

**RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE**

UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN DE TIARET



FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES

DÉPARTEMENT GÉNIE CIVIL

Mémoire de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme de Master

Spécialité : Génie Civil

Option : Structures

Présenté par :

BENBAKHTI Aicha

Sujet du mémoire

***Etude de la stabilité des structures sandwichs en
matériaux composites avancés***

Soutenu publiquement le 28 juin 2025 devant le jury composé de :

M. TLIDJI Youcef	Pr.	U.Tiaret	Président
M. DRAICHE Kada	Pr.	U.Tiaret	Encadrant
M. FELLOUH Mohamed	Doctorant	U.Tiaret	Co-Encadrant
M. BENFERHAT Rabia	MCA	U.Tiaret	Examineur
Mlle. OUAZIR Khatima	MCB	U.Tiaret	Examinatrice

PROMOTION: 2024/2025



Remerciements

Avant tout, Un immense merci à mon encadrant monsieur Draiche Kada, pour sa disponibilité, ses conseils avisés, son soutien constant tout au long de ce travail. Son exigence et sa rigueur scientifique ont grandement enrichi cette recherche. Ce fut un grand honneur pour moi d'être son étudiante et d'avoir bénéficié de sa supervision pour mon projet de fin d'études. Ainsi que son humanité et ses encouragements m'ont été d'une aide précieuse dans la réalisation de ce travail. Je n'aurais pas pu accomplir cela seule sans lui. Je le remercie sincèrement d'avoir été à mes côtés.

Je remercie également l'ensemble des enseignants de département de génie civil pour la richesse de l'enseignement dispensé et leur engagement, et leurs conseils, qui ont contribué à mon apprentissage tout au long de mon parcours.

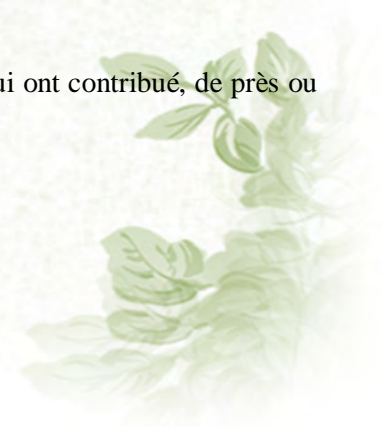
Je tiens à remercier très chaleureusement les membres du jury d'avoir accepté d'évaluer ce travail.

J'exprime une grande gratitude à Monsieur Mekeroussi Saïd le chef département de génie civil et Monsieur FELLOUH Mohamed, Madame Mimouni et monsieur Hadji Lazrag. Je les remercie sincèrement pour toute l'aide qu'ils m'ont apportée.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance sincère et profonde à mes parents. Merci à toi, ma merveilleuse maman, d'avoir été là depuis mon enfance jusqu'à aujourd'hui. Tu m'as donné du courage dans les moments les plus difficiles. Merci pour ta foi en mes capacités. Merci à toi, mon père, mon soldat, pour tous tes sacrifices. Tu joues un rôle immense dans ma vie.

Je souhaite également remercier mon Frère Khaled, Merci pour votre encouragement et votre soutien répétés, en particulier pour son soutien constant tout au long de ces années d'études, et un grand merci à mes amis.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à toutes les personnes qui ont contribué, de près ou de loin, à l'élaboration de ce mémoire de fin d'études.



*D*édicace

Je tiens à rendre un hommage rempli d'amour et de gratitude à ma chère grand-mère, que Dieu ait son âme. Qu'Allah lui accorde Sa miséricorde, Lui pardonne ses péchés, et lui ouvre les portes du plus haut degré du paradis – Al-Firdaws Al-A'la.

Je veux dédier cette graduation à:

Ma chère mère et mon inestimable père

Mon précieux frère

Je souhaite dédier cette réussite à la mémoire de ma grand-mère.

Spécial dédicace à Monsieur Draiche Kada

Spécial dédicace à Monsieur dahame

Et tous ceux qui m'aiment et que j'aime

Résumé

Cette étude présente une nouvelle théorie affinée des plaques monocouches équivalentes à quatre inconnues pour l'analyse de la stabilité des plaques sandwichs à gradient fonctionnel (FGM). Ces plaques sont soumises à des conditions de chargement mécanique dans le plan, tous les bords étant simplement appuyés. Le modèle proposé considère une variation parabolique de la contrainte de cisaillement transversale à travers l'épaisseur et s'adapte de manière optimale à des conditions de contrainte de cisaillement nulle sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Les propriétés du matériau sont supposées varier régulièrement dans l'épaisseur grâce à des règles de mélange appelées gradation en loi de puissance. Les équations d'équilibre sont formulées sur la base du principe de l'énergie potentielle totale et résolues pour des conditions limites simplement appuyées en appliquant la méthode de Navier. Les résultats numériques sur le flambement en utilisant la présente théorie ont été calculés et comparés à ceux publiés dans la littérature afin d'examiner la précision de la solution analytique proposée. Les effets de l'exposant en loi de puissance, du rapport géométrique et du rapport d'épaisseur sur la charge critique de flambement des plaques à gradient fonctionnel pour diverses conditions de chargement dans le plan sont étudiés en détail. De plus, il a été constaté que les paramètres géométriques et l'exposant de la loi de puissance jouent un rôle important sur le comportement de flambement des plaques sandwichs en FGM.

Mots-clés :

Théorie raffinée de plaque, FGM, Flambement, Chargement mécanique, Méthode de Navier.

ملخص

تقدم هذه الدراسة نظرية جديدة ومُحسّنة للصفائح أحادية الطبقة المكافئة، تتضمن أربعة مجاهيل، لتحليل استقرار صفائح الساندويتش المُدرجة وظيفيًا (FGM). تخضع هذه الصفائح لظروف تحميل ميكانيكية مستوية مع دعم بسيط لجميع حوافها. يأخذ النموذج المقترح في الاعتبار التباين المكافئ لإجهاد القص المستعرض عبر السُمك، ويتوافق بشكل مثالي مع ظروف إجهاد القص الصفري على السطحين العلوي والسفلي للصفحة. يُفترض أن تتغير خصائص المادة بسلاسة عبر السُمك من خلال قواعد خلط تُسمى التدرج بقانون القوة. تُصاغ معادلات التوازن بناءً على مبدأ إجمالي الطاقة الكامنة، وتُحل لظروف حدودية مُدعمة ببساطة بتطبيق طريقة نافير. حُسبت النتائج العددية للانبعاج باستخدام النظرية الحالية، وقُورنت بالنتائج المنشورة في المراجع العلمية، وذلك لفحص دقة الحل التحليلي المقترح. دُرست بالتفصيل آثار أُس قانون القوة، والنسبة الهندسية، ونسبة السُمك على حمل الانبعاج الحرج للصفائح المُدرجة وظيفيًا في ظل ظروف تحميل مستوية مُختلفة. علاوة على ذلك، وجد أن المعلمات الهندسية وأُس قانون القوة تلعب دوراً مهماً في سلوك الانبعاج لألواح الساندويتش FGM.

الكلمات المفتاحية: نظرية صفيحة محسنة، المواد المتدرجة وظيفيًا، الانبعاج، التحميل الميكانيكي، طريقة نافير

Abstract

This study presents a new refined four-unknown equivalent single-layer plate theory for stability analysis of functionally graded plates (FGMs). These plates are subjected to in-plane mechanical loading conditions with all edges simply supported. The proposed model considers a parabolic variation of transverse shear stress through the thickness and optimally adapts to conditions of zero shear stress on the top and bottom surfaces of the plate. The material properties are assumed to vary smoothly across the thickness due to mixing rules known as power-law gradation. The governing equilibrium equations are formulated based on the total potential energy principle and solved for simply supported boundary conditions by implementing the Navier method. Numerical results on buckling using the present theory were calculated and compared with those published in the literature to examine the accuracy of the proposed analytical solution. The effects of power law exponent, geometric ratio and thickness ratio on the critical buckling load of functionally graded plates for various in-plane loading conditions are studied in detail. Furthermore, it was found that geometric parameters and power law exponent play a significant role on the buckling behavior of FGM plates.

Keywords: Refined plate theory, FGM, Buckling, Mechanical loading, Navier method.

Liste des notations

$\{ \}$	Vecteur colonne
$[]$	Matrice
a	Longueur de la plaque sandwich
b	Largeur de la plaque sandwich
h	L'épaisseur de la plaque sandwich
E_c, E_m	Module d'élasticité longitudinale du céramique et métal, respectivement.
$E(z)$	Module d'élasticité de la plaque sandwich en FGM en fonction de « z »
ν	Coefficient de Poisson
$\nu(z)$	Coefficient de Poisson en fonction de « z »
G	Module de cisaillement transversal
u, v, w	Les déplacements suivant les directions x, y et z
$u_0, v_0,$	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
$f(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$f'(z)$	La première dérivée de la fonction de gauchissement par rapport à z
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Contraintes normales suivant les directions x, y et z
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	Contraintes de cisaillement
$\varepsilon_x, \varepsilon_y$	Déformations dans les directions x et y
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	Déformations de distorsion
$\delta u_0, \delta v_0, \delta w, \delta \theta$	Champ virtuel de déplacement
N_x, N_y, N_{xy}	Efforts normaux de membrane
M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b	Moments de flexion pure
M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s	Moments de flexion supplémentaire due au cisaillement transverse
K_x^b	Courbure de flexion suivant x
K_x^s	Courbure de cisaillement suivant x
K_y^b	Courbure de flexion suivant y
K_y^s	Courbure de cisaillement suivant y

K_{xy}^b	Courbure de flexion suivant xy
K_{xy}^s	Courbure de cisaillement suivant xy
Q_{yz}^s, Q_{xz}^s	Effort de cisaillement pur
m, n	Nombres de modes
A_{ij}	Termes de rigidité en membrane de la plaque
B_{ij}	Termes de rigidité de couplage de la plaque
D_{ij}	Termes de rigidité de flexion de la plaque
A_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
B_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
D_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
H_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
Ω	La surface supérieure
Q_{ij}	Les coefficients de rigidité
∂	Dérivée partielle
i, j	Nombres naturels

Liste des figures

Figure I.1 : (A) Nombre annuel de publications traitant les matériaux à classement fonctionnel (FGM), (B) Élaboration de savoir concernant les matériaux classés fonctionnellement par pays [1].	8
Figure I.2: Variation du module de Young $E(z)$ dans une plaque P-FGM.	13
Figure I.3: Variation du module de Young $E(z)$ dans une plaque S-FGM.	14
Figure I.4 : Variation du module de Young $E(z)$ dans une plaque P-FGM	15
figure I.5: Variation continue de la microstructure.	16
Figure I.6: Techniques d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés	17
Figure I.7 : Éléments en matériaux à gradient fonctionnel FGMs dans l'industrie aérospatiale.	19
Figure I.8 : Diverses applications des matériaux à gradient fonctionnel[7].	20
Figure II 1 : Illustration de la plaque de Love Kirchhoff [36].....	26
Figure II 2 : Cinématique de la plaque de Reissner-Mindlin[3].	27
Figure II.3 : Illustration de la plaque d'ordre élevé[3]	28
Figure II.4 : Variation $f(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur	29
Figure II.5 : Variation de la dérivée $f'(z)$ des différents modèles suivant l'épaisseur.	30
Figure III.1: Système de coordonnées et géométrie des plaques sandwich FG.....	34
Figure III.2: Variation du module de Young à travers l'épaisseur d'une plaque sandwich FG (Type A: noyau dur) pour différents rapports d'épaisseur peau-âme-peau.	35
Figure III.3: Variation du module de Young à travers l'épaisseur d'une plaque sandwich FG (Type B: noyau souple) pour différents rapports d'épaisseur peau-âme-peau.....	36
Figure IV.1: Plaques sandwichs FG soumises à des forces de compression dans le plan.	48
Figure IV.2: Variation de la charge critique adimensionnelle du flambement en fonction du rapport côté/épaisseur (ha/h) dans une plaque sandwich FG rectangulaire de type A (noyau dur) avec une configuration de couche 1-2-1	52
Figure IV.3: Variation de la charge critique adimensionnelle du flambement en fonction du rapport côté/épaisseur (a/h) dans une plaque sandwich FG rectangulaire de type B (noyau souple) avec une	55
Figure IV.4: Variation de la charge critique adimensionnelle du flambement en fonction du paramètre de loi de puissance (p) dans une plaque sandwich FG carrée de type A (noyau dur) avec une configuration de couche 2-	58
Figure IV.5: Variation de la charge critique adimensionnelle du flambement en fonction du paramètre de loi de puissance (p) dans une plaque sandwich FG carrée de type B (noyau souple) avec une configuration de couche 2-1-2.	59

Liste des tableaux

Tableau I.1 Progrès de la recherche sur les matériaux FGM au Japon.	9
Tableau I.2 : les propriétés physiques et mécaniques des matériaux FGMs.....	11
Tableau I.3 : les procédés industriels les plus utilisés dans la fabrication des produits FGMs	17
Tableau II.1 : Comparaison entre les différents modèles et les différentes fonctions de cisaillement de la FGM et des théories de plaques isotropes[3].....	27
Tableau IV. 1 : Coordonnées d'épaisseur de quatre types de plaques sandwichs FG.....	48
Tableau IV. 2 : La charge critique adimensionnelle du flambement uniaxial (\bar{N}_{cr}) dans une plaque sandwich FG carrée de type A (noyau dur). $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0, a/h = 10$	49
Tableau IV. 3 : La charge critique adimensionnelle du flambement uniaxial (\bar{N}_{cr}) dans une plaque sandwich FG carrée de type B (noyau souple). ($\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0, a/h = 10$)	51
Tableau IV. 4 : La charge critique adimensionnelle du flambement uniaxial (\bar{N}_{cr}) dans une plaque sandwich FG rectangulaire de type A (noyau dur) avec une configuration de couche 1-2-1. ($\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0, p = 2$)	53
Tableau IV. 5 : La charge critique adimensionnelle du flambement uniaxial (\bar{N}_{cr}) dans une plaque sandwich FG rectangulaire de type B (noyau souple) avec une configuration de couche 1-2-1. ($\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0, p = 2$)	54
Tableau IV. 6 : La charge critique adimensionnelle du flambement uniaxial (\bar{N}_{cr}) dans une plaque sandwich FG carrée de type A (noyau dur) avec une configuration de couche 2-1-2. ($\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0$)	56
Tableau IV. 7 : La charge critique adimensionnelle du flambement uniaxial (\bar{N}_{cr}) dans une plaque sandwich FG carrée de type B (noyau souple) avec une configuration de couche 2-1-2. ($\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0$)	57
Tableau IV. 8 : La charge critique adimensionnelle du flambement bi-axial (\bar{N}_{cr}) dans une plaque sandwich FG carrée de type A (noyau dur). $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 1, a/h = 10$	60
Tableau IV. 9 : La charge critique adimensionnelle du flambement bi-axial (\bar{N}_{cr}) dans une plaque sandwich FG carrée de type A (noyau souple). $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 1, a/h = 10$	61

Tableau IV. 10 : La charge critique adimensionnelle du flambement bi-axial (\bar{N}_{cr}) dans une plaque sandwich FG rectangulaire de type A (noyau dur) avec une configuration de couche 1-2-1. ($\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 1, p = 2$)	62
Tableau IV. 11 : La charge critique adimensionnelle du flambement bi-axial (\bar{N}_{cr}) dans une plaque sandwich FG rectangulaire de type B (noyau souple) avec une configuration de couche 1-2-1. ($\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 1, p = 2$)	63
Tableau IV. 12 : La charge critique adimensionnelle du flambement bi-axial (\bar{N}_{cr}) dans une plaque sandwich FG carrée de type A (noyau dur) avec une configuration de couche 2-1-2. ($\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 1$)	64
Tableau IV. 13 : La charge critique adimensionnelle du flambement bi-axial (\bar{N}_{cr}) dans une plaque sandwich FG carrée de type B (noyau souple) avec une configuration de couche 2-1-2. ($\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 1$)	65

Table de matière

Remerciement	I
Dédicace	II
Résumé	III
المخلص	IV
Abstract	V
Liste des notation et symbole	VI
Liste des figures	VIII
Liste des tableaux.....	X
Introduction	02

CHAPITRE I : Généralités sur les matériaux composites

I.1 Introduction	7
I.2 Historique sur le développement des matériaux FGM :	8
I.3 Concept des matériaux fonctionnellement gradués :	10
I.4 Propriétés physiques et mécaniques des FGM :	10
I.5 Lois régissant la variation des propriétés matérielles des structures FGM.....	11
I.5.1 Propriétés matérielles de la plaque P-FGM.....	12
I.5.2 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM.....	13
I.5.3 Propriétés matérielles de plaque E-FGM	14
I.5.4 Loi de mélange.....	15
I.6 Méthodes de fabrication des FGMs	16
I.7 Exemples de secteurs d'application des composites.....	18
I.8 Conclusion	21

CHAPITRE II : Les différentes Théories des plaques

II.1 Introduction :	24
II.2 Equivalent single-layer approach	24
II.2.1 Théorie classique des plaques (CPT) :	25
II.2.2 Théorie de premier ordre des plaques (FSDT)	26
II.2.3 Théorie d'ordre supérieur (HSDT) :	27
II.2.4 Théorie des plaques affinées (RPT).....	30
II.3 Conclusion.....	31

CHAPITRE III : Analyse de la stabilité des plaques sandwichs en FGM	
III.1. Introduction.....	33
III.2. Formulation théoriques.....	33
III.2.1 Configuration géométrique et concept de la plaque sandwich FG.....	33
III.2.2 Propriétés matérielles d'une plaque sandwich FG.....	34
III.2.3 Champ de déplacement et relations constitutives.....	37
III.2.4 Equations différentielles d'équilibres.....	40
III.2.5 Solution de Navier pour les plaques sandwichs FG.....	43
III.3 Conclusion.....	45
CHAPITRE IV : Résultats et discussions	
IV.1. Introduction.....	47
IV.2. Exemples numériques et discussions.....	47
IV.2.1 Flambement uniaxial des plaques sandwichs FG.....	48
IV.2.2 Flambement bi-axial des plaques sandwichs FG.....	59
IV.3 Conclusion.....	66
Conclusion générale.....	68
Bibliographie.....	70

Introduction générale

Introduction générale

De nos jours, les structures composites stratifiées sont largement utilisées dans de nombreux ouvrages d'art en raison de leurs propriétés structurelles attrayantes. Les structures composites stratifiées sont souvent soumises à des problèmes de délaminage. Ce problème peut être évité en utilisant des structures composées de matériaux composites avancés tels que les matériaux à gradient fonctionnel (FGM). Les matériaux à gradient fonctionnel sont formés en faisant varier les propriétés des matériaux selon un gradient spécifique. La variation des propriétés des matériaux peut être unidirectionnelle ou bidirectionnelle. Ces structures sont soumises à différents types de chargements tels que statiques (hors plan et dans le plan) et dynamiques. L'analyse de la flexion de ces structures est effectuée pour les charges hors plan, l'analyse du flambement pour les charges dans le plan et l'analyse des vibrations pour les charges dynamiques. Par conséquent, une analyse structurelle précise des plaques sandwich à gradient fonctionnel (FG) est nécessaire pour prédire leur comportement correct en matière de flexion, de flambement et de vibration. Dans cette optique, les chercheurs ont développé des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevé pour l'analyse structurelle des plaques sandwich composées en FGM. La théorie classique des plaques (CPT) développée par Kirchhoff [1] et la théorie de la déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) développée par Mindlin [2] ne sont pas adéquates pour l'analyse des plaques sandwichs épaisses en FGM. La CPT néglige l'effet de la déformation en cisaillement, tandis que la FSDT ne satisfait pas aux conditions d'absence de contrainte de cisaillement sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Cela a conduit au développement de méthodes d'ordre élevé (HSDT) pour l'analyse des plaques sandwichs. Les recherches sur les théories d'ordre élevé pour les poutres et plaques composites stratifiées et sandwich sont bien documentées par Sayyad et Ghugal [3,4]. De plus, Jha et al. [5], Swaminathan et al. [6] et Sayyad et Ghugal [7] ont présenté une revue critique sur la modélisation et l'analyse des poutres et plaques FG.

Swaminathan et Naveenkumar [8] ont présenté une analyse du flambement des plaques sandwich FG en utilisant des théories de déformation en cisaillement du troisième ordre. Des solutions analytiques pour les charges critiques de flambement sont obtenues en utilisant la procédure de solution de Navier. Meiche et al. [9] ont présenté une analyse du flambement et des vibrations libres de plaques sandwich FG symétriques et antisymétriques en utilisant la théorie raffinée de déformation en cisaillement hyperbolique à quatre variables (RHSDT).

Mantari et Monge [10] ont obtenu des solutions analytiques pour le comportement de flambement, de vibration libre et de flexion des plaques sandwichs FG simplement appuyées en utilisant une formulation unifiée hyperbolique basée sur la formule unifiée de Carrera (CUF). Zenkour [11,12] ont présenté une analyse de la flexion, du flambement et des vibrations libres de plaques sandwich FG en utilisant des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevé. Des solutions analytiques sont obtenues en utilisant la solution de type Navier. Neves et al. [13] ont développé la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé en considérant l'effet de l'étirement de l'épaisseur pour l'analyse statique, de vibration libre et de flambement des plaques sandwichs FG par une technique sans maillage. La méthode CUF est utilisée pour obtenir les équations régissant et les conditions aux limites associées qui sont ensuite interpolées par des fonctions de base radiales pour obtenir un système algébrique d'équations. Nguyen et al. [14] ont développé une nouvelle théorie de déformation de cisaillement trigonométrique inverse (TSDT) pour l'analyse statique, de flambement et de vibration libre des plaques sandwichs FG. Les déplacements, les contraintes, les charges critiques de flambement et les fréquences naturelles sont obtenues en utilisant la procédure de solution de Navier. Akavci [15] a développé une nouvelle théorie hyperbolique du cisaillement et de la déformation normale des plaques pour l'analyse du comportement statique, la vibration libre et le flambement des plaques sandwichs FG simplement appuyées reposant sur des fondations élastiques. Les solutions en forme fermée sont obtenues en utilisant la technique de Navier. Meziane et al. [16] ont développé une théorie de plaques à quatre variables pour l'analyse du flambement et des vibrations libres des plaques sandwich à gradient exponentiel. Nguyen et al. [17] ont développé une théorie des plaques de déformation de cisaillement hyperbolique à quatre variables pour l'analyse statique et dynamique des plaques sandwichs FG symétriques et antisymétriques en utilisant la méthode de Navier et la méthode des éléments finis. Meksi et al. [18] ont développé une nouvelle HSDT à cinq variables et obtenu des solutions analytiques pour l'analyse statique et vibratoire, ainsi que pour l'analyse du flambement des plaques sandwich FG. Neves et al. [19] ont étudié l'effet de l'étirement de l'épaisseur sur l'analyse du flambement des plaques sandwichs FGM. Pour ce faire, ils ont utilisé une technique sans maillage basée sur la collocation avec des fonctions de base radiales. Nguyen et al. [20] ont étudié la vibration et le flambement des plaques sandwichs FG avec une rigidité de cisaillement transversal améliorée basée sur la FSDT. Sayyad et Ghugal [21] ont développé une théorie unifiée de la déformation en cisaillement pour l'analyse de la flexion des poutres et des plaques monocouches en fibres de verre.

