	Module de Young du métal
G	Module de cisaillement
$G(z)$	Module de cisaillement en fonction de « z ».
μ	Coefficient de Poisson
$V(z)$	Fraction volumique
α	Indice de porosité
p	Paramètre du matériau ou (Indice matériel, Paramètre de la fraction volumique)
a, b	La longueur et largeur de la plaque
h	Epaisseur de la plaque suivant la direction de z
a/h	Elancement
u, v, w_b, w_s	Composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
u_i^0	Déplacement de membrane dans la direction i
w	Flèche de la plaque
$w_{,i}$	Rotation due à la flexion (sans cisaillement)
φ_i	Rotation de la normale au plan moyen autour des axes x_i
γ_i^0	Déformation de cisaillement transverse mesurée sur le plan moyen
∂	Dérivée partielle
m et n	Nombres naturels
φ_x, φ_y	Rotations autour des axes x, y
$\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}$	Déformation dans la direction x, y
σ_{xx}, σ_{yy}	Contraintes normales
γ_{xy}, γ_{xz}	Déformations de cisaillement
τ_{xy}, τ_{xz}	Contraintes de cisaillement
C_{ij}	Coefficients de rigidité
N, M et S	Résultantes des contraintes
A_{11}, B_{11} etc.	Termes de la matrice de rigidité
$[\]$	Matrice
$\{ \}$	Vecteur

Liste des abréviations

FGM.	Matériau fonctionnellement gradué.
CPT	Théorie classique des plaques .
FSDT	Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre.
HSDT	Théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé.
3D	Tridimensionnelle.
2D	Bidimensionnelle.

Résumé

Cette étude porte sur l'analyse de la flexion des plaques poreuses fonctionnellement graduée (FGM) reposant sur des fondations élastiques, les deux paramètres de fondation élastique Winkler et Pasternak sont considérés. Les propriétés matérielles de la plaque variées graduellement dans la direction de l'épaisseur selon deux lois de distribution de puissance (P-FGM) en termes de fraction volumique de constituant: une loi P-FGM avec une distribution uniforme de la porosité (Type 1) et une loi P-FG avec une distribution non uniforme de la porosité (Type 2). Les équations d'équilibres sont dérivées à partir le principe des travaux virtuels. L'exactitude de la présente théorie est démontrée par la comparaison des résultats obtenus avec les résultats des modèles d'ordre élevé présentés dans la littérature. Une étude détaillée est réalisée pour analyser l'effet de plusieurs paramètres sur la flexion des plaques poreuse en FGM, notamment, les paramètres de la fondation élastique, la type de distribution de porosité.

Mots-clés : Plaques en FGM, Flexion, Fondation élastique, Porosité.

الملخص

تتناول هذه الدراسة تحليل الانحناء للصفائح المسامية المصنوعة من مواد متدرجة الوظيفية والمرتكزة على أسس مرنة، حيث تم أخذ كل من معاملي الأساس المرن لنموذجي وينكلر و باسترناك بعين الاعتبار. تتغير الخصائص المادية للوحة تدريجياً عبر السمك وفقاً لقانونين للتوزيع الأسّي يعتمدان على الكسر الحجمي للمكونات: قانون مع توزيع موحد للمسامية (النوع 1)، وقانون مع توزيع غير موحد للمسامية (النوع 2). تم اشتقاق معادلات التوازن باستخدام مبدأ الأعمال الافتراضية. وقد تم التحقق من دقة النظرية المقترحة من خلال مقارنة النتائج المحصلة مع نتائج النماذج ذات الرتب الأعلى الموجودة في الأدبيات. كما تم إجراء دراسة تحليلية مفصلة لتقييم تأثير عدة عوامل على سلوك الانحناء للصفائح المسامية المصنوعة من مواد، خاصة تأثير معاملات الأساس المرن ونوع توزيع المسامية.

الكلمات المفتاحية: صفائح المتدرجة وظيفياً، الانحناء، الأساس المرن، المسامية

Abstract

This study focuses on the bending analysis of functionally graded porous (FGM) plates resting on elastic foundations, considering both Winkler and Pasternak foundation parameters. The material properties of the plate vary gradually through the thickness according to two power-law distribution models (P-FGM) based on the volume fraction of constituents: A P-FGM model with uniform porosity distribution (Type 1), and a P-FGM model with non-uniform porosity distribution (Type 2). The equilibrium equations are derived using the principle of virtual work. The accuracy of the proposed theory is validated by comparing the obtained results with those from higher-order models available in the literature. A detailed parametric study is conducted to investigate the effects of various parameters on the bending behavior of porous FGM plates, particularly the foundation parameters and the type of porosity distribution.

Keywords: FGM plates, Bending, Elastic foundation, Porosity.

Introduction générale

Les matériaux à gradient de propriétés (FGM – *Functionally Graded Materials*) sont des composites avancés dont les propriétés mécaniques varient continûment selon une ou plusieurs directions, permettant une transition progressive entre deux matériaux de base, souvent un métal et une céramique. Cette variation est particulièrement avantageuse dans les environnements où les structures sont soumises à des gradients thermiques, des sollicitations mécaniques ou des conditions extrêmes.

D'un autre côté, l'intégration de porosités dans les FGM est devenue courante dans les procédés de fabrication modernes, notamment pour alléger les structures et améliorer certaines performances thermiques. Cependant, la présence de porosité peut altérer les propriétés mécaniques du matériau, en particulier sa rigidité et sa résistance à la flexion.

Lorsque de telles plaques poreuses en FGM sont utilisées dans des applications pratiques (comme dans les domaines aérospace, biomédical ou civil), elles sont souvent posées sur des fondations élastiques. Ces dernières, modélisées généralement selon les modèles de Winkler, Pasternak ou Kerr, représentent le soutien qu'offre le milieu environnant, tel que le sol, une couche de caoutchouc ou un lit élastique.

L'étude de l'effet des fondations élastiques sur la flexion des plaques poreuses en FGM revêt alors une importance capitale. En effet, la nature et la rigidité de la fondation influencent significativement le comportement statique de la plaque : elles peuvent atténuer les déformations, améliorer la stabilité et modifier la distribution des contraintes. La compréhension de ces interactions permet d'optimiser le dimensionnement des structures composites dans des environnements de support variés.

Le présent travail est structuré comme suit :

- Le premier chapitre est consacré à une étude bibliographique approfondie sur la nouvelle génération de matériaux composites, appelés matériaux fonctionnellement gradués (FGM). Nous y présentons l'évolution de la recherche scientifique dans ce domaine, en mettant en évidence les différents procédés de fabrication, ainsi que leur intérêt croissant dans divers secteurs de l'industrie moderne.
- Le deuxième chapitre traite des principales théories des plaques utilisées en mécanique des structures. Il s'agit d'un état de l'art sur la théorie classique des plaques, la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) et les théories de plaques d'ordre supérieur, permettant de mieux appréhender les bases théoriques de l'analyse des plaques en FGM.
- Le troisième chapitre présente le développement analytique de la théorie de cisaillement bidimensionnelle adoptée dans ce travail. Cette formulation tient compte des effets du cisaillement transversal dans les plaques poreuses en FGM. Elle aboutit à des solutions analytiques décrivant le comportement en flexion de ces plaques.

- Le quatrième et dernier chapitre expose les résultats numériques obtenus à partir du modèle développé, appliqué à l'étude du comportement en flexion des plaques FGM poreuses. Ces résultats sont confrontés à ceux disponibles dans la littérature afin de valider la précision du modèle proposé.

Enfin, ce mémoire se clôt par une conclusion générale résumant les principales contributions de cette étude, suivie de suggestions pour des perspectives de recherche futures.

CHAPITRE 1. GENERALITES SUR LES MATERIAUX

1.1 Introduction

Les matériaux classés fonctionnellement sont une nouvelle classe de matériaux composites non homogènes, constitués de plusieurs éléments matériels. Ces matériaux ont une microstructure et une composition qui changent progressivement et constamment afin d'améliorer les performances mécaniques et thermiques de la structure qu'ils forment. Des études scientifiques ont été menées pour améliorer ses performances mécaniques et thermiques [A. Ameryan ,2020].

En fait, ce chapitre retracera l'évolution des matériaux à gradient fonctionnel de **1987** à nos jours. Nous identifions ensuite ces matériaux FGM et leurs domaines d'application, en décrivant leurs composants, leurs comportements et leurs caractéristiques.

1.2 Historique

A l'issue de la première étape (**1987-1989**), les chercheurs ont réussi à fabriquer de petites pièces expérimentales (1 à 10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) capables de supporter des températures maximales de 2000 K (température de surface) et un gradient de température de 1000 K.

Dans la deuxième étape (**1990-1991**), l'objectif était de produire des pièces de plus grandes dimensions et de formes plus complexes que celles produites dans la première étape. Au cours des années **1990**, les domaines d'application du FGM se sont non seulement élargis pour inclure les matériaux structurels fonctionnant à haute température, mais également à d'autres applications : biomécanique, technologie des capteurs, optique, etc. [Okamura,1991].

1.3 Concept de matériaux fonctionnellement gradue

Le concept de « matériaux à gradient fonctionnel » a été développé par Nino et ses collègues en **1984** au Laboratoire national aérospatial de Sendai, Honshu, au Japon. L'idée est de produire des matériaux de barrière thermique destinés à être utilisés comme structures spatiales et réacteurs à fusion [Koizumi ,1992].

La variation continue de la composition microstructurale et même de la porosité de ces matériaux conduit à des changements de gradient dans les propriétés des matériaux telles que la résistance mécanique et la conductivité thermique [Koizumi (1997)]. Cette nouvelle classe de matériaux composites peut être utilisée dans différentes applications telles que les revêtements de barrière thermique pour les moteurs en céramique, les turbines à gaz, les films optiques [Nguyen ,2007].

En **1987**, le gouvernement japonais a lancé un projet à grande échelle intitulé « Recherche sur les technologies de base et la relaxation des contraintes thermiques pour le développement de matériaux à gradient fonctionnel ». L'objectif de ce projet est de développer des matériaux structurels de barrière thermique destinés à être utilisés dans les programmes aérospatiaux. Dix-sept laboratoires de recherche nationaux, universités et entreprises ont participé au projet [Koizumi,1997].

La figure montre la variation continue de la composition du matériau « FGM », ainsi que la variation continue de sa microstructure. Cela produit un gradient qui détermine les

propriétés du « FGM ». Dans certains cas, il est possible de fabriquer des FGM en utilisant le même matériau mais avec une microstructure différente [Boch ,1986], [Attia ,2015].

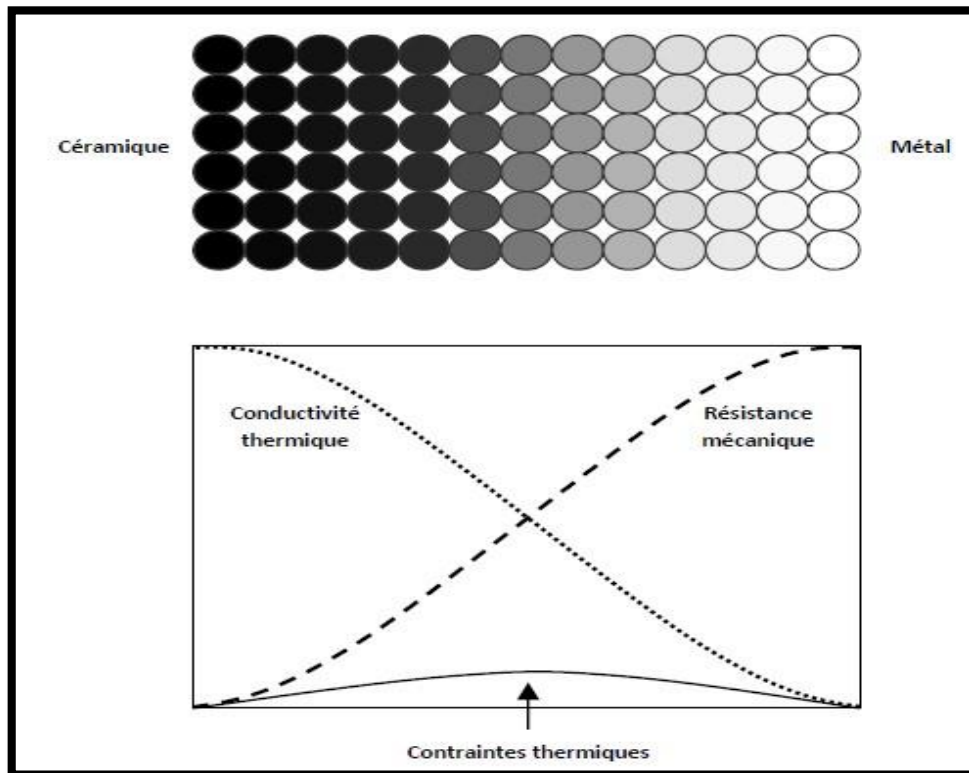


Figure (1.1) Montre les concentrations de contraintes dans les panneaux de protection [Boch et al ,1986].

La transition graduelle au niveau de l'interface (variations abruptes de composition) est atténuée grâce aux FGM. Ceux-ci permettent également de réduire les concentrations de contraintes, tout en maintenant les performances thermiques équivalentes à celles des barrières thermiques classiques. Ainsi, les FGM offrent une solution efficace pour soulager les effets néfastes liés aux discontinuités matérielles [Attia, 2015].

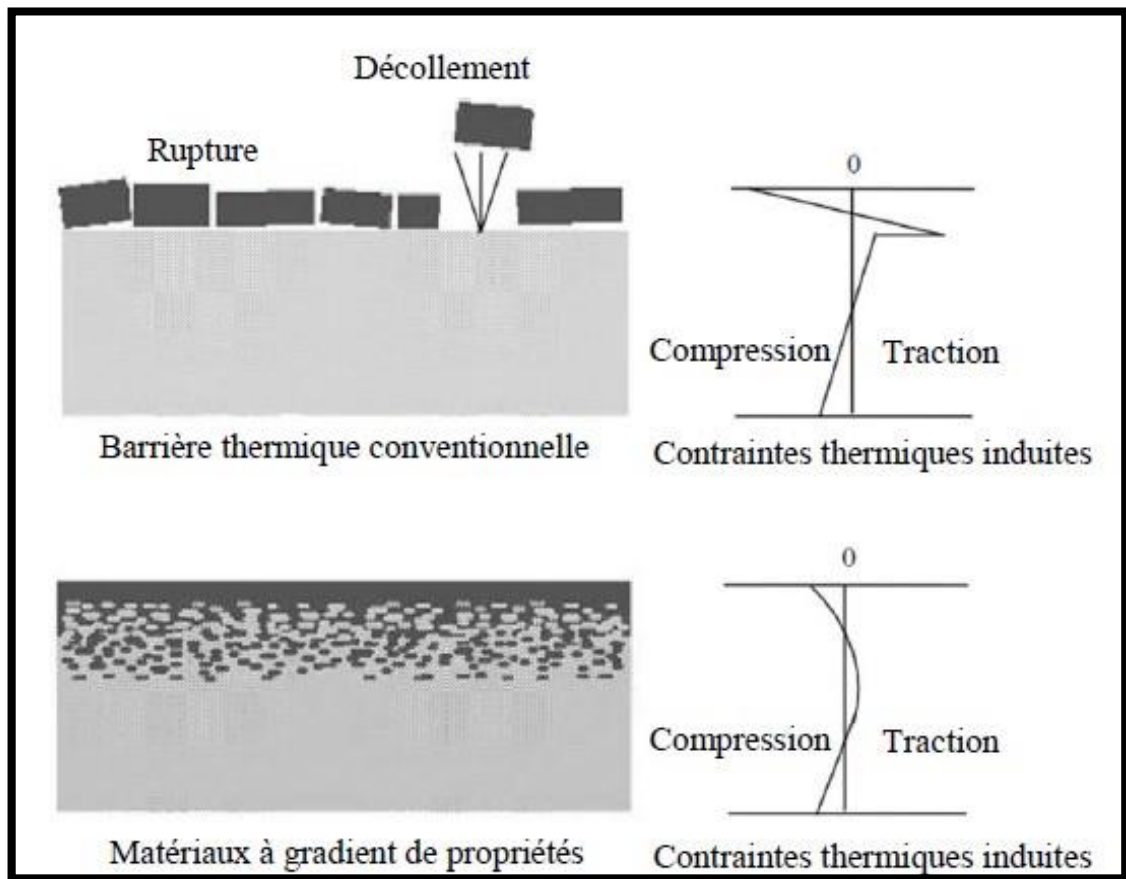


Figure (1.2) Protection thermique [Attia ,2015].

L'application de la variation continue des propriétés (figures 1.3et 1.4) se manifeste, par exemple, lorsque la face supérieure est soumise à une température élevée tandis que la face inférieure reste exposée à une température plus basse. Dans ce scénario, le côté supérieur est entièrement en céramique tandis que le côté inférieur est entièrement en métal, avec une transition progressive entre les deux.

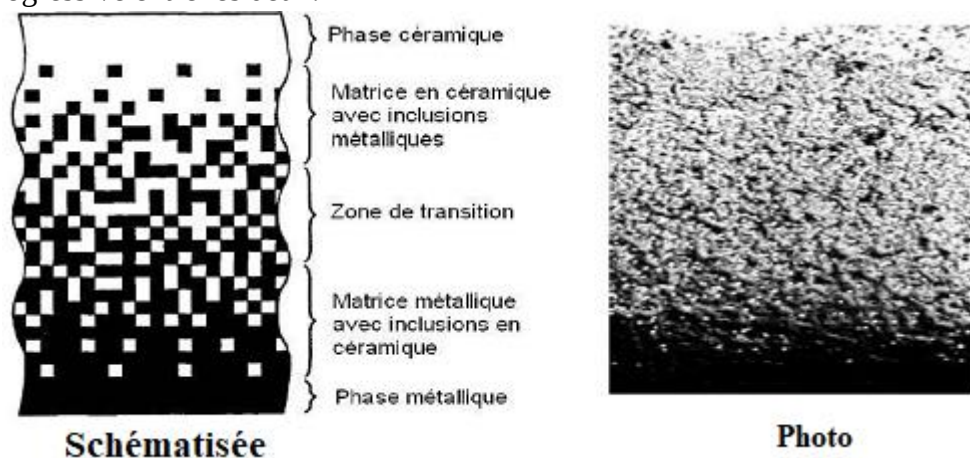


Figure (1.3) Variation continue de la microstructure[Yin,2004].

