

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN DE TIARET.



Faculté des Sciences Appliquées Département de Génie Civil

Mémoire de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme de
Master

Spécialité : Génie Civil

Option : Structure

Présentée par :

BOUZAIDA Billal Abderrahmane

BOUTAIBA Abderazak

Sujet de la thèse

**Analyse des fréquences naturelles des plaques renforcées par des
nanoplaquettes de graphène à gradient fonctionnel (FG-GNPR)**

Soutenu publiquement le **/06/2025** devant le jury composé de

Président : RABAHI Abderazak

Encadreur : HADJI Lazreg

Examineur : AIT AMAR MEZIANE Med

Examineur : ABDELAZIZ Hadj Henni

Examineur : ZOUATNIA Nafissa

PROMOTION : 2024/2025

Remerciement

Je remercie Dieu pour avoir guidé mes pas.

Ma plus grande gratitude revient à M. **HADJI Lazreg** d'avoir dirigé ce projet. Sa disponibilité et sa bonne humeur ont permis le bon déroulement de ce travail.

Mes remerciements vont aux membres de jury d'avoir honoré ma soutenance et tout l'effort fourni afin de juger ce modeste travail.

Mes remerciements vont à l'ensemble du personnel du département de Génie Civil de l'Université Ibn Khaldoun – Tiaret, et également à tous ceux qui ont contribué à l'élaboration de ce modeste travail de près ou de loin.

Abstract

This study focuses on the analysis of natural frequencies of composite plates reinforced with functionally graded graphene nanoplatelets (FG-GNPR). A novel formulation based on a higher-order shear deformation theory is employed to accurately model the vibrational behavior of these advanced structures. The graphene nanoplatelet reinforcement is distributed through the plate thickness according to various functional gradation patterns, enabling optimization of mechanical properties without compromising weight.

The influence of several parameters, such as the distribution pattern of the nanoplatelets, boundary conditions, aspect ratios, and relative thickness, is investigated on the fundamental natural frequencies. The numerical results are compared with existing data in the literature to validate the accuracy of the proposed method. It is shown that functionally graded graphene nanoplatelet reinforcement leads to a significant improvement in the dynamic stiffness of the plate.

These findings confirm that FG-GNPR plates are a promising solution for applications requiring high vibrational performance, particularly in the aerospace, space, and microelectronics fields.

Keywords: Natural frequencies; Graphene nanoplatelets; Free vibration; Shear deformation theory.

Résumé

Cette étude porte sur l'analyse des fréquences naturelles des plaques composites renforcées par des nanoplaquettes de graphène à gradient fonctionnel (FG-GNPR). Une nouvelle formulation basée sur la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé a été utilisée pour modéliser avec précision le comportement vibratoire de ces structures en matériau avancées. Le renforcement par des nanoplaquettes de graphène est distribué selon différentes lois de gradient fonctionnel à travers l'épaisseur de la plaque, permettant une optimisation des propriétés mécaniques sans compromis sur le poids.

L'effet de divers paramètres, tels que la distribution des nanoplaquettes, les conditions aux limites, la géométrie, et les rapports d'épaisseur est étudié sur les fréquences naturelles fondamentales. Les résultats numériques obtenus sont comparés à ceux disponibles dans la littérature afin de valider la précision de la présente théorie. Il est démontré que le renforcement fonctionnel par des nanoplaquettes de graphène permet une amélioration significative de la rigidité dynamique de la plaque.

Ces résultats confirment que les plaques FG-GNPR représentent une solution prometteuse pour les applications nécessitant une haute performance vibratoire, notamment dans les domaines de l'aéronautique, du spatial et de la microélectronique.

Mots-clés : Fréquences naturelles; Nanoplaquettes de graphène; vibration libre; Théorie de déformation de cisaillement.

الملخص

تهدف هذه الدراسة إلى تحليل الترددات الطبيعية للصفائح المركبة المدعّمة بجزيئات نانوية من الغرافين ذات توزيع متدرج وظيفيًا. (FG-GNPR) تم اعتماد نظرية تشوه القص من الرتبة العليا ذات صياغة محسّنة لنمذجة السلوك الديناميكي لهذه الصفائح بدقة عالية، دون الحاجة إلى معاملات تصحيح القص. يتم توزيع جزيئات الغرافين النانوية عبر سماكة الصفيحة وفق استراتيجيات تدرج وظيفي مختلفة، مما يُعزز الخصائص الميكانيكية ويقلل من الوزن الكلي للهيكل.

تتناول الدراسة تأثير عوامل مختلفة تشمل: نوع التدرج، شروط التثبيت، نسب الأبعاد، والسماكة النسبية على القيم الأساسية للترددات الطبيعية. وقد تم التحقق من صحة النموذج العددي المقترح من خلال مقارنته بنتائج منشورة في الأدبيات العلمية. أظهرت النتائج أن استخدام التدرج الوظيفي لجزيئات الغرافين يُحسن بشكل كبير من صلابة الصفيحة الديناميكية وكفاءتها الاهتزازية.

تشير النتائج المستخلصة إلى أن الصفائح FG-GNPR تشكل خيارًا واعدًا في التطبيقات المتقدمة التي تتطلب خصائص ديناميكية عالية، خاصة في مجالات الطيران، الفضاء، والأنظمة الميكروإلكترونية.

الكلمات المفتاحية: الترددات الطبيعية، جزيئات الغرافين النانوية، التدرج الوظيفي، الصفائح المركبة، الاهتزاز، نظرية تشوه القص.

Table de matière

Remerciement	
Résumé	
Abstract.....	
ملخص.....	
Liste des Tableaux.....	
Liste des figures.....	
Introduction générale :	2
<i>CHAPITRE I: Généralité Sur Les Nanotechnologies</i>	
I.1.Introduction :.....	5
I.2.Définition :	5
I.3.Les Nanotechnologies Dans Le Domaine De Génie Civil :	5
I.3.1.Application De La Nanotechnologie En Matériaux De Construction :	6
I.3.2.Nanotechnologie et Le Béton:	6
I.3.3.Nanotechnologie et de l'acier :	9
I.3.4. Nanotechnologies et Bois :	11
I.3.5. Nanotechnologie dans les matériaux d'étanchéité de construction :	12
I.3.6.Nanotechnologie et béton autocicatrisant :	12
I.3.7. Peintures et revêtements :	13
I.3.8. Verre :	13
I.4.Conclusion :	13
<i>CHAPITRE II: Les Théories des plaques</i>	
II.1 Introduction	15
II.2 Historique.....	15
II.3. Revue sur les théories des plaques FGM:	15

II.3.1 Théorie de plaques bidimensionnelles:.....	16
II.3.1 a. La théorie classique des plaques (Classical plate theory CPT) : .	16
II.3.1 b. Théorie des plaques du premier ordre (First Order Shear Plate Theory FSDT)	17
II.3.1 c. La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)	18
II.3.2 Théorie de plaques tridimensionnelles (Élasticité 3D) :	22
II.3.3 Approches quasi-tridimensionnelles:	23
Conclusion :	25
CHAPITRE III: <i>Etude Analytique de la vibration libre des plaques nanoplaques</i>	
III.1. Introduction :	27
III.2. Formulation du problem :	27
III.2.1. Propriétés des matériaux :	28
III.2.2. Relations cinématiques, de déformation et de contrainte :	29
III.3. La solution du problème:.....	35
III.4. Conclusion :	37
CHAPITRE IV: RÉSULTATS ET DISCUSSIONS	
IV.1. Introduction :	39
IV.2. Résultats numériques et discussions :	39
IV.2.1. Vérification :	39
IV.2.1.1. Plaques FG-GRC :	39
IV.2.1.2. Nanoplaque isotrope:	40
IV.2.2. Analyse de la vibration libre :	40
IV.2.2.1. Nanoplaque carrée :	40
IV.3. Conclusion.....	51
Conclusion générale et perspective	53
Références.....	

Liste des tableaux

Tableau 4.1: Les deux premières fréquences propres $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}$ de la plaque FG-GNPR

Tableau 4.2 : Première fréquence propre adimensionnelle $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho / G}$ de la nanoplaque carrée isotrope

Tableau 4.3 : Première fréquence propre adimensionnelle $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho / G}$ de la nanoplaque carrée isotrope SSSS FG-GNPR

Tableau 4.4 : Première fréquence naturelle non dimensionnelle $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}$ De la nanoplaque carrée CCCC FG-GNPR

Tableau 4.5 : première fréquence naturelle non dimensionnelle $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}$ De la nanoplaque carrée CSCS FG-GNPR

Tableau 4.6 : Première fréquence naturelle sans dimension $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}$ de la nanoplaque carrée FCFC FG-GNPR

Liste des figures

Figure II.1 : Illustration de la plaque de Love Kirchhoff (J.N. Reddy, 1997).

Figure II.2 : Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin (J.N. Reddy, 1997).

Figure II.3: Illustration de la plaque d'ordre élevé (J.N. Reddy, 1997).

Figure. II.4: Présentation de l'effet de l'étirement à travers l'épaisseur

Figure. III.1 Quatre modèles de distribution des GNPs dans des plaques nanocomposites multi-couches GPL/polymer.

Figure IV.1: La variation de la première fréquence naturelle non dimensionnelle $\bar{\omega}$ par rapport au paramètre non local μ de la nanoplaque carrée FG GNPRC SSSS.

Figure IV.2: La variation de la première fréquence naturelle non dimensionnelle $\bar{\omega}$ pour le motif UD par rapport au paramètre non local μ sous différentes conditions aux limites.

Figure IV.3 : variation de la première fréquence naturelle non dimensionnelle $\bar{\omega}$ pour le motif FG-O par rapport au paramètre non local μ sous différentes conditions aux limites.

Figure IV.4: Variation de la première fréquence naturelle non dimensionnelle $\bar{\omega}$ pour le motif FG-X par rapport au paramètre non local μ sous différentes conditions aux limites .

Figure IV.5 : Variation de la première fréquence naturelle non dimensionnelle $\bar{\omega}$ pour le motif FG-A par rapport au paramètre non local μ sous différentes conditions aux limites.

Introduction générale

Introduction générale :

Le graphène est considéré comme un matériau révolutionnaire de large perspectives d'application dans les domaines de nanotechnologie, énergie et biomédecine. Récemment le flambement, la flexion et la vibration des structures renforcées par des nano plaquettes de graphène (GNPs) et plaquettes de graphène (GPLs) ont été étudié par certains chercheurs (Arefi et al. 2019, Jiao and Alavi 2018, Yang 2020, Aditya 2019, Arefi 2018, Liu et al. 2020, Sahmani et al. 2018,).

Cependant les recherches sur la vibration dans les Macro, Micro et nanostructures renforcées par GPNs ou GPLs sont très limitées. Gao et al. (2020) ont étudié la propagation des ondes élastique dans les plaques carrées renforcées par GPL en considérant différente distribution GPL et en utilisant différentes théories des plaques. Ils ont considéré le model Halpin Tsai pour calculer les propriétés des matériaux. Li et al. (2020) ont proposé une méthode semi analytique pour étudier la propagation des ondes dans les plaques renforcées par GPLs en utilisant la théorie de Reissner-Mindlin. Ebrahimi et al. (2019) ont analysé les coques poreuses en matériau composite renforcées par GPLs en utilisant la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre.

En effet, les travaux traitant les vibrations dans les nanoplaques renforcées par GPL ou GPN sont très limites, et les recherches sur les vibrations dans les structures renforcées par GPL ou GPN Basés sur la théorie non classique de l'élasticités sont encore plus limités. Dans le cadre de la théorie non locale (Eringen 1998), Ebrahimi et Dabbagh (2018) ont discuté les caractéristiques de la propagation des ondes dans les nano plaques renforcées par des plaques de graphène (GPL). Il est à noter que La théorie non locale de l'élasticité contient un seul paramètre qui peut capturer les caractéristiques mécaniques de certaines nanostructures et qui peut caractériser l'effet d'adoucissement de la rigidité. Il convient de mentionner que la théorie non locale de l'elasticité NET (Eringen 1998, Barretta et de Sciarra, 2019, Barretta et al. 2019, Chivalek et Demir 2016, Civalek et al. 2020, Ertah et Mohammed 2020a, Emam et al. 2018, Eltah et al. 2020b, Wu Zunhe Civalek 2019, Taherifar et al. 2019, Numanoglu et al. En 2018, Heydari2018, Heydari et Shariati 2018, Malikan et al. 2020b) est différente de la théorie classique traditionnelle (Moradi Mansouri 2012, Hadji, et al. 2018).

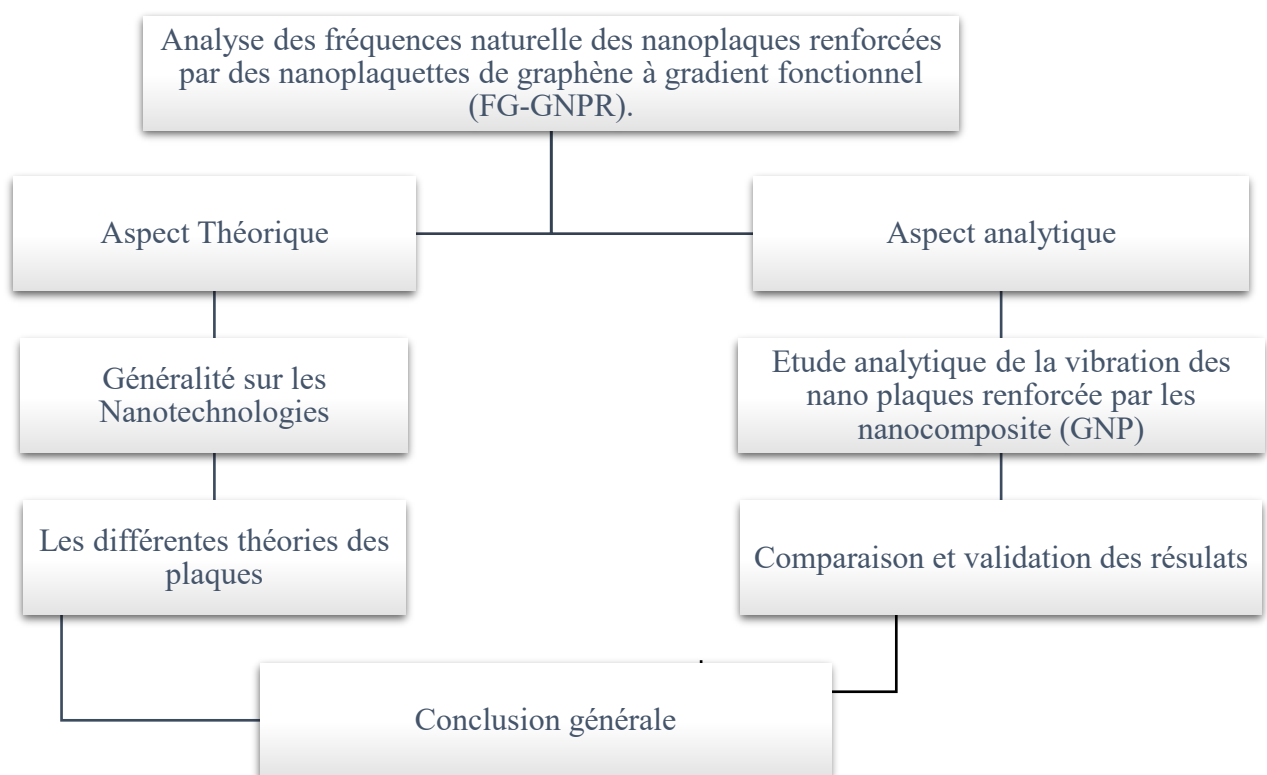
Dans ce mémoire, la déformation non locale est présentée pour étudier la vibration dans les composites polymères renforcés par GNP. Aussi, l'effet d'échelle, la distribution du GNP dans les plaques et un champ de déplacement d'ordre élevé de quatre variables est considéré. L'équation de mouvement est dérivée en utilisant le principe d'Hamilton. L'influence de différents paramètres sur les fréquences de vibration dans les nanoplaques renforcées par les GNP.