Récemment, Sayyad et Ghugal [22] ont présenté une analyse de la flexion des poutres et des plaques sandwichs FG en utilisant des théories à cinq degrés de liberté. Nguyen et al. [14] ont présenté une analyse des vibrations et du flambement des plaques sandwichs en fibre de verre en utilisant la théorie de la déformation en cisaillement du premier ordre. Merdaci et al. [23] ont développé une théorie des plaques à quatre inconnues pour l'analyse de la flexion des plaques sandwichs FG. Fekrar et al. [24] ont développé une théorie des plaques à quatre inconnues pour l'analyse du flambement des plaques composites en fibre de verre. Tounsi et al. [25] ont développé une théorie des plaques de type non polynomial à trois inconnues pour l'analyse du flambement des plaques sandwich FG. Abdelaziz et al. [26] ont développé une HSDT simple pour le flambement des plaques sandwich FG avec diverses conditions aux limites. Tounsi et al. [27] et Achouri et al. [28] ont développé une nouvelle théorie d'ordre élevé des plaques pour l'analyse du flambement des plaques sandwichs isotropes et orthotropes qui contient des termes intégraux indéterminés et quatre variables inconnues. Mahmoud et Tounsi [29] ont développé une théorie des plaques d'ordre élevé à cinq variables prenant en compte les effets de l'étirement de l'épaisseur pour l'analyse du flambement des plaques sandwichs FG. Bourada et al. [30] ont développé une théorie des plaques d'ordre élevé à quatre variables pour l'analyse du flambement des plaques sigmoïdes en fibre de verre. Soltani et al. [31] ont développé une nouvelle théorie des plaques d'ordre élevé pour l'analyse du flambement des plaques FG reposant sur des fondations élastiques.

Dans cette étude, une nouvelle théorie d'ordre élevé à quatre variables a été utilisée pour traiter le problème mécanique du flambement des plaques sandwichs FG. La présente théorie considère une distribution parabolique de la contrainte de cisaillement transversale à travers l'épaisseur, et satisfait exactement les conditions aux limites sur les surfaces libres de la plaque sans nécessiter de facteur de correction de cisaillement. Les propriétés des plaques sont supposées varier régulièrement dans la direction de l'épaisseur par le biais des règles de mélange appelées gradation en loi de puissance. Les équations régissant les plaques sandwichs FG sont dérivées en utilisant le principe de l'énergie potentielle totale. Ensuite, la solution analytique du problème de flambement des plaques soumises à des conditions de charge uniaxiale et bi-axiale a été trouvée en utilisant la méthode de Navier. Les résultats obtenus calculés par le présent modèle pour la charge critique de flambement sont vérifiés en les comparant à d'autres résultats publiés dans la littérature.

La rédaction de notre mémoire se compose de quatre chapitres :

- ✓ Le premier chapitre, consiste à présenter une étude bibliographique sur la nouvelle classe de composites désignés par les matériaux à gradient fonctionnel, en discutons sur la recherche scientifique pour le développement de ces derniers ainsi que leurs intérêts à travers les secteurs de l'industrie moderne.
- ✓ Dans le deuxième chapitre nous décrivons selon une synthèse historique récente, les fameuses tendances concernant la formulation des différentes théories des plaques correspondantes. L'étude repose sur les travaux réalisés durant la dernière décennie.
- ✓ Le troisième chapitre est consacré plus particulièrement à une étude analytique du comportement statique de flambement des plaques sandwichs en matériaux à gradient fonctionnel, en utilisant une théorie raffinée parabolique à quatre variables qui tient en considération l'effet de déformation en cisaillement à travers l'épaisseur des plaques.
- ✓ Le quatrième chapitre est également réservé pour commenter les résultats numériques obtenus par la validation de la présente modèle d'ordre élevé. Une conclusion générale sur l'ensemble de ces travaux permet de revenir sur les résultats importants mis en avant. C'est aussi l'occasion d'évoquer diverses perspectives dans le cadre de l'étude des effets des différents types de chargement et de conditions d'appuis sur le comportement mécanique des plaques sandwichs en FGM.

Chapitre I

Généralités sur les matériaux à gradient fonctionnel

Chapitre I : Généralités sur les matériaux à gradient fonctionnel

I.1 Introduction

La science des matériaux a toujours été l'un des domaines les plus importants de la recherche scientifique qui se développe rapidement au fil du temps. La raison en est que les chercheurs de différents domaines se concentrent sur les progrès et l'amélioration du comportement de ces matériaux afin de poursuivre l'exploration et l'invention, car les matériaux à gradation fonctionnelle sont devenus plus courants et plus utilisés à la fin du XX^e siècle, ce qui a amené tous les pays du monde à s'intéresser à l'étude de ces matériaux et à connaître leur comportement dans diverses conditions. Le récent regain d'intérêt pour les MGF s'explique par le fait qu'elles sont utilisées dans des applications de haute technologie. L'intérêt récent pour les FGM est dû à la volonté de créer des matériaux dotés de qualités spécifiques qui sont de bons candidats pour une variété d'applications de haute technologie, notamment dans les secteurs du nucléaire, de la bio-ingénierie et de l'aérospatiale. Par conséquent, au cours des 20 dernières années, le nombre de publications dans ce domaine d'étude a augmenté rapidement (voir Figure I.1) [32].

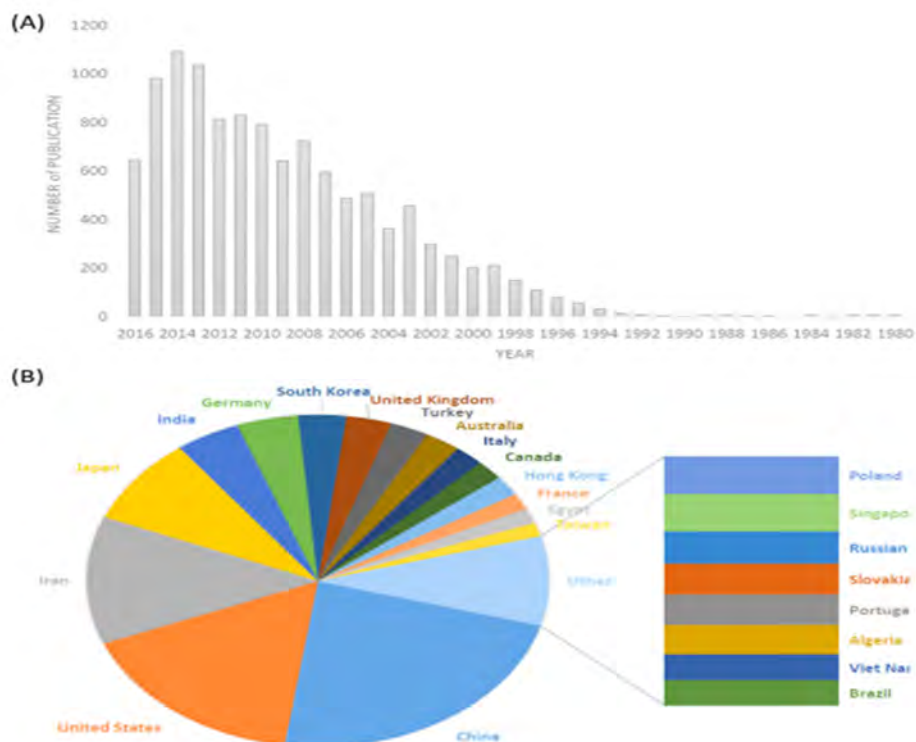


Figure I.1 : (A) Nombre annuel de publications traitant les FGMs, (B) Élaboration de savoir concernant les FGMs [32].

Le concept d'employer des composites à gradient fonctionnel pour des buts techniques a vu le jour au début des années 1980. À cette époque, à la suite d'essais, il a été établi que les composites conventionnels ne suffisaient pas [33]. Les scientifiques ont exprimé le besoin d'un matériau composite spécifique qui pourrait supporter des températures très hautes. Ils ont été contraints de se rediriger vers le secteur aéronautique. De ce fait, les FGMs présentent une multitude d'applications possibles dans divers secteurs.

I.2 Historique sur le développement des matériaux FGM :

Comme nous l'avons mentionné, les matériaux à gradient fonctionnel ont été proposés au Japon au début des années 1980 pour améliorer l'adhérence et réduire les contraintes thermiques dans les composites métallo-céramiques utilisés dans les moteurs de fusée réutilisables. Afin de créer de meilleurs composants dotés de meilleures qualités physiques, les concepts de matériaux à gradient fonctionnel sont appliqués aux métaux, aux céramiques et aux composites organiques, ce qui suscite une activité de recherche à l'échelle mondiale [33]. Elle peut être résumée dans plusieurs conférences scientifiques organisées dans différentes parties du monde.

C'est en 1984 que le Dr Niino, accompagné d'autres chercheurs de la région de Sendai au Japon, a lancé l'idée de développer des matériaux destinés à servir de barrières thermiques dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion. En 1986, une recherche de faisabilité concernant la technologie fondamentale pour l'élaboration des matériaux à gradient fonctionnel (FGM) destinés à atténuer les contraintes thermiques a été initiée sous le parrainage de l'Agence pour la science et la technologie (STA). Entre 1987 et 1989, un projet de recherche national a été réalisé sur ce même sujet, constituant la première partie de la phase I du développement des FGM. Le premier colloque sur les FGM a été mis en place par le Forum des matériaux à gradient fonctionnel (FGMF) en 1988. En 1989, une conférence germano-nipponne concernant les FGM a été organisée à Cologne, en Allemagne.

Le premier symposium international sur les FGMs s'est tenu à Sendai, au Japon, en 1990. Ce fut également l'occasion de fonder le Comité consultatif International des MGF (IACFGM), qui a ensuite donné lieu à la phase I, partie 2 du projet. En 1992, une nouvelle étude de faisabilité a été réalisée pour la recherche et le développement des FGM en tant que matériaux fonctionnels, toujours sous la supervision du STA. L'année suivante, le second symposium international sur les FGMs, accompagné d'un atelier international incluant le

Japon, l'Allemagne et les États-Unis, a eu lieu à San Francisco, aux États-Unis. En 1993, une initiative nationale de recherche a débuté portant sur les matériaux de conversion d'énergie ayant une structure FGM, signant ainsi le début de la phase II, section 1 du programme. Le troisième symposium international consacré aux FGM s'est déroulé à Lausanne, en Suisse, en 1994. En 1995, un séminaire trilatéral Japon-Russie-Ukraine, dénommé ENECOM-95, a eu lieu à Sendai et a également traité des matériaux de conversion d'énergie. Finalement, en 1996, la ville scientifique de Tsukuba au Japon a accueilli le quatrième colloque international dédié aux FGMs [34].

Tableau I.1 : Progrès de la recherche sur les matériaux FGM au Japon.

Année	Progrès de recherche sur les FGM
1984	Idée pour la conception des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion initiée par Dr Niino et d'autres scientifiques dans la région de Sendai, (Japon).
1986	Etude de faisabilité sur la technologie de base pour le développement des FGM sur la relaxation des contraintes thermiques sous le patronage de la science et de l'agence de technologie (STA).
1987-1989	Recherche nationale de projet sur la technologie de base pour le développement des FGM sur la relaxation des contraintes thermique. FGM partie I-phase (1).
1988	Fonctionnellement gradient matériaux forum (FGMF) 1 ^{er} Colloque sur FGM organisé par FGMF.
1989	Conférence d'Allemagne-Japon (FGM) à Köln, (Allemagne).
1990	1 ^{er} Colloque international sur FGM à Sendai, (Japon). Comité consultatif international de FGM (IACFGM).
1990-1991	FGM partie I-phase (2).
1992	Etude de faisabilité sur la R & D de FGM en tant que matériaux fonctionnels sous l'auspice du STA. 2 ^{ème} colloque international sur FGM et atelier international Japon Allemagne-USA à San Francisco, (USA).
1993	Projet de recherche national sur les matériaux de conversion d'énergie avec une structure FGM, FGM partie II- phase(1).
1994	3 ^{ème} colloque international sur FGM à Lausanne, (Suisse).
1995	Atelier : Japon-Russie-Ukraine sur des matériaux de conversion d'énergie (ENECOM-95),(Sendai).
1996	4 ^{ème} colloque international sur FGM dans la ville de la science de Tsukuba, (Japon)

I.3 Concept des matériaux à gradient fonctionnel

Les matériaux à gradient fonctionnel sont des matériaux avancés caractérisés par une variation progressive de leur composition à travers leurs dimensions, entraînant une évolution continue de leurs propriétés physiques afin de répondre à des exigences fonctionnelles spécifiques. Cette performance est obtenue grâce à une répartition contrôlée des constituants au niveau de la microstructure, permettant une transition fluide entre les propriétés des différents matériaux [35]. Ce type de gradation offre ainsi la possibilité d'intégrer plusieurs fonctions au sein d'un même matériau de manière efficace, comme illustré aux **Figures I.2 a et b**. Grâce à cette distribution progressive, ils permettent d'atténuer les concentrations de contraintes aux interfaces, réduisant ainsi les risques de délaminage. Ce type de structure graduelle est particulièrement adapté lorsque les deux faces d'une pièce sont soumises à des conditions thermiques opposées : la face supérieure exposée à de hautes températures est constituée entièrement de céramique, tandis que la face inférieure, à basse température, est composée de métal, avec une transition progressive entre les deux [36]. L'association céramique-métal dans les FGMs permet ainsi d'optimiser les performances globales du matériau, ce qui en fait des solutions de choix dans des domaines avancés [37].

I.4 Propriétés physiques et mécaniques des FGM

Lors de la conception des matériaux à gradient fonctionnel, le choix des constituants repose sur les caractéristiques physiques propres à chaque matériau (**Figure I.3**). Les FGMs sont principalement composés de deux catégories de matériaux : les métaux et les céramiques. Les métaux offrent de nombreux atouts. Ils sont généralement de très bons conducteurs thermiques et électriques, en plus d'être rigides, résistants, et capables de subir des déformations plastiques. De plus, plusieurs métaux possèdent des températures de fusion élevées. Parmi les métaux fréquemment utilisés dans les FGM, on retrouve notamment le fer, le nickel, le tungstène, le titane, le magnésium et l'aluminium [38]. Les céramiques, de leur côté, sont obtenues à partir d'une combinaison d'éléments métalliques tels que l'aluminium, le nickel, le titane ou encore le zirconium, associés à des éléments non métalliques, principalement l'oxygène. Ces matériaux sont privilégiés dans les environnements extrêmes, notamment ceux exposés à des températures très élevées, et grâce à la transition progressive des particules le long d'une direction donnée il devient possible d'obtenir une distribution optimale de la température, de la déformation et des contraintes dans la structure. Cette capacité d'ajustement s'avère essentielle lors de la conception de composants soumis à des

environnements thermiques extrêmes, notamment dans le domaine aéronautique et spatial (moteurs, tuyères, revêtements thermiques, etc.). Ce concept a également été exploité pour améliorer la résistance à la fatigue thermique ainsi que la durée de vie des revêtements pare-feu [36, 39]. La majorité des FGMs sont ainsi constitués d'un alliage céramique-métal, dont les propriétés mécaniques sont présentées dans la suite de ce travail (**Tableau I.2**).

Tableau I.2 : les propriétés physiques et mécaniques des matériaux FGMs.

Type de propriété	Métal	Céramique
Propriétés physiques	Température de fusion : 660 °C	Masse volumique : 3960 kg/m ³
	Masse volumique : 2702 kg/m ³	Bonne stabilité à haute température
	Métal blanc, devient réfléchissant après polissage	Perte de plasticité après cuisson (transformation irréversible)
	Très ductile (facile à former)	Propriétés influencées par les matières premières et le procédé de fabrication
Propriétés mécaniques	Résistance à la traction	Module de Young élevé (liaisons ioniques et covalentes)
	Dureté (résistance à la pénétration)	Dureté élevée (résistance à l'usure)
	Malléabilité (mise en feuilles)	Bonne résistance à la compression 200 MPa
	Ductilité (mise en fils)	Faible résistance à la traction
	Bonne robustesse mécanique	Rigidité élevée
Autres caractéristiques	Excellente conductivité thermique	Résistance chimique et à la corrosion
	Léger, idéal pour le transport et l'aéronautique	Utilisée dans l'aéronautique, le médical, la métallurgie, le bâtiment

I.5 Lois régissant la variation des propriétés matérielles des structures FGM

Les matériaux à gradient fonctionnel (FGM) sont considérés comme des systèmes multi-phases et multi composants, caractérisés par une interpénétration efficace entre les différents constituants à l'échelle moléculaire. Leur particularité réside dans la variation progressive des propriétés d'un composant, que ce soit physiquement ou chimiquement, à travers la section du matériau [35]. On peut représenter ces matériaux comme un empilement infini de couches, chacune possédant sa propre composition, microstructure et propriétés spécifiques. Les variations de ces propriétés sont généralement décrites à l'aide de fonctions mathématiques représentant l'évolution des fractions volumiques, telles que les fonctions exponentielles,

puissances ou sigmoïdes, en fonction de l'application visée et de la méthode de fabrication utilisée. Une présentation minutieuse pour analyser l'impact des modèles micromécaniques sur la réaction des plaques en FGMs [41]. Dans le contexte qui nous préoccupe, nous faisons appel aux trois techniques d'homogénéisation couramment utilisées dans les études récentes, conçues pour examiner le comportement statique et dynamique des plaques en FGMs. Pour l'évaluation du module de Young $E(z)$, nous mentionnons les méthodes suivantes :

I.5.1 Propriétés matérielles de la plaque P-FGM

La fraction volumique dans les structures P-FGM suit une fonction déterminée par une loi de puissance formulée comme :

$$V(z) = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p \quad (\text{I.1})$$

Le paramètre p représente une caractéristique propre au matériau, tandis que h correspond à l'épaisseur de la structure, qu'il s'agisse d'une plaque ou d'une poutre. Une fois la distribution volumique locale $v(z)$ définie, il est alors possible de déterminer les propriétés matérielles d'un matériau à gradient fonctionnel **P-FGM** en appliquant la loi des mélanges.

$$E(z) = V(z)E_1 + [1 - V(z)]E_2 \quad (\text{I.2})$$

Où E_1 et E_2 sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure $z = -h/2$ et de la surface supérieure $z = h/2$ de la plaque FGM, la variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la Figure I.4, il apparaît clairement que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour $p < 1$, et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour $p > 1$.

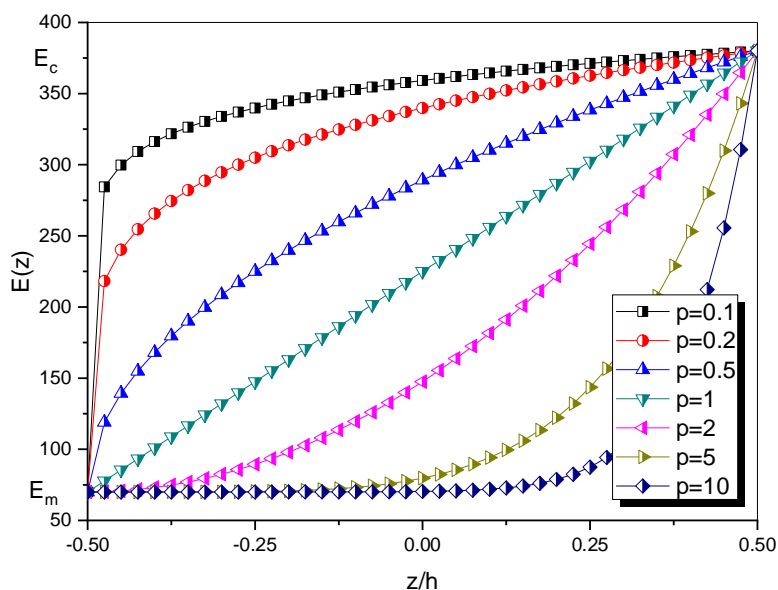


Figure I.2: Variation du module de Young $E(z)$ dans une plaque P-FGM.

I.5.2 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

En 2003, Chi and Chung ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces, car Dans le cas d'ajouter une plaque P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interfaces où le matériau est continu mais change rapidement [42]. Les deux fonctions de loi de puissance sont définis par :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 + z}{h/2} \right)^p \quad \text{pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.3})$$

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - z}{h/2} \right)^p \quad \text{pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.4})$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque peut être calculé par :

$$E(z) = V_1(z)E_1 + [1 - V_1(z)]E_2 \quad \text{pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.5})$$

$$E(z) = V_2(z)E_1 + [1 - V_2(z)]E_2 \quad \text{pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.6})$$

La Figure I.5 montre clairement la variation du module de Young selon les équations basées sur des distributions sigmoïdes, ce qui conduit à désigner la structure FGM résultante sous l'appellation de S-FGM.

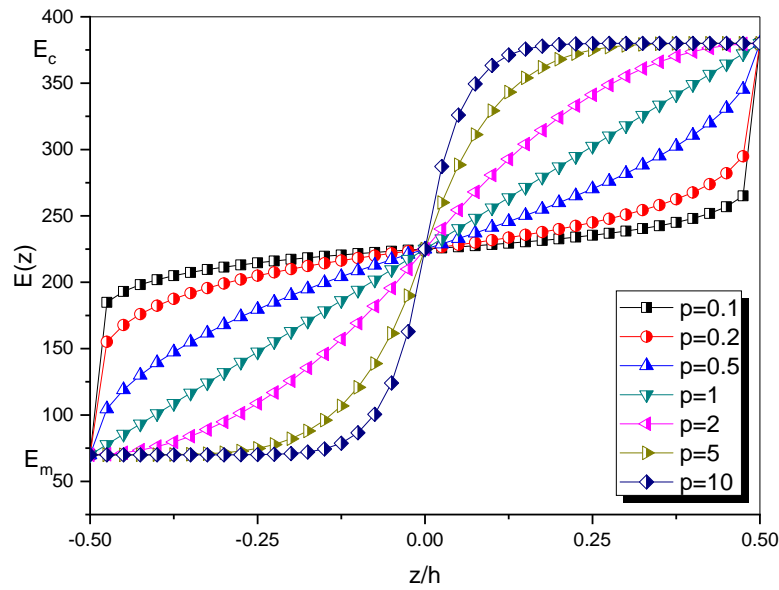


Figure I.3: Variation du module de Young $E(z)$ dans une plaque S-FGM.

I.5.3 Propriétés matérielles de plaque E-FGM

Cette fonction particulière pour la modélisation des FGMs est très répandue dans les études de mécanique de la rupture. Pour une structure faite de E-FGM avec (h) une épaisseur uniforme, les propriétés typiques des matériaux $E(z)$ à tout point situé à une distance (z) de la surface de référence est donné par :

$$E(z) = Ae^{B\left(\frac{z+h}{2}\right)} \tag{I.7}$$

Avec :

$$A = E_2 \quad \text{et} \quad B = \frac{1}{h} \ln\left(\frac{E_1}{E_2}\right) \tag{I.8}$$

Où E_2 et E_1 sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure ($z = -h/2$) et de la surface supérieure ($z = h/2$) de la poutre E-FGM. La Figure I. 6 montre la variation du module de Young dans le cas d'une plaque E-FGM.