Ce matériau est choisi grâce à ses caractéristiques exceptionnelles qui sont énumérées comme suit :

- Faible réactivité chimique (bonne tenue à la corrosion) ;
- Haute température de fusion ou de décomposition ;
- Haut module d'élasticité et haute dureté ;
- Charge à la rupture élevée ;
- Bas coefficient de frottement (bonne résistance à l'usure) ;
- Conservation des propriétés à haute température ;
- Faible coefficient de dilatation thermique (bonne résistance aux chocs thermiques) ;
- Faible conductivité thermique (bonne résistance à la température).

Cependant, les céramiques sont réputées être fragiles et très vulnérables aux défauts de petite taille.

Les caractéristiques du métal sont données comme suit :

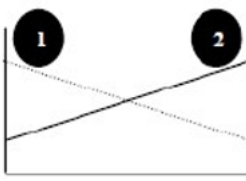
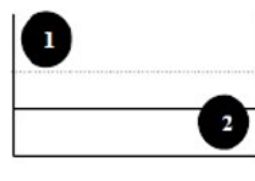
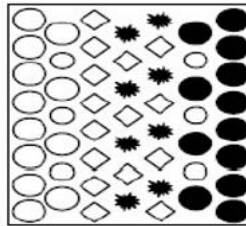
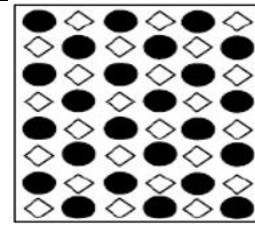
- Bonne résistance mécanique ;
- Conductivité thermique élevée ;
- Très bonne ténacité.

1.4 Matériaux composites traditionnels et matériaux FGM :

D'une manière générale, les FGM sont composés de plusieurs couches de matériaux, comprenant différents composants tels que la céramique et les métaux. Il s'agit donc de matériaux composites aux propriétés macroscopiquement inhomogènes.

Par conséquent, la composition et la microstructure des matériaux distinguent le FGM des composites conventionnels comme le montre le tableau (1.1) de Koizumi (1996). Cela crée un gradient qui détermine les propriétés matérielles du FGM. Dans certains cas, nous pouvons utiliser des FGM du même matériau mais avec des microstructures différentes [Boch ,1986], [Said,2016].

Tableau (1.1) caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels [Koizumi,1996].

Matériaux	Exemple	FGM	NON-FGM
Propriétés	1 Résistance mécanique 2 Conductivité thermique		
Structure	Eléments constituant : Céramique ○ Métal ● Microporosité ○* Fibre ◇*		

Le modèle le plus simple montrant la différence entre un matériau à gradient de propriétés (FGM) et des matériaux plus traditionnels sont représentées dans la figure (1.4) Yoshihisa (2004). Le matériau plan figure (1.4.a).

Placé sur une fonction plane, et le matériau connecté à figure (1.4.b) la limite à l'interface des deux matériaux. Le FGM présente d'excellentes propriétés différentes des matériaux composites et des matériaux plats collés. Par conséquent, le FGM a attiré beaucoup d'attention dans les applications industrielles en raison de ses doubles caractéristiques de deux matières premières mélangées ensemble et d'un changement ininterrompu et progressif dans la distribution de la composition.

Par exemple, dans un FGM composé de métal et de céramique, le côté métallique a les propriétés de conductivité thermique et de résistance métallique, tandis que le côté céramique a les propriétés de résistivité à haute température.

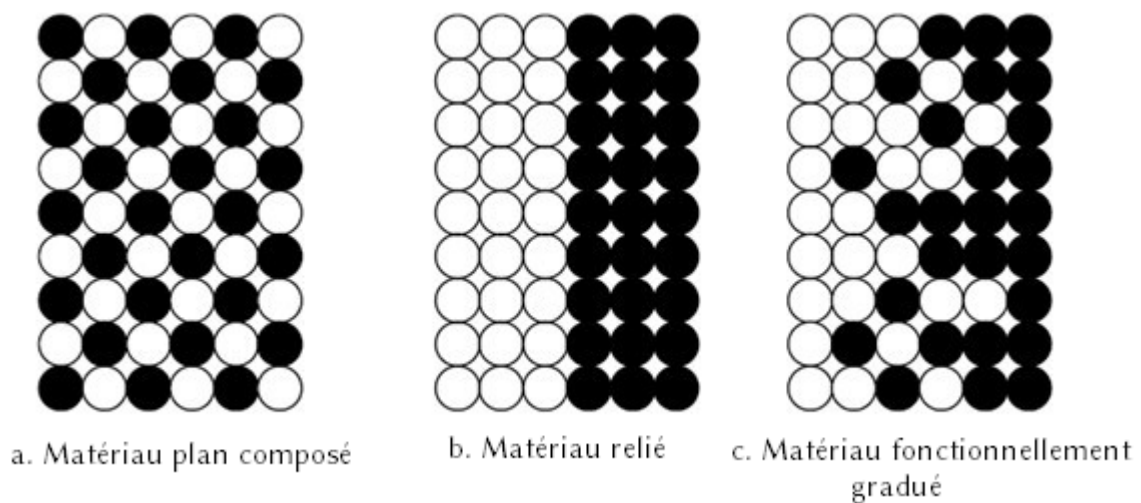


Figure (1.4) distribution des composantes des matériaux [Yoshihisa ,2004].

Les matériaux à gradient de propriétés offrent des caractéristiques de haute performance pour une variété d'applications industrielles et technologiques qui nécessitent que leurs structures soient conçues de manière optimale. Les matériaux FGM présentent également une bonne résistance aux phénomènes de dégradation des matériaux tels que l'usure, la fatigue et la corrosion. Par rapport aux matériaux traditionnels qui nécessitent un entretien et une surveillance réguliers, les gradients de température peuvent être très importants lors de l'utilisation.

1.5 Propriétés effectives des matériaux FGM

En règle générale, les FGM sont produits à partir de deux matériaux dotés de différentes caractéristiques, triés selon leur microstructure variable dans l'espace, afin d'optimiser la performance des éléments structurels par une répartition appropriée des propriétés associées. Une description précise d'une microstructure graduée réelle est généralement indisponible, sauf peut-être pour des données relatives à la répartition de la fraction volumique. Alors que la fraction volumique de chaque phase change progressivement en direction de la dégradation, les propriétés effectives des FGM se modifient sur toute cette trajectoire. Ainsi, nous avons deux méthodes potentielles pour les modèles FGM :

- Une variation par segments de la fraction volumique de la céramique ou du métal et on considère que le FGM est installé avec la même fraction volumique dans chaque zone. c'est-à-dire couche presque uniforme de céramique-métal figure (1.5.a)
- Une variation continue de la fraction volumique de la céramique ou du métal (figure 1.5.b), et la fraction volumique du métal peut être exprimée comme une fonction des coordonnées en fonction de l'épaisseur (z) [Kaddouri,2014].

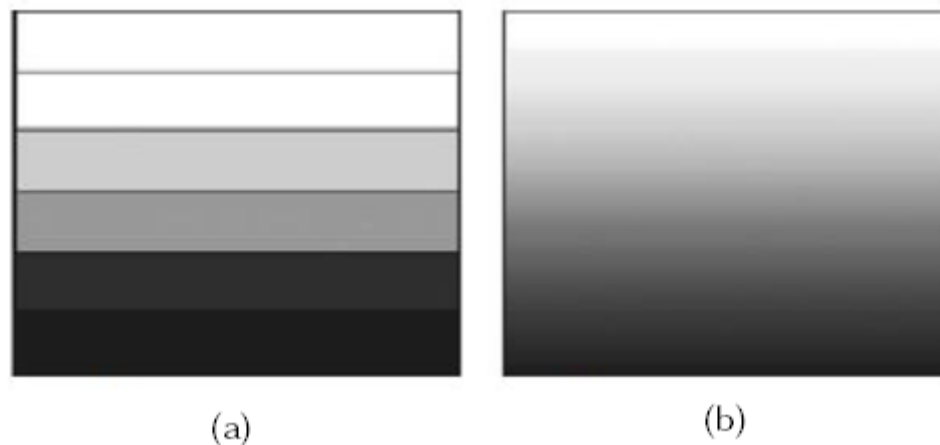


Figure (1.5) Modèles analytiques pour une couche FGM [Kaddouri, 2014]

1.6 Utilisation des FGM :

L'utilisation des matériaux FGM (céramique-métal) est sans doute la réponse appropriée, d'une part pour atténuer l'accumulation des tensions thermiques, et d'autre part pour des raisons de fonctionnalité comme l'isolation thermique et hygrothermique du

matériau. La figure dépeint les divers champs d'application des matériaux à gradient de propriété.

1.6.1 Application de la FGM au génie civil :

De par leur nature, le développement de composants de construction plus légers et plus recyclables pourrait avoir un impact positif sur l'environnement et l'économie du pays. La classification des propriétés des matériaux est une étape importante dans le développement de structures innovantes dans le domaine du génie civil. L'exemple du béton met clairement en évidence les possibilités et le potentiel qu'offrent les gradients.

Dans le cadre d'un projet de recherche mené à l'Université de Stuttgart, différentes catégories de matériaux de construction (béton, textiles, bois, métaux et polymères), méthodes de production et domaines d'application (structures de support, enveloppes de bâtiments, technologies hybrides) ont été étudiés sur la base du concept FGM et évalués pour certains éléments de construction.

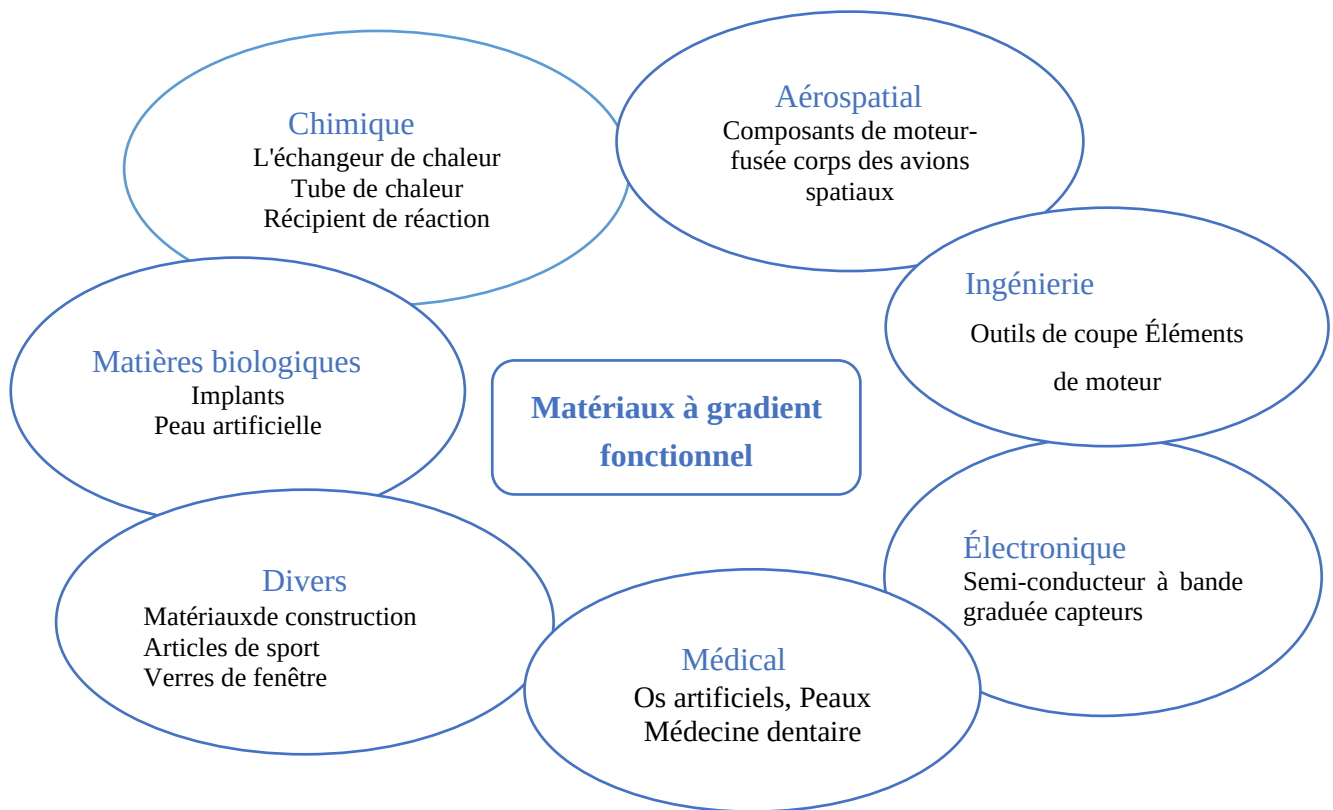


Figure (1.6) Principaux domaines d'application des FGM.

1.7 Avantages et inconvénients des FGM :

Les matériaux à gradation fonctionnelle ont leurs mérites et leurs défauts :

1.7.1 Avantage des FGM :

En plus de remplir son objectif principal, qui consiste à fournir les différentes exigences de propriétés sur divers points et surfaces du produit futur, qui pourrait être obtenu par un simple revêtement, beaucoup d'autres mettent en avant les nombreux avantages supplémentaires des FGM. Ils listent quelques bénéfices qui découlent principalement de l'absence d'une interface forte GM, tels que :

1. Diminuer les contraintes thermiques causées par les différences de coefficients de dilatation thermique des matériaux utilisés.
2. Absence d'une interface nette devrait conduire à un contrôle d'ensemble mieux des contraintes
3. Meilleure cohésion entre différents matériaux, par exemple un métal et une céramique.
4. Extension de la région fonctionnelle avant d'atteindre la valeur limite de la déformation plastique.
5. Suppression de délaminage.
6. Augmentation de la ténacité à la rupture.
7. Élimination des singularités des contraintes à divers endroits, tels que les surfaces libres, des coins, des racines de fissures, etc. Sung, R. (2011),

1.7.2 Inconvénients des FGM :

Le principal défi à une utilisation plus étendue de la FGM réside dans leur complexité de fabrication due à l'incompatibilité des différentes propriétés, comme la température de fusion, les affinités pour divers autres éléments, la taille des particules, la morphologie, entre autres. Un exemple standard consisterait en un alliage d'un métal à une température de fusion (T_1) et d'une céramique à une température de fusion (T_2). Généralement, on observe que dans de nombreuses situations, ($T_1 \ll T_2$). Par conséquent, si la température de fabrication est approximativement (T_1), la céramique reste non fondue et la structure finale incorpore des particules de céramique non fondues au sein d'une matrice métallique.

Souvent, une telle structure présente une porosité élevée et une faible adhérence entre les divers éléments, ce qui restreint son utilisation en général. Toutefois, pour certaines applications spécifiques, l'intégration de particules extrêmement dures (telles que les carbures) dans une matrice solide peut être souhaitée. En outre, l'activité autour de (T_2) provoquera indubitablement une oxydation rapide et l'évaporation de multiples métaux. L'apparition de phases non désirées, et cetera. La production des matériaux nécessite un environnement protégé ou une faible pression, et ces deux méthodes entraînent des coûts élevés. Votre formation s'est effectuée sur des données jusqu'à octobre 2023. Sung, R. (2011),

Tableau (1.2): Avantages et inconvénients des matériaux constituant les FGM.

Matériau		Céramique La face à haute température	Céramique-Métal (La couche intermédiaire)	Métal (La face à basse température)
Avantages	Bonne résistance thermique	✓		
	Bonne résistance à l'oxydation	✓		
	Élimination des problèmes de l'interface		✓	
	Relaxer les contraintes thermiques		✓	
	Bonne résistance mécanique			✓
	Très bonne ténacité			✓
Inconvénients	Faible conductivité thermique	✓		
	Fabrication compliquée		✓	
	Faible résistance à la corrosion			✓

1.8 Notions sur le gradient des FGM :

À la différence des matériaux homogènes, les caractéristiques des FGM varient non seulement selon leur composition, mais aussi en fonction de la connectivité du réseau interne de la structure. Dans la figure (1.7), nous présentons un schéma illustrant la microstructure d'un matériau FGM à la suite de l'accroissement du contenu de la seconde phase. Pour des fractions faibles, la seconde phase se présente en tant que particules distinctes dispersées dans une matrice (a). Lorsque le contenu de la seconde phase s'intensifie, les particules commencent à se toucher et à constituer des amas consolidés (b).

Si la progression de la phase deux persiste, un changement microstructural crucial se produira. Dans ce scénario, la seconde phase ne reste plus dispersée, mais elle commence plutôt à se connecter sur de vastes volumes (c, d, e). Cette phase de transition joue un rôle crucial dans le développement des caractéristiques du matériau FGM final [Kahraman, 2022].

