

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN DE TIARET



FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES

DÉPARTEMENT DE GÉNIE CIVIL

Mémoire de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme de Master

Spécialité : Génie Civil

Option : STRUCTURES

Présenté par :

- Douma Benyahia
- Boucheta Abderahmane

Sujet du mémoire

**Analyse de la vibration des plaques sandwiches
en matériaux à gradient de propriétés (FGM)**

Soutenu publiquement 25 Juin 2025 devant le jury composé de :

M. KLOUCHE DJEDID Ibrahim

Président

M. BENYAMINA Abdelrahmane Bekaddour

Rapporteur

M. ABADA Ghanem

Examineur

Mme KHAROUBI Lamia

Examineur

M. MIMOUNI Mohamed

Examineur

PROMOTION 2024/2025

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



Remerciements

Tout d'abord, nous remercions ALLAH, le tout puissant de nous avoir donnés la force, le courage et la volonté de mener à bien ce modeste travail.

*Je tiens à remercier vivement et sincèrement mon encadreur Mr. **BENYAMINA A**, qui a contribué et assuré la direction de ce travail, pour tout le soutien, les orientations et la patience qu'ils a manifesté durant son encadrement tout le long de la réalisation de ce mémoire.*

*J'aimerais exprimer ma gratitude aux membres du jury le Président M. **ABADA G.**, et les examinateurs M. **KLOUCHE D. B.**, et M. **MIMOUNI M.** pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail en acceptant de l'examiner et de l'enrichir par leurs propositions.*

Je tiens à remercier vivement et sincèrement mes enseignants qui m'ont aidé et appris l'âme de la science durant ces années d'études.

Enfin, mes remerciements vont à toutes les personnes qui ont, de près ou de loin, apporté aide et encouragement.

Benyahia et Abderahmane.



Dédicace

,

.

Scuma B

Dédicace

,

.

Boucheta II

ملخص

في هذه الدراسة تم استخدام نظرية تشوه القص بخمس متغيرات باستخدام وظيفة الشكل الأسّي لفحص تأثير بعض المعاملات على قيمة الترددات الذاتية للاهتزاز الحر للوحة "ساندويتش" ذات خواص ميكانيكية متدرجة عبر السمك. تُستخدم نظرية الصفحة ذات دالة القص الأسية (ESDPT) لضمان وصف إجهاد القص من خلال السمك الذي يجب أن يستوفي شروط انعدام إجهادات القص على سطح حواف الصفحة. يتم نمذجة مجال الإزاحة بخمس مجاهيل، وهو نفس عدد مجاهيل نظرية دالة القص للصفائح (FSDPT) فضلاً على أنها لا تتطلب عامل تصحيح القص. تُصنع واجهات الصفحة الساندويتش باستخدام انتشار متساوي الخواص من مكونين (خزفي-معدني) عبر سمك المادة. يتم تقديم أنواع من الألواح العازلة متماثلة وغير متماثلة. يُفترض أن خواص مادة صفحة FGM تتغير باستمرار من خلال السمك، اعتماداً على الكسر الحجمي للمادة المكونة وفقاً لدالة قانون القوة. تم حساب المعادلات التفاضلية للحركة الاهتزازية الحرة للوحة المركبة باستخدام مبدأ هاملتون المتغير، وتم اختيار طريقة تحليلية تعتمد على إجراء نافير Navier لاستخراج القيم الذاتية للوحة المركبة، تم عرض تباين الخواص الهندسية والميكانيكية لتسهيل تحليل النتائج. ثم تم إجراء التحقق العددي من الكود الحسابي المطور من خلال مقارنة النتائج التي تم العثور عليها مع تلك المنشورة، ثم تم إجراء العديد من التحليلات المقابلة لتغيير الأبعاد الهندسية والفيزيائية لإظهار مدى تأثيرها على الترددات الطبيعية على وجه الخصوص. تبين أن السمك يساهم بشكل كبير في تقليل القيمة الإسمية للخصائص الميكانيكية وقيمة الترددات الطبيعية الحرة مهما كانت تباين المعاملات المدروسة. **الكلمات المفتاحية:** لوحات متدرجة وظيفيا، إهتزاز حر مبدأ هاملتون، نظرية تشوه القص المدققة، قانون خلط الخواص الأسّي.

Résumé :

Dans cette étude, une théorie de déformation en cisaillement à cinq variables utilisant une fonction de forme exponentielle a été utilisée afin d'examiner la valeur des fréquences propres de vibration libre d'une plaque sandwich en FGM. Les propriétés matérielles telles que le module de Young et le coefficient de la dilatation thermique varient à travers l'épaisseur de la structure selon une fonction de loi de puissance (P-FGM) en fonction des fractions volumiques des constituants. Une théorie de plaque de fonction de cisaillement exponentielle (ESDPT) est utilisée afin de souscrire une description de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur et qui doit satisfaire les conditions de nullité des contraintes de cisaillement dans les bords de la plaque. Le champ de déplacement est modélisé avec cinq inconnus, étant le même nombre que la théorie FSDPT et ne nécessite pas de facteur de correction de cisaillement.

Les faces de plaque sandwich sont réalisées en diffusion isotrope, à deux constituants (céramique-métal) à travers l'épaisseur du matériel. Des types de plaques sandwichs symétriques et non symétriques sont présentés. On suppose que les propriétés matérielles de la plaque FGM changent sans interruption à travers l'épaisseur, selon la fraction volumique du matériau constitutif suivant une fonction de loi de puissance.

Les équations différentielles du mouvement vibratoire libre de la plaque P-FGM ont été établies grâce au principe variationnel de Hamilton. Une méthode analytique basée sur la procédure de Navier a été retenue pour extraire les valeurs propres de la plaque sandwich simplement appuyée.

Une validation numérique du code de calcul développé a été ensuite effectuée en comparant les résultats trouvés avec ceux déjà publiés. Plusieurs analyses correspondant aux variations des paramètres géométriques et physiques ont été faites afin de montrer leur influence significative sur les fréquences propres. En particulier, il a été montré que l'épaisseur contribue à réduire significativement la valeur la valeur des fréquences propres des vibrations libre quel que soit la variation des paramètres considérés.

Mots clés : Plaques fonctionnellement graduées ; Vibration libre ; Principe de Hamilton ; Théorie de déformation en cisaillement d'ordre supérieur ; Distribution de loi de puissance.

Abstract:

In this study, a refined five-variable shear deformation theory using an exponential shape function was used to examine the value of the free vibration eigenfrequencies of a sandwich FGM plate. Material properties such as Young's modulus and coefficient of thermal expansion vary through the thickness of the structure according to a power law function (P-FGM) depending on the volume fractions of the constituents. An exponential shear deformation plate theory (ESDPT) is used to underwrite a through-thickness shear stress description that must satisfy the conditions of shear stress nullity in the plate surfaces. The displacement field is modeled with five unknowns, being the same as FSDPT theory and requiring no shear correction factor.

Sandwich plate faces are made using isotropic, two-component (ceramic-metal) diffusion through the thickness of the material. Types of symmetric and non-symmetrical sandwich plates are presented. It is assumed that the material properties of the FGM plate change continuously through the thickness, depending on the volume fraction of the constituent material according to a power law function.

The differential equations of free vibratory motion of the sandwich P-FGM plate were established using Hamilton's variational principle. An analytical method based on Navier's procedure was chosen to extract the eigenvalues of the simply supported sandwich plate. The variation of mechanical properties was presented to facilitate the analysis of the numerical validation of the developed computational code was then performed by comparing the results found with those already published. Several analyses corresponding to the variations of the geometrical and physical parameters were performed to show their significant influence on the natural frequencies. In particular, it was shown that the thickness contributes to significantly reduce the nominal value of the natural frequencies of free vibrations whatever the variation of the considered parameters.

Keywords: Functionally graded plates; Free vibration; Hamilton's principle; Porosity; Higher order shear deformation theory; Power law distribution.

Table des matières

ملخص	iii
Résumé :	iv
Abstract:	v
Table des matières	vi
Liste des figures	ix
Liste des tableaux	xi
Liste des symboles	xii
Introduction générale	2
I. Généralités sur les matériaux à gradient de propriétés.	5
I.1 Introduction	5
I.2 Aperçu Historique Sur Les matériaux à gradient de propriétés.....	5
I.3 Concepts Des Matériaux A Gradients De Propriétés :	6
I.4 Comparaison des FGM et les matériaux composites Traditionnels :	9
I.5 Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM :	10
I.5.1 Propriétés matérielles de la plaque P-FGM :	11
I.5.2 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM :	12
I.5.3 Les propriétés matérielles de la plaque E-FGM :	13
I.6 Avantages et inconvénients des FGMs	14
I.6.1 Avantages des FGMs.....	14
I.6.2 Inconvénients des FGMs.....	15
I.7 Domaines d'applications des composites et des FGMs :	16
I.7.1 Dans l'aérospatiale et l'automobile	16
I.7.2 La médecine	16
I.7.3 La défense	16
I.7.4 L'électronique	17
I.7.5 L'énergie	17
I.7.6 Outils de coupe	17
I.7.7 Articles de sports.....	17
I.7.8 Applications des FGM et matériaux composites au génie civil.....	17
I.7.8.1 Matériaux FGM	17
I.7.8.2 Matériaux en composites.....	18
I.8 Conclusion	19
II. Présentation des plaques sandwiches.....	21
II.1 Introduction	21
II.2 Définition	21

II.3	Éléments constituant les matériaux sandwichs	22
II.3.1	Peaux	23
II.3.2	L'âme	24
II.4	L'interface	25
II.5	Domaines d'utilisation	25
II.6	Procédés de fabrication	26
II.6.1	Technologies par voie humide (imprégnation directe)	26
II.6.2	Technologies par voie sèche (imprégnation indirecte)	27
II.6.3	Assemblage par collage	27
II.6.3.1	Le collage de peau sur l'âme	27
II.6.4	Technique de pliage :	28
II.7	Sollicitations et Modes de dégradations des sandwichs	28
II.7.1	Flambement généralisé des Peaux	29
II.7.2	Rupture des peaux en traction ou en compression	29
II.7.3	Modes locaux de rupture	30
II.7.4	Rupture de l'âme par cisaillement	30
II.7.5	Flambement généralisé de l'âme ou « Crimping »	30
II.7.6	Flambement localisé des peaux « Wrinkling » ou « Dimpling »	31
II.7.7	Délaminage	32
II.7.8	Dégradation de l'adhésif	32
II.8	Conclusion	33
III.	Théories des plaques	35
III.1	Introduction	35
III.2	Différents modèles de plaque	35
III.2.1	Théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff	35
III.2.2	Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre	37
III.2.3	Théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé	38
III.3	Revue sur les différents modèles de la théorie d'ordre élevé :	40
III.3.1	Nouvelle théorie de déformation des plaques :	41
III.4	Approche par couche	42
III.5	Les modèles zig-zag	42
III.5.1	Modèles couches discrètes	43
III.6	Conclusion	44
IV.	Analyse de la vibration libre des plaques sandwichs en FGM	46
IV.1	Introduction :	46
IV.2	Études sur la vibration des plaque FGM :	46

IV.3	Formulation théorique	48
IV.3.1	Plaques sandwichs en FGM de type A	49
IV.3.2	Plaques sandwichs en FGM de type B	49
IV.4	Description du problème :	50
IV.5	Champ de déplacement et équations constitutives :	50
IV.5.1	Efforts résultants :	52
IV.6	Équations du mouvement :	54
IV.6.1	L'énergie de déformation :	54
IV.6.2	Energie cinétique :	54
IV.6.3	Équations du mouvement :	54
IV.6.4	Solution analytique (Méthode de Navier):	55
IV.6.5	Problème aux valeurs propres	55
IV.6.6	Organigramme des principales étapes de programme du calcul :	56
IV.7	Conclusion :	58
V.	Validation et discussions des résultats	60
V.1	Introduction :	60
V.2	Configuration géométrique de la plaque sandwich FGM	60
V.2.1	Plaque sandwich en P-FGM (1-1-1)	61
V.2.2	Plaque sandwich en P-FGM (1-2-1)	61
V.2.3	Plaque sandwich en FGM (2-2-1)	61
V.3	Configuration matérielle de la plaque sandwich FGM	64
V.4	Validation de la présente étude :	64
V.5	Etude paramétrique :	64
V.6	Conclusion :	69
CONCLUSION GENERALE		71
VI.	Bibliographies	74

Liste des figures

Figure I-1: Exemple type d'un matériau FGM (métal / céramique)	7
Figure I-2 : Variation continue de la microstructure schématisée et photo.....	7
Figure I-3 : Concept des matériaux à gradient de propriétés.	8
Figure I-4 : Protection thermique.	9
Figure I-5 : Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels.	9
Figure I-6 : Matériau plan composé (a), Matériau relié (b), Matériau fonctionnellement gradué(c).	10
Figure I-7 Variation de la fraction volumique $V(z)$ dans une plaque P-FGM	12
Figure I-8 : Variation de la fraction volumique $V(z)$ dans une plaque S-FGM	13
Figure I-9 : Variation de la fraction volumique $V(z)$ dans une plaque E-FGM.....	14
Figure I-10 : Variation de module de Young $E(z)$ dans une plaque E-FGM.....	14
Figure II-1 : Schéma d'un sandwich[20].	22
Figure II-2 : Matériaux pour les peaux.....	23
Figure II-3 : Différentes natures d'âmes.....	25
Figure II-4 : Mécanismes d'adhésion [24].	25
Figure II-5 : Panneaux réalisés par collage à partir de divers profils. [25].....	27
Figure II-6 : Pliage de panneaux sandwichs.	28
Figure II-7 : Différentes sollicitations (M, N, T) appliquées à un sandwich.	29
Figure II-8 : Mode de ruine par « flambement généralisé » des peaux du sandwich.....	29
Figure II-9 : Mode de dégradation par rupture des peaux du sandwich.	29
Figure II-10 : Mode de rupture par indentation localisée.	30
Figure II-11 : Mode de rupture par cisaillement de l'âme.....	30
Figure II-12 : Mode de ruine par flambement généralisé de l'âme du sandwich.	31
Figure II-13 : Mode rupture par flambement localisé «wrinkling ».....	31
Figure II-14 : Mode rupture par flambement localisé «dimpling».....	31
Figure II-15 : Type de dégradation de l'adhésif.....	32
Figure III-1 : Plaque de Love Kirchhoff.....	36
Figure III-2 : Plaque de Reissner-Mindlin [37].	38

Figure III-3 : Schématisation des déformations dans le cas de la théorie d'ordre supérieur des plaques [48].	40
Figure III-4 : Modèles de couches : discrètes et zig-zag	42
Figure III-5 : Champs de déplacements des modèles zig-zag du premier ordre.....	43
Figure III-6 : Champs de déplacements des modèles zig-zag d'ordre supérieur.....	43
Figure IV-1 : Configuration de la plaque sandwich à gradient de propriétés (FGM).	49
Figure IV-2 : Variation de la présente fonction de gauchissement à travers l'épaisseur d'une plaque rectangulaire en FGM [98].	51
Figure IV-3. Forces et Moments par unités de longueur [98].	53
Figure IV-4 : Organigramme du programme de calcul.....	57
Figure V-1 : Géométrie d'une plaque sandwich en FGM dans le système de coordonnées cartésiennes rectangulaires.....	60
Figure V-2 : Variation de la fonction de la fraction volumique à travers l'épaisseur de la plaque « Type A » pour les différentes valeurs de k et les différentes configurations de plaques sandwiches : (a) Plaque sandwich en FGM (1-1-1), (b) Plaque sandwich en FGM (1-2-1) et (c) Plaque sandwich en FGM (2-2-1).	62
Figure V-3. Variation de la fonction de la fraction volumique à travers l'épaisseur de la plaque « Type B » pour les différentes valeurs de k et les différentes configurations de plaques sandwiches : (a) Plaque sandwich en FGM (1-1-1), (b) Plaque sandwich en FGM (1-2-1) et (c) Plaque sandwich en FGM (2-2-1).	63
Figure V-4. Fréquence fondamentale ω adimensionnelle d'une plaque sandwich en FGM Type A en fonction du rapport a/h ($a/b=1$) pour les différents types de charges thermiques.	67

Liste des tableaux

Tableau I-1 : comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.	7
Tableau IV-1. Forme de fonction de déformation de cisaillement définie par différents chercheurs :	52
Tableau V-1. Fréquence fondamentale ω adimensionnelle d'une plaque sandwich P-FGM en fonction d'une plaque carrée type A et du rapport ($a/h = 10$).	65

Liste des symboles

Notations

E	Module d'élasticité
G	Module de cisaillement dans le plan (x, z)
E_c	Module de Young de la céramique
E_m	Module de Young du métal
ν, ν_{ji}	Coefficient de Poisson
$G(z)$	Module de cisaillement en fonction de « z »
$E(z)$	Module de Young en fonction de « z »
$V(z), V^{(n)}$	Fraction volumique locale et à travers l'épaisseur de la couche (n)
i, j	Nombres naturels.
α_c, K_c et α_m, K_m	Coefficient de dilatation thermique et la conductivité thermique de la céramique et du métal respectivement.
σ_{ii}	Contraintes normales
σ_{ij}	Contraintes de cisaillement
ε_{ii}	Déformations normales
ε_{ij}	Déformations de cisaillement
γ_{ij}	Déformations angulaires (distorsions)
N_x, N_y, N_{xy}	Efforts normaux
M_x, M_z, M_{xz}	Moments de flexion
S_x, S_y	Efforts supplémentaires couplés liés aux cisaillements transversaux
u, v, w	Les déplacements dans les directions x, y, z
u_0, v_0, w_0	Les composantes de déplacement sur le plan moyen de la plaque
δU	La variation virtuelle de l'énergie de déformation.
U_m, W_m et ϕ_m	Des paramètres arbitraires représentent l'amplitude de chacun des termes dans les séries pour la solution de Navier.
$(A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij})$	Les coefficients de rigidité de la plaque FGM.
$w_{0,x}$	Rotation due à la flexion (sans cisaillement)
ϕ_x, ϕ_z	Rotations autour des axes x, z
$a/h, b/h, z/h$	Le rapport des dimensions de la plaque
K_{ij}	Eléments de la matrice de rigidité globale [K]
δ	L'opérateur variationnel
h	Hauteur de la plaque
a	Longueur de la plaque
b	Largeur de la plaque
k, p	L'indice de la fraction volumique (indice matériel)
$f(z), \psi(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$g(z)$	Première dérivée de la fonction de gauchissement
δT	La variation de l'énergie cinétique de la plaque FGM.
$\bar{\omega}$	Fréquence fondamentale adimensionnelle
$[k_{ij}]$	Matrice de rigidité
$[m_{ij}]$	Matrice de masse
$\{ \}$	Vecteur colonne
$[]$	Matrice

Introduction générale

Introduction générale

Les matériaux à gradient fonctionnel ou fonctionnellement gradués (FGM) sont une nouvelle gamme de matériaux composites ayant une variation graduelle et continue des fractions volumiques de chacun des constituants (en général, métal et céramique) à travers l'épaisseur, induisant des changements en conséquence des propriétés thermomécaniques globales de l'élément structural qu'ils constituent. Ils ont été conçus pour pallier aux problèmes engendrés par des environnements thermiques sévères.

Utilisation des matériaux composites connaît actuellement un essor considérable, en raison de leur capacité à apporter des solutions efficaces à diverses problématiques technologiques. Les matériaux à gradient fonctionnel sont de plus en plus utilisés dans de nombreux secteurs industriels tels que l'automobile, l'aéronautique, le domaine maritime, le nucléaire, le génie civil, la construction navale et l'industrie spatiale. Cette large adoption s'explique par la diversité de leurs formes et configurations, notamment les plaques sandwiches à gradient de propriétés (FGM).

Les matériaux à gradient fonctionnel (FGM : Functionally Graded Materials) constituent une nouvelle génération de composites caractérisés par une variation continue et progressive des fractions volumiques de leurs constituants (généralement métal et céramique) à travers l'épaisseur. Cette distribution permet de modifier les propriétés mécaniques et physiques globales de la structure, offrant ainsi une meilleure réponse aux environnements extrêmes. Conçus à l'origine pour faire face aux conditions thermiques sévères, ces matériaux sont aujourd'hui utilisés dans de nombreux autres domaines où leurs performances sont recherchées.

Les FGM se distinguent par leur capacité à répondre aux attentes des industriels : réduction des coûts, amélioration de la durabilité, résistance à la fatigue et à la corrosion, souplesse de mise en forme, et performances optimisées. Parmi les propriétés clés, la conductivité thermique équivalente joue un rôle important dans l'étude de leur comportement, bien que le présent travail soit orienté vers la dynamique des structures.

L'objectif de ce travail est du comportement dynamique des plaques sandwiches en FGM en vibration libre. Plus précisément, il s'agit d'étudier la réponse vibratoire de plaques FGM simplement appuyées. Les propriétés du matériau, telles que le module d'élasticité (Young) et le coefficient de la dilation thermique, varient selon une loi de puissance (P-FGM) en fonction des fractions volumiques à travers l'épaisseur.

Une théorie de plaque à cisaillement exponentiel (ESDPT) est adoptée pour modéliser les contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur, en assurant la satisfaction des conditions de nullité aux bords. Le champ de déplacement est exprimé avec cinq inconnues, soit même nombre que celui de la théorie FSDPT, tout en évitant l'usage de facteurs correctifs pour le cisaillement.

Les faces de plaque sandwich sont réalisées en diffusion isotrope, à deux constituants (céramique-métal) à travers l'épaisseur du matériel. La couche centrale est toujours homogène et constituée d'un matériau métallique isotrope. Deux types de plaques sandwich non symétriques sont présentés. On suppose que les propriétés matérielles de la plaque FGM changent sans interruption à travers l'épaisseur, selon la fraction volumique du matériau constitutif suivant une fonction de loi de puissance.

Les équations de mouvement sont développées en utilisant le principe d'Hamilton. Les solutions analytiques des plaques sandwich FGM avec des conditions limites simplement supportées sont obtenues en utilisant la méthode Navier. Les résultats numériques issus de cette

théorie de déformation par cisaillement permettent d'évaluer l'effet de la distribution du matériau et des paramètres géométriques sur la réponse vibratoire des plaques.

Ce mémoire s'articule autour de cinq chapitres :

- Chapitre 1 : Présentation générale des matériaux à gradient fonctionnel (historique, concepts, lois de comportement, avantages et inconvénients, domaines d'application des composites et des FGM).
- Chapitre 2 : Introduction aux plaques sandwiches en FGM (définitions, éléments constitutifs, procédés de fabrication, modes de sollicitation et de dégradation).
- Chapitre 3 : Théories des plaques utilisées pour l'étude dynamique.
- Chapitre 4 : Analyse détaillée de la vibration libre des plaques sandwiches FGM, modélisation du champ de déplacement, formulation des équations constitutives et de mouvement, et résolution exacte du problème dans différents cas de distribution du matériau.
- Chapitre 5 : Validation et analyse des résultats obtenus, accompagnées d'une étude paramétrique sur les fréquences naturelles en fonction de la fraction volumique, des géométries considérées, et des conditions aux limites. Le chapitre se termine par une conclusion sur le comportement vibratoire des plaques sandwiches FGM.

CHAPITRE I

Généralités sur les matériaux
à gradient de propriétés.

I. Généralités sur les matériaux à gradient de propriétés.

I.1 Introduction

Un matériau, c'est quoi ?

Il est nécessaire de commencer par définir le concept de matériau. Un matériau n'est pas une matière première brute, mais une matière transformée pour un usage spécifique. Cela implique une fusion entre la préparation de nouveaux composés et la conception d'objets innovants. Il est évident que la diversité des matériaux modernes est telle qu'il est impossible de les présenter de manière exhaustive en quelques lignes. Il devient de plus en plus difficile de choisir entre les matériaux dits « traditionnels » tels que le bois, le béton et l'acier, et ceux dits « évolutifs ou avancés » comme les céramiques, les métaux et les plastiques. Actuellement, la tendance n'est pas de les opposer en tant qu'ennemis, mais plutôt de les associer afin de créer des matériaux plus performants, comme les matériaux à gradient de propriétés (FGM). Ainsi, la notion de matériau, en tant que matière première massive, est dépassée par celle de matériau en tant qu'objet technique sophistiqué ayant une fonction spécifique à accomplir.

I.2 Aperçu Historique Sur Les matériaux à gradient de propriétés

L'amélioration des performances des pièces structurales peut conduire à rechercher, au sein d'un même matériau, des propriétés différentes, souvent antagonistes, mais localement optimisées. Le développement des matériaux composites a permis d'associer des propriétés spécifiques à différents matériaux au sein d'une même pièce.

L'optimisation locale de ces propriétés, par association d'un matériau de haute dureté à la surface d'un matériau tenace par exemple, pose alors le problème de l'interface. Par exemple, une couche d'un matériau céramique peut coller à la surface d'une structure métallique pour former un revêtement barrière thermique dans les applications à haute température, la transition brusque dans les propriétés des matériaux à travers l'interface entre les matériaux discrets peuvent entraîner une grande contrainte inter laminaire ou une fortes concentrations de contraintes conduire à la déformation plastique ou de fissuration.

Ces dernières années, les matériaux à gradient de propriétés (en anglais : Functionally Graded Materials « FGM ») ont été développés pour leurs excellentes propriétés mécaniques. Ces matériaux ont de grandes performances et capables de résister aux températures ultras hautes.

Les FGM sont au microscope des matériaux Composites non homogènes. Un groupe de scientifiques, à Sendai (Japon) a proposé pour la première fois le concept de FGM en 1984, comme étant un nouveau matériau avec une barrière thermique ou des propriétés calorifuge (isolation thermique).

Au début, les FGM sont été conçus en tant que matériaux de barrière thermique dans les applications aéronautiques et les réacteurs. C'est par la suite que les FGM sont développés dans le domaine militaire, l'automobile, le biomédicale, l'industrie de semi-conducteur et toutes utilisations dans un environnement à hautes températures.

À la fin de la première étape (1987-1989), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000K (température de surface) et à un gradient de température de 1000K. Quatre techniques ont été utilisées pour fabriquer les matériaux présentant un gradient de

composition et de structure. Les techniques utilisées dans la fabrication de tels matériaux sont les suivantes [1]:

- Le système Sic/C par C.V.D.,
- Le système PSZ/Mo par la technique de la compaction sèche des poudres,
- Le système TiB_2/Cu par synthèse par auto-propagation à haute température,
- Et enfin le système $(\text{Ni-Cr-Al-Y})/(\text{ZrO}_2\text{-Y}_2\text{O}_3)$ par projection plasma à double torches [2].

Dans la seconde étape (1990-1991), le but était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première étape. Pendant les années 90, non seulement les champs d'applications des FGM s'est développé pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température, mais s'est aussi élargi à d'autres applications : biomécaniques, technologie de capteur, optique.

I.3 Concepts Des Matériaux A Gradients De Propriétés :

Les matériaux à gradient de propriétés (FGM), sont un type de matériaux composites produit en changeant sans interruption les fractions de volume dans la direction d'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminé. Ces types de matériaux, ont suscité beaucoup d'attention récemment en raison des avantages de diminuer la disparité dans les propriétés matérielles et de réduire les contraintes thermiques [3].

La variation continue des propriétés mécaniques confère au matériau un comportement optimisé. Les FGM sont particulièrement utilisés dans les applications de haute technologie : aéronautique, aérospatiale, nucléaire, semi-conducteurs, et en Génie Civil et trouvent également des applications biomédicales [4].

Les matériaux à gradients évalués **FGM** sont composés de deux ou plusieurs matériaux relatif (figure I-1), a des fractions volumiques et microscopique qui sont conçus pour avoir une Continuité spatiale variables.

Grâce à la structure spéciale de ces matériaux, il est possible d'éviter les concentrations de contraintes au niveau des interfaces (provoquant le délaminage) et d'améliorer les propriétés mécaniques et thermiques des pièces par association de matériaux.

La variation continue des propriétés (figure I.2) trouve son application lorsque, par exemple, la face supérieure est exposée à une haute température alors que la face inférieure est exposée à une basse température. Dans ce cas, la face supérieure est à 100% céramique et la face inférieure est à 100% métal, avec une transition graduelle entre les deux. L'utilisation de la céramique n'est pas fortuite. Ce matériau est choisi grâce à ses caractéristiques exceptionnelles qui sont énumérées comme suit :

- Faible réactivité chimique, bonne tenue à la corrosion.
- Haute température de fusion ou de décomposition.
- Haut module d'élasticité et haute dureté.
- Charge à la rupture élevée.
- Bas coefficient de frottement, bonne résistance à l'usure.
- Conservation des propriétés à haute température.
- Faible coefficient de dilatation thermique (donc bonne résistance aux chocs Thermiques).
- Faible conductivité thermique (donc bonne résistance à la température).