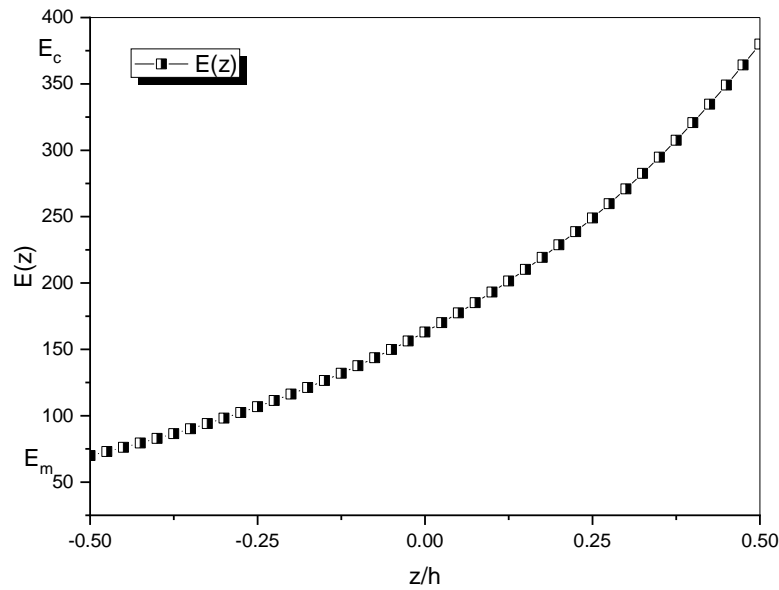


Figure I.4: Variation du module de Young $E(z)$ dans une plaque E-FGM.

I.5.4 Loi de mélange

Plusieurs stratégies sont employées pour décrire le gradient des propriétés matérielles dans les matériaux à gradation fonctionnelle (FGM) composés de deux phases distinctes. En général, ces approches reposent sur la distribution de la fraction volumique des constituants, plutôt que sur une modélisation issue de microstructures réellement graduées [43]. Deux types de distribution de la fraction volumique sont couramment utilisés dans la littérature et couvrent la majorité des modèles analytiques existants. Dans le premier cas, on suppose une variation continue et progressive de la fraction volumique du métal ou de la céramique selon l'épaisseur, cette variation étant représentée par une fonction de la coordonnée verticale (z). Dans le second cas, la variation est considérée comme discrète ou par paliers. Le matériau FGM est alors modélisé comme un empilement de couches quasi-homogènes, chacune ayant une fraction volumique constante de métal et de céramique.

En modifiant de manière adéquate la microstructure de transition **Figure I.7**, on peut obtenir une répartition optimale de la température, de la déformation et des contraintes. Cette option demande une adaptation lors de la conception des structures thermiques pour l'aéronautique et le spatial. (Moteurs, tuyères, revêtements thermiques, etc.). On a également utilisé ce concept pour optimiser la Résistance à la fatigue thermique et longévité des revêtements anti-feu [39]. La majorité des matériaux FGMs sont composés de céramique et de métal.

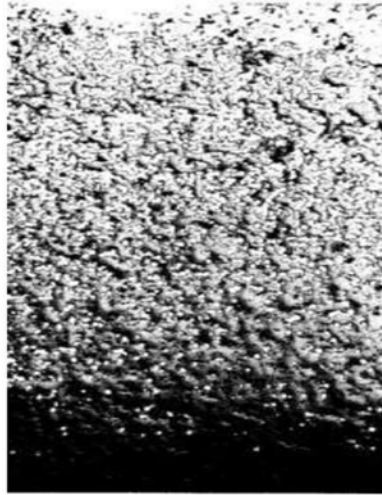


Figure I.5: Variation continue de la microstructure.

I.6 Méthodes de fabrication des FGMs

Comme mentionné précédemment, un matériau à gradient de propriétés se définit par la variation continue de ses caractéristiques sur toute l'épaisseur du matériau. En règle générale, les constitutifs fondamentaux d'un FGMs comprennent : les céramiques et les métaux. La création d'un matériau dense et graduel à partir de ces deux matières dépend des techniques et des procédés de fabrication utilisés [34, 44], basé sur les variations des processus de traitement conventionnels, le processus de fabrication est l'aspect le plus crucial de la recherche sur les FGMs.

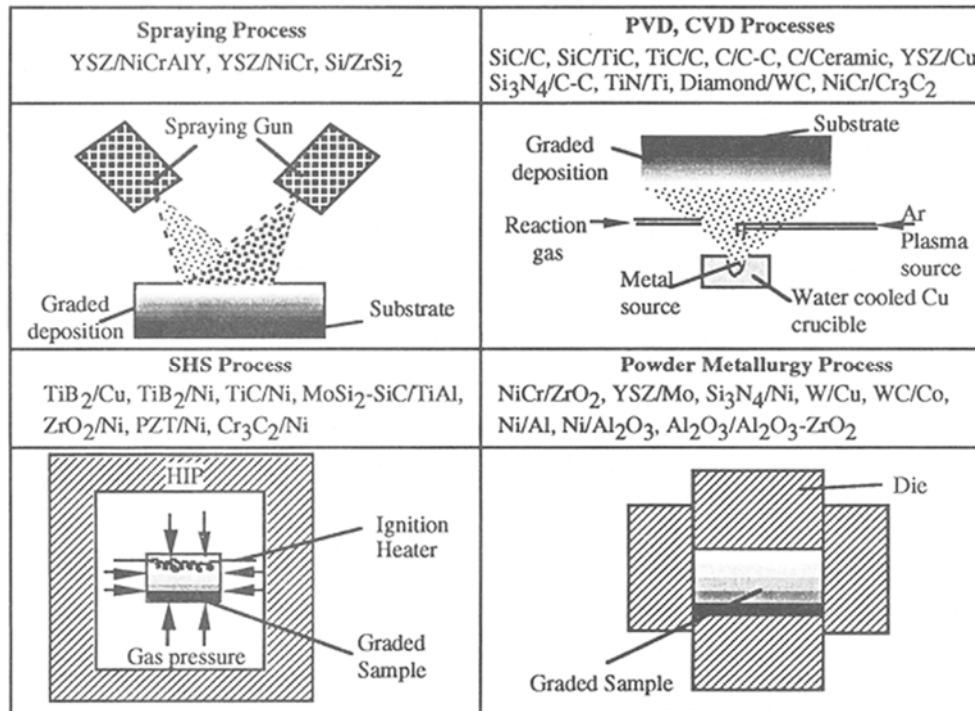


Figure I.6: Techniques d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés [45].

Tableau I.3 : les procédés industriels les plus utilisés dans la fabrication des produits FGMs.

Technique	Catégorie	Description brève
Métallurgie des poudres [46]	Conventionnelle	Compactage des poudres suivies d'un frittage pour former un matériau gradué.
Méthode au centrifuge [47]	Conventionnelle	Utilisation de la force centrifuge pour créer un gradient selon la densité.
Frittage à haute température [48]	Conventionnelle	Technique de dépôt en phase vapeur permettant un contrôle précis des couches.
Projection au plasma [49]	Avancée	Dépôt de matériaux fondus par jet de plasma à haute température.
Dépôt par évaporation [50]	Avancée	Frittage thermique de poudres pour assurer une bonne densité et gradation.
Placage au laser [51]	Avancée	Utilisation d'un faisceau laser pour fondre localement et graduer la surface.
Fabrication solide libre [52]	Avancée	Techniques de fabrication additive couche par couche pour créer une structure FGM.

Dans le Tableau I.3 ci-dessus, nous présentons les procédés industriels les plus utilisés dans la fabrication des produits FGM et leur catégorie à savoir: métallurgie des poudres, méthode au centrifuge, frittage à haute température, projection au plasma, dépôt par évaporation, placage au laser et fabrication solide libre.

I.7 Exemples de secteurs d'application des composites

Le concept des matériaux à gradient fonctionnel FGMs peut être mis en pratique dans une grande variété de secteurs diversifiés et étendus que les matériaux de construction, les matériaux pour la conversion d'énergie, l'aéronautique, l'aérospatiale, le nucléaire et les semi-conducteurs [50]. Par conséquent, ces matériaux présentent deux caractéristiques opposées : la conductivité thermique et l'isolation thermique. À l'heure actuelle, ils autorisent la fabrication de matériaux légers, robustes et durables. Les FGMs trouvent principalement leur application dans les domaines suivants :

➤ **Le domaine aérospatial** : Les matériaux à gradient fonctionnel FGMs jouent un rôle clé dans le domaine aérospatial en raison de leur capacité à supporter des conditions extrêmes tout en offrant des performances mécaniques et thermiques optimales [53]. Ils sont utilisés dans une variété d'applications critiques (**Figure I.9**) telles que les tuyères de fusées, les arbres de transmission, les anneaux, les ailes, les arbres d'entraînement de rotors, les lanceurs rotatifs, les portes de train d'atterrissage, les structures en treillis des engins spatiaux, les assemblages de treillis des télescopes, les pales de structures et les panneaux solaires. Grâce à leur structure graduée, ces matériaux permettent une meilleure gestion des contraintes thermiques et mécaniques, ce qui améliore la fiabilité et la durabilité des composants dans les environnements spatiaux rigoureux [50].



Figure I.7: Éléments en matériaux à gradient fonctionnel FGMs dans l'industrie aérospatiale.

➤ **Le domaine de la construction civile :** Les composites offrent à la construction civile une grande flexibilité en matière de design, une robustesse incomparable face aux intempéries, et pour les composites renforcés par des fibres de carbone, une résistance notable aux séismes. Toutefois, l'implémentation de ces technologies dans l'industrie du bâtiment requiert encore une réévaluation adéquate des normes et directives techniques en vigueur pour qu'elles soient adaptées à leurs spécificités [36].

➤ **Le domaine automobile :** Les matériaux à gradient fonctionnel FGMs sont de plus en plus utilisés dans l'industrie automobile grâce à leur capacité à combiner différentes propriétés de matériaux dans un seul composant. Ils sont particulièrement utiles pour les pièces soumises à des performances élevées et à de fortes températures telles que les disques de frein, les pistons de moteurs diesel, les chemises de cylindres, les poulies, les amortisseurs et les volants d'inertie [54].

➤ **Le domaine biomédical :** Les matériaux à gradient fonctionnel FGMs pouvant imiter les gradients de propriétés naturels présents dans les tissus humains, leur utilisation dans les applications biomédicales est en plein essor. Ces matériaux sont utilisés dans la création de

peau artificielle, d'implants dentaires et osseux, ainsi que dans la réparation du cartilage et des os [55].

➤ **Le domaine de la défense :** Les matériaux à gradient de propriétés (FGMs) ont aussi des usages significatifs dans le secteur de la défense. Ces matériaux sont utilisés pour produire des plaques de protection et des gilets pare-balles en raison de leur aptitude à absorber et dissiper l'énergie des chocs [56].

➤ **Le domaine énergétique :** les matériaux à gradient de propriétés FGMs sont d'une importance capitale en raison de leurs performances remarquables en thermomécanique. Ils sont employés dans la fabrication de matériaux destinés aux cathodes, aux tubes d'évaporation, aux générateurs thermiques, aux composants pour l'énergie solaire, ainsi que dans les dispositifs de conversion d'énergie. Leur aptitude à supporter de fortes températures tout en garantissant une performance de pointe les rend particulièrement appropriés pour des applications énergétiques avancées [37].

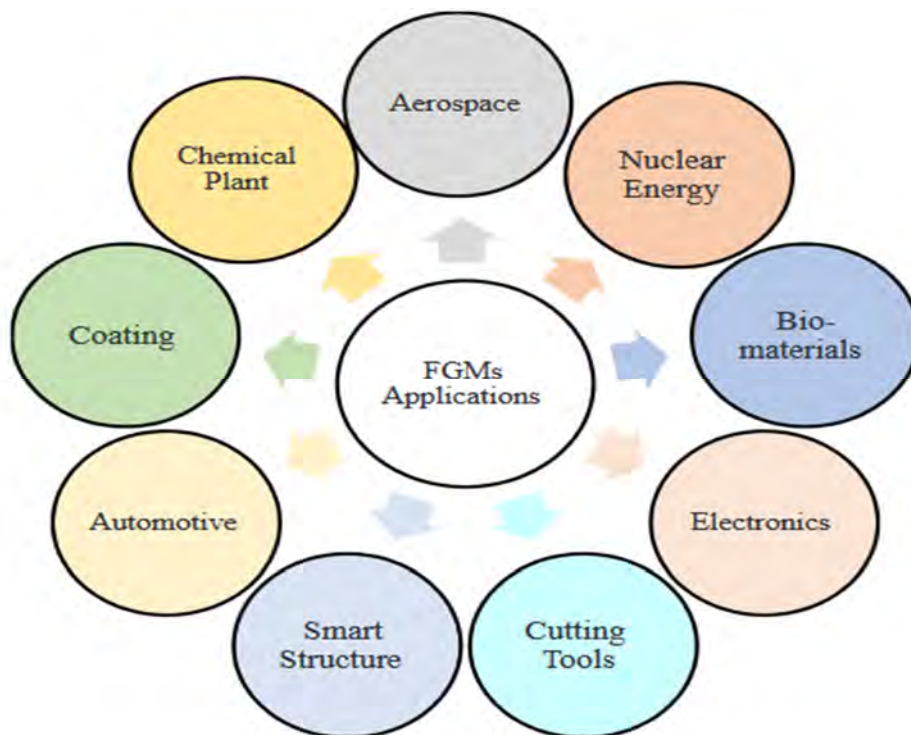


Figure I.8: Diverses applications des matériaux à gradient fonctionnel [50].

I.8 Conclusion

Cette étude nous a permis de mieux comprendre les matériaux à gradient fonctionnel (FGM), en retraçant leur historique, en définissant leurs concepts clés ainsi que leurs domaines d'application. Elle a également mis en évidence leurs propriétés mécaniques, qui varient progressivement et de manière continue d'une face à l'autre à travers l'épaisseur du matériau. Cette variation spatiale des propriétés permet de concevoir des structures innovantes et performantes. Les principales lois de mélange régissant cette variation ont été présentées, à savoir : la loi puissance (P-FGM), la fonction exponentielle (E-FGM) et la fonction sigmoïde (S-FGM), lesquelles décrivent la répartition des fractions volumiques des constituants du matériau.

Chapitre II

Les différentes théories des plaques

Chapitre II

Les différentes Théories des plaques

II.1 Introduction

Depuis l'émergence des matériaux à propriétés graduées, de nouvelles théories ont été développées pour analyser les structures fabriquées à partir de ces matériaux, en particulier les plaques, qui constituent l'axe principal de ce travail. La majorité des théories présentées sont des extensions ou des adaptations des modèles classiques utilisés pour les plaques isotropes ou composites. Dans ce cadre, plusieurs approches ont vu le jour, représentant des avancées notables dans le domaine de la mécanique des structures [57].

Cette étude se concentre sur l'analyse du comportement des plaques en s'appuyant sur trois théories fondamentales. La première est la théorie classique de Love-Kirchhoff, adaptée aux plaques minces [58]. La deuxième est la théorie de premier ordre, utilisée pour les plaques de moyenne épaisseur.

La troisième correspond aux théories d'ordre supérieur, convenant aux plaques très épaisses.

Il est important de noter que l'équilibre des plaques élastiques planes et sa formulation mathématique ont été abordés par plusieurs chercheurs [59].

II.2 Approche monocouche équivalente

Dans l'approche de la couche unique équivalente, le nombre d'équations ne dépend pas du nombre de couches : la plaque multicouche est homogénéisée et considérée comme une seule couche. Depuis les travaux pionniers de Sophie Germain en 1815 sur les plaques minces, jusqu'aux modèles du premier ordre de Love-Kirchhoff et de Reissner-Mindlin, de nombreux auteurs ont développé des théories de plaques basées sur des cinématiques ou des champs de contraintes plus raffinés [60, 61].

Nous passerons en revue les principaux modèles dans les sections suivantes :

- ✓ Théorie classique des plaques (CPT) ;
- ✓ Théorie de premier ordre des plaques (FSDT) ;
- ✓ Théorie d'ordre supérieur (HSDT) ;
- ✓ Théorie des plaques affiniées (RPT)

II.2.1 Théorie classique des plaques (CPT)

Cette approche théorique repose sur un modèle simplifié et généralisé inspiré de la théorie de Love-Kirchhoff, applicable aux plaques minces. Elle suppose une variation linéaire des déplacements selon l'épaisseur et considère que les normales au plan moyen ne subissent aucune rotation, ce qui permet de négliger les effets du cisaillement transverse, valables pour des plaques à faible épaisseur. Le modèle n'est cependant pas adapté aux plaques de moyenne ou grande épaisseur. Il repose sur les hypothèses suivantes Figure II.1 :

- La contrainte normale perpendiculaire au plan moyen est négligeable (hypothèse de contraintes planes).
- Les sections perpendiculaires au plan moyen avant déformation restent planes et perpendiculaires après déformation, ce qui implique que les effets de cisaillement transverse sont négligeables $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$
- L'épaisseur étant réduite, les contraintes normales dans cette direction sont supposées nulles

$$\sigma_z = 0$$

À partir de ces postulats, il est possible de formuler le champ de déplacement selon une expression mathématique appropriée.

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad \text{II.1}$$

Les composantes u_0, v_0, w_0 représentent les déplacements au niveau du plan moyen de la plaque ($z = 0$).

Étant donné que ce modèle ne prend pas en compte l'effet de cisaillement transverse, il ne donne pas de résultats précis pour les plaques épaisses.

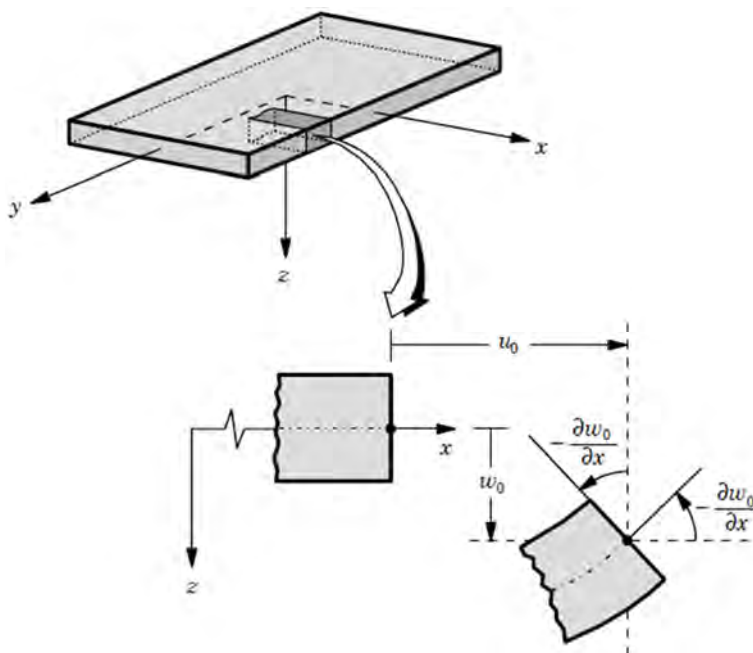


Figure II 1: Illustration de la plaque de Love Kirchhoff [62].

II.2.2 Théorie de premier ordre des plaques (FSDT)

Cette théorie est une amélioration du modèle classique des plaques minces (théorie de Kirchhoff), car elle prend en compte les effets du cisaillement transverse dans les hypothèses cinématiques. Elle suppose une déformation de cisaillement transverse constante à travers l'épaisseur de la plaque [63] (Figure II.2), ce qui conduit à une représentation inexacte des contraintes tangentielles. Pour corriger cela, il est nécessaire d'introduire des facteurs de correction de cisaillement sous forme de grandeurs adimensionnelles. Dans ce cadre théorique, les lignes normales à la surface moyenne restent droites mais ne demeurent pas perpendiculaires à celle-ci en raison de l'effet du cisaillement transverse. De nombreuses recherches dans la littérature ont été menées pour étudier le comportement mécanique des plaques en se basant sur la théorie du cisaillement de premier ordre [64, 65, 66].

Le champ de déplacement dans cette théorie est :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - \varphi_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - \varphi_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad \text{II.2}$$

Avec : u_0, v_0, w_0 sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ($z=0$).

$\varphi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \gamma_{xz}$, $\varphi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \gamma_{yz}$ Représentent la rotation normale au plan moyen autour des axes x et y respectivement.

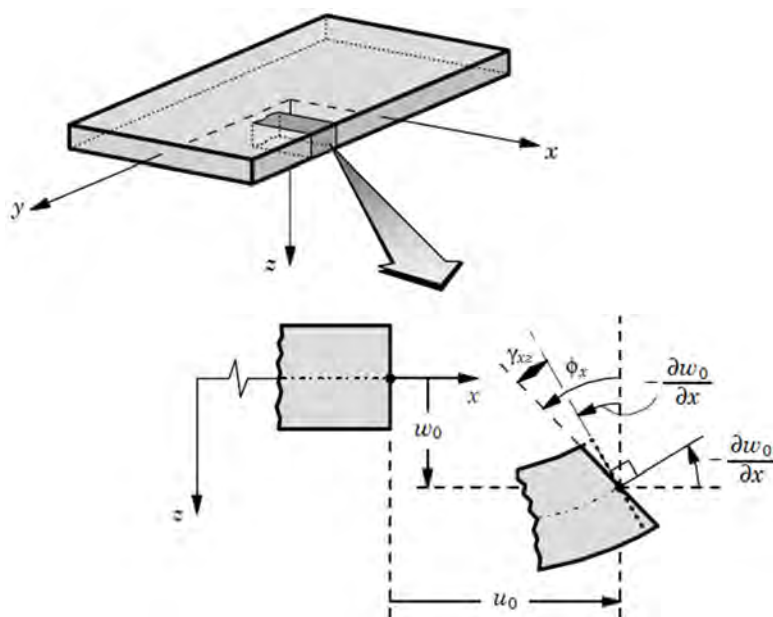


Figure II 2: Cinématique de la plaque de Reissner-Mindlin [62].

II.2.3 Théorie d'ordre élevé (HSDT)

Les limites de la FSDT ont été abordées par le développement de nombreuses HSDT, qui intègrent des termes d'ordre supérieur dans les expansions de Taylor des déplacements des coordonnées de l'épaisseur. En ignorant la contrainte transversale dans la direction z (σ_z) [67], la majorité de ces théories ne prennent pas en compte l'extensibilité transversale et la contrainte de cisaillement transversale sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Le développement des séries de déplacement devra passer à un schéma d'ordre supérieur (2nd ordre, 3rd ordre) lorsqu'un schéma du premier ordre n'est pas en mesure de fournir une approximation suffisante d'un problème particulier. Par conséquent, ces théories utilisent des symboles souvent difficiles à comprendre pour ajouter de nouvelles fonctions.

Le champ de déplacement dans cette théorie est :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial y w_0}{\partial x} + f(z) \varphi_x(x, y) \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z) \varphi_y(x, y) \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{II.3}$$

Dans laquelle $f(z) = 0$ représente la fonction de forme déterminant la répartition des contraintes et déformations transversales en fonction de l'épaisseur.