Le présent travail de thèse s'articule autour de quatre chapitres qui se résument comme suit :

- L'aspect théorique comprend trois chapitres :

- Le premier chapitre présente une introduction aux matériaux nanocomposites ; l'histoire de leur développement, ainsi que leurs domaines d'application.
- Le deuxième chapitre les différentes théories des plaques ont été étudiées et analysées.
- Au troisième chapitre, une étude analytique de la vibration des nano plaques renforcée par les nanocomposite (GNP) en utilisant une théorie de cisaillement à quatre variables.
- Le quatrième chapitre est consacré à la validation du modèle proposé, tout en le comparant
- Avec ceux trouvés dans la littérature.
- En fin, ce travail se termine par une conclusion générale.

L'organisation générale de ce présent travail est illustrée par l'organigramme suivant :



Chapitre I

Généralité Sur Les Nanotechnologies

1481106C1110108162

I.1. Introduction

La nanotechnologie est un domaine de recherche et de développement multidisciplinaire basé sur la connaissance et la maîtrise des infinitésimaux. Plus précisément, ils regroupent toutes les technologies capables de fabriquer, manipuler et caractériser la matière à l'échelle nanométrique. La nanotechnologie est la formalisation de concepts et de processus issus des nanosciences, la science qui vise à étudier et comprendre les propriétés de la matière aux échelles atomique et moléculaire.

I.2. Définition

« Nanotechnologie » est un terme général qui décrit des applications dans de nombreux domaines scientifiques, mais couvre généralement l'étude des principes et des propriétés qui existent à l'échelle nanométrique, c'est-à-dire au niveau atomique et moléculaire. L'objectif de la nanotechnologie est de produire des objets ou des matériaux de taille inférieure à 100 nanomètres. Ces nanomatériaux sont composés de nanoparticules, qui sont produites intentionnellement, par opposition aux particules très fines issues de sources naturelles ou de la combustion. Les nanomatériaux peuvent être des métaux, des céramiques, des carbones, des polymères ou encore des silicates, et ils présentent l'avantage d'avoir des propriétés spécifiques par rapport à un même matériau à l'échelle macroscopique. L'acquisition de ces nouvelles propriétés physico-chimiques ouvre ainsi un vaste champ de recherche fondamentale et appliquée sous le nom de « nanosciences ».

I.3. Les Nanotechnologies Dans Le Domaine De Génie Civil

La nanotechnologie est l'utilisation de très petites particules de matière, soit par elles-mêmes, soit par leur manipulation, pour créer de nouveaux matériaux à grande échelle. La nanotechnologie n'est pas une nouvelle science, ni une nouvelle technologie, mais une extension de la science et de la technologie développée depuis de nombreuses années. La nanotechnologie est la reconception des matériaux en contrôlant la matière à l'échelle atomique. La clé de la nanotechnologie est la taille des particules, car les propriétés des matériaux sont considérablement affectées en dessous de l'échelle nanométrique [10⁻⁹ mètres]. De plus, à mesure que la taille des particules devient nanométrique, la proportion d'atomes de surface augmente par rapport aux atomes internes, ce qui entraîne de nouvelles propriétés. Le béton est plus solide, plus durable et plus facile à travailler, l'acier est plus dur et le verre devient autonettoyant. La solidité et la durabilité accrue font également partie de la volonté de réduire l'empreinte écologique de l'environnement bâti grâce à une utilisation efficace des ressources.

Utilisation efficace de l'énergie grâce à une efficacité énergétique accrue, qui est obtenue avant le processus de construction en réduisant la pollution pendant la production de matériaux (par exemple le ciment) et en service. « Isolation ». Deux nanoparticules qui se distinguent dans les applications des matériaux de construction sont le dioxyde de titane (TiO_2) et les nanotubes de carbone (CNT).

Le premier est utilisé pour décomposer la saleté et la contamination sur tous les matériaux, du béton au verre, avant d'être emportés par la pluie. Le second est utilisé pour renforcer et surveiller le béton. En raison des nombreuses propriétés uniques des produits nanotechnologiques, les nouveaux produits basés sur les nanotechnologies peuvent réduire considérablement les problèmes actuels de génie civil. Fondamentalement, le bâtiment sera traité avec les matériaux et procédés de haute technologie utilisés par ces derniers. Par conséquent, il existe d'énormes possibilités d'appliquer les nanotechnologies aux matériaux de construction, qui pourraient avoir l'impact sociétal le plus important.

I.3.1. Application De La Nanotechnologie En Matériaux De Construction

De nombreuses disciplines du génie civil, y compris les processus de conception et de construction, peuvent bénéficier des nanotechnologies. Par exemple, de nouveaux matériaux de construction aux propriétés uniques, des composites légers et plus résistants, une isolation ignifuge, des matériaux insonorisant, des revêtements nécessitant peu d'entretien, des hydrofuges, des polymères de nano argile chargés, des surfaces auto-assainissantes, des lampes UN, des purificateurs d'air, des nano- capteurs dimensionnés, pastilles conductrices ultra-fines, cellules solaires, etc. Juste pour en nommer quelques-uns. Nous présenterons brièvement les domaines d'application des nanotechnologies dans le génie civil et les sciences et technologies pour améliorer les performances. En outre, les défis actuels auxquels sont confrontés les scientifiques et les technologues pour exploiter le potentiel des nanotechnologies sont mis en évidence.

I.3.2. Nanotechnologie et le Béton

Le béton est un matériau macroscopique fortement influencé par les propriétés à l'échelle nanométrique, et la compréhension de ce matériau à ce nouveau niveau offre de nouvelles voies pour améliorer la résistance, la durabilité et la suivabilité.

Une grande partie de l'analyse du béton est effectuée à l'échelle nanométrique pour comprendre sa structure à l'aide de diverses techniques développées telles que la microscopie à

force atomique (AFM), la microscopie électronique à balayage (SEM) et le faisceau d'ions focalisé (FIB).

La silice (SiO_2) est présente dans le béton conventionnel dans le cadre d'une distribution normale. Cependant, l'une des avancées apportées par l'étude du béton à l'échelle nanométrique est que les particules de remplissage du béton peuvent être renforcées grâce à l'utilisation de nano silice, conduisant à une densification des micro- et nanostructures. Le béton est un matériau macroscopique fortement influencé par ses propriétés et sa compréhension à l'échelle nanométrique. Ce nouveau niveau de matériau offre de nouvelles façons d'améliorer la résistance, la durabilité et la suivabilité.

Améliorer les propriétés mécaniques. L'ajout de nano-silice aux matériaux cimentaires peut également contrôler la dégradation de la réaction basique CSH (hydrate de silicate de calcium) du béton causée par la lixiviation du calcium dans l'eau, ainsi que l'infiltration d'eau, améliorant ainsi la durabilité.

Emballage de particules amélioré, broyage à haute énergie du clinker de ciment Portland ordinaire (OPC) et du sable standard, entraînant une plus grande réduction de la taille des particules par rapport à l'OPC conventionnel, entraînant une augmentation de 4 à 6 de la résistance à la compression du matériau raffiné fois (à différents âges). Une autre nanoparticule qui est ajoutée au béton pour améliorer ses propriétés est le dioxyde de titane (TiO_2)

Le dioxyde de titane est un pigment blanc qui peut être utilisé comme un excellent revêtement réfléchissant. Il est ajouté sous forme de nanoparticules et, en raison de ses propriétés germicides, il est ajouté aux peintures, au ciment et aux fenêtres, car le TiO_2 décompose les polluants organiques, les composés organiques volatils et les films bactériens par une puissante réaction catalytique. Par conséquent, lorsqu'il est appliqué sur des surfaces extérieures, il réduit les polluants atmosphériques. De plus, il est hydrophile, lui conférant ainsi des propriétés autonettoyantes sur la surface de son application. Le processus par lequel cela se produit est que l'eau de pluie est attirée à la surface et forme des flocons qui absorbent les polluants et les particules de saleté précédemment décomposés et les emportent. Le béton résultant a été utilisé dans des projets partout dans le monde, et il a une couleur blanche qui, contrairement aux bâtiments, conserve très efficacement sa couleur blanche. Construit à partir de matériaux traditionnels contaminés. Autre nanoparticule aux propriétés remarquables, les

nanotubes de carbone (NTC) et des recherches sont actuellement en cours pour étudier l'intérêt de les ajouter au béton.

Les nanotubes de carbone sont des formes cylindriques trouvées en Russie, mais ont commencé à être utilisées au Japon à la fin des années 90. Ils sont cylindriques et leur nom vient de leur diamètre nanométrique. Ils peuvent mesurer plusieurs millimètres de longueur et avoir une « couche » ou paroi (nanotubes à simple paroi) ou plus d'une paroi (nanotubes à parois multiples). Ils ont 5 fois le module d'Young de l'acier, 8 fois la résistance (100 fois théoriquement) et 1/6 la densité. L'ajout d'une faible quantité (1 % en poids) de NTC permet d'améliorer les propriétés mécaniques des échantillons constitués des phases principales de ciment Portland et d'eau.

Les nanotubes multi parois oxydés (MWNT) ont montré la meilleure amélioration de la résistance à la compression (+25 N/mm²) ou de la résistance à la flexion (+8 N/mm²) par rapport aux échantillons normaux.

En théorie, l'oxydation de fortes concentrations de défauts à la surface des MWNT pourrait conduire à une meilleure liaison entre les nanostructures et les liants, améliorant ainsi les propriétés mécaniques des composites d'une manière similaire à la déformation des barres d'acier. En fait, même certaines règles structurelles spécifiques sont en fait dérivées empiriquement d'observations comportementales en nanotechnologie.

L'étude des composants fondamentaux du béton peut ouvrir la voie à une véritable compréhension de la structure et de la longévité du béton sur la base de matériaux d'ingénierie aux propriétés prédéterminées.

Ceci est étroitement lié à l'étude de la durée de vie à travers une modélisation multi-échelle couvrant des échelles multidimensionnelles allant du nanomètre au mètre.

À titre d'exemple d'un tel additif ajouté au béton, des études ont montré que des micro-organismes anaérobies (qui ne nécessitent pas d'oxygène) incorporés dans l'eau de gâchage du béton produisent une résistance de 25 % à 28 jours. Les micro-organismes *Shewanella* ont été utilisés à une concentration de 105 cellules/ml.

Des observations à l'échelle nanométrique ont révélé une couche de dépôts de matrice ciment- sable à sa surface. Cela provoque la croissance du matériau de remplissage dans les pores de la matrice sable-ciment et une augmentation de sa résistance. Le béton autoplaçant

(SCC) est un type de béton qui ne nécessite pas de vibration pour niveler et obtenir la consolidation. Cela représente une avancée majeure dans la réduction de l'énergie nécessaire à la construction d'ouvrages en béton. C'est donc un enjeu de développement durable. De plus, le SCC peut offrir jusqu'à 50 % d'avantages en termes de coût de main-d'œuvre, car il coule 80 % plus rapidement et utilise moins de coffrage.

Le matériau se comporte comme un fluide visqueux et peut être obtenu en utilisant du poly carboxylate, un matériau de type plastique développé à l'aide de la nanotechnologie. Les mélanges SCC avec des niveaux tuélevés de fines nécessitent un système de dispersion très efficace pour la fluidité et la maniabilité à de faibles rapports eau/ciment (des rapports E/C élevés entraînent un risque de ségrégation) et ne sont possibles qu'avec des poly carboxylates répondant à ces exigences. De plus, bien que la résistance à long terme du béton superplastique conventionnel soit très élevée, la première résistance, surtout en hiver, n'est pas suffisante pour retirer le coffrage et la vapeur rapidement et en toute sécurité, des durcisseurs sont donc utilisés pour accélérer l'hydratation du ciment.

Enfin, le béton fibré est aujourd'hui courant pour renforcer les éléments structurels en béton existants. Les progrès de cette procédure impliquent l'utilisation d'une feuille fibreuse (matrice) contenant des particules de nano-silice et un durcisseur. Ces nanoparticules pénètrent et ferment de petites fissures dans la surface du béton, et pour la résistance, ces matrices forment une liaison solide entre la surface du béton et le renfort en fibres.

Pendant le renforcement, des câbles et des feuilles de carbone imprégnés de matrice (fibres) sont placés sur la surface de béton préparée et collés à l'aide de rouleaux rainurés.

Les brins de carbone améliorent considérablement la capacité de l'échantillon à résister aux charges après la fissuration, et la matrice et l'interface sont durables dans des conditions humides, sèches et d'encrassement (rayures). De plus, la capacité de charge maximale n'a pas diminué après des cycles répétés de mouillage et de séchage ou d'encrassement.

I.3.3. Nanotechnologie et de l'acier

L'acier a été largement utilisé depuis la deuxième révolution industrielle à la fin du 19e et au début du 20e siècle, et il a joué un rôle important dans l'industrie de la construction depuis lors. La fatigue est un problème important qui peut entraîner la défaillance de structures en acier soumises à des charges cycliques, telles que des ponts ou des tours.

Cela peut se produire à des forces bien inférieures à la résistance à la rupture du matériau et entraîner une durée de vie nettement plus courte de la structure.

Les philosophies de conception actuelles impliquent une ou plusieurs des trois mesures de limitation : basées sur une réduction significative de la contrainte admissible, une durée de vie admissible raccourcie ou une conception qui nécessite des régimes d'inspection périodiques. Les états de surface augmentent la contrainte à l'origine des fissures, qui sont la principale cause de fissuration par fatigue, et des études ont montré que l'ajout de nanoparticules de cuivre réduit la rugosité de surface de l'acier, limitant ainsi le nombre de régions augmentant les contraintes et limitant ainsi la fissuration par fatigue.

Les progrès de cette technologie devraient améliorer la sécurité, réduire le besoin de suivi et utiliser des matériaux plus efficaces dans les bâtiments sujets aux problèmes de fatigue. Lorsqu'elles sont soumises à des charges dynamiques soudaines, les soudures et la zone affectée par la chaleur (ZAT) à proximité des soudures peuvent devenir cassantes et échouer sans avertissement, et la ténacité des soudures est un problème important, en particulier dans les zones à forte activité sismique.

Les défaillances de soudage et de ZAT ont conduit à une réévaluation des joints structuraux soudés après le tremblement de terre de Northridge en 1994 dans la région de Los Angeles, les concepts de conception actuels incluent l'affaiblissement sélectif de la structure pour créer une déformation contrôlée loin des joints soudés cassants ou le surdimensionnement délibéré de la structure pour maintenir tous le stress sont tous faibles. Cependant, des recherches en cours ont montré que l'ajout de nanoparticules de magnésium et de calcium rend les grains HAZ dans les tôles d'acier plus fins (environ 1/5 de la taille des matériaux conventionnels), améliorant ainsi la ténacité des soudures.

Il s'agit d'un problème de durabilité et de sécurité, car la ténacité accrue au niveau du joint soudé entraînera moins de besoins en ressources, car moins de matériau est nécessaire pour maintenir la contrainte dans la plage autorisée. Deux produits relativement nouveaux lancés aujourd'hui sont l'acier Sandvik Nanoflex et l'acier MMFX2. Ils sont résistants à la corrosion, mais ils ont des propriétés mécaniques différentes qui sont le résultat de différentes applications de la nanotechnologie. Traditionnellement, le compromis entre résistance et ductilité de l'acier a été un problème important pour l'acier, les forces dans les bâtiments

modernes nécessitent une grande résistance, et la redistribution pour la sécurité (en particulier dans les zones sismiques) et les contraintes nécessite une grande malléabilité.

Cela conduit à des matériaux ductiles à faible résistance dans des tailles plus grandes, ce qui n'est pas réalisable avec des matériaux fragiles à haute résistance, c'est donc une question de durabilité et d'utilisation efficace des ressources. Sandvik Nanoflex possède les qualités souhaitables d'un module d'Young élevé et d'une résistance élevée, et est également résistant à la corrosion en raison de la présence de nanoparticules très dures dans la matrice d'acier.

En fait, il combine une résistance élevée avec une excellente formabilité et est actuellement utilisé dans la production de diverses pièces telles que des dispositifs médicaux et des composants de bicyclettes, cependant, ses applications sont de plus en plus diverses. En raison du coût élevé, l'utilisation de barres d'armature en acier inoxydable dans les structures en béton est généralement limitée aux environnements à haut risque.

Cependant, l'acier MMFX2, tout en possédant les propriétés mécaniques de l'acier conventionnel, possède une nanostructure modifiée qui le rend résistant à la corrosion et constitue une alternative moins coûteuse à l'acier inoxydable conventionnel.