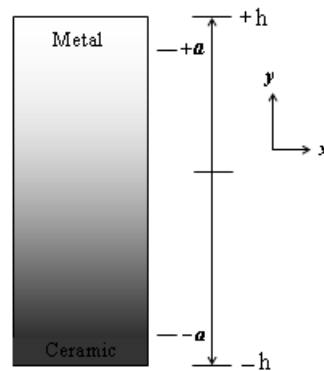


Figure I-1: Exemple type d'un matériau FGM (métal / céramique)

Cependant, les céramiques sont réputées être fragiles et très vulnérables aux défauts de petites tailles. Les caractéristiques du métal sont données comme suit :

- Bonne résistance mécanique.
- Conductivité thermique élevée.
- Très bonne ténacité.

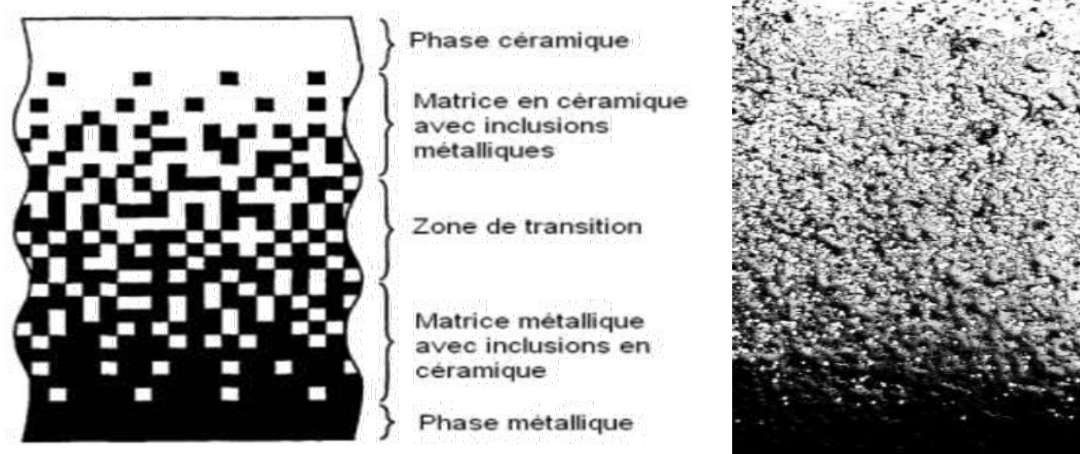


Figure I-2 : Variation continue de la microstructure schématisée et photo.

Généralement, les FGM sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Les vides sont également considérés comme une composante des matériaux FGM [5]. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes. La plupart des « FGM » sont constitués des céramiques et des métaux dont les propriétés mécaniques sont comparés dans **le tableau I-1**.

Tableau I-1 : comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.

La face à haute température	Céramique	- Bonne résistance thermique. - Bonne résistance à l'oxydation. - Faible conductivité thermique.
Continuité du matériau d'un point à l'autre « couches intermédiaires »	Céramique-métal	- Elimination des problèmes de l'interface. - Relaxer les contraintes thermiques.
La face à basse température	Métal	- Bonne résistance mécanique. - Conductivité thermique élevée. - Très bonne ténacité.

Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure d'un matériau FGM est illustré dans la figure I.3. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés des FGM. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente [6].

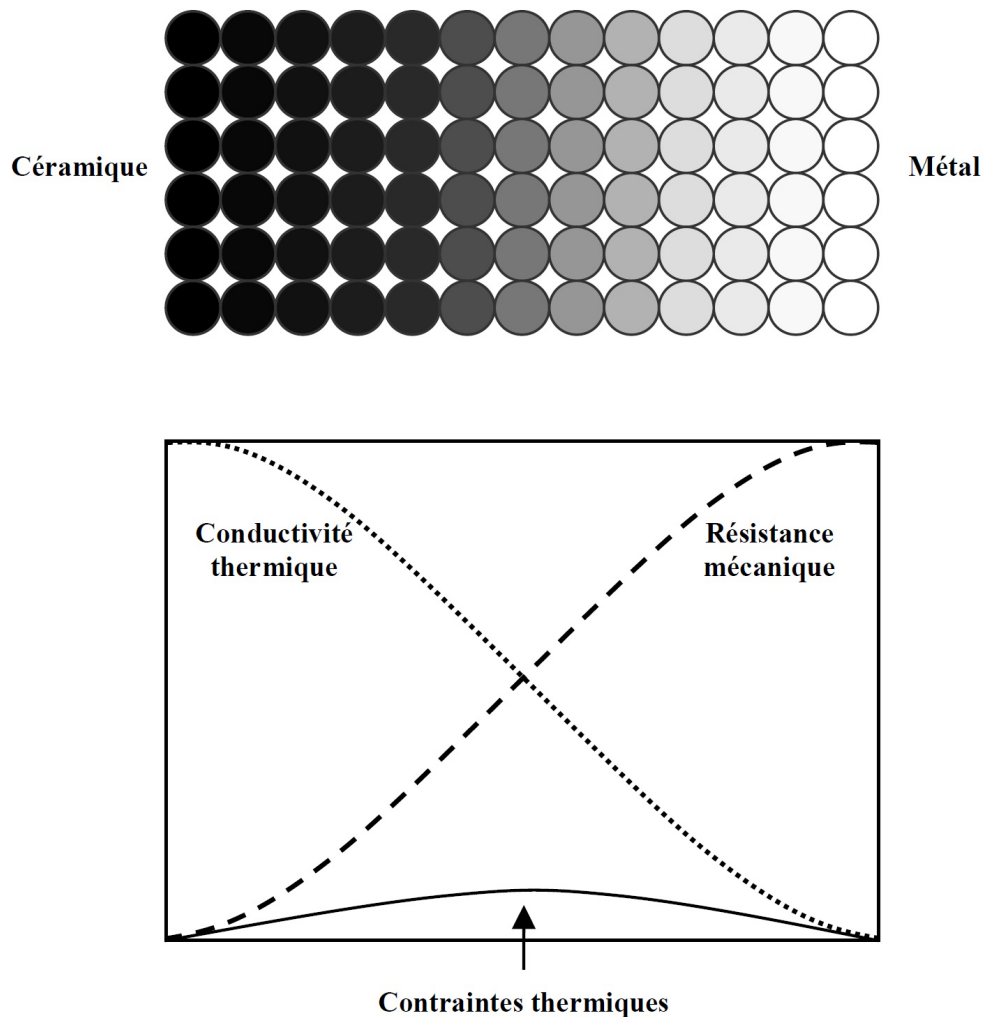


Figure I-3 : Concept des matériaux à gradient de propriétés.

La figure I.4 montre les concentrations de contraintes dans les panneaux de protection thermiques conventionnels au niveau des interfaces (changement brutale de composition). Il montre également comment un FGM peut alléger ces concentrations de contraintes en changeant graduellement les propriétés matérielles et assure toujours la protection thermique trouvée dans les barrières thermiques conventionnelles.

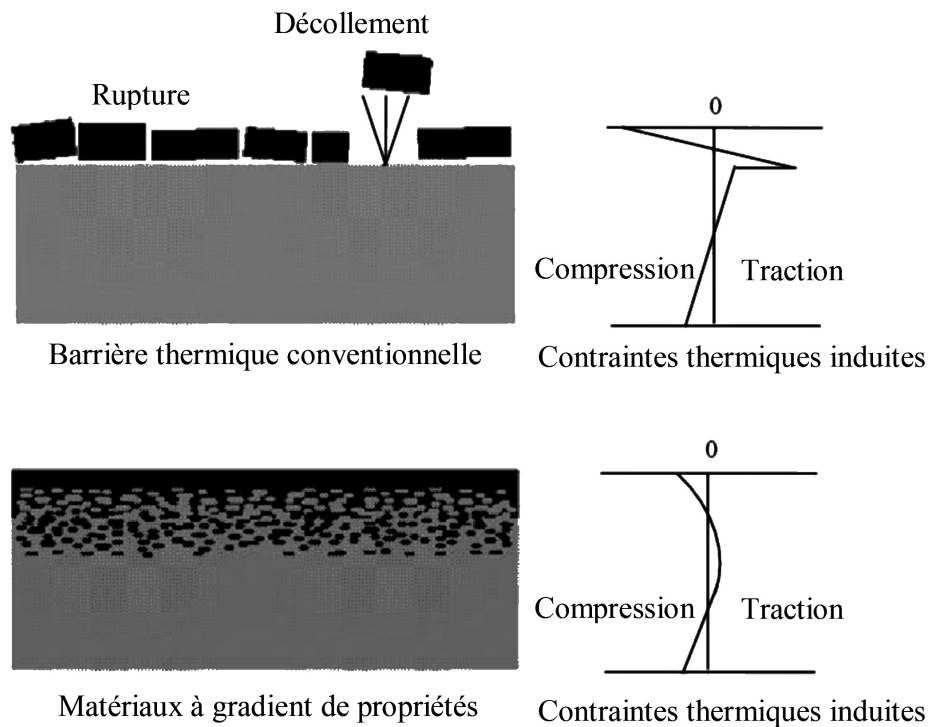


Figure I-4 : Protection thermique.

I.4 Comparaison des FGM et les matériaux composites Traditionnels :

Généralement, les F.G.M sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes. Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue les F.G.M des matériaux composites conventionnels comme illustré sur la (figure I.5). Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés matérielles des FGM. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente.

Propriétés	1 Résistance mécanique 2 Conductivité thermique		
Structures	Eléments constitutifs: céramique ○ métal ● microporosité ○ fibre ◇*		
Matériaux	Exemple	Matériau FGM	Composite NON FGM

Figure I-5 : Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels.

Le concept FGM peut être appliqué dans divers domaines pour des usages structuraux et fonctionnels. Au Japon, plusieurs programmes ont été conduits au cours des années 80 et 90 afin de développer l'architecture des FGM, et d'étudier également ces matériaux pour les applications de hautes températures (par exemple, éléments pour navettes spatial hypersonique) ainsi que pour des applications fonctionnelles (par exemple, convertisseurs thermoélectriques et thermo-ioniques). Ces programmes ont conduit au développement de la conception architecturale du FGM et de ces perspectives.

Yoshihisa [7] a établi un modèle simple illustrant les différences entre les matériaux à gradient de propriétés (FGM) et les matériaux plus conventionnels (voir figure I- 6). Le matériau plan composé a une caractéristique plane, et le matériau relié a une frontière sur l'interface de deux matériaux. Les FGM ont d'excellentes caractéristiques qui diffèrent de ceux des matériaux plans composés et reliés. Par conséquent, les FGM attirent l'attention en termes de leur application dans les domaines industriels puisqu'ils ont une double propriété des deux matières premières qui sont mélangées ensemble, et la distribution composante est graduée sans interruption. Par exemple, l'un des FGM qui se composent du métal et de la céramique a la caractéristique de la conductivité thermique et de la force métallique dans le côté en métal et la résistivité aux hautes températures dans le côté en céramique.

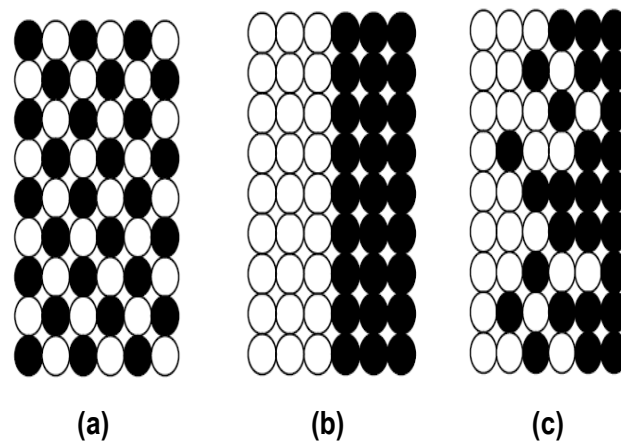


Figure I-6 : Matériau plan composé (a), Matériau relié (b), Matériau fonctionnellement gradué(c).

I.5 Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM :

Les matériaux à gradient fonctionnel « FGM » consistent en l'association de deux ou plusieurs matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent.

Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace.

Un des paramètres clé à déterminer lors de la fabrication de ces matériaux est la composition multi phase à travers l'épaisseur.

La dépendance des propriétés de la position se traduit par la prise en compte de la loi des mélanges correspondant au modèle de Voigt [8].

$$P = \sum_{i=1}^n P_i V_i \quad (I-1)$$

Avec P_i et V_i sont respectivement la propriété mécanique et la fraction volumique du constituant i , avec :

$$\sum_{i=1}^n V_i = 1 \quad (I-2)$$

Dans la pratique, la plupart des structures FGM sont à deux constituants : de la céramique et du métal inoxydable en général. Dans ce cas, la loi de Voigt se réduit à :

$$P = P_1 V_1 + P_2 V_2 \text{ et } V_1 + V_2 = 1 \quad (I-3a-b)$$

Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume. Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure.

Les coordonnées x et y définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe z est perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque et dans la direction de l'épaisseur. Les propriétés du matériau dont le module de Young et le coefficient de Poisson sur les faces supérieures et inférieures sont différentes. Ils varient de façon continue, suivant l'épaisseur (l'axe z) soit :

$$E = E(z) \text{ et } \nu = \nu(z) \quad (I-4a-b)$$

Jin et Batra (1996) [9] indiquent que l'effet du coefficient de poisson sur les déformations est négligeable comparativement à celui du module de Young. Par conséquent, le coefficient de Poisson peut être supposé comme constant. Cependant, Le module de Young dans la direction de l'épaisseur de la plaque FGM varie en fonction de la loi de puissance (P-FGM), la fonction exponentielle (E-FGM) ou avec la fonction sigmoïde (S-FGM).

I.5.1 Propriétés matérielles de la plaque P-FGM :

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance comme suit :

$$V(z) = \left(\frac{z+h/2}{h} \right)^p \quad (I-5)$$

D'où p est un paramètre matériel et h est l'épaisseur de la plaque (Figure I.7). Une fois la fraction volumique locale $V(z)$ a été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges :

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)V(z) \quad (I-6)$$

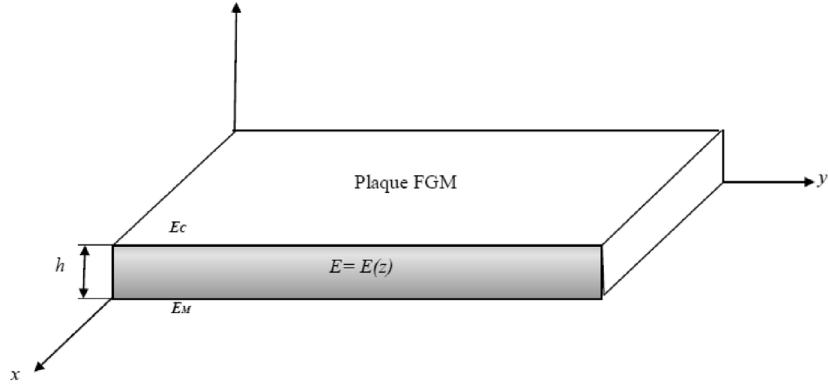
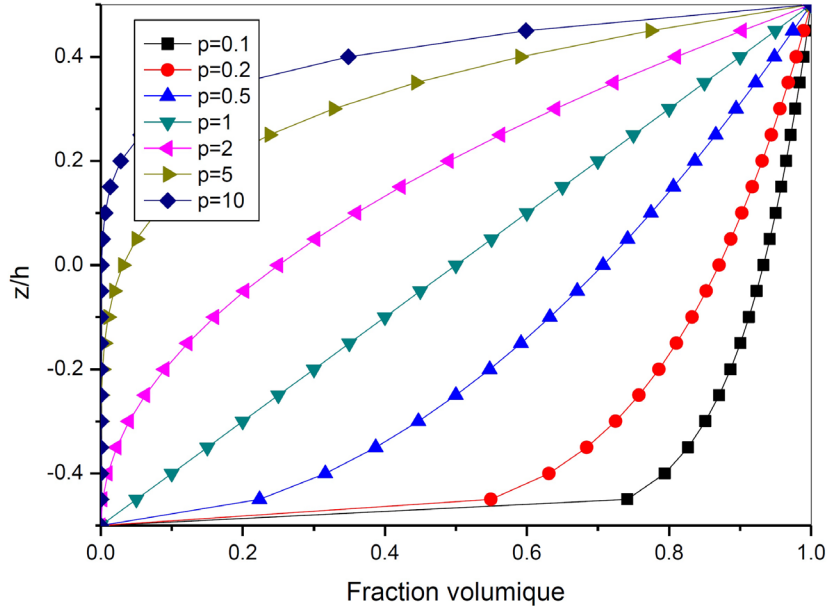


Figure I.7 : Géométrie d'une plaque FGM

D'où E_c et E_m sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure ($z = -h/2$) et de la surface supérieure ($z = h/2$) de la plaque FGM. La variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la figure I.8. Il apparaît clairement que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour $p < 1$, et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour $p > 1$.

Figure I-7 Variation de la fraction volumique $V(z)$ dans une plaque P-FGM

I.5.2 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM :

Chung et chi [10] ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par :

$$V_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{h}{2} + z}{\frac{h}{2}} \right)^p \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (I-6a)$$

$$V_2 = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{h}{2} - z}{\frac{h}{2}} \right)^p \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (I-6b)$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM est calculé par :

$$E(z) = V_1(z)E_1 + [1 - V_1(z)]E_2 \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (I-7a)$$

$$E(z) = V_2(z)E_1 + [1 - V_2(z)]E_2 \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (I-7b)$$

La figure I.8 montre que la variation de la fraction volumique définie par les équations (I-6a) et (I-6b) représente les distributions sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée (Plaque S-FGM).

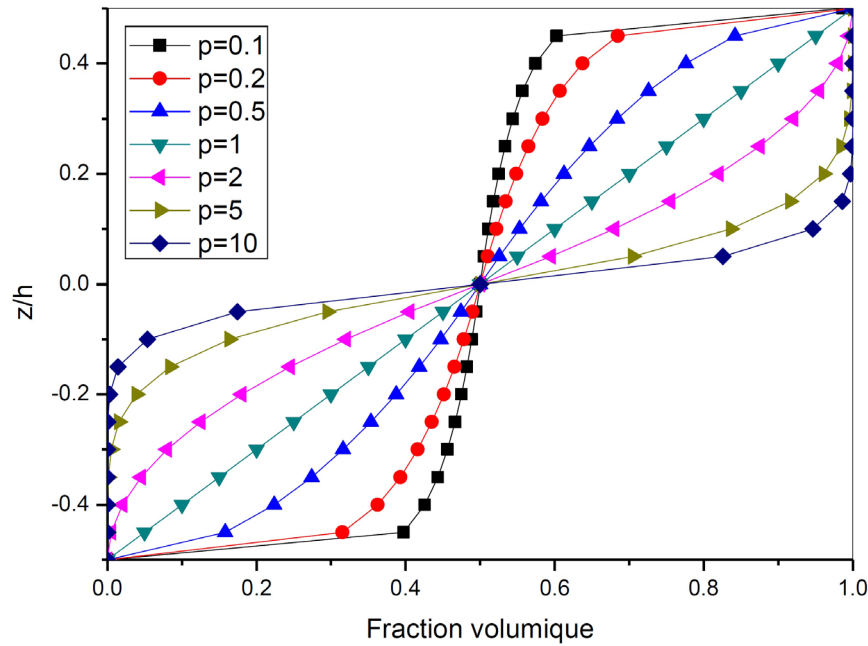


Figure I-8 : Variation de la fraction volumique $V(z)$ dans une plaque S-FGM

I.5.3 Les propriétés matérielles de la plaque E-FGM :

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme [11].

$$E(z) = E_2 e^{B(z + \frac{h}{2})} \quad (I-8)$$

Avec : $B = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{E_1}{E_2} \right)$

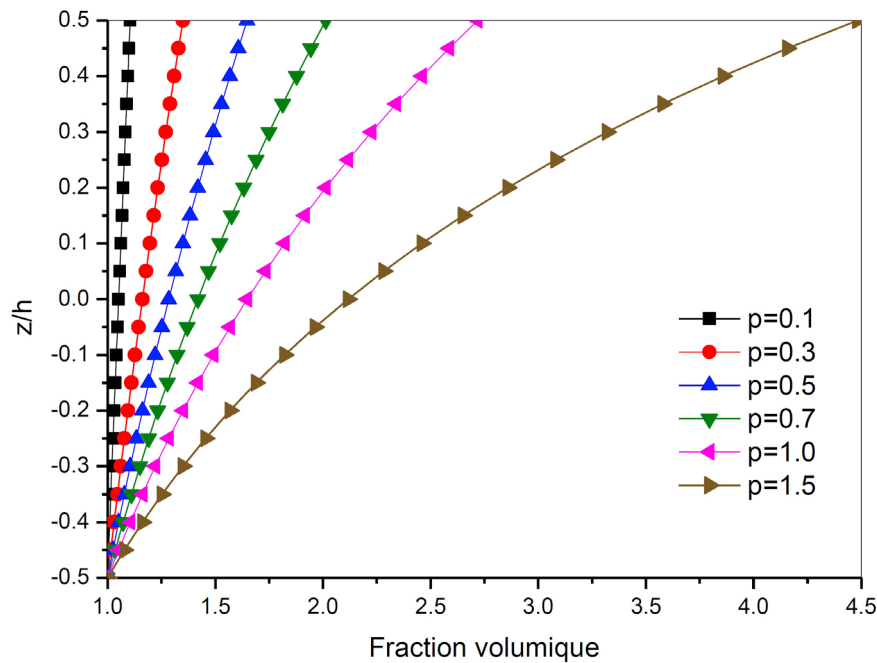


Figure I-9 : Variation de la fraction volumique $V(z)$ dans une plaque E-FGM

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée sur la figure I.10.

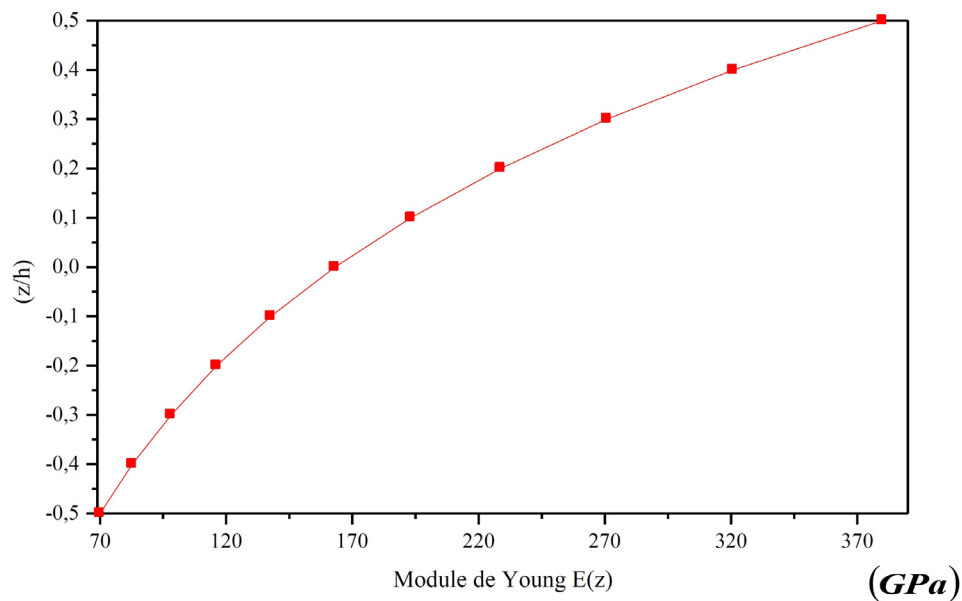


Figure I-10 : Variation de module de Young $E(z)$ dans une plaque E-FGM

I.6 Avantages et inconvénients des FGMs

Les FGM présentent des avantages et des inconvénients :

I.6.1 Avantages des FGMs

Outre l'accomplissement de son objectif principal, c'est à dire de fournir les différents requis des propriétés en divers points et des surfaces du futur produit qui, pourrait être réalisé par

un simple revêtement ; et beaucoup d'autres soulignent divers avantages supplémentaires de la FGM. Ils énumèrent certains avantages qui en résultent principalement de la non-existence d'une interface forte FGM, tels que :

- Diminuer les contraintes thermiques causées par les différences de coefficients de dilatation thermique des matériaux utilisés.
- Absence d'une interface nette devrait conduire à un contrôle d'ensemble mieux des contraintes.
- Meilleure cohésion entre différents matériaux, par exemple un métal et une céramique.
- Extension de la région fonctionnelle avant d'atteindre la valeur limite de la déformation plastique.
- Suppression de délaminage.
- Augmentation de la ténacité à la rupture.
- Elimination des singularités des contraintes à divers endroits, tels que les surfaces libres, des coins, des racines de fissures, ... etc.

L'absence d'une forte interface entre deux matériaux différents, par exemple les métaux et les matériaux céramiques, alors la transition graduelle dans la composition à travers une interface peut être utilisée pour distribuer les contraintes thermiques ce qui permet la limitation des contraintes critique et supprimant ainsi le début de la déformation plastique, des dommages ou fissures.

Singularités des contraintes à une intersection entre les bords libres et les interfaces peuvent être évités en utilisant la transition graduelle, qui peuvent par ailleurs initier une fissure interfaciale, conduisant à une insuffisance de délaminage.

La force motrice pour la croissance locale de la fissure à travers une interface peut être manipulée en modifiant les gradients de propriétés élastiques et plastiques à travers l'interface.

I.6.2 Inconvénients des FGMs

Le principal obstacle à une application plus large de la FGM est leur fabrication compliquée en raison de l'inadéquation des propriétés différentes, par exemple, la température de fusion, des affinités différentes pour divers autres éléments, la taille des particules, la morphologie, ... etc. Un exemple type est un mélange d'un métal avec la température de fusion (T_1) et une céramique avec une température de fusion (T_2). Dans la plupart des cas, un tel couple est habituellement ($T_1 \ll T_2$). Puis, si la température de fabrication est d'environ (T_1), la céramique est encore non fondue et la structure finale contient des particules de céramique non fondue dans une matrice métallique. Dans de nombreux cas, une telle structure présente une grande porosité et une petite adhérence entre les différents composants, ces structures ont des applications en générale limitées. Cependant, pour des applications spéciales, la présence de particules très dures (carbures) dans une matrice solide peut être souhaitable.

D'autre part, travailler autour de (T_2) va certainement entraîner une oxydation rapide et de l'évaporation de nombreux métaux. Les matériaux doivent être fabriqués dans une atmosphère protectrice ou à une basse pression et ces deux technologies sont très coûteuses[12].

I.7 Domaines d'applications des composites et des FGMs :

Les FGMs sont des matériaux composites compliqués dans lesquels la composition et la structure se modifient graduellement en fonction du volume, générant ainsi des changements en conséquence au niveau des propriétés des matériaux.

Le concept du FGM est applicable à de nombreux domaines. Dans les applications d'ingénierie à des outils de coupe, pièces de machines, et les composants du moteur, des propriétés incompatibles telles que la résistance à la chaleur, à l'usure et résistance à la corrosion [13], ainsi que la ténacité et l'usinage sont incorporés dans une seule pièce. Le potentiel d'exploitation commerciale touche un vaste éventail d'applications industrielles telles que l'aéronautique, les usines chimiques et les réacteurs nucléaires.