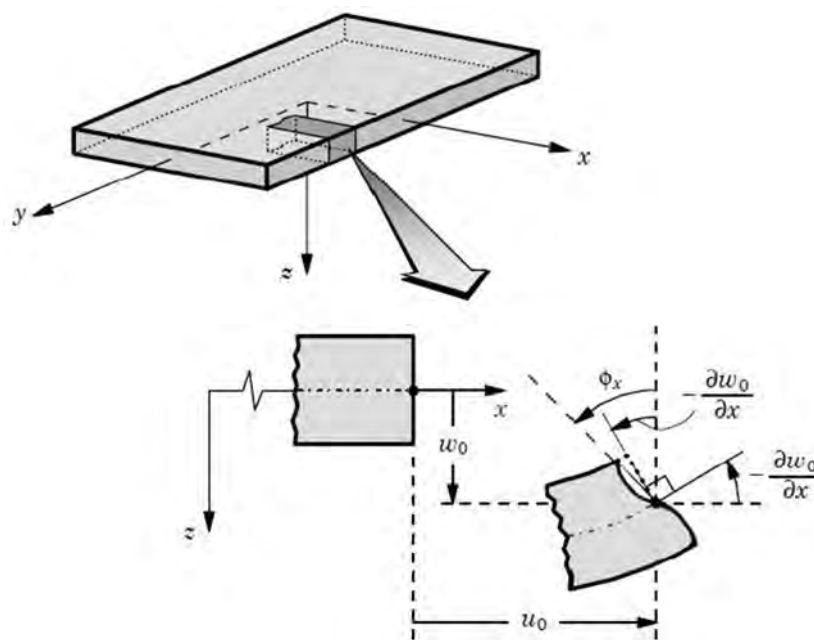


Figure II 3: Illustration de la plaque d'ordre élevé [62].

En fixant $f(z) = 0$, on obtient le champ de déplacement de la théorie classique des plaques (CPT).

En fixant $f(z) = z$, on obtient la théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre (FSDT).

Ces contributions significatives à la création de modèles d'ordre supérieur qui se distinguent dans la littérature et varient selon la fonction des formes $f(z)$ sont énumérées ci-dessous (voir Tableau II.1).

Tableau II.1 : Comparaison entre les différents modèles et les différentes fonctions de cisaillement de la FGM et des théories de plaques isotropes.

Théorie	Modèle	Fonction de cisaillement	Domaine de validité
Kirchhoff [1]	CPT	$f(z) = 0$	Plaques minces
Mindlin [2]	FSDT	$f(z) = z$	Plaques minces et moyennement épaisses
Ambartsumian [48]	HSDT	$f(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right)$	
Reissner [68]	HSDT	$f(z) = \frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$	Plaques minces et épaisses
Reddy [69]	TSDT	$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$	Plaques épaisses

Touratier [70]	SSDT	$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{z}{h}\right)$	Plaques épaisses
Karama [71]	ESDT	$f(z) = ze^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}$	
Aydogdu [72]	HSDT	$f(z) = z3^{-\frac{2(z/h)^2}{\ln 3}}$	
Mantari and Soares [73]	HySDT	$f(z) = \sin\left(\frac{z}{h}\right)e^{m \cosh(z/h)}$	
Zenkour [74]	HySDT	$f(z) = h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) - \frac{4z^3}{3h^2} \cosh\left(\frac{1}{2}\right)$	
Nguyen [75]	IHySDT	$f(z) = \sinh^{-1}\left(\frac{3z}{h}\right) - z\left(\frac{6}{h\sqrt{13}}\right)$	
Présente théorie	PSDT	$f(z) = \frac{7}{4}z - \frac{7}{3} \frac{z^3}{h^2}$	

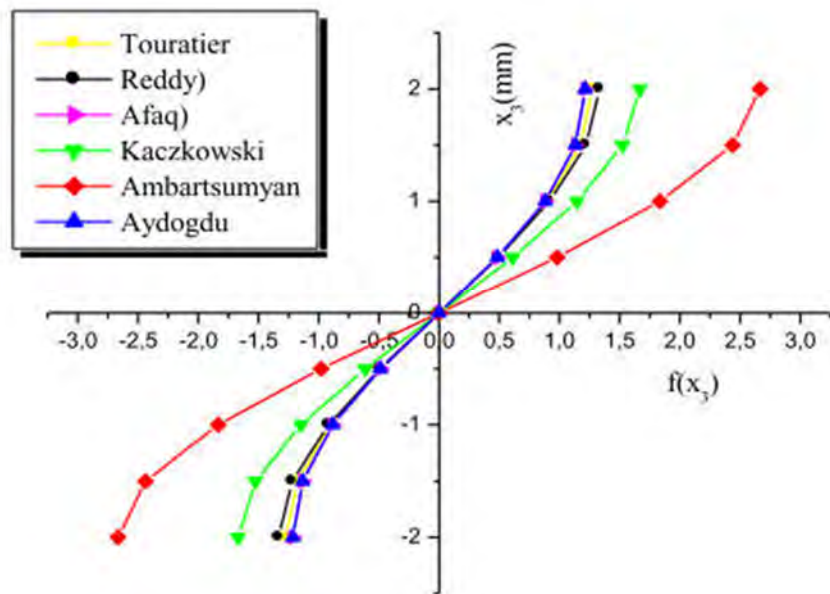


Figure II 4: Variation $f(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur.

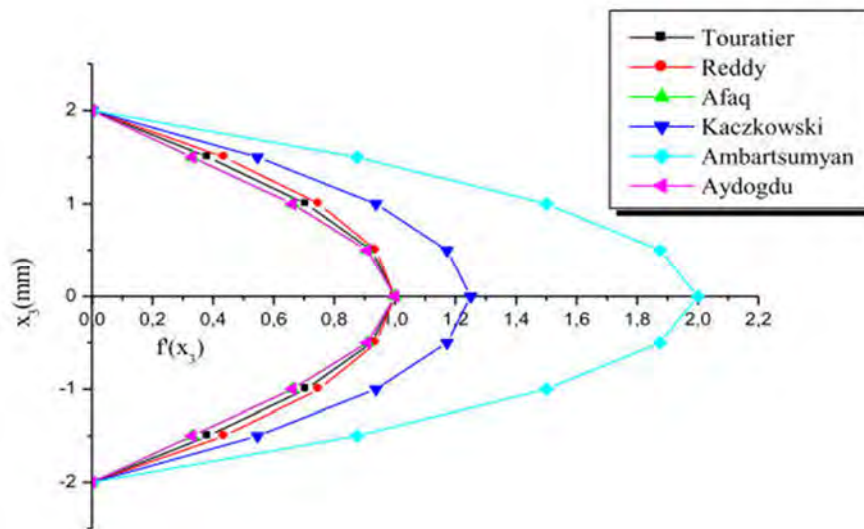


Figure II 5: Variation de la dérivée $f'(z)$ des différents modèles suivant l'épaisseur.

II.2.4 Théorie des plaques affinées (RPT)

La théorie raffinée des plaques (RPT), introduite par Shimpi en 2002, a été conçue pour étudier la flexion et les vibrations des plaques isotropes à matériaux à gradient fonctionnel (FG), tout en réduisant le nombre d'inconnues. Elle intègre à la fois les effets du cisaillement transversal et de l'étirement dans la direction de l'épaisseur, sans nécessiter l'emploi d'un facteur de correction du cisaillement. Cette approche propose une distribution parabolique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur. Contrairement aux théories classiques qui nécessitent cinq inconnues, celle-ci n'en mobilise que quatre u_0, v_0, w_0, w_s , ce qui simplifie le modèle. Plusieurs études, notamment celles de [76, 77] ont confirmé la précision et la fiabilité de cette théorie, notamment pour l'analyse statique de la flexion des plaques FGM.

Le champ de déplacement de cette théorie s'écrit donc :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\
 w(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{II.4}$$

Avec : u_0, v_0 sont les composantes du champ de déplacement dans les directions x et y.
 w_b, w_s sont les composantes de flexion et de cisaillement du déplacement transversal et

$f(z)$ Est la fonction de cisaillement transverse.

II .3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une revue bibliographique des principales théories développées pour l'analyse des plaques réalisées en matériaux à gradient fonctionnel (FGM). Parmi ces approches, on distingue la théorie classique des plaques (CPT) de Love-Kirchhoff, adaptée aux plaques minces, la théorie de déformation par cisaillement de premier ordre (FSDT), la théorie de cisaillement d'ordre supérieur (HSDT), ainsi que la théorie raffinée de déformation (RPT)

Chapitre III

Analyse de la stabilité des plaques sandwichs en FGM

Chapitre III

Analyse de la stabilité des plaques sandwichs en FGM

III.1. Introduction

Ce chapitre a pour but de formuler et de développer un modèle analytique raffiné, basé sur une théorie d'ordre élevé de la déformation de cisaillement, pour analyser la stabilité des plaques sandwich en matériaux à gradient fonctionnel sous chargement mécanique dans le plan. Le champ de déplacement de cette théorie est différent de celui des autres théories conventionnelles de la déformation en cisaillement, qui entraînent un nombre d'inconnues plus élevé. La présente théorie nécessite uniquement quatre inconnues, ce qui permet d'obtenir une formulation simplifiée et efficace, tout en respectant les conditions de contrainte de cisaillement nul sur les faces supérieures et inférieures de la plaque sandwich en FGM, sans avoir besoin de recourir à des facteurs correctifs de cisaillement. Les équations de mouvement sont dérivées à l'aide du principe des travaux virtuels pour les plaques sandwichs FG, ce qui permet de générer les matrices élémentaires de rigidité. Ensuite la technique de Navier est employée pour déterminer les solutions analytiques des plaques sandwichs simplement appuyées. Nous étudions également l'influence de plusieurs paramètres sur le comportement de flambement mécanique des plaques sandwichs à gradient fonctionnel.

III.2. Formulation théoriques

III.2.1 Configuration géométrique et concept de la plaque sandwich FG

Une plaque sandwich FG, telle que représentée à la figure III.1, est considérée dans la formulation mathématique. La plaque possède des peaux FG et un noyau homogène ; sa longueur (a), sa largeur (b) et son épaisseur (h) sont respectivement définies dans les directions x , y et z ; h_1 , h_2 , h_3 et h_4 sont les coordonnées d'épaisseur de chaque couche, mesurées à partir du plan médian. La plaque est soumise à des forces planes. Les quatre relations entre l'épaisseur des peaux et celle du noyau sont considérées dans la présente étude (1-0-1, 2-1-2, 1-2-1 et 1-1-1). Ces configurations de couches sont choisies en fonction du rapport croissant entre l'épaisseur du noyau et celle de la peau.

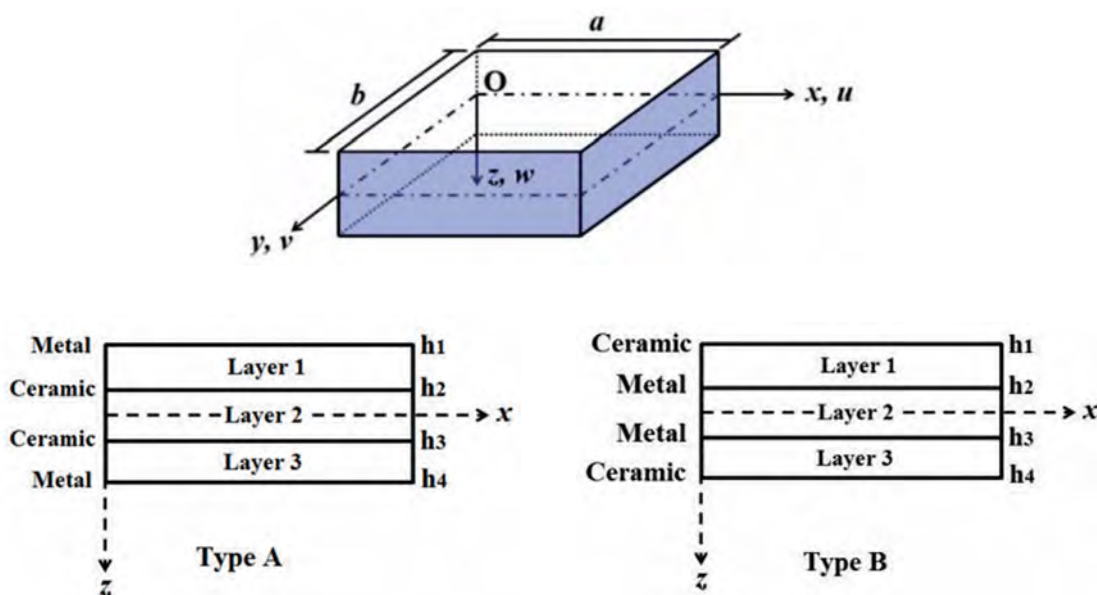


Figure III.1: Système de coordonnées et géométrie des plaques sandwich FG.

III.2.2 Propriétés matérielles d'une plaque sandwich FG

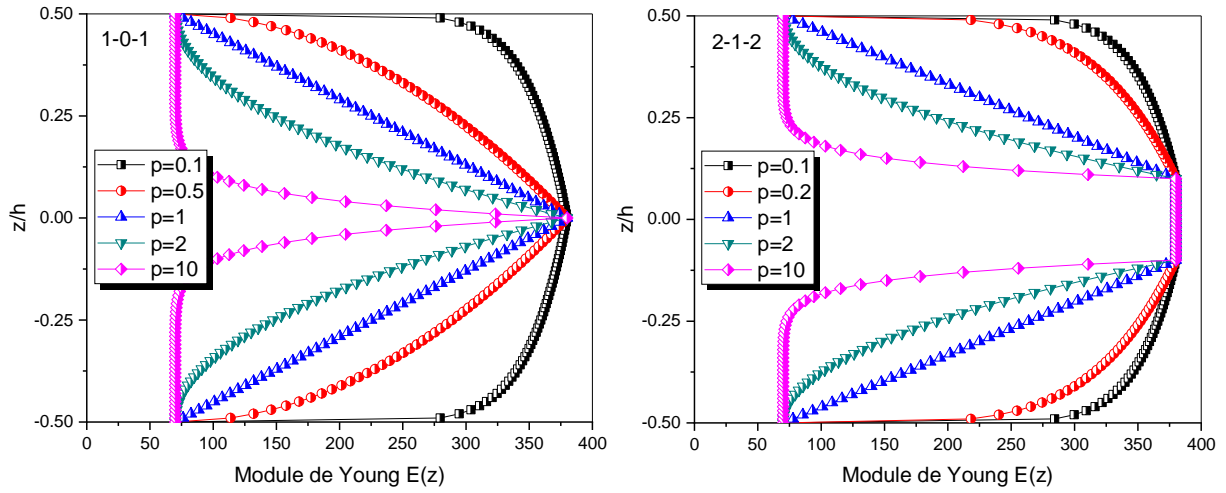
Dans la présente étude, le noyau de la plaque sandwich FG est entièrement en céramique ou en métal, tandis que les couches superficielles (couches externes) sont en FGM, dont les propriétés varient de manière régulière et continue dans le sens de l'épaisseur selon une loi de puissance simple. Pour les plaques sandwich rigides, les propriétés effectives du matériau, telles que le module d'élasticité de chaque couche peuvent être déterminées à l'aide de la règle classique du mélange définie par Reddy [78] :

$$\text{TypeA - noyau dur: } E^{(n)}(z) = E_m + (E_c - E_m)V^{(n)}(z) \quad (\text{III.1a})$$

$$\text{TypeB - noyau souple: } E^{(n)}(z) = E_c + (E_m - E_c)V^{(n)}(z) \quad (\text{III.1b})$$

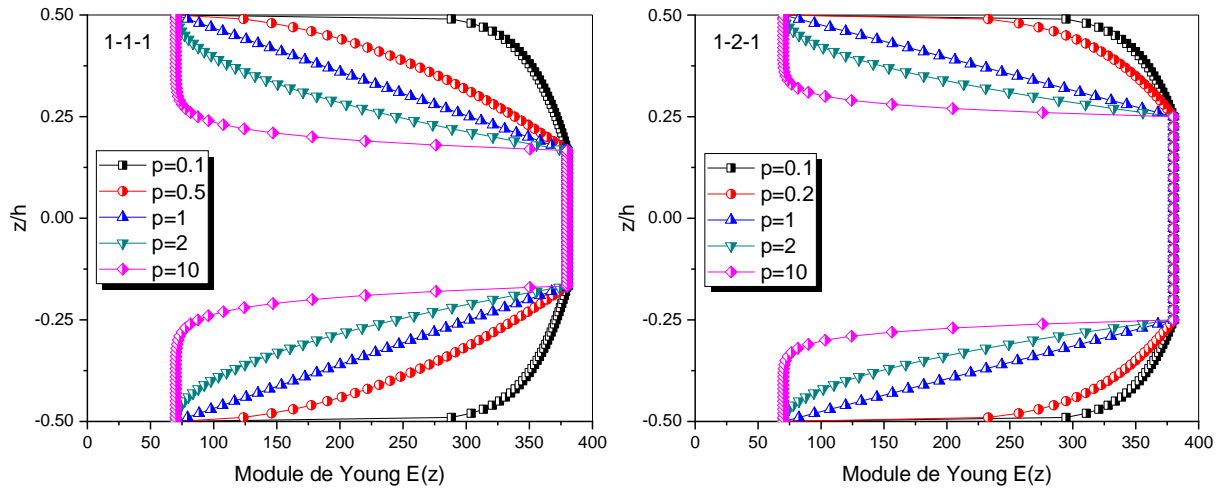
Où $V^{(n)}$ représente la fonction de la fraction volumique pour la n -ième couche ; E_m représente le module de Young du métal, tandis que E_c représente le module de Young de la céramique. Les fonctions de fraction volumique pour les peaux fonctionnellement graduées et le noyau homogène sont supposées comme suit :

$$\begin{aligned}
 \text{Couche1: } V^{(1)}(z) &= \left(\frac{z-h_1}{h_2-h_1} \right)^p \quad \text{for } z \in [h_1, h_2] \\
 \text{Couche2: } V^{(2)}(z) &= 1 \quad \text{for } z \in [h_2, h_3] \\
 \text{Couche3: } V^{(3)}(z) &= \left(\frac{z-h_4}{h_3-h_4} \right)^p \quad \text{for } z \in [h_3, h_4]
 \end{aligned}
 \tag{III.2}$$



(a) Configuration de couches 1-0-1

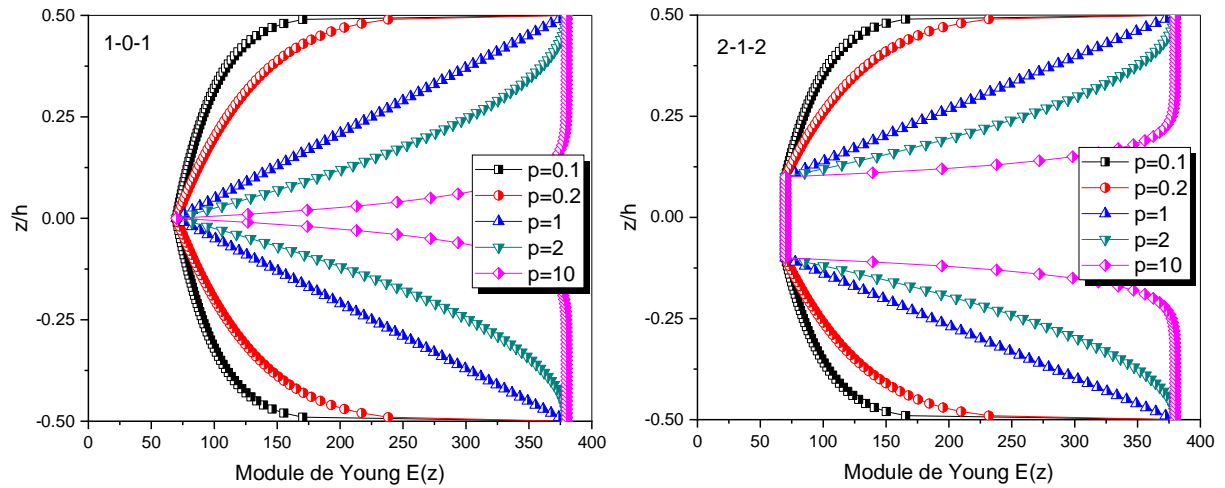
(b) Configuration de couches 2-1-2



(c) Configuration de couches 1-1-1

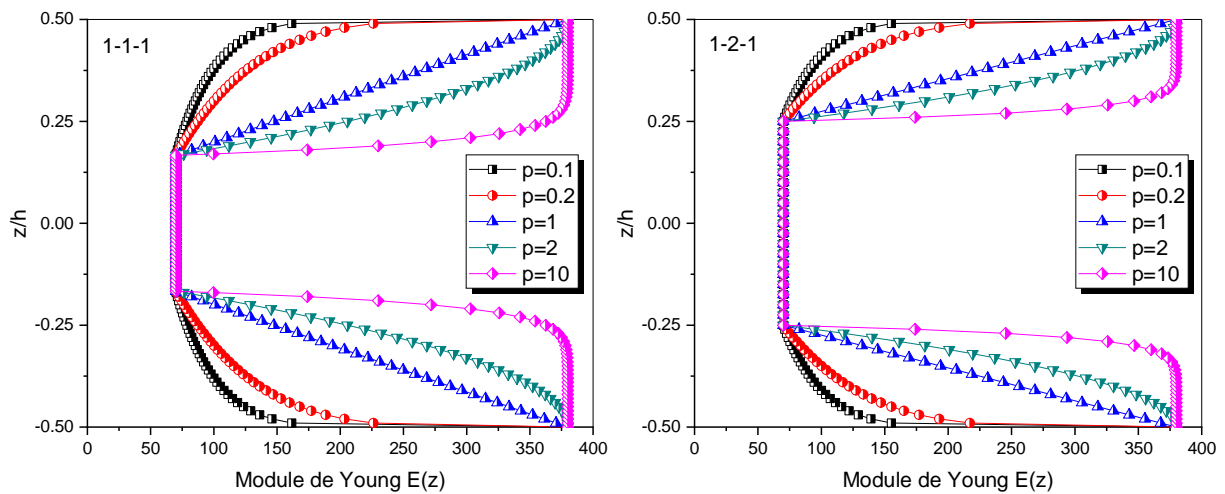
(d) Configuration de couches 1-2-1

Figure III.2: Variation du module de Young à travers l'épaisseur d'une plaque sandwich FG (Type A: noyau dur) pour différents rapports d'épaisseur peau-âme-peau.



(a) Configuration de couches 1-0-1

(b) Configuration de couches 2-1-2



(c) Configuration de couches 1-1-1

(d) Configuration de couches 1-2-1

Figure III.3: Variation du module de Young à travers l'épaisseur d'une plaque sandwich FG (Type B: noyau souple) pour différents rapports d'épaisseur peau-âme-peau.

Où p est le paramètre de loi de puissance. Les variations du module de Young à travers l'épaisseur d'une plaque sandwich FG en céramique et en métal selon la loi de puissance sont présentées aux figures III.2 et III.3 ci-dessous.