I.3.4. Nanotechnologies et Bois

Les nanotubes de carbone sont une nouvelle découverte, tandis que le bois est un matériau ancien, utilisé depuis l'aube de la civilisation.

Sans surprise cependant, compte tenu du processus d'évolution naturel, le bois est également composé de nanotubes ou « nanofibrilles », c'est-à-dire d'éléments de lignocellulose (tissu ligneux) deux fois plus résistants que les nano fibrilles conduiraient à un nouveau paradigme de la construction, car la production et l'utilisation seront partie d'un cycle renouvelable Certains développeurs spéculent que les fonctionnalités construites sur des surfaces lignocellulosiques à l'échelle nanométrique pourraient conduire à des domaines tels que les surfaces auto-désinfectantes, l'auto-guérison intérieure et l'électronique lignocellulosique Ouvrir de nouvelles opportunités.

De par son origine naturelle, le bois est à l'avant-garde des recherches interdisciplinaires et des techniques de modélisation. Dans un premier temps, BASF a développé un revêtement hydrofuge basé principalement sur l'action des feuilles de lotus après incorporation de

nanoparticules de silice et d'alumine et de polymères hydrophobes. D'autre part, les études mécaniques des os s'appliquent également aux modèles en bois, par exemple lors du séchage.

I.3.5. Nanotechnologie dans les matériaux d'étanchéité de construction

Les matériaux de construction étanches sont un problème depuis 1 000 ans. En raison du manque de compréhension des matériaux structurés à l'échelle nanométrique, cette question n'a pas été entièrement étudiée. Les nouveaux développements scientifiques et technologiques ont permis, avec l'aide de la nanotechnologie moderne, de produire des produits écologiques en silicone pour l'imperméabilisation de presque tous les différents types de matériaux de construction. La nanotechnologie garantit que le cycle de vie de cette approche se traduira par un cycle de vie de plus de 20 à 30 ans, mais à un coût

Les matériaux de construction sont connus pour les infiltrations d'eau, où l'eau fuit à travers les pores et les microfissures inhérents. L'imperméabilisation est un traitement censé rendre un matériau imperméable. Au cours des 50 dernières années, de nombreux développements techniques et de produits ont eu lieu dans divers mastics, en particulier en utilisant des produits à base de polymères et divers autres matériaux. Un autre problème sérieux avec l'imperméabilisation est la prévention de la perte de résistance structurelle des matériaux de construction en béton, en particulier en raison de l'ASR (Alkali Silica Reaction), des pluies acides, de l'attaque des sulfates. Il empêche également la pénétration des chlorures, qui peuvent provoquer la corrosion des barres d'acier.

I.3.6. Nanotechnologie et béton autocicatrisant

Des expériences avec du béton autocicatrisant sont également en cours. Lorsque le béton se fissure, les microcapsules intégrées se rompent et libèrent l'agent de réparation dans la zone endommagée par capillarité. L'agent de réparation est en contact avec le catalyseur en suspension dans l'air et leur polymérisation referme la surface de la fissure. Lors des tests de rupture, le composite auto-cicatrisant a retrouvé 75% de sa résistance d'origine.

Ils peuvent augmenter la durée de vie des composants structuraux de deux à trois fois. Lorsque des fissures se forment dans ce béton autocicatrisant, elles décomposent les microcapsules, libérant un agent cicatrisant qui entre alors en contact avec un catalyseur qui initie une réaction de polymérisation qui scelle les fissures.

I.3.7. Peintures et revêtements

Le marché de la peinture et des revêtements a rapidement adopté les nanotechnologies. Cet ensemble d'applications restera dans sa principale niche de valeur pour les 10 prochaines années. La première application est une peinture anti-rayures. Une seule couche de nanomatériau est aussi efficace que trois revêtements conventionnels. La promesse des nanomatériaux est intéressante dans le domaine des surfaces fonctionnelles comme les surfaces autonettoyantes à effet lotus. On trouvera des nanomatériaux pour améliorer la qualité perçue et le confort, des revêtements aux fonctions sensorielles, antistatiques, isothermes, hydrophiles, hydrophobes, antibactériennes, des revêtements irisés, des verres électrochromes ou chromés à chaud, des protections – anti-reflet brise Wait. Échelle d'application prévue.

I.3.8. Verre

Le verre A titre d'exemple, dès le XVI^e siècle, les verriers de Murano donnaient à leurs produits une couleur rubis en y ajoutant un peu d'or. Des connaissances scientifiques récentes ont montré que les atomes d'or forment des nanoagrégats grâce à un traitement thermique approprié, donnant cette fameuse couleur rubis. La plupart des produits verriers actuels - comme les verres optiques photochromiques qui s'assombrissent au soleil - sont conçus selon le même principe - en intégrant des nanoagrégats de sels d'argent à l'origine de la couleur sombre

I.4. Conclusion

La nanotechnologie est un domaine très prometteur avec de nombreuses applications possibles dans un large éventail de domaines. En effet, les nano-objets, qu'il s'agisse de nanotubes de carbone ou de nanoparticules à noyaux magnétiques, ouvrent une nouvelle voie de recherche. La nanotechnologie pourrait un jour voir le jour grâce à l'invention de machines toujours plus puissantes et de microscopes toujours plus précis.

Chapitre II

Les Théories des plaques

hredron

II.1 Introduction

Les plaques sont des éléments structuraux conçus pour résister à l'application charges transversales en développant des contraintes de flexion. La théorie des plaques permet de calculer les déformations et les contraintes dans une plaque soumise à des charges, elle s'inspire de la théorie des poutres. Quatre classes d'équations dans un modèle de mécanique des solides, y compris la théorie des plaques, comportant

- Les équations du mouvement ;
- Relations déformations-déplacements (et rotations) ;
- Loi de comportement les relations de contrainte-déformations ;
- Et les équations de compatibilité.

II.2 Historique

En 1888, Love utilise les hypothèses de Gustav Kirchhoff, elles-mêmes inspirées des hypothèses d'Euler Bernoulli pour les poutres, pour fonder une théorie des plaques minces. La théorie des plaques épaisses a été consolidée par Mindlin à partir des travaux de Rayleigh (1877), Timoshenko (1921), Reissner (1945) et Uflyand (1948).

II.3. Revue sur les théories des plaques FGM

Depuis la fondation des matériaux à gradient de propriétés, les théories particularisées à analyser des structures en ces matériaux sont établies à nouveau, notre travail est basé sur l'étude des plaques. La majorité des théories présentées ici se sont des extensions des théories analysant les plaques isotropes ou composites. À ce stade, diverses théories ont été proposées, et prennent un axe important dans la mécanique des structures. De la théorie simplifiée de Love-Kirchhoff, certaines se sont des améliorations, d'autres sont des théories plus précises.

Aujourd'hui, les recherches sur les plaques en FGM ont acquis un intérêt appréciable, On peut les regrouper en trois principaux groupes selon l'approche adoptée :

- Théories des plaques FGM bidimensionnelles,
- Théories des plaques FGM tridimensionnelles,
- Approches Quasi-dimensionnelles des plaques FGM.

II.3.1 Théorie de plaques bidimensionnelles

L'ensemble de ces théories sont basées sur l'état de contraintes planes, par conséquent la déformation normale est négligée ($\varepsilon_z = 0$), sachant que l'aspect géométrique de la plaque est défini par une surface de référence plane (plan xy) et par une épaisseur petite par rapport aux autres dimensions (longueur et largeur). Cette définition favorise le choix d'une cinématique spécifique par rapport à la cinématique générale d'un solide, le facteur de classification de ces théories est l'importance de l'épaisseur par rapport aux autres dimensions, cette particularité conduit à l'effet de cisaillement transversal à travers l'épaisseur, ce dernier est présenté dans la cinématique adaptée. Pour cela, nous atteindrons aux trois classes suivantes :

II.3.1 a. La théorie classique des plaques (Classical plate theory CPT)

Les théories classiques, dites théories des plaques minces, où la contrainte normale transversale est négligeable, due à faible épaisseur de la plaque. Cette théorie a été adoptée par Feldman et Aboudi [Feld1997], Abrate [Abr2008], Mahdavian [Mah2009], et Mohammadi et al. [Moh2010], pour étudier le flambement des plaques minces en FGMs. Cependant, la théorie classique des plaques en FGMs sous-estime la flèche de déplacement et surestime les fréquences propres ainsi que les charges critiques de flambement des plaques modérément épaisses en FGMs [Red2004]. la théorie se base sur les hypothèses de Love- Kirchhoff, selon lesquelles une droite normale au plan moyen de la plaque reste perpendiculaire après déformation (figure II-1), ce qui revient à négliger les effets de déformation en cisaillement transverse.

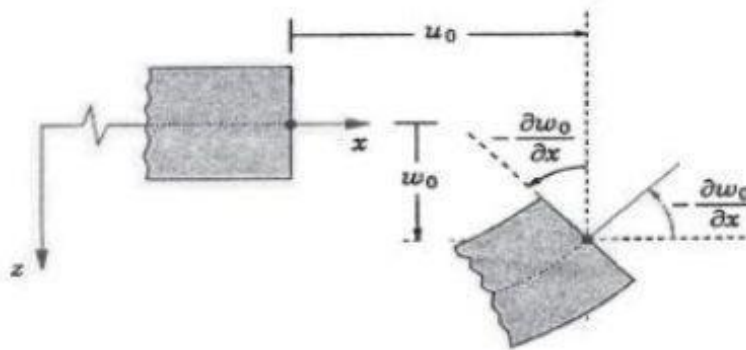


Figure II.1 : Illustration de la plaque de Love Kirchhoff (J.N. Reddy, 1997)

Ce modèle de plaque peut être référé en Timoshenko et Woinowsky-Krieger (S.P. Timoshenko., S.Woinowsky-Krieger, 1959), Reddy (J.N. Reddy, 1997 ; J.N. Reddy , 1999.),

En se basant sur les hypothèses ci-dessus, le champ de déplacement basé sur est donné par :

$$\begin{aligned}
u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\
v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\
w(x, y, z) &= w_0(x, y)
\end{aligned} \tag{II.1}$$

Avec (u_0, v_0, w_0) sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ($z = 0$).

Puisque ce modèle ne tient pas en compte l'effet de cisaillement transverse, il donne des résultats imprécis pour les plaques épaisses.

II.3.1 b. Théorie des plaques du premier ordre (First Order Shear Plate Theory FSDT)

Les théories de premier ordre [Reis1945], [Mind1951], tiennent en compte l'effet de cisaillement transversal, mais elles nécessitent d'introduire des facteurs de correction de cisaillement pour satisfaire les conditions de nullité des contraintes de cisaillement transversal, à la surface supérieure et inférieure de la plaque. Plusieurs études ont été adoptées pour analyser le comportement mécanique des plaques basant sur la théorie de cisaillement de premier ordre dans les littératures [Del2004], [Yan2005], [Zha2009], [Mor2012], [Men2012], [Yag2013] et [Ras2012].

Dans la théorie précédente, on a opté des hypothèses cinématiques qui négligent le cisaillement. Une théorie semblable, appliquée aux plaques modérément épaisses, est proposée par Reissner et Rayleigh [Reis1945]. L'idée principale est de présenter l'influence de cisaillement transversal sur le comportement statique et dynamique des plaques isotropes épaisses, notamment, dans les travaux de Mindlin [Mind1951]. La cinématique de Mindlin-Reissner est une extension celle de Kirchhoff-Love, néanmoins, la normale reste droite mais non perpendiculaire à la surface moyenne dans la configuration déformée (due à l'effet de cisaillement transversal).

La théorie du premier ordre est basée sur le champ de déplacement de Reissner-Mindlin est présenté par :

$$\begin{aligned}
u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z \phi_x(x, y) \\
v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z \phi_y(x, y) \\
w(x, y, z) &= w_0(x, y)
\end{aligned} \tag{II.2}$$

Avec : (u_0, v_0, w_0) et (ϕ_x, ϕ_y) sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y, respectivement.

Le champ de déplacement définis dans l'expression ci-dessus permet de reprendre la théorie classique des plaques décrite dans la dernière section par le remplacement.

$$\begin{aligned}\phi_x &= \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \phi_y &= \frac{\partial w_0}{\partial y}\end{aligned}\quad (\text{II.3})$$

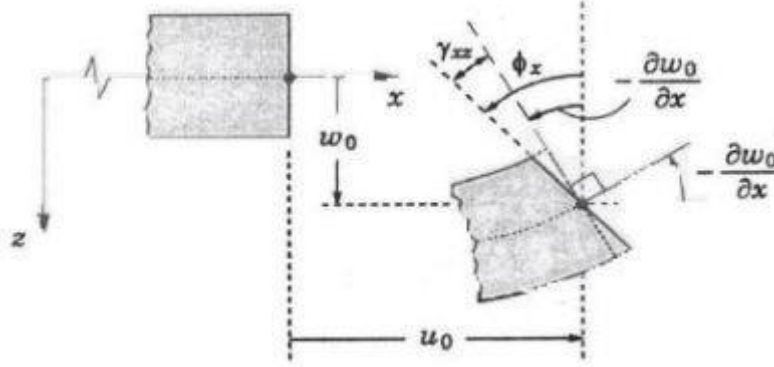


Figure II.2 : Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin (J.N. Reddy, 1997).

D'ailleurs pour éviter l'introduction d'un facteur de correction, des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevée ont été développées.

II.3.1 c. La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)

À la différence de la théorie CPT et la théorie FSDT avec les acceptations de la distribution linéaire du déplacement par l'épaisseur, la théorie d'ordre élevé est basée sur une distribution non linéaire des champs dans l'épaisseur. Par conséquent, on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et / ou de la déformation normale transversale.

Pour éviter l'introduction des facteurs de correction, une bibliothèque volumineuse existe sur ce sujet, car les recherches internationales récentes font l'actualité dans le domaine d'analyse des plaques et coques, isotropes ou composites, en analyse statique ou dynamique. En effet, beaucoup d'auteurs proposent des théories dites les théories d'ordre supérieur. Ces théories sont basées sur des distributions plus générales de la cinématique, éventuellement, les contraintes de cisaillements à travers l'épaisseur.

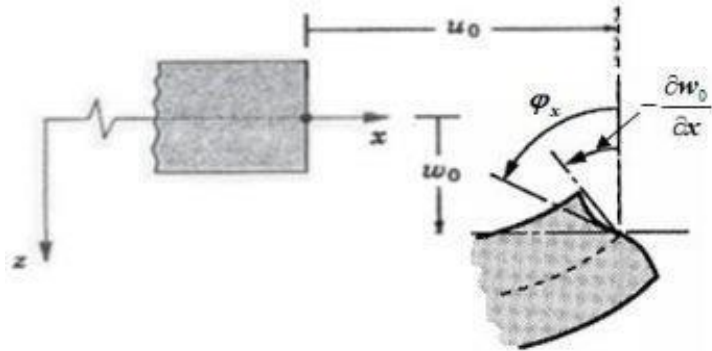
D'une façon générale, La cinématique des théories d'ordre supérieur sont basées sur le développement de série de Taylor, d'une manière générale, elles s'expriment :

$$u_i(x_1, x_2, x_3 = z) = u_i^0(x_1, x_2) + z \phi_i^{0(1)}(x_1, x_2) + z^2 \phi_i^{0(2)} + z^3 \phi_i^{0(3)}(x_1, x_2) + z^4 \phi_i^{0(4)}(x_1, x_2) + \dots$$

Parmi les premiers, Nelson et Lorch [Nel1977] ont développé le champ cinématique précédent en introduisant neuf inconnus de déplacement, Lo et al. [Lo1977] avec onze inconnus, Bhimaraddi et Stevens [Bhi1984] avec cinq inconnus même pour Reddy [Red1984] avec cinq inconnus, Kant et Pandya [Kan1988] avec sept inconnus, Kant et Khare [Kan1997] avec neuf inconnus et Talha and Singh [Tal2010] avec onze inconnus. D'autres théories d'ordre supérieur sont basées sur la formulation unifiée de Carrera (CUF) citées dans les références [Tor2009], [Nev2012a], [Nev2012b], [Nev2013], [Tor2013], [Vio2013a], [Vio2013b], [Faz2013] et [Tor2014] et ont été les utilisés aussi pour étudier des structures en FGM.