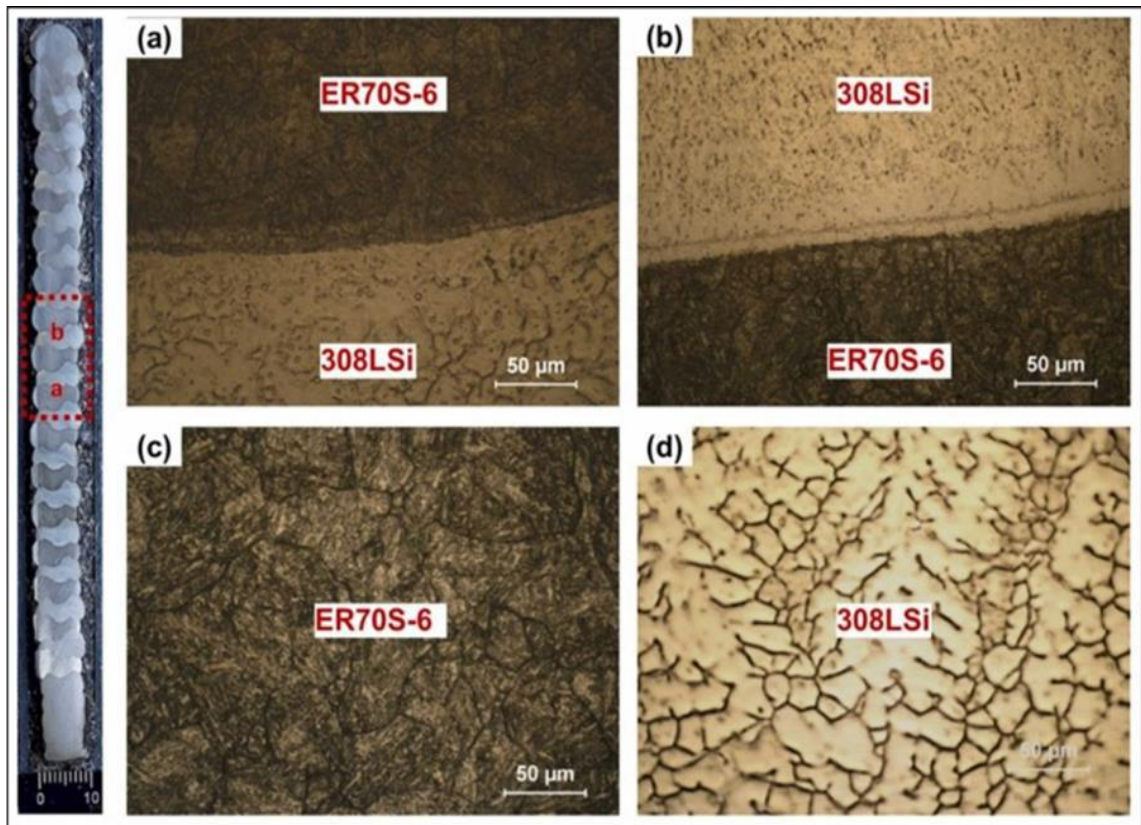


Figure (1.7) Changement de la microstructure d'un FGM d'après[Kahraman,2022].

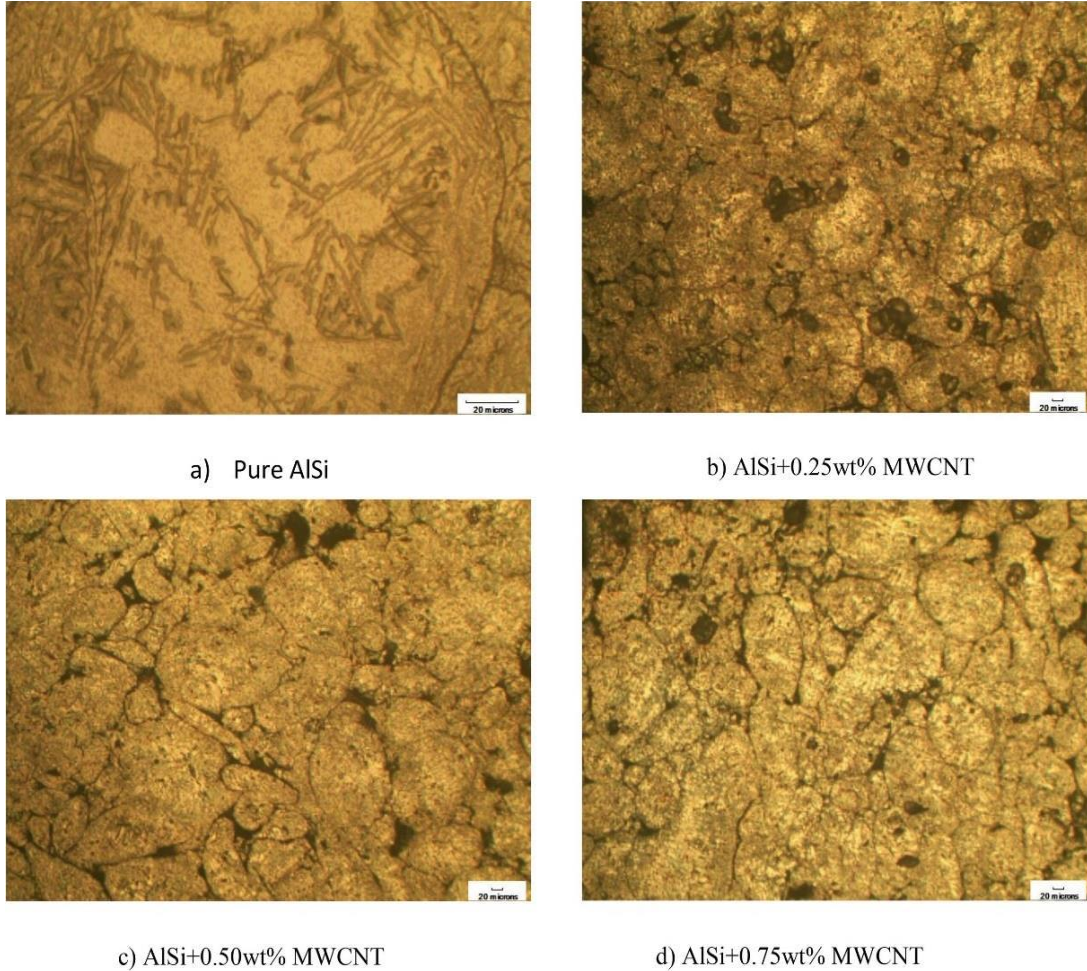


Figure (1.8) Microstructure optique de MWCNT renforce Alesi FGM d'après [RajaprakashB.M2022].

1.8.2 Propriétés matérielles de la plaque P-FGM :

La rigidité de la plaque est variée en fonction de sa hauteur « h » ; on suppose que le matériau P-FGM obéit à une fonction de loi de puissance notée :

$$V(z) = \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^k \quad (1.1)$$

Où 'k' est un paramètre matériau et 'z' est dirigé suivant l'épaisseur 'h' de la plaque. Les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM, peuvent être déterminées par la loi des mélanges :

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)V(z) \quad (1.2)$$

Où E_c et E_m sont les modules d'Young de la surface supérieure ($z = +h/2$) et de la surface inférieure ($z = -h/2$) de la plaque FGM.

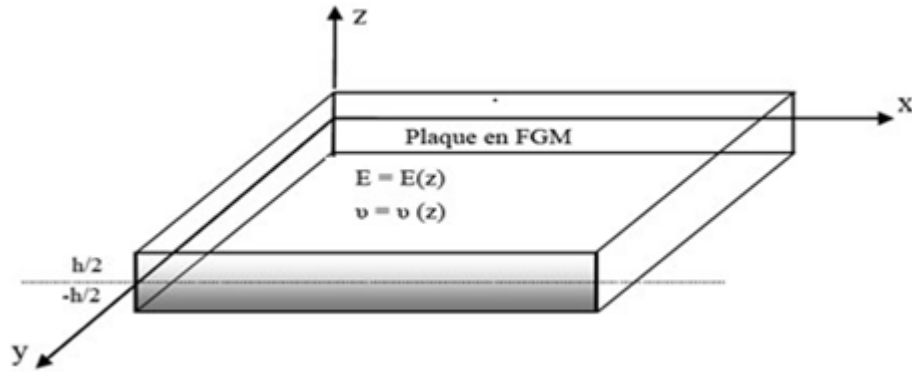


Figure (1.9) Variation de la fraction volumique dans la direction d'épaisseur de la P-FGM [Ziou ,2017].

La figure 1.10 met en évidence la variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque P-FGM composée du métal et de la céramique. On observe que, pour un indice de gradation $k < 1$, la fraction volumique évolue rapidement près de la face inférieure, tandis que pour $k > 1$, une augmentation marquée se produit près de la face supérieure. Lorsque $k = 1$, la distribution du module de Young suit une progression linéaire. Il ressort de cette analyse que l'augmentation de la teneur en céramique dans la plaque améliore significativement sa rigidité, en raison de l'accroissement du module de Young. À l'inverse, une diminution de la fraction céramique au profit du métal réduit la rigidité du matériau, traduisant ainsi une baisse du module d'Young [Attia, 2015].

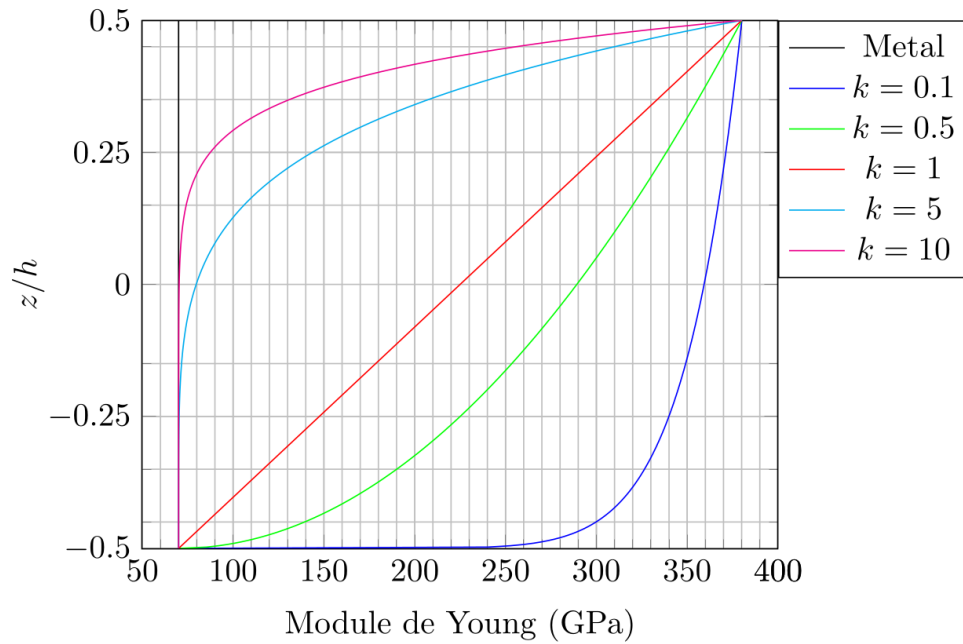


Figure (1.10) Variation du module de Young dans une plaque P-FGM.

1.8.3 Fraction volumique E-FGM :

La plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle pour modéliser les propriétés matérielles des matériaux FGM de type exponentiel (E-FGM), comme le décrit l'équation (1.3). La figure suivante illustre la distribution du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque FGM. Le module de Young varie de manière continue et exponentielle à travers l'épaisseur. Du côté où le matériau est métallique (généralement la base, $z=-h/2$), le module de Young est faible. À mesure qu'on se déplace vers la surface supérieure de la plaque ($z=+h/2$), la proportion de phase céramique augmente, ce qui se traduit par une hausse exponentielle de $E(z)$. La transition douce entre les deux matériaux évite les discontinuités mécaniques (contrairement aux matériaux composites à interfaces nettes).

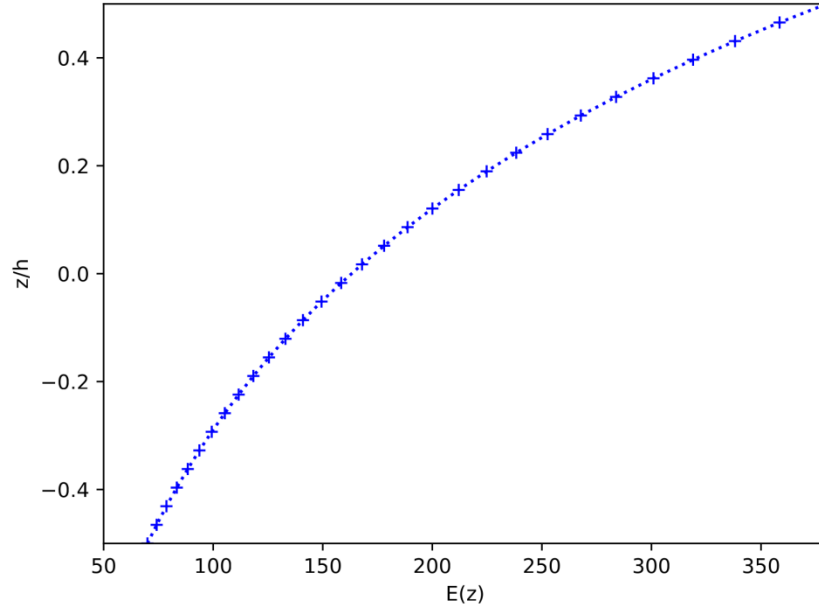


Figure (1.11) Variation du module de Young dans une plaque E-FGM

$$E(z) = E_2 e^{B(z+h/2)} \text{ avec } B = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{E_1}{E_2} \right) \quad (1.3)$$

1.8.4 Fraction volumique S-FGM :

Lorsqu'on étudie l'ajout à la plaque FGM, une fonction singulière simple appliquée aux matériaux composites multicouches, on observe que les concentrations de contraintes se manifestent sur une des interfaces où le matériau est continu mais subit une variation rapide. Ainsi, Chung et Chi (2003) déterminent la fraction volumique de puissance en recourant à deux fonctions pour garantir une répartition adéquate des contraintes sur l'ensemble des interfaces. On définit les deux fonctions comme suit :

$$V1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2+z}{h/2} \right)^k \text{ pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (1.4)$$

$$V2(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2-z}{h/2} \right)^k \text{ pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (1.5)$$

$$V2(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2-z}{h/2} \right)^k \text{ pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (1.6)$$

En utilisant la loi des mélanges, le module d'Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V_1(z)E_1 + [1 + V_1(z)]E_2 \text{ Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (1.7)$$

$$E(z) = V_2(z)E_2 + [1 + V_2(z)]E_1 \text{ Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (1.8)$$

La figure 1.12 met en évidence la distribution sigmoïdale du module de Young dans une plaque S-FGM pour différentes valeurs du paramètre de gradation k . Ce type de loi génère une distribution symétrique des propriétés mécaniques par rapport à l'axe médian de la plaque.

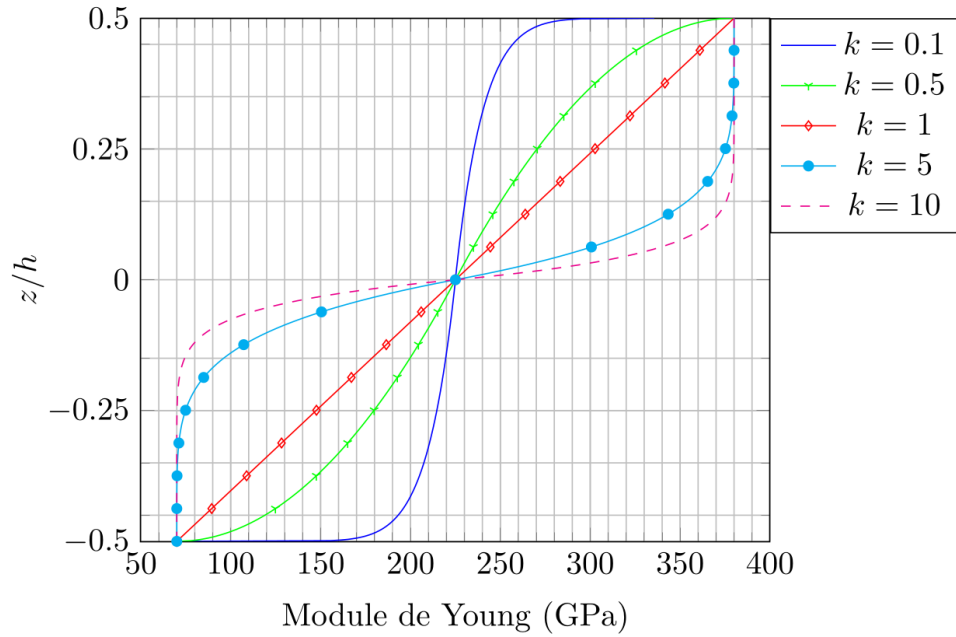


Figure (1.12) Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.

1.9 Conclusion :

Dans ce chapitre, les matériaux à gradient de propriétés (FGM) ont été présentés à travers un rappel historique, la description de leurs caractéristiques fondamentales, de leurs principales techniques de fabrication, ainsi que de leurs champs d'application. La variation progressive et continue de leurs propriétés à travers le volume du matériau offre des possibilités de conception innovantes, particulièrement adaptées aux structures spéciales et aux exigences du génie civil.

CHAPITRE 2. THEORIES DES STRUCTURES FONCTIONNELLEMENT GRADUEES (FG)

2.1 Introduction :

Pour résoudre les problèmes liés aux structures dont les éléments sont constitués de poutre et de plaques en matériaux fonctionnellement gradués (FGM) dans le domaine élastique, il est essentiel de choisir une théorie adéquate permettant de décrire correctement le comportement statique et dynamique de la structure, ainsi que de sélectionner la méthode de résolution appropriée.

En **1888**, Love a développé une théorie des plaques minces (appelée aussi théorie classique ou théorie de Kirchhoff-Love) en se basant sur les hypothèses de Gustav Kirchhoff, elles-mêmes inspirées des hypothèses d'Euler-Bernoulli. Par la suite, la théorie des plaques modérément épaisses (théorie des déformations du premier ordre) a été formalisée par Mindlin à partir des travaux de [Reissner 1945].

Avec l'augmentation de l'épaisseur des plaques, des théories d'ordre supérieur ont été développées afin d'améliorer les hypothèses des théories classiques et de premier ordre. De plus, la théorie basée sur l'élasticité tridimensionnelle (théorie 3D) a été introduite, éliminant toute restriction sur les déplacements de la plaque.

Dans ce contexte, ce chapitre présente quelques modèles théoriques développés dans la littérature pour mieux représenter l'évolution des champs de déplacement à travers l'épaisseur des plaques.