III.2.3 Champ de déplacement et relations constitutives

La présente étude vise à améliorer le champ de déplacement de la théorie conventionnelle de déformation de cisaillement d'ordre élevé utilisée par plusieurs chercheurs, en introduisant des hypothèses simplificatrices supplémentaires afin de développer une nouvelle cinématique à quatre inconnues seulement, facilitant ainsi l'étude du phénomène de flambement des plaques sandwich à gradient fonctionnel par le système d'équations mathématiques. Le champ de déplacement de la théorie conventionnelle de déformation de cisaillement, largement utilisée par de nombreux auteurs, repose sur cinq inconnues. Son expression peut être donnée par Sayyad et Ghugal [79] :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + f(z) \left[\phi(x, y) + \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} \right] \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + f(z) \left[\psi(x, y) + \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} \right] \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (\text{III.3})$$

Où $u_0(x, y)$, $v_0(x, y)$ et $w_0(x, y)$ sont respectivement les composantes de déplacements selon les directions x , y et z de tout point du plan médian, tandis que $\phi(x, y)$ et $\psi(x, y)$ sont les fonctions inconnues représentant l'effet de la contrainte de cisaillement transversal sur le plan médian de la plaque sandwich. $f(z)$ représente une fonction de forme en termes de coordonnées d'épaisseur (z) qui détermine la distribution de la contrainte de cisaillement transversal le long de l'épaisseur de la plaque. Le choix de cette fonction de forme repose sur les conditions suivantes :

$$\int_{-h/2}^{h/2} f(z) dz = 0 \quad \text{et} \quad \left. \frac{df(z)}{dz} \right|_{z=\pm h/2} = 0 \quad (\text{III.4})$$

En établissant et en sélectionnant des fonctions appropriées $f(z)$, la théorie classique et différentes théories de déformation de cisaillement de plaque pourraient être présentées comme suit :

- Théorie de la déformation de cisaillement parabolique :

$$f(z) = z - \frac{4z^3}{3h^2}$$

- Théorie de la déformation de cisaillement trigonométrique :

$$f(z) = \left(\frac{h}{\pi}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$$

- Théorie de la déformation de cisaillement hyperbolique :

$$f(z) = z \cosh\left(\frac{1}{2}\right) - h \sinh\left(\frac{z}{h}\right)$$

- Théorie de la déformation de cisaillement exponentielle :

$$f(z) = z e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}$$

- Théorie de la déformation de cisaillement du premier ordre :

$$f(z) = z$$

- Théorie classique des plaques :

$$f(z) = 0$$

Dans cette étude, la théorie de déformation de cisaillement polynomiale d'ordre élevé proposée affirme que les composantes du champ de déplacement est réduit en introduisant des variables intégrales indéterminées, sur la base de certaines hypothèses cinématiques. Par conséquent, le nouveau champ de déplacement de la présente théorie ne peut être représenté que par quatre inconnues, comme suit :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, y) dx \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + k_2 f(z) \int \theta(x, y) dy \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (\text{III.5})$$

Où $\theta(x, y)$ est la fonction inconnue qui représente l'effet de la contrainte de cisaillement transversal sur la surface médiane de la plaque sandwich FG. Ainsi, $f(z)$ représente une fonction de forme en termes de coordonnées d'épaisseur qui régit la distribution des déformations de cisaillement transversales et des contraintes dans la direction de l'épaisseur. Dans cette étude, nous adoptons la fonction de forme polynomiale en posant :

$$f(z) = \frac{7}{4} z - \frac{7}{3} \frac{z^3}{h^2} \quad (\text{III.6})$$

Les intégrales de l'équation III.5 doivent être résolues en utilisant la méthode de type Navier et ainsi le champ de déplacement en tout point de la plaque FG peut être reformulé comme ci-dessous :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + k_1 A' f(z) \frac{\partial \theta(x, y)}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + k_2 B' f(z) \frac{\partial \theta(x, y)}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (\text{III.7})$$

Où A', B', k_1 et k_2 des coefficients et peuvent être exprimés comme :

$$A' = -\frac{1}{\lambda^2}, \quad B' = -\frac{1}{\mu^2}, \quad k_1 = \lambda^2, \quad k_2 = \mu^2 \quad (\text{III.8})$$

Et les paramètres λ et μ sont pris comme :

$$\lambda = \frac{m\pi}{a}, \quad \mu = \frac{n\pi}{b} \quad (\text{III.9})$$

Selon les relations de la théorie de l'élasticité linéaire, les déformations infinitésimales liées au champ de déplacement donné par l'équation (III.7) sont exprimées comme suit :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + z\varepsilon_x^1 + f(z)\varepsilon_x^2, \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_y^0 + z\varepsilon_y^1 + f(z)\varepsilon_y^2, \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^0 + z\gamma_{xy}^1 + f(z)\gamma_{xy}^2, \\ \gamma_{yz} &= g(z)\gamma_{yz}^0, \\ \gamma_{xz} &= g(z)\gamma_{xz}^0 \end{aligned} \quad (\text{III.10})$$

Où les déformations sont définies en termes de déplacements virtuels comme suit :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad \varepsilon_x^1 = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_x^2 = k_1 A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \\ \varepsilon_y^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial y}, \quad \varepsilon_y^1 = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}, \quad \varepsilon_y^2 = k_2 B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}, \\ \gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}, \quad \gamma_{xy}^1 = -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}, \quad \gamma_{xy}^2 = (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \\ \gamma_{yz}^0 &= k_2 B' \frac{\partial \theta}{\partial y}, \quad \gamma_{xz}^0 = k_1 A' \frac{\partial \theta}{\partial x} \end{aligned} \quad (\text{III.11})$$

Selon la loi de Hooke généralisée, les relations contrainte-déformation, tenant compte de la déformation de cisaillement transversale dans la n -ième couche de la plaque sandwich FG, peuvent être exprimées comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}^n = \begin{bmatrix} Q_{11}(z) & Q_{12}(z) & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12}(z) & Q_{22}(z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66}(z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44}(z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55}(z) \end{bmatrix}^n \times \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^n \quad (\text{III.12})$$

Où $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$ représentent les contraintes et $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$ les déformations. Les coefficients de rigidité Q_{ij} des plaques sandwich FG sont les suivants :

$$\begin{aligned} Q_{11}^n(z) = Q_{22}^n(z) &= \frac{E^n(z)}{(1-\nu^2)}, \quad Q_{12}^n = \nu Q_{11}^n, \\ Q_{44}^n(z) = Q_{55}^n(z) = Q_{66}^n(z) &= \frac{E^n(z)}{2(1+\nu)} \end{aligned} \quad (\text{III.13})$$

III.2.4 Equations différentielles d'équilibres

Dans la présente étude, le principe de travaux virtuels peut être utilisé pour obtenir les équations d'équilibre régissant sous une forme variationnelle comme indiqué ci-dessous :

$$\begin{aligned} & \int_{-h/2}^{h/2} \int_A (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dA dz \\ & - \int_A \left(N_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + q \right) \delta w dA = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.14})$$

Où A est la surface supérieure de la plaque, q et (N_x^0, N_y^0, N_{xy}^0) sont respectivement les charges transversales et réparties dans le plan. En remplaçant l'équation (III.10) par l'équation (III.14), le principe de travaux virtuels peut être réécrit sous la forme suivante :

$$\int_A \left\{ \begin{aligned} & N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_x^b \delta \varepsilon_x^1 + M_y^b \delta \varepsilon_y^1 + M_{xy}^b \delta \gamma_{xy}^1 \\ & + M_x^s \delta \varepsilon_x^2 + M_y^s \delta \varepsilon_y^2 + M_{xy}^s \delta \gamma_{xy}^2 + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^0 + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^0 \\ & - N_x^0 \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} - N_y^0 \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} - 2N_{xy}^0 \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} - q \delta w_0 \end{aligned} \right\} dA = 0 \quad (\text{III.15})$$

Où N, M^b, M^s et S^s sont les contraintes résultantes qui peuvent être exprimées par les relations suivantes :

$$\begin{cases} N_x, & N_y, & N_{xy} \\ M_x^b, & M_y^b, & M_{xy}^b \\ M_x^s, & M_y^s, & M_{xy}^s \end{cases} = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) \begin{cases} 1 \\ z \\ f(z) \end{cases} dz, \quad (III.16)$$

$$(S_{xz}^s, S_{yz}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) g(z) dz$$

En substituant les relations constitutives de l'équation (III.12) dans l'équation (III.16), les contraintes résultantes peuvent être trouvées en termes de déformations comme suit :

$$\begin{aligned} N_x &= A_{11}\varepsilon_x^0 + A_{12}\varepsilon_y^0 + B_{11}\varepsilon_x^1 + B_{12}\varepsilon_y^1 + E_{11}\varepsilon_x^2 + E_{12}\varepsilon_y^2, \\ N_y &= A_{12}\varepsilon_x^0 + A_{22}\varepsilon_y^0 + B_{12}\varepsilon_x^1 + B_{22}\varepsilon_y^1 + E_{12}\varepsilon_x^2 + E_{22}\varepsilon_y^2, \\ N_{xy} &= A_{66}\gamma_{xy}^0 + B_{66}\gamma_{xy}^1 + E_{66}\gamma_{xy}^2, \\ M_x^b &= B_{11}\varepsilon_x^0 + B_{12}\varepsilon_y^0 + D_{11}\varepsilon_x^1 + D_{12}\varepsilon_y^1 + F_{11}\varepsilon_x^2 + F_{12}\varepsilon_y^2, \\ M_y^b &= B_{12}\varepsilon_x^0 + B_{22}\varepsilon_y^0 + D_{12}\varepsilon_x^1 + D_{22}\varepsilon_y^1 + F_{12}\varepsilon_x^2 + F_{22}\varepsilon_y^2, \\ M_{xy}^b &= B_{66}\gamma_{xy}^0 + D_{66}\gamma_{xy}^1 + F_{66}\gamma_{xy}^2, \\ M_x^s &= E_{11}\varepsilon_x^0 + E_{12}\varepsilon_y^0 + F_{11}\varepsilon_x^1 + F_{12}\varepsilon_y^1 + H_{11}\varepsilon_x^2 + H_{12}\varepsilon_y^2, \\ M_y^s &= E_{12}\varepsilon_x^0 + E_{22}\varepsilon_y^0 + F_{12}\varepsilon_x^1 + F_{22}\varepsilon_y^1 + H_{12}\varepsilon_x^2 + H_{22}\varepsilon_y^2, \\ M_{xy}^s &= E_{66}\gamma_{xy}^0 + F_{66}\gamma_{xy}^1 + H_{66}\gamma_{xy}^2, \\ S_{yz}^s &= A_{44}\gamma_{yz}^0, \quad S_{xz}^s = A_{55}\gamma_{xz}^0 \end{aligned} \quad (III.17)$$

Où $A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij}$ et A_{ij}^s sont les coefficients de rigidité de la plaque définie par :

$$\begin{aligned} (A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}) &= \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(1, z, z^2, f(z)) dz, \quad i, j = 1, 2, 6 \\ (F_{ij}, H_{ij}) &= \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(z f(z), f^2(z)) dz, \quad i, j = 1, 2, 6 \\ A_{ij}^s &= \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} g^2(z) dz, \quad i, j = 4, 5 \end{aligned} \quad (III.18)$$

En remplaçant l'équation (III.11) par l'équation (III.15), en intégrant par parties par rapport à x et y , et en attribuant séparément la valeur zéro aux coefficients $\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0$ et $\delta \theta$. Les

équations d'équilibre de stabilité, en termes de contraintes résultantes, sont exprimées comme suivant :

$$\begin{aligned}
\delta u_0 : \quad & \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \\
\delta v_0 : \quad & \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \\
\delta w_0 : \quad & \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + N_x^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + N_y^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + q = 0 \\
\delta \theta : \quad & k_1 A' \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + k_2 B' \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} - k_1 A' \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} - k_2 B' \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} = 0
\end{aligned} \tag{III.19}$$

En remplaçant l'équation (III.17) dans l'équation (III.19), nous pouvons obtenir les équations en termes des composantes de déplacements comme suivant :

$$\begin{aligned}
\delta u_0 : \quad & A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} \\
& + k_1 A' E_{11} \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^3} + k_2 B' E_{12} \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial y^2} + (k_1 A' + k_2 B') E_{66} \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial y^2} = 0
\end{aligned} \tag{III.20a}$$

$$\begin{aligned}
\delta v_0 : \quad & (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - B_{22} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} \\
& + k_1 A' E_{12} \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^2 \partial y} + k_2 B' E_{22} \frac{\partial^3 \theta}{\partial y^3} + (k_1 A' + k_2 B') E_{66} \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^2 \partial y} = 0
\end{aligned} \tag{III.20b}$$

$$\begin{aligned}
\delta w_0 : \quad & B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y^2} + B_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} - D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} \\
& - D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + k_1 A' F_{11} \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4} + (k_1 A' + k_2 B') F_{12} \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial y^2} \\
& + k_2 B' F_{22} \frac{\partial^4 \theta}{\partial y^4} + 2(k_1 A' + k_2 B') F_{66} \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial y^2} + N_x^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + N_y^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + q = 0
\end{aligned} \tag{III.20c}$$

$$\begin{aligned}
\delta\theta : & k_1 A' \left(E_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - F_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + k_1 A' H_{11} \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4} + E_{12} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} - F_{12} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + k_2 B' H_{12} \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \\
& + k_2 B' \left(E_{12} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} - F_{12} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + k_1 A' H_{12} \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial y^2} + E_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} - F_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} + k_2 B' H_{22} \frac{\partial^4 \theta}{\partial y^4} \right) \\
& + (k_1 A' + k_2 B') \left(E_{66} \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} \right) - 2F_{66} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + (k_1 A' + k_2 B') H_{66} \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial y^2} + E_{66} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} \right) \\
& + (k_1 A')^2 A_{55}^s \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + (k_2 B')^2 A_{44}^s \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0
\end{aligned} \tag{III.20d}$$

III.2.5 Solution de Navier pour les plaques sandwichs FG

La méthode de résolution de Navier est utilisée pour l'analyse du flambement d'une plaque à gradient fonctionnel rectangulaire à appui simple soumise à des forces réparties dans le plan ($N_x^0 = \gamma_1 N_0$, $N_y^0 = \gamma_2 N_0$, $N_{xy}^0 = 0$). Cependant, dans le cas d'un problème de flambement statique, toutes les autres forces agissant sur la plaque sont supposées nulles ($q = 0$). Les conditions aux limites à appui simple sur les quatre bords de la plaque peuvent être définies comme suit :

- Sur les bords : ($x = 0, a$)

$$v_0 = w_0 = N_x = M_x^b = M_x^s = \theta = 0 \tag{III.21}$$

- Sur les bords : ($y = 0, b$)

$$v_0 = w_0 = N_x = M_x^b = M_x^s = \theta = 0 \tag{III.22}$$

Pour résoudre ce problème, on a employé la méthode de Navier exprimée en fonction des variables de déplacement sous la forme de séries trigonométriques doubles, qui satisfont les conditions aux limites ci-dessus données par les équations III.21 et III.22 :

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \\ V_{mn} \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \\ W_{mn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \\ \Phi_{mn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \end{Bmatrix} \tag{III.23}$$

Où λ et μ sont déjà définis dans l'équation (III.9), et $U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, \Phi_{mn}$ sont les variables inconnues. En remplaçant cette solution de l'équation (III.23) dans les équations de l'équation (III.20), les charges critiques de flambement des plaques FG peuvent être déterminées à partir de la matrice suivante :

$$\left[\begin{array}{cccc} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{12} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{13} & K_{23} & K_{33} & K_{34} \\ K_{14} & K_{24} & K_{34} & K_{44} \end{array} \right] - N_0 \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \times \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ \Phi_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.24})$$

Où K_{ij} fait référence aux éléments de la matrice de rigidité qui peuvent être déterminés comme suivant :

$$\begin{aligned} K_{11} &= \alpha^2 A_{11} + \beta^2 A_{66}, \\ K_{12} &= \alpha\beta(A_{12} + A_{66}), \\ K_{13} &= -\alpha\beta^2(B_{12} + 2B_{66}) - \alpha^3 B_{11}, \\ K_{14} &= k_1 A' \alpha (\alpha^2 E_{11} + \beta^2 E_{66}) + k_2 B' \alpha \beta^2 (E_{12} + E_{66}), \\ K_{22} &= \alpha^2 A_{66} + \beta^2 A_{22}, \\ K_{23} &= -\alpha^2 \beta (B_{12} + 2B_{66}) - \beta^3 B_{22}, \\ K_{24} &= k_1 A' \alpha^2 \beta (E_{12} + E_{66}) + k_2 B' \beta (\beta^2 E_{22} + \alpha^2 E_{66}), \\ K_{33} &= 2\alpha^2 \beta^2 (D_{12} + 2D_{66}) + \alpha^4 D_{11} + \beta^4 D_{22}, \\ K_{34} &= -k_1 A' \alpha^2 \beta^2 (F_{12} + 2F_{66}) - k_2 B' \alpha^2 \beta^2 (F_{12} + 2F_{66}) - k_1 A' \alpha^4 F_{11} - k_2 B' \beta^4 F_{22}, \\ K_{44} &= k_1 A' \alpha^2 (k_1 A' \alpha^2 H_{11} + k_2 B' \beta^2 H_{12}) + k_2 B' \beta^2 (k_1 A' \alpha^2 H_{12} + k_2 B' \beta^2 H_{22}) \\ &+ \alpha^2 \beta^2 (k_1 A' + k_2 B') (k_1 A' + k_2 B') H_{66} + (k_2 B')^2 \beta^2 A_{44}^s + (k_1 A')^2 \alpha^2 A_{55}^s, \\ N_{11} &= \gamma_1 \alpha^2 + \gamma_2 \beta^2 \end{aligned} \quad (\text{III.25})$$

III.3 Conclusion

Dans ce chapitre, une théorie raffinée de déformation de cisaillement d'ordre élevé à quatre variables a été utilisée pour analyser le comportement du flambement des plaques sandwichs rectangulaires et carrées en FGM. Ces structures sont chargées dans le plan par une force mécanique de compression uniaxiale et bi-axiale. Les équations de mouvement de la présente approche d'ordre élevé sont dérivées en utilisant le principe des travaux virtuels, et les solutions sont ensuite obtenues en utilisant la méthode de Navier.

Chapitre IV

Résultats et discussions

Chapitre IV

Résultats et discussions

IV.1. Introduction

Sur la base de la revue de la littérature et des observations susmentionnées dans le chapitre précédent, il convient de noter que les études sur l'analyse du flambement des plaques sandwichs à gradient fonctionnel (FG) sont limitées dans la littérature. C'est pourquoi cette étude a été menée. Dans cette analyse, des solutions analytiques pour des plaques sandwichs FG symétriques sont obtenues à l'aide d'une théorie raffinée de déformation en cisaillement à quatre variables. Les plaques sandwichs ont des peaux fabriquées par FGM et deux types de noyau isotrope homogène (noyau dur et noyau souple). La présente théorie utilise une fonction de forme de type polynomial en termes de coordonnées d'épaisseur pour prendre en compte l'effet de la déformation en cisaillement transversal. Les équations régissant sont évaluées à partir du principe des travaux virtuels. Ensuite, les solutions de flambement des plaques sandwichs simplement appuyées sont obtenues en utilisant la technique de Navier.

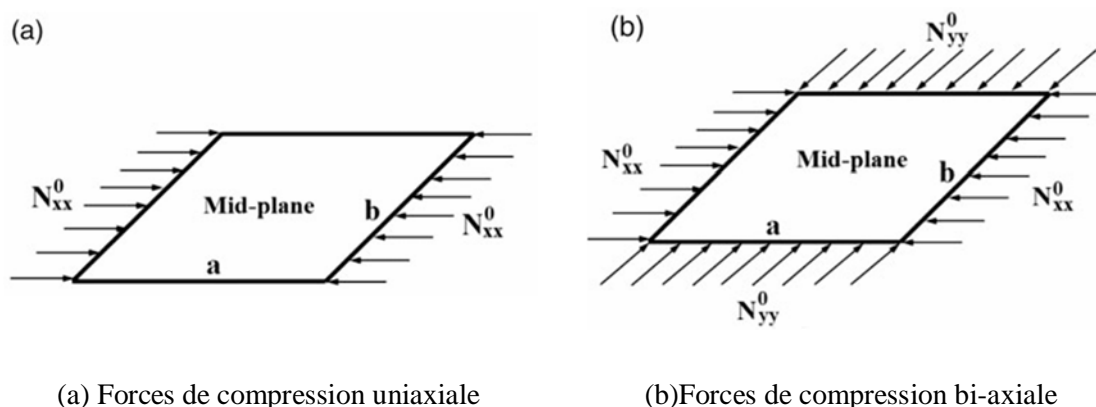
L'exactitude de la présente théorie est confirmée en comparant les résultats obtenus avec ceux disponibles dans la littérature. Nous allons étudier les effets de plusieurs paramètres sur la charge critique du flambement, tels que le coefficient de loi de puissance, le rapport géométrique, le rapport côté/épaisseur et les différents rapports d'épaisseur peau-noyau-peau.

IV.2. Exemples numériques et discussions

A travers cette étude, des solutions analytiques sont obtenues pour l'analyse du flambement de deux types de plaques sandwichs symétriques à gradient fonctionnel (FG) à l'aide d'une théorie raffinée de déformation en cisaillement à quatre variables. Comme indiqué dans la figure IV.1 ci-après, les plaques sont soumises à une charge plane uniaxiale ou bi-axiale. L'étude numérique prend en compte quatre types de configurations de couches, comme détaillé dans le tableau IV.1.

Tableau IV. 1 : Coordonnées d'épaisseur de quatre types de plaques sandwichs FG.

Configurations des couches (LC)	Coordonnées d'épaisseur
1-0-1	$h_1 = -h/2, h_2 = h_3 = 0, h_4 = h/2$
2-1-2	$h_1 = -h/2, h_2 = -h/10, h_3 = h/10, h_4 = h/2$
1-1-1	$h_1 = -h/2, h_2 = -h/6, h_3 = h/6, h_4 = h/2$
1-2-1	$h_1 = -h/2, h_2 = -h/4, h_3 = h/4, h_4 = h/2$



(a) Forces de compression uniaxiale

(b) Forces de compression bi-axiale

Figure IV.1: Plaques sandwichs FG soumises à des forces de compression dans le plan.

Les formes adimensionnelles suivantes sont utilisées dans le but de présenter les charges critiques du flambement :

$$\bar{N}_{cr} = \frac{N_0 a^2}{100 E_0 h^3}, \quad (\text{Plaques sandwichs FG, } E_0 = 1 \text{ GPa}) \quad (\text{IV.01})$$

IV.2.1 Flambement uniaxial des plaques sandwichs FG

Dans cet exemple, les résultats de la charge critique de flambement sont obtenus pour des plaques sandwichs fonctionnellement graduées (FG) carrées et rectangulaires soumises à une force de compression uniaxiale, comme illustré à la figure IV.1 (a). Il est à noter que dans le cas d'une plaque rectangulaire, les forces de compression dans le plan sont appliquées selon la direction x . Dans le cadre de notre étude, nous avons obtenu des résultats numériques pour différentes configurations de couches (LC : 1-0-1, 2-1-2, 1-1-1, 1-2-1), paramètres de loi de puissance ($p=0, 1, 5, 10$) et un rapport côté/épaisseur qui est fixé à $a/h=10$. Deux types de

plaques FG ont été analysés, à âme dure et à âme souple, en nous appuyant sur la présente théorie de déformation en cisaillement. Pour la validation de la présente formulation du modèle optimisé, les résultats sont comparés à ceux présentés par Mahmoud et Tounsi [29], ainsi les différents modèles de plaques d'ordre élevé dérivés de la théorie unifiée développée par Sayyad et Ghugal [3]. Ces derniers s'appuient sur la théorie de la déformation en cisaillement parabolique (PSDT) générée par Reddy [69], la théorie de la déformation en cisaillement trigonométrique (TSDT) développée par Touratier [70], la théorie de la déformation en cisaillement hyperbolique (HSDT) présentée par Soldatos [80], la théorie de la déformation en cisaillement exponentielle proposée par Karama et al. [71], la théorie de la déformation en cisaillement du premier ordre de (Mindlin 1951) et la théorie classique des plaques de Kirchhoff [1].

