

République Algérienne Démocratique Et Populaire
Ministère De L'enseignement Supérieur Et De La Recherche
Scientifique
Université Ibn Khaldoun De Tiaret



Mémoire de fin d'études pour l'obtention du diplôme
de Master académique en
Filière : Génie civil
Spécialité: Structure

Présenté par: BARDED Mustapha Amine
DJILI Ayoub

**Etude analytique de la vibration des plaques
sandwiches poreuses P-FGM et S-FGM**

Soutenue le :

Président : Dr.

REBAHI ABDERAZAK

Examineur : Dr.

ABDELAZIZ HADJ HENNI

Examineur : Dr.

AIT AMAR MEZIANE

Encadreur : Pr.

ZOUATNIA NAFISSA

2024/2025

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier ALLAH le Tout-Puissant, qui m'a guidé et m'a donné la force, la patience et la volonté nécessaires pour mener à bien ce travail.

Je rends hommage à mes parents, pour leur amour inconditionnel, leurs prières, leur soutien constant et leur confiance en moi. Leur présence à mes côtés a été une source inestimable de motivation tout au long de mon parcours. À toute ma famille, merci pour votre encouragement et votre appui dans les moments difficiles.

Je souhaite exprimer ma gratitude la plus sincère à mon encadreur, Monsieur **LAZREG HADJI**, pour son accompagnement tout au long de ce travail. Sa disponibilité, ses conseils judicieux, sa rigueur scientifique et sa patience ont été essentiels à la réalisation de ce mémoire.

Mes remerciements chaleureux vont également à **Mlle DRAUCHE KHAYRA**, pour son aide précieuse et ses conseils bienveillants qui ont grandement contribué à l'avancement de cette étude.

Je n'oublie pas de remercier l'ensemble de mes enseignants de l'université **Ibn Khaldoun - Tiaret**, qui ont su, au fil des années, me transmettre leurs savoirs avec passion et dévouement.

Un grand merci également à tous les membres du département de Génie Civil pour leur soutien et leur disponibilité.

Enfin, je remercie du fond du cœur tous mes amis et camarades de promotion, pour leur soutien moral, leur esprit de collaboration et les moments partagés tout au long de ce parcours universitaire.

Dédicace

Je dédie ce travail à mes chers parents, pour leur soutien constant et leurs sacrifices.

Sans eux, je ne serais pas ici aujourd'hui. À ma mère, qui a toujours été ma source de force, et à mon père, qui a toujours été prêt à donner des conseils et à me soutenir.

Je dédie également ce travail à tous ceux qui m'ont aidé ou soutenu tout au long de ce parcours, notamment mes enseignants et mes camarades. Merci à vous tous

Résumé

Les vibrations libres des plaques sandwich poreuses en matériau à gradient de propriétés (FG) sont étudiées, en utilisant une nouvelle théorie simplifiée de déformation par cisaillement d'ordre supérieur. La théorie proposée prend en compte la distribution des contraintes de cisaillement transverse qui satisfait aux conditions de contrainte nulle sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque sandwich. La plaque sandwich FG est composée de trois couches : un noyau isotrope et deux couches de surface en matériau FG. Quatre distributions de porosité ainsi qu'un nouveau modèle de plaques sandwich FG basé sur une fonction sigmoïde sont présentés. Les conditions aux limites de la plaque sandwich FG sont supposées simplement appuyées. La solution de Navier est utilisée pour obtenir des solutions analytiques des plaques sandwich FG. L'effet de la porosité, de la géométrie de la plaque sandwich et du paramètre d'inhomogénéité sur la vibration libre de la plaque sandwich FG est étudié.

Mots-clés : Plaque sandwich poreuse ; P-FGM, S-FGM ; Vibration libre ; Théorie simplifiée de déformation par cisaillement d'ordre supérieur.

Abstract

Free vibration of porous functionally graded (FG) sandwich plates is studied in this paper by using a new and simple higher-order shear deformation theory (SHSDT). The present theory accounts for the distribution of transvers shear stresses that satisfy the free transverse shear stress conditions on the upper and lower surfaces of the sandwich plate. The FG sandwich plate is composed of three layers, an isotropic core and two FG face layers. Four porosities distribution and new model of FG sandwich plates based on a sigmoid function are presented. The boundary conditions for the FG sandwich plate are assumed to be simply-supported. Navier's solution is used to obtain the closed-form solutions of FG sandwich plates. The effect of porosity, sandwich plate geometry and inhomogeneity parameter on free vibration of FG sandwich plate is investigated.

Keywords: Porous sandwich plate; P-FGM; S-FGM; Free vibration; Simple higher-order shear deformation theory.

ملخص

تم في هذا البحث دراسة الاهتزاز الحر للصفائح الساندويتشية المسامية المصنوعة من مواد متدرجة الوظائف (FG) ، وذلك باستخدام نظرية جديدة ومبسطة لتشوّه القص من الرتبة الأعلى (SHSDT) تأخذ النظرية المقترحة في الحسبان توزيع إجهادات القص العرضية بما يحقق شروط الإجهاد العرضي الحر على السطحين العلوي والسفلي للوحة الساندويتش. تتكوّن اللوحة من ثلاث طبقات: نواة متجانسة وطبقتان سطحيّتان من مواد FG. تم تقديم أربع توزيعات للمسامية، بالإضافة إلى نموذج جديد للصفائح الساندويتشية FG مبني على دالة سيغمويد. وتم افتراض أن الشروط الحدية للوحة هي من النوع البسيط (مدعّمة ببساطة). استخدم حل نافير للحصول على حلول تحليلية مغلقة للصفائح. تم تحليل تأثير كل من المسامية، شكل اللوحة، ومعامل التدرج غير المتجانس على الاهتزاز الحر للوحة FG الساندويتشية.

الكلمات المفتاحية: لوحة ساندويتشية مسامية، مادة FG من النوع P ، مادة FG من النوع S ، الاهتزاز الحر، نظرية مبسطة لتشوّه القص من الرتبة الأعلى.

Table des matières

Remerciements	ii
Dédicace	iii
Résumé	iv
Abstract	v
ملخص	vi
Liste des tableaux.....	x
Listes des figures.....	xi
Introduction générale.....	2

Chapitre I : Généralités sur les matériaux fonctionnellement gradués FGM

I.1 introduction.....	6
I.2 Concept des matériaux a gradient de propriété FGM.....	6
I.3. Historique de développement des matériaux a gradient de propriété.....	9
I.4. Domaine d'application des matériaux a gradient de propriété.....	10
I.5. Propriétés effectives des matériaux à gradient fonctionnel.....	10
I.6. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM.....	12
I.6.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM.....	13
I.6.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM.....	14
I.6.3. Les propriétés matérielles de la plaque E-FGM.....	15
I.7. Conclusion.....	15

Chapitre II : Recherche documentaire sur les matériaux sandwichs

II.1 Introduction.....	17
II.2. Définition des matériaux sandwichs.....	17
II.3. Les éléments constitutants des matériaux sandwichs.....	19
II.3.1. Les peaux.....	19

II.3.2. L'âme (cœur).....	19
II.3.3. L'interface.....	21
II.4. Conception des structures sandwichs.....	21
II.4.1. Sélection des matériaux-âme.....	22
II.4.1.1. Résistance en flexion.....	22
II.4.1.2. Résistance aux chocs.....	22
II.4.1.3. Résistance à la compression.....	23
II.4.1.4. Résistance au décollement (pelage).....	23
II.4.1.5. L'isolation.....	24
II.4.1.6. Absorption d'eau.....	24
II.5. Sollicitations et Modes de dégradations des sandwichs.....	24
II.6. Hypothèses de la théorie des matériaux sandwichs.....	25
II.7. Techniques d'assemblages des matériaux sandwichs.....	25
II.7.1. Le collage de peau sur l'âme.....	25
II.7.2. Technique de pliage.....	27
II.8. Intérêt des structures sandwichs.....	27
II.9. Domaines d'application des matériaux sandwichs. (Tahir et al., 2021).....	28
II.9.1. Construction aérospatiale.....	28
II.9.2. Construction automobile et ferroviaire.....	29
II.9.3. Autres Domaines d'application des matériaux sandwichs.....	29
II.10. Conclusion.....	30

Chapitre III : Rappel sur théories des plaques

III.1. Introduction.....	32
III.2. Les modèles analytiques des plaques FGM.....	32
III.2.1. La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT).....	32

III.2.2. La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT).....	33
III.2.3. La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT).....	35
III.2.4. Revue sur les différents modèles de la théorie d'ordre élevé.....	37
III.2.5. Nouvelle théorie raffinée de déformation des plaques.....	39
III.2.6. Théorie de zig-zag.....	39
III.3. Conclusion	40

Chapitre IV : Etude analytique de la vibration de plaque sandwich poreuses P-FGM et S-FGM

IV.1. Introduction.....	42
IV.2. Hypothèses de base.....	42
IV.3. Cinématique et équation constitutive.....	43
IV.4. Équations de mouvement.....	46
IV.5. Solution de Navier pour les plaques sandwiches en FGM.....	51
IV.6. Une analyse aux valeurs propres pour les problèmes de vibration.....	51
IV.7. Conclusion.....	52

Chapitre V : Résultat et Discussion

V.1.Introduction.....	54
V.2. Propriétés des matériaux.....	54
V.3. Résultats numériques et discussion.....	55
V.4. Conclusion.....	64
Conclusion Générale.....	66
Références bibliographique	69

Liste des tableaux

Tableau V.1: Effets de l'indice de fraction volumique sur les fréquences non dimensionnelles d'une plaque sandwich carrée FG.....57

Tableau V.2 : Effets de la porosité sur les fréquences non dimensionnelles de la plaque sandwich carrée FG ($a/h = 10$, $p = 2$)..... ::.....58

Liste des figures

Figure I. 1 : Concept des matériaux à gradient.....	8
Figure I. 2 : Matériaux FGM en céramique et métal.....	8
Figure I. 3 : Les champs potentiels de l'application des FGM.....	10
Figure I.4: Schematic illustration of a two-phase FGM sample.....	11
Figure I.5 : Modèle analytique pour une couche d'un matériau à gradient fonctionnel.....	11
Figure I.6 : Géométrie d'une plaque en FGM.....	12
Figure I.7 : Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.....	13
Figure I.8 : Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.....	14
Figure I.9 : Variation du module de Young dans une plaque E-FGM.....	15
Figure II.1 : Schéma d'un structure sandwich (Sudharsan et al., 2003).....	18
Figure II.2 : Les peaux Sandwich Typique (Sudharsan et al., 2003), (Ait Atmane et al.,2010).....	19
Figure II.3 : Matériaux sandwichs à âmes pleines.....	20
Figure II.4 : Matériaux sandwichs à âmes creuses.....	21
Figure II.5 : Différences sollicitations (M, N, T) appliqués à un sandwich.....	25
Figure II.6 : Panneaux réalisés par collage à partir de profils divers.....	26
Figure II.7 : Pliage de panneaux sandwichs.....	27
Figure III.1 : Illustration de la plaque de Love Kirchhoff.....	33
Figure III.2 : Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin.....	34
Figure III.3 : Variation de la fonction de gauchissement	35
Figure III.4 : Illustration de la plaque d'ordre élevé (Reddy, 1997).....	36
Figure III.5 : Variation de la fonction de forme $f(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur.....	38

Figure. III.6 : Variation de la dérivée de la fonction de forme $f'(z)$ des différents modèles suivant l'épaisseur.....	38
Figure III.7 : Champ de déplacements du modèle zig-zag d'ordre élevé.....	40
Figure V.1 : Fréquence non dimensionnelle de la plaque sandwich FG en fonction de l'indice de fraction volumique ($a/h = 10$).....	59
Figure V.2 : Fréquence non dimensionnelle d'une plaque sandwich FG carrée parfaite et poreuse en fonction de l'indice de fraction volumique ($a/h=10$).....	60
Figure V.3 : Fréquence non dimensionnelle d'une plaque sandwich FG carrée parfaite et poreuse en fonction du rapport entre le côté et l'épaisseur ($p=2$).....	61
Figure V.4 : Fréquence non dimensionnelle d'une plaque sandwich FG carrée parfaite et poreuse en fonction du rapport d'aspect ($p=2$).....	62
Figure V. 5 : Effet du coefficient de porosité sur la fréquence non dimensionnelle d'une plaque sandwich FG carrée ($p=2$, $a/h=10$).....	63

Introduction générale

Introduction générale

Les matériaux à gradation fonctionnelle (FGM) sont un nouveau type de matériaux composites. Ils ont été proposés par des scientifiques japonais (Miyamoto et al, 1999) en 1984 en raison de l'échec des matériaux composites traditionnels lorsqu'ils sont utilisés dans des environnements à haute température, ainsi que pour réduire les concentrations de contraintes locales créées par des transitions abruptes dans les propriétés des matériaux à travers l'interface entre des matériaux distincts (Finot et al, 1996). Avec l'évolution des processus de fabrication, les FGM sont pris en compte dans l'industrie des structures sandwichs. Les structures sandwich FG sont utilisées pour résoudre plusieurs problèmes d'ingénierie en raison de la variation graduelle des propriétés des matériaux aux interfaces entre les couches de surface et le noyau. Les applications aérospatiales, automobiles, navales et biomédicales sont quelques-uns des domaines qui bénéficient de ces nouveaux matériaux. La principale limite à l'utilisation des structures sandwich FG dans les industries traditionnelles est le coût élevé de production de ce matériau.