Actuellement, ils permettent la production des matériaux légers, forts et durables, et ils sont applicables dans un large intervalle des domaines tels que :

I.7.1 Dans l'aérospatiale et l'automobile

Le secteur de l'aérospatiale est l'un des secteurs qui montre plus d'intérêt au développement des FGM. NASA et la JAXA ont montré un grand intérêt au développement de cette technologie. Comme le coût de lancement des navettes spatiales dépend du poids qu'ils soulèvent dans l'espace, la création de pièces avec moins d'éléments de connexion est une solution. En outre la conception optimale, l'équilibre entre le poids et la performance peut réduire les coûts de lancement. La performance et la sécurité sont toujours très préoccupantes dans l'aérospatiale. La protection de bouclier thermique des navettes spatiales pourrait être optimisée pour réduire le poids et augmenter la fiabilité en utilisant des plaques FGM. Les cylindres de moteur de voiture sont faits de FGM. Leur phase interne est en céramique et la phase externe est métallique ;

Les matériaux à gradient fonctionnel peuvent être utilisés dans des conditions de haute température avec une de ses constituants à faible conductivité thermique. Ils peuvent résister à des gradients thermiques élevés, ce qui rend les matériaux à gradient fonctionnel appropriés beaucoup dans les structures aérospatiales comme les composants de véhicules spatiaux (moteur des fusées, corps des avions spatiaux ainsi pour les composants de moteur des fusées[13]).

I.7.2 La médecine

Les matériaux FGM ont trouvés une large gamme d'application dans les chirurgies dentaires et orthopédiques car ces tissus vivants, tels que les os et les dents, sont caractérisés comme des matériaux fonctionnellement gradués de la nature, et pour les remplacer un matériau compatible est nécessaire d'où l'intérêt d'utilisation des matériaux fonctionnellement gradués. La technologie FGM est applicable aux os artificiels, des articulations et des dents. La technologie de classification de structure est utilisée dans la recherche pour la prévention du cancer aussi.

I.7.3 La défense

L'une des caractéristiques les plus importantes d'un matériau fonctionnellement gradué est sa capacité à empêcher la propagation des fissures. Cette propriété le rend utile dans l'application

militaire, en tant que matériaux résistants à la pénétration d'armures des équipements et les gilets pare-balles [14].

Une des compositions disponibles de matériaux à gradient de propriétés est la combinaison entre le titane et le titane diboride, combinant la céramique capable à absorber l'énergie avec la ténacité du métal idéal pour les solutions de blindage du véhicule.

I.7.4 L'électronique

Les FGM trouvent également leurs utilités dans l'électronique telles que les fibres optiques utilisées pour la transmission à haute vitesse d'onde. Par conséquent, il sera capable de propager un système de communication optique jusqu'au niveau des ménages et des cartes de circuits imprimés.

I.7.5 L'énergie

Les FGM sont employés dans les dispositifs de conversion d'énergie. Ils fournissent également une barrière thermique, ils sont utilisés en tant qu'enduit protecteur sur des lames de turbine dans les turbomoteurs, le moteur à turbine à gaz ; et aussi dans le générateur thermoélectrique, pile à combustible, réacteurs nucléaires et pastilles de combustible. Les parois internes des réacteurs nucléaires sont faites avec des FGM (céramique/métal).

I.7.6 Outils de coupe

Les FGM sont utilisés dans les outils de coupe car ils améliorent la résistance thermique. La fissure se produit près de l'interface pointe - tige dans le type conventionnel mais avec les outils de coupe en FGM elle se produit par la relaxation dans la concentration de contrainte.

I.7.7 Articles de sports

Divers composants et accessoires sportifs peuvent bénéficier de l'utilisation du FGM. Par exemple, pointes en carbure ont été fabriqués pour les chaussures de baseball afin de réduire l'usure. Entre la pointe et de la structure des chaussures une région à matériau gradué a été produite afin de réduire l'impact sur les extrémités. Ceci est un excellent exemple comment les FGM pourraient être utilisés pour produire des articles de sport de haute performance. Avec la même idée de réduction d'usure, des outils d'escalade sur glace tels que crampons et piolets pourraient être gradués avec le carbure de tungstène dans les arêtes vives qui captent la glace. Les outils de l'escalade de rocher auraient également le même avantage de réduire l'usure tels que sur les surfaces de came.

I.7.8 Applications des FGM et matériaux composites au génie civil

I.7.8.1 Matériaux FGM

Les FGM peuvent être utilisés dans les chaussées rigides en béton avec une gradation obtenue par la variation de la fraction volumique des fibres, cette technique est visée d'être utilisée dans les autoroutes et les routes à très fort trafic où l'utilisation d'une chaussée souple en béton

bitumineux est déconseillée, tels que les dallages industrielles, les pistes des aéroports, car elles offrent une résistance et une durabilité élevées, le but est d'optimiser l'épaisseur de la chaussée afin d'avoir un matériau rigide sur la surface de roulement et un matériau moins rigide sur la couche de fondation.

Les FGM peuvent être utilisés dans les chaussées souples pour supprimer les couches d'accrochage entre la couche de la Grave Bitume et la couche de roulement en Béton Bitumineux et éviter le glissement entre les deux couches et économiser les épaisseurs des couches tout en obtenant un comportement optimisé et augmentant la capacité portante de la chaussée et par la suite sa durabilité.

I.7.8.2 Matériaux en composites

Les composites ont relativement peu pénétré le secteur du BTP, notamment sous forme de nombreux produits présentés : Fenêtres, Portes, Substituts d'ardoise, Renforts de poutres et autres telles que :

- L'utilisation des ancrages en fibre de carbone pour l'amélioration de la résistance au cisaillement et à la flexion dédiés aux renforcements de poutres, poteaux et dalles.
- L'utilisation d'un système carbonique pour le renforcement et de réparations de conduites de gros diamètre de 800 mm de diamètre et plus, en béton précontraint, béton armé et de segments de conduites en acier. Cela inclut le renforcement des conduites contre l'éclatement sous pression, ainsi que la protection contre la corrosion.
- Réalisation de formes complexes de grande portée ;
- Elaboration de matériaux hybrides avec des matériaux traditionnels ;
- Transmission et distribution d'électricité temporaire et durable, pylônes électriques modulables et déplaçables ;
- Structures destinées aux réservations d'eau ;
- Panneaux pour murs et planchers ;
- Produits dérivés du bois : bois aggloméré, lamellé collé, panneaux OSB, ... etc.
- Géotextiles : pour les opérations de drainage, stabilisation de sol et construction de barrages.

I.8 Conclusion

Les matériaux à gradient de propriétés sont une classe de composites qui ont une variation continue des propriétés des matériaux d'une surface à une autre et ainsi élimine les concentrations de contraintes trouvées dans les composites stratifiés. La gradation des propriétés du matériau réduit les contraintes thermiques, les contraintes résiduelles et la concentration des contraintes.

Le changement continu de leurs propriétés a pour but d'améliorer les performances structurelles, ils sont développés pour adapter l'architecture du matériau à l'échelle microscopique afin d'optimiser certaines propriétés fonctionnelles globales des structures et d'améliorer des propriétés spécifiques dans la direction préférée, les rendant ainsi meilleurs que les matériaux homogènes constitués de composants similaires.

Dans ce chapitre, nous avons défini dans un premier temps les matériaux à gradient de propriétés « FGM l'histoire de leur développement, leurs principales méthodes d'élaboration, les avantages et leurs inconvénients ainsi leurs domaines d'application et à la fin nous avons terminés par les différentes lois possibles qui servent à décrire la variation des propriétés matérielles du matériau FGM (module de Young, masse volumique et coefficient de poisson) suivant l'épaisseur d'une plaque, ces lois peuvent être de puissances (P -FGM), exponentielles (E -FGM) ou même sigmoïdes (S -FGM).

La variation spatiale et progressive des propriétés des matériaux à gradient de propriétés permet de créer des structures innovantes qui peuvent être exploitées dans de nombreux domaines d'application dans les structures spéciales en génie civil.

Dans ce chapitre, nous avons défini les matériaux à gradient fonctionnel « FGM », l'histoire de leur développement, leurs propriétés et leurs domaines d'application.

Chapitre II

Présentation des plaques sandwiches.

II.Présentation des plaques sandwiches

II.1 Introduction

Dès la seconde guerre Mondiale, les structures sandwiches sont apparues dans les structures de l'avion « Mosquito » [15]. L'introduction des composites sandwichs dans la plupart des secteurs d'activités a conduit les chercheurs à développer des théories de plaques sandwiches, dédiées à l'analyse et à la prévision de leur comportement et de leur tenue en service. D'autre part, le concept sandwich est très répandu dans la nature.

Les structures sandwiches dont l'utilisation n'a cessé d'augmenter depuis un demi - siècle, sont les composites les plus utilisés en tant que pièces de structures travaillantes, grâce à des propriétés de flexion supérieures à celles des composites monolithiques ou stratifiés.

En raison de leur faible densité, grande résistance, rigidité importante et de leur excellente durabilité, les matériaux composites ont d'abord été utilisés dans de nombreuses composantes structurales, notamment dans le domaine de l'aéronautique, des satellites, des aéronefs, des navires, des automobiles, des wagons et de l'industrie du bâtiment [16].

Ils permettent d'augmenter la durée de vie de certains équipements grâce à leurs propriétés mécaniques et chimiques. Ils contribuent au renforcement de la sécurité grâce à une meilleure tenue aux chocs et au feu. Ils offrent une meilleure isolation thermique ou phonique et, pour certains d'entre eux, une bonne isolation électrique. Ils enrichissent aussi les possibilités de conception en permettant d'alléger des structures et de réaliser des formes complexes, aptes à remplir plusieurs fonctions.

Leur introduction dans le secteur ferroviaire est d'actualité avec la conception et la réalisation d'un premier prototype de TGV 2 niveaux en composite sandwich [17].

Les principes fondamentaux des constructions sandwiches et des examens des méthodes expérimentales et analytiques sont décrits dans les premiers travaux [18]. Leurs résultats évaluent l'évolution des matériaux composites.

Les chercheurs du milieu de la construction navale ont trouvé des champs d'applications pour la réalisation des coques, de ponts, de superstructures et cloisons. En général, la fabrication d'un sandwich met en jeu trois couches de natures différentes liées par un film de colle ou par soudure ; la liaison entre deux couches successives est communément appelée interface.

II.2 Définition

Une structure sandwich résulte de l'assemblage par collage ou soudure de deux semelles (ou peaux) et d'un matériau d'âme (ou cœur) (Figure II.1). Les peaux sont de faibles épaisseurs et possèdent de très bonnes caractéristiques mécaniques (module élevé et grande résistance). Entre les deux peaux est intercalé un matériau d'âme de forte épaisseur et de faible densité. En gardant une distance constante entre les deux peaux, l'insertion de cette âme permet d'augmenter le moment d'inertie de la structure, et par conséquent sa rigidité en flexion, tout en minimisant la masse de l'ensemble [19].

Le matériau sandwich possède une grande légèreté en flexion et bonne résistance au flambement et au cisaillement [50], ainsi possèdent de bonnes propriétés d'isolation thermique et phonique.

Dans un sandwich, il ne faut pas oublier un troisième composant : l'adhésif. C'est ce dernier qui permet un bon assemblage de la structure et aussi une bonne transmission des contraintes d'un milieu à l'autre. Sa principale caractéristique doit être une bonne résistance en cisaillement. Dans le cas de peaux en matériau composite, l'insertion de cette troisième phase peut être évitée par l'utilisation d'une résine auto - adhésive.

L'adhérence des peaux et le cœur est un autre critère important pour le transfert des charges et pour le fonctionnement de la structure sandwich dans son ensemble [20].

De par la constitution des matériaux sandwichs, on peut adapter leurs propriétés mécaniques en faisant varier la nature des peaux (identiques ou non) et de l'âme ainsi que l'épaisseur de chacune des phases. En règle générale, les peaux ont la même épaisseur t_f . Le rapport t_f/t_c (t_c étant l'épaisseur de l'âme) est compris entre 0,01 et 0,1. D'après Allen [21], on peut classer les sandwichs en trois catégories selon la valeur du rapport d/t_f (d : étant la distance séparant l'axe neutre de chacune des peaux). Pour un sandwich symétrique (peaux de même épaisseur) $d = t_f + t_c$.

En fonction des valeurs du rapport d/t_f , on peut classer les sandwichs de la manière suivante :

- Si le rapport d/t_f est supérieur à 100, on parle de sandwichs à peaux très fines ;
- Pour un rapport d/t_f compris entre 100 et 5,77 le sandwich est considéré comme ayant des peaux fines ;
- Dans le cas où d/t_f est inférieur à 5,77 la structure est dite à peaux épaisses.

Ces bornes limites sont définies par rapport à la contribution de chaque constituant vis-à-vis de la rigidité en flexion et en cisaillement du sandwich.

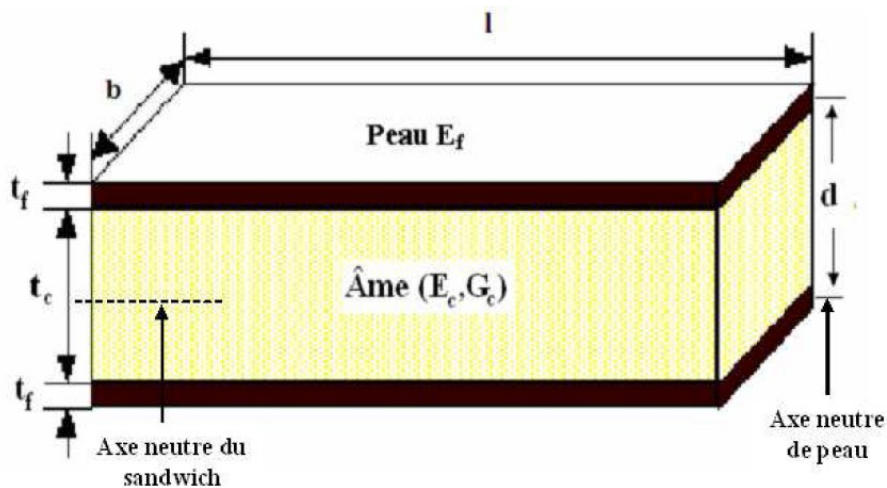


Figure II-1 : Schéma d'un sandwich[20].

II.3 Éléments constituant les matériaux sandwichs

Une structure sandwich présente une solution de compromis permettant à la fois de rigidifier et d'alléger une structure. La performance globale des structures en sandwich dépend des propriétés des matériaux constitutants (feuilles de face, adhésif et noyau), des dimensions géométriques et du type de chargement.

II.3.1 Peaux

Généralement de faibles épaisseurs, les peaux sont constituées de tout matériau pouvant être obtenu sous forme de couche. Elles peuvent être en bois, métal ou matériau composite. Le choix de la nature de la peau s'effectue principalement en fonction des performances mécaniques exigées. Les peaux ont pour but de reprendre les efforts de flexion traduit par des contraintes normales (traction ou compression) [22].

Les peaux des sandwichs sont généralement constituées de fibres (mat ou tissu) enrobées d'une matrice à base de résine. Les peaux peuvent être identiques ou différentes en épaisseur et en propriétés mécaniques. Cependant, dans des cas spéciaux les peaux doivent être différentes car l'une des deux peaux doit être le porteur des charges primaires exercées à une basse température quant à l'autre face elle doit résister à la haute température et à la corrosion de l'environnement ... etc. La Figure II.2 illustre les différents matériaux de fabrication des peaux.

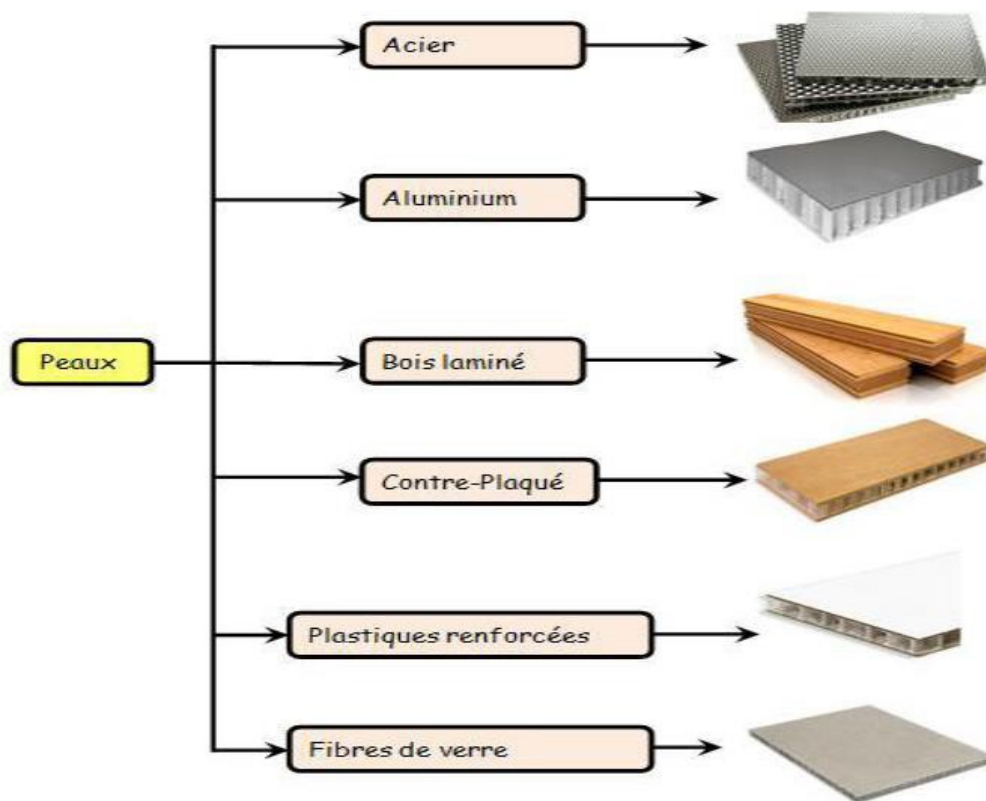


Figure II-2 : Matériaux pour les peaux.

Ces faces peuvent être fabriquées par aramide, les fibres de verre, les fibres de carbone, acier inoxydable et l'aluminium, donnant une surface durable à la structure. Les propriétés demandées pour les faces sont [13]:

- Haute rigidité
- Haut module de Young pour la compression et la traction
- Résistance à l'impact
- Résistance environnementale
- Résistance d'usage.

II.3.2 L'âme

C'est l'élément central d'une structure sandwich. Elle se caractérise par une faible masse et des faibles caractéristiques mécaniques. Son rôle principal est de supporter les efforts de compression et de cisaillement engendrés suite au mouvement de glissement des peaux sous chargement, et de maintenir leur écartement [16]. En effet, si l'épaisseur des panneaux n'est pas maintenue constante, il en résulte une diminution des capacités des peaux externes à résister à la flexion. L'épaisseur élevée de l'âme a pour but d'accroître le moment d'inertie du panneau sans augmenter la masse volumique. Elle peut être réalisée avec les matériaux suivants [13]:

- Mousses : ce sont les plus fréquemment utilisées. Ces matériaux légers peu onéreux, facilement usinables et ont cependant de très faibles caractéristiques mécaniques. Elles sont thermoformables et permettent donc de réaliser des pièces de formes complexes.
- Balsa : est un bois bien connu pour ces différentes utilisations et de leurs principales qualités telles que la légèreté, le haut pouvoir d'isolation thermique et acoustique et la non déformation aux variations thermiques. Il est utilisé pour sa très bonne résistance à la compression notamment pour les supports d'accastillage. Le bois est le matériau le moins cher, mais il est le plus poreux.
- Nid d'abeille : l'âme en nid d'abeilles, connue sous le nom « Nida », c'est une structure hexagonale qui peut être réalisée généralement à partir de matériau en plaques minces (alliage d'aluminium, papier polyamide). Des raies de colle sont disposées en bandes régulières sur les plaques qui sont collées entre elles pour former un bloc, ce dernier est coupé en tranches qui seront, transformées à leur tour en planche de nida' nid d'abeille ' par expansion.

Il existe deux types d'âmes (Figure II.3) :

Les âmes pleines parmi laquelle on retrouve :

- Le Balsa ou bois cellulaires
- Diverses mousses cellulaires
- Des résines chargées de microsphères creuses de verres appelées mousses syntactiques.

Cette âme pleine ou alvéolaire est considérée comme isotrope (propriétés matérielles identiques dans toutes les directions, 2 constantes indépendantes suffisent alors pour définir la loi de comportement du matériau).

- Les âmes creuses, essentiellement de type nid d'abeilles elles sont :

1. *Des alliages métalliques légers*
2. *Des papiers kraft (enduit ou non de résine)*
3. *Du papier polyamide, type papier Nomex.*

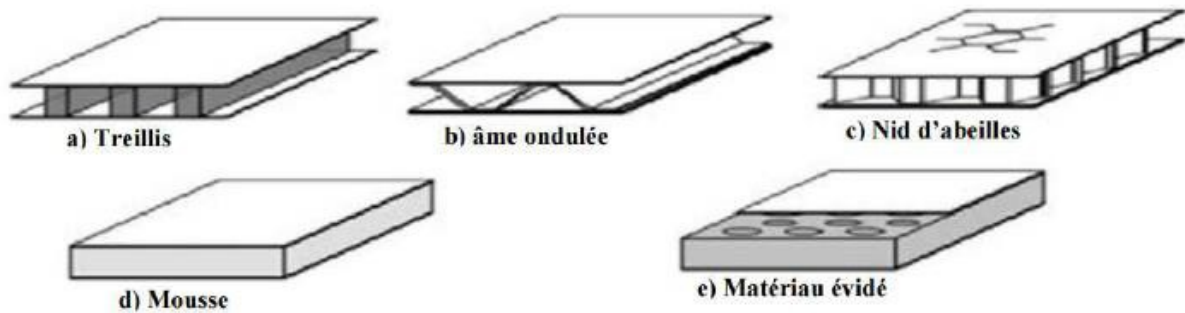


Figure II-3 : Différentes natures d'âmes

II.4 L'interface

L'assemblage de la structure sandwich est réalisée par collage, soudage ou brasage [23]. Aussi est-il supposé que, quel que soit le mode d'assemblage des différentes couches, le lien est parfait.

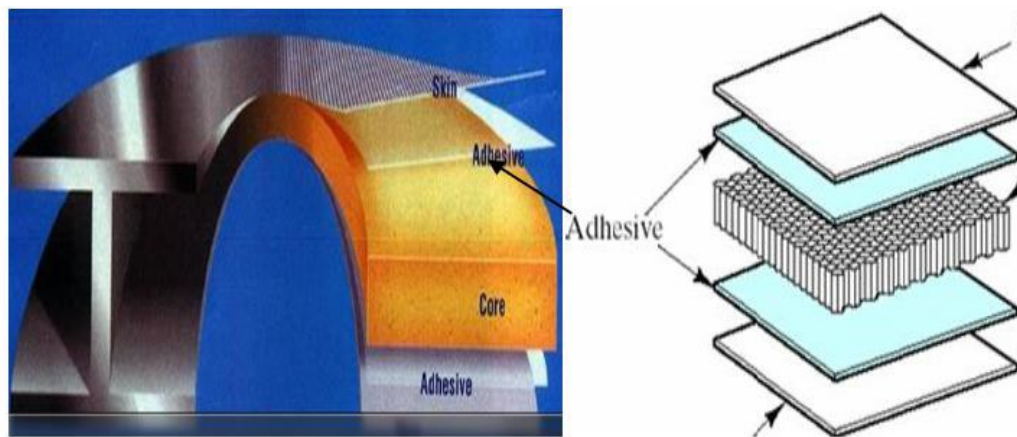


Figure II-4 : Mécanismes d'adhésion [24].

Cet élément est d'une importance cruciale, il solidarise l'âme et les peaux. Il doit permettre un bon assemblage de la structure en formant une liaison continue, non poreuse et d'épaisseur constante. Par ailleurs, une bonne transmission des contraintes d'un milieu à l'autre est nécessaire. Pour cela, la principale caractéristique de l'adhésif doit être une bonne résistance au cisaillement. Dans le cas de peaux en matériau composite, l'insertion de cette troisième phase peut être évitée par l'utilisation d'une résine auto-adhésive.

II.5 Domaines d'utilisation

L'usage des structures sandwichs, continue à augmenter rapidement pour diverses applications qui vont des satellites, avions, bateaux, automobiles, voitures sur rail, éoliennes et construction de ponts.

Le sandwich est utilisé par une large gamme de constructions navales et maritimes et de nouveaux marchés sont encore à venir.

Les conceptions de terres d'aujourd'hui permettent uniquement l'utilisation du béton, de l'acier et de quelques alliages d'aluminium.

Les matériaux sandwichs sont également utilisés et assemblés par collage dans la construction automobile et ferroviaire. Dans ce domaine on peut utiliser des peaux en stratifié de verre/polyester et d'âme en mousse polystyrène expansé.

Le métro et tramways, demandant des démarrages fréquents, constituent un bon marché pour les matériaux sandwichs. Les portes d'accès sont en panneaux sandwichs avec des peaux en composites verre/polyester ou en aluminium collées par des adhésifs intérieurs sont aussi en panneaux sandwichs avec âme en nida aluminium ou nomex.

Dans la construction aéronautique les panneaux sandwichs et par cuisson de stratifiés composites (carbone/époxyde, kevlar/époxyde) sont utilisées pour les portes trappes de train d'atterrissage, carénages divers (entre aile de fuselage, mâts de réacteurs, glissières de volets).

Les capots des moteurs sont les plus souvent réalisés avec des sandwichs constitués de peaux en carbone/époxyde collés sur des âmes en nida aluminium. Des nombreuses pièces d'hélicoptères sont constituées de pièces monolithiques ou de sandwichs avec peaux en composites collées sur nida [24].

Dans les domaines astronautique et d'armement, on a besoin de la tenue à la chaleur et aux variations thermiques encore plus élevées. Les réflecteurs solaires sont en peaux de carbone/époxyde et l'âme en nida nomex. Dans le futur le concept du sandwich peut être introduit comme matériau de substitution pour différents modules composant ces structures, telles que les chambres de stockage et l'isolation en période hivernale.

II.6 Procédés de fabrication

La fabrication des structures sandwichs fait appel, dans un grand nombre de cas, à des technologies de transformation standard des composites (moulage au contact, moulage au sac sous vide, moulage par injection de résine, moulage à la presse, moulage par enroulement filamentaire ou centrifugation...etc.), qui permettent d'intégrer une âme dans l'épaisseur de la structure ainsi fabriquée. On citera dans cette partie les procédés les plus utilisés pour l'élaboration d'un sandwich. [25]

II.6.1 Technologies par voie humide (imprégnation directe)

Les sandwichs peuvent être obtenus par des procédés de mise en œuvre dits par « voie humide » les renforts secs étant imprégnés par la résine thermodurcissable au cours de la mise en forme, soit par moulage au contact, soit par projection simultanée, soit encore par injection de résine, ou par enroulement filamentaire.

Les structures obtenues par contact ou projection simultanée présentent des propriétés mécaniques moyennes, en particulier si les peaux ont été fabriquées à partir de fibres coupées. Le taux de résine, le taux de porosité et plus généralement, la qualité du stratifié, dépendent de l'habileté du mouleur.

Celles produites par enroulement filamentaire ou par injection de résine (sous vide ou sous pression) présentent des propriétés mécaniques les plus élevées du fait de l'utilisation possible de renforts à fibres continues (unidirectionnels, tissus) et de l'obtention de taux de fibres plus importants.

II.6.2 Technologies par voie sèche (imprégnation indirecte)

Les procédés de mise en œuvre par voie sèche (procédés d'imprégnation indirecte) consistent à réaliser des structures sandwiches dont les peaux sont obtenues à partir de préimprégnés.

La mise en œuvre peut s'effectuer sous vide en étuve, sous presse chauffante, ou sous vide en autoclave. Le recours aux préimprégnés permet de garantir une imprégnation des renforts uniforme et de qualité, et confère à la pièce sandwich de bonnes propriétés mécaniques résultant du taux de fibres élevé. L'excès de résine contenu dans le préimprégné, qui sera extrait par l'application de la pression et de la température adéquates, peut être utilisé pour assurer le collage âme/peau.

II.6.3 Assemblage par collage

II.6.3.1 Le collage de peau sur l'âme

Pour que les structures sandwiches jouent pleinement leur rôle, il est nécessaire de veiller à avoir une solidarisation parfaite de l'ensemble âme-peaux de manière à répartir les efforts entre âme et peaux. L'assemblage est réalisé par un collage à l'aide de résines compatibles avec les matériaux utilisés (Figure II.5). La préparation des surfaces est une étape importante qui permet d'assurer une adhésion de qualité :

- Nettoyage afin d'éliminer les matières grasses ou la poussière ;
- Augmentation de la rugosité ;
- Apprêt par attaque chimique des peaux métalliques etc.

L'adhésif, dont la nature est fonction des matériaux constitutif du sandwich, doit être appliqué uniformément. L'empilement (âme + adhésif + peaux) est chauffé et mis sous pression, l'application de la pression pouvant se faire à la presse, en autoclave sous vide, par moulage au sac.