Tableau IV. 2 : La charge critique adimensionnelle du flambement uniaxial (\bar{N}_{cr}) dans une plaque sandwich FG carrée de type A (noyau dur). $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0, a/h = 10$.

LC	p	Théories							
		Présente	Ref. [29]	PSDT ^(a)	TSDT ^(a)	HSDT ^(a)	ESDT ^(a)	FSDT ^(a)	CPT
1-0-1	0	13.005	12.984	13.005	13.006	13.009	13.018	13.121	13.737
	1	5.1671	5.1619	5.1671	5.1685	5.1671	5.1702	5.1731	5.3325
	5	2.6582	2.6539	2.6582	2.6600	2.6580	2.6621	2.6534	2.7308
	10	2.4873	2.4821	2.4873	2.4893	2.4871	2.4916	2.4853	2.5699
2-1-2	0	13.005	12.984	13.005	13.006	13.009	13.018	13.121	13.737
	1	5.8401	5.8346	5.8401	5.8412	5.8400	5.8427	5.8483	6.0273
	5	3.0426	3.0402	3.0426	3.0441	3.0424	3.0426	3.0363	3.1070
	10	2.7463	2.7430	2.7463	2.7404	2.7462	2.7463	2.7388	2.8034
1-1-1	0	13.005	12.984	13.005	13.006	13.009	13.018	13.121	13.737
	1	6.4647	6.4591	6.4647	6.4654	6.4647	6.4665	6.4781	6.6815
	5	3.5795	3.5787	3.5795	3.5806	3.5794	3.5818	3.5755	3.6573
	10	3.1947	3.1935	3.1947	3.1959	3.1946	3.1973	3.1889	3.2592
1-2-1	0	13.005	12.984	13.005	13.006	13.009	13.018	13.121	13.737
	1	7.5066	7.4999	7.5066	7.5063	7.5066	7.5066	7.5321	7.7841
	5	4.7347	4.7340	4.7347	4.7349	4.7347	4.7347	4.7379	4.8572
	10	4.2799	4.2800	4.2799	4.2803	4.2799	4.2799	4.2803	4.3822

^(a) Résultats tirés de la référence de Sayyad et Ghugal [3].

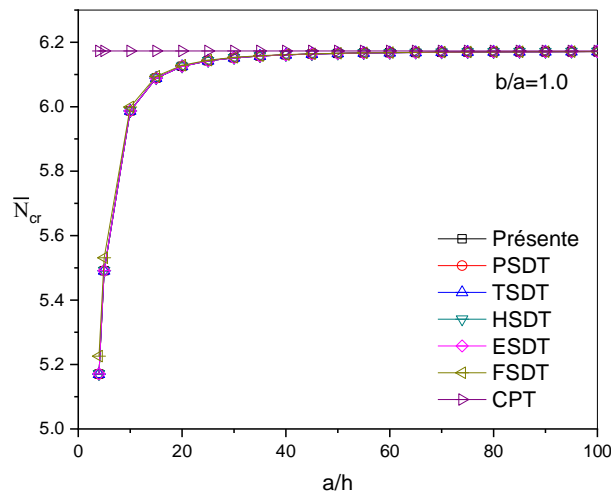
Les tableaux IV. 2 et IV. 3 présentent une comparaison des résultats de la charge critique adimensionnelle du flambement calculés à l'aide du présent modèle et ceux obtenus par Nguyen et al. [14], Mahmoud et Tounsi [29] ainsi que par tous les modèles présentés par Sayyad et Ghugal [3], tels que PSDT, TSDT, HSDT, ESDT et FSDT. Il est souligné que les charges critiques de flambement prédites par la présente théorie concordent parfaitement avec ceux disponibles dans la littérature. Néanmoins, FSDT et CPT surestiment les résultats de la charge critique du flambement à cause de la négligence de l'effet de déformation de cisaillement. Les valeurs de la charge critique adimensionnelle de flambement augmentent avec l'augmentation des coefficients de loi de puissance pour un noyau souple homogène, tandis qu'ils diminuent avec l'augmentation des coefficients de loi de puissance pour un noyau dur homogène. Les résultats de la charge critique de flambement sont présentés pour quatre types de configurations de couches. Dans le cas d'un noyau souple homogène, le facteur de charge critique de flambement est maximal pour 1-0-1 et minimal pour 1-2-1, ce qui signifie que la charge de flambement diminue avec l'augmentation de l'épaisseur du noyau. De même, dans le cas d'un noyau dur homogène, le facteur de la charge critique de flambement est minimal pour 1-0-1 et maximal pour 1-2-1.

Tableau IV. 3 : La charge critique adimensionnelle du flambement uniaxial (\bar{N}_{cr}) dans une plaque sandwich FG carrée de type B (noyau souple). ($\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0, a/h = 10$).

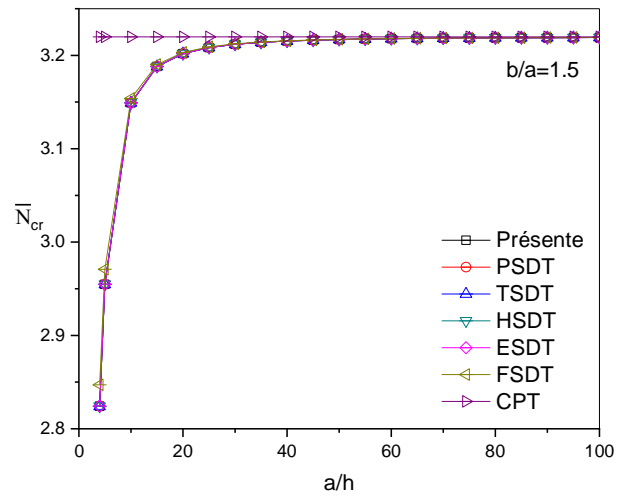
LC	p	Théories							
		Présente	Ref. [14]	PSDT ^(a)	TSDT ^(a)	HSDT ^(a)	ESDT ^(a)	FSDT ^(a)	CPT
1-0-1	0	6.2867	–	6.2867	6.2870	6.2878	6.2898	6.3137	6.4532
	1	9.9617	10.165	9.9617	9.9422	9.8600	9.9247	10.286	10.936
	5	12.623	12.719	12.623	12.611	12.361	12.600	12.849	13.537
	10	12.863	12.914	12.863	12.857	12.587	12.853	13.038	13.698
2-1-2	0	6.2867	–	6.2867	6.2870	6.2878	6.2898	6.3137	6.4532
	1	9.1623	9.4620	9.1623	9.1320	9.1652	9.1034	9.5836	10.241
	5	11.981	12.252	11.981	11.942	11.985	11.902	12.395	13.161
	10	12.351	12.571	12.351	12.318	12.354	12.284	12.712	13.465
1-1-1	0	6.2867	–	6.2867	6.2870	6.2878	6.2898	6.3137	6.4532
	1	8.4847	8.8255	8.4847	8.4538	8.4877	8.4258	8.9440	9.5871
	5	11.251	11.664	11.251	11.193	11.256	11.134	11.811	12.611
	10	11.685	12.060	11.685	11.629	11.690	11.570	12.208	13.009
1-2-1	0	6.2867	–	6.2867	6.2870	6.2878	6.2898	6.3137	6.4532
	1	7.4603	7.7858	7.4603	7.4412	7.4623	7.4268	7.8942	8.4845
	5	9.9346	10.475	9.9346	9.8750	9.9401	9.8186	10.620	11.411
	10	10.381	10.925	10.381	10.314	10.387	10.249	11.074	11.886

^(a) Résultats tirés de la référence de Sayyad et Ghugal [3].

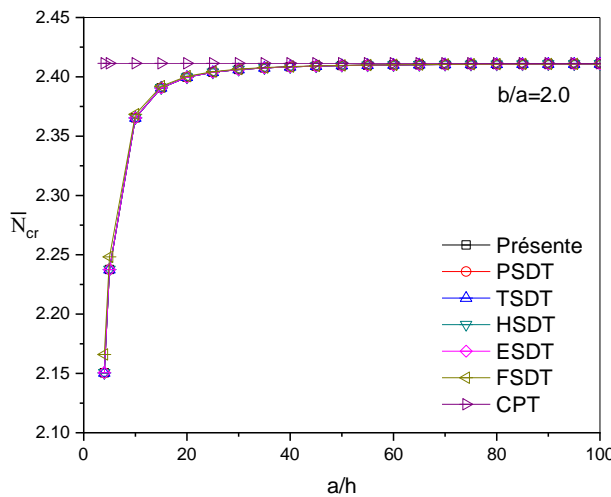
Les tableaux IV.4 et IV.5 présentent les facteurs de la charge critique de flambement pour les plaques rectangulaires. Les résultats numériques sont présentés pour différents rapports a/b , a/h et pour un paramètre matériel $p = 2$. L'examen de ces tableaux montre que la charge critique adimensionnelle de flambement est maximale pour les plaques minces et minimale pour les plaques épaisses. Les facteurs de charge critique adimensionnelle de flambement diminuent avec l'augmentation des rapports a/b . Les figures IV.2 et IV.3 ci-dessous illustrent la variation des facteurs de charge critique de flambement en fonction du rapport a/h pour les plaques sandwichs rectangulaires FG à noyau dur et à noyau souple, respectivement, avec une configuration de couche 1-2-1 et $p = 2$.



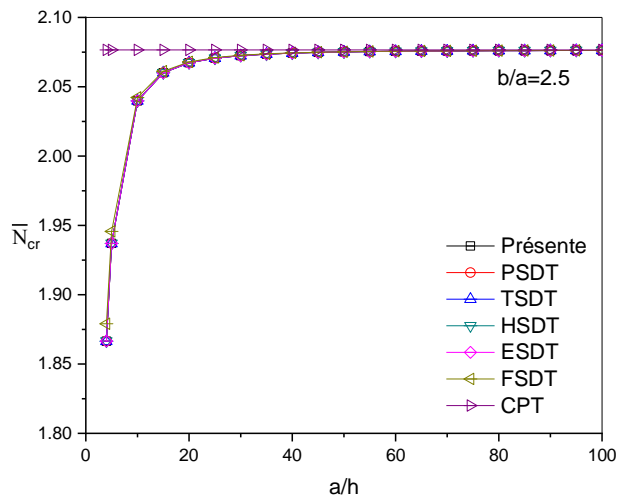
(a) Plaque sandwich FG $b/a = 1.0$



(b) Plaque sandwich FG $b/a = 1.5$



(c) Plaque sandwich FG $b/a = 2.0$



(c) Plaque sandwich FG $b/a = 2.5$

Figure IV.2: Variation de la charge critique adimensionnelle du flambement en fonction du rapport côté/épaisseur (a/h) dans une plaque sandwich FG rectangulaire de type A (noyau dur) avec une configuration de couche 1-2-1 ($p = 2$).

Tableau IV. 4 : La charge critique adimensionnelle du flambement uniaxial (\bar{N}_{cr}) dans une plaque sandwich FG rectangulaire de type A (noyau dur) avec une configuration de couche 1-2-1. ($\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0, p = 2$).

a/b	a/h	Théories						
		Présente	PSDT ^(a)	TSDT ^(a)	HSDT ^(a)	ESDT ^(a)	FSDT ^(a)	CPT
1.0	4	5.1704	5.1704	5.1700	5.1706	5.1710	5.2257	6.1730
	10	5.9870	5.9870	5.9868	5.9870	5.9869	5.9991	6.1730
	20	6.1255	6.1255	6.1252	6.1254	6.1254	6.1286	6.1730
	50	6.1645	6.1645	6.1648	6.1654	6.1651	6.1658	6.1730
	100	6.1720	6.1720	6.1720	6.1712	6.1659	6.1746	6.1730
1.5	4	2.8242	2.8242	2.8239	2.8242	2.8243	2.8471	3.2199
	10	3.1492	3.1492	3.1492	3.1492	3.1492	3.1538	3.2199
	20	3.2020	3.2020	3.2019	3.2019	3.2019	3.2032	3.2199
	50	3.2171	3.2171	3.2171	3.2170	3.2168	3.2180	3.2199
	100	3.2184	3.2184	3.2219	3.2192	3.2168	3.2201	3.2199
2.0	4	2.1505	2.1505	2.1504	2.1506	2.1506	2.1659	2.4113
	10	2.3654	2.3654	2.3653	2.3654	2.3654	2.3684	2.4113
	20	2.3998	2.3998	2.3997	2.3997	2.3997	2.4005	2.4113
	50	2.4091	2.4091	2.4094	2.4095	2.4093	2.4100	2.4113
	100	2.4098	2.4098	2.4111	2.4109	2.4088	2.4105	2.4113
2.5	4	1.8665	1.8665	1.8664	1.8665	1.8666	1.8790	2.0766
	10	2.0399	2.0399	2.0398	2.0398	2.0398	2.0423	2.0766
	20	2.0673	2.0673	2.0672	2.0673	2.0673	2.0681	2.0766
	50	2.0747	2.0747	2.0752	2.0751	2.0745	2.0757	2.0766
	100	2.0754	2.0754	2.0768	2.0762	2.0740	2.0763	2.0766

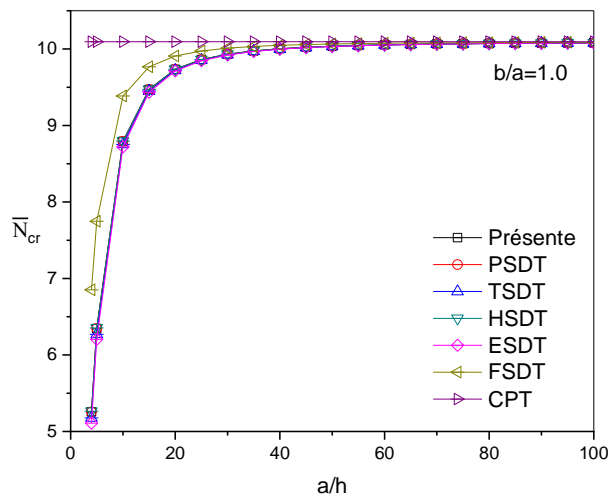
^(a) Résultats tirés de la référence de Sayyad et Ghugal [3].

Les tableaux IV.6 et IV.7 présentent les résultats de la charge critique adimensionnelle de flambement dans une plaque sandwich FG carrée pour la configuration de couches 2-1-2. Cette charge est déterminée en fonction de différents rapports côté/épaisseur et une variété des coefficients de loi de puissance. Les facteurs de charge critique de flambement prédits par CPT sont indépendants du rapport côté/épaisseur. Les figures IV.4 et IV.5 illustrent la variation des facteurs de charge critique de flambement en fonction du coefficient de loi de puissance (p) pour des plaques sandwichs FG carrées à âme pleine et à âme souple, respectivement, pour la configuration de couche 2-1-2.

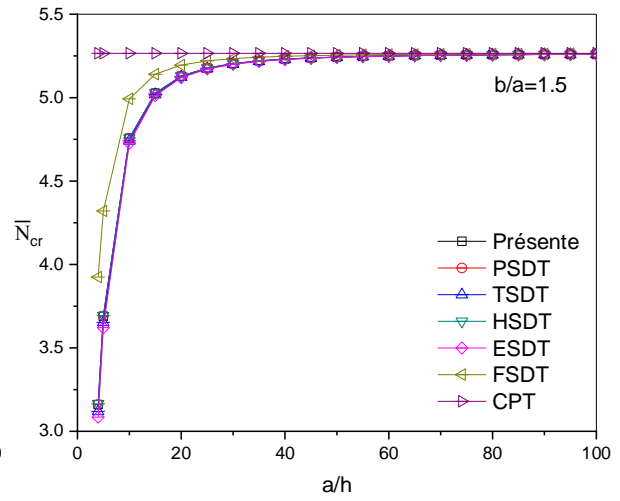
Tableau IV. 5 : La charge critique adimensionnelle du flambement uniaxial (\bar{N}_{cr}) dans une plaque sandwich FG rectangulaire de type B (noyau souple) avec une configuration de couche 1-2-1. ($\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0, p = 2$).

a/b	a/h	Théories						
		Présente	PSDT ^(a)	TSDT ^(a)	HSDT ^(a)	ESDT ^(a)	FSDT ^(a)	CPT
1.0	4	5.2574	5.2574	5.1767	5.2654	5.1094	6.8527	10.095
	10	8.7924	8.7924	8.7538	8.7961	8.7204	9.3849	10.095
	20	9.7345	9.7345	9.7226	9.7356	9.7121	9.9080	10.095
	50	10.036	10.036	10.033	10.036	10.032	10.065	10.095
	100	10.081	10.081	10.079	10.080	10.079	10.086	10.095
1.5	4	3.1607	3.1607	3.1194	3.1647	3.0847	3.9246	5.2659
	10	4.7566	4.7566	4.7409	4.7580	4.7272	4.9929	5.2659
	20	5.1285	5.1285	5.1239	5.1289	5.1199	5.1949	5.2659
	50	5.2435	5.2435	5.2426	5.2435	5.2420	5.2543	5.2659
	100	5.2604	5.2604	5.2602	5.2603	5.2598	5.2647	5.2659
2.0	4	2.5009	2.5009	2.4709	2.5038	2.4454	3.0434	3.9436
	10	3.6091	3.6091	3.5986	3.6101	3.5895	3.7654	3.9436
	20	3.8542	3.8542	3.8512	3.8545	3.8486	3.8975	3.9436
	50	3.9291	3.9291	3.9285	3.9290	3.9281	3.9361	3.9436
	100	3.9398	3.9398	3.9397	3.9399	3.9398	3.9426	3.9436
2.5	4	2.2118	2.2118	2.1863	2.2142	2.1648	2.6647	3.3961
	10	3.1272	3.1272	3.1187	3.1280	3.1113	3.2533	3.3961
	20	3.3246	3.3246	3.3222	3.3248	3.3201	3.3592	3.3961
	50	3.3845	3.3845	3.3842	3.3845	3.3838	3.3904	3.3961
	100	3.3931	3.3931	3.3929	3.3932	3.3936	3.3950	3.3961

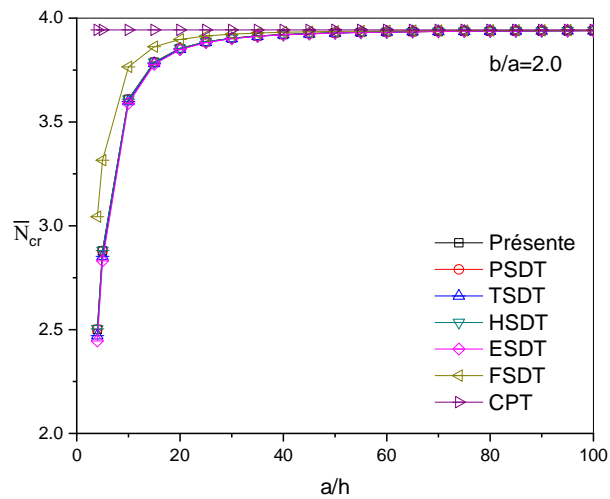
^(a) Résultats tirés de la référence de Sayyad et Ghugal [3].



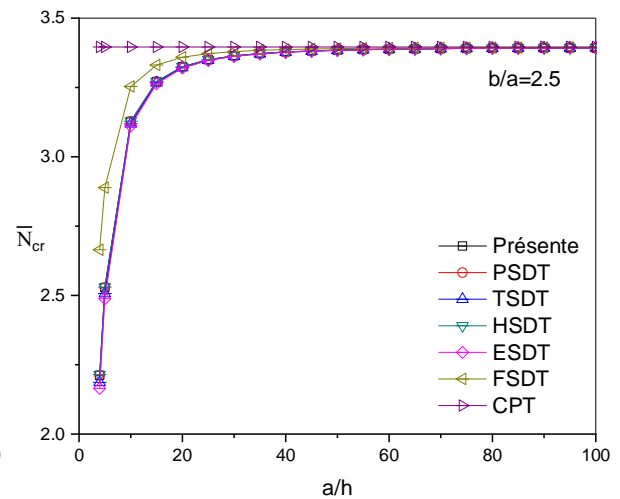
(a) Plaque sandwich FG $b/a = 1.0$



(b) Plaque sandwich FG $b/a = 1.5$



(c) Plaque sandwich FG $b/a = 2.0$



(c) Plaque sandwich FG $b/a = 2.5$

Figure IV.3: Variation de la charge critique adimensionnelle du flambement en fonction du rapport côté/épaisseur (a/h) dans une plaque sandwich FG rectangulaire de type B (noyau souple) avec une configuration de couche 1-2-1 ($p = 2$).

Tableau IV. 6 : La charge critique adimensionnelle du flambement uniaxial (\bar{N}_{cr}) dans une plaque sandwich FG carrée de type A (noyau dur) avec une configuration de couche 2-1-2. ($\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0$).

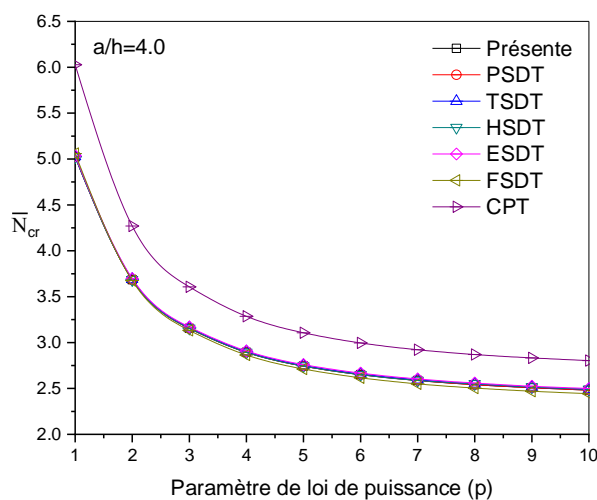
a/h	p	Théories						
		Présente	PSDT ^(a)	TSDT ^(a)	HSDT ^(a)	ESDT ^(a)	FSDT ^(a)	CPT
4	1	5.0226	5.0226	5.0282	5.0221	5.0357	5.0595	6.0273
	2	3.6842	3.6842	3.6904	3.6836	3.6842	3.6760	4.2700
	5	2.7442	2.7442	2.7519	2.7435	2.7442	2.7121	3.1070
	10	2.4815	2.4815	2.4482	2.4808	2.4815	2.4433	2.8034
10	1	5.8401	5.8401	5.8412	5.8400	5.8427	5.8483	6.0273
	2	4.1639	4.1639	4.1651	4.1638	4.1639	4.1624	4.2700
	5	3.0426	3.0426	3.0441	3.0424	3.0426	3.0363	3.1070
	10	2.7463	2.7463	2.7404	2.7462	2.7463	2.7388	2.8034
20	1	5.9794	5.9794	5.9797	5.9793	5.9801	5.9816	6.0273
	2	4.2430	4.2430	4.2434	4.2430	4.2430	4.2427	4.2700
	5	3.0906	3.0906	3.0911	3.0906	3.0906	3.0890	3.1070
	10	2.7889	2.7889	2.7874	2.7889	2.7889	2.7870	2.8034
50	1	6.0198	6.0198	6.0203	6.0196	6.0196	6.0199	6.0273
	2	4.2672	4.2672	4.2656	4.2657	4.2672	4.2663	4.2700
	5	3.1045	3.1045	3.1039	3.1044	3.1045	3.1045	3.1070
	10	2.8011	2.8011	2.8007	2.8011	2.8011	2.8007	2.8034
100	1	6.0237	6.0237	6.0273	6.0254	6.0247	6.0255	6.0273
	2	4.2707	4.2707	4.2678	4.2689	4.2707	4.2722	4.2700
	5	3.1063	3.1063	3.1072	3.1064	3.1063	3.1061	3.1070
	10	2.8020	2.8020	2.8034	2.8028	2.8020	2.8018	2.8034

^(a) Résultats tirés de la référence de Sayyad et Ghugal [3].