En raison de ses propriétés mécaniques et thermiques exceptionnelles, de nombreuses recherches ont été menées pour étudier la vibration des plaques sandwich FG. Zenkour (Zenkour, 2005) a utilisé la théorie des plaques à déformation par cisaillement sinusoïdale (SSDT) pour analyser les problèmes de flexion et de vibration des plaques FG en tenant compte des effets de l'inertie de rotation et des fondations élastiques. Des analyses tridimensionnelles (3D) de la vibration de plaques sandwich FG simplement appuyées et encastées ont été réalisées par Li (Li et al., 2008) et al. Ils ont analysé deux types de plaques sandwich FG. (Mahi et al., 2015) ont présenté une nouvelle théorie de déformation par cisaillement hyperbolique (HSDT) pour l'étude de la vibration libre et de la flexion des plaques isotropes FG, sandwichs et composites stratifiés. L'élément QUAD-8 avec flexibilité au cisaillement, combiné à la théorie structurelle d'ordre supérieur, a été utilisé pour examiner la vibration et la flexion des plaques sandwich FG. (Neves et al., 2012) ont employé la HSDT pour une analyse linéaire de plaques sandwich FG utilisant la formulation unifiée de Carrera. (Mohammadi et Khalili, 2012) ont utilisé une méthode analytique pour discuter de la vibration des plaques sandwich FG simplement appuyées sous différentes charges thermiques. (Dozio, 2013) a proposé une formulation basée sur des modèles avancés de type Ritz en 2D pour la vibration de plaques sandwich avec noyau FG. (Xiang et al., 2013) ont

réalisé une analyse de vibration de plaques sandwich FG en utilisant la méthode de collocation globale sans maillage. La théorie tridimensionnelle (3D) de l'élasticité a été utilisée par (Kamarian et al., 2013) pour examiner les plaques sandwich FG à trois paramètres reposant sur une fondation élastique. (Loja et al., 2013) ont présenté des modèles éléments finis en bandes B-spline pour l'analyse statique et vibratoire de plaques sandwich FG avec peaux piézoélectriques. (Pandey et Pradyumna, 2015) ont étudié la vibration des plaques sandwich FG dans un environnement thermique en utilisant la méthode des éléments finis (FEM). Ils ont également utilisé une formulation éléments finis couche par couche pour l'analyse vibratoire de plaques sandwich FG sous charge thermique non linéaire avec des propriétés de matériau dépendant de la température. (Malekzadeh et Heydarpour, 2015) ont employé une approche semi-analytique utilisant la méthode de quadrature différentielle en couches pour les analyses statiques et de vibration 3D de plaques composites renforcées par nanotubes de carbone FG.

(Moita et al., 2018) ont proposé un modèle éléments finis pour étudier la réponse vibratoire et l'amortissement passif de plaques sandwich FG viscoélastiques et de panneaux cylindriques. En utilisant la théorie modifiée des contraintes de couple, (Trinha et al., 2018) ont examiné les comportements statique, vibratoire et dynamique de plaques sandwich FG à l'aide d'une HSDT raffinée et de la solution de Levy en espace d'état. (Tomar et Talha, 2018) ont utilisé la FEM pour analyser la flexion et la vibration de plaques sandwich FG sensibles aux imperfections et soumises à différentes conditions aux limites et à des charges thermiques. (Wang et Shen, 2018) ont étudié la vibration non linéaire de plaques sandwich FG renforcées par graphène reposant sur une fondation élastique sous environnement thermique avec des propriétés dépendantes de la température.

Plusieurs chercheurs ont proposé de nouvelles théories de plaque à déformation par cisaillement d'ordre supérieur pour analyser la vibration libre et la réponse en flexion de plaques sandwich FG et leur précision a été vérifiée par comparaison avec les résultats de la littérature. Une théorie raffinée de déformation par cisaillement simple avec quatre fonctions inconnues a été proposée par (Meziane et al., 2014) pour étudier la vibration libre de plaques sandwich à gradient exponentiel sous différentes conditions aux limites. (Thai et al., 2016) ont utilisé une théorie à quatre inconnues pour le cisaillement et les déformations normales afin d'étudier la vibration libre de plaques en matériau FG isotrope et sandwich. (Akavci, 2016) a analysé la réponse mécanique

de deux types de plaques sandwich FG en utilisant une nouvelle théorie de déformation hyperbolique. Zenkour et ses collègues (Zenkour et al., 2018) ont étudié l'analyse vibratoire, thermique et mécanique de plaques sandwich multicouches avancées avec noyaux souples reposant sur des fondations ou soumises à des environnements hygrothermiques.

Dans ce travail, une nouvelle théorie SHSDT basée sur une fonction polynomiale est utilisée pour étudier la vibration de deux types de plaques sandwich FG basées sur la loi de puissance et sur la fonction sigmoïdale, en tenant compte de l'effet de la porosité. Sur le plan mathématique, la forme polynomiale est la plus simple et la plus pratique, elle permet donc de faciliter la complexité des théories de cisaillement d'ordre supérieur dans l'obtention de solutions analytiques. Quatre modèles de distribution de porosité sont utilisés, où les porosités sont liées à la configuration sandwich FG. Les propriétés des matériaux telles que le module de Young varient continuellement à travers l'épaisseur selon une fonction de type puissance ou sigmoïdale. Les conditions aux limites de la plaque sandwich FG sont supposées simplement appuyées. Les solutions analytiques des plaques sandwich FG sont obtenues en utilisant la solution de Navier.

La présente mémoire sera donc présentée selon l'organisation suivante :

Le premier chapitre est consacré à la présentation des matériaux à gradients de propriétés FGM tout en définissant leur concept et leurs caractéristiques puis nous définissons les lois qui régissent ce matériau.

Dans le deuxième chapitre, on a essayé de définir d'une manière générale les matériaux sandwichs et de donner un aperçu. Le troisième chapitre, présente une revue sur les théories des plaques.

Le quatrième chapitre, consiste à mettre en œuvre une méthode analytique pour l'analyse de la vibration des plaques sandwichs poreuses en matériaux fonctionnellement gradués avec la présence des porosités à la cour de la fabrication de ces matériaux FGM.

Dans le dernier chapitre, une validation de la théorie proposée est exposée en premier lieu en comparant les résultats obtenus avec ceux des travaux issus de la littérature.

Ce travail, se termine par une conclusion générale relative à la recherche effectuée incluant des perspectives pour des travaux futurs.

Chapitre I :

Généralités sur les matériaux fonctionnellement gradués FGM

Chapitre I: Généralités sur les matériaux fonctionnellement gradués FGM

I.1. Introduction

Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) représentent une avancée majeure dans le domaine des matériaux composites. Contrairement aux composites classiques à interfaces abruptes, les FGM présentent une variation continue de leurs propriétés physiques, mécaniques ou thermiques selon une direction donnée, généralement l'épaisseur. Cette gradation progressive permet de surmonter les limitations classiques, telles que la concentration des contraintes ou les délaminations.

Ce chapitre présente les bases fondamentales relatives aux matériaux FGM. Il aborde d'abord le concept même de gradation, son origine et son évolution historique, notamment les premiers développements menés au Japon dans les années 1980. Ensuite, une comparaison des propriétés entre les composants typiques des FGM céramique et métal est présentée, afin de mieux comprendre l'intérêt de leur combinaison. Diverses lois de distribution (puissance, exponentielle, sigmoïde) sont également détaillées pour décrire le comportement des plaques FGM. Enfin, les domaines d'application, les techniques de fabrication, ainsi que les propriétés effectives de ces matériaux sont exposées, montrant la richesse et la complexité de ce type de matériaux avancés.

I.2. Concept des matériaux a gradient de propriété FGM

Le matériau à gradient de propriété peut être élaboré soit en modulant les proportions de deux ou plusieurs constituants, soit en faisant varier la microstructure d'un composant, de manière à ce que le matériau obtenu présente les propriétés souhaitées dans une direction donnée. Il s'agit ainsi d'un composite hétérogène, caractérisé par une inhomogénéité à l'échelle macroscopique (Hossein Abdizadeh, 1997), mais présentant une homogénéité à l'échelle microscopique.

Initialement conçus comme des boucliers thermiques pour les navettes spatiales et les réacteurs à fusion, les chercheurs et les concepteurs se sont intéressés à une combinaison de deux matériaux le métal et la céramique, l'un pour sa grande résistance à l'usure et à l'oxydation du côté basse température, et l'autre pour sa résistance thermique du côté haute températures.

Chapitre I: Généralités sur les matériaux fonctionnellement gradués FGM

Ce matériau est choisi grâce à ses caractéristiques exceptionnelles qui sont énumérées comme suit:

- Faible réactivité chimique (bonne tenue à la corrosion) ;
- Haute température de fusion ou de décomposition ;
- Haut module d'élasticité et haute dureté ;
- Charge à la rupture élevée ;
- Bas coefficient de frottement (bonne résistance à l'usure) ;
- Conservation des propriétés à haute température ;
- Faible coefficient de dilatation thermique (bonne résistance aux chocs thermiques) ;
- Faible conductivité thermique (bonne résistance à la température).

Les caractéristiques du métal sont données comme suit :

- Bonne résistance mécanique ;
- Conductivité thermique élevée ;
- Très bonne ténacité.

Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure d'un matériau « FGM » est illustré dans la figure I.1. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés des « FGM ». Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente.

Chapitre I: Généralités sur les matériaux fonctionnellement gradués FGM

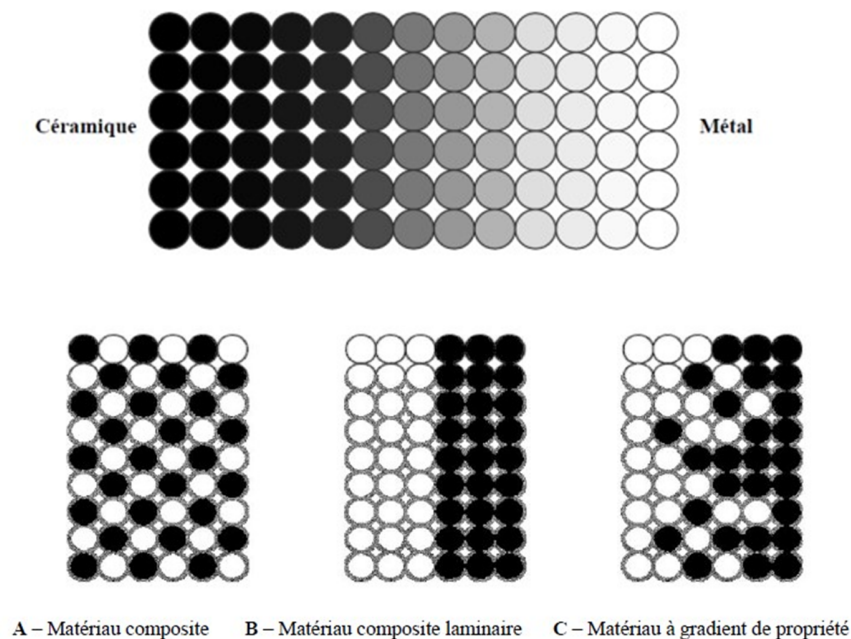


Figure I. 1. Concept des matériaux à gradient.

L'association de ces deux matériaux permet d'améliorer les propriétés mécaniques et thermiques des pièces, contre les agressions extérieures, en effet, la performance de la céramique à température élevée est plus attractive que celle des métaux, ainsi différentes qualités sont requises simultanément (Benoit Watremetz 2006).

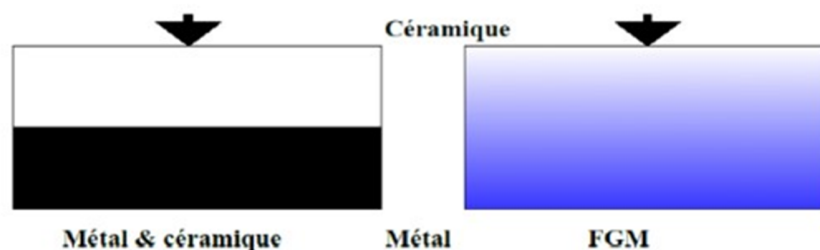


Figure I. 2. Matériaux FGM en céramique et métal

Dans la catégorie des matériaux composites, il y a les matériaux fonctionnellement gradués, ce concept a vu le jour dans les années 80 au Japon par un groupe de chercheurs au laboratoire national d'aérospatiale. Généralement les FGM sont des matériaux constitués de plusieurs

Chapitre I: Généralités sur les matériaux fonctionnellement gradués FGM

couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Ils sont donc des composites macroscopiquement hétérogènes.

I.3. Historique de développement des matériaux a gradient de propriété

À la fin de la première étape (1987-1989), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000K (température de surface) et à un gradient de température de 1000K.

Quatre techniques ont été utilisées pour fabriquer les matériaux présentant un gradient de composition et de structure ; les techniques utilisées dans la fabrication de tels matériaux sont les suivantes :

- Le système SIC/C par C.V.D (Chemical Vapor Deposition ou dépôt chimique en phase vapeur)
- Le système PSZ/Mo par la technique de la compaction sèche des poudres ;
- Le système TIB2/Cu par synthèse par auto-propagation à haute température ;
- Et enfin le système (Ni-Cr-Al-Y) / ($ZrO_2-Y_2O_3$) par projection plasma à double torches. (Okamura, 1991).