2.2 Modèles analytiques des plaques FGM

2.2.1 Théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT)

Une plaque est dite mince lorsque la déflexion due aux déformations de cisaillement est négligeable par rapport à celle engendrée par la courbure de la plaque. Dans le cas d'une plaque homogène et isotrope, la contribution du cisaillement à la flèche dépend principalement du rapport d'élancement géométrique (a/h).

La théorie classique des plaques minces (CPT - Classical Plate Theory) repose sur les hypothèses formulées par Love-Kirchhoff, selon lesquelles une fibre normale au plan moyen de la plaque reste perpendiculaire à ce plan après déformation. Cette hypothèse implique que les effets du cisaillement transverse sont négligés.

Ce modèle théorique est notamment développé dans les travaux de [Timoshenko, 1959]. En se fondant sur ces hypothèses, le champ de déplacement peut être exprimé comme suit :

$$U(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (2.1)$$

$$V(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (2.2)$$

$$W(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (2.3)$$

Avec (u_0, v_0, w_0) sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ($z = 0$).

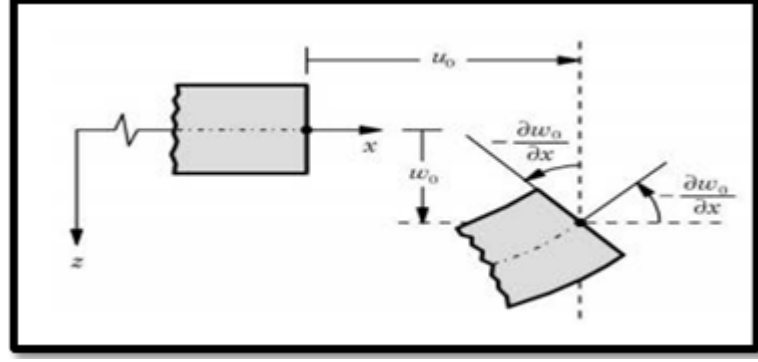


Figure (2.1) Illustration de la plaque de Love Kirchhoff [Reddy, 1997].

Puisque ce modèle ne tient pas en compte l'effet de cisaillement transverse, il donne des résultats imprécis pour les plaques épaisses.

2.2.2 Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) :

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre a prolongé la théorie classique des plaques en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse, dans ce cas les contraintes et les déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque, ce qui oblige l'introduction d'un du facteur de correction.

Les études sur la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) peuvent être référées dans [Reissner, 1945] et [Mindlin, 1951] qui a mené au modèle de plaque de Reissner-Mindlin. Ainsi que Timoshenko et Woinowsky-Kriege. La théorie du premier ordre est basé sur le champ de déplacement suivant :

$$U(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (2.4)$$

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z \phi_x(x, y) + z \varphi_x(x, y) \quad (2.5)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + z \phi_y(x, y) + z \varphi_y(x, y) \quad (2.6)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (2.7)$$

Avec : (u_0, v_0, w_0) et (ϕ_x, ϕ_y) sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y, respectivement.

Le champ de déplacement définis dans l'expression ci-dessus permet de reprendre la théorie classique des plaques décrite dans la dernière section par le remplacement.

$$\phi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x}; \phi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y}$$

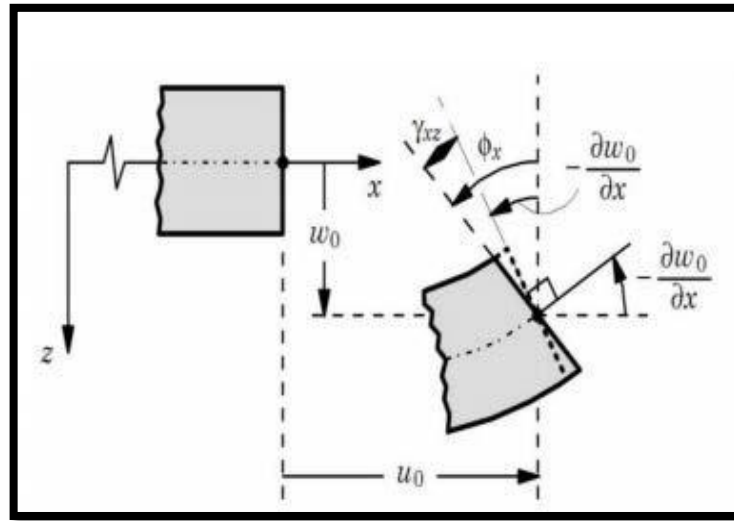


Figure (2.2) Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin [Reddy,1997].

D'ailleurs pour éviter l'introduction d'un facteur de correction, des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevée ont été développées.

2.2.3 Théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT) :

Contrairement aux théories CPT et FSDT, qui supposent une distribution linéaire des déplacements à travers l'épaisseur, la théorie d'ordre supérieur repose sur une distribution non linéaire des champs dans l'épaisseur. Elle permet ainsi de prendre en compte les effets de la déformation transversale par cisaillement et/ou de la déformation normale transversale, sans nécessiter de facteurs de correction.

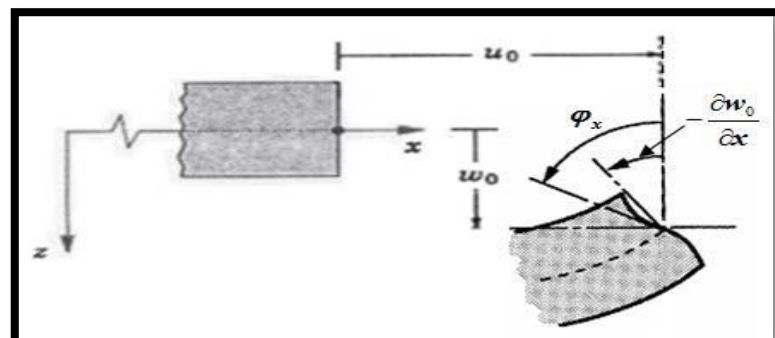


Figure (2.3) Illustration de la plaque d'ordre élevé [Reddy, 1997].

Le champ de déplacement est généralement écrit comme suit:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + \psi(z) \phi_x(x, y) \quad (2.8)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + \psi(z) \phi_y(x, y) \quad (2.9)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (2.10)$$

Avec : (u_0, v_0, w_0) et (ϕ_x, ϕ_y) sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y , respectivement, $\psi(z)$ est une fonction de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes. En effet, les déplacements de la théorie classique de plaque (CPT) est obtenue en prenant $\psi(z)=0$ alors que la théorie de premier ordre (FSDT) peut être obtenue par $\psi(z)=z$.

Afin de dépasser les limites des théories du premier ordre, plusieurs chercheurs ont apporté des contributions significatives en développant des modèles d'ordre supérieur, qui se distinguent dans la littérature par l'introduction d'une fonction de cisaillement spécifique. Ces modèles reposent sur une répartition non linéaire des champs de déplacement à travers l'épaisseur, ce qui permet de représenter le gauchissement de la section transversale dans son état déformé (voir Figure 2.3) [Nelson, 1974].

Parmi ces modèles, on peut citer notamment :

- L'approche d'Ambartsumyan [Ambartsumyan, 1969] avec ;

$$\Psi(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad (2.15)$$

- L'approche de Reissner [Reissner, 1945] avec ;

$$\Psi(z) = \frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (2.16)$$

- L'approche de Levinson, Murthy [Murthy, 1981] et Reddy Avec ;

$$\Psi(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (2.17)$$

Dans le modèle développé par Reddy, le champ de déplacement en membrane est représenté par une fonction cubique, tandis que le déplacement transverse est supposé constant [Reddy, 1984], [Reddy, 1997] et [Reddy, 1999].

Ce modèle offre une approximation satisfaisante des contraintes de cisaillement transverse, en comparaison avec la solution tridimensionnelle de l'élasticité pour des matériaux homogènes [Duong, 2008].

La distribution des contraintes de cisaillement transverse y est de forme parabolique à travers l'épaisseur ; dans le cas d'un matériau multicouche, cette distribution doit être parabolique au sein de chaque couche.

Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont respectées. De plus, les résultats obtenus à partir du modèle de Reddy sont très proches de ceux fournis par deux modèles d'ordre supérieur proposés par [Kan, 2002].

Quant à Touratier, il a introduit un modèle dit "sinus", distinct des autres modèles d'ordre élevé du fait qu'il ne repose pas sur des fonctions polynomiales. À la place, il utilise une fonction trigonométrique sinusoïdale pour représenter la répartition des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur [Touratier, 1991].

La fonction associée au cisaillement transverse est donc exprimée sous forme sinusoïdale.

$$\begin{aligned}\Psi(z) &= \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) = \frac{h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi z}{h}\right)^{(2n+1)} \quad (2.18) \\ &= z\left(1 - \frac{\pi^2 z^2}{3! h^2} + \frac{\pi^4 z^4}{5! h^4} - \frac{\pi^6 z^6}{7! h^6} + \dots\right)\end{aligned}$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par le modèle (sinus) prennent une forme cosinusoidale à travers l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de [Reddy, 1984]. En se basant sur les travaux de Touratier, un élément fini triangulaire à six nœuds, est construit pour les structures multicouches non linéaires géométriques par [Dau, 2006].

Afaq, proposent un modèle exponentiel avec une cinématique plus riche [Afaq et al. 2003]. La fonction de distribution de cisaillement transverse est de la forme Suivante:

$$\Psi(z) = ze^{-2(z/h)^2} \quad (2.19)$$

L'utilisation de la fonction exponentielle permet de développer la variable en puissances paires et impaires, contrairement à la fonction sinus proposée par [Touratier, 1991], qui ne permet qu'un développement en puissances impaires.

Bien que les modèles d'ordre supérieur assurent la continuité des déplacements et des déformations à l'interface, les contraintes inter-laminaires de cisaillement ainsi que les contraintes à l'interface présentent encore des discontinuités. Cela constitue une limitation importante dans l'analyse locale des interfaces de structures multicouches, notamment lorsque les propriétés mécaniques des couches sont très hétérogènes [Duong, 2008].

Les déplacements de théorie de déformation de cisaillement de la troisième de Reddy (TSDT) sont obtenus par :

$$\Psi(z) = \left(\frac{4z^3}{3h^2}\right) \quad (2.11)$$

Le modèle développé par Reddy considère un champ de déplacement membranaire de forme cubique. Grâce à cette approche, il permet une estimation fiable des contraintes de

cisaillement transverse, offrant ainsi une bonne concordance avec les résultats obtenus par la théorie de l'élasticité en trois dimensions.

Dans ce cadre, les contraintes de cisaillement transversales varient selon une loi parabolique à travers l'épaisseur, ce qui permet de respecter les conditions aux limites imposées sur les surfaces libres. Touratier a introduit le modèle SSDT (sinusoidal shear deformation theory [Touratier, 1991], qui repose non pas sur des fonctions polynomiales, mais sur une fonction sinusoïdale pour décrire la distribution du cisaillement transverse.

La fonction associée à cette répartition s'exprime comme suit :

$$\Psi(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (2.12)$$

Les contraintes de cisaillement transverses obtenues à partir de ce modèle varient selon une loi sinusoïdale à travers l'épaisseur de la plaque. Ce type de modélisation offre une meilleure précision par rapport à la solution exacte que celle obtenue avec la théorie de Reddy. La version exponentielle de la théorie de la déformation de cisaillement d'ordre élevé (Exponential Shear Deformation Plate Theory – ESDPT), développée par Karama et al. [Pindera, 1994], est formulée en adoptant une fonction de forme exponentielle.

$$\Psi(z) = ze^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (2.13)$$

La version hyperbolique de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The hyperbolic shear deformation plate theory HSDPT) développée par [Ait Atmane, 2010] est obtenue en prenant :

$$\Psi(z) = \frac{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\left[\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1\right]^z} - \frac{\left(\frac{h}{\pi}\right) \sinh\left(\frac{\pi}{h} z\right)}{\left[\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1\right]} \quad (2.14)$$

2.3 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présenté une synthèse des principales théories des plaques appliquées aux matériaux à gradient de propriétés (FGM). Il s'agit notamment de la théorie classique des plaques (CPT), de la théorie de déformation en cisaillement de premier ordre (FSDT) et de la théorie de déformation en cisaillement d'ordre supérieur (HSDT). La formulation adoptée repose sur les hypothèses propres à chaque théorie, dans le cadre d'une modélisation bidimensionnelle en élasticité. Nous avons ensuite établi les équations cinématiques décrivant les déplacements d'un point quelconque de la plaque en fonction des déplacements généralisés. Pour prendre en compte les grands déplacements, le tenseur de déformation de Von Karman a été utilisé afin d'établir les relations entre les déformations et les déplacements. Le tenseur des contraintes, spécifique aux plaques FGM, a été obtenu à partir de l'application du champ de déformation dans la loi de Hooke généralisée.

Enfin, nous avons défini le principe des travaux virtuels ainsi que le critère de minimisation de l'énergie potentielle totale.

CHAPITRE 3. FORMULATION MATHEMATIQUE DU PROBLEME ETUDIE

3.1 Introduction :

A cet égard, un objectif de base de toutes les théories précédentes est un calcul approché des grandeurs généralisées basé sur le système d'équations d'équilibre, de compatibilité et des conditions aux limites sur les bords, complété par une loi de comportement reliant les contraintes et les déformations généralisées. La section suivante décrit un modèle analytique proposé pour l'étude du comportement mécanique de la flexion FG des plaques. Dans cette théorie, une théorie sinusoïdale raffinée n'est en fait ajoutée que par rapport à la c pelliculaire car elle utilise seulement quatre variables. Par conséquent, le nombre de fonctions inconnues quatre ou plus.

3.2 Analyse des plaques FGM :

3.2.1 Propriétés des matériaux :

Les FGM sont les composites en céramique – métal. Plusieurs modèles mathématiques sont disponibles dans la littérature, qui décrivent la variation des propriétés matérielles, par exemple d'après Chi et Chung 2006ab. Le plus souvent utilisé en pratique est la distribution de la loi de puissance en fonction de la fraction volumique des constituants.

Les propriétés des matériaux de la FGM de la plaque FG supposées changer de manière continue à travers l'épaisseur. La plaque FG est composée de céramique et de métal et les trois types de plaques sont :

- PLAQUES P-FGM :

Les propriétés du matériau ont été supposées varier selon l'épaisseur de la plaque selon la distribution de la loi de puissance telle que :

$$E(z) = (E_c - E_m)V_c + E_m \quad (3.1)$$

Où E est les matériaux propriétés E_m et E_c sont les propriétés respectives des métaux et des céramiques

met c sont représentants de composants métalliques et céramiques. Les fractions volumiques de céramiques à sont décrites comme suit :

$$V_c(z) = \left(\frac{2z + h}{2}\right)^p \text{ avec } V_m + V_c = 1 \quad (3.2)$$

Chapitre 03 Formulation mathématique du problème étudié

3.3 Théorie raffinée à quatre variables d'ordre élevé :

3.3.1 Hypothèses de base :

1. L'origine du système de coordonnées cartésiennes est prise au plan neutre de la plaque FGM ;
2. Le déplacement axial est divisé en trois aspects : extension, flexion et cisaillement ;
3. Le déplacement dans la direction (u) et le déplacement x et (v) dans la direction y sont composés du déplacement de la membrane, du déplacement de flexion et du déplacement de cisaillement ;
4. Le déplacement latéral w comprend deux composantes, la flexion et le cisaillement, w_b et w_s :

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \quad (3.3)$$

5. Le déplacement est faible par rapport à l'épaisseur de la plaque, donc la déformation est également négligeable.
6. La contrainte normale transversale σ_{xz} est négligeable par rapport à la contrainte normale dans le plan σ_{xx} et σ_{yy} .

3.3.2 Champ de déplacement :

Selon les hypothèses de la section précédente, la forme analytique du champ de déplacement est la suivante :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (3.4a)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (3.4b)$$

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \quad (3.4c)$$

Où :

$$f(z) = z - \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (3.5)$$

v_0 et u_0 sont les déplacements de la membrane dans le plan dans les directions (x) et (y), respectivement, w_b et w_s sont les composantes de déplacement latéral pour la flexion et le cisaillement, et $f(z)$ est basé sur une fonction trigonométrique.

3.3.3 Champ de déformation :

Le champ de déformation associé au champ de déplacement précédent est obtenu comme suit :

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{xx}^0 + zk_{xx}^b + f(z)K_{xx}^s \quad (3.6a)$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_{yy}^0 + zk_{yy}^b + f(z)K_{yy}^s \quad (3.6b)$$

$$\varepsilon_z = 0 \quad (3.6c)$$

$$\gamma_{xy} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - 2z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} - 2f(z) \frac{\partial^2 \omega_s}{\partial x \partial y} \quad (3.7a)$$

$$\gamma_{xz} = \left(1 - \frac{\partial f(z)}{\partial z} \right) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (3.7b)$$

$$\gamma_{yz} = \left(1 - \frac{\partial f(z)}{\partial z} \right) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (3.7c)$$

Avec :

$$\varepsilon_{xx}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x} \quad k_{xx}^b = -\frac{\partial^2 \omega_b}{\partial x^2} \quad k_{xx}^s = -\frac{\partial^2 \omega_s}{\partial x^2} \quad (3.8a)$$

$$\varepsilon_{yy}^0 = \frac{\partial v_0}{\partial y} \quad k_{yy}^b = -\frac{\partial^2 \omega_b}{\partial y^2} \quad k_{yy}^s = -\frac{\partial^2 \omega_s}{\partial y^2} \quad (3.8b)$$

$$\gamma^0 = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ \frac{\partial w_s}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.8c)$$

avec ε^0 , k^0 , γ^s et k^s sont respectivement des déformations et les distorsions.

3.3.4 Relations constitutives

Pour les plaques élastiques, les relations constitutives peuvent être écrites comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.9a)$$

Et

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{55} & 0 \\ 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (3.9b)$$

Les composantes de contrainte et de déformation sont représentées par $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz})$ et $(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz})$.