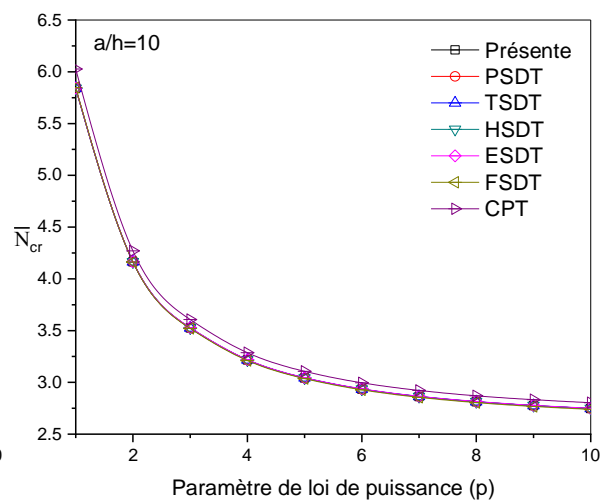
Tableau IV. 7 : La charge critique adimensionnelle du flambement uniaxial (\bar{N}_{cr}) dans une plaque sandwich FG carrée de type B (noyau souple) avec une configuration de couche 2-1-2. ($\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0$).

a/h	p	Théories						
		Présente	PSDT ^(a)	TSDT ^(a)	HSDT ^(a)	ESDT ^(a)	FSDT ^(a)	CPT
4	1	5.9151	5.9151	5.8413	5.9223	5.7739	7.1671	10.241
	2	7.0674	7.0674	6.9650	7.0769	6.8666	8.4840	11.998
	5	8.1643	8.1643	8.0573	8.1739	7.9514	9.4925	13.161
	10	8.6272	8.6272	8.5319	8.6362	8.4371	9.8265	13.465
10	1	9.1623	9.1623	9.1320	9.1652	9.1034	9.5836	10.241
	2	10.787	10.787	10.746	10.790	10.706	11.252	11.998
	5	11.981	11.981	11.942	11.985	11.902	12.395	13.161
	10	12.351	12.351	12.318	12.354	12.284	12.712	13.465
20	1	9.9481	9.9481	9.9391	9.9490	9.9305	10.068	10.241
	2	11.670	11.670	11.658	11.671	11.646	11.802	11.998
	5	12.845	12.845	12.833	12.846	12.822	12.961	13.161
	10	13.168	13.168	13.158	13.168	13.148	13.268	13.465
50	1	10.193	10.193	10.191	10.193	10.190	10.213	10.241
	2	11.945	11.945	11.942	11.945	11.940	11.967	11.998
	5	13.109	13.109	13.107	13.110	13.106	13.129	13.161
	10	13.416	13.416	13.415	13.416	13.413	13.434	13.465
100	1	10.230	10.230	10.228	10.229	10.227	10.236	10.241
	2	11.945	11.945	11.984	11.985	11.984	11.996	11.998
	5	13.149	13.149	13.147	13.148	13.147	13.155	13.161
	10	13.453	13.453	13.451	13.453	13.450	13.456	13.465

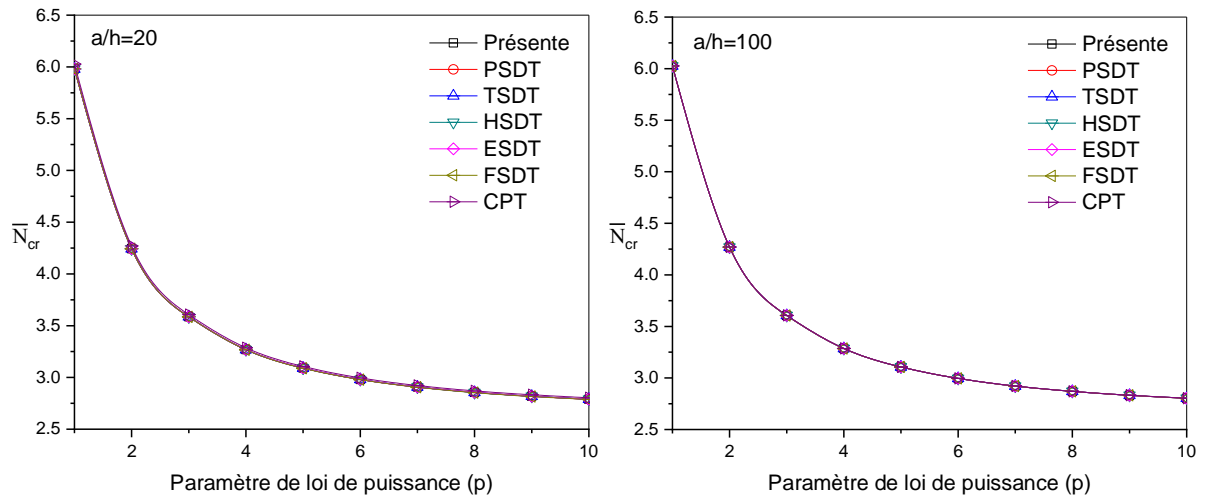
^(a) Résultats tirés de la référence de Sayyad et Ghugal [3].



(a) Plaque sandwich FG $a/h = 4$



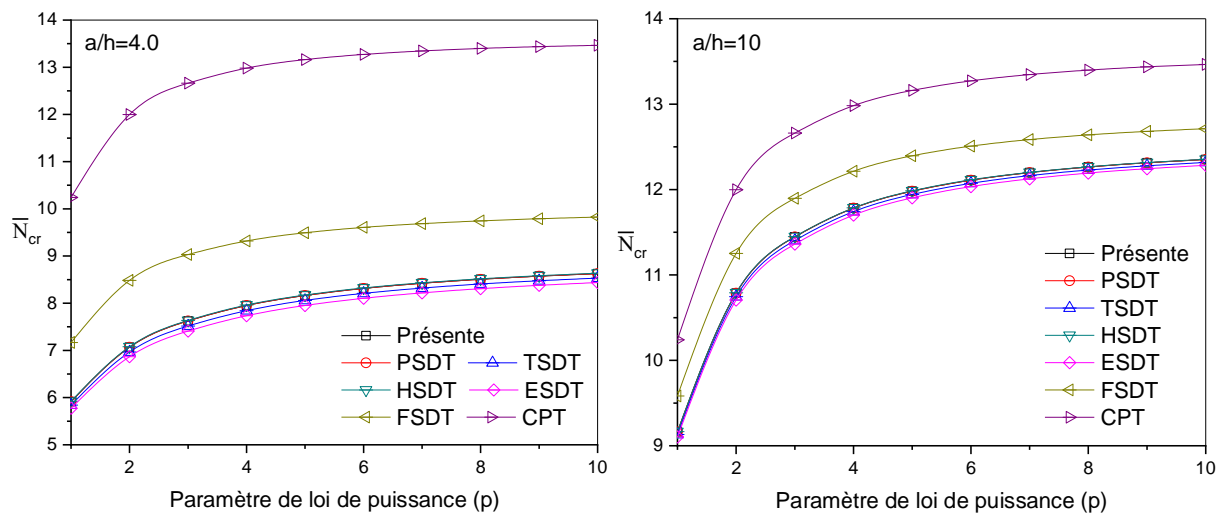
(b) Plaque sandwich FG $a/h = 10$



(c) Plaque sandwich FG $a/h = 20$

(d) Plaque sandwich FG $a/h = 100$

Figure IV.4: Variation de la charge critique adimensionnelle du flambement en fonction du paramètre de loi de puissance (p) dans une plaque sandwich FG carrée de type A (noyau dur) avec une configuration de couche 2-1-2.



(a) Plaque sandwich FG $a/h = 4$

(b) Plaque sandwich FG $a/h = 10$

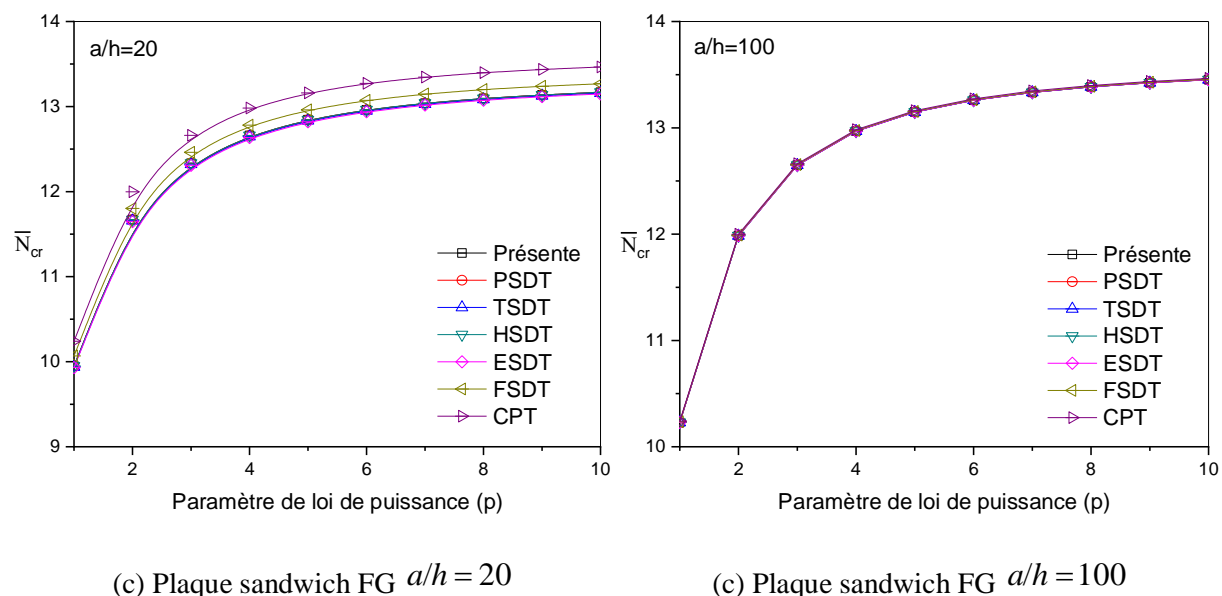


Figure IV.5: Variation de la charge critique adimensionnelle du flambement en fonction du paramètre de loi de puissance (P) dans une plaque sandwich FG carrée de type B (noyau souple) avec une configuration de couche 2-1-2.

IV.2.2 Flambement bi-axial des plaques sandwichs FG

Dans cet exemple, des solutions d'ordre élevé pour le flambement bi-axial des plaques sandwich FG carrées et rectangulaires sont présentées. La figure IV.1(b) montre les directions de la force de compression agissant sur la plaque. Dans l'analyse du flambement bi-axial, une plaque sandwich FG à appui simple est soumise à des forces de compression bidirectionnelles dans le plan. Les tableaux IV.8 à IV.13 présentent les facteurs de la charge critique adimensionnelle du flambement pour les différents types de plaques sandwichs à gradient fonctionnel en utilisant la présente théorie raffinée d'ordre élevé. Les résultats obtenus sont comparés avec ceux fournis par Sayyad et Ghugal [3] basés sur PSDT, TSDT, HSDT, ESDT et FSDT et ceux fournis par Mahmoud et Tounsi [29]. Il est mentionné que les solutions de Mahmoud et Tounsi [29] sont déduites via un champ de déplacement qui est composé uniquement de cinq variables indépendantes comme la théorie de la déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT). Un bon accord est observé entre la théorie proposée et celles publiées dans la littérature. Les facteurs de charge critique de flambement sont obtenus pour différentes valeurs de coefficients de loi de puissance, de rapports a/h , de rapports géométrique a/b et de l'épaisseur de l'âme par rapport aux peaux.

Tableau IV. 8 : La charge critique adimensionnelle du flambement bi-axial (\bar{N}_{cr}) dans une plaque sandwich FG carrée de type A (noyau dur). $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 1, a/h = 10$.

LC	p	Théories							
		Présente	Ref. [31]	PSDT ^(a)	TSDT ^(a)	HSDT ^(a)	ESDT ^(a)	FSDT ^(a)	CPT
1-0-1	0	6.5025	6.4921	6.5025	6.5030	6.5045	6.5090	6.5605	6.8685
	1	2.5836	2.5809	2.5836	2.5843	2.5836	2.5851	2.5866	2.6663
	5	1.3291	1.3269	1.3291	1.3300	1.3290	1.3311	1.3267	1.3654
	10	1.2437	1.2410	1.2437	1.2447	1.2436	1.2458	1.2427	1.2850
2-1-2	0	6.5025	6.4921	6.5025	6.5030	6.5045	6.5090	6.5605	6.8685
	1	2.9201	2.9173	2.9201	2.9206	2.9200	2.9214	2.9242	3.0137
	5	1.5213	1.5201	1.5213	1.5221	1.5212	1.5213	1.5182	1.5535
	10	1.3732	1.3715	1.3732	1.3702	1.3731	1.3732	1.3694	1.4017
1-1-1	0	6.5025	6.4921	6.5025	6.5030	6.5045	6.5090	6.5605	6.8685
	1	3.2324	3.2295	3.2324	3.2327	3.2324	3.2333	3.2391	3.3408
	5	1.7898	1.7893	1.7898	1.7903	1.7897	1.7909	1.7878	1.8287
	10	1.5974	1.5968	1.5974	1.5980	1.5973	1.5987	1.5945	1.6296
1-2-1	0	6.5025	6.4921	6.5025	6.5030	6.5045	6.5090	6.5605	6.8685
	1	3.7533	3.7499	3.7533	3.7532	3.7533	3.7533	3.7661	3.8921
	5	2.3674	2.3670	2.3674	2.3675	2.3674	2.3674	2.3690	2.4286
	10	2.1400	2.1400	2.1400	2.1402	2.1400	2.1400	2.1402	2.1911

^(a) Résultats tirés de la référence de Sayyad et Ghugal [3].

Les tableaux IV.8 et IV.9 montrent l'effet du coefficient de loi de puissance et des configurations de couches sur le facteur de charge critique de flambement, les tableaux IV.10 et IV.11 montrent l'effet des rapports a/b et a/h sur le facteur de charge critique de flambement, et les tableaux IV.12 et IV.13 montrent l'effet des rapports a/h et du coefficient de loi de puissance sur les facteurs de charge critique de flambement. Les résultats numériques obtenus par la présente théorie sont comparés avec ceux présentés par Sayyad et Ghugal [3] et Mahmoud et Tounsi [29]. Ces comparaisons révèlent une excellente concordance entre les données.

Tableau IV. 9 : La charge critique adimensionnelle du flambement bi-axial (\bar{N}_{cr}) dans une plaque sandwich FG carrée de type A (noyau souple). $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 1, a/h = 10$.

LC	p	Théories							
		Présente	Ref. [14]	PSDT ^(a)	TSDT ^(a)	HSDT ^(a)	ESDT ^(a)	FSDT ^(a)	CPT
1-0-1	0	3.1434	–	3.1434	3.1435	3.1439	3.1449	3.1569	3.2266
	1	4.9809	5.0826	4.9809	4.9711	4.9300	4.9624	5.1430	5.4680
	5	6.3115	6.3597	6.3115	6.3055	6.1805	6.3000	6.4245	6.7685
	10	6.4315	6.4571	6.4315	6.4285	6.2935	6.4265	6.5190	6.8490
2-1-2	0	3.1434	–	3.1434	3.1435	3.1439	3.1449	3.1569	3.2266
	1	4.5812	4.7310	4.5812	4.5660	4.5826	4.5517	4.7918	5.1205
	5	5.9905	6.1261	5.9905	5.9710	5.9925	5.9510	6.1975	6.5805
	10	6.1755	6.2857	6.1755	6.1590	6.1770	6.1420	6.3560	6.7325
1-1-1	0	3.1434	–	3.1434	3.1435	3.1439	3.1449	3.1569	3.2266
	1	4.2424	4.4127	4.2424	4.2269	4.2439	4.2129	4.4720	4.7936
	5	5.6255	5.8319	5.6255	5.5965	5.6280	5.5670	5.9055	6.3055
	10	5.8425	6.0301	5.8425	5.8145	5.8450	5.7850	6.1040	6.5045
1-2-1	0	3.1434	–	3.1434	3.1435	3.1439	3.1449	3.1569	3.2266
	1	3.7302	3.8929	3.7302	3.7206	3.7312	3.7134	3.9471	4.2423
	5	4.9673	5.2375	4.9673	4.9375	4.9701	4.9093	5.3100	5.7055
	10	5.1905	5.4628	5.1905	5.1570	5.1935	5.1245	5.5370	5.9430

^(a) Résultats tirés de la référence de Sayyad et Ghugal [3].

Ces tableaux montrent que le facteur de la charge critique adimensionnelle de flambement est minimal pour le noyau dur homogène et maximal pour le noyau souple homogène. Les facteurs de la charge critique adimensionnelle de flambement diminuent avec l'augmentation de l'épaisseur du noyau souple homogène (maximum pour la configuration 1-0-1 et minimum pour la configuration 1-2-1), tandis que la nature opposée de la variation est observée dans le cas du noyau dur homogène (minimum pour la configuration 1-0-1 et maximum pour la configuration 1-2-1). Parmi tous les modèles, TSDT et HSDT présentent des facteurs de charge critique de flambement en étroite concordance avec PSDT. Toutefois, la théorie de déformation en cisaillement exponentielle (ESDT) sous-estime légèrement le facteur de charge critique de flambement par rapport à la théorie de déformation en cisaillement parabolique (PSDT). FSDT et CPT surestiment le facteur de la charge critique de flambement en raison de la négligence de la déformation de cisaillement transversale. Les facteurs de charge critique de flambement sont constants pour tous les rapports côté/épaisseur des plaques simplement appuyées lorsqu'ils sont prédits par CPT. Enfin, à partir des tableaux

IV.8 à IV.13, il est conclu que pour les plaques carrées, la charge de flambement bi-axiale est exactement la moitié de la charge de flambement uniaxiale.

Tableau IV. 10 : La charge critique adimensionnelle du flambement bi-axial (\bar{N}_{cr}) dans une plaque sandwich FG rectangulaire de type A (noyau dur) avec une configuration de couche 1-2-1. ($\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 1, p = 2$).

a/b	a/h	Théories						
		Présente	PSDT ^(a)	TSDT ^(a)	HSDT ^(a)	ESDT ^(a)	FSDT ^(a)	CPT
1.0	4	2.5852	2.5852	2.5850	2.5853	2.5855	2.6129	3.0865
	10	2.9935	2.9935	2.9934	2.9935	2.9935	2.9996	3.0865
	20	3.0628	3.0628	3.0626	3.0627	3.0627	3.0643	3.0865
	50	3.0823	3.0823	3.0824	3.0827	3.0826	3.0829	3.0865
	100	3.0860	3.0860	3.0860	3.0856	3.0830	3.0873	3.0865
1.5	4	1.9552	1.9552	1.9550	1.9552	1.9553	1.9711	2.2292
	10	2.1802	2.1802	2.1802	2.1802	2.1802	2.1834	2.2292
	20	2.2168	2.2168	2.2167	2.2167	2.2167	2.2176	2.2292
	50	2.2272	2.2272	2.2273	2.2272	2.2270	2.2279	2.2292
	100	2.2281	2.2281	2.2305	2.2287	2.2280	2.2293	2.2292
2.0	4	1.7204	1.7204	1.7203	1.7205	1.7205	1.7327	1.9291
	10	1.8923	1.8923	1.8923	1.8923	1.8923	1.8947	1.9291
	20	1.9198	1.9198	1.9197	1.9198	1.9198	1.9204	1.9291
	50	1.9273	1.9273	1.9275	1.9276	1.9274	1.9280	1.9291
	100	1.9278	1.9278	1.9289	1.9287	1.9270	1.9284	1.9291
2.5	4	1.6091	1.6091	1.6090	1.6091	1.6091	1.6199	1.7902
	10	1.7585	1.7585	1.7584	1.7585	1.7585	1.7606	1.7902
	20	1.7822	1.7822	1.7821	1.7822	1.7822	1.7828	1.7902
	50	1.7885	1.7885	1.7890	1.7889	1.7884	1.7894	1.7902
	100	1.7891	1.7891	1.7903	1.7899	1.7879	1.7900	1.7902

^(a) Résultats tirés de la référence de Sayyad et Ghugal [3].

Tableau IV. 11 : La charge critique adimensionnelle du flambement bi-axial (\bar{N}_{cr}) dans une plaque sandwich FG rectangulaire de type B (noyau souple) avec une configuration de couche 1-2-1. ($\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 1, p = 2$).

a/b	a/h	Théories						
		Présente	PSDT ^(a)	TSDT ^(a)	HSDT ^(a)	ESDT ^(a)	FSDT ^(a)	CPT
1.0	4	2.6287	2.6287	2.5884	2.6327	2.5547	3.4264	5.0475
	10	4.3962	4.3962	4.3769	4.3981	4.3602	4.6925	5.0475
	20	4.8673	4.8673	4.8613	4.8678	4.8561	4.9540	5.0475
	50	5.0180	5.0180	5.0165	5.0180	5.0160	5.0325	5.0475
	100	5.0405	5.0405	5.0395	5.0400	5.0395	5.0430	5.0475
1.5	4	2.1882	2.1882	2.1596	2.1909	2.1356	2.7170	3.6456
	10	3.2930	3.2930	3.2821	3.2940	3.2727	3.4566	3.6456
	20	3.5505	3.5505	3.5473	3.5508	3.5445	3.5964	3.6456
	50	3.6301	3.6301	3.6295	3.6301	3.6291	3.6376	3.6456
	100	3.6418	3.6418	3.6417	3.6417	3.6414	3.6448	3.6456
2.0	4	2.0007	2.0007	1.9767	2.0031	1.9564	2.4347	3.1549
	10	2.8873	2.8873	2.8789	2.8881	2.8716	3.0123	3.1549
	20	3.0834	3.0834	3.0810	3.0836	3.0789	3.1180	3.1549
	50	3.1433	3.1433	3.1428	3.1432	3.1425	3.1489	3.1549
	100	3.1519	3.1519	3.1518	3.1519	3.1518	3.1541	3.1549
2.5	4	1.9067	1.9067	1.8848	1.9088	1.8662	2.2972	2.9277
	10	2.6958	2.6958	2.6885	2.6965	2.6822	2.8045	2.9277
	20	2.8660	2.8660	2.8640	2.8662	2.8622	2.8959	2.9277
	50	2.9177	2.9177	2.9174	2.9177	2.9170	2.9228	2.9277
	100	2.9251	2.9251	2.9249	2.9252	2.9255	2.9267	2.9277

^(a) Résultats tirés de la référence de Sayyad et Ghugal [3].