Dans la seconde étape (1990-1991), le but était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première étape.

Pendant les années 90, non seulement les champs d'application des FGM s'est développé pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température, mais s'est aussi élargi à d'autres applications : biomécaniques, technologie de capteur, optique. (Okamura, 1991). Généralement, les FGM sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Les vides sont également considérés comme une composante des matériaux FGM (Kokini, 1990). Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement hétérogènes. Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue les FGM des matériaux composites conventionnels. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés des FGM dans certains cas (Koizumi, 1997).

I.5. Domaine d'application des matériaux a gradient de propriété

On trouve une littérature très importante sur l'utilisation de ce matériau. Cependant, l'utilisation des structures en FGM dans les environnements avec de grands changements de température exige la connaissance des déformations, le matériau FGM peut être utilisé dans plusieurs domaines (Figure I. 3).

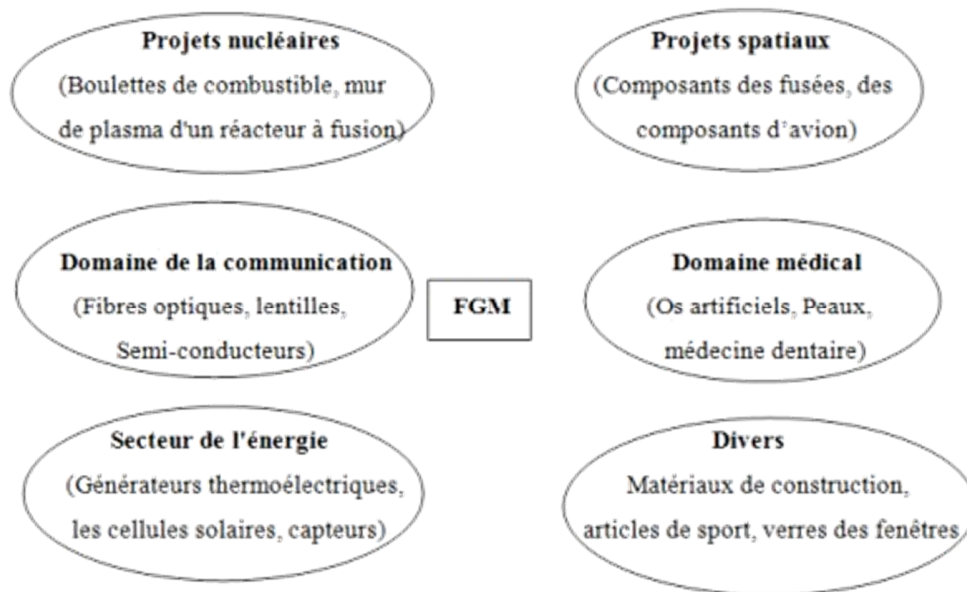


Figure I. 3. Les champs potentiels de l'application des FGM.

I.6. Propriétés effectives des matériaux à gradient fonctionnel

Généralement les FGM sont fabriqués par deux phases de matériaux avec différents propriétés classés par leur microstructure variable dans l'espace, conçue pour optimiser l'exécution des éléments de structures par la distribution de propriétés correspondantes (figureI.4).

Une description détaillée d'une microstructure graduée réelle et généralement non disponible, sauf peut-être pour des informations sur la distribution de la fraction volumique. Tandis que la fraction volumique de chaque phase varie graduellement dans la direction de gradation, les propriétés effectives des FGM changent le long de cette direction. Par conséquent, nous avons deux approches possibles pour les modèles FGM :

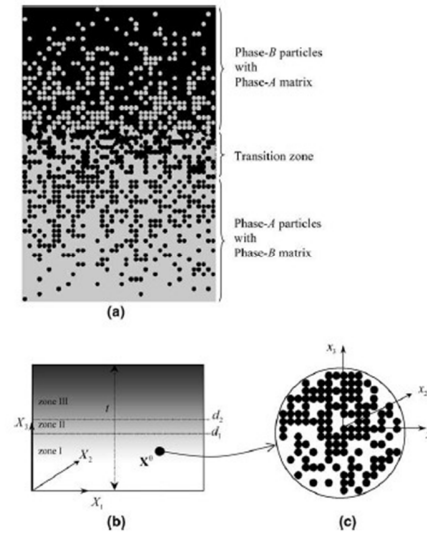


Figure I.4. Illustration schématique d'un échantillon de MGF à deux phases: (a) microstructure typique comprenant les phases A et B, (b) trois zones à l'échelle macroscopique X et (c) RVE à l'échelle microscopique x.

- Une variation par morceaux de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée, et le FGM est pris pour être posé avec la même fraction volumique dans chaque région, c-à-d couche quasi-homogène de céramique-métal (figure 1.5a) ;
- Une variation continue de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumé (figure 1.5b), et la fraction volumique du métal peut être représentée comme une fonction de coordonnées suivant l'épaisseur (z).

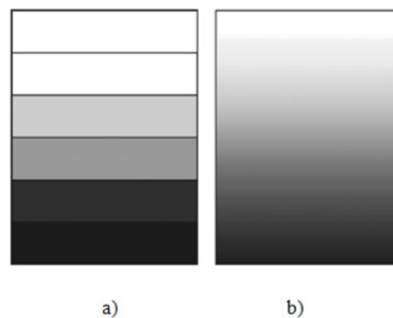


Figure I.5. Modèle analytique pour une couche d'un matériau à gradient fonctionnel.

I.7. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM

Les matériaux à gradient de propriétés « FGM » consistent en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent.

Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace. Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume.

Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure.

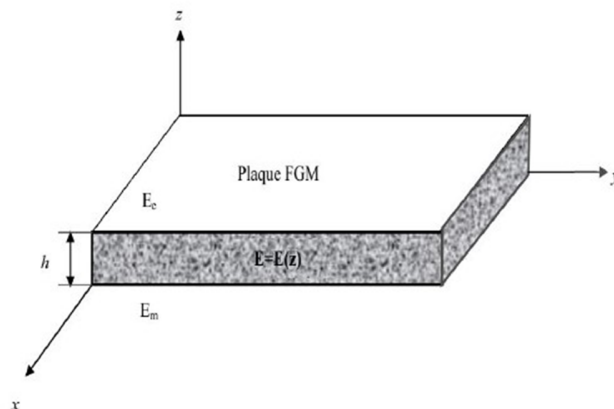


Figure I.6. Géométrie d'une plaque en FGM.

Les coordonnées x et y définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe z perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque et dans la direction de l'épaisseur. Les propriétés du matériau dont le module de Young et le coefficient de Poisson sur les surfaces supérieures et inférieures sont différentes mais sont déterminés selon les demandes d'exécution. Toutefois le module de Young et le coefficient de Poisson varient de façon continue, dans le sens de l'épaisseur (l'axe z) soit : $E=E(z)$ $V=V(z)$. Le module de Young dans le sens de l'épaisseur de la plaque FGM varie en fonction de la loi de puissance (PFGM) ou la fonction exponentielle (E-FGM) ou avec la fonction sigmoïde (S-FGM).

Chapitre I: Généralités sur les matériaux fonctionnellement gradués FGM

I.7.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance :

$$V(z) = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p \quad \text{I.1}$$

Où p est un paramètre matériel et h est l'épaisseur de la plaque. Une fois la fraction volumique locale $v(z)$ a été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges (Bao, 1995) :

$$E(z) = E_1 + (E_2 - E_1)V(z) \quad \text{I.2}$$

Où E_1 et E_2 sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure ($z = -h/2$) et de la surface supérieure ($z = h/2$) de la plaque FGM, la variation du module de Young dans direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la figure I.7, il apparaît clairement que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour $p < 1$, et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour $p > 1$.

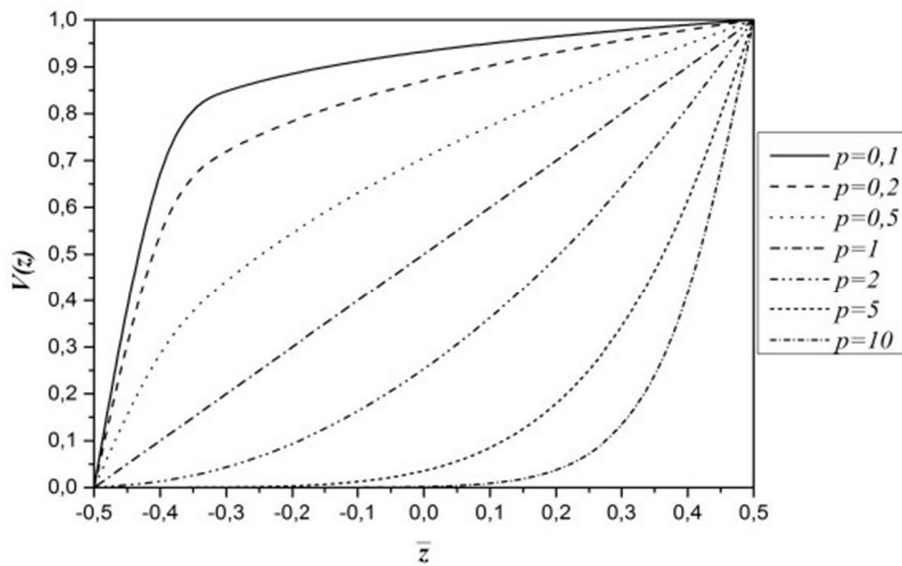


Figure I.7. Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.

Chapitre I: Généralités sur les matériaux fonctionnellement gradués FGM

I.7.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

Dans le cas d'ajouter une plaque P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interfaces où le matériau est continu mais change rapidement (Bao, 1995). Par conséquent, Chung et chi (2003) ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 + z}{h/2} \right)^p \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad \text{I.3}$$

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 + z}{h/2} \right)^p \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad \text{I.4}$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par:

$$E(z) = V_1(z)E_1 + [1 - V_1(z)]E_2 \quad \text{pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad \text{I.5}$$

$$E(z) = V_2(z)E_1 + [1 - V_2(z)]E_2 \quad \text{pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad \text{I.6}$$

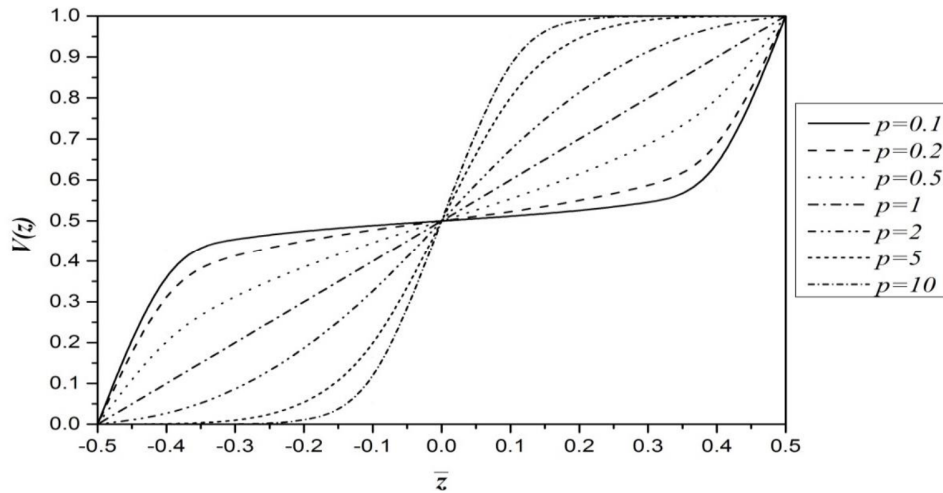


Figure I.8. Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.

Chapitre I: Généralités sur les matériaux fonctionnellement gradués FGM

I.7.3. Les propriétés matérielles de la plaque E-FGM

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme (Delale, 1983):

$$E(z) = E_2 e^{B(z+h/2)} \quad \text{I.7}$$

$$B = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{E_1}{E_2} \right) \quad \text{I.8}$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans la figure I.9.

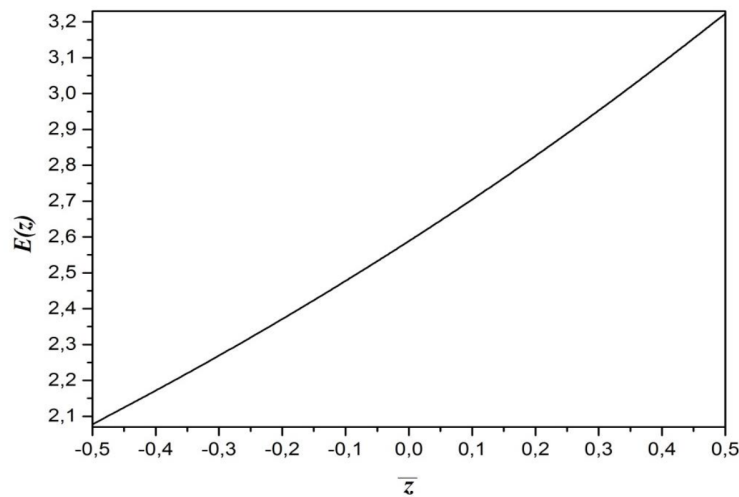


Figure I.9. Variation du module de Young dans une plaque E-FGM.