En principe, ces théories d'ordre supérieur sont plus précises que les théories du premier ordre et la théorie classique de Love-Kirchhoff. La précision est augmentée avec l'ordre du développement, c'est à dire avec le nombre d'inconnus supplémentaires. Cependant, les conditions aux limites sur les bords sont difficiles à satisfaire et le nombre de variables de déplacements indépendants dépasse celui des modèles classiques (trois dans le modèle Love-Kirchhoff et cinq pour le modèle Reissner-Mindlin).

Pour réduire le nombre de paramètres de déplacement, plusieurs simplifications ont été proposées. Toutes ces théories sont intéressantes soit pour une présentation correcte de la



cinématique ou les contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur, soit pour éviter l'introduction des facteurs de correction, mais il faut distinguer que ces théories imposent un nombre important de paramètres des déplacements supplémentaires. Ceci pose un Chapitre II : Théories des plaques en matériau à gradient de propriétés 19 inconvénient sérieux lors de l'application des conditions aux limites sur les frontières et la formulation de leurs modèles numériques (notamment la méthode des éléments finis). Tout ça influe directement sur le taux de calcul et l'efficacité de la théorie choisie.

Figure II.3: Illustration de la plaque d'ordre élevé (J.N. Reddy, 1997)

Souvent, on impose les conditions de nullité des contraintes de cisaillement transversal à la surface supérieure et inférieure de la plaque. Plusieurs auteurs ont exprimé un champ de déplacement raffiné basé sur le développement de la cinématique est utilisé avec

$$\phi_i^{0(1)} = \phi_i^{0(2)} = \phi_i^{0(3)} - \phi_i^{0(4)} \quad (\text{II. 4})$$

$\alpha = \{1,2\}$ dépendent à $\phi_\alpha^{0(1)}$ et à w, α L'expression devient :

$$u_0(x_1, x_2, x_3 = z) = u^0(x_1, x_2) - z \phi_\alpha(x_1, x_2) + f(z)_{,0}(x_1, x_2) \quad (\text{II. 5})$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = w(x_1, x_2) \quad (\text{II. 6})$$

Voici quelques contributions importantes de développement des modèles d'ordre supérieur qui diffèrent par la fonction de cisaillement $f(z)$: Ambartsumyan [Amb1969]:

$$f(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad (\text{II. 7})$$

Reissner [Reisb], Panc [Pan1975] : $f(z) = \frac{5}{2} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$

La plupart de ces modèles adoptés pour étudier la mécanique des plaques en FGMs ont les mêmes cinq inconnus, citons la théorie de déformation de cisaillement de troisième ordre [Red2000], théorie de déformation de cisaillement sinusoïdale [Zen2006], théorie de déformation de cisaillement sinusoïdale [Zen2006], théorie de déformation de cisaillement hyperbolique [Atm2010], [Ben2010].

Récemment, d'autres auteurs ont proposé un raffinement de la théorie d'ordre supérieur utilisant quatre inconnus, ces théories ont une formulation simple basée sur la décomposition de déplacement transversal en deux parts, composante de flexion et l'autre de cisaillement. En effet, on exprime les rotations de la normale en fonction de déplacement transversal, de tel sort, le champ de la cinématique s'exprime par :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial x} + f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial y} + f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y) \end{aligned} \quad (\text{II.8})$$

Cette simplification mène a un nombre réduit des équation de mouvement en termes d'inconnus, dans les recherches actuelles sur ce sujet , nous trouvons plusieurs contributions basées sur l'amélioration de la fonction de cisaillement $f(z)$ pour donner une bonne satisfaction de la condition de nullité des contraintes de cisaillement transversal à la surface supérieure et inférieure de la plaque , dans l'analyse statique , dynamique et plus loin dans le cas thermomécanique . Les travaux de Tounsi et al [Tou2013], Houari et al [Hou2010] et Hamidi et al [Ham2012] ont étudiés le comportement mécanique et thermique des plaques en FGM présentant des améliorations considérables dans la fonction de cisaillement :

- Fonction de cisaillement Trigonométrique [Tou2013] :

$$f(z) = z - \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (\text{II.11})$$

- Fonction de cisaillement hyperbolique [Ait Atmane et al, 2010]:

$$f(z) = z - \frac{\cos(\frac{\pi}{2})}{\cos(\frac{\pi}{2}) - 1} z \frac{(\frac{h}{\pi}) \sinh(\frac{\pi}{h} z)}{\cos(\frac{\pi}{2}) - 1} \quad (\text{II.12})$$

- Fonction de cisaillement polynomiale [Hou2010]

$$f(z) = z \left[-\frac{1}{4} + \frac{5}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \quad (\text{II.13})$$

En conclusion, les équations résultantes du mouvement sont plus compliquées par rapport celles optées avec la théorie classique et la théorie de premier ordre. De plus, il doit noter que les théories deux-dimensionnel des plaques susmentionnés (CPT, FSDT, et HSDT) omissent l'effet de l'étirement de l'épaisseur dû à l'état de contraintes planes $\varepsilon_z = 0$, comme elles considèrent un déplacement transversal constant à travers l'épaisseur. Cette hypothèse est appropriée pour les plaques en FGMs minces ou modérément épaisses, mais elle est défectueuse pour les plaques en FGMs épaisses ou avec forte épaisseur [Qia2004].

L'importance de l'effet de l'étirement de l'épaisseur dans les plaques en FGMs a été identifié de façon concise dans le travail de Carrera et al. [Car2011]. Cet effet joue un rôle significatif dans les plaques en FGMs épaisses et devrait être pris en considération.

II.3.2 Théorie de plaques tridimensionnelles (Élasticité 3D)

Pour évaluer le comportement exact des plaques épaisses, il faut trouver des nouvelles stratégies pour une description précise des champs de contraintes à travers l'épaisseur. On note surtout les contraintes de cisaillement. Malgré que les théories d'ordre supérieur maîtrisent efficacement les problèmes traités avec succès, mais il faut remarquer que la déformation normale transverse est négligée dont elle a un impact important sur la précision souhaitée. Le recours à l'élasticité tridimensionnelle est donc la règle, les principales idées pour résoudre ce type de problème (en analyse statique ou dynamique) sont : la construction des champs des contraintes et disposer leurs solutions exactes ou leurs approximations.

Récemment, plusieurs auteurs ont été, en outre, consacrés leurs recherches en particulier de donner des expressions analytiques exactes, bien qu'elles sont éventuellement approximées pour résoudre de façon récurrente les problèmes traités. S.S Vel et al [Vel2004] ont présenté des solutions exactes pour l'analyse vibratoire des plaques FGM, Uymaz et Aydogdu [Uym2007] ont proposé une solution approchée par une série des études utilisant les polynômes de Chebyshev, mêmes problèmes ont été traités par Li et al [Li2008] qui introduisent la méthode de Ritz comme une stratégie de résolution.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \\
 \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \\
 \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}
 \end{aligned} \tag{II.14}$$

De plus, pour franchir les limites de la résolution analytique et approximative des problèmes tridimensionnels, seules les méthodes numériques permettant d'étudier les plaques épaisses en appliquant les théories d'élasticité tridimensionnelle, de géométries quelconques et sous différents types de chargement ainsi que les conditions aux limites.

L'analyse des plaques épaisses par les méthodes numériques, telles que la méthode des éléments finis et les méthodes approximatives, offrent des avantages et des potentialités primordiales, ces outils, dans bien des cas cependant, nécessitent un grand nombre de degrés de liberté et des techniques de discrétisation robustes. En plus, la maîtrise et la vérification des données due à un large système des équations sont souvent difficiles et parfois nécessitent une informatique puissante pour obtenir des résultats à précision forte et satisfaisante.

Plus récemment, Huang et al. [Hua2008], Amini et al. [Ami2009] ont donné des solutions tridimensionnelles exactes dans le cas des vibrations libres des plaques en FGM, Malekzadeh [Mal2009] a adopté une solution semi-analytique basée sur la méthode des quadratures différentielles, Zankour [Zen2007] a étudié des plaques en FGM épaisses basant sur les solutions de l'élasticité tridimensionnelle avec une variation exponentielle des propriétés matériels à travers l'épaisseur (le modèle exponentiel).

II.3.3 Approches quasi-tridimensionnelles

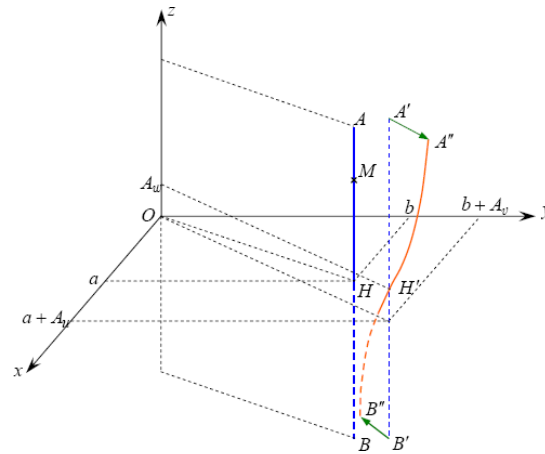


Figure. II.4 : Présentation de l'effet de l'étirement à travers l'épaisseur.

Pour éviter de recourir à une analyse tridimensionnelle et de l'introduction de l'effet de déformation normale transverse, Cette particularité devient importante pour définir un état de contraintes correct et évaluer exactement les fréquences propres en analyse vibratoire. De façon générale, toutes les contributions et les recherches récentes sur cette approche basées sur la jonction d'une fonction non-linéaire de la coordonnée de l'épaisseur (z) de telle sorte que le déplacement transversal sera exprimé et dépend d'une variation non linéaire à travers l'épaisseur de la plaque.

En procédant de la sorte, on cherche à réduire le nombre des variables et de formuler une théorie efficace pour pouvoir analyser des plaques plus générales en analyse statique ou dynamique.

En générale, les théories d'ordre supérieur et de déformation normale lesquelles concédèrent l'effet de l'étirement de l'épaisseur (stretching effect) peuvent numériquement être implantées en utilisant la formulation unifiée initialement proposée par Carrera [Car2001] [Car2003] [Car2005], et récemment évoluée par Demasi [Dem2009a] [Dem2009b] [Dem2009c] [Dem2009d] et [Dem2009e].

Pour des informations supplémentaires et les applications de la formulation unifiée de Carrera, les récents ouvrages de Carrera et al [Car2011a] et [Car2011b] font l'objet. De nombreux travaux basant sur la théorie d'ordre supérieur et de déformation normale ont été proposés dans les littératures [Mat2009], [Tal2010], [Red2011], ces théories sont lourdes et coûteuses, néanmoins, elles génèrent un nombre important des inconnus. Talha et Singh [Tal2010] ont proposé une cinématique d'ordre supérieur et de déformation normale avec onze variables, ils présentent des résultats en analyse statique et vibrations libres utilisant la résolution par éléments finis, l'élément fini proposé est de 117 degrés de liberté, ça impose une difficulté d'implantation numérique et un taux de calcul trop élevé. Jha et al [Jha2013] ont étudié le comportement statique et dynamique des plaques FGM avec un élément fini basé sur une cinématique d'ordre supérieur de douze variables de déplacement. Reddy [Red2011] présente une formulation théorique d'un modèle avec onze variables en analyse non linéaire ; la résolution d'un problème non linéaire avec un nombre des inconnus élevé nécessite un large système des équations qui conduit aux difficultés de résolution. Neves et al. [Nev2012a], [Nev2012b], [Nev2013] ont traité des problèmes des plaques en FGM en analyse statique et vibrations libres, le modèle choisi est basé sur la formulation unifiée de Carrera avec neuf inconnus avec une résolution numérique basée sur les fonctions d'approximations radiales basiques. Cependant, les conditions aux limites sur les bords sont difficiles à satisfaire.

Certaines approches connues comme les théories Quasi-tridimensionnelles sont développées par Zenkour [Zen2007] et récemment par Mantari et Guedes Soares [Man2012] [Man2013], elles introduisent six inconnus, elles sont encore plus compliquées que la théorie de premier ordre. Ainsi qu'il y a un cadre de développer une théorie d'ordre supérieur et de déformation normale précise, laquelle est relativement simple à employer et en même temps retienne des caractéristiques physiques importantes. En effet, Thai et Kim [Tha2013b] ont présenté plus récemment une théorie de déformation du cisaillement sinusoïdale quasi-3D avec seulement cinq inconnus pour simuler le comportement à la flexion des plaques FGMs.

Le champ de la cinématique est basé sur la théorie d'ordre supérieur à quatre variables, une spécification est donc introduite à la composante de déplacement transversal pour le rendre variable à travers l'épaisseur, on injecte une fonction non linéaire en (z) , alors la cinématique deviet

$$\begin{aligned}
u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial x} \\
v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial y} \\
w(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y) + g(z) \varphi_z(x, y)
\end{aligned} \tag{II.14}$$

Conclusion

La réponse en flexion et les vibrations libres des plaques doivent être étudiées selon la théorie des plaques d'ordre élevée afin de décrire les équations d'équilibre du mouvement.

La théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre (FSDT) donne des résultats acceptables, mais nécessite un facteur de correction de cisaillement. Alors que les théories de déformation par cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) ne nécessitent pas de facteur de correction de cisaillement, mais leurs équations de mouvement sont plus compliquées que celles du FSDT.

Vu que la théorie d'ordre élevé nécessite un temps de calcul supérieur aux autres, nous proposons une autre alternative afin de réduire ce temps de calculs, en occurrence au théorie raffiné à quatre variables qui tient compte d'une variation parabolique des déformations de cisaillement transversales à travers l'épaisseur, et par conséquent, un facteur de correction de cisaillement n'est pas nécessaire. Le champ de déplacement de la théorie des plaques à quatre variables est choisi en fonction de la partition des déplacements transversaux en deux parts, composante de flexion et l'autre de cisaillement

Chapitre III

**Étude Analytique de la
vibration des nanoplaques
renforcées par des
nanoplaquettes de graphène**

nanoplaquettes de graphène

renforcées par des

III.1. Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude analytique des vibrations libres des nanoplaques. Plus précisément, nous nous intéressons à l'analyse des fréquences propres de nanoplaques renforcées par des nanoplaquettes de graphène à gradation fonctionnelle (FG-GNPR). Dans ce contexte, une théorie raffinée des plaques à quatre variables (RPT) est utilisée, en considérant avec diverses conditions aux limites. Afin de prendre en compte les effets de taille, inhérents aux nanoplaques, la théorie de l'élasticité non locale d'Eringen est employée. La distribution des nanoplaquettes de graphène (GNP) dans la matrice polymère est étudiée selon des configurations uniformes et non uniformes. Le principe d'Hamilton est appliqué pour résoudre les équations gouvernant le comportement vibratoire des nanoplaques FG-GNPR.

III.2. Formulation du problème

Une nanoplaque à structure multi-couches en GPLs/polymernanocomposite (de longueur a et d'épaisseur h) est considéré. Le nanoplaque, qui comporte des couches, est renforcé par des nanoparticules de graphène (GNPs) dans la matrice polymère de chaque couche. Les effets des distributions des GNPs sur les réponses de vibration libre des nanoplaque en FG-GNPR sous diverses conditions aux bords sont examinés selon quatre modèles de distributions des GNPs, comme indiqué dans la Figure III.1. (Song et al. 2017)

$$g_{GNP}^{(k)} = \begin{cases} g_{GNP}^* \\ 4g_{GNP}^* \left(\frac{N_L+1}{2} - \left| k - \frac{N_L+1}{2} \right| \right) / (2+N_L) \\ 4g_{GNP}^* \left(\frac{1}{2} + \left| k - \frac{N_L+1}{2} \right| \right) / (2+N_L) \\ 4kg_{GNP}^* / (N_L+1) \end{cases} \quad (III.1)$$

où g_{GNP}^* est la fraction massique totale des GNPs, $k=1, 2, \dots, N_L$. Parmi ces modèles, le modèle 1 (UD) est un cas spécial où les GNPs sont uniformément distribuées dans toutes les couches. Dans le modèle 2 (FG-O), le plan médian du nanoplaque est riche en GNPs, tandis que dans le modèle 3 (FG-X), la partie inférieure et la partie supérieure du nanoplaque sont riches en

GPLs. Pour le modèle 4 (FG-A), la fraction massique de GPLs augmente de la couche inférieure vers la couche supérieure.