Chapitre 03 Formulation mathématique du problème étudié

En se fondant sur les caractéristiques matérielles énoncées dans l'équation (3.1), on peut exprimer les coefficients de rigidité de la manière suivante :

$$C_{11}(z) = C_{22}(z) = \frac{E(z)}{1 - \nu(z)^2} \quad (3.10a)$$

$$C_{12}(z) = \nu(z)C_{11}(z) \quad (3.10b)$$

$$C_{44}(z) = C_{55}(z) = C_{11}(z) = C_{66}(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu(z)^2)} \quad (3.10c)$$

Où $\nu(z)$ est le coefficient de Poisson.

3.3.5 Equations mouvement :

On obtient les équations de gouvernance en se basant sur le principe des travaux virtuels, et elles sont formulées de la manière suivante :

$$0 = \int_V (\delta U + \delta V) dV \quad (3.11)$$

Où : δU est la déformation en énergie et δV est le travail virtuel externe provoqué par la charge externe appliquée à la plaque.

La variation de l'énergie de déformation de la plaque est calculée comme suite :

$$\delta U = \int_A \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx}\delta\epsilon_{xx} + \sigma_{yy}\delta\epsilon_{yy} + \sigma_{xy}\delta\gamma_{xy} + \sigma_{xz}\delta\gamma_{xz} + \sigma_{yz}\delta\gamma_{yz}) dAdz \quad (3.12)$$

Ainsi, l'expression finale de la variation de l'énergie de déformation est formulée en utilisant des variables de contraintes et de déformations :

$$\begin{aligned} \delta u \int_A \int_{-h/2}^{h/2} [N_{xx} \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} - M_{xx}^b \frac{\partial^2 \delta \omega_0}{\partial x^2} - M_{xx}^s \frac{\partial^2 \delta \omega_s}{\partial x^2} + \\ N_{yy} \frac{\partial \delta v_0}{\partial y} - M_{yy}^b \frac{\partial^2 \delta \omega_b}{\partial y^2} - M_{yy}^s \frac{\partial^2 \delta \omega_s}{\partial y^2} + N_{xy} (\frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + \frac{\partial \delta v_0}{\partial x}) - \\ 2M_{xy}^b \frac{\partial^2 \delta \omega_b}{\partial x \partial y} - 2M_{xy}^s \frac{\partial^2 \delta \omega_s}{\partial x \partial y} + Q_x (\frac{\partial \delta w_s}{\partial x}) + Q_y (\frac{\partial \delta w_s}{\partial y})] dA \end{aligned} \quad (3.13)$$

Tel que (N_{yy} , N_{xy} et N_{xx}) sont les résultantes des efforts et moments, et sont exprimé par :

$$(N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}) dz \quad (3.14a)$$

Chapitre 03 Formulation mathématique du problème étudié

Et les résultantes des moments en plan (M_{xx} , M_{yy} et M_{xy}) sont définies par l'intégrale des moments créés par les contraintes en plan et le plan moyen de la plaque sur l'épaisseur :

$$(M_{xx}^b, M_{yy}^b, M_{xy}^b) = \int_{-h/2}^{h/2} z(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}) dz \quad (3.14b)$$

$$(M_{xx}^s, M_{yy}^s, M_{xy}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} f(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}) dz \quad (3.14c)$$

Les résultantes des charges du cisaillement (Q_x et Q_y) sont définies par :

$$(Q_x, Q_y) = \int_{-h/2}^{h/2} g(\sigma_{xz}, \sigma_{yz}) dz \quad (3.14d)$$

Le travail virtuel externe sous l'effet de la charge externe appliquée à la plaque est donné par :

$$\delta V = - \int_A [q(\delta \omega_b + \delta \omega_s) + f e] dA \quad (3.15)$$

3.3.6 Modèles de fondations

L'un des problèmes techniques les plus couramment rencontrés dans la conception de l'élasticité repose sur les plaques civiles. Toutes les charges du bâtiment doivent être transférées au sol, de sorte que l'ensemble du bâtiment et le sol doivent coopérer pour supporter les charges.

Les méthodes permettant de trouver des modèles de fondations réellement élastiques et des environnements simples pour résoudre un problème si compliqué que l'interaction entre le bâtiment et le sol est fondamentale pour la réalisation de bâtiments sûrs et économiques.

➤ Model de Winkler :

Depuis 1887, la méthode de Winkler est demeurée la plus simple et largement adoptée pour représenter le sol dans les calculs liés aux fondations et aux constructions géotechniques. Le modèle de Winkler repose sur l'hypothèse essentielle de la proportionnalité entre les déformations et les contraintes, le coefficient de proportionnalité étant le module de réaction du sol, noté k_w . Selon Winkler, le sol est envisagé comme un système composé de ressorts identiques, indépendants et présentant un comportement élastique linéaire. Winkler présume aussi que la déformation du sol sous les charges appliquées se limite exclusivement aux zones chargées. On peut exprimer l'équation différentielle correspondant à ce modèle de la manière suivante :

$$f_e = k_w(\omega_b + w_s) \quad (3.16)$$

Le modèle du sol présenté par Winkler en 1867 est un sol en série de ressorts indépendants en direction longitudinale. La difficulté principale est l'estimation réaliste de la rigidité des ressorts en série de ressorts indépendants Figure (3.1)

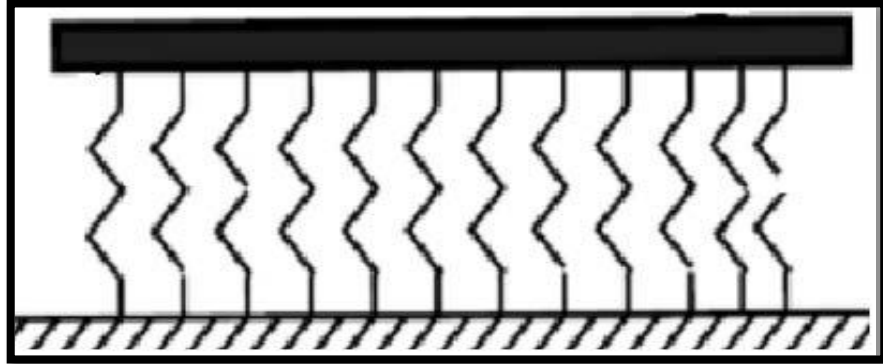


Figure (3.1) Modèle de Winkler.

Par la suite, Pasternak a perfectionné cela en considérant les interactions entre les ressorts distincts dans le modèle de Winkler et en introduisant un nouveau paramètre dépendant. Ainsi, le modèle de Pasternak était couramment utilisé pour caractériser le comportement mécanique des interactions (structures-bases).

➤ **Modèle de Pasternak**

L'hypothèse du modèle de comportement du sol proposé par Pasternak (1954) repose sur l'existence d'une interaction de cisaillement entre les ressorts. Cela s'accomplit par la connexion des ressorts à une couche d'éléments verticaux non compressibles, qui ne peuvent être soumis qu'à des déformations tangentielles attribuées au cisaillement selon Khemis(2018). On note deux distinctions majeures entre le modèle de Winkler et celui de Pasternak : avec le premier, on observe un affaissement uniforme du sol sous la structure et aucun mouvement en dehors de la zone chargée, tandis qu'avec le deuxième, il y a une continuité de mouvement du sol tant sous que hors de la structure.

$$f_e = k_w(\omega_b + w_s) - k_p \nabla^2(w_b - w_s) \quad (3.17)$$

$$\text{Avec : } \nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

Avec : K_p le module de réaction du sol [Pa/m].

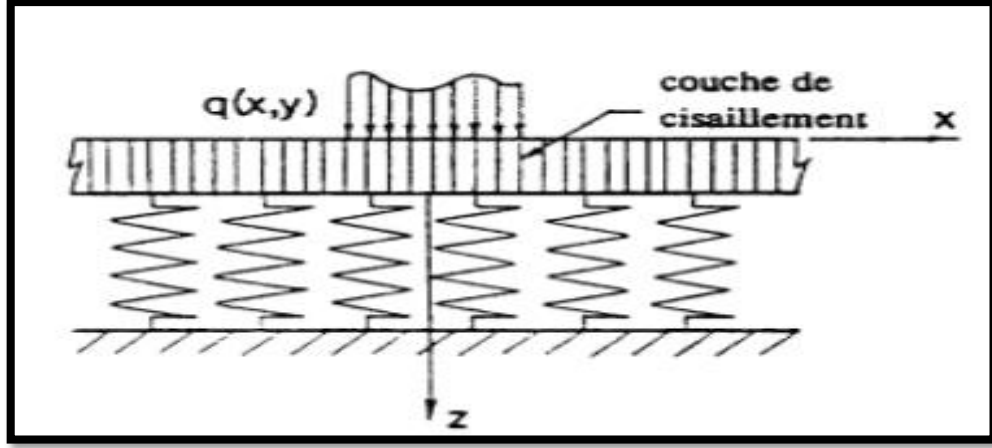


Figure (3.2) Modèle de Pasternak.

3.3.7 Equations gouvernantes de la plaque

En utilisant les expressions de déplacement-déformation généralisées en remplaçant l'Eq. (3.13) et (3.15) dans l'Eq. (3.11), intégrant par parties et en recueillant des coefficients δu_0 , δv_0 , $\delta \omega_s$ et $\delta \omega_b$. On obtient l'Eq. (3.18), peut être réécrite sous la forme :

$$\delta U_0: \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} = 0 \quad (3.18a)$$

$$\delta v_0: \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} = 0 \quad (3.18b)$$

$$\delta \omega_s: \frac{\partial^2 M_{xx}^b}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}^b}{\partial y^2} + q + f e = 0 \quad (3.18c)$$

$$\delta \omega_b: \frac{\partial^2 M_{xx}^s}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}^s}{\partial y^2} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q + f e = 0 \quad (3.18d)$$

En substituant l'Eq. (3.6a- 3.6c), dans l'Eq. (3.9a), et les résultats subséquents en l'Eq.(3.14a-3.14c), les contraintes résultantes d'une plaque FGM peuvent être liées aux déformations totales :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix} \quad (3.19)$$

où A, B, D, B^s, D^s et H^s sont les rigidités de la plaque de FG données par :

$$(A, B, D, B^s, D^s, H^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2, f, zf, f^2) C(z) dz \quad (3.20)$$

De même, en utilisant l'Eq (3.7a- 3.7c), (3.9b) et (3.14d), les forces transversales de cisaillement peuvent être calculées à partir des équations constitutives comme suit :

Chapitre 03 Formulation mathématique du problème étudié

$$\begin{Bmatrix} Qx \\ Qy \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{55}^S & 0 \\ 0 & A_{44}^S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

Ou bien sous une forme compacte en tant que :

$$Q = A^S \gamma^0 \quad (3.22)$$

Ou les rigidités de cisaillement A^S de la plaque FGM sont définies par :

$$A_{55}^S = A_{44}^S = \int_{-h/2}^{h/2} g^2(z) C_{44}(z) dz = \int_{-h/2}^{h/2} g^2(z) C_{55}(z) dz \quad (3.23)$$

En remplaçant l'Eq. (3.19) et (3.22) dans l'Eq. (3.18a- 3.18d), les équations gouvernantes peuvent être exprimées en termes de déplacements (δu_0 , δv_0 , δw_b et δw_s) comme suit :

$$\delta U_0: A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (A_{11} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - B_{11} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial y^2} - \quad (3.24a)$$

$$B_{11}^S \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} - (B_{12}^S + 2B_{66}^S) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial y^2} = 0$$

$$\delta V_0: A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} - B_{22} \frac{\partial^3 w_b}{\partial y^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_b}{\partial y \partial x^2} - \quad (3.24b)$$

$$B_{22}^S \frac{\partial^3 w_s}{\partial y^3} - (B_{12}^S + 2B_{66}^S) \frac{\partial^3 w_s}{\partial y \partial x^2} = 0$$

$$\delta W_b: B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x \partial y^2} + (B_{22}) \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} - D_{11}^S \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - \quad (3.24c)$$

$$D_{22}^S \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} - 2(D_{12}^S + 2D_{66}^S) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} + q + fe = 0$$

$$\delta W_s: B_{11}^S \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + (B_{12}^S + 2B_{66}^S) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + (B_{12}^S + 2B_{66}^S) \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial x^2} + B_{22}^S \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} \quad (3.24d)$$

$$\begin{aligned} & - D_{11}^S \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - D_{22}^S \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - 2(D_{12}^S + D_{66}^S) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} + A_{55}^S \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ & + A_{44}^S \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} - 2(H_{12}^S + 2H_{66}^S) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} - H_{11}^S \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - H_{22}^S \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} + q \\ & + fe = 0 \end{aligned}$$

3.4 Solution analytique de la plaque FG simplement supportée :

Ici, la solution de Navier est utilisée pour garantir les conditions aux limites simplement supportées, et le coefficient de déplacement est exprimé sous la forme d'une série de Fourier comme suit :

Chapitre 03 Formulation mathématique du problème étudié

$$u_0(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn}^0 \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \quad (3.25a)$$

$$v_0(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{mn}^0 \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \quad (3.25b)$$

$$w_b(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{bmn}^0 \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \quad (3.25c)$$

$$w_s(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{smn}^0 \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \quad (3.25d)$$

La charge transversale q est également développée en série sinusoïdale de Fourier comme suit :

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \quad (3.26)$$

Avec $(u_{mn}^0, v_{mn}^0, w_{bmn}^0 \text{ et } w_{smn}^0)$ sont les coefficients de déplacement maximum inconnu.

Et $\lambda = m\pi/a$ et $\mu = n\pi/a$ sont les pulsations, m et n sont les numéros des modes.

En remplaçant l'Eq. (3.24a- 3.24d), et (3.25) dans l'Eq. (3.25a- 3.25d). On obtient le système matriciel suivant :

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_{mn}^0 \\ v_{mn}^0 \\ w_{bmn}^0 \\ w_{smn}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{mn} \\ q_{mn} \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

Avec :

$$\begin{aligned} k_{11} &= A_{11}\lambda^2 + A_{66}\mu^2 \\ k_{12} &= (A_1 + A_{66})\lambda\mu \\ &\quad - (B_{12} + 2B_{66})\lambda\mu^2 \\ k_{14} &= -B_{11}^S\lambda^3 - (B_{12}^S + 2B_{66}^S)\lambda\mu^2 \\ k_{22} &= A_{66}\lambda^2 + A_{66}\mu^2 \\ k_{23} &= -B_{22}\mu^3 - (B_{12} + 2B_{66})\mu \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$k_{24} = -B_{22}^S \mu^3 - (B_{12}^S + 2B_{66}^S) \mu \lambda^2$$

$$k_{33} = D_{11} \lambda^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \lambda^2 \mu^2 + D_{22} \mu^4$$

$$k_{34} = D_{11}^S \lambda^4 + 2(D_{12}^S + 2D_{66}^S) \lambda^2 \mu^2 + D_{22}^S \mu^4$$

$$k_{44} = H_{11}^S \lambda^4 + 2(H_{12}^S + 2H_{66}^S) \lambda^2 \mu^2 + H_{22}^S \mu^4 + A_{55}^S \lambda^2 + A_{44}^S \mu^2$$

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté le modèle analytique pour syénitique de la flexion statique des plaques à gradation fonctionnelle simplement appuyées, reposant sur des fondations élastiques de type Winkler-Pasternak. La modélisation de la plaque s'appuie sur une théorie raffinée de déformation de cisaillement, utilisant une approche combinée sinusoïdale à quatre variables. Cette approche permet de considérer l'effet de cisaillement transverse sans nécessiter de facteurs de correction de cisaillement. Les équations définissant le comportement des plaques FGM sont dérivées grâce au principe des travaux virtuels et résolues via la méthode de Navier.

CHAPITRE 4. INTERPRETATION DES PRINCIPAUX RESULTATS

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons présenter un ensemble de résultats obtenu suite à l'exécution du code de calcul que nous avons développé en langage Maple. Ces résultats concernent la flexion d'une plaque FGM sous fondation élastique, comportant des porosités distribuées à travers son épaisseur. Maple est un logiciel de calcul symbolique qui offre un langage de programmation de haut niveau. Maple combine le moteur mathématique le plus puissant au monde avec une interface qui rend extrêmement facile l'analyse, l'exploration, la visualisation et la résolution de problèmes mathématiques grâce à ensemble de bibliothèques très complètes et sans cesse enrichi à chaque mise à jour du logiciel.

La présente analyse repose sur une théorie de déformation en cisaillement raffinée à quatre variables couplées à une fonction de forme trigonométrique qui a été introduite dans le **chapitre 3**.

Les variations de la flèche et des contraintes sont présentées sous forme des tableaux et des graphes. Les propriétés mécaniques de la plaque FGM poreuse varient travers son épaisseur selon deux lois de distribution de puissance : une loi P-FGM avec une distribution uniforme de la porosité (Type 1) et une distribution non uniforme de la porosité (Type 2). Le P-FGM est du type métal (aluminium)/céramique (alumine Al_2O_3). Pour valider le programme de calcul développé, certains résultats sont comparés à ceux publiés. Enfin, plus de résultats ont été obtenus permettant ainsi d'enrichir ceux présents travaux.

Les propriétés du matériau pour la phase céramique, Al_2O_3 , sont : $E_c=380$ GPa, $\nu_c=0,3$; et pour la phase métallique, Al : $E_m=70$ GPa. Les deux types de distributions de porosité, **uniforme** et **non uniforme**, exprimées comme suit.

Distributions de porosité uniforme (**Type 1**)

$$E(z) = (E_m + (E_c - E_m)V(z)) \times \left(1 - \alpha * \cos\left(\pi * \frac{z}{h}\right)\right) \quad (4.1)$$

Distributions de porosité non**uniforme** (**Type 2**)

$$E(z) = (E_m + (E_c - E_m)V(z)) \times \left(1 - \alpha * \cos\left(\pi * \frac{z}{2h} + \frac{\pi}{4}\right)\right) \quad (4.2)$$

Pour plus de commodité, les grandeurs sans dimension suivantes sont utilisées pour présenter les résultats numériques.