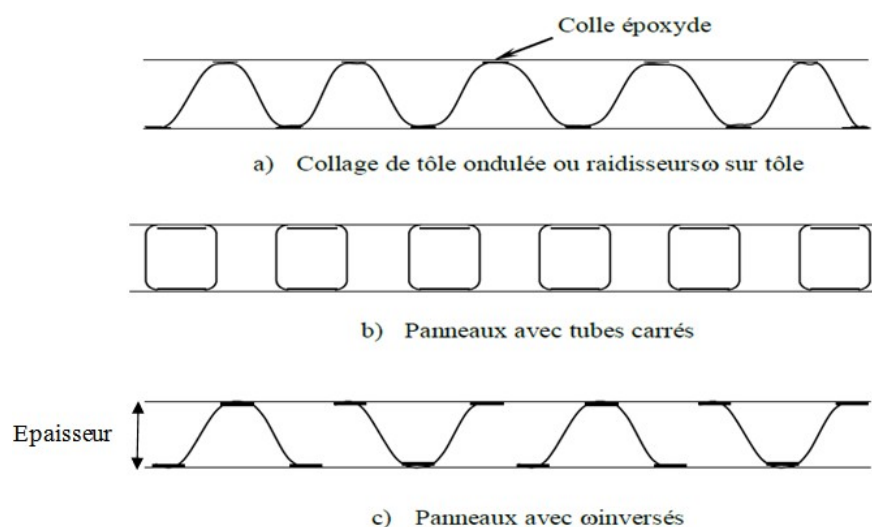


Figure II-5 : Panneaux réalisés par collage à partir de divers profiles. [25]

II.6.4 Technique de pliage :

Après mise en œuvre les panneaux sandwichs peuvent être formés par pliage comme il est indiqué sur la (Figure II.6). On commence par dégarnir une bande de l'un des revêtements en suivant l'axe de la pliure et sur une largeur qui est fonction de l'épaisseur de la plaque et l'angle de pliage souhaité, ensuite on plie et on maintient l'angle dans la position choisie.

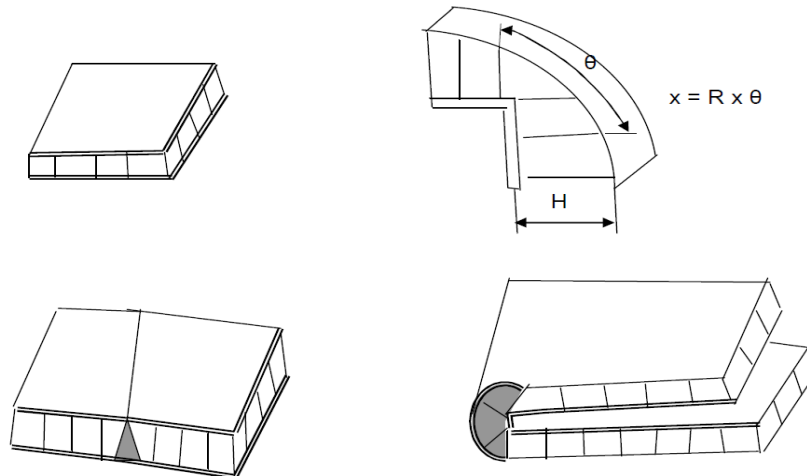


Figure II-6 : Pliage de panneaux sandwichs.

II.7 Sollicitations et Modes de dégradations des sandwichs

Les modes d'endommagement et ruine des structures sandwichs ont été étudiés par plusieurs chercheurs dans le domaine [26], ont montré que le processus des modes d'endommagement lors du chargement en flexion en trois points, dépend de la charge, du rapport de la longueur entre appuis et de l'épaisseur des peaux et de la densité du cœur. Ils existent plusieurs modes principaux de dégradation :

- Déformation plastique de la peau,
- Flambement de la peau en compression « Wrinkling »,
- Flambement des cellules du cœur (l'âme),
- Rupture en cisaillement du cœur,
- Indentation du cœur et de la peau au point d'application de la charge centrale.

Les principales charges supportées par ces structures sont la flexion, la torsion, la compression ou l'extension. Un sandwich peut être donc soumis à un :

- Moment de flexion,
- Moment de torsion,
- Effort normal,
- Effort tranchant.

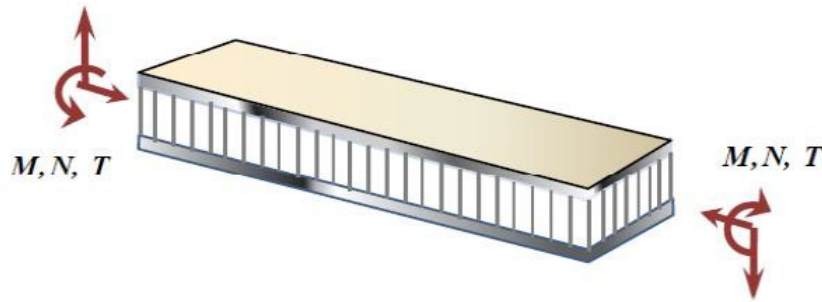


Figure II-7 : Différentes sollicitations (M, N, T) appliquées à un sandwich.

II.7.1 Flambement généralisé des Peaux

Une poutre sandwich soumise à la compression peut céder sous l'effet de conditions d'instabilité concernant toute la poutre (Figure II.7). Le flambement généralisé peut également survenir quand les contraintes dans les peaux et dans l'âme sont inférieures à leurs résistances à la rupture respectives.

La charge qui cause le flambement du sandwich dépend des paramètres tels que les dimensions du sandwich, le type de sandwich, la rigidité en flexion, l'épaisseur des peaux, l'épaisseur de l'âme et le module de cisaillement de l'âme.

Si l'on craint un flambement généralisé, on peut utiliser des peaux ayant un module d'élasticité plus élevé, augmenter l'épaisseur des peaux, et l'épaisseur de l'âme [27], ou encore utiliser pour l'âme un matériau de module de cisaillement plus élevé.

Ce type de déformation est causé par une épaisseur insuffisante de la structure, ou la faible rigidité de l'âme.

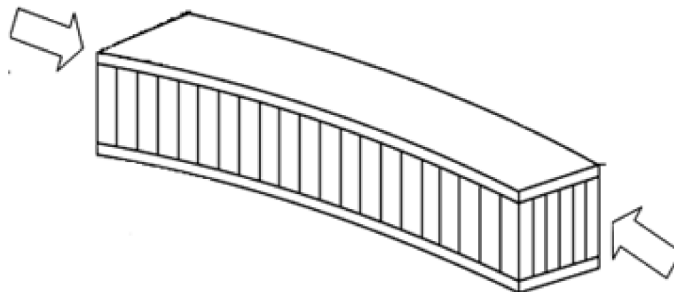


Figure II-8 : Mode de ruine par « flambement généralisé » des peaux du sandwich.

II.7.2 Rupture des peaux en traction ou en compression

Il s'agit du cas où les contraintes dans les peaux sont supérieures aux contraintes admissibles pour matériaux constituant les peaux (Figure II.9).

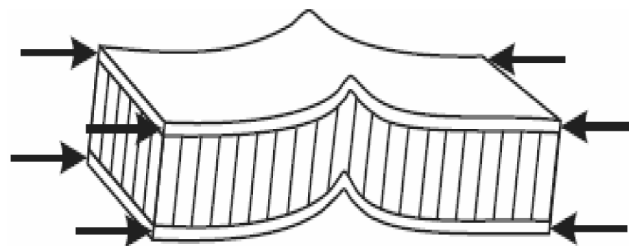


Figure II-9 : Mode de dégradation par rupture des peaux du sandwich.

Ce phénomène peut être évité en utilisant un matériau dont les contraintes à rupture sont plus élevées, ou en augmentant l'épaisseur des peaux, ce qui réduit les contraintes appliquées, ou en augmentant l'épaisseur de l'âme, ce qui permet également de réduire les contraintes dans les peaux.

En général, on augmente l'épaisseur de l'âme. Par contre, si l'âme est plus rigide, elle n'affecte pas les contraintes dans la peau.

II.7.3 Modes locaux de rupture

L'indentation locale est un mode localisé de rupture dû à une concentration de contraintes résultant, soit de l'application d'une charge localisée, soit de la position d'un appui de type ponctuel ou linéique (Figure II.10).

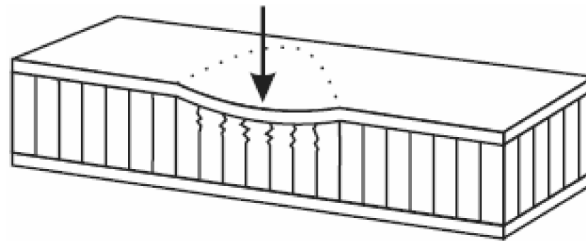


Figure II-10 : Mode de rupture par indentation localisée.

II.7.4 Rupture de l'âme par cisaillement

Si la contrainte de cisaillement (prépondérante dans l'âme) dépasse la résistance au cisaillement du matériau constituant l'âme, il y a rupture de l'âme (Figure II.11). Pour cela, on peut soit utiliser un matériau qui possède une résistance au cisaillement plus élevée, soit augmenter l'épaisseur de l'âme.

Par contre, utiliser un matériau différent pour les peaux, ou changer leur épaisseur, n'aura aucun effet.

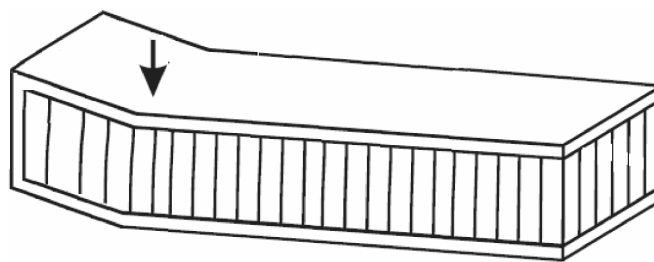


Figure II-11 : Mode de rupture par cisaillement de l'âme

II.7.5 Flambement généralisé de l'âme ou « Crimping »

Si le rapport longueur/épaisseur est relativement faible, et que la rigidité de cisaillement est négligeable devant la rigidité de flexion, le flambement généralisé prend la forme du flambement de l'âme (Figure II.12). Le flambement de l'âme ne dépend pratiquement pas des propriétés des peaux ; par contre, il augmente de façon linéaire avec l'épaisseur de l'âme et le module de cisaillement de l'âme. Pour augmenter la résistance à cette charge critique, il faut donc

soit augmenter l'épaisseur de l'âme, soit utiliser une âme avec un module de cisaillement plus élevé [66].

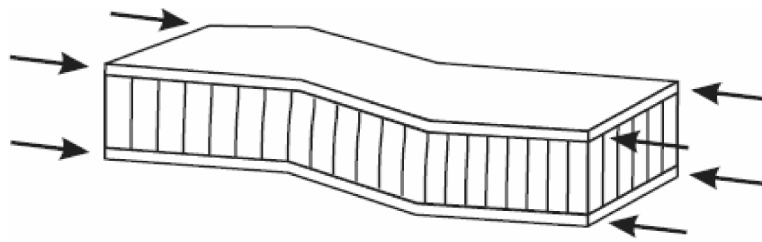


Figure II-12 : Mode de ruine par flambement généralisé de l'âme du sandwich.

II.7.6 Flambement localisé des peaux « Wrinkling » ou « Dimpling »

Connu également comme le flambage intercellulaire, ce phénomène d'instabilité peut se produire en structures de sandwich avec le nid d'abeilles ou les noyaux ondulés.

Les peaux considérées par elles-mêmes, sans connexion avec l'âme, flambent très facilement à cause de leur faible épaisseur. C'est l'âme qui empêche leur flambement. Cependant si on atteint la contrainte limite, il se peut que l'âme ne soit plus capable d'empêcher le flambement. Dans ce cas, le flambement localisé des peaux, ou « wrinkling » se produit (Figure II.13).

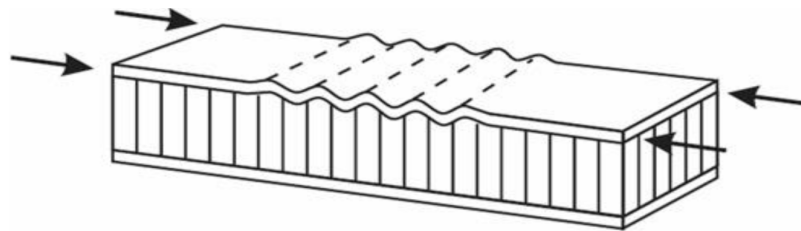


Figure II-13 : Mode rupture par flambement localisé «wrinkling »

Contrairement au flambement généralisé, le flambement localisé peut prendre des configurations différentes, qui ne dépendent ni de la géométrie de la structure ni des conditions aux limites. Par contre, il est influencé par les modules élastiques des peaux et de l'âme [66], et le module de cisaillement de l'âme. Si l'on craint un flambement localisé de la peau, on peut soit utiliser pour les peaux un matériau de module élastique plus élevé, soit utiliser pour l'âme un matériau présentant des propriétés élastiques plus élevées. Dans le cas d'une âme en nid d'abeille, mise à part les ruptures par « wrinkling », il peut survenir aussi un autre mode de rupture par flambement localisé de la peau en fossettes, appelée « dimpling » (Figure II.14).

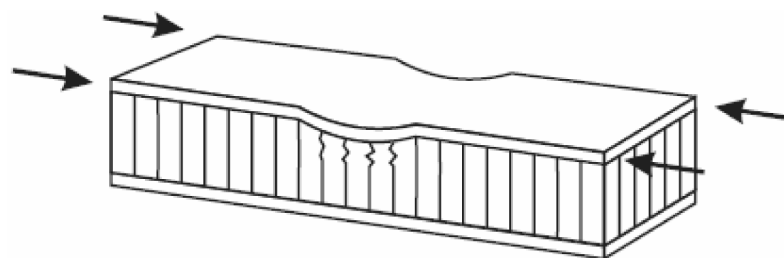


Figure II-14 : Mode rupture par flambement localisé «dimpling»

II.7.7 Délaminage

L'endommagement du lien entre les faces et le noyau s'appelle le délaminage, il est dû à la surcharge. L'effort de cisaillement dans la ligne de liaison est presque aussi haut qu'au milieu du noyau, et si le joint adhésif a moins de résistance que le noyau il endommage avant le noyau. Ceci devrait être évité en choisissant le meilleur adhésif et les bonnes méthodes de mise en œuvre. Le lien sera également soumis aux efforts élevés exercés à hautes températures sur les faces, par exemple le soleil.

Le joint adhésif endommagera également en raison de la fatigue, de l'impact ou du vieillissement. Le problème principal de l'endommagement de l'adhésif est qu'il est occulté. Il peut commencer à accroître et atteindre des niveaux critiques avant d'être détecté.

II.7.8 Dégradation de l'adhésif

La dégradation de l'adhésif est répartie en trois types :

- Dégradation de l'adhésif entre les peaux et l'âme ;
- Dégradation de l'attachement des cellules de l'âme ;
- Dégradation de l'attachement du nœud des cellules de l'âme.

La Figure II.15 illustre les modes de dégradation de l'adhésif L'exposition à l'humidité provoque des dégradations remarquables de la résistance de l'adhésif ce qui peut changer le mode de dégradation et causer la ruine avancée du panneau sandwich.[27]

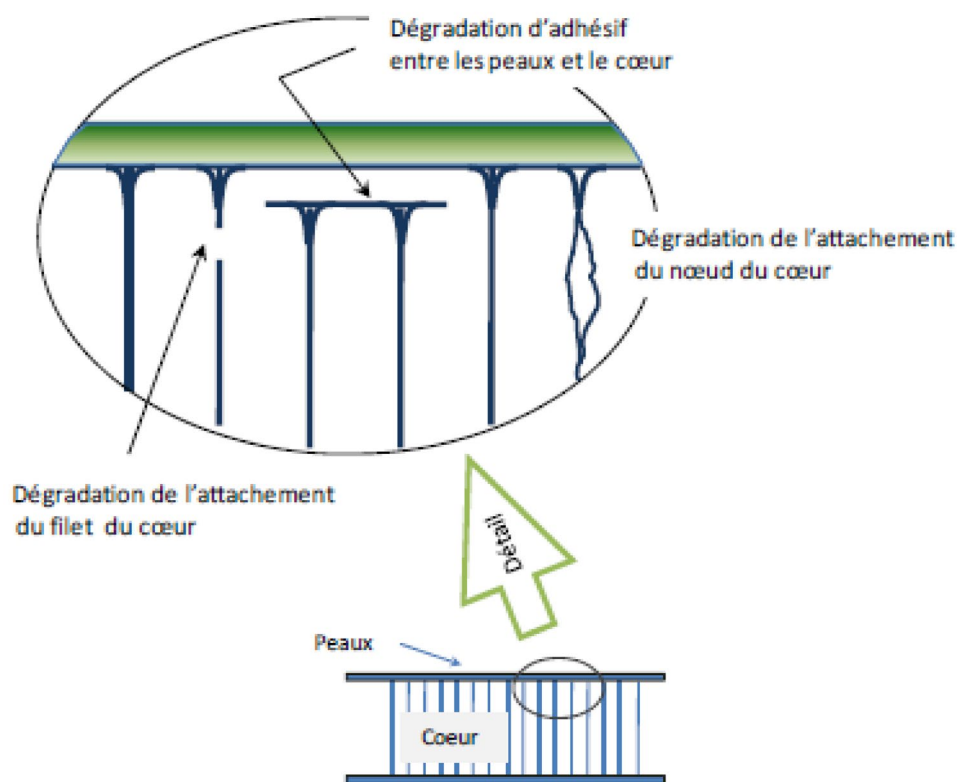


Figure II-15 : Type de dégradation de l'adhésif

II.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons défini les structures sandwiches : les types, leurs utilisations, les sollicitations et les modes de dégradations des sandwiches. Le chapitre suivant va porter sur la présentation des matériaux à gradient de propriétés FGM tous en définissant leur concept et leurs caractéristiques puis nous définissons les lois qui régissent ce matériau.

Chapitre III

Théories des plaques

III. Théories des plaques

III.1 Introduction

Afin de résoudre les problèmes des plaques en FGM dans le domaine élastique, il est nécessaire de choisir la bonne théorie décrivant correctement le comportement statique et dynamique de la structure ainsi que la méthode de résolution à appliquer.

C'est en 1888 que Love utilisa les hypothèses de Gustav Kirchhoff, elles-mêmes inspirées des hypothèses d'Euler-Bernoulli pour fonder une théorie des plaques minces (également appelée théorie classique ou théorie de Kirchhoff-Love) (*CPT : Classical plate theory*). La théorie des plaques semi-épaisses (théories des déformations du premier ordre) (*FSDT : The first-order shear deformation plate theory*) a été consolidée par Mindlin à partir des travaux de Rayleigh (1877), [28] Timoshenko (1921), [29] Reissner (1945) et [30] Uflyand (1948). Ensuite, des théories d'ordre supérieur (*HSDT : High-order shear deformation plate theory*) sont venues améliorer les hypothèses des théories classiques et du premier ordre lorsque l'épaisseur de la plaque devient importante. Il existe aussi la théorie basée sur l'élasticité tridimensionnelle qui ne fait aucune hypothèse restrictive sur les déplacements de la plaque.

Nous présentons dans ce chapitre quelques modèles des théories des plaques développées dans la littérature pour améliorer l'évolution de la variation du champ des déplacements à travers l'épaisseur des plaques.

III.2 Différents modèles de plaque

Par modèle de plaque, on entend un modèle dans lequel on effectue une approximation de l'estimation des variables du champ de déplacement – généralement sur l'épaisseur de la structure – destinée à modéliser le comportement d'une plaque – le plus souvent multicouche –. Il n'est pas rare de rencontrer d'autres définitions d'un modèle de plaque, par exemple, Carrera [60], définit un modèle de plaque comme un modèle dans lequel le degré d'interpolation au travers de l'épaisseur est au moins d'un degré inférieur à celui des autres directions.

Parmi les modèles de plaque, on distingue deux grandes familles, les modèles *Equivalent Single Layer* (ESL – modèle couche équivalente) et les modèles *Layer-Wise* (LW – par couche). Les modèles ESL expriment chaque composante du champ de déplacement en fonction de variables définies sur un plan de référence, décrit par les coordonnées x et y dans le plan, et fonction de z la direction normale au plan $x ; y$ traduit ce qui se passe dans l'épaisseur.

Depuis le premier travail de Sophie Germain en 1815 sur les plaques minces en passant par les modèles de Love-Kirchhoff et de Reissner-Mindlin, de nombreux auteurs ont développé des théories des plaques à partir de cinématiques ou champs de contraintes plus raffinés. Nous passons en revue, dans ce qui suit, les principaux modèles.

III.2.1 Théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff

Ce modèle est la généralisation pour des matériaux anisotropes du modèle de Love-Kirchhoff. Cette théorie ne tient pas compte du cisaillement transverse et suppose que les déplacements de membrane, en tout point de la plaque, sont uniquement dépendants des déplacements de membrane et des dérivées de la flèche.

Le champ de déplacement associé est présenté dans l'équation (III.1). La figure III.1 illustre l'état déformé d'une structure monocouche avec le modèle de Love-Kirchhoff : la section de la poutre déformée reste orthogonale à l'axe neutre, les contraintes et déformations de cisaillement transverse sont nulles. Cette formulation a tendance à sous-estimer les flèches et surestimer les fréquences propres des structures modélisées, cette erreur étant encore plus grande pour les stratifiés fortement anisotropes. Cependant, ce modèle permet de décrire correctement le comportement de plaques simples fortement élancées ou avec une épaisseur faible par rapport à la longueur d'onde de flexion, d'où son appellation de "plaques minces".

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (III.1a)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (III.1b)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (III.1c)$$

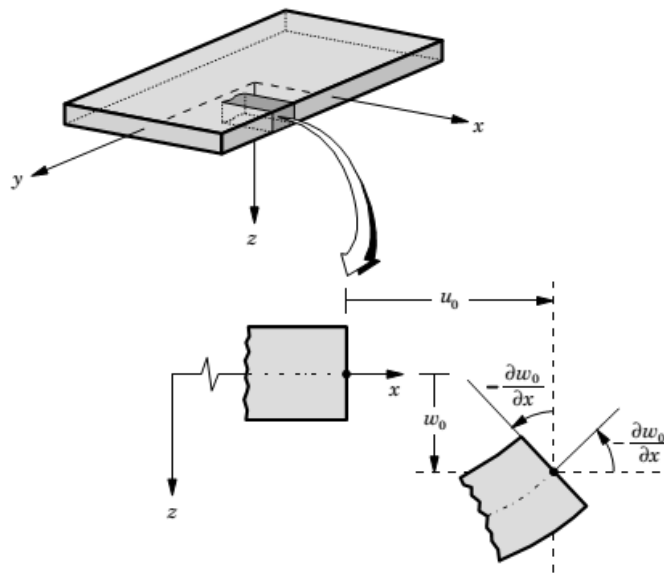


Figure III-1 : Plaque de Love Kirchhoff.

Ce modèle a été utilisé par plusieurs chercheurs pour analyser le comportement des plaques. Feldman et Aboudi [29] ont étudié le flambement élastique de plaque en FGM soumise à une charge de compression uniaxiale en utilisant une combinaison micromécanique et des approches structurales. Ils ont donné une solution analytique de la charge de flambement d'une plaque en FGM avec diverses conditions aux limites des équations gouvernantes dérivées par la théorie classique CPT. Javaheri et Eslami [30], utilisent la théorie classique pour étudier le flambement des plaques en FGM sous quatre types de charge thermique et des charges de compression. Basé sur la théorie classique, Kiani et al [32] présentent une solution analytique de la température critique de flambement des plaques encastées sur fondation élastique soumise à trois types des charges thermiques.

Ghannadpour et al [32] ont examinés aussi le flambement thermique des plaques en FGM en utilisant la théorie classique (CPT). Cependant, la charge de flambement a été calculée la méthode des bandes finies au lieu de la solution de Navier. Le flambement des plaques en FGM soumise à une compression non uniforme a été analysé par Mahdavian [33] en utilisant la théorie

classique et la solution de Fourier. Mohammadi et al [3] ont utilisés la méthode de Levy pour étudier le flambement des plaques en FGM avec deux bords opposés simplement appuyées et les deux autres sous conditions aux limites arbitraire pour résoudre les équations gouvernantes dérivées par la théorie classique.

Alinia et Ghannadpour [34] ont utilisés la théorie classique avec les hypothèses de von - Karman pour étudier la réponse non linéaire des plaques en FGM soumise à des pressions transversales. Par le principe de minimisation de l'énergie potentielle, les auteurs ont obtenu une solution analytique pour une plaque simplement appuyée.

La vibration libre des plaques en FGM avec diverse condition aux limites sur fondation élastique a été analysé par Chakraverty et Pradhan [35] en utilisant la théorie classique et la méthode de Rayleigh – Ritz. Les même auteurs [36] ont confirmé leur précédent travail par la prise en considération de l'effet d'un environnement thermique.

La théorie classique des plaques a été aussi utilisée pour analyser le comportement des plaques circulaires et des coques.

III.2.2 Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre

Aussi appelé modèle de Mindlin-Reissner ou encore "théorie des plaques épaisses", ce modèle pose pour hypothèse une déformation de cisaillement transverse constante au travers de l'épaisseur de la plaque, le déplacement d'un point de la plaque dépend cette fois de u , v , des dérivées de la flèche w et des cisaillements. L'équation (III.2) présente le champ de déplacement associé à ce modèle. Celui-ci, développé par Reissner [29], fut le premier modèle de plaque prenant en compte les contraintes de cisaillement transverse ; Mindlin [37] développa la théorie de déformation en cisaillement au premier ordre basé sur les déplacements.

Le plus souvent, le champ de déplacement lié à la FSDT est écrit en fonction des rotations. Il est donc commun de rencontrer le champ de déplacement associé sous la forme suivante :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z\phi_x(x, y) \quad (III.2a)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z\phi_y(x, y) \quad (III.2b)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (III.2c)$$

Où u_0 , v_0 et w_0 sont les déplacements d'un point situé dans le plan médian, ϕ_x et ϕ_y sont les rotations dues à la flexion suivant x et y .

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre a été utilisée par Lanhe [38] et Bouazza et al. [39] Ont donné une solution analytique de flambement thermique des plaques en FGM simplement appuyée sous deux types de chargement thermique en utilisant la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) et la solution de Navier.

Cette théorie a été utilisée par Yaghoobi et Yaghoobi [40] pour analyser le flambement des plaques sandwichs en FGM sur fondation élastique sous chargement thermique et mécanique.

Des solutions analytiques de la vibration libres par la méthode de Levy des plaques sur fondation élastique ont été données par Hosseini-Hashemi et al. [41] Ils ont confirmé leurs précédent travail par la prise en compte de l'effet de couplage entre les déplacements en plan et transverse.

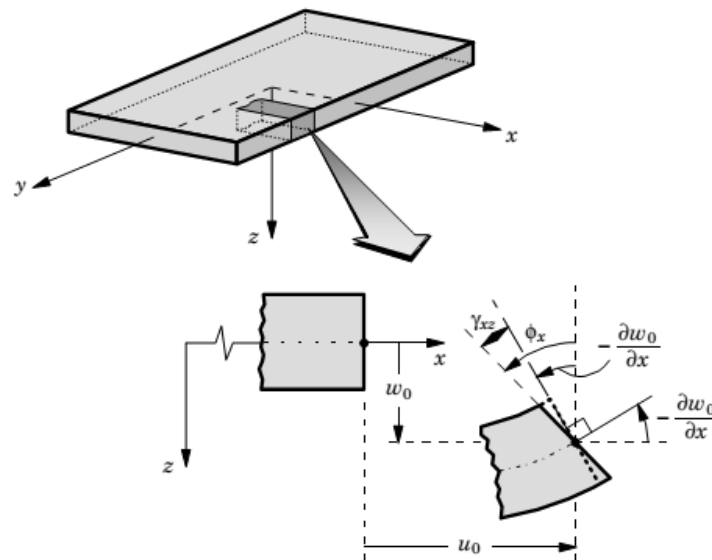


Figure III-2 : Plaque de Reissner-Mindlin [37].