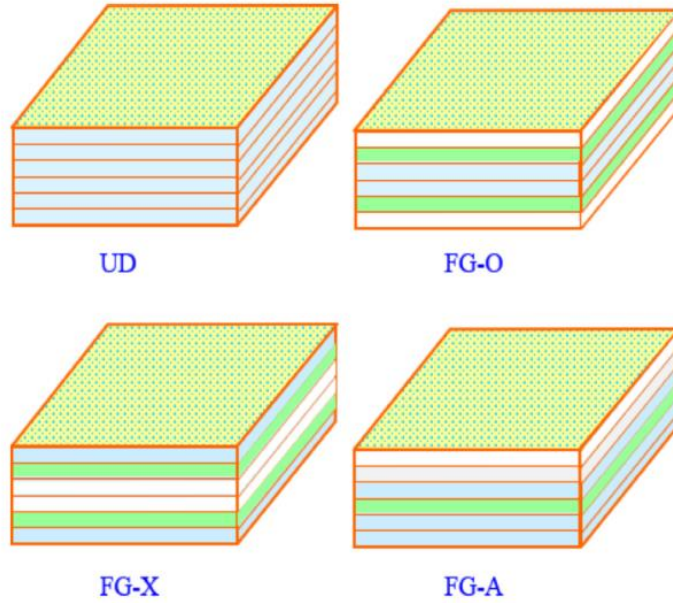


Fig. III.1 Quatre modèles de distribution des GNPs dans les plaques nanocomposites multi-couches GPL/polymère.

III.2.1. Propriétés des matériaux

Le modèle de Halpin-Tsai est utilisé pour estimer le module de Young du nanoplaque, dans lequel les GNPs sont supposées être des particules solides rectangulaires dans une matrice polymère. Le module de Young est donné comme :

$$E_c^{(k)} = \frac{3}{8} \frac{1 + \xi_L \eta_L V_{GNP}^{(k)}}{1 - \eta_L V_{GNP}^{(k)}} \times E_M + \frac{5}{8} \frac{1 + \xi_w \eta_w V_{GNP}^{(k)}}{1 - \eta_w V_{GNP}^{(k)}} \times E_M \quad (\text{III } 2)$$

Où $V_{GNP}^{(k)}$ est la fraction volumique des GNPs, E_M et E_{GNP} font référence respectivement au module de Young de la matrice polymère et des GNPs.

Deux paramètres supplémentaires η_L et η_w sont introduits comme suit :

$$\eta_L = \frac{(E_{GNP} / E_M) - 1}{(E_{GNP} / E_M) + \xi_L}, \quad \eta_w = \frac{(E_{GNP} / E_M) - 1}{(E_{GNP} / E_M) + \xi_w} \quad (\text{III } 3)$$

Où ξ_L et ξ_w dépendent de la géométrie et de la taille des nanofillers GNP, comme suit :

$$\xi_L = 2(l_{GNP} / h_{GNP}), \quad \xi_w = 2(w_{GNP} / h_{GNP}) \quad (\text{III } 4)$$

et l_{GNP} , w_{GNP} , h_{GNP} font référence respectivement à la longueur moyenne, à la largeur et à l'épaisseur des GNPs. De plus, la fraction volumique dans l'équation (2) est définie comme suit :

$$V_{GNP}^{(k)} = \frac{g_{GNP}^{(k)}}{g_{GNP}^{(k)} + (\rho_{GNP} / \rho_M)(1 - g_{GNP}^{(k)})} \quad (\text{III } 5)$$

Où $g_{GNP}^{(k)}$ est la fraction massique pour la couche k des GNPs. De plus, ρ_{GNP} et ρ_M font référence respectivement à la densité des GNPs et des polymères.

La densité effective et le coefficient de poisson pour le nanoplaque FG-GNPR de la couche k sont définis, selon la règle des mélanges, comme suit :

$$\begin{aligned} \rho_c^{(k)} &= \rho_{GNP} V_{GNP}^{(k)} + \rho_M (1 - V_{GNP}^{(k)}) \\ \nu_c^{(k)} &= \nu_{GNP} V_{GNP}^{(k)} + \nu_M (1 - V_{GNP}^{(k)}) \end{aligned} \quad (\text{III } 6)$$

ν_{GNP} , ν_M étant respectivement les coefficients de Poisson des GNPs et de la matrice polymère.

III.2.2. Relations cinématiques, de déformation et de contrainte

Le champ de déplacements supposé peut être défini par l'équation suivante (Shimpi 2002) :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\
 v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\
 w(x, y, z, t) &= w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t)
 \end{aligned} \tag{III 7}$$

Dans laquelle t représente le temps, et u_0 et v_0 signifient les fonctions de déplacement des surfaces médianes du FG-GNPR. De plus, $f(z)$ fait référence à la variation de la contrainte de cisaillement transverse le long de l'épaisseur du nanoplaque :

$$f(z) = z \left[1 + \frac{3\pi}{2} \operatorname{sech} \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right] - \frac{3\pi}{2} h \tanh \left(\frac{z}{h} \right) \tag{III 8}$$

Les déformations non nulles liées au champ de déplacements sont les suivantes :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} \tag{III 9}$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix}$$

Où

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ \frac{\partial w_s}{\partial x} \end{Bmatrix} \tag{III 10a}$$

et

$$g(z) = 1 - \frac{df(z)}{dz} \quad (\text{III } 10b)$$

Les relations non locales des contrainte-déformations pour la k-ième couche sont exprimées comme suit (Arefi et Zenkour, 2016) :

$$(1 - \mu^2 \nabla^2) \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} Q_{11}^{(k)} & Q_{12}^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21}^{(k)} & Q_{22}^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44}^{(k)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55}^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (\text{III } 11)$$

Où μ est le paramètre non local, ∇^2 est le laplacien et Q_{ij} représente les coefficients de rigidité en termes du module de Young et du coefficient de Poisson, définis comme suit :

$$\begin{aligned} Q_{11}^{(k)} = Q_{22}^{(k)} &= \frac{E_c^{(k)}}{1 - (\nu_c^{(k)})^2}, & Q_{12}^{(k)} = Q_{21}^{(k)} &= \frac{\nu_c^{(k)} E_c^{(k)}}{1 - (\nu_c^{(k)})^2}, \\ Q_{44}^{(k)} = Q_{55}^{(k)} = Q_{66}^{(k)} &= \frac{E_c^{(k)}}{2(1 + \nu_c^{(k)})} \end{aligned} \quad (\text{III } 12)$$

En utilisant le principe de Hamilton, les équations du mouvement peuvent être trouvées comme suit :

$$0 = \int_0^t (\delta U - \delta T) dt \quad (\text{III } 13)$$

Où δU et δT sont les variations de l'énergie de déformation et de l'énergie cinétique, respectivement.

La variation de l'énergie de déformation peut être spécifiée comme suit :

$$\begin{aligned}
 \delta U &= \int_V \left[\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} \right] dV \\
 &= \int_A \left[N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b \right. \\
 &\quad \left. + M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^s + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^s \right] dA = 0
 \end{aligned} \tag{III 14}$$

Ici, A est la surface supérieure de la nanoplate FG-GNPR et les résultantes de contrainte N , M , et S peuvent être décrites comme suit :

$$\left(N_i, M_i^b, M_i^s \right) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, f) \sigma_i dz, \quad (i = x, y, xy) \tag{III 15a}$$

$$\left(S_{xz}^s, S_{yz}^s \right) = \int_{-h/2}^{h/2} g(\tau_{xz}, \tau_{yz}) dz \tag{III 15b}$$

La variation de l'énergie cinétique peut être spécifiée comme suit :

$$\begin{aligned}
 \delta T &= \int_{\frac{-h\Omega}{2}}^{\frac{h}{2}} \int \left[\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w} \right] \rho(z) d\Omega dz \\
 &= \int_A \left\{ I_0 \left[\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + (\dot{w}_b + \dot{w}_s) (\delta \dot{w}_b + \delta \dot{w}_s) \right] \right. \\
 &\quad - I_1 \left(\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \\
 &\quad - I_2 \left(\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \\
 &\quad + J_1 \left(\frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial y} \right) + K_2 \left(\frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial y} \right) \\
 &\quad \left. + J_2 \left(\frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial y} \right) \right\} d\Omega
 \end{aligned} \tag{III 16}$$

Ici, le symbole pointé (·) indique la différenciation par rapport à la variable de temps, et les termes I_i , J_i , K_i définissent les moments d'inertie de masse du nanoplaque FG-GNPR comme suit :

$$(I_0, I_1, I_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) \rho(z) dz \quad (\text{III } 17a)$$

$$(J_1, J_2, K_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (f, z f, f^2) \rho(z) dz \quad (\text{III } 17b)$$

En considérant les équations (III.14) et (III.16) dans l'équation (III.13), et après quelques opérations mathématiques et simplifications, les équations suivantes sont obtenues :

$$\begin{aligned} \delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} - J_1 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x} \\ \delta v_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y} - J_1 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial y} \\ \delta w_b : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} &= I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_b \\ &\quad - J_2 \nabla^2 \ddot{w}_s \\ \delta w_s : \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} &= I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + J_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) \\ &\quad - J_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - K_2 \nabla^2 \ddot{w}_s \end{aligned} \quad (\text{III } 18)$$

En considérant les équations (III.11) et (III.10) dans l'équation (III.15) et après quelques opérations mathématiques, les résultantes de contrainte concernant les déplacements généralisés u_0, v_0, w_b, w_s) sont obtenues comme suit :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} - \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix}, \quad (\text{III } 19)$$

$$S - \mu \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \right) = A^s \gamma$$

Ou

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t, M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t \quad (\text{III 20a})$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}^t, k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}^t, k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\}^t \quad (\text{III 20b})$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{III 20c})$$

$$B^s = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix}, D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix}, H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix} \quad (\text{III 20d})$$

$$S = \{S_{xz}^s, S_{yz}^s\}^t, \gamma = \{\gamma_{xz}^0, \gamma_{yz}^0\}^t, A^s = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix} \quad (\text{III 20e})$$

Où la constante d'intégration est exprimée en termes des propriétés mécaniques le long de la direction de l'épaisseur comme suit :

$$\{A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, B_{ij}^s, D_{ij}^s, H_{ij}^s\} \sum_{k=1}^{N_L} \int_{z_{(k)}}^{z_{(k+1)}} Q_{ij}^{(k)} \{1, z, z^2, f(z), zf(z), f^2(z)\} dz \quad (\text{III 21a})$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \sum_{k=1}^{N_L} \int_{z_{(k)}}^{z_{(k+1)}} Q_{44}^{(k)} [g(z)]^2 dz \quad (\text{III 21b})$$

En considérant l'équation (III.19) dans l'équation (III.18), l'équation suivante est obtenue :

$$\begin{aligned} & A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - B_{11} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial y^2} \\ & - B_{11}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial y^2} = (1 - \mu \nabla^2) \left[I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} - J_1 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x} \right], \end{aligned} \quad (\text{III 22a})$$

$$\begin{aligned} & (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^2 \partial y} - B_{22} \frac{\partial^3 w_b}{\partial y^3} \\ & - B_{22}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial y^3} - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^2 \partial y} = (1 - \mu \nabla^2) \left[I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y} - J_1 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial y} \right] \end{aligned} \quad (\text{III } 22b)$$

$$\begin{aligned} & B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + B_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} - D_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} \\ & - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22} \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - D_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} \\ & - D_{22}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} = (1 - \mu \nabla^2) \left[I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - J_2 \nabla^2 \ddot{w}_s \right] \end{aligned} \quad (\text{III } 22c)$$

$$\begin{aligned} & B_{11}^s \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + B_{22}^s \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} - D_{11}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} \\ & - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - H_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} \\ & - H_{22}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} + A_{55}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + A_{44}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ & = (1 - \mu \nabla^2) \left[I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + J_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - J_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - K_2 \nabla^2 \ddot{w}_s \right] \end{aligned} \quad (\text{III } 22d)$$

III.3. La solution du problème

Dans cette partie, les solutions pour la vibration libre du nanoplate en FG-GNPR sous quatre conditions aux bords différentes sont obtenues. Les conditions aux limites d'un bord quelconque sont définies comme suit :

Conditions aux limites de bord encastré (C) :

$$u_0 = v_0 = w_b = w_s = \frac{\partial w_b}{\partial x} = \frac{\partial w_s}{\partial x} = 0 \quad \text{at } x = 0, a \quad (\text{III } 23a)$$

$$u_0 = v_0 = w_b = w_s = \frac{\partial w_b}{\partial y} = \frac{\partial w_s}{\partial y} = 0 \quad \text{at } y = 0, b \quad (\text{III } 23b)$$

Conditions aux limites de bord simplement supporté (S) :

$$N_x = v_0 = w_b = w_s = M_x = 0 \text{ at } x = 0, a \quad (\text{III } 24a)$$

$$u_0 = N_y = w_b = w_s = M_y = 0 \text{ at } y = 0, b \quad (\text{III } 24b)$$

Conditions aux limites de bord libre (F) :

$$N_x = N_{xy} = \frac{\partial M_x}{\partial x} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = Q_x = M_x = 0 \text{ at } x=0,a \quad (\text{III } 25a)$$

$$N_{xy} = N_y + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial M_y}{\partial y} = Q_y = M_y = 0 \text{ at } y=0,b \quad (\text{III } 25b)$$

Les expressions appropriées suivantes sont utilisées pour les conditions aux limites correspondantes :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w_b \\ w_s \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} \frac{\partial X_m(x)}{\partial x} Y_n(y) e^{i\omega t} \\ V_{mn} X_m(x) \frac{\partial X_n(y)}{\partial y} e^{i\omega t} \\ W_{bmn} X_m(x) Y_n(y) e^{i\omega t} \\ W_{smn} X_m(x) Y_n(y) e^{i\omega t} \end{Bmatrix} \quad (\text{III } 26)$$

Où U_{mn} , V_{mn} , W_{bmn} , et W_{smn} identifient les paramètres aléatoires et $\omega = \omega_{mn}$ montre la fréquence propre liée au $(m,n)^{th}$ mode propre. Les fonctions $X_m(x)$ et $Y_n(y)$ sont proposées par Sobhy (2013) pour satisfaire diverses conditions aux limites dans les équations (III.23) et (III.25) et représentent approximativement la surface déformée du nanoplate. Dans le tableau 1, les fonctions admissibles pour les différentes conditions aux limites sont fournies, notez que $\lambda = m\pi / a$ et $\mu = n\pi / b$.