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \frac{100\rho}{q_0 a^4} w \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) & \bar{\sigma}_{xx} &= \frac{h}{q_0 a} \sigma_{xx} \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{z}{h}\right) & k_w &= \frac{a^4}{\rho} K_w \\ \bar{\tau}_{xy} &= \frac{h}{q_0 a} \tau_{xy} \left(0, 0, \frac{z}{h}\right) & \bar{\tau}_{xz} &= \frac{h}{q_0 a} \tau_{xz} \left(0, 0, \frac{z}{h}\right) & k_p &= \frac{a^2}{\rho} K_p \end{aligned}$$

$$\rho = \frac{hE_c}{12(1 - \mu^2)}$$

4.2 Résultats numériques et discussion

Les tableaux 4.1 – 4.2 représente l'effet de l'indice de la fraction volumique et des paramètres de fondation élastique sur la flèche et les contraintes adimensionnelles pour une plaque carrée en FGM simplement appuyées sous charge uniforme. Il est clair que la flèche et les contraintes axiales adimensionnelles augmentent à mesure que l'indice de la fraction volumique augmente. Cependant, les contraintes de cisaillement adimensionnelles diminuent à mesure que l'indice de la fraction volumique augmente.

De plus, la flèche et les contraintes diminuent avec l'existence des fondations élastiques. L'inclusion du paramètre de fondation Winkler donne de résultats plus élevés que l'inclusion des paramètres de fondation Pasternak. Comme le montre les tableaux, il existe un très bon accord avec les résultats obtenus par Zenkour, 2018.

Tableau (4.1) Flèche maximale des plaques carrées et rectangulaires sans fondations élastiques sous charge uniforme.

a/b	a/h	Présente	Zenkour, 2018
1	5	0.4901	0.4901
	10	0.4272	0.427
	25	0.4096	0.410
0.5	5	1.1426	1.043
	10	1.0453	1.045
	25	1.181	1.18

Tableau (4.2) Effets des paramètres de la fondation élastique sur la flèche adimensionnelle ($10\bar{w}$) d'une plaque carrée simplement appuyée en FGM sous charge uniforme

Kw	Kp	a/h	Présent	Zenkour, 2018
1	5	5	3.7035	3.7058
		10	3.3453	3.454
		200	3.2200	3.2200
	10	5	2.9802	2.805
		10	2.7503	2.7504
		200	2.6684	2.6684
	15	5	2.4901	2.4903
		10	2.3330	2.3330
		200	2.2763	2.2763
	20	5	2.1372	2.2765
		10	2.0243	2.0244
		200	1.9834	1.9834
3 ⁴	5	5	3.0850	3.0853
		10	2.8420	2.8421

	10	200	2.7552	2.7552
		5	2.5619	2.5620
		10	2.3982	2.3983
	15	200	2.3390	2.3389
		5	2.1891	2.1892
		10	2.0729	2.0730
	20	200	2.0306	2.0306
		5	1.9102	1.9103
		10	1.8244	1.8244
	5 ⁴	200	1.7932	1.7932
		5	1.4033	1.4032
		10	1.3785	1.3785
		200	1.3688	1.3688
		5	1.2812	1.2811
		10	1.2615	1.2615
		200	1.2543	1.2543
		5	1.1786	1.1786
		10	1.1627	1.1627
		200	1.1572	1.1572
	20	5	1.0913	1.0912
		10	1.0782	1.0782
		200	1.0740	1.0740

Tableau (4.3) Effets des paramètres de la fondation élastiquesur la flèche adimensionnelle ($10\bar{w}$) d'une plaque simplement appuyée en FGM sous charge uniforme

a/b	a/h	Méthode	(k_w, k_p)			
			(10,10)	(10,100)	(100,10)	(100,100)
0.50	5	Présente	5.5716	1.0371	4.0768	0.9679
		Zenkour, 2018	5.5718	1.0371	4.0769	0.9679
	10	Présente	5.3562	1.0330	3.9791	0.9649
		Zenkour, 2018	5.3562	1.0330	3.9791	0.9649
	100	Présente	5.2810	1.0320	3.9447	0.9643
		Zenkour, 2018	5.2811	1.0320	3.9447	0.9643
1	5	Présente	2.9267	0.6451	2.4786	0.6190
		Zenkour, 2018	2.9270	0.6451	2.4787	0.6190
	10	Présente	2.7058	0.6383	2.3271	0.6132
		Zenkour, 2018	2.7059	0.6383	2.3271	0.6132
	100	Présente	2.6276	0.6364	2.2724	0.6117
		Zenkour, 2018	2.6276	0.6364	2.2724	0.6117
2	5	Présente	0.7161	0.2207	0.6841	0.2174
		Zenkour,	0.7165	0.2207	0.6844	0.2174

		2018				
	10	Présente	0.5736	0.2069	0.5536	0.2041
		Zenkour, 2018	0.5736	0.2069	0.5536	0.2041
	100	Présente	0.5219	0.2013	0.5056	0.1987
		Zenkour, 2018	0.5219	0.2013	0.5056	0.1987

Dans cette partie, une analyse synthétique des résultats obtenus pour une plaque carrée en matériau à gradient fonctionnel (FGM) simplement appuyées sous charge uniforme et sous fondation élastique composée d' $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{Al}$, avec deux types de distribution de porosité. Les effets combinés, sur la flèche et les contraintes (normales et de cisaillement), de l'indice de fraction volumique (p), de la porosité (Types 1 et 2), et des fondations élastiques de Winkler et Pasternak sont étudiés. Les résultats sont regroupés dans les tableaux (4.4-4.7), dans tous les cas, une plaque carrée sous charge uniforme est considérée et un rapport $a/h=10$.

4.2.1 Effets de l'indice de fraction volumique (p)

Lorsque l'indice de fraction volumique p augmente, la proportion du matériau métallique augmente, ce qui réduit la rigidité de la plaque. On observe que :

- La flèche adimensionnelle augmente avec p (Tableau 4.4).
- La contrainte normale adimensionnelle augmente à mesure que p augmente p (Tableau 4.5).
- Les contraintes de cisaillement adimensionnelles (τ_{xz} , τ_{yz}) diminuent avec l'augmentation de p (Tableau 4.6 et 4.7).

4.2.2 Effets de la porosité

Pour les deux types de porosité sont considérés ; Porosité 1 et Porosité 2 ; et pour un même indice p .

- La flèche augmente avec la porosité, Porosité 2 produit des flèches plus élevées que Porosité 1 (Tableau 4.4).
- Les contraintes axiales et de cisaillement varient. La porosité 2 génère plus de déformation, mais parfois des contraintes moindres (Tableau 4.5-4.7).

4.2.3 Effets de la fondation élastique

L'inclusion de paramètres de fondation réduit fortement la flèche et les contraintes.

- Fondation de Winkler (K_w) : ressorts verticaux locaux, effet rigide.
- Fondation de Pasternak (K_p) : ajoute une interaction de cisaillement, effet modéré.
- Effet combiné Winkler + Pasternak est le plus efficace pour réduire les déformations.

Tableau (4.4) Comparaison de la flèche adimensionnelle de la plaque carrée sous charge uniforme

k_w	k_p	α	P					
			Type	0	1	2	5	10
0	0	0	Porosité 1	0.4665	0.9287	1.1940	1.4356	1.5876
			Porosité 2	0.4665	0.9287	1.1940	1.4356	1.5876
		0.1	Porosité 1	0.4852	0.9706	1.2463	1.4938	1.6482
			Porosité 2	0.5020	0.9994	1.2849	1.5449	1.7084
		0.2	Porosité 1	0.5055	1.0169	1.3041	1.5578	1.7149
			Porosité 2	0.5434	1.0817	1.3908	1.6723	1.8491
		0.3	Porosité 1	0.5278	1.0687	1.3687	1.6290	1.7890
			Porosité 2	0.5922	1.1788	1.5157	1.8225	2.0151
		0.4	Porosité 1	0.5524	1.1272	1.4416	1.7088	1.8720
			Porosité 2	0.6505	1.2950	1.6652	2.0023	2.2139
		0.5	Porosité 1	0.5799	1.1941	1.5251	1.7996	1.9665
			Porosité 2	0.7217	1.4367	1.8474	2.2216	2.4562
100	0	0	Porosité 1	0.3644	0.5950	0.6924	0.7649	0.8045
			Porosité 2	0.3644	0.5950	0.6924	0.7649	0.8045
		0.1	Porosité 1	0.3756	0.6117	0.7094	0.7806	0.8192
			Porosité 2	0.3856	0.6230	0.7217	0.7943	0.8337
		0.2	Porosité 1	0.3876	0.6295	0.7273	0.7971	0.8346
			Porosité 2	0.4095	0.6537	0.7534	0.8259	0.8649
		0.3	Porosité 1	0.4005	0.6487	0.7465	0.8146	0.8508
			Porosité 2	0.4365	0.6875	0.7879	0.8599	0.8984
		0.4	1 Porosité	0.4144	0.6694	0.7671	0.8332	0.8680
			Porosité 2	0.4674	0.7250	0.8257	0.8968	0.9344
		0.5	Porosité 1	0.4295	0.6919	0.7893	0.8531	0.8864
			Porosité 2	0.5028	0.7667	0.8670	0.9366	0.9730
0	10	0	Porosité 1	0.3009	0.4420	0.4933	0.5287	0.5473
			Porosité 2	0.3009	0.4420	0.4933	0.5287	0.5473
		0.1	Porosité 1	0.3085	0.4511	0.5018	0.5361	0.5540
			Porosité 2	0.3152	0.4572	0.5079	0.5425	0.5606
		0.2	Porosité 1	0.3165	0.4606	0.5106	0.5439	0.5610
			Porosité 2	0.3309	0.4734	0.5233	0.5571	0.5745
		0.3	Porosité 1	0.3250	0.4707	0.5200	0.5519	0.5683
			Porosité 2	0.3483	0.4908	0.5396	0.5723	0.5891
		0.4	Porosité 1	0.3340	0.4815	0.5298	0.5604	0.5760
			Porosité 2	0.3676	0.5095	0.5570	0.5884	0.6044
		0.5	Porosité 1	0.3438	0.4930	0.5402	0.5693	0.5840
			Porosité 2	0.3891	0.5297	0.5754	0.6053	0.6205
100	10	0	Porosité 1	0.2541	0.3466	0.3766	0.3959	0.4056
			Porosité 2	0.2541	0.3466	0.3766	0.3959	0.4056
		0.1	Porosité 1	0.2594	0.3521	0.3813	0.3998	0.4091
			Porosité 2	0.2642	0.3557	0.3848	0.4033	0.4126
		0.2	Porosité 1	0.2650	0.3577	0.3862	0.4038	0.4126
			Porosité 2	0.2751	0.3653	0.3933	0.4109	0.4197
		0.3	Porosité 1	0.2709	0.3636	0.3913	0.4080	0.4163
			Porosité 2	0.2869	0.3753	0.4021	0.4187	0.4270

		0.4	Porosité 1	0.2771	0.3698	0.3966	0.4123	0.4200
			Porosité 2	0.2997	0.3858	0.4112	0.4268	0.4345
		0.5	Porosité 1	0.2836	0.3762	0.4021	0.4167	0.4239
			Porosité 2	0.3137	0.3968	0.4207	0.4351	0.4421

Tableau (4.5) Comparaison de la Contrainte axiale adimensionnelles d'une plaque carrée sous charge uniforme.

k_w	k_p	P						
		α	Type	0	1	2	5	10
0	0	0	Porosité 1	2.8929	4.4740	5.2289	6.1497	7.3680
			Porosité 2	2.8929	4.4740	5.2289	6.1497	7.3680
		0.1	Porosité 1	3.0022	4.6281	5.3919	6.3153	7.5483
			Porosité 2	2.8941	4.4758	5.2310	6.1519	7.3704
		0.2	Porosité 1	3.1200	4.7918	5.5638	6.4883	7.7355
			Porosité 2	2.8954	4.4778	5.2334	6.1545	7.3731
		0.3	Porosité 1	3.2477	4.9660	5.7449	6.6686	7.9292
			Porosité 2	2.8970	4.4802	5.2362	6.1576	7.3764
		0.4	Porosité 1	3.3864	5.1510	5.9353	6.8564	8.1293
			Porosité 2	2.8989	4.4830	5.2396	6.1612	7.3803
		0.5	Porosité 1	3.5378	5.3471	6.1350	7.0509	8.3347
			Porosité 2	2.9013	4.4865	5.2437	6.1658	7.3852
100	0	0	Porosité 1	2.2084	2.7368	2.8571	3.0516	3.4548
			Porosité 2	2.2084	2.7368	2.8571	3.0516	3.4548
		0.1	Porosité 1	2.2696	2.7792	2.8841	3.0649	3.4613
			Porosité 2	2.1690	2.6545	2.7555	2.9296	3.3082
		0.2	Porosité 1	2.3339	2.8200	2.9077	3.0738	3.4624
			Porosité 2	2.1247	2.5641	2.6447	2.7976	3.1501
		0.3	Porosité 1	2.4017	2.8582	2.9267	3.0769	3.4565
			Porosité 2	2.0745	2.4641	2.5235	2.6543	2.9794
		0.4	Porosité 1	2.4729	2.8923	2.9392	3.0727	3.4419
			Porosité 2	2.0172	2.3529	2.3904	2.4982	2.7943
		0.5	Porosité 1	2.5475	2.9200	2.9429	3.0587	3.4159
			Porosité 2	1.9510	2.2286	2.2434	2.3277	2.5932
0	10	0	Porosité 1	1.8089	2.0117	2.0167	2.0994	2.3462
			Porosité 2	1.8089	2.0117	2.0167	2.0167	2.3462
		0.1	Porosité 1	1.8489	2.0284	2.0226	2.0975	2.3402
			Porosité 2	1.7581	1.9279	1.9227	1.9946	2.2251
		0.2	Porosité 1	1.8903	2.0430	2.0255	2.0924	2.3307
			Porosité 2	1.7022	1.8382	1.8232	1.8844	2.0983
		0.3	Porosité 1	1.9331	2.0546	2.0245	2.0833	2.3167
			Porosité 2	1.6404	1.7422	1.7178	1.7686	1.9655
		0.4	Porosité 1	1.9774	2.0620	2.0187	2.0694	2.2973
			Porosité 2	1.5719	1.6391	1.6059	1.6468	1.8264
		0.5	Porosité 1	2.0227	2.0638	2.0064	2.0493	2.2709
			Porosité 2	1.4954	1.5281	1.4871	1.5185	1.6806
100	10	0	Porosité 1	1.4969	1.5198	1.4711	1.4939	1.6482
			Porosité 2	1.4969	1.5198	1.4711	1.4939	1.6482

		0.1	Porosité 1	1.5226	1.5231	1.4666	1.4846	1.6361
			Porosité 2	1.4417	1.4417	1.3882	1.4051	1.5479
		0.2	Porosité 1	1.5488	1.5242	1.4595	1.4728	1.6213
			Porosité 2	1.3821	1.3595	1.3020	1.3134	1.4446
		0.3	Porosité 1	1.5754	1.5223	1.4492	1.4579	1.6031
			Porosité 2	1.3173	1.2731	1.2122	1.2186	1.3381
		0.4	Porosité 1	1.6022	1.5166	1.4349	1.4393	1.5809
			Porosité 2	1.2469	1.1821	1.1187	1.1207	1.2286
		0.5	Porosité 1	1.6288	1.5059	1.4154	1.4161	1.5538
			Porosité 2	1.1699	1.0863	1.0215	1.0197	1.1161

Tableau (4.6) Comparaison de la Contrainte de cisaillement adimensionnelles ($\bar{\tau}_{xy}$) d'une plaque carrée sous charge uniforme.

k_w	k_p	P						
		alpha	Type	0	1	2	5	10
0	0	0	Porosité 1	1.2844	1.1140	0.9903	1.0446	1.0689
			Porosité 2	1.2844	1.1140	0.9903	1.0446	1.0689
		0.1	Porosité 1	1.2646	1.1118	0.9871	1.0370	1.0590
			Porosité 2	1.2842	1.1138	0.9901	1.0445	1.0687
		0.2	Porosité 1	1.2431	1.1100	0.9841	1.0292	1.0488
			Porosité 2	1.2841	1.1135	0.9899	1.0443	1.0686
		0.3	Porosité 1	1.2198	1.1089	0.9816	1.0212	1.0382
			Porosité 2	1.2839	1.1132	0.9897	1.0441	1.0684
		0.4	Porosité 1	1.1942	1.1088	0.9797	1.0131	1.0274
			Porosité 2	1.2837	1.1128	0.9894	1.0439	1.0682
		0.5	Porosité 1	1.1660	1.1102	0.9789	1.0049	1.0162
			Porosité 2	1.2835	1.1124	0.9890	1.0437	1.0680
10	0	0	Porosité 1	1.0388	0.7648	0.6267	0.6168	0.6062
			Porosité 2	1.0388	0.7648	0.6267	0.6168	0.6062
		0.1	Porosité 1	1.0150	0.7530	0.6151	0.6028	0.5912
			Porosité 2	1.0242	0.7478	0.6106	0.5995	0.5884
		0.2	Porosité 1	0.9896	0.7408	0.6032	0.5881	0.5756
			Porosité 2	1.0078	0.7290	0.5931	0.5807	0.5691
		0.3	Porosité 1	0.9623	0.7282	0.5908	0.5727	0.5593
			Porosité 2	0.9892	0.7083	0.5739	0.5602	0.5482
		0.4	Porosité 1	0.9327	0.7152	0.5780	0.5566	0.5421
			Porosité 2	0.9679	0.6851	0.5527	0.5378	0.5254
		0.5	Porosité 1	0.9007	0.7018	0.5647	0.5396	0.5239
			Porosité 2	0.9433	0.6592	0.5293	0.5133	0.5006
0	10	0	Porosité 1	0.8719	0.5829	0.4583	0.4357	0.4201
			Porosité 2	0.8719	0.5829	0.4583	0.4357	0.4201
		0.1	Porosité 1	0.8474	0.5697	0.4466	0.4226	0.4066
			Porosité 2	0.8516	0.5634	0.4413	0.4182	0.4025
		0.2	Porosité 1	0.8215	0.5561	0.4344	0.4089	0.3927
			Porosité 2	0.8292	0.5424	0.4230	0.3995	0.3839