Mohammadi et al. [42] Découple les cinq équations de la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) en deux équations indépendantes. Ensuite la méthode de Levy a été utilisée pour obtenir la charge de flambement des plaques en FGM sous chargement en plan. Cette approche a été aussi employée par Saidi et Jomeh zadeh [43] pour dériver par la méthode de Levy la flèche et les contraintes des plaques en FGM soumise à un chargement transverse. Yaghoobi et Torabi [44] ont adapté cette approche pour obtenir la charge de flambement des plaques en FGM sur fondation élastique sous chargements thermiques. Comme précisé précédemment, la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) nécessite un facteur de correction du cisaillement transversal. Pour dépasser cette insuffisance, Nguyen et al [45] ; ont adopté les équations d'équilibre pour calculer les contraintes de cisaillement transversales et les forces de cisaillement. Les résultats de l'analyse de la flexion statique des plaques en FGM simplement appuyées et des panneaux sandwich en FGM encastre indique que la valeur du facteur de correction des plaques en FGM n'est pas le même comme dans les plaques homogènes.

Basant sur la surface neutre, la théorie du premier ordre de cisaillement a été adopté par Singha et al [46] pour étudier la flexion non linéaire des plaques en FGM sous pression transversale en utilisant la méthode des éléments finis. Dans ce cas, les contraintes de cisaillement sont calculées à partir des équations d'équilibre, tandis que l'expression du facteur de correction est obtenue par la méthode énergétique.

Park et Kim [47] ont choisis la théorie du premier ordre de cisaillement avec les hypothèses de van – Karman pour étudier le post flambement et la vibration des plaques en FGM sous chargement thermique par la méthode des éléments finis.

III.2.3 Théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé

Une fois introduits dans les modèles du premier ordre, les facteurs de correction du cisaillement transversal ont permis de résoudre des problèmes de structures multicouches mais leurs évaluations dépendent malheureusement du nombre de stratifications c.à.d. du problème à résoudre. Pour écarter à jamais ce type de contrainte, des théories d'ordre élevé ont été introduites

au début des années 70. La première théorie a été proposée en 1969 par Whitney, qui a supposé un champ de déplacement d'ordre supérieur à trois. Elle a donné des résultats précis mais fût abandonnée en raison de sa complexité théorique ; elle exige en effet un grand nombre de paramètres. D'autres théories sont apparues par la suite, avec des formalismes différents selon le domaine d'application.

Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction. Les références sur de tels modèles peuvent être trouvées dans Reddy [48]; Kant et Swaminathan [49].

Le champ de déplacement d'un point matériel de la plaque de coordonnées (x, y, z) peut être écrit comme suit :

$$u = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + \psi(z) \theta_x \quad (III.3a)$$

$$v = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + \psi(z) \theta_y \quad (III.3b)$$

$$w = w_0(x, y) \quad (III.3c)$$

D'où u , v , w sont les déplacements suivant les directions x , y et z respectivement, u_0 , v_0 et w_0 sont les déplacements d'un point situé dans le plan médian, θ_x et θ_y sont les rotations dues à la flexion suivant X et Y respectivement. $\psi(z)$ Représente la fonction de forme pour déterminer la répartition des déformations de cisaillement transversales et les contraintes à travers l'épaisseur.

Selon l'expression de la fonction de cisaillement $\psi(z)$, quelques modèles d'ordre élevés se sont distingués dans la littérature. Nous citons en particulier :

L'approche de Reddy [48]-[50] : théorie des plaques de troisième ordre de cisaillement (TSDPT) $\psi(z)$ est donné comme suit :

$$\psi(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^3} \right) \quad (III.4)$$

La théorie des plaques de déformation en cisaillement sinusoïdale (SSDPT) de Touratier [51] et de Zenkour et Alghamdi [52] est donnée comme suit :

$$\psi(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (III.5)$$

En outre, la théorie des plaques de déformation de cisaillement exponentielle (ESDPT) de Karama [53] est donnée comme suit :

$$\psi(z) = z e^{-2(z/h)^2} \quad (III.6)$$

Avec h : l'épaisseur de la plaque.

La théorie des plaques de troisième ordre de cisaillement (TSDPT) est la théorie d'ordre élevé la plus utilisée due à sa simplicité. Cette théorie a été adoptée par Saidi et al. [54] pour dériver des solutions analytiques pour la déflexion et les contraintes des plaques en FG soumises à des charges transversales par la méthode de Levy.

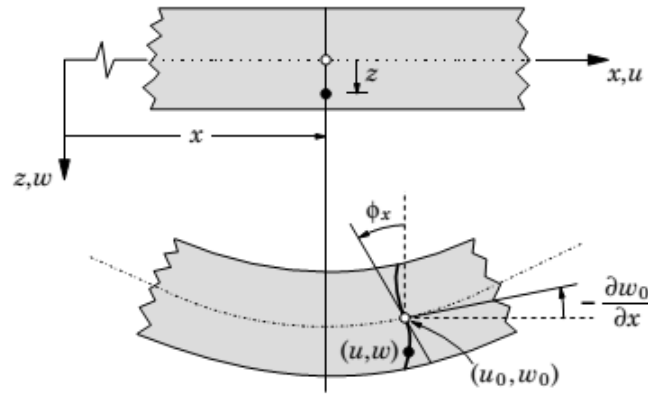


Figure III-3 : Schématisation des déformations dans le cas de la théorie d'ordre supérieur des plaques [48].

III.3 Revue sur les différents modèles de la théorie d'ordre élevé :

Pour franchir les limites des théories du premier ordre, plusieurs auteurs ont proposé quelques contributions importantes pour le développement de modèles d'ordre élevé qui se sont distingués dans la littérature par l'expression de la fonction de cisaillement $f(z)$. Les modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs de déplacement à travers l'épaisseur, et qui permettent de représenter le gauchissement de la section transversale dans la configuration déformée (Figure III.3) [51]. Nous citons en particulier :

- L'approche d'Ambartsumyan, Ambartsumyan (1969) avec :

$$f(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad (III-7)$$

- L'approche de Reissner (1945) avec :

$$f(z) = \frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (III.8)$$

- L'approche de Levinson, Murthy Murthy (1981) et Reddy Avec :

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (II.9)$$

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal w , est constant. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle dans le cas homogène.

La distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique à travers l'épaisseur (elle doit être parabolique par couche pour un multicouche). Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites. Les résultats du modèle de Reddy sont également très proches des deux modèles d'ordre élevé proposés par [49].

Touratier propose le modèle (sinus) qui est différent des autres modèles d'ordre élevés puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc

introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur [51]. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme suite :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot z}{h}\right) = \frac{h}{\pi} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \left(\frac{\pi \cdot z}{h}\right)^{2n+1}$$

$$= z \left(1 - \frac{\pi^2}{3!} \cdot \frac{z^2}{h^2} + \frac{\pi^4}{5!} \cdot \frac{z^4}{h^4} - \frac{\pi^6}{7!} \cdot \frac{z^6}{h^6} + \dots \right) \quad (III.11)$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par le modèle (sinus) prennent une forme sinusoïdale à travers l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de [49].

Récemment, Karama [53] proposent un modèle exponentiel avec une cinématique plus riche. La fonction de distribution de cisaillement transverse est de la forme suivante :

$$f(z) = z \cdot e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (III.12)$$

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance pair et impair de la variable z , alors que la fonction (sinus) de Touratier [51] ne permet qu'un développement en puissance impair.

Malgré le fait que les modèles d'ordre élevé assurent une continuité de déplacement et de déformation à l'interface, les contraintes de cisaillement Inter-laminaire et les contraintes d'interface, restent discontinues. Ceci présente un inconvénient lors de l'analyse locale de l'interface des structures multicouches dont les propriétés des couches sont très différentes.

Nous regroupons dans le tableau suivant les différentes fonctions de cisaillement ainsi qu'une comparaison entre les différents modèles.

III.3.1 Nouvelle théorie de déformation des plaques :

Shimpi [55] a développé un modèle raffiné pour les plaques isotropes (RSDPT : *Refined Shear Deformation Plate Theory*). Les caractéristiques les plus intéressantes de cette méthode et qu'elle ne contient que deux variables qui donne seulement quatre inconnus à trouvés au lieu des cinq dans le cas des autres théories d'ordre élevés. En plus, cette théorie n'exige pas de facteur de correction de cisaillement et donne une distribution parabolique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque. Aussi, elle présente beaucoup de similitudes avec la théorie classique des plaques quant aux équations d'équilibres, les conditions aux limites et les expressions des moments.

Ait Atmane et al. (2010) [56] ont adaptée une théorie raffinée pour étudier la flexion des plaques FGM. Thai et al [57] et [58] ont utilisés la RSDPT, à l'étude du flambement des plaques orthotropes, et à la vibration libre des plaques stratifiées et sandwichs respectivement.

Bouderba et al. [59] Ont étudiés la réponse en flexion thermomécanique des plaques FG sandwichs reposants sur fondation élastique en utilisant une théorie raffinée de cisaillement trigonométrique.

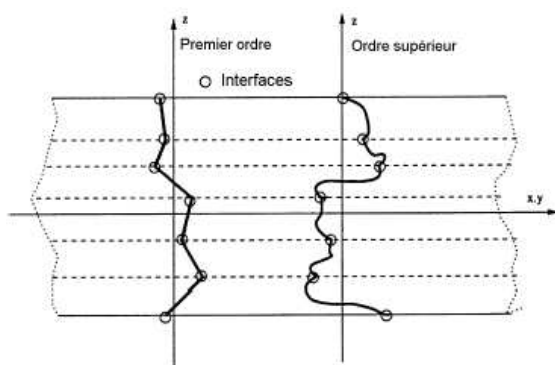
III.4 Approche par couche

Ces approches sont destinées justement à mieux décrire les effets d'interface pour les matériaux composites conventionnels. Ainsi différents modèles issus de l'approche par couche ont été proposés [60].

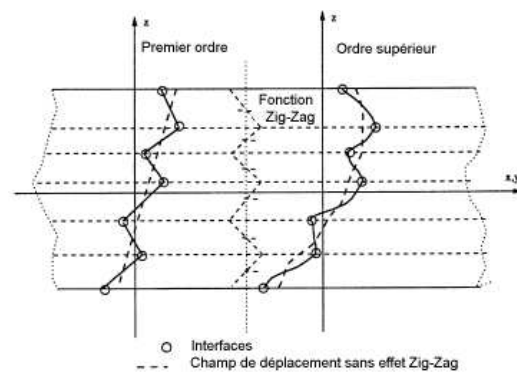
Le multicouche est subdivisée en sous structures (correspondant en fait à chaque couche ou chaque ensemble de couches). On applique à chaque sous structure une théorie du premier ordre ou un modèle d'ordre supérieur, imposant un champ de déplacement vérifiant la continuité aux interfaces entre les différentes couches. Les modèles de ce type sont relativement coûteux (l'ordre des équations de comportement dépend du nombre de couche), mais ils permettent l'obtention de résultats plus précis, notamment en ce qui concerne le calcul des contraintes hors plan.

D'une manière générale, les modèles issus de l'approche par couche peuvent être classés en deux groupes :

- Les modèles couches discrètes ou chaque couche est considérée comme une plaque en imposant les conditions de continuité en déplacements ou en contraintes aux interfaces.
- Les modèles zig-zag ou la cinématique satisfait a priori les conditions de contact est indépendante du nombre de couches (Figures. III.4)



(a) Champs de déplacements des modèles couches discrètes, approche cinématique.



(b) Champs de déplacements des modèles zig-zag, approche cinématique.

Figure III-4 : Modèles de couches : discrètes et zig-zag

III.5 Les modèles zig-zag

Afin de réduire le nombre de paramètres inconnus, Di Sciuva est le premier à proposer le modèle zig-zag du premier ordre [61]. Dans ce modèle, les déplacements membranaires sont les résultats de la superposition du champ de déplacement global d'une théorie du premier ordre et d'une fonction zig-zag (avec l'emploi de la fonction d'Heaviside). La fonction zig-zag donne une contribution des déplacements membranaires qui est continue en z mais sa dérivée première est discontinue à l'interface (voir Figure.III.5). Les déformations transversales sont donc discontinues et la continuité des contraintes de cisaillement transverse aux interfaces est assurée.

L'avantage principal du champ de déplacement des modèles zig-zag réside dans la bonne modélisation de la distorsion de la normale de la surface déformée, ainsi que dans la vérification des conditions de continuité, et ce sans augmenter pour autant le nombre et l'ordre des équations

fondamentales de la théorie du premier ordre. Le recours à des coefficients de correction pour le cisaillement transverse est évité.

En se basant sur ce concept plusieurs auteurs ont réalisé des améliorations significatives pour le modèle zig-zag [62] - [63] - [64]. L'amélioration principale est l'introduction d'une distribution non linéaire des déplacements. On superpose le champ zig-zag (linéaire par morceau) à un champ de déplacement d'ordre supérieur (souvent cubique) (voir Figure.III.6).

Les conditions de compatibilité sont satisfaites sur les surfaces supérieure et inférieure des plaques pour réduire le nombre de paramètres.

Dans les travaux de et Karama [65] et [66], la fonction zig-zag est ajoutée à la fonction "sinus" de déplacement pour raffiner les effets de cisaillement.

Afaq et al [67]. Combine le modèle exponentiel avec l'effet zig-zag pour une cinématique plus riche.

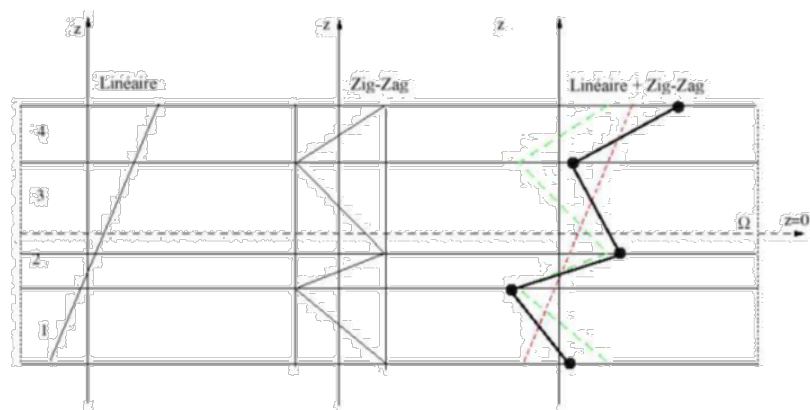


Figure III-5 : Champs de déplacements des modèles zig-zag du premier ordre.

Le modèle zig-zag assure un bon compromis entre la précision des solutions et le coût de calcul. Cependant quand l'élancement diminue, le calcul des contraintes de cisaillement transverse devient moins précis [64].

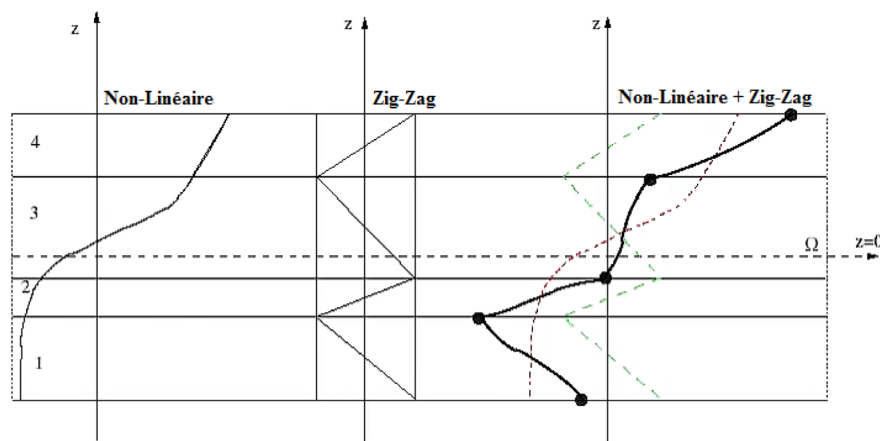


Figure III-6 : Champs de déplacements des modèles zig-zag d'ordre supérieur.

III.5.1 Modèles couches discrètes

Les modèles couches discrètes adoptent une approximation plus fine des champs suivant l'épaisseur du multicouche que les modèles de plaque d'ordre supérieur ou zig-zag puisqu'ils

proposent une cinématique par couche plutôt qu'une cinématique globale (voir Figure. III.4). En fait, avec les modèles couches discrètes, le multicouche est représenté par un ensemble de plaques (objets 2D) couplés par des efforts d'interface. Les conditions de continuité aux interfaces sont assurées. Le nombre de paramètres inconnus dépend du nombre de couche de la plaque composite. Dans les travaux de [68]- [69], on postule une cinématique du premier ordre ou d'ordre supérieur par couche. Les équations fondamentales par couche sont obtenues en utilisant le principe des travaux virtuels. Les conditions aux limites sont également données couche par couche.

III.6 Conclusion

Dans ce chapitre on a décrit les différentes théories des plaques à savoir l'approche monocouche équivalente, l'approche par couche.

Nous concluons aussi que l'approche monocouche équivalente est mieux adaptée pour les matériaux FGM car il n'y a pas de changement brusque dans les caractéristiques mécaniques contrairement aux composites conventionnels où le délaminage est un problème à ne pas écarter. Donc on a eu recours au modèle monocouche équivalent pour les plaques épaisses et les poutres courtes pour différentes théories d'ordre élevé où la prise en compte du cisaillement transversal est nécessaire pour une étude plus exacte.

Chapitre IV

Analyse de la vibration libre des plaques sandwiches FGM

IV. Analyse de la vibration libre des plaques sandwiches en FGM

IV.1 Introduction :

Dans les problèmes traités dans le cadre de la statique, on suppose que le chargement imposé (déplacement, efforts, température, passe instantanément de sa valeur initiale à sa valeur finale, faisant ainsi passer le milieu considéré d'une configuration initiale stable à une autre configuration contrainte mais stable. Les paramètres à calculer (contraintes, déformations, déplacements, réactions), sont relatifs à l'état final et par conséquent ne dépendent pas du temps.

Dans le cadre de la dynamique au contraire les chargements imposés varient dans le temps. De plus, même dans la configuration initiale le milieu peut être caractérisé par des fonctions du temps (conditions de position et de vitesse). Les paramètres à calculer sont donc également des fonctions du temps, et de nouvelles grandeurs apparaissent pour caractériser le mouvement, c'est-à-dire la variation de configuration dans le temps. Ce sont les paramètres cinématiques tels que les vitesses, les accélérations, les fréquences, qui n'existent pas dans le cas de la statique.

Le calcul des modes et fréquences propres d'une plaque est très utilisée dans l'analyse vibratoire de ces éléments de structure. Il permet de déterminer la réponse intrinsèque à la structure, c'est à dire qui ne dépend pas des sollicitations extérieures, et qui définit le spectre des fréquences et déformées (modes) qu'il faudra éviter de solliciter si l'on veut que la structure n'ait pas un comportement critique.

Notamment, la connaissance des fréquences propres permet de dimensionner les sections manière à éviter les phénomènes de résonance. Ce phénomène bien connu de résonance survient lorsque la fréquence d'une ou plusieurs sollicitations extérieures est en phase, ou très peu déphasé (proche), d'une des fréquences propres du système. On a alors, en l'absence d'amortissement, l'amplitude de la déformée qui tend rapidement vers l'infini, ce qui conduit généralement à la ruine de la structure. Par exemple, on peut citer le décret interdisant les marches militaires sur les ouvrages civils tels que les ponts, ceci suite à l'effondrement d'un pont sous les pas cadencés d'un régiment.

Lorsque le spectre des fréquences propres est connu on peut, en modifiant la géométrie ou la masse volumique des sections, décaler le spectre ou bien modifier son étendue. Dans le cadre de la vibro-acoustique par exemple, la note émise par un diapason dépend de la géométrie (longueur, section) des branches aussi bien que du matériau employé.

IV.2 Études sur la vibration des plaque FGM :

Plusieurs chercheurs ont travaillé sur la compréhension du comportement statique et dynamique des plaques à gradations fonctionnelles. Reddy [70] a effectué des analyses statiques et dynamiques non linéaires des plaques à gradient fonctionnel par la méthode des éléments finis en utilisant la solution de Navier. Vel et Batra [71] ont présenté des solutions tridimensionnelles exactes pour les vibrations libres et forcées de plaques rectangulaires à gradation fonctionnelle simplement appuyées. Huang et Shen [72] ont étudié la vibration non linéaire et la réponse dynamique des plaques FGM dans un environnement thermique. Zenkour [73] a démontré que lorsque le composant de la céramique augmente, la charge critique de flambement et la fréquence de vibration de la plaque sandwich FGM augmentent. Li et al. [74] ont effectué une analyse de

vibration libre des plaques rectangulaires sandwichs en FGM avec des bords simplement appuyés et encastres. Matsunaga [75] a présenté des analyses de vibrations libres et de flambement des plaques FGM à l'aide d'une théorie bidimensionnelle (2D) d'ordre supérieur. Li et al. [76] ont proposé une solution tridimensionnelle pour l'analyse vibratoire des plaques FGM simplement appuyées et encastrees à une seule couche dans un environnement thermique. Wang et Shen [77] ont réalisé des analyses non linéaires de vibrations, de flexion et de flambement pour une plaque sandwich avec des couches FGM dans un environnement thermique reposant sur une fondation élastique. Xiang et al. [78] ont présenté une théorie de la déformation de cisaillement de l'ordre n pour la vibration libre des plaques sandwichs composites et à gradient fonctionnel.

Shen et Zhang [79] ont effectué des analyses non linéaires des vibrations et de flexion en compression des plaques stratifiées FGM renforcées et reposant sur des fondations élastiques de Pasternak et Winkler dans différentes conditions d'environnement hygro-thermique. Neves et al. [80] ont présenté des analyses statiques, de vibration libre et de flambement de plaques isotropes et de plaques sandwichs FGM en utilisant des théories de cisaillement hyperboliques et sinusoïdales d'ordre supérieur. Shen et Wang [81] ont réalisé des analyses de vibration de petite et grande amplitude de plaques rectangulaires reposant sur des bases élastiques de Pasternak dans un environnement thermique utilisant des schémas de Voigt et Mori-Tanaka et la théorie d'ordre supérieur. Khalili et Mohammadi [82] ont présenté une théorie améliorée des plaques d'ordre supérieur pour analyser la vibration libre des plaques sandwich dans divers environnements thermiques. Xiang et al. [83] ont utilisé la méthode de collocation globale sans mailles pour l'analyse de vibrations libres de plaques sandwichs à gradient fonctionnel et un cœur homogène. Thai et Vo [84] ont examiné une nouvelle théorie de la déformation de cisaillement sinusoïdale pour la flexion, le flambement et la vibration des plaques à gradations fonctionnelles. Fazzolari et Carrera [85] ont réalisé une analyse de vibrations libres de plaques sandwichs dans un environnement thermique en utilisant la formulation trigonométrique de Ritz.

Dozio [86] a proposé une méthode de Ritz unifiée pour l'évaluation précise des fréquences naturelles des plaques sandwichs FGM épaisses et minces avec diverses conditions aux limites. Selon Dozio, les théories monocouches équivalentes donnent de bons résultats pour les plaques minces et modérément épaisses, mais ne permettent pas de prédire des résultats précis pour les plaques épaisses et sandwichs où les propriétés élastiques des faces et du cœur sont significativement différentes. Dans de tels cas, l'utilisation de théories « layerwise » devient obligatoire. Dozio [87] a également présenté une analyse de vibration libre de plaques FGM de Levy en utilisant des théories cinématiques 2D d'ordre supérieur. Naves et al. [88] ont effectué des analyses statiques, de vibrations libres et de flambement de plaques isotropes et sandwichs à gradient fonctionnel en utilisant une théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur et une technique sans maillage. Jha et al. [89] ont étudié le comportement en vibration libre d'une plaque fonctionnellement graduée avec une théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur et une théorie de déformation normale. Kamarian et al. [90] ont étudié les caractéristiques de vibration libre de plaques rectangulaires sandwichs fonctionnelles reposant sur des fondations de Pasternak. Récemment, Alibeigloo [91] a présenté des solutions de vibration libres tridimensionnelles pour des panneaux cylindriques sandwichs avec un cœur fonctionnellement gradué. Thai et al. [92] ont étudié la vibration libre, la flexion et le gauchissement d'une plaque sandwich FGM rectangulaire avec un cœur en utilisant une nouvelle théorie de déformation de cisaillement du premier ordre. Nguyen [93] a proposé une théorie de

déformation de cisaillement d'ordre supérieur pour la flexion, le flambement critique et les fréquences naturelles des plaques fonctionnellement graduées. Fazzolari et Carrera [94] ont étudié le comportement de vibration forcée non linéaire de plaques rectangulaires épaisses en FGM en considérant des théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur.

Tous les travaux cités ci-dessus ont utilisé des formulations analytiques, qui impliquent des procédures de solution encombrantes. De plus, l'application de conditions aux limites est une tâche difficile dans les méthodes analytiques, par conséquent les méthodes comme la méthode des éléments finis (MEF) sont devenues plus populaires parmi les chercheurs pour étudier l'effet de différentes conditions aux limites. Talha et Singh [95] ont examiné le comportement de vibration libre des plaques graduées fonctionnellement en utilisant une formulation d'éléments finis. C. Natrajan et Manickam [96] ont étudié le comportement de flexion et de vibration libre d'une plaque sandwich FGM en utilisant des différentes théories d'ordres élevés. Thai et Choi [97] ont réalisé des analyses de flexion et de vibration de plaques à gradient fonctionnel en utilisant quatre nouvelles théories de déformation de cisaillement.

Le calcul de modes propres est quant à lui notamment utilisé dans le domaine de l'analyse modale qui consiste à exprimer le déplacement quelconque d'une structure dans la base (infinie dans le cas des milieux continus) formée par ses vecteurs propres. C'est une technique couramment employée au niveau analytique aussi bien que dans les codes de calculs par éléments finis par exemple, qui permet de réduire considérablement la taille du système à résoudre. La connaissance de cette base modale permet également d'étudier la stabilité d'une structure soumise à une excitation proportionnelle à un ou plusieurs modes propres.

Dans cette partie, nous allons étudier la vibration libre de plaques sandwichs en FGM, en utilisant la théorie à ordre élevé en exponentielles (ESDPT).

Dans premier temps, on détermine le champ de déplacement et le tenseur de déformation. Et après, les équations de mouvement en appliquant le principe de Hamilton. Et enfin on trouve les solutions mathématiques, les fréquences naturelles et modes propres de la structure sandwich FGM en se basant sur l'algorithme à la fin de ce chapitre.

IV.3 Formulation théorique

Le modèle mathématique a été construit pour résoudre une structure sandwich composée de trois couches. La structure considérée à une épaisseur totale h . Le système de coordonnées cartésiennes rectangulaires x, y, z , à la surface $z=0$, coïncidant avec la surface médiane de la structure. Les faces supérieures et inférieures de la poutre sont à $\pm h/2$. Les positions verticales du bas, des deux interfaces et du haut sont désignées par $h=-h/2$ et $h=h/2$, respectivement. Deux types de sandwichs sont utilisés : les sandwichs FGM Type-A qui ont des propriétés matérielles des couches de surface (peaux) varient dans la direction de l'épaisseur selon une fonction de la loi de puissance (P-FGM) et un cœur homogène en céramique, et les structures sandwichs FGM Type-B qui ont des propriétés matérielles des couches de surface homogènes (métal/céramique) et un cœur en P-FGM (**Figure IV.1**).

IV.3.1 Plaques sandwichs en FGM de type A

La plaque sandwich est composée de trois couches, un cœur isotrope et deux couches de faces en P -FGM. Les couches de faces sont graduées du métal à la céramique tandis que le cœur est en céramique. La fraction volumique varie à travers l'épaisseur comme suit :

$$\begin{aligned} V^{(1)}(z) &= \left(\frac{z - h_0}{h_1 - h_0}\right)^k \quad h_0 \leq z \leq h_1 \\ V^{(2)}(z) &= 1, \quad h_1 \leq z \leq h_2 \\ V^{(3)}(z) &= \left(\frac{z - h_3}{h_2 - h_3}\right)^k \quad h_2 \leq z \leq h_3 \end{aligned} \quad (IV.1)$$

Où la valeur k est l'exposant de la fraction volumique, qui prend des valeurs supérieures ou égale à zéro. La valeur de k est égale à zéro représente une plaque entièrement en céramique.