En substituant l'expression (26) dans les équations (22) et en multipliant chaque fonction propre par l'équation correspondante puis en intégrant sur tout le domaine de la solution, et après quelques opérations mathématiques, l'équation suivante est obtenue :

$$\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{bmn} \\ W_{smn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III } 27)$$

En lire

$$\begin{aligned} a_{11} &= A_{11}\alpha_{12} + A_{66}\alpha_8, a_{12} = (A_{12} + A_{66})\alpha_8, a_{13} = -B_{11}\alpha_{12} - (B_{12} + 2B_{66})\alpha_8, \\ a_{14} &= -(B_{12}^s + 2B_{66}^s)\alpha_8 - B_{11}^s\alpha_{12}, \\ a_{21} &= (A_{12} + A_{66})\alpha_{10}, a_{22} = A_{22}\alpha_4 + A_{66}\alpha_{10}, a_{23} = -B_{22}\alpha_4 - (B_{12} + 2B_{66})\alpha_{10}, \\ a_{24} &= -(B_{12}^s + 2B_{66}^s)\alpha_{10} - B_{22}^s\alpha_4, \\ a_{31} &= B_{11}\alpha_{13} + (B_{12} + 2B_{66})\alpha_{11}, a_{32} = (B_{12} + 2B_{66})\alpha_{11} + B_{22}\alpha_5, \\ a_{33} &= -D_{11}\alpha_{13} - 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha_{11} - D_{22}\alpha_5, \\ a_{34} &= -D_{11}^s\alpha_{13} - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)\alpha_{11} - D_{66}^s\alpha_5, \\ a_{41} &= B_{11}^s\alpha_{13} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s)\alpha_{11}, a_{42} = (B_{12}^s + 2B_{66}^s)\alpha_{11} + B_{22}^s\alpha_5, \\ a_{43} &= -D_{11}^s\alpha_{13} - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)\alpha_{11} - D_{22}^s\alpha_5, \\ a_{44} &= -H_{11}^s\alpha_{13} - 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s)\alpha_{11} - H_{22}^s\alpha_5 + A_{44}^s\alpha_9 + A_{55}^s\alpha_3 \end{aligned} \quad (\text{III } 28a)$$

ET

$$\begin{aligned} m_{11} &= -I_0[\alpha_6 - \mu(\alpha_{12} + \alpha_8)], m_{12} = 0, m_{13} = I_1[\alpha_6 - \mu(\alpha_{12} + \alpha_8)], \\ m_{14} &= J_1[\alpha_6 - \mu(\alpha_{12} + \alpha_8)], \\ m_{21} &= 0, m_{22} = -I_0[\alpha_2 - \mu(\alpha_{10} + \alpha_4)], \\ m_{23} &= I_1[\alpha_2 - \mu(\alpha_{10} + \alpha_4)], m_{24} = J_1[\alpha_2 - \mu(\alpha_{10} + \alpha_4)], \\ m_{31} &= -I_1[\alpha_9 - \mu(\alpha_{13} + \alpha_{11})], m_{32} = -I_1[(\alpha_3 - \mu(\alpha_{11} + \alpha_5))], \\ m_{33} &= -I_0[\alpha_1 - \mu(\alpha_9 + \alpha_3)] + I_2[(\alpha_9 + \alpha_3) - \mu(\alpha_{13} + \alpha_5 + 2\alpha_{11})], \\ m_{34} &= -I_0[\alpha_1 - \mu(\alpha_9 + \alpha_3)] + J_2[(\alpha_9 + \alpha_3) - \mu(\alpha_{13} + \alpha_5 + 2\alpha_{11})], \\ m_{41} &= -J_1[\alpha_9 - \mu(\alpha_{13} + \alpha_{11})], m_{42} = -J_1[\alpha_3 - \mu(\alpha_{11} + \alpha_5)], \\ m_{43} &= -I_0[\alpha_1 - \mu(\alpha_9 + \alpha_3)] + J_2[(\alpha_9 + \alpha_3) - \mu(\alpha_{13} + \alpha_5 + 2\alpha_{11})], \\ m_{44} &= -I_0[\alpha_1 - \mu(\alpha_9 + \alpha_3)] + K_2[(\alpha_9 + \alpha_3) - \mu(\alpha_{13} + \alpha_5 + 2\alpha_{11})] \end{aligned} \quad (\text{III } 28b)$$

Avec

$$\begin{aligned}
 (\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5) &= \int_0^b \int_0^a (X_m Y_n, X_m Y_n'', X_m Y_n''') X_m Y_n dx dy \\
 (\alpha_2, \alpha_4, \alpha_{10}) &= \int_0^b \int_0^a (X_m Y_n', X_m Y_n'', X_m Y_n''') X_m Y_n' dx dy \\
 (\alpha_6, \alpha_8, \alpha_{12}) &= \int_0^b \int_0^a (X_m' Y_n, X_m' Y_n'', X_m' Y_n''') X_m' Y_n dx dy \\
 (\alpha_7, \alpha_9, \alpha_{11}, \alpha_{13}) &= \int_0^b \int_0^a (X_m' Y_n', X_m' Y_n'', X_m' Y_n''', X_m' Y_n''') X_m' Y_n' dx dy
 \end{aligned} \tag{III 29}$$

La solution non triviale du problème actuel est obtenue en égalant le déterminant de l'équation (27) à zéro.

III.4. Conclusion :

Ce chapitre a présenté une étude analytique des vibrations libres de nanoplaque en FG-GNPR, en utilisant une théorie raffinée des plaques à quatre variables et la théorie non locale d'Eringen pour tenir compte des effets de taille. L'analyse a considéré différentes conditions aux limites et des distributions de nanoplaquettes de graphène (GNP) uniformes et non uniformes. Les résultats obtenus par la présente théorie seront présentés dans le chapitre suivant, mettant en évidence l'influence significative de ces paramètres sur les fréquences propres des nanoplaques.

Chapitre IV

RÉSULTATS ET DISCUSSIONS

DISCUSSIONS

IV.1. Introduction

L'étude des vibrations libres des nanostructures représente un domaine de recherche en pleine expansion, particulièrement concernant les nanoplaques FG-GNPR (Functionally Graded Graphene Nanoplatelets Reinforced). Ce chapitre présente une analyse approfondie de nos résultats, structurée autour d'une validation méthodologique rigoureuse. Cette validation, détaillée dans la section suivante, s'appuie sur une étude comparative incluant deux cas de référence : une nanoplaque en FG-GNPR et des nanoplaques isotropes. Cette approche comparative permet d'établir la fiabilité de notre méthode tout en mettant en évidence ses spécificités par rapport aux travaux antérieurs.

IV.2. Résultats numériques et discussions

En l'absence d'études portant sur l'analyse des vibrations libres des nanoplaques en FG-GNPR dans la littérature scientifique, la validité de la méthode proposée est d'abord établie à travers une étude comparative présentée dans la section IV.2.1. Cette validation s'appuie sur deux cas de référence comprenant une nanoplaque FG-GNPR et des nanoplaques isotropes. Par la suite, l'analyse est étendue à l'étude d'une nanoplaque FG-GNPR caractérisée par les propriétés matérielles suivantes : un module d'Young E_m de 3,0 GPa, un coefficient de Poisson ν_m de 0,34 et une masse volumique ρ_m de 1200 kg/m³.

IV.2.1. Vérification

IV.2.1.1. Plaques FG-GNPR

Considérons une plaque carrée simplement appuyée présentant les caractéristiques suivantes : une longueur a de 0,45, une fraction massique de GNP g_{GNP} de 1%, un rapport longueur/épaisseur a/h de 10, et un paramètre N_L égal à 10. Les propriétés matérielles des GNP sont définies comme suit : un module d'Young E_{GNP} de 1,01 TPa, un coefficient de Poisson GNP de 0,186, une masse volumique ρ_{GNP} de 1060 kg/m³, une longueur l_{GNP} de 2,5 μm , une largeur w_{GNP} de 1,5 μm , et une épaisseur h_{GNP} de 1,5 nm.

Les deux premières fréquences propres des plaques FG GNPRC sont synthétisées dans le Tableau IV.1. On observe une concordance satisfaisante entre les résultats obtenus par la présente méthode et les solutions de référence, et ce pour tous les motifs considérés ainsi que pour l'époxy pure.

Tableau IV.1 : Les deux premières fréquences propres $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}$ de la plaque FG-GNPR

Mode	Théories	Pattern				
		Pure epoxy	UD	FG-O	FG-X	FG-A
1	(Sobhy 2013)	0.0584	0.1216	0.1020	0.1378	0.1118
	Reddy <i>et al.</i> , 2018)	0.0588	0.1225	0.0912	0.1420	0.1080
	(Phung-Van <i>et al.</i> 2021)	0.0584	0.1216	0.1023	0.1366	0.1118
	Présente	0.0584	0.12158	0.10230	0.13654	0.11181
2	(Sobhy 2013)	0.1391	0.2895	0.2456	0.3249	0.2673
	Reddy <i>et al.</i> 2018)	0.1412	0.2941	0.2246	0.3245	0.2589
	(Phung-Van <i>et al.</i> 2021)	0.1391	0.2895	0.2470	0.3189	0.2674
	Présente	0.1391	0.28955	0.24703	0.31845	0.26736

IV.2.1.2. Nanoplaque isotrope

Le Tableau IV.2 présente une analyse comparative entre la théorie de déformation en cisaillement sinusoïdale (SSDT), la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) et la méthode proposée. L'étude a été menée sur une nanoplaque isotrope carrée simplement appuyée (de longueur $a = 10$ et d'épaisseur h). Les propriétés matérielles sont caractérisées par un module d'Young $E = 3 \times 10^6$, un coefficient de Poisson $\nu = 0,3$ et une masse volumique $\rho = 1$.

IV.2.2. Analyse de la vibration libre

IV.2.2.1. Nanoplaque carrée

Dans un premier temps, nous considérons une plaque carrée FG-GNPRC ayant une longueur a de 10, une fraction massique de GNP g_{GNP} de 1%, et composée de dix couches ($NL = 10$). Les propriétés matérielles des GNP sont définies comme suit : un module d'Young E_{GNP} de 1,01 TPa, un coefficient de Poisson ν_{GNP} de 0,186, une masse volumique ρ_{GNP} de 1062,5 kg/m³, une longueur l_{GNP} de 2,5 nm, une largeur w_{GNP} de 1,5 nm, et une épaisseur h_{GNP} de 0,3 nm.

Les Tableaux IV.3, IV.4, IV.5 et IV.6 présentent respectivement la première fréquence propre adimensionnelle des nanoplaques FG-GNPR avec différentes conditions aux limites : simplement appuyée (SSSS), encastree (CCCC), mixte encastree-simplement appuyée (CSCS), et mixte libre-encastree (FCFC). Ces résultats sont donnés pour différentes valeurs du rapport longueur/épaisseur et du paramètre non local.

Le Tableau IV.1 propose une analyse comparative approfondie des résultats issus de quatre études distinctes : Sobhy (2013), Reddy et al. (2018), Phung-Van et al. (2021), et la présente étude. L'analyse porte sur différentes configurations matérielles : époxy pure, UD, FG-O, FG-X et FG-A, pour deux modes de vibration. Pour le Mode 1, les valeurs obtenues pour l'époxy pure sont quasi-identiques dans toutes les études, avec un écart minimal de 0,68% entre notre étude et la référence. Dans ce même mode, les valeurs pour la configuration UD sont généralement supérieures à celles de l'époxy pure et du FG-O, mais inférieures à celles du FG-X, la configuration FG-A se situant entre UD et FG-O. Pour le Mode 2, une tendance similaire est observée, avec des valeurs UD supérieures au FG-O mais inférieures au FG-X, et des valeurs FG-A intermédiaires. Pour les deux modes, la configuration FG-X présente systématiquement la fréquence propre la plus élevée, suivie par UD, FG-A et FG-O, mettant ainsi en évidence les caractéristiques de performance variables de ces configurations matérielles.

Le Tableau IV.2 présente les valeurs de la première fréquence propre adimensionnelle des nanoplaques carrées FG-GNPR avec des conditions aux limites SSSS en fonction du rapport a/h , selon différentes théories : SSDT, FSDT, RPT et la présente étude, pour des valeurs du paramètre μ comprises entre 0 et 5. On observe qu'une augmentation du paramètre entraîne une diminution de la fréquence propre de la nanoplaque carrée isotrope.

Tableau IV.2 : Première fréquence propre adimensionnelle $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho / G}$ de la nanoplaque carrée isotrope.

a/h	Théories	μ					
		0	1	2	3	4	5
10	SSDT (Aghababaei and Reddy 2009)	0.0935	0.0854	0.0791	0.0741	0.0699	0.0663
	FSDT (Aghababaei and Reddy 2009)	0.0930	0.0850	0.0788	0.0737	0.0696	0.0660
	RPT (Phung-Van <i>et al.</i> 2021)	0.0930	0.0850	0.0788	0.0737	0.0695	0.0660
	Présente	0.0930	0.0850	0.0788	0.0737	0.0695	0.0659
20	SSDT (Aghababaei and Reddy 2009)	0.0239	0.0218	0.0202	0.0189	0.0179	0.0170
	FSDT (Aghababaei and Reddy 2009)	0.0239	0.0218	0.0202	0.0189	0.0178	0.0169
	RPT (Phung-Van <i>et al.</i> 2021)	0.0239	0.0218	0.0202	0.0189	0.0178	0.0169
	Présente	0.0239	0.0218	0.0202	0.0189	0.0178	0.0169

Tableau IV.3 compare les valeurs de la première fréquence naturelle non dimensionnelle des nanoplaques carrées FG-GNPR avec des conditions aux limites SSSS en fonction de a/h , des motifs de matériaux différents (époxy pur, UD, FG-O, FG-X, FG-A) et des théories avec différentes valeurs de paramètres (de 0 à 5). En général, les valeurs du paramètre a/h augmentent significativement, indiquant une réduction de la rigidité de la structure, ce qui réduit par conséquent la fréquence naturelle, car la nanoplaque FG-GNPR plus petite est plus rigide que la plus grande. En estimant le changement en pourcentage de la fréquence naturelle, il est constaté que pour $a/h = 5$ à $a/h = 10$, le changement est d'environ 72 %, pour $a/h = 10$ à $a/h = 20$, il est de 74 %, tandis que pour $a/h = 20$ à $a/h = 50$, il est de 84 %, ce qui indique que la réduction de la rigidité est significativement plus élevée pour des rapports a/h plus grands. De même, l'augmentation du paramètre μ , de 1 à 5, diminue la fréquence de 8,6 %, 7,3 %, 6,3 %, 5,6 % et 5 %, ce qui indique que la différence de magnitude devient insignifiante au-delà d'une certaine valeur du paramètre μ .

Tableau IV.3 : Première fréquence propre adimensionnelle $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho / G}$ de la nanoplaque carrée isotrope SSSS FG-GNPR.

a/h	Pattern	Theories	μ					
			0	1	2	3	4	5
5	Pure epoxy	(Phung-Van <i>et al.</i> 2021)	0.2132	0.1948	0.1805	0.1690	0.1594	0.1513
		Présente	0.2132	0.1948	0.1805	0.1689	0.1594	0.1513
	UD	(Phung-Van <i>et al.</i> 2021)	0.2285	0.2088	0.1935	0.1811	0.1708	0.1621
		Présente	0.2285	0.20883	0.19349	0.18110	0.17082	0.16211
	FG-O	(Phung-Van <i>et al.</i> 2021)	0.2241	0.2048	0.1898	0.1776	0.1675	0.1590
		Présente	0.22417	0.20486	0.18981	0.17766	0.16757	0.15903
	FG-X	(Phung-Van <i>et al.</i> 2021)	0.2326	0.2126	0.1969	0.1843	0.1739	0.1650
		Présente	0.23257	0.21254	0.19692	0.18431	0.17385	0.16499
	FG-A	(Phung-Van <i>et al.</i> 2021)	0.2281	0.2085	0.1931	0.1808	0.1705	0.1618
		Présente	0.22812	0.20847	0.19316	0.18079	0.17052	0.16183
10	Pure epoxy	(Phung-Van <i>et al.</i> 2021)	0.0584	0.0534	0.0495	0.0463	0.0437	0.0415
		Présente	0.0584	0.0534	0.0495	0.0463	0.0437	0.0415