I.8. Conclusion

Dans ce premier chapitre, nous avons exploré les fondements théoriques et pratiques des matériaux fonctionnellement gradués (FGM). Leur particularité réside dans la variation continue de leurs propriétés, qui permet d'optimiser les performances mécaniques et thermiques des structures, tout en réduisant les défauts liés aux interfaces.

L'historique de leur développement, les différences entre les matériaux constitutifs, ainsi que les lois mathématiques utilisées pour modéliser la distribution des propriétés ont été abordés. Les FGM offrent des solutions innovantes pour des domaines variés tels que l'aéronautique, le génie civil, la biomédecine ou encore l'énergie.

Chapitre II :

Recherche documentaire sur les matériaux sandwichs

Chapitre II : Recherche documentaire sur les matériaux sandwichs

II.1 Introduction

L'évolution constante des technologies modernes impose l'utilisation de matériaux dotés de propriétés mécaniques élevées, spécifiquement adaptées à leurs domaines d'application. Dans le domaine du génie civil, les structures deviennent de plus en plus complexes et performantes, ce qui pousse les ingénieurs à rechercher de nouveaux matériaux à la fois résistants aux différentes sollicitations et légers. C'est dans ce contexte que les matériaux composites trouvent toute leur pertinence.

Ces matériaux innovants offrent de nombreux avantages : une faible densité, une résistance mécanique élevée ainsi qu'une excellente durabilité. D'abord développés pour les besoins exigeants de l'aéronautique, la réduction progressive de leurs coûts de fabrication a permis de généraliser leur emploi à d'autres secteurs tels que l'automobile, la construction navale ou encore le bâtiment.

Parmi les différentes familles de composites, les matériaux sandwich occupent une place importante. Ils constituent les premières structures composites à la fois allégées et performantes, utilisées dans de nombreuses applications.

II.2. Définition des matériaux sandwichs

Les structures sandwich sont généralement composées de deux peaux minces et d'une âme centrale, assemblées par collage ou soudage (voir Figure II.1). Les peaux, aussi appelées semelles, sont des couches de faible épaisseur, mais possédant d'excellentes propriétés mécaniques, telles qu'un module d'élasticité élevé et une grande résistance. L'âme, quant à elle, est un matériau légèrement dense et de forte épaisseur, servant à espacer les deux peaux de manière constante. Cette disposition augmente significativement le moment d'inertie de la structure, ce qui améliore sa rigidité en flexion, tout en maintenant une masse réduite.

Les performances des structures sandwich peuvent être ajustées en modifiant la nature des matériaux utilisés (que les peaux soient identiques ou non), ainsi que les épaisseurs respectives de l'âme et des peaux. En pratique, les peaux ont souvent une même épaisseur notée t_f , tandis que l'épaisseur de l'âme est notée t_c . Le rapport t_f/t_c se situe généralement entre 0,01 et 0,1. Selon les travaux d'Allen et al. (1961), le rapport d/t_f où d est la distance entre l'axe neutre et chaque

Chapitre II : Recherche documentaire sur les matériaux sandwichs

peau, permet de classer les différents types de structures sandwich. Pour une configuration symétrique, on a : $d = t_c + t_f$

Un troisième composant essentiel est l'adhésif, qui joue un rôle crucial dans la cohésion de la structure. Il assure la liaison entre les couches, permettant une transmission efficace des contraintes, notamment en cisaillement. Lorsqu'il s'agit de peaux en matériaux composites, il est parfois possible d'éviter l'usage d'une résine auto-adhésive grâce à l'insertion directe de cette couche d'adhésion.

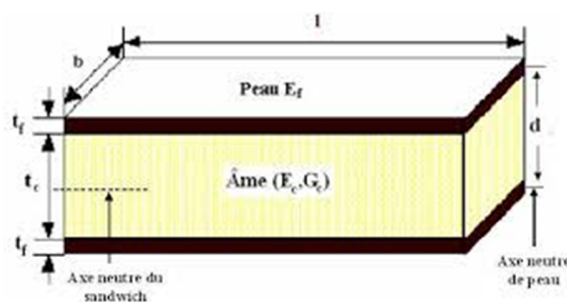


Figure II.1. Schéma d'une structure sandwich (Sudharsan et al., 2003).

Les structures sandwichs sont classées en fonction de la valeur du rapport d/t_f , ils sont donnés par :

1. Si le rapport d/t_f est supérieur à 100, sandwichs à peaux très fines ;
2. Pour un rapport d/t_f compris entre 100 et 5.77 le sandwich est des peaux fines ;
3. Dans le cas où d/t_f est inférieure à 5.77 la structure est considérée à peaux épaisses.

Des bornes limites sont définies en fonction la participation de chaque composant vis-à-vis de la rigidité en flexion et en cisaillement de la structure sandwich. En plus de présenter de bonne propriété mécanique vis-à-vis de la flexion et du flambement, ainsi que leur légèreté, les structures sandwichs présentent aussi de bonnes propriétés phoniques et thermiques. De ce fait ils sont largement utilisés dans les cloisons. Ils sont également utilisés dans domaine du transport et de l'industrie l'aéronautique de plus en plus comme structures secondaires ou primaires, dans les coques de bateaux rapides par exemple ou les par chocs, planchers d'avions ...etc.

II.3. Les éléments constitutants des matériaux sandwichs

Une plaque sandwich typique est représenté sur la (Figure II.2) est constitué :

- De deux peaux fines.
- D'une âme ou cœur.

Ces différentes couches sont liées par un film de colle, cette liaison est couramment appelée l'interface (Berthelot, 2010).

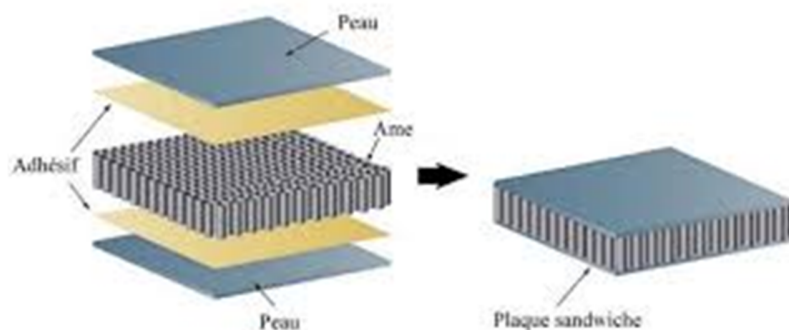


Figure II.2. Les peaux Sandwich Typique (Sudharsan et al., 2003).

II.3.1. Les peaux

D'épaisseur faible généralement, elles peuvent être de n'importe quel matériau pouvant être modelé forme de couche. Elles peuvent être constituées de métal, bois ou composite. La séquence et la nature des couches sont choisies en fonction de l'utilisation des structures composite. Les peaux ont pour objectif de reprendre les efforts de contraintes compression ou de traction engendrée par les efforts de flexion.

II.3.2. L'âme (cœur)

Légère, l'âme a en habituellement une résistance faible à la flexion. La transmission des forces transversales de cisaillements et efforts mécaniques d'une peau à l'autre est leur fonction première. Elles peuvent être fabriqué avec les matériaux suivants :

Chapitre II : Recherche documentaire sur les matériaux sandwichs

- **Mousses** : peu onéreux et léger, ces matériaux sont faciles à usiner et mais présentent une très faible caractéristique mécanique.
- **Balsa** : Est un type de bois connu pour ces utilisations variées et de leurs principaux caractères est leur légèreté, ils sont dotés d'une grande capacité d'isolation acoustique et thermique et non déformation aux variations thermiques.
- **Nid d'abeille** : Cette structure est fabriquée habituellement dans des matériaux en plaques minces (papier polyamide, alliage d'aluminium). Des raies de colle sont appliquées en bande régulières sur les plaques qui sont collées entre elles pour former un bloc, ce dernier est coupé en tranches qui seront, transformées à leur tour en planche de nida ' nid d'abeille ' par expansion. Il existe deux types d'âmes :

a) Les âmes pleines (Berthelot et al., 1996) dans laquelle on retrouve :

- Le Balsa ou bois cellulaires, Diverses mousses cellulaires (Figure II.3)
- Des résines chargées de microsphères creuses de verres nommées mousses syntactiques. Cette âme alvéolaire ou pleine est prise comme isotrope (propriétés matérielles identiques dans toutes les directions).

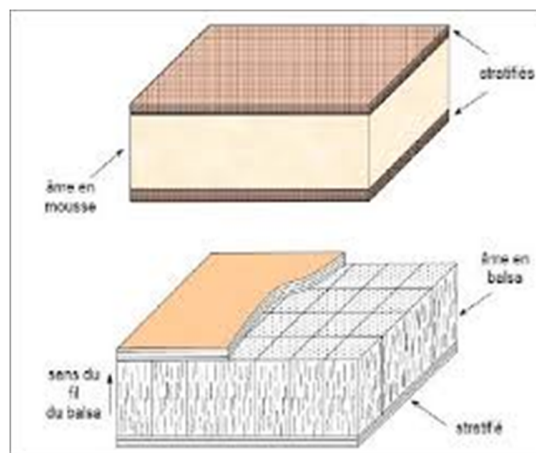


Figure II.3. Matériaux sandwichs à âmes pleines.

b) Les âmes creuses (Berthelot et al., 1996),

Principalement de type nid d'abeilles (Figure II.4) elles sont :

- Des alliages métalliques légers ;
- Des papiers kraft ;
- Du papier polyamide, type papier Nomes.

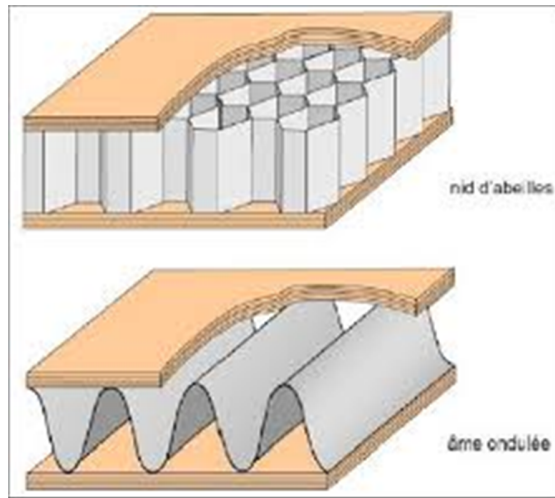


Figure II.4. Matériaux sandwichs à âmes creuses.

II.3.3. L'interface

Les matériaux sandwich peuvent être fabriqués par soudage, collage ou brasage. Dans le cadre des simulations numériques, il est généralement supposé que, quelle que soit la méthode d'assemblage, les différentes couches sont parfaitement liées entre elles, sans glissement ni décollement.

- Une grande légèreté à titre d'exemple la masse surfacique de la coupole de la basilique Saint – Pierre (45 mètres de longueur) et de $\gamma_s = 2600 \text{ Kg/m}^2$ (construite en pierre). La masse surfacique d'une même coupole en sandwich acier/ mousse de polyuréthane est de $\gamma_s = 33 \text{ kg/m}^2$ (Chatin et al., 2000).
- Une grande rigidité à la flexion du fait de l'espacement des peaux.
- Très bonne isolation thermique. Cela dit, les matériaux sandwichs n'amortissent pas et leur résistance au feu n'est pas bonne et pour certains types d'âmes ainsi que le flambement est plus grand que les matériaux classiques.

II.4. Conception des structures sandwichs

Les structures sandwich sont principalement conçues pour résister aux efforts de flexion, mais elles peuvent également être utilisées pour répondre à d'autres exigences telles que l'isolation acoustique ou thermique.

Chapitre II : Recherche documentaire sur les matériaux sandwichs

Le type d'application constitue le critère principal dans le choix de la configuration d'un matériau sandwich. Les ingénieurs doivent ainsi sélectionner les matériaux appropriés qui composent les peaux et l'âme, tout en déterminant les épaisseurs optimales de chacun des éléments. L'objectif est de concevoir une structure capable de supporter efficacement les moments de flexion, les contraintes axiales, ainsi que les efforts de cisaillement induits par les charges appliquées.

En général, la conception repose sur la théorie des structures sandwich, notamment les modèles de poutres ou de plaques homogènes équivalentes, associés à une sélection rigoureuse des matériaux en fonction de leurs propriétés mécaniques et fonctionnelles.

II.4.1. Sélection des matériaux-âme

Sur le plan mécanique, le choix du matériau constituant l'âme d'une structure sandwich repose principalement sur sa résistance au cisaillement. Toutefois, d'autres critères entrent également en jeu, tels qu'un coût de production réduit, une bonne durabilité dans le temps, une faible absorption d'humidité ou d'eau, ainsi qu'un bon comportement thermique. De plus, l'âme doit présenter de bonnes capacités d'isolation thermique et acoustique, en fonction des exigences spécifiques de l'application visée.

II.4.1.1. Résistance en flexion

En général, les structures sandwich présentent une rigidité supérieure à celle des poutres classiques. Cette performance est principalement due à une distribution géométrique efficace des matériaux et à la capacité des peaux à reprendre les efforts, ce qui permet d'obtenir un facteur de rigidité élevé (EI , produit du module d'élasticité par le moment d'inertie).

Il est essentiel que l'âme soit parfaitement adhérente aux peaux, car le comportement mécanique global de la structure sandwich dépend directement de la qualité de l'adhérence entre les différentes couches.