Tableau IV. 12 : La charge critique adimensionnelle du flambement bi-axial (\bar{N}_{cr}) dans une plaque sandwich FG carrée de type A (noyau dur) avec une configuration de couche 2-1-2. ($\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 1$).

a/h	p	Théories						
		Présente	PSDT ^(a)	TSDT ^(a)	HSDT ^(a)	ESDT ^(a)	FSDT ^(a)	CPT
4	1	2.5113	2.5113	2.5141	2.5111	2.5179	2.5298	3.0137
	2	1.8421	1.8421	1.8452	1.8418	1.8421	1.8380	2.1350
	5	1.3721	1.3721	1.3760	1.3718	1.3721	1.3561	1.5535
	10	1.2408	1.2408	1.2241	1.2404	1.2408	1.2217	1.4017
10	1	2.9201	2.9201	2.9206	2.9200	2.9214	2.9242	3.0137
	2	2.0820	2.0820	2.0826	2.0819	2.0820	2.0812	2.1350
	5	1.5213	1.5213	1.5221	1.5212	1.5213	1.5182	1.5535
	10	1.3732	1.3732	1.3702	1.3731	1.3732	1.3694	1.4017
20	1	2.9897	2.9897	2.9899	2.9897	2.9901	2.9908	3.0137
	2	2.1215	2.1215	2.1217	2.1215	2.1215	2.1214	2.1350
	5	1.5453	1.5453	1.5456	1.5453	1.5453	1.5445	1.5535
	10	1.3945	1.3945	1.3937	1.3945	1.3945	1.3935	1.4017
50	1	3.0099	3.0099	3.0102	3.0098	3.0098	3.0100	3.0137
	2	2.1336	2.1336	2.1328	2.1329	2.1336	2.1332	2.1350
	5	1.5523	1.5523	1.5520	1.5522	1.5523	1.5523	1.5535
	10	1.4006	1.4006	1.4004	1.4006	1.4006	1.4004	1.4017
100	1	3.0119	3.0119	3.0137	3.0127	3.0124	3.0128	3.0137
	2	2.1354	2.1354	2.1339	2.1345	2.1354	2.1361	2.1350
	5	1.5532	1.5532	1.5536	1.5532	1.5532	1.5531	1.5535
	10	1.4010	1.4010	1.4017	1.4014	1.4010	1.4009	1.4017

^(a) Résultats tirés de la référence de Sayyad et Ghugal [3].

Tableau IV. 13 : La charge critique adimensionnelle du flambement bi-axial (\bar{N}_{cr}) dans une plaque sandwich FG carrée de type B (noyau souple) avec une configuration de couche 2-1-2. ($\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 1$).

a/h	p	Théories						
		Présente	PSDT ^(a)	TSDT ^(a)	HSDT ^(a)	ESDT ^(a)	FSDT ^(a)	CPT
4	1	2.9576	2.9576	2.9207	2.9612	2.8870	3.5836	5.1205
	2	3.5337	3.5337	3.4825	3.5385	3.4333	4.2420	5.9990
	5	4.0822	4.0822	4.0287	4.0870	3.9757	4.7463	6.5805
	10	4.3136	4.3136	4.2660	4.3181	4.2186	4.9133	6.7325
10	1	4.5812	4.5812	4.5660	4.5826	4.5517	4.7918	5.1205
	2	5.3935	5.3935	5.3730	5.3950	5.3530	5.6260	5.9990
	5	5.9905	5.9905	5.9710	5.9925	5.9510	6.1975	6.5805
	10	6.1755	6.1755	6.1590	6.1770	6.1420	6.3560	6.7325
20	1	4.9741	4.9741	4.9696	4.9745	4.9653	5.0340	5.1205
	2	5.8350	5.8350	5.8290	5.8355	5.8230	5.9010	5.9990
	5	6.4225	6.4225	6.4165	6.4230	6.4110	6.4805	6.5805
	10	6.5840	6.5840	6.5790	6.5840	6.5740	6.6340	6.7325
50	1	5.0965	5.0965	5.0955	5.0965	5.0950	5.1065	5.1205
	2	5.9725	5.9725	5.9710	5.9725	5.9700	5.9835	5.9990
	5	6.5545	6.5545	6.5535	6.5550	6.5530	6.5645	6.5805
	10	6.7080	6.7080	6.7075	6.7080	6.7065	6.7170	6.7325
100	1	5.1150	5.1150	5.1140	5.1145	5.1135	5.1180	5.1205
	2	5.9725	5.9725	5.9920	5.9925	5.9920	5.9980	5.9990
	5	6.5745	6.5745	6.5735	6.5740	6.5735	6.5775	6.5805
	10	6.7265	6.7265	6.7255	6.7265	6.7250	6.7280	6.7325

^(a) Résultats tirés de la référence de Sayyad et Ghugal [3].

IV.3 Conclusion

Dans le cadre de notre étude, nous proposons une approche méthodique et efficace pour analyser la stabilité des plaques sandwichs à gradient fonctionnel simplement appuyées. Cette approche repose sur une théorie la déformation du cisaillement d'ordre élevé, qui s'est avérée efficace et simple à mettre en œuvre. En proposant d'autres hypothèses simplificatrices aux théories HSDT conventionnelles, en considérant le terme intégral indéterminé, le nombre d'inconnues et des équations gouvernantes de la présente théorie sont réduits à quatre. Cette approche rend la théorie simple et efficace à utiliser. En utilisant le principe des travaux virtuels, les équations différentielles d'équilibres sont obtenues et les solutions analytiques basées sur la procédure de la solution Navier sont également déterminées. Divers exemples numériques sont examinés pour démontrer l'exactitude et l'efficacité du modèle développé.

Les résultats prouvent que la théorie proposée peut être comparable aux HSDT conventionnelles avec un plus grand nombre de variables. Dans le cas général, les résultats calculés par le modèle proposé sont en accord avec les autres théories d'ordre élevé. De plus, il est conclu également que le paramètre de loi de puissance, les rapports géométriques et les rapports d'épaisseurs peau-âme-peau ont une influence significative sur la stabilité des plaques sandwichs à gradient fonctionnel.

Conclusion générale

Conclusion générale

Cette étude présente des solutions de flambement d'ordre élevé pour les plaques sandwich à gradient de propriétés (FGM), en s'appuyant sur une théorie raffinée de déformation en cisaillement. L'analyse porte sur des plaques sandwich FG comportant une âme homogène, soit souple (softcore), soit rigide (hardcore). Des solutions analytiques ont été obtenues à l'aide de la méthode de Navier. Les facteurs de charge critique de flambement, exprimés sous forme adimensionnelle, ont été évalués en fonction de différents coefficients de loi puissance, rapports d'aspect et rapports d'épaisseur entre la peau et l'âme.

Les principales conclusions de l'étude sont les suivantes :

- Les plaques entièrement métalliques présentent les valeurs minimales des facteurs de flambement adimensionnels, tandis que les plaques entièrement céramiques affichent les valeurs maximales ;
- Pour les plaques à âme souple, le facteur de flambement adimensionnel diminue à mesure que l'épaisseur de l'âme augmente. Il atteint un maximum pour la configuration 1-0-1 et un minimum pour 1-2-1. De plus, ce facteur augmente avec le coefficient de loi puissance ;
- En revanche, pour les plaques à âme rigide, le facteur de flambement adimensionnel augmente avec l'épaisseur de l'âme, mais diminue avec l'augmentation du coefficient de loi puissance ;
- Les plaques minces montrent des facteurs de flambement adimensionnels plus élevés que les plaques épaisses, qui donnent des valeurs plus faibles.

Enfin, pour une plaque rectangulaire, l'augmentation du rapport longueur/largeur (a/b) entraîne une diminution du facteur de flambement adimensionnel.

Il convient de souligner que ces conclusions sont basées sur des valeurs adimensionnelles du facteur de la charge critique du flambement.

Références bibliographiques

Références bibliographiques

- [1] Kirchhoff GR. Über das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen Scheibe. *J Reine Angew Math* 1850; 40: 51–88. 2.
- [2] Mindlin RD. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *ASME J Appl Mech* 1951; 18: 31–38. 3.
- [3] Sayyad AS and Ghugal YM. "On the buckling of advanced composite sandwich rectangular plates", *Journal of Sandwich Structures & Materials* 2020; 23(7): 1-30.
- [4] Sayyad AS and Ghugal YM. Bending, buckling and free vibration of laminated composite and sandwich beams: a critical review of literature. *Compos Struct* 2017; 171: 486–504. 5.
- [5] Jha DK, Kant T and Singh RK. A critical review of recent research on functionally graded plates. *Compos Struct* 2013; 96: 833–849.
- [6] Swaminathan K, Naveenkumar DT, Zenkour AM, et al. Stress, vibration and buckling analyses of FGM plates– a state-of-the-art review. *Compos Struct* 2015; 120: 10–31. 7.
- [7] Sayyad AS and Ghugal YM. Modeling and analysis of functionally graded sandwich beams: a review. *Mech Adv Mater Struct* 2019; 26: 1776–1795. 8.
- [8] Swaminathan K and Naveenkumar DT. Higher order refined computational models for the stability analysis of FGM plates– analytical solutions. *Eur J Mech A Solids* 2014; 47: 349–361. 9.
- [9] Meiche NE, Tounsi A, Ziane N, et al. A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate. *Int J Mech Sci* 2011; 53: 237–247. 10.
- [10] Mantari JL and Monge JC. Buckling, free vibration and bending analysis of function ally graded sandwich plates based on an optimized hyperbolic unified formulation. *Int J Mech Sci* 2016; 119: 170–186. 11.
- [12] Zenkour AM. A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: part 1– deflection and stresses. *Int J Solids Struct* 2005; 42: 5224–5242. 12.
- [13] Zenkour AM. A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: part 2– buckling and free vibration. *Int J Solids Struct* 2005; 42: 5243–5258. 13.
- [14] Nguyen T-K, Vo TP and Thai HT. Vibration and buckling analysis of functionally graded sandwich plates with improved transverse shear stiffness based on the first-order shear deformation theory. *Proc IMechE Part C J Mech Eng Sci* 2014; 228: 2110–2131.
- [15] Akavci SS. Mechanical behavior of functionally graded sandwich plates on elastic foun dation. *Compos Part B* 2016; 96: 136–152. 16.
- [16] Meziane MAA, Abdelaziz HH and Tounsi A. An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions. *J Sandw Struct Mater* 2014; 16: 293–318. 17.

- [17] Nguyen K, Thai HT and Vo TP. A refined higher-order shear deformation theory for bending, vibration and buckling analysis of functionally graded sandwich plates. *Steel Compos Struct* 2015; 18: 91–120. 18.
- [18] Meksi R, Benyoucef S, Mahmoudi A, et al. An analytical solution for bending, buckling and vibration responses of FGM sandwich plates. *J Sandw Struct Mater* 2019; 21: 727–757. 19.
- [19] Neves AMA, Ferreira AJM, Carrera E, et al. Buckling analysis of sandwich plates with functionally graded skins using a new quasi-3D hyperbolic sine shear deformation theory and collocation with radial basis functions. *Z Angew Math Mech* 2012; 92: 749–766. 20.
- [20] Nguyen VH, Nguyen TK, Thai HT, et al. A new inverse trigonometric shear deformation theory for isotropic and functionally graded sandwich plates. *Compos Part B* 2014; 66: 233–246. 21.
- [21] Sayyad AS and Ghugal YM. A unified shear deformation theory for the bending of isotropic, functionally graded, laminated and sandwich beams and plates. *Int J Appl Mech* 2017; 9: 1–36. 22.
- [22] Sayyad AS and Ghugal YM. A unified five-degree-of-freedom theory for the bending analysis of softcore and hardcore functionally graded sandwich beams and plates. *J Sandw Struct Mater*. Epub ahead of print 4 April 2019. DOI: 10.1177/1099636219840980
- [23] Merdaci S, Tounsi A, Houari MSA, et al. Two new refined shear displacement models for functionally graded sandwich plates. *Arch Appl Mech* 2011; 81: 1507–1522. 24.
- [24] Fekrar A, Meiche N, Bessaim A, et al. Buckling analysis of functionally graded hybrid composite plates using a new four variable refined plate theory. *Struct Eng Mech* 2012; 13: 91–107. 25.
- [25] Tounsi A, Houari MSA and Bessaim A. A new 3-unknowns non-polynomial plate theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate. *Struct Eng Mech* 2016; 60: 547–565. 26.
- [26] Abdelaziz HH, Meziane MAA, Bousahla AA, et al. An efficient hyperbolic shear deformation theory for bending, buckling and free vibration of FGM sandwich plates with various boundary conditions. *Struct Eng Mech* 2017; 25: 693–704. 27.
- [27] Tounsi A, Atmane HA, Khiloun M, et al. On buckling behavior of thick advanced composite sandwich plates. *Compos Mater Eng Int J* 2019; 1: 1–19. 30.
- [28] Achouri F, Benyoucef S, Bourada F, et al. Robust quasi 3D computational model for mechanical response of FG thick sandwich plate. *Struct Eng Mech* 2019; 70: 571–589. 31.
- [29] Mahmoud SR and Tounsi A. A new shear deformation plate theory with stretching effect for buckling analysis of functionally graded sandwich plates. *Struct Eng Mech* 2017; 24: 569–578. 32.
- [30] Bourada F, Amara K, Bousahla AA, et al. A novel refined plate theory for stability analysis of hybrid and symmetric S-FGM plates. *Struct Eng Mech* 2018; 68: 661–675. 33.

- [31] Soltani K, Bessaim A, Houari MSA, et al. A novel hyperbolic shear deformation theory for the mechanical buckling analysis of advanced composite plates resting on elastic foundations. *Struct Eng Mech* 2019; 30: 13–29. 34.
- [32] M. Naebe and K. Shirvanimoghaddam, ‘Functionally graded materials: A review of fabrication and properties’, *Applied Materials Today*, vol. 5, pp. 223–245, Dec. 2016.
- [33] J. Sobczak and L. B. Drenčev, *FGMs - functionally graded materials: processing and modeling*. Warsaw : Cracow: Motor Transport Institute ; Foundry Research Institute, 2008.
- [34] B. Zakaria, E. F. Abdelkader, and C.-E. Z. Mohamed, ‘étude comparative du comportement des plaques épaisses P-FGM et S-FGM’, Dec. 2015, Accessed: Jun. 09, 2025.
- [35] G. H. Loh, E. Pei, D. Harrison, and M. D. Monzón, ‘An overview of functionally graded additive manufacturing’, *Additive Manufacturing*, vol. 23, pp. 34–44, Oct. 2018
- [36] F. Hocine, A. A. Hassen, B. Mohamed, and T. Abdelouahed, ‘Analyse de la vibration libre et de la propagation des ondes dans les structures FGM’.
- [37] N. Sharma, ‘Applications of Functionally Graded Materials (FGMs)’, p. 334, Feb. 2014.
- [38] E. J. Minay and A. R. Boccaccini, ‘2 - Metals’, in *Biomaterials, Artificial Organs and Tissue Engineering*, L. L. Hench and J. R. Jones, Eds., in *Woodhead Publishing Series in Biomaterials*. Woodhead Publishing, 2005, pp. 15–25. doi: 10.1533/9781845690861.1.15.
- [39] A. Kawasaki and R. Watanabe, ‘Evaluation of thermomechanical performance for thermal barrier type of sintered functionally graded materials’, *Composites Part B: Engineering*, vol. 28, no. 1, pp. 29–35, Jan. 1997.
- [40] A. Kumar, A. Sharma, R. Vaish, R. Kumar, and S. Jain, ‘A numerical study on anomalous behavior of piezoelectric response in functionally graded materials’, *Journal of Materials Science*, vol. 53, Feb. 2018.
- [41] A. H. Akbarzadeh, A. Abedini, and Z. T. Chen, ‘Effect of micromechanical models on structural responses of functionally graded plates’, *Composite Structures*, vol. 119, pp. 598–609, Jan. 2015.
- [42] Bao. G., Wang, L., “Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings”, *Int. J; Solids Structures*, 32 (19): 2853–2871, 1995.
- [43] B. Mohamed, A. A. Hassen, and T. Abdelouahed, ‘Analyse des propriétés statiques et dynamiques des structures FGM épaisses en utilisant des modèles de déformation de cisaillement d’ordre élevé’.
- [44] A. F. Hassan, A. M. Abood, H. I. Khalaf, W. Farouq, and H. Khazal, ‘A review of functionally graded materials including their manufacture and applications’, *International Journal of Mechanical Engineering*, vol. 7, no. 1, 2022.
- [45] Y. reda, I. nadjet, and Yeghnem reda, *Etude du comportement statique des structures en matériaux avancés FGMS en utilisant la théorie de déformation de cisaillement*. Algerie: université de saïda - Dr. moulay tahar, 2017.
- [46] *Powder metallurgy process & application - ALPA Powder Equipment*’. Accessed: Jun. 10, 2025.

- [47] Y. Watanabe, E. Miura-Fujiwara, and H. Sato, 'Fabrication of Functionally Graded Materials by Centrifugal Slurry-Pouring Method and Centrifugal Mixed-Powder Method', *Journal of The Japan Society of Powder and Powder Metallurgy*, vol. 57, pp. 321–326, May 2010.
- [48] 'Céramique technique frittée haute température'. Accessed: Jun. 10, 2025. [Online]. Available: <https://www.final-materials.com/fr/212-ceramique-technique-frittee>
- [49] F. Mavier, 'Procédé de projection plasma en mode pulsé associé à une injection jet d'encre synchronisée : mise au point, processus en vol et élaboration de dépôts céramiques', phdthesis, Université de Limoges, 2017. Accessed: Jun. 10, 2025.
- [50] B. Saleh et al., '30 Years of functionally graded materials: An overview of manufacturing methods, Applications and Future Challenges', *Composites Part B: Engineering*, vol. 201, p. 108376, Nov. 2020
- [51] 'Progrès dans les techniques de revêtement laser : un examen complet - Actualités'. Accessed: Jun. 10, 2025.
- [52] Z. Mohamed, B. Samir, and T. Abdelouahed, 'Investigation sur Les Matériaux à Gradients Évalués FGM Functionally Graded Materials " "Merdaci Slimane"1,' 2016.
- [53] J. I. Kim, W.-J. Kim, D. J. Choi, J. Y. Park, and W.-S. Ryu, 'Design of a C/SiC functionally graded coating for the oxidation protection of C/C composites', *Carbon*, vol. 43, no. 8, pp. 1749–1757, Jul. 2005
- [54] S. C. Ram, K. Chattopadhyay, and I. Chakrabarty, 'High temperature tensile properties of centrifugally cast in-situ Al-Mg₂Si functionally graded composites for automotive cylinder block liners', *Journal of Alloys and Compounds*, vol. 724, pp. 84–97, Nov. 2017
- [55] A. Sajjad, W. Z. Bakar, S. Basri, and S. N. Jamaludin, 'Functionally Graded Materials: An Overview of Dental Applications', *World Journal of Dentistry*, vol. 9, no. 2, pp. 137–144, Apr. 2018.
- [56] E. S. C. Chin, 'Army focused research team on functionally graded armor composites', *Materials Science and Engineering: A*, vol. 259, no. 2, pp. 155–161, Jan. 1999.
- [57] A. Kablia, 'Effet de la porosité sur le comportement mécanique des plaques en matériau à gradient de propriétés sous diverses conditions aux limites: analyse et modélisation', Thesis, Université IBN KHALDOUN- Tiaret, 2023.
- [58] S. Repin and S. A. Sauter, 'Estimates of the modeling error for the Kirchhoff–Love plate model', *Comptes Rendus Mathématique*, vol. 348, no. 17, pp. 1039–1043, Sep. 2010, doi: 10.1016/j.crma.2010.09.004.
- [59] R. M. Habib and M. Ismail, 'Utilisation D'une Nouvelle Théorie De Déformation Par Cisaillement Sinusoïdal Pour La Flexion, Le Flambement, Et La Vibration Des Plaques En FGM', 2023, Accessed: Jun. 13, 2025.

- [60] T. Sanaa Bent elarab and B. Djazia, ‘Free Vibration Analysis of Multi-directional Porous Functionally Graded Sandwich Plates’, Thesis, université Ibn Khaldoun, 2024. Accessed: Jun. 13, 2025.
- [61] V. T. Nguyen, ‘Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaque’, phdthesis, Ecole des Ponts ParisTech, 2004. Accessed: Jun. 14, 2025.
- [62] J. N. Reddy, ‘On locking-free shear deformable beam finite elements’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 149, no. 1, pp. 113–132, Oct. 1997
- [63] R. D. Mindlin, “Influence of Rotary Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates,” *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 18, No. 1, 1951, pp. 31-38. - References - Scientific Research Publishing’. Accessed: Jun. 13, 2025
- [64] H.-T. Thai, T.-K. Nguyen, T. P. Vo, and J. Lee, ‘Analysis of functionally graded sandwich plates using a new first-order shear deformation theory’, *European Journal of Mechanics - A/Solids*, vol. 45, pp. 211–225, May 2014.
- [65] A. Rössle, ‘On the derivation of an asymptotically correct shear correction factor for the Reissner-Mindlin plate model’, *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences - Series I - Mathema*, doi: 10.1016/S0764-4442(99)80133-5.
- [66] A. Dash, K. Kishore Joshi, P. Jha, A. Behera, S. Kumar Mohapatra, and Rahul, ‘Various plate theory used in the analysis of FGMs-A review’, *Materials Today: Proceedings*, vol. 78, pp. 565–569, Jan. 2023
- [67] B. Sidda Reddy, J. Suresh Kumar, C. Eswara Reddy, and K. Vijaya Kumar Reddy “ Static Analysis of Functionally Graded Plates Using Higher-Order Shear Deformation Theory” - Recherche Google’. Accessed: Jun. 14, 2025.
- [68] Reissner, E. (1945), “The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates”, *ASME J. of App. Mech.*, 12(2), 69–77.
- [69] Reddy, J.N. (1984), “A simple higher order theory for laminated composite plates”, *J. Appl. Mech.* 51(4), 745–752.
- [70] Touratier, M. (1991), “An efficient standard plate theory”. *Int. J. Eng. Sci.*, 29(8), 901–916.
- [71] Karama, M., Afaq, K.S., Mistou, S. (2009), “A new theory for laminated composite plates”, *Proc. IMechE L, Journal of Materials: Design and Applications*, 223(2), 53–62.
- [72] Aydogdu, M. and Taskin, V. (2007), “Free vibration analysis of functionally graded beams with simply supported edges”, *Mater Design*, **28**, 1651–1656.
- [73] Mantari, J.L. and Soares, C.G. (2013), “A novel higher-order shear deformation theory with stretching effect for functionally graded plates”, *Compos. Part B: Eng.*, 45(1), 268-281.
- [74] Zenkour, A. “Thermal bending of layered composite plates resting on elastic foundations using four-unknown shear and normal deformations theory”, *Composite Structures*, 122, 260-27, 2015.
- [75] Nguyen, TK. A higher-order hyperbolic shear deformation plate model for analysis of functionally graded materials. *Int J Mech Mater Des* 11, 203–219 (2015).

- [76] A. M. Zenkour, 'The refined sinusoidal theory for FGM plates on elastic foundations', *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 51, no. 11, pp. 869–880, 2009.
- [77] A. Fekrar, M. S. A. Houari, A. Tounsi, and S. R. Mahmoud, 'A new five-unknown refined theory based on neutral surface position for bending analysis of exponential graded plates', *Meccanica*, vol. 49, no. 4, pp. 795–810, 2014.
- [78] Reddy, J.N.: *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*. Second Edition, CRC Press, Boca Raton, 858 pages (2003).
- [79] Sayyad, A.S. and Ghugal, Y.M.: On the buckling analysis of functionally graded sandwich beams using a unified beam theory. *Journal of Computational Applied Mechanics*. 51(2), 443–453 (2020).
- [80] Soldatos, K. P., & Timarci, T. "A unified formulation of laminated composite, shear deformable, five-degrees-of-freedom cylindrical shell theories", *Composite Structures*, 25(1-4), 165-171, 1993.