	UD	(Phung-Van <i>et al.</i> 2021)	0.0626	0.0572	0.0530	0.0496	0.0468	0.0444
		Présente	0.06261	0.05721	0.0530	0.04962	0.04680	0.04441
	FG-O	(Phung-Van <i>et al.</i> 2021)	0.0611	0.0559	0.0518	0.0484	0.0457	0.0434
		Présente	0.06112	0.55857	0.05175	0.04843	0.04569	0.04336
	FG-X	(Phung-Van <i>et al.</i> 2021)	0.0641	0.0585	0.0542	0.0508	0.0479	0.0454
		Présente	0.06406	0.05854	0.05424	0.05076	0.04788	0.04544
	FG-A	(Phung-Van <i>et al.</i> 2021)	0.0625	0.0571	0.0529	0.0495	0.0467	0.0443
		Présente	0.06249	0.05711	0.05291	0.04952	0.04671	0.04433
20	Pure epoxy	(Phung-Van <i>et al.</i> 2021)	0.0150	0.0137	0.0127	0.0119	0.0112	0.0106
		Présente	0.0150	0.0137	0.0127	0.0119	0.0112	0.0106
	UD	(Phung-Van <i>et al.</i> 2021)	0.0161	0.0147	0.0136	0.0127	0.0120	0.0114
		Présente	0.01607	0.01469	0.01361	0.01274	0.01201	0.0114
	FG-O	(Phung-Van <i>et al.</i> 2021)	0.0157	0.0143	0.0133	0.0124	0.0117	0.0111
		Présente	0.01567	0.01432	0.01326	0.01241	0.01171	0.01111
	FG-X	(Phung-Van <i>et al.</i> 2021)	0.0165	0.0151	0.0140	0.0131	0.0123	0.0117
		Présente	0.01647	0.01505	0.01395	0.01306	0.01231	0.01169
	FG-A	(Phung-Van <i>et al.</i> 2021)	0.0160	0.0147	0.0136	0.0127	0.0120	0.0114
		Présente	0.01604	0.01466	0.01358	0.01271	0.01199	0.01138
50	Pure epoxy	(Phung-Van <i>et al.</i> 2021)	0.0024	0.0022	0.0020	0.0019	0.0018	0.0017
		Present	0.0024	0.0022	0.0020	0.0019	0.0018	0.0017
	UD	(Phung-Van <i>et al.</i> 2021)	0.0026	0.0024	0.0022	0.0021	0.0019	0.0018
		Présente	0.00259	0.00236	0.00219	0.00205	0.00193	0.00183
	FG-O	(Phung-Van <i>et al.</i> 2021)	0.0025	0.0023	0.0021	0.0020	0.0019	0.0018
		Présente	0.00252	0.00230	0.00213	0.00200	0.00188	0.00179
	FG-X	(Phung-Van <i>et al.</i> 2021)	0.0027	0.0024	0.0023	0.0021	0.0020	0.0019
		Présente	0.00265	0.00242	0.00225	0.00210	0.00198	0.00188
	FG-A	(Phung-Van <i>et al.</i> 2021)	0.0026	0.0024	0.0022	0.0021	0.0019	0.0018
		Présente	0.00258	0.00236	0.00219	0.00205	0.00193	0.00183

Tableau IV.4 compare les valeurs de la première fréquence naturelle non dimensionnelle des nanoplaques FG-GNPR avec des conditions aux limites CCCC en fonction de a/h , des motifs de matériaux différents et des théories avec différentes valeurs de paramètres. En estimant le changement en pourcentage de la fréquence naturelle, il est trouvé que pour $a/h = 5$ à $a/h = 10$, le changement est d'environ 70 %, pour $a/h = 10$ à $a/h = 20$, il est de 73,2 %, tandis que pour $a/h = 20$ à $a/h = 50$, il est de 83 %, ce qui indique que la réduction de la rigidité est également significativement plus élevée pour des rapports a/h plus grands. De même, l'augmentation du paramètre de 1 à 5 diminue la fréquence de 9,8 %, 8,3 %, 7,2 %, 6,3 % et 5,6 %, ce qui signifie qu'au-delà d'une valeur particulière du paramètre μ , la différence dans la magnitude devient négligeable.

Table IV.4 : Première fréquence naturelle non dimensionnelle $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}$ De la nanoplaque carrée CCCC FG-GNPR.

a/h	Pattern	Theories	μ					
			0	1	2	3	4	5
5	Pure epoxy	(Phung-Van <i>et al.</i> 2021)	0.3316	0.2988	0.2739	0.2542	0.2382	0.2248
		Présente	0.3518	0.3119	0.2831	0.2611	0.2435	0.2290
	UD	(Phung-Van <i>et al.</i> 2021)	0.3555	0.3203	0.2936	0.2725	0.2553	0.2409
		Présente	0.37716	0.33441	0.30352	0.27986	0.26099	0.24549
	FG-O	(Phung-Van <i>et al.</i> 2021)	0.3519	0.3168	0.2903	0.2694	0.2523	0.2381
		Présente	0.37280	0.33047	0.29990	0.27650	0.25783	0.24250
	FG-X	(Phung-Van <i>et al.</i> 2021)	0.3586	0.3232	0.2964	0.2752	0.2578	0.2434
		Présente	0.38085	0.33776	0.30661	0.28274	0.26370	0.24805
	FG-A	(Phung-Van <i>et al.</i> 2021)	0.3551	0.3199	0.2932	0.2721	0.2549	0.2406
		Présente	0.37667	0.33396	0.30311	0.27948	0.26064	0.24515
10	Pure epoxy	(Phung-Van <i>et al.</i> 2021)	0.1008	0.0906	0.0829	0.0769	0.072	0.0679
		Présente	0.1052	0.0935	0.0849	0.0784	0.0731	0.0688
	UD	(Phung-Van <i>et al.</i> 2021)	0.1081	0.0971	0.0889	0.0824	0.0771	0.0727
		Présente	0.11280	0.10020	0.09105	0.08402	0.07841	0.07378

	FG-O	(Phung-Van <i>et al.</i> 2021)	0.1059	0.0951	0.0871	0.0807	0.0755	0.0712
		Présente	0.11047	0.09812	0.08916	0.08228	0.07677	0.07225
	FG-X	(Phung-Van <i>et al.</i> 2021)	0.1101	0.0990	0.0906	0.0840	0.0786	0.0742
		Présente	0.11502	0.10217	0.09285	0.08568	0.07996	0.07524
	FG-A	(Phung-Van <i>et al.</i> 2021)	0.1079	0.0969	0.0887	0.0822	0.0770	0.0726
		Présente	0.11261	0.10002	0.09089	0.08387	0.07827	0.07365
20	Pure epoxy	(Phung-Van <i>et al.</i> 2021)	0.0269	0.0242	0.0221	0.0205	0.0192	0.0181
		Présente	0.0279	0.0248	0.0225	0.0208	0.0194	0.0183
	UD	(Phung-Van <i>et al.</i> 2021)	0.0289	0.0259	0.0237	0.0220	0.0206	0.0194
		Présente	0.02993	0.02662	0.02421	0.02235	0.02086	0.01964
	FG-O	(Phung-Van <i>et al.</i> 2021)	0.0282	0.0253	0.0231	0.0214	0.0201	0.0189
		Présente	0.02920	0.02597	0.02361	0.02180	0.02035	0.01916
	FG-X	(Phung-Van <i>et al.</i> 2021)	0.0296	0.0265	0.0243	0.0225	0.0211	0.0199
		Présente	0.03065	0.02725	0.02478	0.02288	0.02136	0.02011
	FG-A	(Phung-Van <i>et al.</i> 2021)	0.0288	0.0259	0.0237	0.0219	0.0205	0.0194
		Présente	0.02988	0.02657	0.02416	0.02231	0.02082	0.01960
50	Pure epoxy	(Phung-Van <i>et al.</i> 2021)	0.0044	0.0040	0.0036	0.0033	0.0031	0.0030
		Présente	0.0045	0.0040	0.0036	0.0034	0.0031	0.0029
	UD	(Phung-Van <i>et al.</i> 2021)	0.0047	0.0042	0.0039	0.0036	0.0034	0.0032
		Présente	0.00487	0.00434	0.00394	0.00364	0.00340	0.0032
	FG-O	(Phung-Van <i>et al.</i> 2021)	0.0046	0.0041	0.0038	0.0035	0.0033	0.0031
		Présente	0.00475	0.00422	0.00384	0.00355	0.00331	0.00312
	FG-X	(Phung-Van <i>et al.</i> 2021)	0.0048	0.0043	0.0040	0.0037	0.0034	0.0032
		Présente	0.00500	0.00445	0.00404	0.00373	0.00349	0.00328
	FG-A	(Phung-Van <i>et al.</i> 2021)	0.0047	0.0042	0.0039	0.0036	0.0034	0.0032
		Présente	0.00486	0.00433	0.00394	0.00363	0.00339	0.00319

Tableau IV.5 présente les valeurs de la première fréquence naturelle non dimensionnelle des nanoplaques FG-GNPR avec des conditions aux limites CSCS en fonction de a/h et des motifs de matériaux différents. En estimant le changement en pourcentage de la fréquence naturelle, il a

été constaté que pour $a/h = 5$ à $a/h = 10$, le changement est d'environ 71 %, pour $a/h = 10$ à $a/h = 20$, il est de 73,82 %, tandis que pour $a/h = 20$ à $a/h = 50$, il est de 83,7 %, ce qui indique que la réduction de la rigidité est significativement plus élevée pour des rapports a/h plus grands. De même, l'augmentation du paramètre de 1 à 5 diminue la fréquence de 9,9 %, 8,3 %, 7,1 %, 6,2 % et 5,5 %, ce qui montre qu'au-delà d'une certaine valeur du paramètre μ , la différence dans la magnitude devient négligeable.

Table IV.5 : Première fréquence naturelle non dimensionnelle $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}$ du nanoplaque carrée CSCS FG-GNPR.

a/h	Pattern	μ					
		0	1	2	3	4	5
5	Pure epoxy	0.29567	0.26598	0.24374	0.22629	0.21212	0.20031
	UD	0.31692	0.28509	0.26126	0.24255	0.22736	0.21470
	FG-O	0.31236	0.28096	0.25745	0.23900	0.22403	0.21155
	FG-X	0.32096	0.28877	0.26465	0.24571	0.23033	0.21752
	FG-A	0.31646	0.28467	0.26087	0.24219	0.22702	0.21438
10	Pure epoxy	0.08541	0.07693	0.07056	0.06555	0.06147	0.05807
	UD	0.09152	0.08244	0.07561	0.07024	0.06587	0.06223
	FG-O	0.08951	0.08062	0.07394	0.06869	0.06442	0.06086
	FG-X	0.09345	0.08418	0.07721	0.07172	0.06727	0.06355
	FG-A	0.09136	0.08229	0.07547	0.07011	0.06575	0.06212
20	Pure epoxy	0.02235	0.02014	0.01849	0.01718	0.01611	0.01523
	UD	0.02394	0.02158	0.01980	0.01840	0.01726	0.01631
	FG-O	0.02335	0.02104	0.01931	0.01794	0.01683	0.01590
	FG-X	0.02453	0.02211	0.02028	0.01885	0.01768	0.01671
	FG-A	0.02390	0.02154	0.01976	0.01837	0.01723	0.01628
50	Pure epoxy	0.00363	0.00327	0.00299	0.00279	0.00262	0.00247
	UD	0.00388	0.00350	0.00321	0.00298	0.00280	0.00264
	FG-O	0.00378	0.00341	0.00313	0.00291	0.00273	0.00257
	FG-X	0.00398	0.00359	0.00329	0.00306	0.00287	0.00271
	FG-A	0.00387	0.00349	0.00320	0.00298	0.00279	0.00264

Tableau IV.6 montre les valeurs de la première fréquence naturelle non dimensionnelle des nanoplaques FG-GNPR avec des conditions aux limites FCFC en fonction de a/h et des motifs de matériaux différents. En estimant le changement en pourcentage de la fréquence naturelle, il a été trouvé que pour $a/h = 5$ à $a/h = 10$, le changement est d'environ 69 %, pour $a/h = 10$ à $a/h = 20$, il

est de 73 %, tandis que pour $a/h = 20$ à $a/h = 50$, il est de 83,6 %, ce qui indique que la réduction de la rigidité est également significativement plus élevée pour des rapports a/h plus grands. De même, l'augmentation du paramètre de 1 à 5 diminue la fréquence de 9,8 %, 8,9 %, 7,6 %, 6,6 % et 5,7 %.

Tableau IV.6 : Première fréquence naturelle sans dimension $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}$ de la nanoplaque carrée FCFC FG-GNPR.

a/h	Pattern	μ					
		0	1	2	3	4	5
5	Pure epoxy	0.36259	0.32302	0.29409	0.27176	0.25385	0.23906
	UD	0.38870	0.34628	0.31527	0.29132	0.27212	0.25627
	FG-O	0.38493	0.34281	0.31204	0.28830	0.26927	0.25356
	FG-X	0.39176	0.34911	0.31791	0.29381	0.27447	0.25851
	FG-A	0.38823	0.34585	0.31487	0.29095	0.27177	0.25594
10	Pure epoxy	0.11080	0.09891	0.09017	0.08340	0.07795	0.07346
	UD	0.11874	0.10599	0.09663	0.08937	0.08354	0.07872
	FG-O	0.11639	0.10388	0.09470	0.08759	0.08187	0.07715
	FG-X	0.12095	0.10798	0.09844	0.09105	0.08511	0.08020
	FG-A	0.11854	0.10581	0.09646	0.08922	0.08340	0.07858
20	Pure epoxy	0.02967	0.02653	0.02421	0.02241	0.02096	0.01976
	UD	0.03179	0.02842	0.02594	0.02401	0.02245	0.02116
	FG-O	0.03102	0.02773	0.02531	0.02342	0.02191	0.02065
	FG-X	0.03254	0.02909	0.02655	0.02457	0.02298	0.02166
	FG-A	0.03173	0.02837	0.02589	0.02396	0.02241	0.02112
50	Pure epoxy	0.00485	0.00434	0.00396	0.00367	0.00343	0.00323
	UD	0.00519	0.00464	0.00424	0.00392	0.00367	0.00346
	FG-O	0.05064	0.00452	0.00413	0.00382	0.00358	0.00337
	FG-X	0.00532	0.00476	0.00435	0.00402	0.00376	0.00355
	FG-A	0.00518	0.00464	0.00423	0.00392	0.00366	0.00345

La Figure IV.1 présente la variation de la fréquence non dimensionnelle en fonction des paramètres non locaux pour des conditions aux limites SSSS. Il est clairement observé que l'époxy pur produit la fréquence la plus basse, tandis que le type FG-X atteint la fréquence maximale. Les autres configurations de matériaux présentent des résultats intermédiaires : les types FG-A et UD affichent des valeurs de fréquence similaires, qui sont supérieures à celles du type FG-O. Ces résultats soulignent l'influence déterminante des motifs de matériaux sur le comportement

vibratoire des nanoplaques FG-GNPR, offrant ainsi des perspectives précieuses pour l'optimisation des structures dans des applications nanotechnologiques avancées.

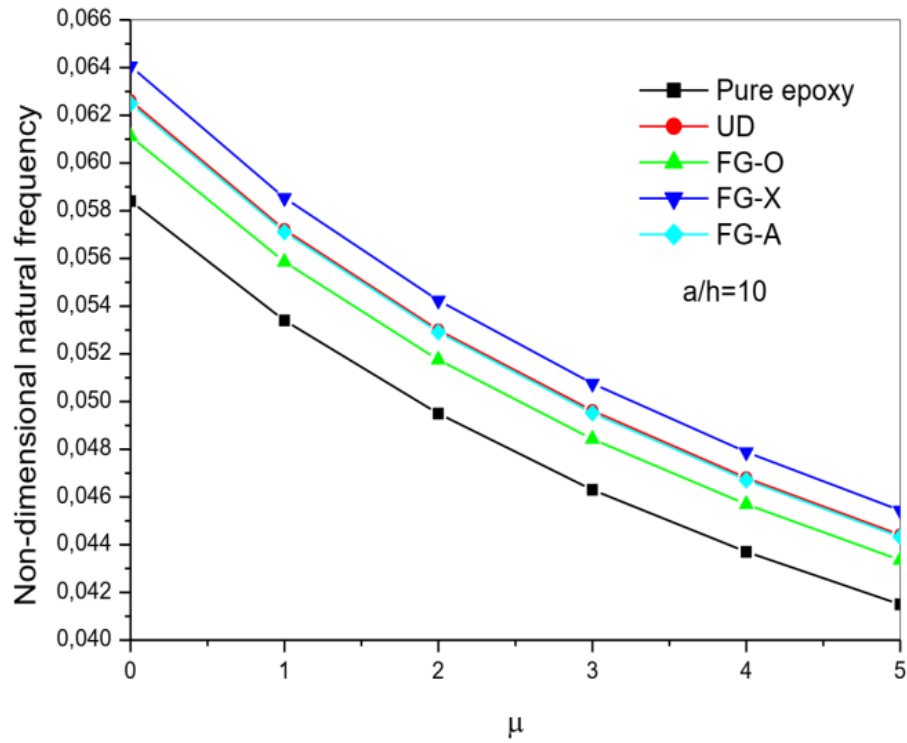


Figure IV.1 : La variation de la première fréquence naturelle non dimensionnelle $\bar{\omega}$ par rapport au paramètre non local μ d'une nanoplaque carrée FG GNPRC SSSS.

La figure IV.2 illustre la fréquence naturelle en fonction des différentes conditions aux limites pour le la distrub UD ; parmi toutes les conditions, celles de type FCFC produisent la fréquence maximale, suivies par CCCC, CSCS et enfin SSSS.