II.4.1.2. Résistance aux chocs

La capacité d'absorption d'énergie de l'âme joue un rôle déterminant dans la résistance à l'impact des structures sandwich. Une augmentation de la densité du matériau constituant l'âme permet généralement d'améliorer cette capacité d'absorption.

Chapitre II : Recherche documentaire sur les matériaux sandwichs

Le comportement à l'impact varie selon la nature de l'âme utilisée. Par exemple, une âme en mousse absorbe l'énergie en la diffusant au sein de sa structure cellulaire, ce qui contribue à protéger efficacement l'ensemble de la structure. C'est pourquoi les mousses thermodurcissables flexibles et les mousses thermoplastiques en PVC sont souvent privilégiés pour leurs excellentes propriétés d'absorption des chocs.

En revanche, les âmes en nid d'abeilles transfèrent l'énergie principalement par les parois verticales, dirigeant l'effort perpendiculairement d'une peau à l'autre. Cette transmission directe peut entraîner, en cas d'impact violent, une déchirure de la peau opposée à celle sollicitée.

II.4.1.3. Résistance à la compression

Dans les structures sandwich, c'est principalement l'âme qui assure la reprise des efforts de compression. Les âmes de type nid d'abeilles sont particulièrement bien adaptées pour résister à des contraintes de compression importantes, exercées perpendiculairement au plan du panneau.

Toutefois, lorsque les charges appliquées sont multidirectionnelles, comme c'est le cas pour les forces hydrostatiques, l'anisotropie propre aux structures en nid d'abeilles peut devenir un point faible, en augmentant le risque de rupture prématurée. Pour améliorer le comportement mécanique dans ces conditions, on utilise souvent une âme hybride, combinant mousse et nid d'abeilles. Cette solution permet d'exploiter les avantages mécaniques des deux matériaux, assurant une meilleure résistance globale face aux sollicitations complexes.

II.4.1.4. Résistance au décollement (pelage)

Une rupture dans une structure sandwich peut résulter d'une faible résistance au décollement, conduisant au délaminage des peaux. Ce phénomène est particulièrement critique dans les structures à âme en mousse, où la résistance du joint de colle entre l'âme et les peaux doit être supérieure à la résistance au cisaillement propre à l'âme elle-même.

Les mousses en PVC offrent généralement une meilleure adhésion que d'autres matériaux tels que le balsa ou le polyméthacrylimide (PMI). En revanche, les mousses de polyuréthane (PU) présentent une fragilité accrue, ce qui complique le processus de collage. Pour les âmes en nid d'abeilles, la faible surface de contact entre l'âme et les peaux rend difficile l'obtention d'une résistance élevée au pelage, limitant ainsi leur efficacité dans certaines applications sollicitées en décollement.

Chapitre II : Recherche documentaire sur les matériaux sandwichs

II.4.1.5. L'isolation

La réduction de la masse, l'isolation thermique et acoustique, ainsi que l'amortissement des vibrations sont des critères essentiels dans de nombreuses applications.

Grâce à leur structure cellulaire, de nombreuses mousses offrent d'excellentes performances en termes d'isolation acoustique et thermique, tandis que les structures sandwich en nid d'abeilles présentent des résultats moins performants et plus limités dans ces domaines.

Ainsi, lorsque l'on recherche de bonnes propriétés d'isolation acoustique et thermique, il est recommandé d'opter pour des structures sandwich à âme en mousse. En revanche, si la priorité est la réduction du poids, les structures sandwich avec une âme en nid d'abeilles sont généralement préférées.

II.4.1.6. Absorption d'eau

Les propriétés mécaniques peuvent diminuer de manière significative en raison de l'absorption d'eau et d'humidité. Dans le cas où les peaux du sandwich présentent des imperfections ou sont endommagées, l'utilisation d'âmes sensibles à l'humidité ou à l'eau accroît encore davantage le risque de délaminage. Même en conditions normales d'utilisation, l'évaporation de l'eau absorbée à l'intérieur peut provoquer un délaminage des peaux. Pour remédier à ce problème, un traitement thermique additionnel de l'âme est essentiel avant la mise en service de la structure sandwich.

II.5. Sollicitations et Modes de dégradations des sandwichs

Les efforts de flexion ont les charges principales reprise par ces structures, la compression, la torsion ou la traction (Figure II.5). Une structure sandwich sont donc soumise à :

- Moment de flexion et de torsion,
- Effort normal et tranchant.



Figure II.5. Différences sollicitations (M, N, T) appliqués à un sandwich

Les différentes modes de rupture sont représentées ici d'une structure sandwich soumise à la flexion, pour mieux comprendre le comportement mécanique de ces structures, (Jin et al., 2003), (Avila et al., 2007), (Yoshi et al., 1992), (Thomesen et al., 1995), (Belouettar et al., 2009).

II.6. Hypothèses de la théorie des matériaux sandwichs

La théorie des matériaux sandwichs est basée sur les hypothèses suivantes :

- L'épaisseur de l'âme est plus élevée que celle des peaux $c \gg \square_1, \square_2$
- Les déplacements du cœur u_c et u_v suivant les directions x et y sont des fonctions linéaires de la coordonnée z .
- Les déplacements u et v suivant les directions x et y sont uniformes dans l'épaisseur des peaux.
- Le déplacement transverse w est indépendant de la variable z : la déformation ε_{zz} est négligée.
- L'âme ne transmet que les contraintes de cisaillement transverse σ_{xz}, σ_{yz} : les contraintes σ_{xx} et σ_{yy}, σ_{xy} et σ_{zz} sont négligées.
- Les contraintes de cisaillement transverse τ_{xy} et τ_{yz} sont négligées dans les peaux.

II.7. Techniques d'assemblages des matériaux sandwichs

II.7.1. Le collage de peau sur l'âme

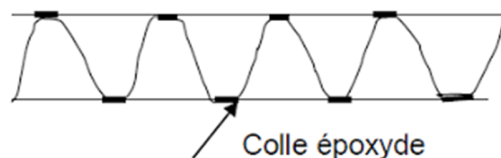
Pour accomplir pleinement leur rôle, les matériaux sandwichs doivent présenter une adhésion parfaite entre les peaux et l'âme, afin d'assurer une répartition optimale des efforts mécaniques.

Chapitre II : Recherche documentaire sur les matériaux sandwichs

Cette liaison efficace permet aux peaux de reprendre les efforts de traction et de compression, tandis que l'âme résiste principalement aux efforts de cisaillement.

L'assemblage est réalisé, comme illustré dans la Figure II.6.a, b, c, par un collage utilisant des résines compatibles avec les matériaux constitutifs de la structure (Jean-Marie Berthelot, 2010).

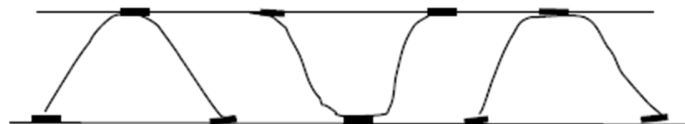
Afin de garantir cette qualité d'adhésion, le processus de collage doit être rigoureusement contrôlé, notamment en ce qui concerne la température, la pression d'application et le temps de durcissement. Toute défaillance dans l'une de ces étapes peut entraîner une délamination prématurée ou une perte d'efficacité mécanique. L'emploi de méthodes de contrôle non destructif, telles que l'ultrason ou la thermographie infrarouge, permet de vérifier l'intégrité des interfaces collées avant mise en service.



(a) : Collage de tôle ondulée ou raidisseurs ω sur tôle



(b): Panneaux avec tubes carrés



(c) : Panneaux avec ω inversés

Figure II.6. Panneaux réalisés par collage à partir de profils divers.

Chapitre II : Recherche documentaire sur les matériaux sandwichs

II.7.2. Technique de pliage

Après mise en service les structures sandwichs peuvent être formés par pliage comme il est présenté sur la (Figure II.7) (Berthelot., 2010).

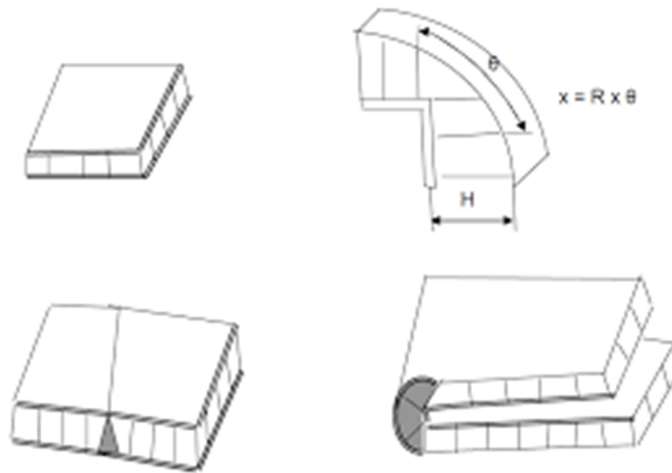


Figure II.7. Pliage de panneaux sandwichs.

Premièrement on enlève une bande de l'un des revêtements en suivant l'axe de la pliure et sur une largeur qui est fonction de l'épaisseur de la plaque et l'angle de pliage souhaité, ensuite on plie et on maintient l'angle dans la position choisie.

II.8. Intérêt des structures sandwichs

Comparées aux composites traditionnels dits *monolithiques*, les structures composites sandwichs se distinguent par une rigidité spécifique nettement plus élevée. L'âme, dont la densité est généralement de l'ordre de 100 kg/m^3 , permet d'obtenir une structure à la fois légère et rigide. En jouant sur l'épaisseur et la nature de l'âme ainsi que sur les matériaux constitutifs des peaux, il est possible d'adapter les propriétés mécaniques du sandwich aux besoins spécifiques de l'application visée.

L'optimisation de la rigidité, qui influence directement le comportement en flexion, peut être obtenue soit par l'augmentation de l'épaisseur de l'âme ce qui améliore le moment d'inertie de la structure, soit par l'utilisation de peaux à module d'élasticité élevé. Grâce à la faible densité de l'âme, ces modifications n'induisent qu'un impact limité sur la masse totale du composite.

Chapitre II : Recherche documentaire sur les matériaux sandwichs

Les matériaux sandwichs offrent des avantages majeurs par rapport aux matériaux classiques. Leur légèreté, leur résistance mécanique et chimique, leur faible besoin de maintenance, ainsi que la liberté de formes qu'ils autorisent, en font des solutions particulièrement attractives. Ils permettent de prolonger la durée de vie des équipements grâce à leurs excellentes performances structurelles et leur durabilité.

En outre, ces matériaux participent à l'amélioration de la sécurité, notamment par leur meilleure résistance aux chocs et, pour certains, au feu. Ils peuvent également offrir une isolation thermique, acoustique, voire électrique, supérieure. Ces caractéristiques ouvrent la voie à des conceptions plus innovantes, légères et multifonctionnelles. Dans tous les secteurs d'application bâtiment, transport, industrie, électronique, etc. les composites sandwichs constituent une réponse technologique performante et compétitive face aux exigences modernes.

II.9. Domaines d'application des matériaux sandwichs. (Tahir et al., 2021).

Les structures sandwichs sont de largement employé dans la conception des structures minces. Ils sont utilisés dans l'automobile, l'aéronautique, la construction ferroviaire et navale.

II.9.1. Construction aérospatiale

Les trappes de train d'atterrissage, les carénages divers (entre l'aile et le fuselage, les mâts de réacteurs, ou encore les glissières de volets) sont des pièces dites secondaires, généralement réalisées en panneaux sandwichs. Elles sont souvent fabriquées par cuisson de stratifiés composites (carbone/époxyde ou Kevlar/époxyde) sur des âmes en nids d'abeilles (*nida*) en Nomex ou en aluminium, assemblées à l'aide d'adhésifs époxydes en film.

Les capots moteurs, quant à eux, sont majoritairement construits en matériaux sandwichs, constitués de peaux en carbone/époxyde collées sur des âmes en nid d'abeille aluminium (Belouettar et al., 2009). Afin de garantir une résistance thermique suffisante, des adhésifs spécifiques sont utilisés, notamment à base d'époxyde phénolique ou de polyamide.

Les panneaux acoustiques, également de type sandwich, possèdent une peau intérieure côté moteur perforée, sur laquelle est collé un tissu microporeux, assurant à la fois absorption acoustique et résistance mécanique.

Chapitre II : Recherche documentaire sur les matériaux sandwichs

Dans le domaine de l'hélicoptère, un grand nombre de pièces structurales sont réalisées en matériaux monolithiques ou en panneaux sandwichs, avec des peaux composites collées sur des âmes en nid d'abeille (Hexcel et al., 2004).

Enfin, dans les secteurs de l'aéronautique et de l'armement, les exigences en matière de résistance thermique et de stabilité face aux variations de température sont encore plus élevées. À titre d'exemple, les réflecteurs solaires sont constitués de peaux en carbone/époxyde et d'âmes en nid d'abeille Nomex, assurant légèreté et stabilité dimensionnelle dans des environnements extrêmes.

II.9.2. Construction automobile et ferroviaire

Les structures sandwichs sont également largement utilisées dans le secteur des transports terrestres, notamment pour la construction d'autobus, de camions et de pare-chocs, où elles sont assemblées par collage. Dans ce domaine, les peaux sont généralement réalisées en stratifiés verre/polyester, tandis que l'âme est constituée de mousse de polystyrène expansé, offrant une bonne combinaison de légèreté et de résistance.