10 0	10	0.3	Porosité 1	0.7940	0.5421	0.4217	0.3947	0.3781
			Porosité 2	0.8044	0.5197	0.4035	0.3797	0.3642
		0.4	Porosité 1	0.7645	0.5274	0.4086	0.3799	0.3629
			Porosité 2	0.7768	0.4951	0.3825	0.3586	0.3432
		0.5	Porosité 1	0.7327	0.5122	0.3949	0.3643	0.3469
			Porosité 2	0.7457	0.4683	0.3599	0.3359	0.3208
	10	0	Porosité 1	0.7588	0.4821	0.3726	0.3496	0.3348
			Porosité 2	0.7588	0.4821	0.3726	0.3496	0.3348
		0.1	Porosité 1	0.7352	0.4697	0.3620	0.3381	0.3233
			Porosité 2	0.7370	0.4636	0.3571	0.3341	0.3196
		0.2	Porosité 1	0.7103	0.4569	0.3510	0.3263	0.3113
			Porosité 2	0.7132	0.4441	0.3408	0.3179	0.3036
		0.3	Porosité 1	0.6839	0.4437	0.3397	0.3140	0.2989
			Porosité 2	0.6873	0.4232	0.3236	0.3009	0.2869
		0.4	Porosité 1	0.6559	0.4301	0.3280	0.3012	0.2859
			Porosité 2	0.6588	0.4009	0.3053	0.2829	0.2693
		0.5	Porosité 1	0.6259	0.4159	0.3158	0.2877	0.2723
			Porosité 2	0.6275	0.3770	0.2859	0.2639	0.2508

Tableau (4.7) Comparaison de la contrainte de cisaillement adimensionnelles ($\bar{\tau}_{xz}$) d'une plaque carrée sous charge uniforme.

k_w	k_p	P						
		Alpha	Type	0	1	2	5	10
0	0	0	Porosité 1	0.5127	0.5127	0.4710	0.4185	0.4561
			Porosité 2	0.5127	0.5127	0.4710	0.4185	0.4561
		0.1	Porosité 1	0.5024	0.5024	0.4610	0.4087	0.4460
			Porosité 2	0.5127	0.5126	0.4710	0.4184	0.4561
		0.2	Porosité 1	0.4903	0.4903	0.4492	0.3973	0.4342
			Porosité 2	0.5127	0.5126	0.4709	0.4184	0.4561
		0.3	Porosité 1	0.4758	0.4758	0.4350	0.3836	0.4200
			Porosité 2	0.5127	0.5125	0.4709	0.4184	0.4560
		0.4	Porosité 1	0.4581	0.4581	0.4178	0.3670	0.4028
			Porosité 2	0.5127	0.5125	0.4708	0.4183	0.4560
		0.5	Porosité 1	0.4358	0.4358	0.3962	0.3463	0.3812
			Porosité 2	0.5127	0.5124	0.4707	0.4182	0.4560
100	0	0	Porosité 1	0.4268	0.3715	0.3190	0.2678	0.2827
			Porosité 2	0.4268	0.3715	0.3190	0.2678	0.2827
		0.1	Porosité 1	0.4156	0.3599	0.3083	0.2583	0.2730
			Porosité 2	0.4218	0.3646	0.3123	0.2617	0.2760
		0.2	Porosité 1	0.4028	0.3470	0.2964	0.2476	0.2621
			Porosité 2	0.4161	0.3570	0.3050	0.2551	0.2687
		0.3	Porosité 1	0.3880	0.3323	0.2828	0.2356	0.2499
			Porosité 2	0.4096	0.3487	0.2969	0.2478	0.2608
		0.4	Porosité 1	0.3704	0.3152	0.2672	0.2217	0.2358
			Porosité 2	0.4022	0.3393	0.2881	0.2399	0.2523
		0.5	Porosité 1	0.3492	0.2949	0.2488	0.2055	0.2192
			Porosité 2	0.3936	0.3289	0.2783	0.2312	0.2429

0	10	0	Porosité 1	0.3650	0.2920	0.2418	0.1961	0.2031
			Porosité 2	0.3650	0.2920	0.2418	0.1961	0.2031
		0.1	Porosité 1	0.3537	0.2811	0.2321	0.1877	0.1946
			Porosité 2	0.3577	0.2837	0.2342	0.1895	0.1959
		0.2	Porosité 1	0.3411	0.2690	0.2214	0.1785	0.1853
			Porosité 2	0.3497	0.2748	0.2261	0.1823	0.1883
		0.3	Porosité 1	0.3267	0.2556	0.2095	0.1683	0.1750
			Porosité 2	0.3407	0.2651	0.2173	0.1747	0.1801
		0.4	Porosité 1	0.3101	0.2403	0.1961	0.1568	0.1634
			Porosité 2	0.3307	0.2546	0.2079	0.1665	0.1714
		0.5	Porosité 1	0.2903	0.2227	0.1807	0.1437	0.1500
			Porosité 2	0.3194	0.2431	0.1977	0.1577	0.1620
100	10	0	Porosité 1	0.3254	0.2510	0.2057	0.1656	0.1709
			Porosité 2	0.3254	0.2510	0.2057	0.1656	0.1709
		0.1	Porosité 1	0.3146	0.2411	0.1971	0.1582	0.1635
			Porosité 2	0.3176	0.2432	0.1988	0.1596	0.1645
		0.2	Porosité 1	0.3026	0.2303	0.1877	0.1503	0.1555
			Porosité 2	0.3090	0.2348	0.1914	0.1533	0.1579
		0.3	Porosité 1	0.2891	0.2183	0.1773	0.1414	0.1466
			Porosité 2	0.2996	0.2258	0.1836	0.1467	0.1508
		0.4	Porosité 1	0.2735	0.2048	0.1657	0.1316	0.1366
			Porosité 2	0.2893	0.2162	0.1753	0.1396	0.1433
		0.5	Porosité 1	0.2553	0.1892	0.1523	0.1203	0.1252
			Porosité 2	0.2778	0.2058	0.1664	0.1320	0.1354

Le tableau (4.8) résume l'ensemble des effets observés.

Paramètre	Effet sur flèche	Effet sur contraintes	Remarques
Indice $p \uparrow$	$\uparrow$ significatif	$\sigma_x \uparrow, \tau \downarrow$	Moins de rigidité (métal $\uparrow$)
Porosité $\uparrow$	$\uparrow$ modéré à fort	σ_x varie selon type	Porosité 2 = plus déformable
Winkler $\uparrow$	$\downarrow$ flèche, $\downarrow$ contraintes	$\downarrow$ net si K_w élevé	Modèle local de ressort
Pasternak $\uparrow$	$\downarrow$ flèche, $\downarrow$ contraintes	Moins efficace que Winkler	Modèle avec interaction transverse

La figure 4.1 montre la variation de la contrainte axiale adimensionnelle à travers l'épaisseur la plaque carrées, pour deux valeurs de l'indice de la fraction volumique ($p=2$, $p=5$) et $a/h=10$. L'indice de porosité est pris égale à 0.50 dans les deux cas type 1 et type 2. La contrainte axiale est comprimée dans toute la plaque jusqu'à $z = 0.173$, puis elles se transforment en traction. Les contraintes de compression maximales se produisent en un point de la surface inférieure et les contraintes de traction maximales se produisent, bien sûr, en un point de la surface supérieure de la plaque FGM. De plus, il ressort de ces chiffres que la

fondation élastique a un effet significatif sur les valeurs maximales de la contrainte axiale. On observe que la contrainte normale augmente progressivement avec la diminution de k_w où k_p la distribution des porosités type 1 tend à donner de légèrement élevées par rapport au type 2.

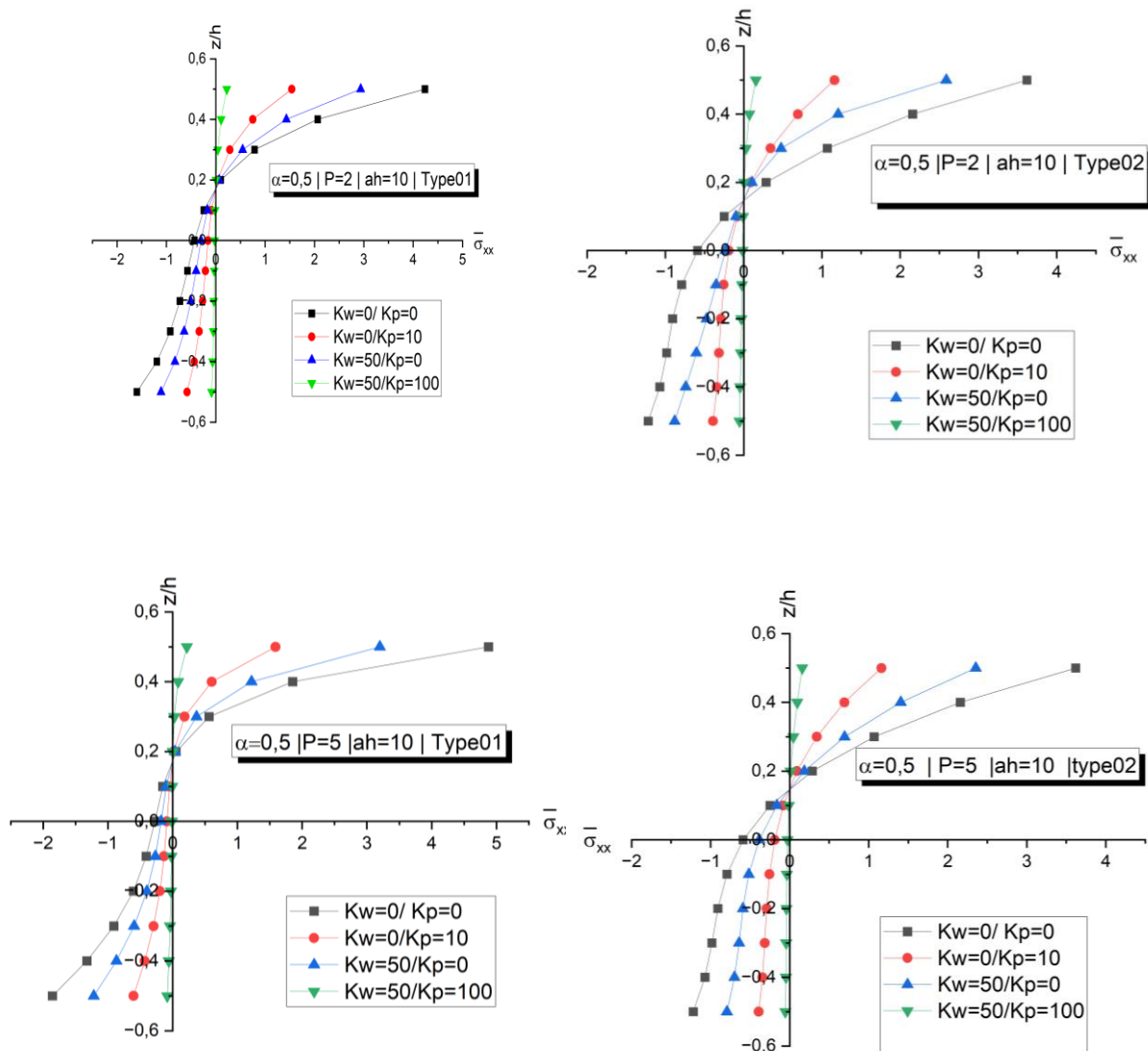


Figure (4.1) Effet des paramètres de la fondation élastique sur la contrainte axiale adimensionnelle d'une plaque poreuse carrée en FG.

Les figures 4.2 et 4.3 illustrent la répartition des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur des plaques FGM carrée sous des charges uniformes. L'indice de fraction volumique de la plaque FGM est pris égale $p = 2$ et 5 . On observe que la contrainte de cisaillement transverse augmente graduellement avec la diminution de k_w où k_p . Il est indiqué que de grands modules de fondation élastique peuvent améliorer la rigidité à la flexion de la plaque. Les distributions à travers l'épaisseur de la contrainte de cisaillement ne

sont pas paraboliques comme dans la plaque en matériau homogène. Il est à noter aussi que la valeur maximale se produit à $z = 0.3$ et 0.2 , et non pas au centre de la plaque comme dans le cas homogène

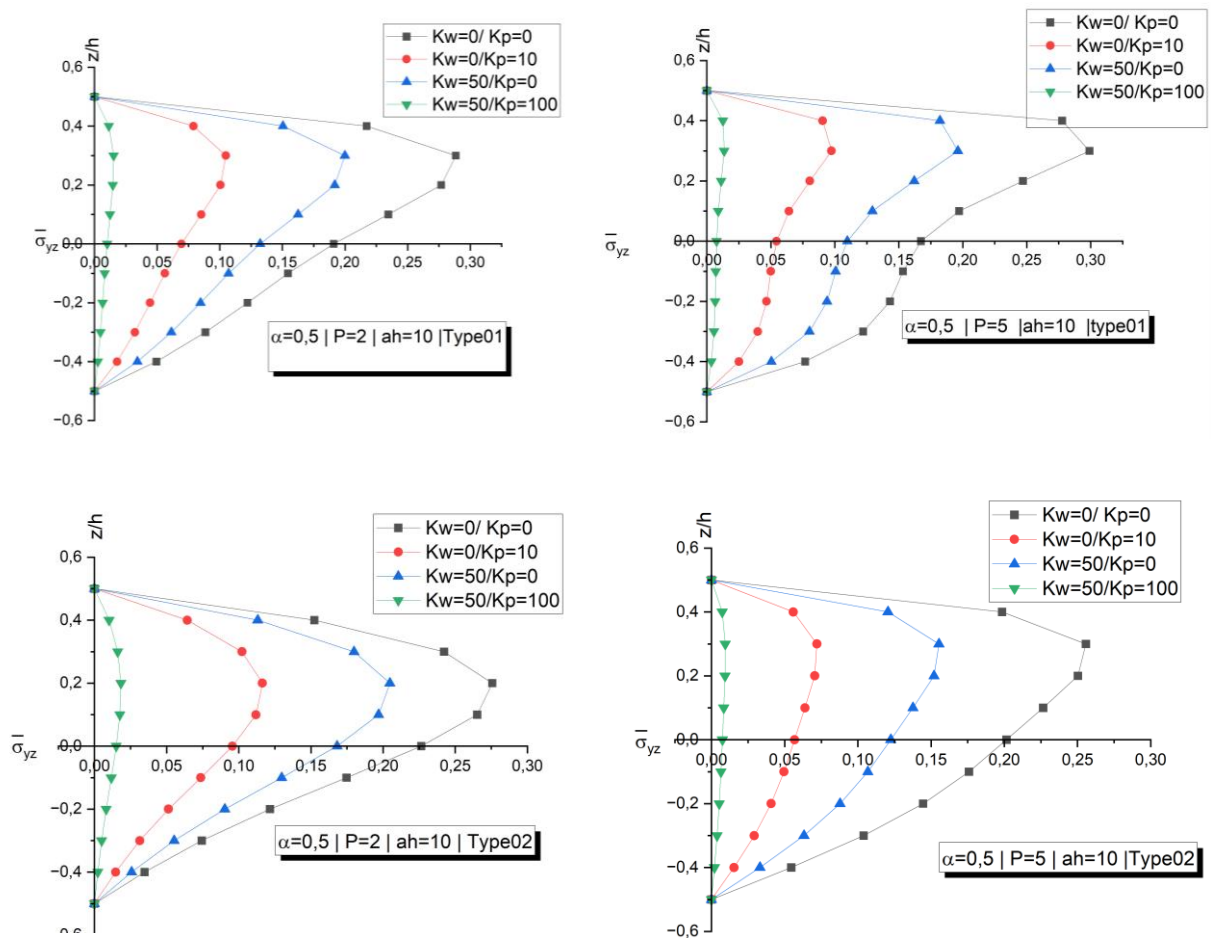


Figure (4.2) Effet des paramètres de la fondation élastique sur la contrainte de cisaillement adimensionnelle d'une plaque poreuse carrée en FGM