IV.3.2 Plaques sandwichs en FGM de type B

Dans ce type de plaques sandwichs, la couche inférieure est entièrement en métal tandis que la couche supérieure est en céramique. Le cœur est gradué du métal à la céramique.

$$\begin{aligned} V^{(1)}(z) &= 0, \quad h_0 \leq z \leq h_1 \\ V^{(2)}(z) &= \left(\frac{z - h_1}{h_2 - h_1}\right)^k \quad h_1 \leq z \leq h_2 \\ V^{(3)}(z) &= 1, \quad h_2 \leq z \leq h_3 \end{aligned} \quad (IV.2)$$

Les propriétés matérielles effectives pour chaque couche telle que le module de Young, et le coefficient de dilatation thermique peuvent être exprimées comme suit

$$P^{(n)}(z) = V^{(n)}(z)P_b + [1 - V^{(n)}(z)]P_t \quad (IV.3)$$

Où k est l'indice de la fraction volumique et $P^{(n)}$ est la propriété matérielle effective de la couche n ($n = 1, 2, 3$). P_b et P_t est désigné la propriété de la face inférieure et la face supérieure, respectivement.

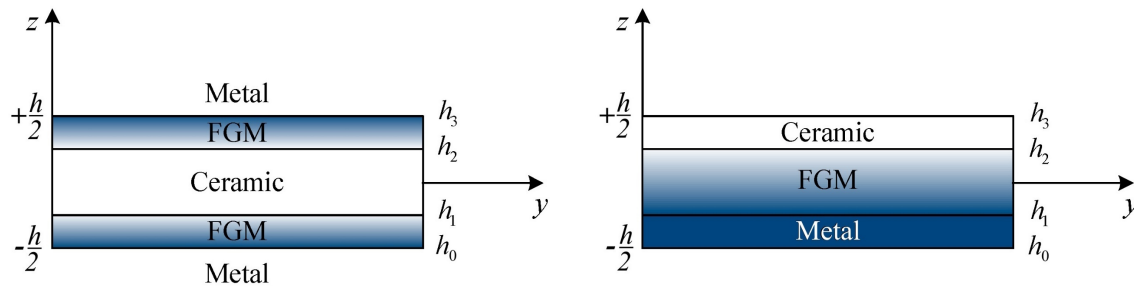


Figure IV-1 : Configuration de la plaque sandwich à gradient de propriétés (FGM).

IV.4 Description du problème :

Considérons une plaque rectangulaire en FGM de longueur a et de largeur b et épaisseur h (Figure IV.1). On suppose que les propriétés matérielles (module de Young et le coefficient de dilatation thermique) de la plaque varient sans interruption dans la direction de l'épaisseur selon une simple distribution de loi de puissance en fonction de la fraction volumique des matériaux constituants.

La plaque est appuyée sur quatre bords définis dans le système (x, y, z) . Le module d'élasticité E , le coefficient de dilatation thermique α et le ν du coefficient de Poisson sont assumés par [83,84].

$$\begin{aligned}
 E(z) &= E_m + E_{cm} \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p, \\
 E_{cm} &= E_c - E_m, \\
 \alpha(z) &= \alpha_m + \alpha_{cm} \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p, \\
 \alpha_{cm} &= \alpha_c - \alpha_m, \\
 \nu &= \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)
 \end{aligned} \tag{IV.4}$$

Où les indices " c " et " m " se rapportent à la céramique et au métal, respectivement et E_m et α_m définissent le module élastique (le module d'Young) et le coefficient de dilatation thermique de métal ; E_c et α_c indiquent le module d'Young et le coefficient de dilatation thermique de la céramique, et p l'indice de fraction de volume.

La valeur de p égale à zéro représente entièrement la plaque en céramique.

L'hypothèse ci-dessus de loi de puissance se reflète une règle simple des mélanges employés pour obtenir les propriétés efficaces de la plaque du céramique-métal. La loi des mélanges s'applique seulement à la direction d'épaisseur.

La densité de la plaque varie selon la loi de puissance, et l'exposant peut être varié pour obtenir différente distribution des matériaux composants par épaisseur de plaque.

Notez que la fraction de volume du métal est haut près de la surface inférieure de la plaque, et cela de la haute en céramique près de la surface supérieure.

En outre, (Eq.IV.4) indique que la surface inférieure de la plaque ($z = -h/2$) est riche en métal tandis que la surface supérieure ($z = h/2$) de la plaque est riche en céramique.

Pour la simplicité, le ν est constant assumé à travers l'épaisseur de la plaque.

IV.5 Champ de déplacement et équations constitutives :

Les déplacements d'un point matériel situé à (x, y, z) dans la plaque FGM pourrait mieux être illustré comme :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + \psi(z) \varphi_x \\ v(x, y, z) = v_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + \psi(z) \varphi_y \\ w(x, y, z) = w_0 \end{cases} \quad (IV. 5)$$

u_0, v_0 et w_0 sont les déplacements du milieu de la surface le long des axes x, y et z , respectivement, et φ_x et φ_y sont les rotations au autour des axes x, y pour expliquer l'effet du cisaillement transversal. Les coefficients de φ_x ou φ_y qui est donné par le $\Psi(z)$ devrait être en fonction de z . Tous les déplacements généralisés ($u, v, w, \varphi_x, \varphi_y$) sont des fonctions de (x, y) .

Dans cette étude, une théorie des plaques de déformation de cisaillement exponentielle (ESDPT) est utilisée pour les développements théoriques :

$$\psi(z) = z - ze^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (IV. 6)$$

La théorie présentée est variationnelle, elle n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description correcte de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres, Figure IV.2.

Le déplacement de la théorie classique de la plaque mince (CPT) est facilement obtenu par $\Psi(z) = 0$. Les déplacements de la théorie de déformation de cisaillement de premier ordre de la plaque (FSDPT) sont obtenus par $\Psi(z) = z$.

Les déplacements de la théorie de déformation de cisaillement de la plaque d'ordre élevé (Reddy 2000) sont obtenus par $\Psi(z) = z(1 - 4z^2/3h^2)$.

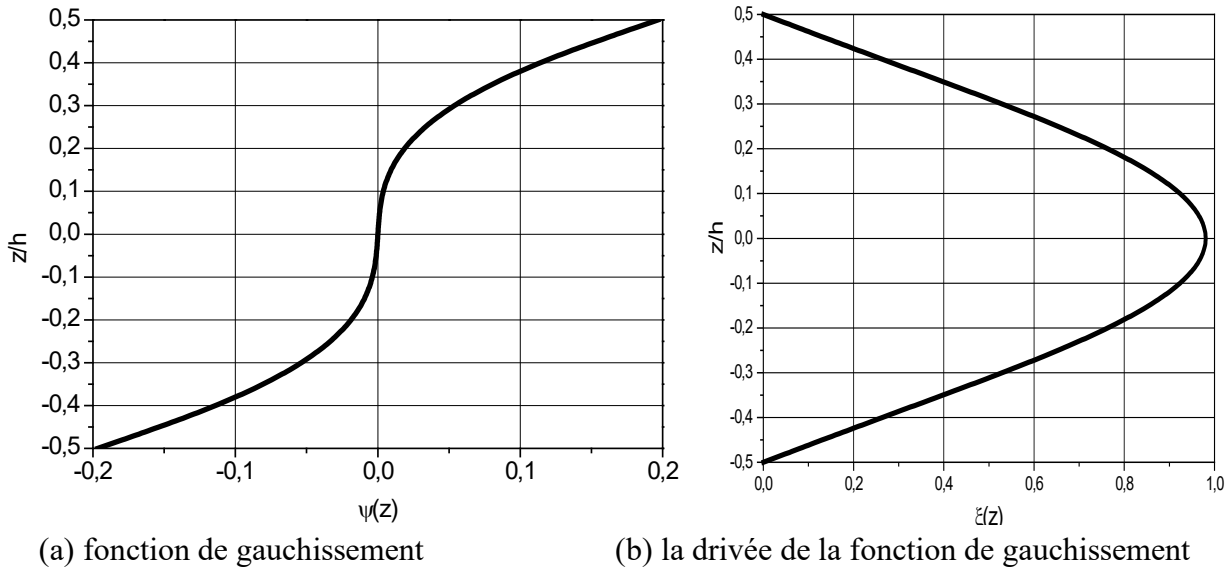


Figure IV-2 : Variation de la présente fonction de gauchissement à travers l'épaisseur d'une plaque rectangulaire en FGM [98].

En outre, les théories de plaque de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDPT) en correspondance avec le nombre d'inconnues sont montrées dans le Tab. IV.2.

Les équations non linéaires déplacement-déformation de Von Karman sont formulées comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_{xx} \\ k_{yy} \\ k_{xy} \end{Bmatrix} + \psi(z) \begin{Bmatrix} \eta_{xx} \\ \eta_{yy} \\ \eta_{xy} \end{Bmatrix} \quad (IV.7)$$

$$\varepsilon_{zz} = 0, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \psi(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad (IV.8)$$

Avec :

$$\varepsilon_{xx}^0 = u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2, \quad \varepsilon_{yy}^0 = v_{,y} + \frac{1}{2} w_{,y}^2,$$

$$\gamma_{yz}^0 = \varphi_y, \quad \gamma_{xz}^0 = \varphi_x, \quad \gamma_{xy}^0 = v_{,x} + u_{,y} + w_{,x} w_{,y}$$

$$k_{xx} = -w_{,xx}, \quad k_{yy} = -w_{,yy}, \quad k_{xy} = -2w_{,xy}$$

$$\eta_{xx} = \varphi_{x,x}, \quad \eta_{yy} = \varphi_{y,y}, \quad \eta_{xy} = \varphi_{y,x} + \varphi_{x,y}$$

Tableau IV-1. Forme de fonction de déformation de cisaillement définie par différents chercheurs :

Modèle	Théorie	Fonction de cisaillement transverse	Nombre d'inconnues
CPT	La théorie classique des plaques	$\psi(z) = 0$	3
FSDPT	La théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (Reissner, [99])	$\psi(z) = z$	5
TSDPT	la théorie de déformation de cisaillement parabolique (Reddy, [100])	$\psi(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$	5
SSDPT	la théorie de déformation de cisaillement Trigonométrique (Touratier, Zenkour [101], [102])	$\psi(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$	5
ESDPT	la théorie de déformation de cisaillement Exponentiel (Afaq et al [53])	$\psi(z) = z e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}$	5
Présent (ESDPT)	La théorie de déformation de cisaillement Exponentiel [98]	$\psi(z) = z - z e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}$	5

Les relations constitutives linéaires de la plaque sandwich peuvent être écrites comme :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^{(n)} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (IV.9a)$$

Où :

$$Q_{11}^{(n)} = Q_{22}^{(n)} = \frac{E^{(n)}(Z)}{1-\nu^2}, \quad Q_{12}^{(n)} = \nu Q_{11}^{(n)}, \quad Q_{44}^{(n)} = Q_{55}^{(n)} = Q_{66}^{(n)} = \frac{E^{(n)}(Z)}{2(1+\nu)} \quad (IV.9b)$$

IV.5.1 Efforts résultants :

Les résultantes d'effort et de moment (Figure IV.5) de la plaque FGM peuvent être obtenues en intégrant (Eq. IV.19) par rapport à l'épaisseur, et sont écrits comme [74] :

$$N = \int_{h^-}^{h^+} \sigma dz$$

$$M = \int_{h^-}^{h^+} \sigma z dz$$

$$S = \int_{h^-}^{h^+} \sigma \Psi(z) dz$$

D'où N_x, N_y , et N_{xy} et M_x, M_y et M_{xy} sont les composantes de base des efforts et des moments résultants; S_x, S_y sont les efforts supplémentaires couplés liés aux effets de cisaillement transversaux ; et R_{xz} et R_{yz} sont des résultantes transversales d'effort de cisaillement. Les efforts résultants dans la plaque sandwich en FGM sont définis comme :

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \\ \{S\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] & [C] \\ [B] & [D] & [F] \\ [C] & [F] & [H] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon^0\} \\ \{\varepsilon^1\} \\ \{\varepsilon^2\} \end{Bmatrix}, \quad (IV.10a)$$

$$\begin{Bmatrix} R_{yz} \\ R_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{44} & 0 \\ 0 & J_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{yz}^0 \\ \varepsilon_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad (IV.10b)$$

Avec :

$$\{\beta\}^{(n)} = \begin{Bmatrix} (Q_{11} + Q_{12})\alpha \\ (Q_{12} + Q_{22})\alpha \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (IV.11)$$

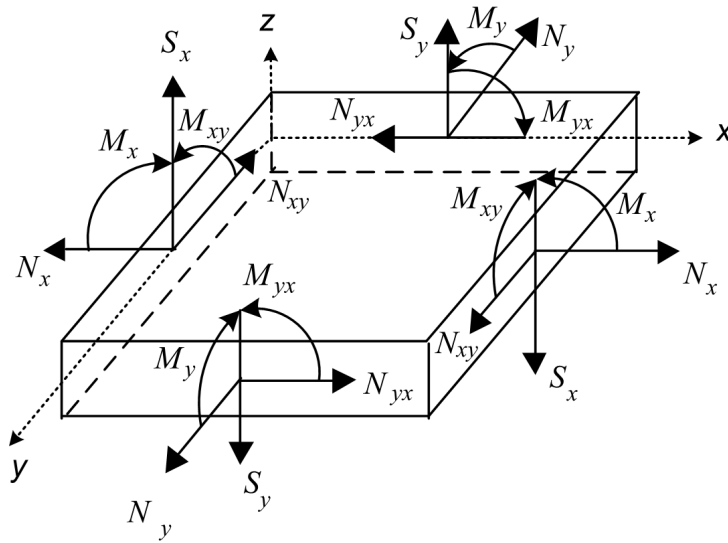


Figure IV-3. Forces et Moments par unités de longueur [98].

Dans la matrice de rigidité, les coefficients $A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, C_{ij}, F_{ij}, H_{ij}$ sont définies par :

$$\{A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, C_{ij}, F_{ij}, H_{ij}\} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} Q_{ij}^{(n)} \{1, z, z^2, \psi(z), z\psi(z), \psi(z)^2\} dz, \quad (i, j = 1, 2, 6)$$

$$J_{ii} = \sum_{n=1}^n \int_{h_{n-1}}^{h_n} Q_{ii}^{(n)} \left[\frac{d\psi(z)}{dz} \right]^2 dz, \quad (i = 4, 5) \quad (IV.12)$$

IV.6 Équations du mouvement :

Le principe d'énergie d'Hamilton est utilisé ici pour obtenir les équations de mouvement appropriées pour le champ de déplacement et les équations constitutives, Le principe peut être énoncé Sous forme analytique :

$$0 = \int_0^t (\delta U - \delta T) dt \quad (IV.13)$$

Où δU est la variation de l'énergie de déformation et δT est la variation de l'énergie cinétique de la plaque FGM.

IV.6.1 L'énergie de déformation :

L'énergie de déformation de la plaque peut être écrite comme :

$$U = \frac{1}{2} \int_V [\sigma_{xx}^{(n)} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}^{(n)} \varepsilon_{yy} + \sigma_{xy}^{(n)} \gamma_{xy} + \sigma_{yz}^{(n)} \gamma_{yz} + \sigma_{xz}^{(n)} \gamma_{xz}] dV \quad (IV.14)$$

En intégrant par partie suivant l'épaisseur de la plaque sandwich, l'énergie de déformation de la plaque peut être écrite comme :

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [N_{xx} \delta \varepsilon_{xx}^0 + N_{yy} \delta \varepsilon_{yy}^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_{xx} \delta \varepsilon_{xx}^1 + M_{yy} \delta \varepsilon_{yy}^1 + M_{xy} \delta \gamma_{xy}^1 + P_{xx} \delta \varepsilon_{xx}^2 + P_{yy} \delta \varepsilon_{yy}^2 + P_{xy} \delta \gamma_{xy}^2 + R_{yz} \delta \gamma_{yz}^0 + R_{xz} \delta \gamma_{xz}^0] dx dy \quad (IV.15)$$

IV.6.2 Energie cinétique :

L'énergie cinétique de la plaque en n'importe instant peut être exprimé comme :

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \rho(z) \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right) dA dz \quad (IV.16)$$

IV.6.3 Équations du mouvement :

Les équations du mouvement sont obtenues en utilisant le principe d'Hamilton comme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - I_1 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2} + I_3 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} &= I_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} - I_1 \frac{\partial^3 w_0}{\partial y \partial t^2} + I_3 \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} &= I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + I_1 \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial t^2} \right) \\ &\quad - I_2 \left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2 \partial t^2} \right) + I_4 \left(\frac{\partial^3 \phi_x}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 \phi_y}{\partial y \partial t^2} \right) \end{aligned} \quad (IV.17)$$

$$\frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} - R_{xz} = I_3 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - I_4 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2} + I_5 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial P_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yy}}{\partial y} - R_{yz} = I_3 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} - I_4 \frac{\partial^3 w_0}{\partial y \partial t^2} + I_5 \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2}$$

IV.6.4 Solution analytique (Méthode de Navier):

Pour une solution analytique des équations (eqs. IV.17). La méthode de Navier est utilisée pour une plaque sandwich rectangulaire en FGM avec des conditions de frontière spécifiques (appuyée- appuyée).

Les fonctions des déplacements qui satisfont les équations des conditions aux limites sont développées en séries de Fourier comme suit :

$$\{u_0, \phi_x\} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \{U_{mn}, X_{mn}\} \cos(\lambda x) \sin(\beta y) e^{i\omega t}$$

$$\{v_0, \phi_y\} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \{V_{mn}, Y_{mn}\} \sin(\lambda x) \cos(\beta y) e^{i\omega t} \quad (IV.18)$$

$$w_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin(\lambda x) \sin(\beta y) e^{i\omega t}$$

Où $U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, X_{mn}, Y_{mn}$ sont des paramètres arbitraires à déterminer. $\lambda = m\pi/L$ et $\beta = n\pi/L$.

IV.6.5 Problème aux valeurs propres

Substituant les équations (IV.18) dans les équations de mouvement (IV.17) nous obtenons les équations, ci-dessous. Des valeurs propres pour n'importe quelle valeur fixe de m et n. pour le problème de vibration libre. Les équations du mouvement deviennent comme la forme :

$$([L] - \omega^2 [M]) \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \\ Y_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (IV.19)$$

Où la matrice $[L]$ et $[M]$ sont la matrice de rigidité et de masse, respectivement.

$$[L] = \begin{Bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} & L_{15} \\ L_{12} & L_{22} & L_{23} & L_{24} & L_{25} \\ L_{13} & L_{23} & L_{33} & L_{34} & L_{35} \\ L_{14} & L_{24} & L_{34} & L_{44} & L_{45} \\ L_{15} & L_{25} & L_{35} & L_{45} & L_{55} \end{Bmatrix}, [M] = \begin{Bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} & M_{15} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} & M_{25} \\ M_{13} & M_{23} & M_{33} & M_{34} & M_{35} \\ M_{14} & M_{24} & M_{34} & M_{44} & M_{45} \\ M_{15} & M_{25} & M_{35} & M_{45} & M_{55} \end{Bmatrix} \quad (IV.20)$$

Les éléments de la matrice $[L]$ et $[M]$ sont donnés comme

$$\begin{aligned}
L_{11} &= -[2\lambda^2 + (1-u)\mu^2]\bar{A}, & L_{12} &= -(1+u)\lambda\mu\bar{A}, \\
L_{13} &= 2\lambda(\lambda^2 + \mu^2)\bar{B}, & L_{14} &= -[2\lambda^2 + (1-u)\mu^2]\bar{C}, \\
L_{15} &= -(1+u)\lambda\mu\bar{C}, & L_{22} &= -[(1-u)\lambda^2 + 2\mu^2]\bar{A}, \\
L_{23} &= 2\mu(\lambda^2 + \mu^2)\bar{B}, & L_{24} &= L_{15}, \\
L_{25} &= -[(1-u)\lambda^2 + 2\mu^2]\bar{C}, & L_{33} &= -2(\lambda^2 + \mu^2)^2\bar{D}, \\
L_{34} &= 2\lambda(\lambda^2 + \mu^2)\bar{F}, & L_{35} &= 2\mu(\lambda^2 + \mu^2)\bar{F}, \\
L_{44} &= -[2\lambda^2 + (1-v)\mu^2]\bar{H} - 2\bar{J}, & L_{45} &= -(1+v)\lambda\mu\bar{H}, \\
L_{55} &= -[(1-v)\lambda^2 + 2\mu^2]\bar{H} - 2\bar{J}
\end{aligned} \tag{IV.21}$$

Où :

$$\Re_{11} = \Re_{22} = \bar{\Re}, \Re_{12} = v\bar{\Re}, \Re_{66} = \frac{1-v}{2}\bar{\Re}, J_{44} = J_{55} = \bar{J}, (\Re = A, B, C, D, F, H) \tag{IV.22}$$

Et :

$$\begin{aligned}
M_{11} &= I_0, & M_{12} &= 0, & M_{13} &= -\lambda I_1, & M_{14} &= I_3, & M_{15} &= 0, & M_{22} &= I_0, \\
M_{23} &= -\beta I_1, & M_{14} &= 0, & M_{15} &= I_3, & M_{33} &= I_0 - I_2(\lambda^2 + \beta^2), & M_{34} &= -\lambda I_4, \\
M_{35} &= -\beta I_4, & M_{44} &= I_5, & M_{45} &= 0, & M_{55} &= I_5
\end{aligned} \tag{IV.23}$$

Pour la théorie classique (CPT) :

$$L_{14} = L_{15} = L_{24} = L_{25} = L_{34} = L_{35} = L_{44} = L_{45} = L_{55} = 0$$

$$\text{et } M_{14} = M_{15} = M_{24} = M_{25} = M_{34} = M_{35} = M_{44} = M_{45} = M_{55} = 0$$

Le paramètre de fréquence naturelle adimensionnel des plaques FGM est défini comme :

$$\bar{\omega} = \frac{\omega a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_0}{E_0}} \tag{IV.24}$$

Où $\rho_0 = 1 \text{ kg/m}^3$ et $E_0 = 1 \text{ GPa}$.

IV.6.6 Organigramme des principales étapes de programme du calcul :

L'organigramme suivant résume les étapes principales employées dans le programme Matlab pour la résolution des équations de mouvements de plaque P-FGM avec porosité de type A et de type B simplement appuyée basée sur la méthode de Navier Figure IV-4) :

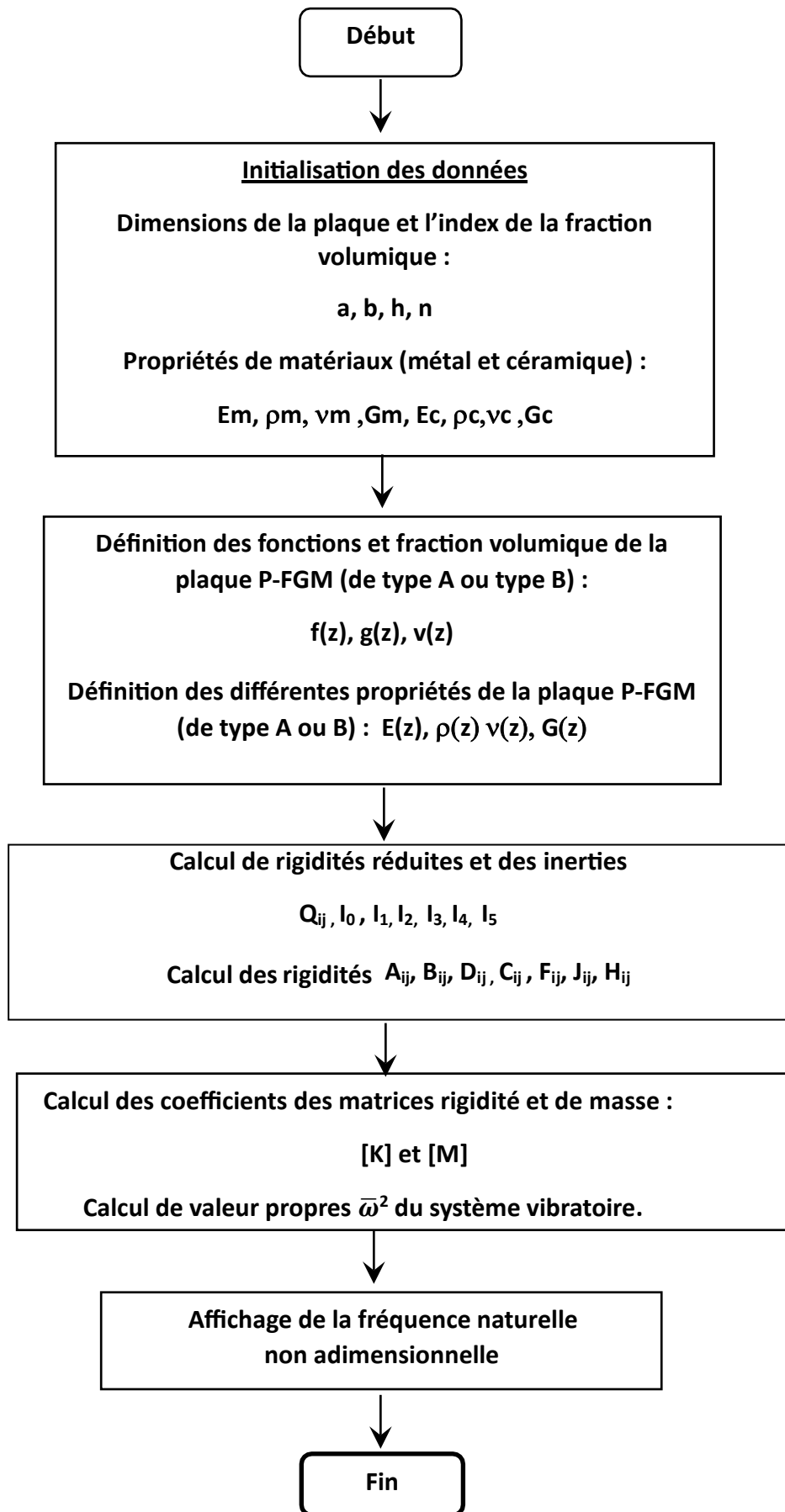


Figure IV-4 : Organigramme du programme de calcul.

IV.7 Conclusion :

Dans cette partie, nous avons analysés les vibrations fibres des plaques sandwichs fonctionnellement graduées et simplement appuyées en utilisant la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé basée sur une fonction exponentielle (ESDPT). La présente théorie prend en compte l'effet de cisaillement transversal et donnent une distribution correcte des contraintes de cisaillement transversales suivant l'épaisseur de la plaque.

Chapitre V

Validation et discussions des résultats

V. Validation et discussions des résultats

V.1 Introduction :

L'intérêt de ce chapitre est de présenter les résultats numériques pour valider le modèle proposé (Ch. IV) et vérifier l'exactitude de la présente théorie (la théorie de déformation de cisaillement en fonction de gauchissement exponentielle ESDPT) qui permet de prendre en compte le cisaillement transverse dans l'étude et l'analyse de la vibration libre des plaques épaisses en FGM simplement appuyée.

Les différents exemples numériques sont présentés et discutés pour vérifier l'exactitude et l'efficacité de présente théorie pour prédire la fréquence naturelle des plaques en matériaux à gradient de propriétés (FGM) simplement appuyées.

V.2 Configuration géométrique de la plaque sandwich FGM

Considérons une plaque sandwich en matériau à gradient de propriétés composée de trois couches microscopiquement hétérogènes ayant les dimensions représentées dans la figure IV.1. Les faces (supérieure et inférieure) de la plaque sont à $z = \pm h/2$, et les bords de la plaque sont parallèles aux axes x et y .

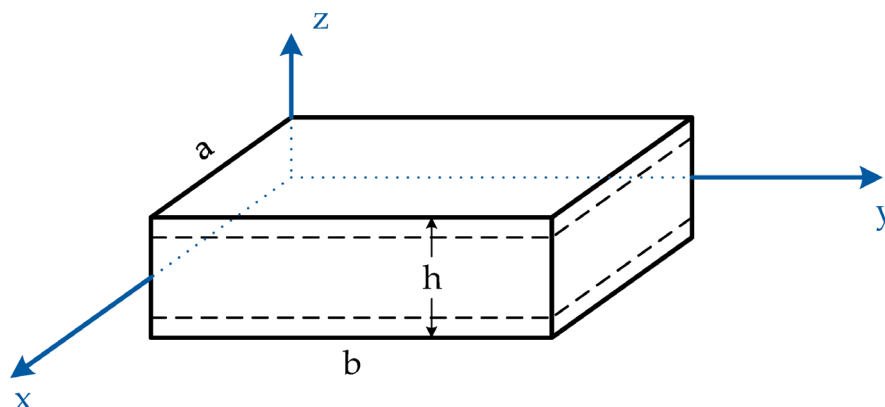


Figure V-1 : Géométrie d'une plaque sandwich en FGM dans le système de coordonnées cartésiennes rectangulaires.