Les tramways et les métros, en raison de leurs démarrages et arrêts fréquents, représentent un marché particulièrement adapté à l'utilisation des structures sandwichs. Les portes d'accès sont fabriquées à partir de panneaux sandwichs avec des peaux en composite verre/polyester ou en aluminium, collées à l'aide d'adhésifs structuraux. De même, les éléments intérieurs sont constitués de panneaux sandwichs intégrant des âmes en nid d'abeille aluminium ou en Nomex, assurant à la fois légèreté, rigidité et résistance aux vibrations.

II.9.3. Autres Domaines d'application des matériaux sandwichs

Génie Civil : Pont à poutre en caisson, les cheminées, les fondations élastiques (ces structures de plaques peuvent être trouvées dans différents types d'application industrielles tel que les radiers), réservoirs de stockage, les piscines.

Aéronautique : Composants de moteur-fusée, corps des avions spatiaux.

Domaine chimique : les échangeurs de chaleur, tubes de chaleur, récipient de réaction.

Ingénierie : outils de coupe, élément de moteur (Kaddouri Ahmed et al., 2021).

II.10. Conclusion

Ce chapitre est consacré à la définition et à la présentation des notions fondamentales relatives aux structures sandwich. Dans un premier temps, les principales propriétés mécaniques des matériaux sandwichs seront exposées, ainsi que les différents types d'endommagements auxquels ces structures peuvent être sujettes.

De nombreux ouvrages ont été consacrés à l'étude des structures en FGM. La littérature technique recense une grande variété de recherches traitant des problématiques liées au comportement mécanique de ces structures, telles que la stabilité, le flambement et les vibrations. Ces études portent notamment sur des éléments structuraux tels que les poutres, les plaques, les coques, ainsi que d'autres formes intégrant des matériaux à gradient de propriétés.

Chapitre III :

Rappel sur les théories Des plaques

Chapitre III: Rappel sur les théories Des plaques

III.1. Introduction

Les plaques jouent un rôle essentiel dans l'analyse des structures, notamment en génie civil et en mécanique des solides. Étant des éléments minces, elles présentent un chapitre vise à rappeler les principales théories qui ont été développées pour modéliser la déformation des plaques sous différentes sollicitations.

On y présente d'abord la théorie classique de Love-Kirchhoff (CPT), bien adaptée aux plaques minces mais insuffisante pour les cas où les effets de cisaillement transverse sont significatifs. Pour pallier cette limite, la théorie de Reissner-Mindlin (FSDT) est ensuite introduite, suivie des théories de cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) qui permettent une meilleure représentation des contraintes à travers l'épaisseur. Le chapitre aborde également des modèles raffinés comme la RPT, et des approches plus sophistiquées telles que la théorie de zig-zag, conçues pour mieux capturer les effets d'interface et les comportements multicouches. Ces théories sont essentielles pour la modélisation des plaques composites, sandwichs et FGM.

III.2. Les modèles analytiques des plaques FGM

III.2.1. La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT)

Ce modèle est basé sur une distribution linéaire des déplacements suivant l'épaisseur (Reissner 1961). L'hypothèse adoptée est celle de Kirchhoff 1950 des contraintes planes, les déformations dues aux cisaillements transverses sont négligées. La normale à la surface moyenne de la plaque reste perpendiculaire et droite à celle-ci après déformation (Figure III.1) ce qui revient à négliger les effets de déformation en cisaillement transverse.

Plusieurs chercheurs ont utilisé cette théorie telle que Yanga et Shen (2003) Ghannadpouret Alinia (2009), Chakraverty et Pradhan (2014), Chakraverty et Pradhan (2014), Ruan et Wang (2014), Loy et al. (1999), Du et al. (2014), Ebrahimi et Najafizadeh (2014). En se basant sur les hypothèses ci-dessus, le champ de déplacement est donné par :

Chapitre III: Rappel sur les théories Des plaques

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad \text{III.1}$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad \text{III.2}$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad \text{III.3}$$

Avec (u_0, v_0, w_0) sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ($z = 0$).

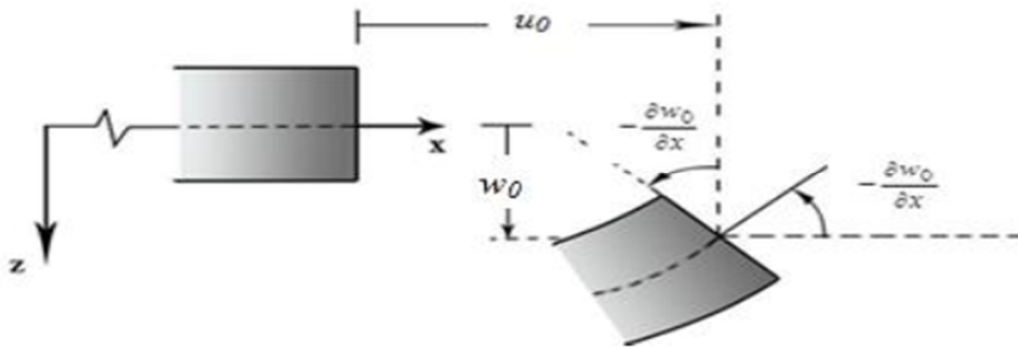


Figure III.1. Illustration de la plaque de Love Kirchhoff.

III.2.2. La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)

Puisque la CPT donne des résultats non précis pour les plaques épaisses, la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre a prolongée la théorie classique des plaques en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse. Dans ce cas les contraintes et les déformations sont uniformes et constantes à travers l'épaisseur de la plaque, ce qui nécessite l'introduction d'un du facteur de correction de cisaillement. Les études sur la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) peuvent être trouve dans les références (Reissner 1945; Mindlin 1951). La FSDT est utilisé par plusieurs chercheurs Reddy (1998), Della Croce et Venini (2004), Memar Ardestani et al. (2014), Bouazza et al. (2010), Valizadeh et al. (2013). La théorie du premier ordre est basée sur le champ de déplacement suivant :

Chapitre III: Rappel sur les théories Des plaques

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z\phi_x(x, y) \quad \text{III.4}$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z\phi_y(x, y) \quad \text{III.5}$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad \text{III.6}$$

Avec : $\phi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x}$, $\phi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y}$

Où (u_0, v_0, w_0) et (ϕ_x, ϕ_y) sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes y et x, respectivement.

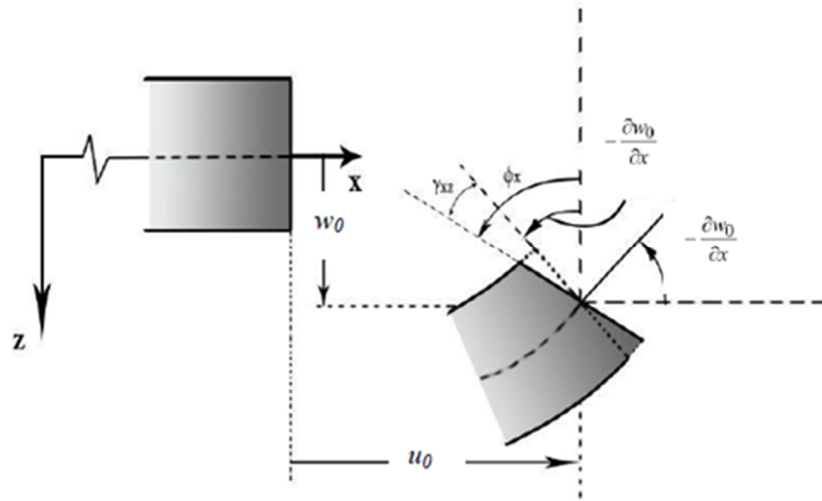


Figure III.2 : Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin.

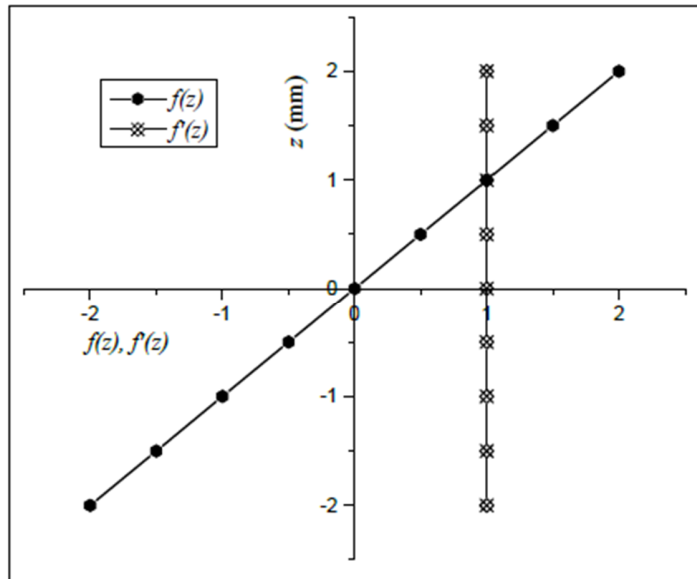


Figure III.3. Variation de la fonction de gauchissement $f(z) = z$ et $f'(z)$ suivant l'épaisseur.

Pour éviter l'introduction d'un facteur de correction, qui est difficile à déterminer à cause de sa dépendance à la fois, de la géométrie, du coefficient de Poisson à travers l'épaisseur, des charges appliquées et des conditions aux limites, plusieurs auteurs proposent des théories à un ordre supérieur.

III.2.3. La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT) :

Une meilleure modélisation du comportement réel des plaques épaisses, requière une reproduction fidèle de champ de cisaillement transverse dans l'épaisseur de la plaque, plusieurs théories ont été proposées, où la distribution de champs de cisaillement transverse est d'une part non linéaire et d'autre part les contraintes de cisaillement τ_{xz} et τ_{yz} s'annulent sur les faces supérieure et inférieure de la plaque.

En général, le champ de déplacement dans la théorie d'ordre élevée s'écrit, comme suit :

Chapitre III: Rappel sur les théories Des plaques

$$u(x, y, z, t) = u_0 - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + f(z) \phi_x(x, y) \quad \text{III.7}$$

$$v(x, y, z, t) = v_0 - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + f(z) \phi_y(x, y) \quad \text{III.8}$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad \text{III.9}$$

Avec :

$$\phi_x(x, y) = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \quad \text{III.10}$$

$$\phi_y(x, y) = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \quad \text{III.11}$$

u_0 , v_0 , w_0 déplacements du plan moyen par rapport à l'axe x , y et z , respectivement. ϕ_x et ϕ_y les rotations de la section de la plaque par rapport à l'axe y et x , respectivement. $f(z)$ est la fonction de cisaillement caractérisant la théorie d'ordre élevé. On remarque que cette équation est une généralisation de la théorie des plaques, pour une valeur de $f(z) = 0$, cela nous ramène à la théorie classique des plaque minces, pour une valeur de $f(z) = z$, cela nous ramène à la théorie du cisaillement du premier ordre.

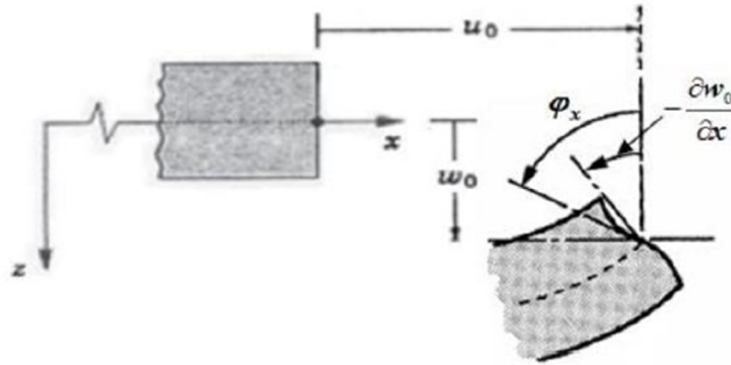


Figure III.4. Illustration de la plaque d'ordre élevé (Reddy, 1997).

Chapitre III: Rappel sur les théories Des plaques

III.2.4. Revue sur les différents modèles de la théorie d'ordre élevé :

Plusieurs chercheurs proposent quelques contributions importantes de développement de modèles d'ordre élevés pour franchir les limites des théories du premier ordre (Ambartsumyan (1969) Reissner (1945), Levinson, (1981) Whitney, (1973) ; Nelson, (1974) ; Lo, (1977) ; Touratier, (1991), ces modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs de déplacement à travers l'épaisseur, et qui permettent de représenter le gauchissement de la section transversale dans la configuration déformée par des fonction de cisaillement $f(z)$.