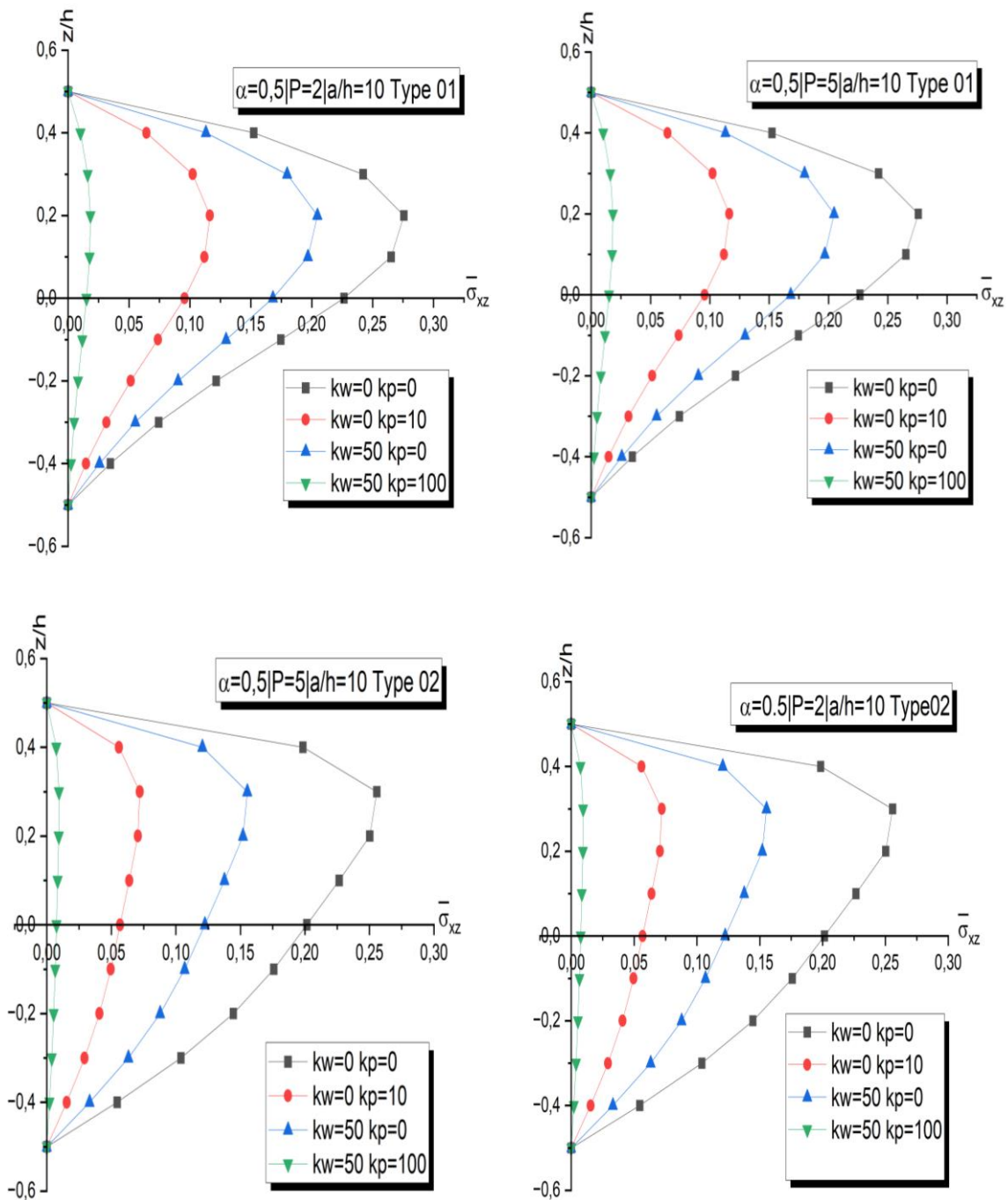


Figure (4.3) Effet des paramètres de la fondation élastique sur la contrainte de cisaillement adimensionnelle d'une plaque poreuse carrée en FGM

La figure (4.5) montre l'effet combiné du rapport (a/b) et de la forme de la distribution de porosité et des paramètres de la fondation élastique sur la flèche adimensionnelle des plaques poreuses en FGM. À partir de cette figure on remarque que la flèche adimensionnelle diminué en augmentant le rapport (a/b) de la plaque. La flèche pour

une plaque avec le modèle de distribution de porosité non uniforme (Type 2) est la plus élevée devant le modèle uniforme (Type 1) de plaques FGM. Un autre résultat de la (figure 4.4) montre que la différence entre les paramètres de la fondation élastique diminue de manière significative en augmentant le rapport de la plaque (a/b)

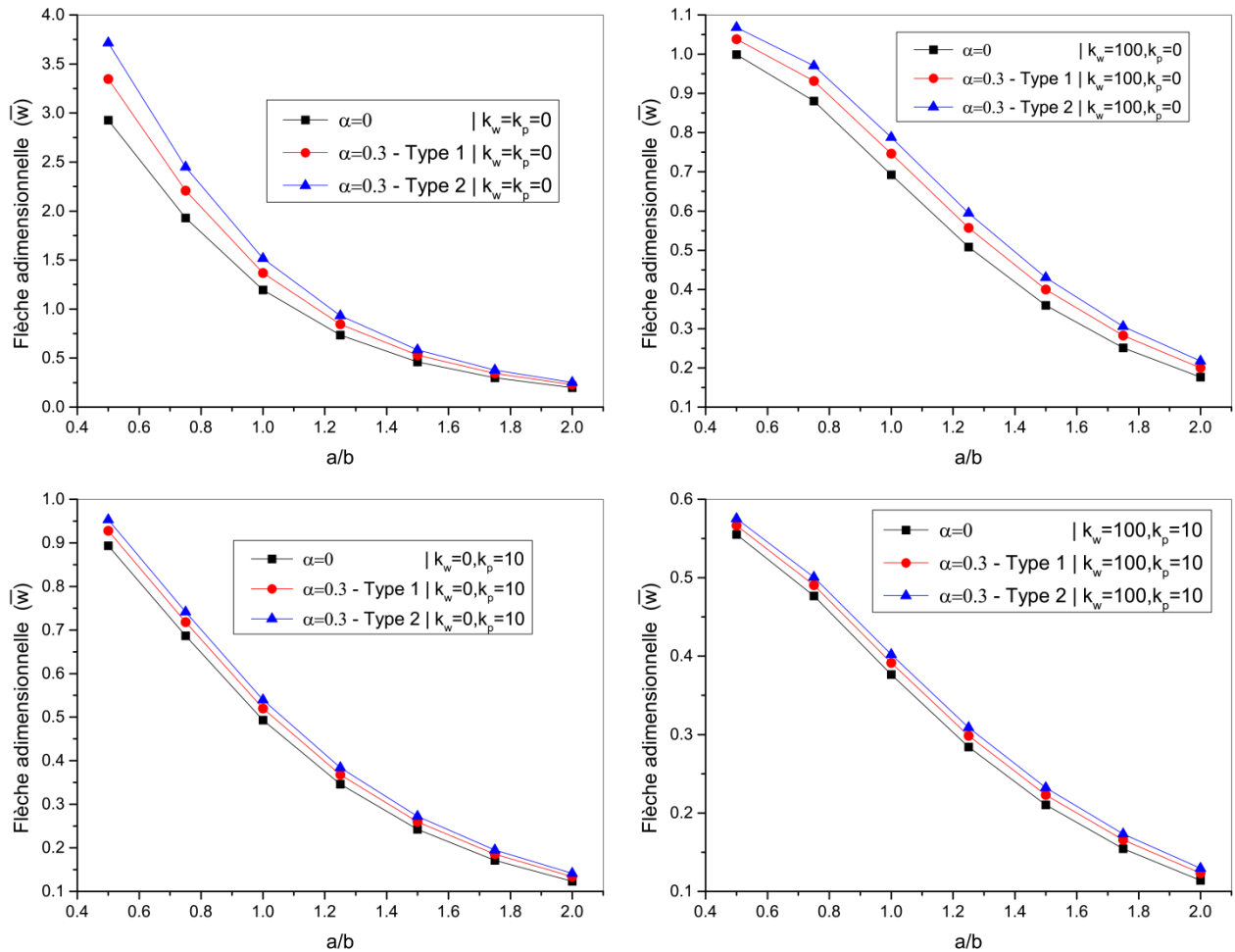


Figure (4.4) Effets des paramètres de la fondation sur la flèche adimensionnelle en fonction du rapport d'aspect a/b des plaques poreuses ($a = 10h$, $P=2$).

Dans la figure (4.5), nous présentons l'effet des paramètres de la fondation élastique sur la flèche adimensionnelle d'une plaque poreuse carrée en FGM pour différente valeur du rapport (a/h). Il est à noter que l'effet de des paramètres de la fondation élastique sur la flèche est très significatif en augmentant le rapport a/h (lorsque la plaque devient plus mince).

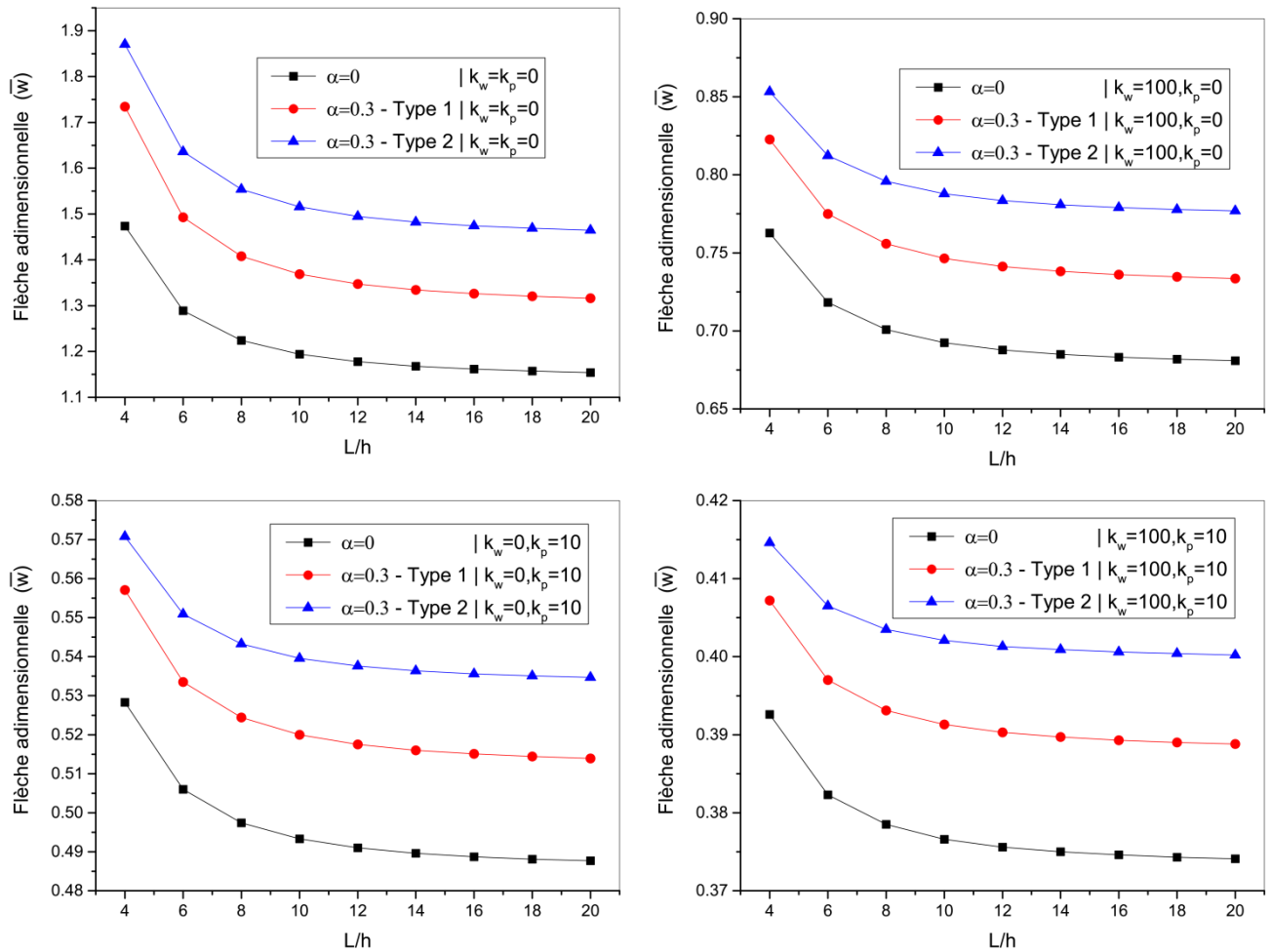


Figure (4.5) Effets des paramètres de la fondation sur les flèches adimensionnelle en fonction du rapport longueur/épaisseur a/h de plaque poreuse carrée ($P=2$).

4.3 Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté les résultats de l'analyse du comportement statique des plaques poreuses en matériau FGM. L'étude s'est basée sur l'effet de la fondation élastique sur la flexion de la plaque FGM en utilisant la théorie de cisaillement trigonométrique à quatre variables. Deux formes de distribution de porosité à travers l'épaisseur de la plaque sont utilisées. La méthode Navier est utilisée pour résoudre le problème. L'effet des paramètres de la fondation élastique et du coefficient de porosité, des types de porosité, du rapport entre le côté et l'épaisseur sur la flexion des plaques de FGM sont étudiés. Les résultats numériques montrent que des paramètres de la fondation élastique ont un effet significatif sur les déflexions des plaques FGM ainsi que sur les contraintes normales et de cisaillement développées dans la plaque.

Conclusion générale

L'objectif de ce projet de fin d'étude était d'étudier le comportement de flexion des plaques poreuses en matériaux fonctionnellement gradués « FGM » sous fondation élastique.

En premier lieu, nous avons élaboré les équations d'équilibre, on se base sur un champ de déplacement à quatre inconnus, cette théorie de cisaillement d'ordre élevé prend en considération la distribution parabolique des contraintes de cisaillement dans la plaque en matériaux à gradient de propriétés.

En second lieu, des résultats numériques sont présentés dans le dernier chapitre sous forme des tableaux et des graphes qui représentent la variation des déplacements et des contraintes sous différents paramètres et les conclusions tirées de cette étude sont les suivantes :

On voit que la réponse fondamentale des plaques qui correspondent à des propriétés intermédiaires à celle du métal et de la céramique se situe nécessairement entre celle de la céramique et celle du métal.

Ainsi, les gradients dans les propriétés des matériaux jouent un rôle important dans la détermination de la réponse des plaques de FGM. Les résultats montrent que les déformations et les contraintes diminuent progressivement au fur et à mesure que k_w ou k_p augmente.

Perspectives :

- Étendre l'application de la présente approche à l'analyse du comportement vibratoire et au flambement des plaques.
- Utiliser cette même approche pour étudier la flexion, la vibration et le flambement des poutres et des nano et micro structures.
- Appliquer à l'étude des plaques fonctionnellement graduées de type S-FGM et E-FGM.

Références bibliographiques

Afaq (2003), Développement d'un nouveau modèle pour les structures composites multicouches et sandwichs Avec prix en Compte du cisaillement transversal et des effets de bord. PhD thesis, Université Toulouse III –Paul Sabatier

Ait Atmane (2010), Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory. *Int. J. Mechs. Mat. Des.* 6 113-121.

Ambartsumyan (1969), Theory of anisotropic plate, Tech Publishing Co.

Attia (2015), Contribution à l'étude de la vibration libre des plaques FGM dans un champ thermique , thèses de doctorat université de DJILLALI LIABES SIDI BEL ABBES, Algérie.

Boch (1986), Tape casting of Al₂O₃/ZrO₂ laminated Composites, *J. Am. Ceram". Soc* ; 69 (8) :191 -192, (1986).

Chung et Chi, 2006, Mechanical Behavior of Functionally Graded Material Plates under Transverse Load, *International Journal of Solids and Structures*, Volume 43, Issue 13, Pages: 3657-3674.

Dau (2006), Plaque de C1 et shell éléments finis pour l'analyse géométriquement non linéaire de structures multicouche. *Computers and Structures*, 84:1264-1274.

Kaddouri (2014), Analyse des effets de l'amplitude et température sur le comportement non linéaire d'une plaque annulaire sectorielle à gradient fonctionnel » thèses de doctorat université de Université Aboubakar Belkadi– Tlemcen.

Kant (2002), Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory. *Composite. Structure*; 56 (4): 329-344.

Khemis (2018), Etude de l'influence des incertitudes de l'interaction sol-structure sur le flambement des conduites flexibles enterrées dans un sol élastique » thèses de doctorat université de BADJI MOKHTAR- ANNABA, Algérie.

Koizumi (1992), Recent Progress of functionally graded, in Japan. *Ceram. Eng. Sci. Proc*; 13 (7-8): 333, 347.

Koizumi (1996), FGM activities in Japan, department of materials chemistry. Ryukoku University, Ohtsu, 520-21 Japan.

Koizumi (1997), FGM activities in Japan. *Composites*; 28 (1-2): 1– 4.

Références bibliographiques

Mindlin (1951), Influence of Rotary Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic Elastic Plates", Journal of applied mechanics, 18 31-38.

Murthy (1981), Rapport technique, NASA. Une théorie de déformation de cisaillement transversal amélioré pour plaque anisotrope laminé.

Nguyen (2007), Shear correction factors of functionally graded plates. Mech. Advanced Mater. Struct; 14 (8): 567-575.

Nelson (1974) ; Une théorie raffinée pour plates orthotrope stratifié ASME Journal of Applied Mechanics, Vol.41, pages 177-183, (1974).

Okamura (1991), State of the arte of material design projects for severe service applications, Mater. Sci. Eng :A; 143 (1-2): 3-9.

Pasternak (1954), on a new method of analysis of elastic foundation by means of two foundation constants. gosudarstvennoe izdatelstvo literatury inzhenerov i arkhitektov,

Rayleigh (1877), "The theory of sound", The Macmillan Company

Reddy (1984), A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates", ASME Journal of Applied Mechanics, 745-752.

Reddy (1997), Mechanics of Laminated Composites Plates: Theory and Analysis. CRC Press, Boca Raton.

Reddy (1999), Theory and Analysis of Elastic plates. Taylor & Francis, Philadelphia, (1999).

Reissner (1945), The effect of transverse sheared formation on the bending of elastic plates", Journal of Applied Mechanics-transactions of The ASME, 69-77.

Sun (2011), The wave propagation and dynamic response of rectangular functionally graded material plates with completely clamped supports under impulse load", European Journal of Mechanics – A/Solids, **30**, 396–408.

Touratier (1991), Un efficace theory de plaque standard. Eng Ing Sci, vol. 29, no 8, pages 901-916.

Winkler (1867), Theory of Elasticity and Strength, Dominicus, Prague.

Yoshihisa (2004), Properties of functionally graded materials, Manufactured by Progressive Lamination Method for Applications, 39-51-B, Vol. 39-B.

Yin(2004) , Micromechanics-based elastic model for functionally graded materials with particle interactions », Acta Materialia, 52,3535–3543.

Zenkour (2018), Compressive study of functionally graded plates resting on Winkler–Pasternak foundations under various boundary conditions using hyperbolic shear deformation theory, *arc hives of civil and mechanical engineering* 18, 645 – 658

Zenkour (2006), Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates, *Appl Math Model*, 30(1), 67–84.

Zenkour (2007), Benchmark trigonometric and 3-D elasticity solutions for an exponentially graded thickrectangular plate. *Archive of Applied Mechanics*, 77(4), 197–214.