La plaque est composée de trois couches, à savoir, « couche 1 », « couche 2 » et « couche 3 » de la partie basse à la partie haute. Les ordonnées verticales de la surface inférieure, des deux interfaces limitant la couche centrale, et de la surface supérieure de la plaque sont respectivement, $h_0 = -h/2, h_1, h_2, h_3 = +h/2$.

Le rapport d'épaisseur de chaque couche de bas en haut est désigné par la combinaison de trois chiffres, à savoir : (1-1-1), (1-2-1), (2-2-1).

Le type de plaques sandwichs utilisés dans notre étude est illustré dans la figure IV.2.

La fraction volumique $V(n)$ à travers l'épaisseur des couches (supérieure et inférieure) de la plaque sandwich suit une simple fonction de la loi de puissance, tandis qu'elle égale l'unité dans la couche centrale de la plaque.

La fraction volumique est un paramètre matériel qui donne le profil de variation du matériau à travers l'épaisseur des couches de la plaque, qui prend des valeurs supérieures ou égales à zéro. k est appelé aussi l'indice matériel. La couche centrale de la plaque est indépendante de la

valeur k puisque cette couche est entièrement en céramique. Cependant, lorsque la valeur k prend la valeur de zéro, on obtient une plaque entièrement en céramique. La plaque sandwich est symétrique par rapport au plan moyen ($z=0$). La figure V.2 montre la variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur pour les différentes configurations des plaques sandwiches de notre étude avec $k = 0.01, 0.2, 0.5, 2, 5$.

V.2.1 Plaque sandwich en P-FGM (1-1-1)

Dans ce type de sandwich, la plaque est symétrique et se compose de trois couches d'épaisseurs égales (figure VI.3.b). Dans ce cas, nous avons :

$$h_1 = -\frac{h}{6} ; h_2 = \frac{h}{6} \quad (V.1)$$

V.2.2 Plaque sandwich en P-FGM (1-2-1)

Comme il est montré dans la figure IV.3.c, la plaque est symétrique. On y trouve l'épaisseur de la couche centrale égale à la somme des épaisseurs des deux couches (supérieure et inférieure). Ainsi :

$$h_1 = -\frac{h}{4} ; h_2 = \frac{h}{4} \quad (V.2)$$

V.2.3 Plaque sandwich en FGM (2-2-1)

Dans ce cas, la plaque est asymétrique, l'épaisseur de la couche centrale est identique à celle de la couche inférieure, alors qu'elle est le double de la couche supérieure (Figure IV.3.e). Nous avons :

$$h_1 = -\frac{h}{10} ; h_2 = \frac{3h}{10} \quad (V.3)$$

Delale et Erdogan [11] ont indiqué que l'effet du coefficient de Poisson sur la déformation est beaucoup moins important que celui du module de Young. Alors, on suppose que le coefficient de Poisson de la plaque sandwich est constant dans tous points de la plaque. Cependant, le module d'élasticité $E(z)$ et le coefficient de dilatation thermique $\alpha(z)$ à tout point de la plaque sont donnés par la loi de mélange [106] :

$$P^{(n)}(z) = P_m + (P_c - P_m)V^{(n)} \quad (IV.4)$$

$P^{(n)}$ est la propriété matérielle effective de la couche n de la plaque sandwich en FGM.

P_m et P_c sont respectivement les propriétés correspondantes au métal et au céramique de la plaque sandwich.

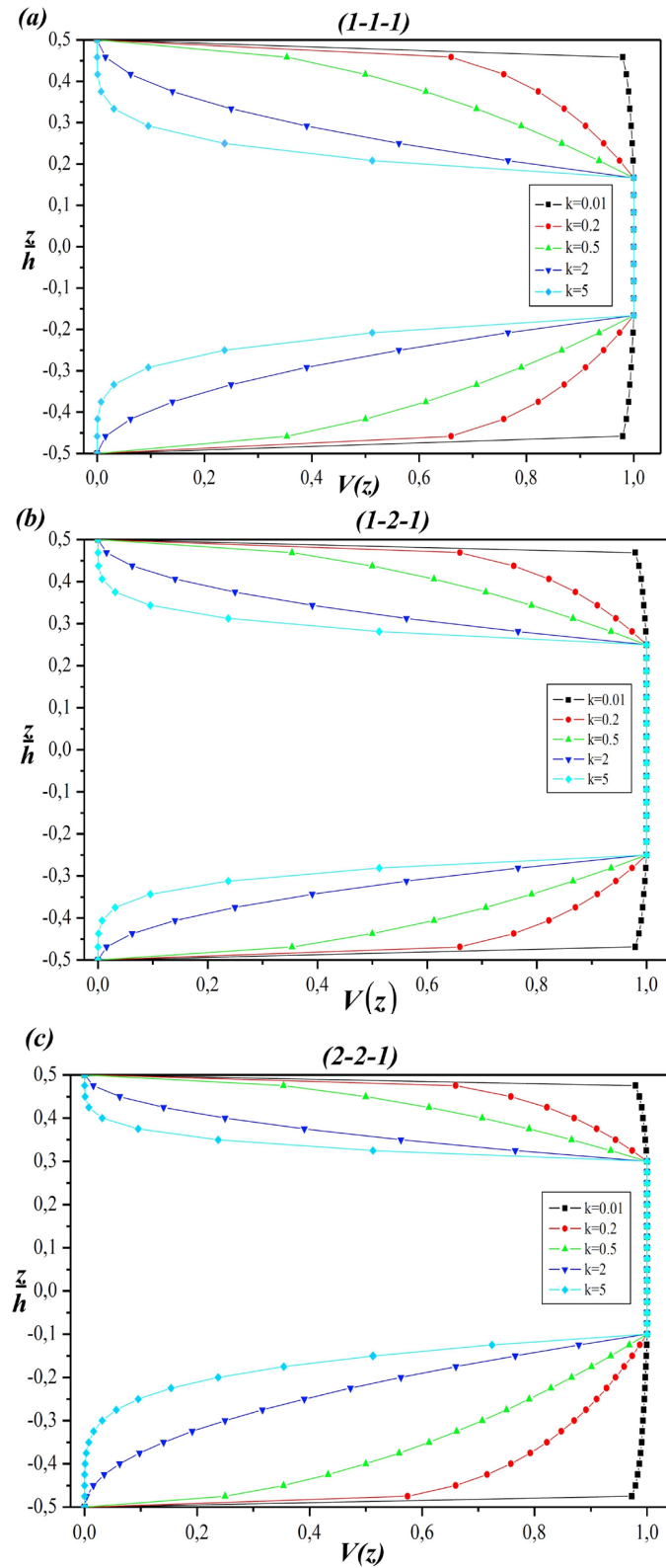


Figure V-2 : Variation de la fonction de la fraction volumique à travers l'épaisseur de la plaque « Type A » pour les différentes valeurs de k et les différentes configurations de plaques sandwiches : (a) Plaque sandwich en FGM (1-1-1), (b) Plaque sandwich en FGM (1-2-1) et (c) Plaque sandwich en FGM (2-2-1).

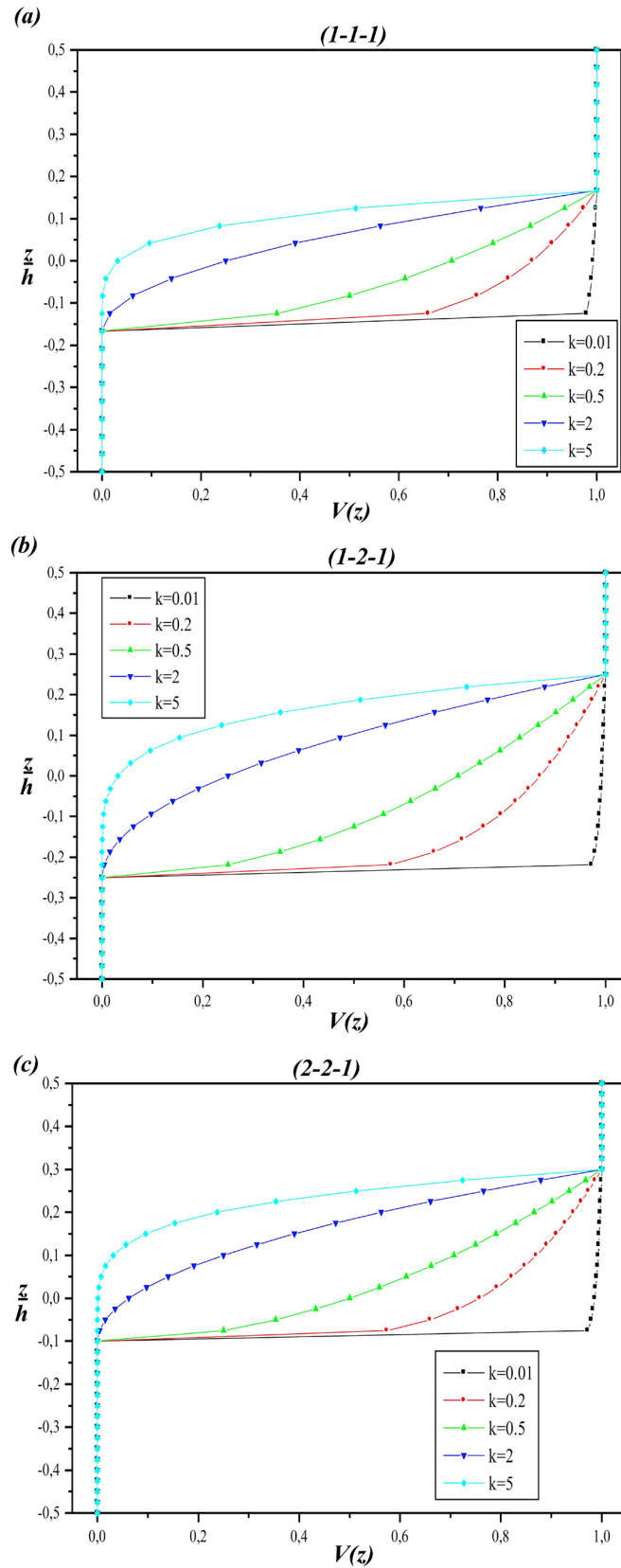


Figure V-3. Variation de la fonction de la fraction volumique à travers l'épaisseur de la plaque « Type B » pour les différentes valeurs de k et les différentes configurations de plaques sandwiches : (a) Plaque sandwich en FGM (1-1-1), (b) Plaque sandwich en FGM (1-2-1) et (c) Plaque sandwich en FGM (2-2-1).

V.3 Validation de la présente étude :

Pour la validation et confrontation de la présente étude avec les études extraites de la littérature, un modèle de configurations de référence des plaques sandwich P-FGM en vibration libre. Les références suivantes sont utilisées Zenkour [73], Li et al. [105] et autre [104-111]. La configuration du matériau utilisé de l'ensemble des théories de comparaison est résumée dans le tableau suivant :

Matériau :	Al	Al ₂ O ₃
Module de Young (GPa)	70	380
Coefficient de Poisson	0.3	0.3
Densité massique (kg/m ³)	2 707	3 800

La théorie de déformation de cisaillement exponentielle (ESDT) est comparée dans le Tableau V-1 avec les différentes théories de plaques telles que ; la théorie classique des plaques (CLPT), la théorie de la plaque de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDPT) et la théorie de la plaque de déformation de cisaillement d'ordre supérieur de Reddy (TSDPT), L'indice de puissance est fixé à $k=0.5, 1, 5, 10$. Les résultats numériques pertinents [73] et autres [104-111] sont également indiqués à des fins de comparaison. En général, on constate une bonne concordance entre les résultats. Il est à noter que Zenkour [73], Li et al. [105] et Natarajan et al. [104], utilisent des théories en référence ont cinq variables.

V.4 Configuration matérielle de la plaque sandwich FGM

La plaque sandwich en FGM étudiée est simplement appuyée, composée d'un mélange de métal et de céramique. La combinaison des matériaux se compose d'alliage de titane et de zircone (Ti-6Al-4V / ZrO₂). Le module de Young pour l'alliage de titane est $E_m = 66,2$ GPa et pour la Zircone est $E_c = 244,27$ GPa. Le coefficient de Poisson est constant ($\nu=0.3$). Le facteur de correction de cisaillement pour FPT est égal à $5/6$.

V.5 Etude paramétrique :

La théorie de déformation de cisaillement exponentielle (ESDT) est comparée dans le Tableau V-1 avec les différentes théories de plaques :

- Les valeurs de la fréquence fondamentale adimensionnelle $\bar{\omega}$ obtenues sur la base de la théorie des plaques classique (CLPT) que les valeurs obtenues sur la base d'autres théories.
- On peut observer que la différence entre les théories de la plaque de déformation de cisaillement (ESDPT) et la théorie classique (CLPT) diminue quand le rapport l'épaisseur a/h augmente ou le rapport a/b diminue parce que la plaque devient mince ou longue.

On voit que première fréquence naturelle sans dimension $\bar{\omega}$ des plaques sandwich FGM carrées pour $k = 0,5$ est supérieure à celle pour $k = 1$ dans le cas des plaques de type-A.

Tableau V-1. Fréquence fondamentale $\bar{\omega}$ adimensionnelle d'une plaque sandwich P-FGM en fonction d'une plaque carrée type A et du rapport ($a/h = 10$).

k	Theories	Schema (1-1-1)	Schema (2-2-1)	Schema (1-2-1)
0.5	CPT [73]	1.54903	1.58374	1.60722
	FSDPT [73]	1.51695	1.55001	1.57274
	TSDPT [73]	1.51922	1.55199	1.57451
	Hadji [111]	1.51921	1.54710	1.57451
	Zenkour [110]	1.519 3	1.552 0	1.574 5
	Li et al. [74]	1.521 3	1.549 3	1.576 6
	Thai et al. [107]	1.526 4	1.554 3	1.580 6
	Li et al. [105]	1.519 2	1.547 1	1.574 5
	Present (ESDPT)	1.515419	1.528597	1.572457
1	CPT [73]	1.37521	1.43247	1.46497
	FSDPT [73]	1.35072	1.40555	1.43722
	TSDPT [73]	1.35333	1.40789	1.43934
	Hadji [111]	1.35332	1.39557	1.43933
	Zenkour [110]	1.353 4	1.407 9	1.439 3
	Li et al. [74]	1.355 2	1.397 6	1.441 3
	Thai et al. [107]	1.365 3	1.407 6	1.449 0
	Li et al. [105]	1.353 3	1.395 6	1.439 3
	Present (ESDPT)	1.341736	1.352543	1.428975
5	CPT [73]	1.05565	1.16195	1.18867
	FSDPT [73]	1.04183	1.14467	1.17159
	TSDPT [73]	1.04466	1.14731	1.17397
	Hadji [111]	1.04466	1.10881	1.17397
	Zenkour [110]	1.044 8	1.147 4	1.174 0
	Li et al. [74]	1.045 3	1.109 8	1.175 7
	Thai et al. [107]	1.045 2	1.109 4	1.174 0
	Li et al. [105]	1.044 7	1.108 8	1.174 0
	Present (ESDPT)	1.030398	1.014627	1.155498
10	CPT [73]	1.00524	1.11883	1.13614
	FSDPT [73]	0.99256	1.10261	1.12067
	TSDPT [73]	0.99551	1.10533	1.12314
	Hadji [111]	0.99550	1.06090	1.12314
	Zenkour [110]	0.995 2	1.041 5	1.134 6
	Li et al. [74]	0.995 2	1.061 0	1.124 7
	Thai et al. [107]	1.017 1	1.083 2	1.140 3
	Li et al. [105]	0.995 5	1.060 9	1.123 1
	Present (ESDPT)	0.983021	0.957642	1.10524

L'effet du paramètre géométrique a/h sur la fréquence fondamentale adimensionnelle d'une plaque sandwich P-FGM rectangulaire a été illustré dans la figure V.4 pour le paramètre $k = 0.5$ et $k = 2$ et pour des différentes théories des plaques.

La variation de la fréquence fondamentale adimensionnelle $\bar{\omega}$ de plaques sandwichs FGM de **type-A** en fonction du rapport géométrique a/h est représentée sur la figure V.4a, ($a/b=1$); pour les différentes géométries ; de géométrie symétrique (1-1-1), de géométrie symétrique (1-2-1) et de géométrie non symétrique (2-2-1).

La variation de la fréquence fondamentale adimensionnelle $\bar{\omega}$ de plaques sandwichs FGM de **type-B** en fonction du rapport géométrique a/h est représentée sur la figure V.4b, ($a/b=1$); pour les différentes géométries ; de géométrie symétrique (1-1-1), de géométrie symétrique (1-2-1) et de géométrie non symétrique (2-2-1).

On remarque que la différence des résultats de la fréquence adimensionnelle des schémas sandwich de type A sont plus élevées que les schémas sandwich de type B.

On peut voir que l'effet de l'homogénéité est apparent, la différence dans la valeur de fréquence fondamentale adimensionnelle $\bar{\omega}$ est presque constante quand la valeur de l'homogénéité varie de $k = 0.5$ à $k = 2$ pour la plaque de la géométrie du type A, mais pour le type B cette différence est presque nulle, et les valeurs de $\bar{\omega}$ sont confondues pour des homogénéités différentes et ceci toujours dans la plage de variation étudiée de k .

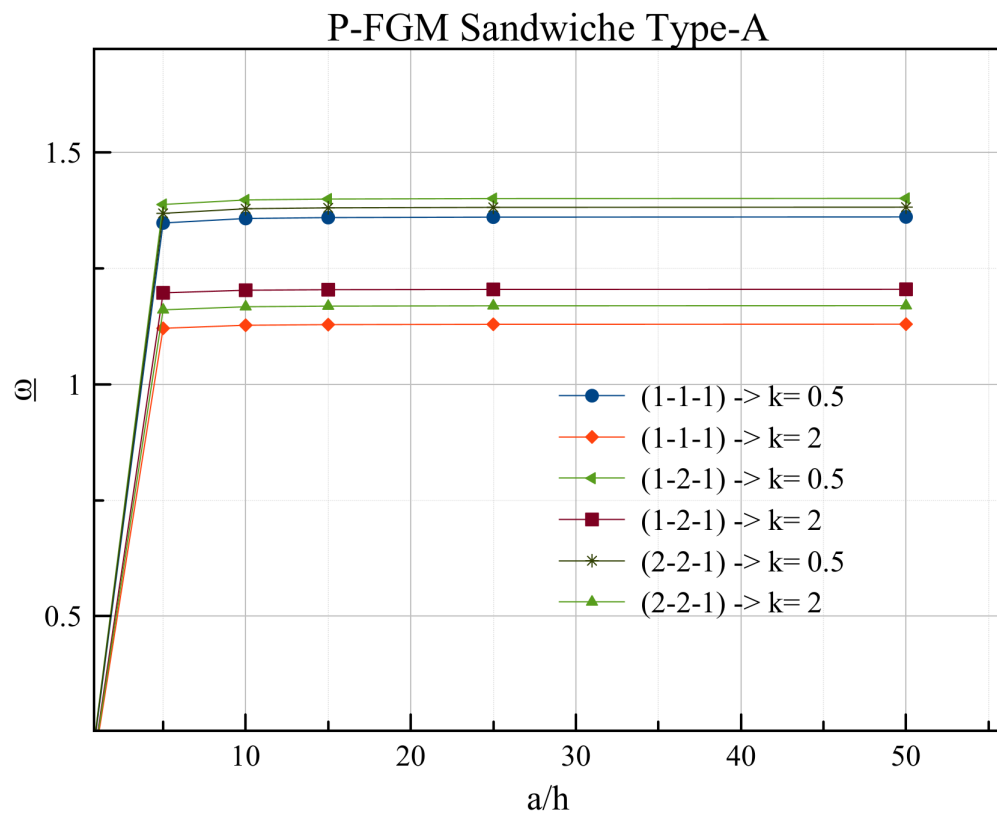
La variation de la fréquence fondamentale adimensionnelle $\bar{\omega}$ de plaques sandwichs FGM de **type-A** en fonction du rapport géométrique a/b est représentée sur la figure V.5a, ($a/h=10$); pour les différentes géométries ; de géométrie symétrique (1-1-1), de géométrie symétrique (1-2-1) et de géométrie non symétrique (2-2-1).

La variation de la fréquence fondamentale adimensionnelle $\bar{\omega}$ de plaques sandwichs FGM de **type-B** en fonction du rapport géométrique a/b est représentée sur la figure V.5b, ($a/h=10$); pour les différentes géométries ; de géométrie symétrique (1-1-1), de géométrie symétrique (1-2-1) et de géométrie non symétrique (2-2-1).

Pour les plaques sandwichs Type-A, la valeur de l'indice de fraction volumique $k=0$ représente une plaque isotrope homogène (céramique), et un bi-matériau (céramique/métal) pour les plaques sandwichs Type-B.

On observe en outre que la différence de la température critique du flambement pour la plaque sandwich de type A (1-2-1) avec des valeurs d'indice de loi de puissance supérieures à 1/2 est plus élevée que pour les autres plaques sandwichs FGM.

(a)



(b)

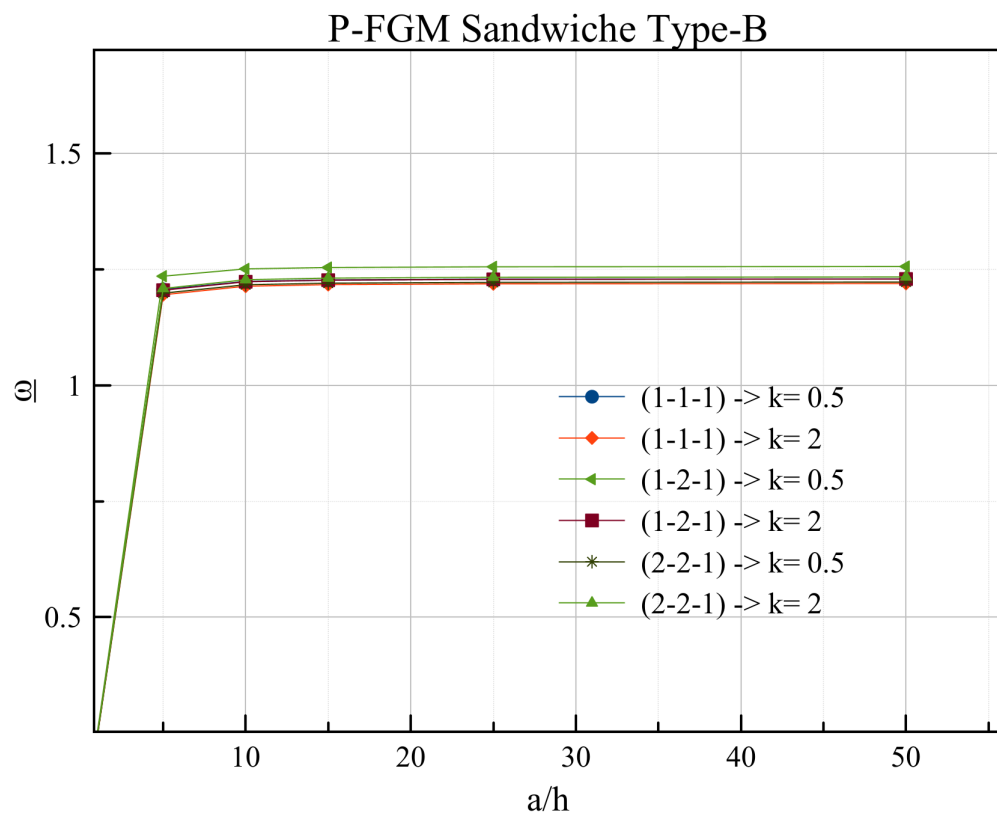
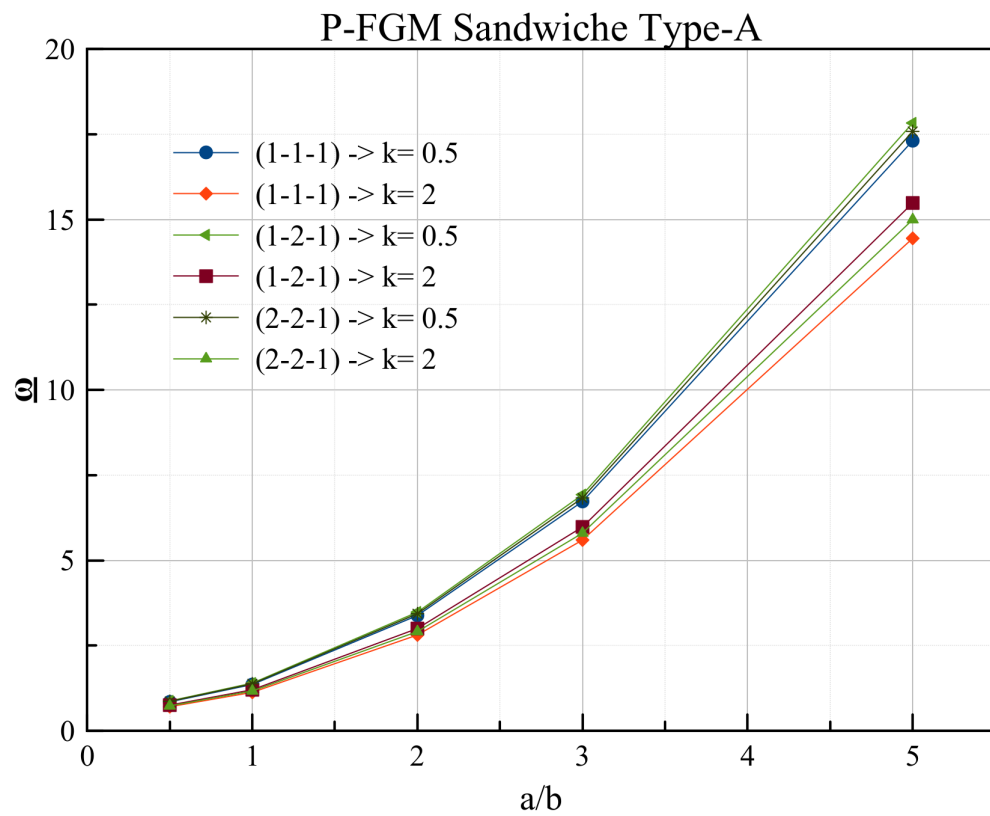


Figure V-4. Fréquence fondamentale $\bar{\omega}$ adimensionnelle d'une plaque sandwich en FGM Type A et Type B en fonction du rapport a/h ($a/b=1$) pour les différents types de charges thermiques.