Voici quelques contributions importantes de développement de modèles d'ordre supérieur qui se sont distingués dans la littérature et qui diffèrent par la fonction de formes $f(z)$:

- L'approche d'Ambartsumyan (1969) avec ;

$$f(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad \text{III.12}$$

- L'approche de Reissner (1945), avec ;

$$f(z) = \frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad \text{III.13}$$

- L'approche de Levinson, (1981) et Reddy Avec ;

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad \text{III.14}$$

- L'approche de Aydogdu (2005) avec ;

$$f(z) = z \alpha^{\frac{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}{\ln(\alpha)}} \quad \alpha > 0 \quad \text{III.15}$$

- L'approche de El Meiche et al. (2011) avec ;

$$f(z) = \frac{\frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) - z}{\cosh(\pi / 2 - 1)} \quad \text{III.16}$$

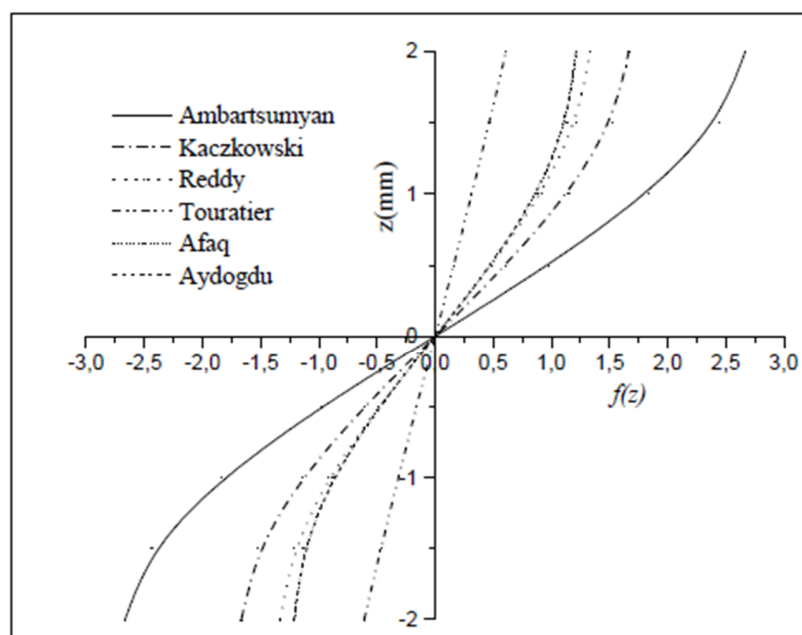


Figure III.5. Variation de la fonction de forme $f(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur.

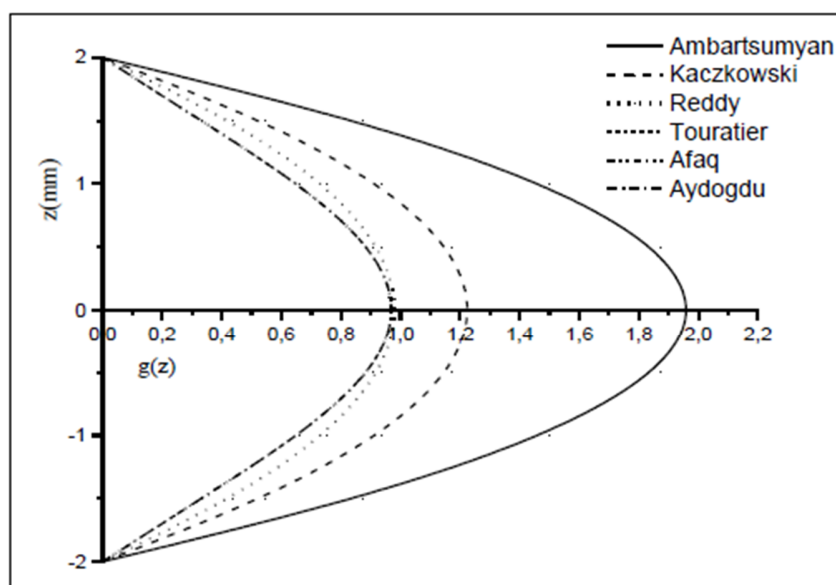


Figure. III.6. Variation de la dérivée de la fonction de forme $f'(z)$ des différents modèles suivant l'épaisseur.

Chapitre III: Rappel sur les théories Des plaques

III.2.5. Nouvelle théorie raffinée de déformation des plaques

En (2002) un nouveau modèle raffiné pour les plaques isotropes (RPT : Refined Plate Theory) a été développé par Shimpi. Ce modèle ne contient que deux variables qui donne seulement quatre inconnus à trouver au lieu des cinq dans le cas classique, avec une distribution parabolique des contraintes cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque. En plus, cette théorie n'exige pas de facteur de correction de cisaillement Aussi, elle est similaire avec la théorie classique des plaques quant aux équations du mouvement, les conditions aux limites et les expressions des moments. la flexion des plaques FGM a été étudié par Ait Atmane et al. (2010) en utilisant la RPT. Récemment Thai et Kim (2010, 2011) et Hadji et al. (2011) ont adapté la RPT, avec succès, au flambement des plaques orthotropes, et à la vibration libre des plaques stratifiées et sandwichs respectivement.

Dans la présente thèse, nous proposons l'utilisation de cette théorie raffinée pour l'étude de la stabilité des plaques épaisses isotrope et orthotrope et fonctionnellement graduées (FGM) avec ou sans la présence de fondations élastique. En plus la position exacte de la surface neutre de telle plaque sera déterminée. Le champ de déplacement de telle théorie s'écrit de la façon suivante :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad \text{III.17}$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad \text{III.18}$$

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \quad \text{III.19}$$

III.2.6. Théorie de zig-zag

Pour mieux décrire la déformation en cisaillement des matériaux composites, certains auteurs ont associé la théorie d'ordre élevé à celle dite de zig-zag, Cette dernière est destinée justement à mieux décrire les effets d'interface. Ainsi, différents modèles issus de l'approche par couche ont été proposés. Le multicouche est subdivisé en sous-structures (correspondant en fait à chaque couche ou chaque ensemble de couches). On applique à chaque sous-structure une théorie du premier ordre ou un modèle d'ordre élevé. La cinématique des modèles zig-zag satisfait les conditions de contact et elle est indépendante du nombre de couches. L'avantage principal du champ de déplacement des modèles zig-zag réside dans la bonne modélisation de la distorsion de

Chapitre III: Rappel sur les théories Des plaques

la normale à la surface déformée, ainsi que dans la vérification des conditions de continuité, et ce sans augmenter pour autant le nombre et l'ordre des équations fondamentales de la théorie du premier ordre. Le recours à des coefficients de correction pour cisaillement transverse est évité.

En se basant sur le concept de Di Sciuva plusieurs auteurs ont réalisé des améliorations significatives pour le modèle zig-zag. L'amélioration principale est l'introduction d'une distribution non linéaire des déplacements. On superpose le champ zig-zag (linéaire par morceau) à un champ de déplacement d'ordre élevé (souvent cubique) figure III.7.

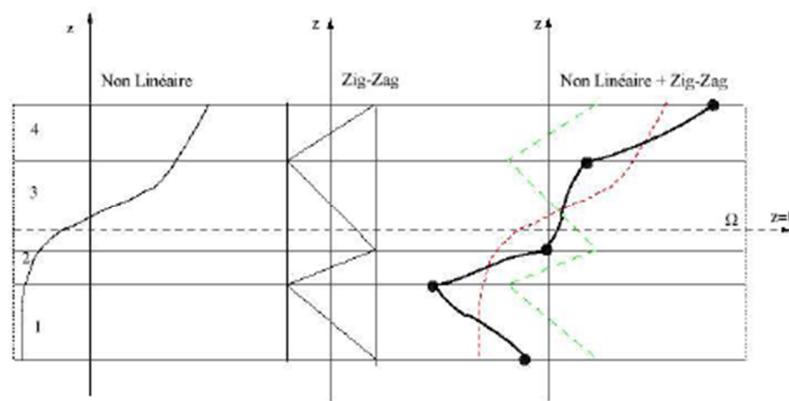


Figure III.7. Champ de déplacements du modèle zig-zag d'ordre élevé

III.3. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un aperçu des principales théories utilisées pour modéliser le comportement des plaques. La progression de la théorie classique aux théories d'ordre supérieur reflète l'évolution des besoins en ingénierie, en particulier avec l'émergence de matériaux composites et gradués fonctionnellement.

Chaque théorie présente ses avantages et ses limites selon l'épaisseur de la plaque, le type de matériau, et la précision recherchée. Les modèles de type HSDT et les approches comme la RPT et le zig-zag offrent une meilleure représentation des déformations, sans nécessiter de facteurs de correction. Ce cadre théorique est indispensable pour étudier avec précision les structures modernes, notamment les plaques sandwichs poreuses FGM étudiées dans ce travail.

Chapitre IV :
Etude analytique de la
vibration des plaques
sandwiches poreuses P-FGM
et S-FGM

Chapitre IV: Etude analytique de la vibration de plaques sandwichs poreuses P-FGM et S-FGM.

IV.1.Introduction

Les matériaux à gradient de propriétés (FGM) représentent une classe avancée de matériaux composites dont les propriétés mécaniques varient graduellement à travers l'épaisseur, permettant ainsi de combiner les avantages des matériaux céramiques et métalliques. Cette variation continue améliore la résistance thermique, Il réduit les concentrations de contraintes et améliore la durabilité des structures exposées à des environnements sévères. Les plaques sandwich en FGM, constituées de couches aux propriétés hétérogènes, trouvent des applications dans les domaines de l'aéronautique, de l'ingénierie mécanique et des structures navales.

Dans cette étude, une attention particulière est accordée à l'effet de la porosité et des imperfections dans la distribution des matériaux sur les comportements en vibration des plaques sandwichs FGM. En effet, la présence de porosités, inévitables lors de la fabrication, modifie significativement les propriétés mécaniques du matériau, telles que le module de Young, et influence la réponse dynamique de la plaque. De plus, le type de distribution (uniforme, non uniforme ou logarithmique) ainsi que le rapport géométrique (tel que le rapport d'aspect ou le rapport largeur/épaisseur) jouent un rôle déterminant dans l'analyse du comportement mécanique.

Ce travail adopte une théorie raffinée de déformation des plaques prenant en compte les effets de cisaillement transversal sans nécessiter de facteur de correction. Les équations de mouvement sont dérivées à partir du principe de Hamilton, et la méthode de Navier est utilisée pour obtenir une solution analytique sous des conditions aux limites simples. Les résultats numériques obtenus mettent en évidence l'influence des paramètres géométriques, de la distribution de porosité et de l'indice de fraction volumique sur les fréquences naturelles des plaques FGM.

IV.2. Hypothèses de base

Les hypothèses de la présente théorie raffinée des plaques sont les suivantes :

- Les déplacements sont petits par rapport à l'épaisseur de la plaque et, en conséquence les déformations sont infinitésimales.
- Le déplacement transverse contient deux composantes de flexion w_b , et de cisaillement w_s . Ces composantes sont en fonction des coordonnées x et y et du temps t

Chapitre IV: Etude analytique de la vibration de plaques sandwichs poreuses P-FGM et S-FGM.

$$w(x, y, z, t) = w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t) \quad \text{IV.1}$$

- La contrainte normale transversale σ_z , est négligeable devant les autres contraintes planes σ_x Et σ_y ,
- Les déplacements U dans la direction x, et V dans la direction y sont définis par
- Démolition des déplacements dus aux effets d'extension, de flexion et de cisaillement.

$$U = u + u_b + u_s, V = v + v_b + v_s \quad \text{IV.2}$$

- Les composantes de flexion u_b , et v_b , sont supposées les mêmes déplacements donnés par la Théorie classique des plaques. Donc, les expressions pour u_b , et v_b , peuvent être donné comme :

$$u_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial x}, v_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial y} \quad \text{IV.3}$$

- A partir de l'état de déplacement de composantes u, et v, se dérivent les composantes de déformation γ_{xz}, γ_{yz} qui varient paraboliquement à travers l'épaisseur de la plaque.
- Tout en assurant la condition de nullité des contraintes de cisaillement τ_{xz}, τ_{yz} aux surfaces inférieure et supérieure de la plaque. Par conséquent, les expressions pour u_s , et v_s , peuvent être donné comme :

$$u_s = -f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x}, v_s = -f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad \text{IV.4}$$

IV3.1. FGM imparfait avec porosité uniforme (Imparfait I)

Dans ce modèle, la porosité est uniformément répartie dans la couche FG, tandis que la couche centrale est un matériau homogène (céramique/métal pur). En utilisant la règle de mélange, les propriétés effectives du matériau FG P_FG peuvent être exprimées comme :

Chapitre IV: Etude analytique de la vibration de plaques sandwichs poreuses P-FGM et S-FGM.

$$\begin{cases} P^{(1)}(z) = P_m + (P_c - P_m)V^{(1)}(z) - \frac{\xi}{2}(P_c + P_m) \\ P^{(2)}(z) = P_m + (P_c - P_m)V^{(2)}(z) \\ P^{(3)}(z) = P_m + (P_c - P_m)V^{(3)}(z) - \frac{\xi}{2}(P_c + P_m) \end{cases}$$

où ξ représente le coefficient de porosité ($0 \leq \xi \leq 1$). P_m et P_c désignent respectivement les propriétés du métal et de la céramique.