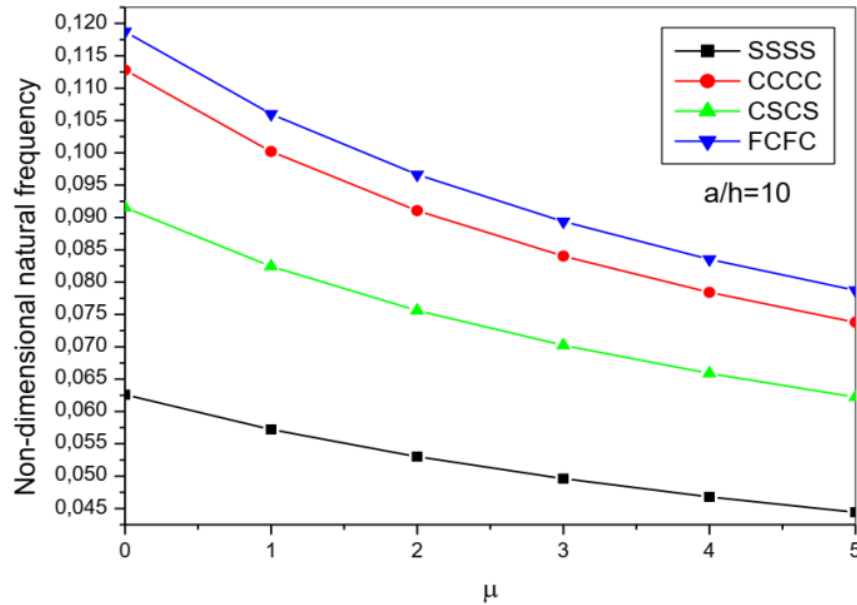


Figure IV.2 : Variation de la première fréquence naturelle non dimensionnelle $\bar{\omega}$ pour la distribution UD par rapport au paramètre non local μ sous différentes conditions aux limites.

De manière similaire, les figures IV.3 à IV.5 présentent les valeurs de la fréquence naturelle pour les distributions FG-O, FG-X et FG-A. L'analyse met en évidence que, dans tous les cas, y compris celui de la distribution UD, la fréquence naturelle suit une tendance comparable. Par ailleurs, il est constaté que la différence des valeurs de fréquence est particulièrement prononcée lorsque les conditions aux limites FCFC et SSSS sont comparées, tandis qu'elle est nettement moins importante entre FCFC et CCCC. Il convient également de noter que les valeurs de fréquence correspondant aux conditions CSCS se situent systématiquement entre les résultats obtenus pour les conditions aux limites SSSS et FCFC.

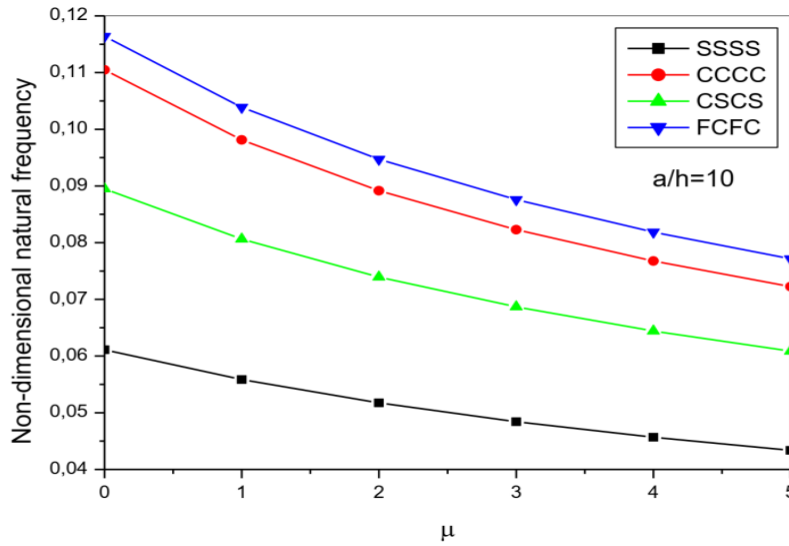


Figure IV.3 : Variation de la première fréquence naturelle non dimensionnelle $\bar{\omega}$ pour la distribution FG-O par rapport au paramètre non local μ sous différentes conditions aux limites.

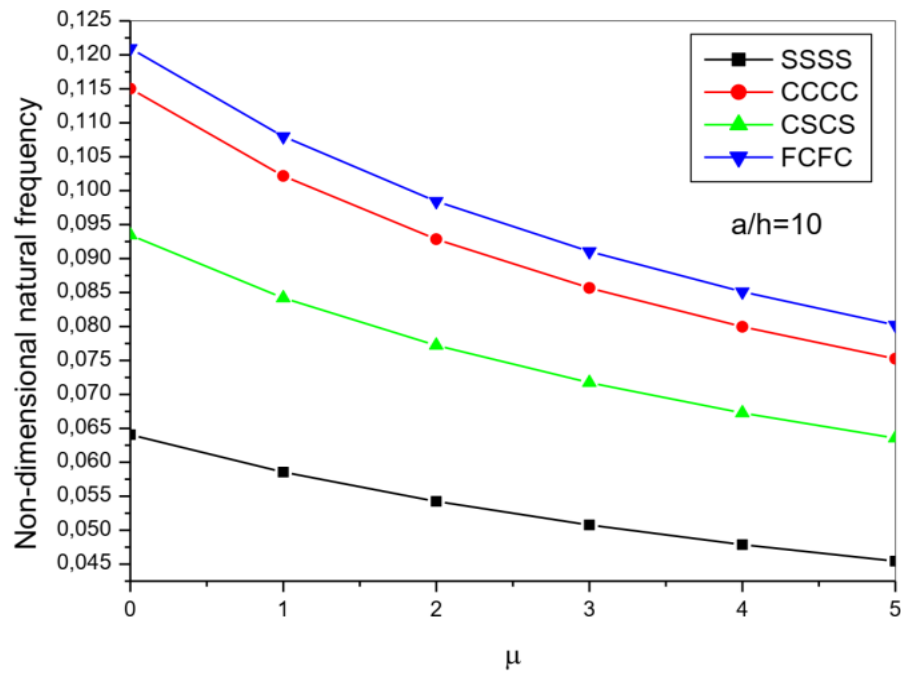


Figure IV.4 : Variation de la première fréquence naturelle non dimensionnelle $\bar{\omega}$ pour la distribution FG-X par rapport au paramètre non local μ sous différentes conditions aux limites.

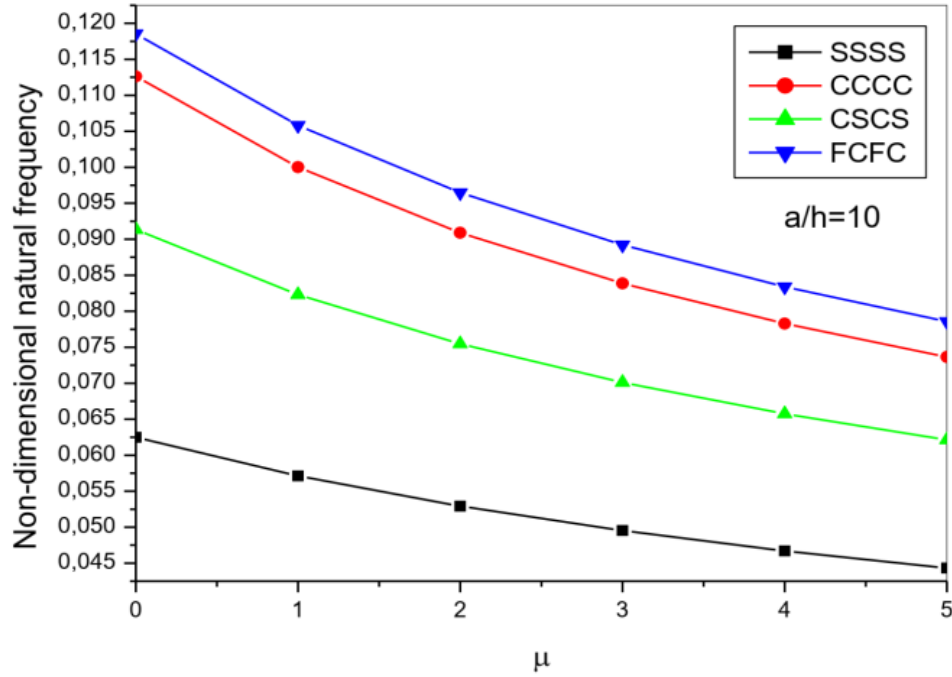


Figure IV.5 : Variation de la première fréquence naturelle non dimensionnelle $\bar{\omega}$ pour la distribution FG-A par rapport au paramètre non local μ sous différentes conditions aux limites.

IV.3. Conclusion

Ce chapitre a examiné l'analyse des vibrations libres des nanoplaques en FG-GNPR, en mettant en avant les contributions significatives de la littérature scientifique. La validité de la présente théorie a été établie par une étude comparative, utilisant deux cas de référence : une nanoplaque en FG-GNPR et des nanoplaques isotropes. Les résultats obtenus confirment l'efficacité de la méthode dans la prédiction des fréquences naturelles, renforçant ainsi sa crédibilité. Cette validation est essentielle pour garantir la fiabilité des approches théoriques et numériques dans l'étude des structures nanométriques. En somme, les résultats présentés ouvrent la voie à de futures recherches sur l'optimisation des performances vibratoires des nanoplaques FG-GNPR, tout en soulignant l'importance d'une méthodologie rigoureuse dans le domaine de la nanotechnologie.

Conclusion générale et perspective

herpessés

Conclusion générale et perspective

Dans ce travail nous avons présenté un travail de recherche analytique et numérique pour l'analyse des nano plaques fonctionnellement graduée en composite polymère (FG-PC) renforcée par des nanoplaquets de Graphène (GNPs). En utilisant un Modèle de déformation de cisaillement d'ordre élevée à quatre variable. Deux objectifs ont été visés à travers cette thèse. Le premier consiste à une analyse de la vibration dans les nano plaques avec une théorie de déformation de cisaillement de quatre variable (RPT). Le second objectif de cette thèse consiste à une étude de l'effet d'échelle et l'effet les distributions des nanoplaquettes de graphène sur la réponse en vibration libre des nanoplaques.

A travers l'interprétation des graphes et résultats obtenu nous avons une vision très claire sur le comportement dynamique dans les nano plaques fonctionnellement Graduée.

Dans ce travail, Toutes les études comparatives effectuées dans cette étude soit entre les fréquences, ont montrées que les résultats obtenus pour l'analyse de comportement des nano plaques parfaits sont presque identiques à ceux obtenus avec d'autres théories de déformation par cisaillement.

Il peut être conclu que la théorie utilisée a montré sa précision pour la détermination des caractéristiques vibratoires dans les nano plaques FGM ainsi le nouveau modèle proposé est simple pour la résolution du problème dynamique dans les nano plaques fonctionnellement graduées en composite polymère (FG-PC) renforcées par des nano plaquette de graphène (GNPs).

Références

Références

- Abdalla, H. M. A., Casagrande, D., De Bona, F., De Monte, T., Sortino, M., & Totis, G. (2021). An optimized pressure vessel obtained by metal additive manufacturing: Preliminary results. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 192, 104434. <https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2021.104434>
- Abedini Baghbadorani, A., & Kiani, Y. (2021). Free vibration analysis of functionally graded cylindrical shells reinforced with graphene platelets. *Composite Structures*, 276, 114546. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.114546>
- Affdl, J. C. H., & Kardos, J. L. (1976). The Halpin-Tsai equations: A review. *Polymer Engineering & Science*, 16(5), 344–352. <https://doi.org/10.1002/pen.760160512>
- Aghababaei, R., & Reddy, J. N. (2009). Nonlocal third-order shear deformation plate theory with application to bending and vibration of plates. *Journal of Sound and Vibration*, 326(1), 277–289. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2009.04.044>
- Ait Atmane, H., Tounsi, A., & Mechab, I., Adda Bedia, E. A. (2010). Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 6, 113–121. <https://doi.org/10.1007/s10999-010-9110-x>
- Ait Atmane, H., Tounsi, A., & Bernard, F. (2017). Effect of thickness stretching and porosity on mechanical response of a functionally graded beam resting on elastic foundations. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 13, 71–84. <https://doi.org/10.1007/s10999-015-9318-x>
- Ait Atmane, R., Mahmoudi, N., Bennai, R., Ait Atmane, H., & Tounsi, A. (2021). Investigation on the dynamic response of porous FGM beams resting on variable foundation using a new higher order shear deformation theory. *Steel and Composite Structures*, 39(1), 95–107. <https://doi.org/10.12989/SCS.2021.39.1.095>
- Akinwamide, S. O., Abe, B. T., Akinribide, O. J., Obadele, B. A., & Olubambi, P. A. (2020). Characterization of microstructure, mechanical properties and corrosion response of aluminium-based composites fabricated via casting—a review. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 109(3–4), 975–991. <https://doi.org/10.1007/s00170-020-05703-1>
- Al-Shafaie, S. H., Radhi, N. S., & Hussein, M. A. (2021). Preparation and investigation of microstructure and wear properties of functionally graded materials of Aluminum-Nickel alloys. *Journal of Physics: Conference Series*, 1973, 012099. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1973/1/012099>
- Arefi, M., Mohammad-Rezaei Bidgoli, E., Dimitri, R., & Tornabene, F. (2018). Free vibrations of functionally graded polymer composite nanoplates reinforced with graphene nanoplatelets. *Aerospace Science and Technology*, 81, 108–117. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2018.07.036>

- Arefi, M., & Zenkour, A. M. (2016). Employing sinusoidal shear deformation plate theory for transient analysis of three-layer sandwich nanoplate integrated with piezo-magnetic face-sheets. *Smart Materials and Structures*, 25(11), 115040. <https://doi.org/10.1088/0964-1726/25/11/115040>
- Aruri, D., Adepu, K., & Bazavada, K. (2013). Wear and mechanical properties of 6061-T6 aluminum alloy surface hybrid composites [(SiC+Gr) and (SiC+Al₂O₃)] fabricated by friction stir processing. *Journal of Materials Research and Technology*, 2(4), 362–369. <https://doi.org/10.1016/j.jmrt.2013.10.004>
- Zare, E., Voronkova, D. K., Faraji, O., Aghajani-refah, H., Nia, H. M., Gholami, M., & Azandariani, M. G. (2024). Assessment of nonlocal nonlinear free vibration of bi-directional functionally-graded Timoshenko nanobeams. *Advances in Nano Research*, 16(5), 473–487. <https://doi.org/10.12989/anr.2024.16.5.473>
- Hadji, L. and Avcar, M. (2021), “Nonlocal free vibration analysis of porous FG nanobeams using hyperbolic shear deformation beam theory”, *Adv. Nano Res.*, 10(3), 281-293.
<https://doi.org/10.12989/ANR.2021.10.3.281>.
- Hadji, L., Bernard, F. and Zouatnia, N. (2023), “Bending and Free vibration analysis of Porous-Functionally-Graded (PFG) beams resting on elastic foundations”, *Fluid Dyn. Mater. Proc.*, 19(4), <https://doi.org/10.32604/fdmp.2022.022327>.
- Hadji, L., Plevris, V., Madan, R. and Ait Atmane, H., (2024a), “multi-directional functionally graded sandwich plates: Buckling and free vibration analysis with refined plate models under various boundary conditions”, *Computation*, 12(4).
<https://doi.org/10.3390/computation12040065>.
- Hadji, L., Madan, R., Atmane, H. A., Bernard, F., Zouatnia, N. and Safa, A. (2024b), “Thermal buckling Analysis of functionally graded plates using trigonometric shear deformation theory for temperature-dependent material properties”, *Struct. Eng. Mech.*, 91(6), 539-549.
<https://doi.org/10.12989/sem.2024.91.6.539>.
- Zouatnia, N., Hadji, L., Atmane, H.A., Nebab, M., Madan, R., Bennai, R. and Dahmane, M. (2024), “Analysis of free vibration in bi-directional power law-based FG beams employing RSD theory”, *Coupl. Syst. Mech.*, 13(4), 359-373.
<https://doi.org/10.12989/CSM.2024>.