(a)



(b)

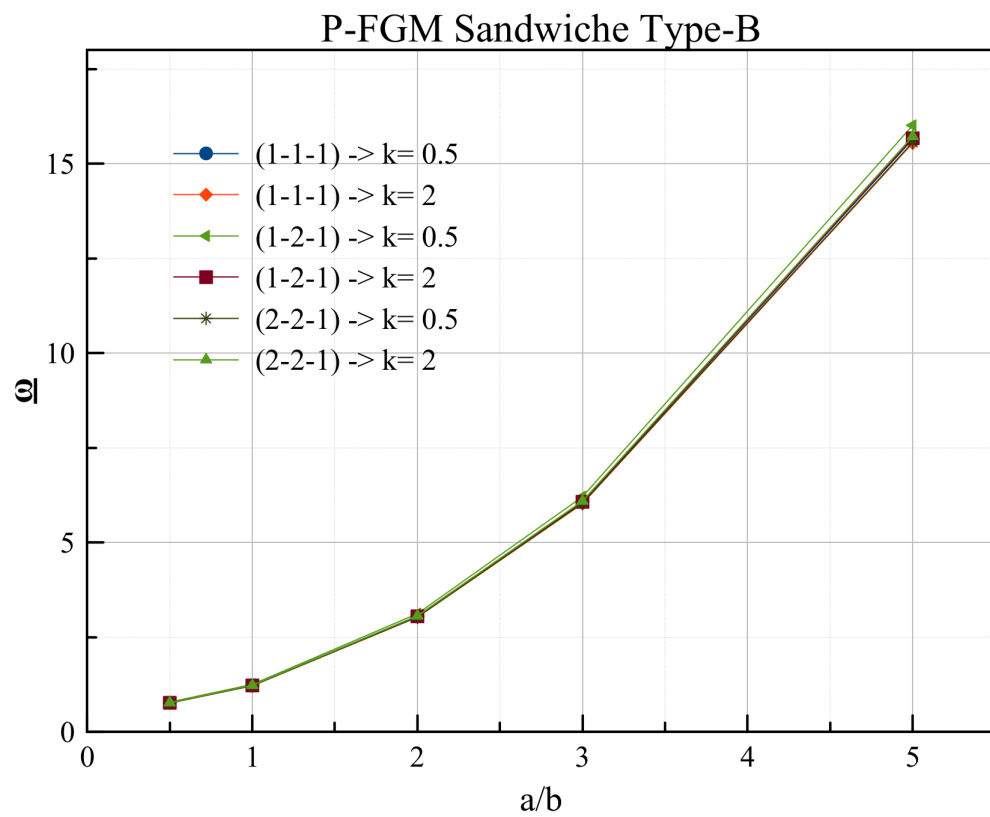


Figure V-5. Fréquence fondamentale $\bar{\omega}$ adimensionnelle d'une plaque sandwich en FGM Type A et Type B en fonction du rapport a/b ($a/h=10$) pour les différents types de charges thermiques.

V.6 Conclusion :

Dans ce chapitre, une étude théorique sur la vibration libre des plaques sandwich FGM est présentée. Une théorie de plaque ESDPT à cinq variables est étendue à ce problème. Deux types différents de plaques sandwich FGM sont considérés : les plaques sandwich de type A avec des feuilles de surface FGM et un noyau homogène et les plaques sandwich de type B avec des feuilles de surface homogènes et un noyau FGM. Les équations de mouvement sont développées en utilisant le principe d'Hamilton. Les solutions analytiques des plaques sandwich FGM avec des conditions limites simplement supportées sont obtenues en utilisant la méthode Navier.

Dans l'étude de validation, en comparant les fréquences naturelles calculées avec celles publiées dans la littérature, on constate que la théorie proposée est précise et efficace. Pour comprendre la réponse en vibration libre des plaques sandwich FGM, des études paramétriques sont menées et des résultats numériques sont présentés.

En conséquence, les caractéristiques de la fréquence fondamentale adimensionnelle des plaques sandwiches FGM sont significativement influencées par l'indice de fraction volumique et les paramètres géométriques du système. L'indice de puissance k a un effet considérable sur la répartition de la fréquence fondamentale adimensionnelle de la plaque sandwich FGM. La fréquence fondamentale adimensionnelle des plaques sandwiches FGM est presque constante dans les plaques minces. La différence de la fréquence fondamentale adimensionnelle augmente avec l'augmentation quand le rapport a/b augmente.

Conclution générale

CONCLUSION GENERALE

Les structures sandwiches en matériaux à gradient de propriétés représentent un domaine de recherche très vaste et des applications immenses tant qu'il est possible de modifier à volonté leur composition et leur architecture pour obtenir de ces matériaux les propriétés recherchées. La conception et l'élaboration de ces matériaux nécessitent le développement d'outils d'analyse adaptés à leurs spécificités géométriques et matérielles. Dans l'application de technologie, cette caractéristique représente beaucoup d'avantages et permet de sélectionner des différentes configurations géométriques et matérielles, ainsi qu'elles répondent aux exigences techniques sur les divers problèmes de l'ingénierie afin d'éviter la ruine de ces structures.

Ce travail a été consacré à l'analyse de la vibration libre des plaques sandwichs en FGM simplement appuyées. Les propriétés matérielles telles que le module de Young et le coefficient de la dilatation thermique varient à travers l'épaisseur de la structure selon une fonction de loi de puissance (P-FGM) en fonction des fractions volumiques des constituants. Une théorie de plaque de fonction de cisaillement exponentielle (ESDPT) est utilisée afin de souscrire une description de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur et qui doit satisfaire les conditions de nullité des contraintes de cisaillement dans les bords de la plaque. Le champ de déplacement est exprimé avec cinq inconnues, soit le même nombre que celui de la théorie FSDPT, tout en évitant l'usage de facteurs correctifs pour le cisaillement.

Deux types différents de plaques sandwich FGM sont considérés : les plaques sandwich de type A avec des feuilles de surface FGM et un noyau homogène et les plaques sandwich de type B avec des feuilles de surface homogènes et un noyau FGM. Les équations de mouvement sont développées en utilisant le principe d'Hamilton. Les solutions analytiques des plaques sandwich FGM avec des conditions limites simplement supportées sont obtenues en utilisant la méthode Navier.

Dans l'étude de validation, en comparant les fréquences naturelles calculées avec celles publiées dans la littérature, on constate que la théorie proposée est précise et efficace. Pour comprendre la réponse en vibration libre des plaques sandwich FGM, des études paramétriques sont menées et des résultats numériques sont présentés.

Les résultats numériques de la théorie actuelle de déformation de cisaillement sont présentés pour montrer l'effet de la distribution du matériel et des paramètres de base sur la fréquence naturelle.

En conséquence, les caractéristiques de la fréquence fondamentale adimensionnelle des plaques sandwichs FGM sont significativement influencées par l'indice de fraction volumique et les paramètres géométriques du système. L'indice de puissance k a un effet considérable sur la répartition de la fréquence fondamentale adimensionnelle de la plaque sandwich FGM. La fréquence fondamentale adimensionnelle des plaques sandwichs FGM est presque constante dans les plaques minces. La différence de la fréquence fondamentale adimensionnelle augmente avec l'augmentation quand le rapport a/b augmente.

En plus, le choix de la bonne méthode de résolution est crucial dans la fiabilité de la prédiction de ce comportement. De ce fait plusieurs chercheurs s'imprègnent dans cet axe de recherche. Certains résultats sont présentés sous forme de tableaux et graphes, qui peuvent servir de référence pour la recherche.

En conclusion, on peut dire que la théorie proposée est simple et précise dans le calcul précis de la fréquence naturelle lorsque l'exposant de la fraction volumique varie.

Bibliographies

VI. Bibliographies

- [1] M. Koizumi, « The concept of FGM, proceedings of the second international symposium on functionally gradient materials at the third international ceramic science and technology congress », *San Francisco*, 1992.
- [2] H. Okamura, « State of the arte of material design projects for severe service applications, Mater », *Sci. Eng :A*, vol. 143, n° 1-2, p. 3-9, 1991.
- [3] Z. Zhong. et T. Yu, « Analytical solution of cantilever functionally graded beam », *Composites Science and Technology*, vol. 67, n° 3-4, p. 481-488, 2007.
- [4] C. Baron. et S. Naili, « Propagation d'ondes élastiques au sein d'un guide d'ondes élastiques anisotrope à gradient unidirectionnel sous chargement fluide », *Compte Rendue Mécanique*, vol. 336, n° 9, p. 722-730, 2008, doi: 10.1016/j.crme.2008.07.005.
- [5] K. Kokini. et Y. Takeuchi, « Multilayer ceramic thermal barrier coatings under transient thermalloads », in *Proceeding of the first international symposium on functionally gradient materials-FGM'90-sendai-japan*, 1990, p. 31-36,.
- [6] P. Boch., T. Chartier., et M. Huttepain, « Tape casting of Al₂O₃/ZrO₂ laminated Composites », *J. Am. Ceram. Soc.*, vol. 69, 1987.
- [7] Y. Uchida, « Properties of functionally graded materials, Manufactured by progressive lamination method for applications ». 2004.
- [8] H. Shen, *functionally graded materials - nonlinear analysis of plates and shells*. New York: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2009.
- [9] Z.-H. Jin et R. C. Batra, « Stress intensity relaxation at the tip of an edge crack in a functionally graded material subjected to a thermal shock », *Journal of Thermal Stresses*, vol. 19, n° 4, p. 317-339, 1996, doi: 10.1080/01495739608946178.
- [10] S. H. Chi et Y. L. Chung, « Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load-Part I: Analysis », *International Journal of Solids and Structures*, vol. 43, n° 13, p. 3657-3674, 2006, doi: 10.1016/j.ijsolstr.2005.04.011.
- [11] F. Delale et F. Erdogan, « The crack problem for a non-homogeneous plane », *ASME Journal of Applied Mechanics*, vol. 50, n° 3, p. 609-614, 1983.
- [12] M. Takahashi., Y. Itoh., et H. Kashiwaya, « Fabrication and evaluation of W/Cu gradient material by sintering and infiltration technique », in *Proceeding of the first international symposium on functionally gradient materials-FGM'90-sendai-japan*, 1990, p. 129-34,.
- [13] M. LADFAR, « influence des caractéristiques mécaniques sur les comportements mécaniques des structures sandwich ». Ouargla, 2013.
- [14] L. Lu, M. Chekroun, O. Abraham, V. Maupin, et G. Villain, « Mechanical properties estimation of functionally graded materials using surface waves recorded with a laser interferometer », *NDT & E International*, vol. 44, n°2, p. 169-177, mars 2011.
- [15] Zenkert D., *The Handbook of Sandwich Construction*. London: Engineering Materials Advisory Service Ltd, 1997.

- [16] P. Hamelin, « Le dimensionnement des structures sandwichs - Méthodologie et études de cas », in *Workshop Comett*, Nevers, 1994.
- [17] R. Erguez, « Mutation de produit Conception et modélisation de caisse de TGV à 2 niveaux en matériaux composites », *Thèse de Doctorat, Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers*, 1992.
- [18] C. S. D., S. R. A., et A. H. G, « Modelling the fatigue behaviour of sandwich beams under monotonic, 2 step and block loading regimes" », *Composites Science and Technology*, vol. 59, p. 471-486, 1999.
- [19] D. Zinkert, « The Handbook of Sandwich Construction », *Emas publishing*, 1997.
- [20] A. Baker, F. Rose, et R. Jones, « Advances in the bonded composite repair of metallic aircraft structures », *ISBN*, vol. 1, n° Elsevier, 2002.
- [21] A. H. G, *Analysis and design of structural sandwich panels*". Oxford: Pergamon Press, 1969.
- [22] S. FE., T. M., et E. O. O. D. C, « Mechanical behavior of polypropylene-based honeycomb-core composite sandwich structures », *Reinforced Plastics and Composites*, vol. 10, p. 1569-157, 2010.
- [23] Berthelot, « Jean-Marie Berthelot. « Matériaux composites, comportement mécanique et analyse des structures » ». Lavoisier ,2012, 2012.
- [24] C. Hexcel, « HexWeb tm honeycomb sandwich design technology ». 2004.
- [25] YAMINANDA., These : « contribution à l'analyse et à la modélisation de structures sandwichs impactées », Soutenue le 15 décembre 2004
- [26] A. Petras et M. P. F. Sutcliffe, « Indentation failure analysis of sandwich beams », *Composite Structures*, vol. 50, n° 3, p. 311-318, 2000, doi: 10.1016/S0263-8223(00)00122-7.
- [27] J. E. ARBAOUI, « Etude comparative et caractérisations mécaniques des structures sandwichs multicouches, thèse de doctorat ». Université de Metz, France, 2009.
- [28] S. P. Timoshenko, *S. Woinowsky-Krieger, theory of plates and shells*. McGrawHill, New York, 1959.
- [29] E. Reissner, « The effect of transverse shears deformation on the bending of elastic plates », *Journal of Applied Mechanics*, vol. 12, p. 69-77, 1945.
- [30] Y. S. Uflyand, « The propagation of waves in the transverse vibrations of bars and plates », *Akad. Nauk. SSSR, Prikl. Mat. Mech*, vol. 12, n° 287-300, p. 8, 1948.
- [31] R. Javaheri. et M. R. Eslami, « Thermoelastic buckling of rectangular plates made of functionally graded materials », *AIAA J*, vol. 40, 2002.
- [32] S. A. M. Ghannadpour, H. R. Ovesy, et M. Nassirnia, « Buckling analysis of functionally graded plates under thermal loadings using the finite strip method », *Computers & Structures*, vol. 108-109, p. 93-99, 2012, doi: 10.1016/j.compstruc.2012.02.011.
- [33] M. Mahdavian, « Buckling analysis of simply-supported functionally graded rectangular plates under non-uniform in-plane compressive loading », *Journal of Solid Mechanics*, vol. 1, n° 13, p. 213-225, 2009.
- [34] M. M. Alinia et S. A. M. Ghannadpour, « Nonlinear analysis of pressure loaded FGM plates », *Composite Structures*, vol. 88, n° 3, p. 354-359, 2009, doi: 10.1016/j.compstruct.2008.04.013.

-
- [35] S. Chakraverty et K. Pradhan, « Free vibration of functionally graded thin rectangular plates resting on winkler elastic foundation with general boundary conditions using Rayleigh-Ritz method », *International Journal of Applied Mechanics*, vol. 06, p. 1450043, 2014, doi: 10.1142/S1758825114500434.
- [36] S. Chakraverty et K. K. Pradhan, « Free vibration of exponential functionally graded rectangular plates in thermal environment with general boundary conditions », *Aerospace Science and Technology*, vol. 36, p. 132-156, 2014, doi: 10.1016/j.ast.2014.04.005.
- [37] R. D. Mindlin, « Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates », *Journal of Applied Mechanics*, vol. 18, n° 1, p. 31-38, avr. 2021, doi: 10/gj3cwk.
- [38] W. Lanhe, « Thermal buckling of a simply supported moderately thick rectangular FGM plate », *Composite Structures*, vol. 64, n° 12, p. 211-218, 2004, doi: 10.1016/j.compstruct.2003.08.004.
- [39] Bouazza, M., Tounsi, A., & Adda-Bedia, E. A. (2014). Buckling Response of Thick Functionally Graded Plates. *Journal of Materials and Engineering Structures*, 1(3), 137-145.
- [40] H. Yaghoobi et P. Yaghoobi, « Buckling analysis of sandwich plates with FGM face sheets resting on elastic foundation with various boundary conditions: An analytical approach », *Meccanica*, vol. 48, n° 8, p. 2019-2035, 2013, doi: 10.1007/s11012-013-9720-0.
- [41] S. Hosseini-Hashemi, H. R. D. Taher, H. Akhavan, et M. Omid, « Free vibration of functionally graded rectangular plates using first-order shear deformation plate theory », *Applied Mathematical Modelling*, vol. 34, n° 5, p. 1276-1291, 2010, doi: 10.1016/j.apm.2009.08.008.
- [42] B. Mohamed, H. M. Sid, B. Samir, K. Abdelhakim, et B. Aicha, « Analyse dynamique des plaques en matériaux à gradient de propriétés ».
- [43] A. R. Saidi et E. Jomehzadeh, « On the analytical approach for the bending/stretching of linearly elastic functionally graded rectangular plates with two opposite edges simply supported ».
- [44] H. Yaghoobi et M. Torabi, « Exact Solution for Thermal Buckling of Functionally Graded Plates Resting on Elastic Foundations with Various Boundary Conditions », *Journal of Thermal Stresses*, vol. 36, n° 9, p. 869-894, 2013, doi: 10.1080/01495739.2013.770356.
- [45] T.-K. Nguyen, K. Sab, et G. Bonnet, « First-order shear deformation plate models for functionally graded materials », *Composite Structures*, vol. 83, n° 11, p. 25-36, 2008, doi: 10.1016/j.compstruct.2007.03.004.
- [46] M. K. Singha, T. Prakash, et M. Ganapathi, « Finite element analysis of functionally graded plates under transverse load », *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 47, n° 4, p. 453-460, 2011, doi: 10.1016/j.finel.2010.12.001.
- [47] J.-S. Park. et J.-H. Kim, « Thermal postbuckling and vibration analysis of functionally graded plates », *J. Sound Vib*, vol. 289, n° 25-28, p. 77-93, 2005.
- [48] J. N. Reddy, « A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates », *Journal of Applied Mechanics*, vol. 51, n°14, p. 745-752, 1984, doi: 10.1115/1.3167719.
- [49] T. Kant et K. Swaminathan, « Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory », *Composite Structures*, vol. 56, n° 4, p. 329-344, 2002, doi: 10.1016/S0263-8223(02)00017-X.
-

- [50] J. N. Reddy, *Mechanics of laminated composites plates: Theory and analysis*. Boca Raton: CRC Press, 1997.
- [51] M. Touratier, « An efficient standard plate theory », *International Journal of Engineering Science*, vol. 29, n° 8, p. 901-916, 1991, doi: 10.1016/0020-7225(91)90165-Y.
- [52] A. M. Zenkour et N. A. Alghamdi, « Thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plates », *J Mater Sci*, vol. 43, p. 2574-2589, 2008, doi: 10.1007/s10853-008-2476-6.
- [53] M. Karama., K. S. Afaq., et S. Mistou, « Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity », *Int. J. Solids Structures*, vol. 40, n° 6, p. 1525-1546, 2003, doi: 10/bnf4km.
- [54] A. R. Saidi, M. Bodaghi, et S. R. Atashipour, « Levy-Type Solution for Bending-Stretching of Thick Functionally Graded Rectangular Plates Based on Third-Order Shear Deformation Theory », *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, vol. 19, no 8, p. 577-589, 2012, doi: 10.1080/15376494.2011.563409.
- [55] R. P. Shimpi, « Refined plate theory and its variants », *AIAA Journal*, vol. 40, n° 1, p. 137-146, 2002.
- [56] H. Ait Atmane, A. Tounsi., I. Mechab., et E. A. A. Bedia, « Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory », *Int. J. Mech. Mater. Design*, vol. 6, n° 2, p. 113-121, 2010.
- [57] H.-T. et K. Thai et S.-E., « Free vibration of laminated composite plates using two variable refined plate theory" », *International Journal of Mechanical Sciences*, p. 626-633, 2010.
- [58] H.-T. et K. Thai et S.-E., « Levy-type solution for buckling analysis of orthotropic plates based on two variable refined plate theory" », *Composite Structures*, 2011.
- [59] B. Boudierba, M. S. A. Houari, et A. Tounsi, « Thermomechanical bending response of FGM thick plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations », *Steel and Composite Structures*, vol. 14, n° 1, p. 85-104, 2013.
- [60] E. Carrera, « An assessment of mixed and classical theories on global and local response of multilayered orthotropic plates », *Composite structures*, vol. 50, p. 183,198, 2000.
- [61] M. Sciuva, « An improved shear-deformation theory for moderately thick multi-layered anisotropic shells and plates », *Journal of Applied Mechanics*, vol. 54, p. 589-596, 1987.
- [62] V. Nguyen, « Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaques, : Thèse de doctorat de l'école nationale des ponts et chaussées ». 2004.
- [63] M. C. R. R. Parmerter, « Efficient higher order composite plate theory for general lamination configuration », *AIAA Journal*, vol. 31, p. 1299-1306, 1993.
- [64] U. Icardi, « Higher-order zig-zag model for analysis of thick composite beams with inclusion of transverse normal stress and sub laminates approximations », *Composites Part B : Engineering*, vol. 32, n° 14, p. 343-354, 2001.
- [65] M. Karama, B. A. Harb, et S. M. S. Caperaa, « Bending, buckling and free vibration of laminated composite with a transverse shear stress continuity model », *Composite Part B : Engineering*, vol. 29, n° 13, p. 223-234, 1998.

- [66] A. K. N. W. Burton, « Stress and free vibration analyses of multilayered composite plates », *Composite Structures*, vol. 11, p. 183-204, 1989.
- [67] K. Afaq et M. K. S. Mistou, « Un nouveau modèle raffiné pour les structures multicouches », in *Comptes-rendus des 13 emes Journées Nationales sur les Composites*, 2003, p. 289-292,.
- [68] J. N. Reddy, « A generalization of two-dimensional theories of laminated composite plates », *Commun.Appl. Numer. Methods*, vol. 3, p. 173-180 , 1987.
- [69] M. T. A. Nosier, « Edge effect of uniformly loaded cross-ply composite laminate », *Material and Design*, vol. 24, p. 647-658 , 2003.
- [70] J.N. Reddy, (2000). Analysis of functionally graded plates. *Int. Journal Numerical Methods in Engineering*. 47, 663-684.
- [71] S.S. Vel, R.C. Batra, (2004). Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates. *Journal of Sound and Vibration*, 272, 703–730.
- [72] Huang, X.L., Shen, H.S., 2004. Nonlinear vibration and dynamic response of functionally graded plates in thermal environments. *International Journal of Solids and Structure*, 41, 2403-2427.
- [73] A. Zenkour, (2005). A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: Part 2 - buckling and free vibration. *International Journal of Solids and Structure*, 42, 5243–5258.
- [74] Q. Li, V.P.Lu, K.P. Kou, (2008). Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material sandwich plates *Journal of Sound and Vibration*, 311, 498–515.
- [75] H. Matsunaga, (2008). Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2-D higher-order deformation theory. *Composite Structures*. 82, 499-512.
- [76] Q.Li, V.P. Lu, K.P. Kou, K.P. (2009). Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material plates in thermal environment. *Journal of Sound and Vibration*, 324 (3-5), 733-750.
- [77] X.Z. Wang, H.S. Shen, (2011). Nonlinear analysis of sandwich plates with FGM face sheets resting on elastic foundations. *Composite Structures*, 93, 2521-2532.
- [78] S. Xiang, X.X. Jin, Z.Y. Bi, S.X. Jiang, M.S. Yang, (2011). A n-order shear deformation theory for free vibration of functionally graded and composite sandwich plates. *Composite Structures*, 93, 11, 2826-2832.
- [79] H.S. Shen, C.L. Zhang, (2012). Non-linear analysis of functionally graded fiber reinforced composite laminated plates. Part II: Numerical results. *Int. International Journal of Non- Linear Mechanics*, 47, 1055-1064.
- [80] A.M.A. Neves, A.J.M. Ferreira, E. Carrera, M. Cinefra, C.M.C. Roque, R.M.N Jorge, C.M.M. Soares, (2012). A quasi 3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates, *Composite Structures*, 94, 1814-1825.
- [81] H.S. Shen, X.Z. Wang, (2012). Assessment of Voigt and Mori-Tanaka models for vibration analysis of functionally graded plates. *Composite Structures*, 94, 2197-2208.
- [82] S.M.R. Khalili, Y. Mohammadi, (2012). Free vibration analysis of sandwich plates with functionally graded face sheets and temperature-dependent material properties: A new approach. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 35, 61-74.

- [83] S. Xiang, G.W. Kang, M.S. Yang, Y. Zhao, (2013). Natural frequencies of sandwich plate with functionally graded face and homogeneous core. *Composite Structures*, 96, 226-231.
- [84] T.H. Thai, T.P. Vo, (2013). A new sinusoidal shear deformation theory for bending, buckling and vibration of functionally graded plates. *Applied Mathematical Modelling*, 37, 3269-3281.
- [85] F.A. Fazzolari, E. Carrera, (2013). Free vibration analysis of sandwich plates with anisotropic face sheets in thermal environment by using the hierarchical trigonometric Ritz formulation. *Composite Part B*, 50, 67-81.
- [86] Dozio, L., 2013. Natural frequencies of sandwich plates with FGM core via Variable kinematic 2D Ritz models. *Composite Structures*, 96, 561–568.
- [87] L. Dozio, (2014). Exact free vibration analysis of Levy FGM plates with higher-order shear and normal deformation theories. *Composite Structures*, 111, 415-425.
- [88] A.M.A. Neves, A.J.M. Ferreira, E. Carrera, M. Cinefra, C.M.C. Roque, R.M.N Jorge, C.M.M. Soares, (2012). A quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates. *Composite Part B*, 43, 711-725.
- [89] D.K. Jha, T. Kant, R.K. Singh, (2013). Free vibration of functionally graded plates with a higher order and normal deformation theory. *International Journal of Structural Stability and Dynamic*, 13, DOI:10.1142/S0219455413500041.
- [90] S. Kamarian, M.H. Yas, A. Poursagha, (2013). Free vibration analysis of three-parameter functionally graded material sandwich plates resting on Pasternak foundations. *Journal of Sandwich Structures and Materials*, 15 (3), 292-308.
- [91] A. Alibeigloo, (2014). Free vibration analysis of sandwich cylindrical panel with functionally graded core using three-dimensional theory of elasticity. *Composite Structures*, 113, 23-30.
- [92] H.T. Thai, T.K. Nguyen, T.P. Vo, J. Lee (2014). Analysis of functionally graded sandwich plates using a new first-order shear deformation theory. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 45, 211-225.
- [93] T.K. Nguyen, (2014). A higher-order hyperbolic shear deformation plate model for analysis of functionally graded materials. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, DOI 10.1007/s10999-014-9260-3.
- [94] F.A. Fazzolari, E. Carrera, (2014). Effect of thickness deformation on large-amplitude vibrations of functionally graded rectangular plates. *Composite Structures*, 113, 89-107.
- [95] M. Talha, B.N. Singh, (2011). Large amplitude free flexural vibration analysis of shear deformable FGM plates using nonlinear finite element method. *Finite Elements in Analysis and Design*, 47, 394-401.
- [96] S. Natarajan, G. Manickam, (2012). Bending and vibration of functionally graded material sandwich plates using an accurate theory. *Finite Elements in Analysis and Design*, 57, 32-42.
- [97] H.T. Thai, D.H. Choi, (2013). Finite element formulation of various four unknown shear deformation theories for functionally graded plates. *Finite Elements in Analysis and Design*, 75, 50–61.

- [98] A.B. Benyamina, B. Boudierba and A. Saoula, (2018). Bending response of composite material plates with specific properties, case of a typical FGM" Ceramic/Metal" in thermal environments. *Periodica Polytechnica Civil Engineering*, 62(4), pp.930-938.
- [99] E. Reissner, « On transverse bending of plates, including the effects of transverse shear deformation », *Int. J. Solids Structures*, vol. 25, n° 5, p. 495-502, 1975.
- [100] G. N. Praveen et J. N. Reddy, « Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic-metal plates », *International Journal of Solids and Structures*, vol. 35, n° 33, p. 4457-4476, 1998, doi: 10.1016/S0020-7683(97)00253-9.
- [101] M. Touratier, « An efficient standard plate theory », *International Journal of Engineering Science*, vol. 29, n° 8, p. 901-916, 1991.
- [102] A. M. Zenkour, « The refined sinusoidal theory for FGM plates on elastic foundations », *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 51, n° 11-12, p. 869-880, nov. 2009, doi: 10.1016/j.ijmecsci.2009.09.026.
- [103] Li Q, lu VP, Kou KP. Three - dimensional vibration analysis of functionally graded material sandwich plates. *J Sound Vib.* 2008; 311(1 - 2):498 - 515.
- [104] Natarajan S, Manickam G. Bending and vibration of functionally graded material sandwich plates using an accurate theory. *Finite Elem Anal Des.* 2012;57:32 - 42.
- [105] Li D, Deng Z, Chen G. Free vibration of functionally graded sandwich plates in thermal environments. *Int J Mech Syst Dyn.* 2023;1 - 9. doi:10.1002/msd2.12063
- [106] A. M. Zenkour. et M. Sobhy, « Thermal buckling of various types of FGM sandwich plates », *Compos Struct*, vol. 93, no 1, p. 93-102, 2010, doi: 10.1016/j.compstruct.2010.06.012.
- [107] Thai CH, Zenkour AM, Abdel Wahab M, Nguyen - Xuan H. A simple four - unknown shear and normal deformations theory for functionally graded isotropic and sandwich plates based on isogeometric analysis. *Compos Struct.* 2016;139:77 - 95.
- [108] Nguyen VH, Nguyen TK, Thai HT, Vo TP. A new inverse trigonometric shear deformation theory for isotropic and function- ally graded sandwich plates. *Compos Part B.* 2014;66:233-246.
- [109] Nosier A, Reddy JN. On vibration and buckling of symmetric laminated plates according to shear deformation theories. *Acta Mech.* 1992;94(3):145-169.
- [110] Zenkour AM. On vibration of functionally graded plates according to a refined trigonometric plate theory. *Int J Struct Stab Dynam.* 2005;5(2):279-297.
- [111] Hadji, L., Atmane, H.A., Tounsi, A. et al. Free vibration of functionally graded sandwich plates using four-variable refined plate theory. *Appl. Math. Mech.-Engl. Ed.* 32, 925–942 (2011). <https://doi.org/10.1007/s10483-011-1470-9>