IV3.2. FGM imparfait avec porosité directionnelle (Imparfait II)

Dans ce modèle, la porosité est supposée varier dans la direction d'épaisseur de la plaque FG selon :

$$\begin{cases} P^{(1)}(z) = P_m + (P_c - P_m)V^{(1)}(z) - \frac{\xi}{2}(P_c + P_m) \left[1 - \frac{|2z - (h_0 + h_1)|}{h_1 - h_0} \right] \\ P^{(2)}(z) = P_m + (P_c - P_m)V^{(2)}(z) \\ P^{(3)}(z) = P_m + (P_c - P_m)V^{(3)}(z) - \frac{\xi}{2}(P_c + P_m) \left[1 - \frac{|2z - (h_3 + h_2)|}{h_3 - h_2} \right] \end{cases}$$

IV3.3. FGM imparfait avec distribution logarithmique (Imparfait III)

Ce modèle suppose une distribution logarithmique de la porosité dans la direction de l'épaisseur :

$$\begin{cases} P^{(1)}(z) = P_m + (P_c - P_m)V^{(1)}(z) - \log\left(1 + \frac{\xi}{2}\right)(P_c + P_m) \left[1 - \frac{|2z - (h_0 + h_1)|}{h_1 - h_0} \right] \\ P^{(2)}(z) = P_m + (P_c - P_m)V^{(2)}(z) \\ P^{(3)}(z) = P_m + (P_c - P_m)V^{(3)}(z) - \log\left(1 + \frac{\xi}{2}\right)(P_c + P_m) \left[1 - \frac{|2z - (h_3 + h_2)|}{h_3 - h_2} \right] \end{cases}$$

IV3.4. FGM imparfait avec distribution en arc linéaire (Imparfait IV)

Ce modèle suppose que la porosité est minimale au centre et maximale aux interfaces :

Chapitre IV: Etude analytique de la vibration de plaques sandwichs poreuses P-FGM et S-FGM.

$$\begin{cases} P^{(1)}(z) = P_m + (P_c - P_m)V^{(1)}(z) - \frac{\xi}{2}(P_c + P_m) \left[1 - \frac{z - h_1}{h_0 - h_1} \right] \\ P^{(2)}(z) = P_m + (P_c - P_m)V^{(2)}(z) \\ P^{(3)}(z) = P_m + (P_c - P_m)V^{(3)}(z) - \frac{\xi}{2}(P_c + P_m) \left[\frac{z - h_3}{h_2 - h_3} \right] \end{cases}$$

IV.3. Cinématique et équation constitutive

En se basant, sur les hypothèses de la section précédente, le champ de déplacement peut être obtenu utilisant Eqs. (IV.1) - (IV.4) comme :

$$U(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad \text{IV.5.a}$$

$$V(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad \text{IV.5.b}$$

$$w(x, y, z, t) = w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t) \quad \text{IV.5.c}$$

Ou, u_0 et v_0 , sont les déplacements du plan médian de la plaque dans les directions x et y , respectivement ; w_b et w_s , sont les composants de flexion et de cisaillement de déplacement transversal, respectivement. Il convient de noter que, contrairement à la théorie de cisaillement de premier ordre FSDPT, cette théorie ne nécessite pas de facteur de correction de cisaillement. Dans ce chapitre, la présente théorie de déformation de cisaillement proposer pour l'analyse de la vibration des plaques FGM :

$$f(z) = -\frac{1}{4}z + \frac{5}{3}z^3 \quad \text{IV.6}$$

La fonction de cisaillement proposée $f(z)$ dans l'équation (IV.6) satisfait les conditions de nullité de la contrainte de cisaillement sur les faces supérieure et inférieure de la plaque sans l'aide de facteurs de correction de cisaillement, contrairement à la théorie de cisaillement de premier ordre FSDPT et prend en compte les effets de cisaillement transversal et la distribution parabolique des contraintes de cisaillement suivant l'épaisseur de la plaque. Il est claire que le champ de déplacement dans l'équation (IV.5) introduit seulement quatre

Chapitre IV: Etude analytique de la vibration de plaques sandwichs poreuses P-FGM et S-FGM.

variables (u_0, v_0, w_b, w_s) , Le champ de déformations se déduit des déplacements de l'équation (IV.5) soit:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} \quad \text{IV.7}$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad \text{IV.8}$$

Où : ε_x et ε_y : Déformation dans les directions x et y respectivement.

$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$: Déformation angulaire dans les plans xy, yz et xz respectivement.

$\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0$: Déformation de la surface moyenne dans les directions x et y respectivement

k_x^b, k_y^b : Courbure due à la flexion.

k_x^s : Courbure due au cisaillement.

k_{xy}^b, k_{xy}^s : Courbure de torsion dans le plan xy .

$g(z)$: Expression en fonction du dérivé de $f(z)$.

Avec :

$$\varepsilon_{xx}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x} \quad k_{xx}^b = - \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \quad k_{xx}^s = - \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \quad \text{IV.9a}$$

$$\varepsilon_{yy}^0 = \frac{\partial v_0}{\partial y} \quad k_{yy}^b = - \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \quad k_{yy}^s = - \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \quad \text{IV.9b}$$

Chapitre IV: Etude analytique de la vibration de plaques sandwichs poreuses P-FGM et S-FGM.

$$\gamma^0 = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ \frac{\partial w_s}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad \text{IV.9c}$$

Les relations de comportement linéaires d'une plaque FGM peuvent s'écrire :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(n)} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}^{(n)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^{(n)} \quad \text{IV.10}$$

Où $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz})$ sont les composantes de contraintes et déformations, respectivement. Q_{ij} , sont les coefficients de rigidité, peuvent être exprimés par :

$$Q_{11}^{(n)} = Q_{22}^{(n)} = \frac{E(z)}{1-\nu^2}, Q_{12}^{(n)} = \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2}, = \nu Q_{11}^{(n)} \quad \text{IV.11a}$$

$$Q_{44}^{(n)} = Q_{55}^{(n)} = Q_{66}^{(n)} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad \text{IV.11b}$$

IV.3. Équations de mouvement

Le principe d'énergie d'Hamilton est utilisé ici pour obtenir les équations de mouvement appropriées pour le champ de déplacement et les équations constitutives, Le principe peut être énoncé Sous forme analytique :

$$0 = \int_0^t (\delta U - \delta T) dt \quad \text{IV.12}$$

Où δU est la variation de l'énergie de déformation et δT est la variation de l'énergie cinétique de la plaque FGM.

La variation de l'énergie de déformation de la plaque est donnée par :

Chapitre IV: Etude analytique de la vibration de plaques sandwichs poreuses P-FGM et S-FGM.

$$\begin{aligned}
 \delta U &= \int_V [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}] dV \\
 &= \int_A [N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b \\
 &\quad + M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^s + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^s] dA = 0
 \end{aligned} \tag{IV.13}$$

Où A est la surface et N , M , et S sont les forces et moments résultants et sont définies par :

$$(N_i, M_i^b, M_i^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, f) \sigma_i dz, (i = x, y, xy) \tag{IV.14a}$$

$$(S_{xz}^s, S_{yz}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} g(\tau_{xz}, \tau_{yz}) dz \tag{IV.14b}$$

La variation de l'énergie cinétique de la plaque peut être exprimée comme :

$$\begin{aligned}
 \delta T &= \int_{-h/2}^{h/2} \int_{\Omega} [u' \delta u' + v' \delta v' + w' \delta w'] \rho(z) d\Omega dz \\
 &= \int_A \{ I_0 [u'_0 \delta u'_0 + v'_0 \delta v'_0 + (w'_b + w'_s)(\delta w'_b + \delta w'_s)] \\
 &\quad - I_1 (u'_0 \frac{\partial \delta w'_b}{\partial x} + \frac{\partial w'_b}{\partial x} \delta u'_0 + v'_0 \frac{\partial \delta w'_b}{\partial y} + \frac{\partial w'_b}{\partial y} \delta v'_0) \\
 &\quad - I_2 (u'_0 \frac{\partial \delta w'_s}{\partial x} + \frac{\partial w'_s}{\partial x} \delta u'_0 + v'_0 \frac{\partial \delta w'_s}{\partial y} + \frac{\partial w'_s}{\partial y} \delta v'_0) \\
 &\quad + J_1 (\frac{\partial w'_b}{\partial x} \frac{\partial \delta w'_b}{\partial x} + \frac{\partial w'_b}{\partial y} \frac{\partial \delta w'_b}{\partial y}) + K_2 (\frac{\partial w'_s}{\partial x} \frac{\partial \delta w'_s}{\partial x} + \frac{\partial w'_s}{\partial y} \frac{\partial \delta w'_s}{\partial y}) \\
 &\quad + J_2 (\frac{\partial w'_b}{\partial x} \frac{\partial \delta w'_s}{\partial x} + \frac{\partial w'_s}{\partial x} \frac{\partial \delta w'_b}{\partial x} + \frac{\partial w'_b}{\partial y} \frac{\partial \delta w'_s}{\partial y} + \frac{\partial w'_s}{\partial y} \frac{\partial \delta w'_b}{\partial y}) \} d\Omega
 \end{aligned} \tag{IV.15}$$

Où $\rho(z)$ est la densité de masse : et (I_i, J_i, K_i) sont les inerties massiques défini par

$$(I_0, I_1, I_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) \rho(z) dz \tag{IV.16a}$$

$$(J_1, J_2, K_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (f, fz, f^2) \rho(z) dz \tag{IV.16b}$$

En remplaçant les Eqs. (IV.13) et (IV.15) dans l'équation. (IV.12) et en intégrant par parties. En rassemblant les coefficients $\delta u_0, \delta v_0, \delta w_b$ et δw_s les équations du mouvement pour la plaque FGM résultantes sont :

Chapitre IV: Etude analytique de la vibration de plaques sandwichs poreuses P-FGM et S-FGM.

$$\delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} - J_2 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x} \quad \text{IV.17a}$$

$$\delta v_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y} - J_2 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial y} \quad \text{IV.17b}$$

$$\begin{aligned} \delta w_b : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} &= I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) \\ + I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - J_2 \nabla^2 \ddot{w}_s & \end{aligned} \quad \text{IV.17c}$$

$$\begin{aligned} \delta w_s : \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial^2 S_{yz}^s}{\partial y} &= I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) \\ + J_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - J_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - K_2 \nabla^2 \ddot{w}_s & \end{aligned} \quad \text{IV.17d}$$

Substituant l'équation (IV.7) dans l'équation, (IV.10) et les résultats ultérieurs des équations (IV.14), les forces et moments résultants en termes de déformations sont données :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix} \quad \text{IV.18a}$$

$$S = A^s \gamma \quad \text{IV.18b}$$

Dans lequel

$$N = \{ N_x, N_y, N_{xy} \}^t, \quad \text{IV.19a}$$

$$M^b = \{ M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b \}^t, \quad \text{IV.19b}$$

Chapitre IV: Etude analytique de la vibration de plaques sandwichs poreuses P-FGM et S-FGM.

$$M^S = \left\{ M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s \right\}^t, \quad \text{IV.19c}$$

$$\varepsilon = \left\{ \varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \varepsilon_{xy}^0 \right\}^t, \quad \text{IV.19d}$$

$$k^b = \left\{ k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b \right\}^t, \quad \text{IV.19e}$$

$$k^s = \left\{ k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s \right\} \quad \text{IV.19f}$$

Avec

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \quad \text{IV.20a}$$

$$A = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \quad \text{IV.20b}$$

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \quad \text{IV.20c}$$

$$B^S = \begin{bmatrix} B_{11}^S & B_{12}^S & 0 \\ B_{12}^S & B_{22}^S & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^S \end{bmatrix} \quad \text{IV.20d}$$

$$D^S = \begin{bmatrix} D_{11}^S & D_{12}^S & 0 \\ D_{12}^S & D_{22}^S & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^S \end{bmatrix} \quad \text{IV.20e}$$

$$H^S = \begin{bmatrix} H_{11}^S & H_{12}^S & 0 \\ H_{12}^S & H_{22}^S & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^S \end{bmatrix} \quad \text{IV.20f}$$

et les composants de rigidité sont donnés comme

Chapitre IV: Etude analytique de la vibration de plaques sandwichs poreuses P-FGM et S-FGM.

$$\begin{pmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{pmatrix} \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11}(1, z, z^2, f(z), zf(z)f^2(z)) \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ \frac{1-v}{2} \end{pmatrix} dz \quad \text{IV.21a}$$

$$(A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s) = (A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s) \quad \text{IV.21b}$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{44}[g(z)]^2 dz, \quad \text{IV.21c}$$

Les équations (IV.17) peuvent être exprimées en termes des déplacements (U_0, V_0, W_b, W_s) en remplaçant les forces résultantes de l'équation (IV.18) dans l'équation (IV.17). Pour la plaque sandwich en FGM. les équations de mouvement (IV.17) prennent la forme

$$\begin{aligned} & A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - B_{11} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial y^2} \\ & - B_{11}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial y^2} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y} - J_1 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial y} \end{aligned} \quad \text{IV.22a}$$

$$\begin{aligned} & (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^2 \partial y} - B_{22} \frac{\partial^3 w_b}{\partial y^3} \\ & - B_{22}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial y^3} - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^2 \partial y} = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y} - J_1 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial y} \end{aligned} \quad \text{IV.22b}$$

$$\begin{aligned} & B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + B_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} - D_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} \\ & - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{12} \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - D_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} \\ & - D_{22}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - J_2 \nabla^2 \ddot{w}_s \end{aligned} \quad \text{IV.22c}$$

Chapitre IV: Etude analytique de la vibration de plaques sandwichs poreuses P-FGM et S-FGM.

$$\begin{aligned}
 & B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + B_{22}^s \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} - D_{11}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} \\
 & - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - H_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} - H_{22}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} \quad \text{IV.22d} \\
 & + A_{55}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + A_{44}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) J_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - J_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - K_2 \nabla^2 \ddot{w}_s
 \end{aligned}$$

il est clair, lorsque l'effet de cisaillement de déformation transversale est négligé, l'équation (IV.22) donne les équations du mouvement de la plaque FGM de la théorie classique CPT

IV.4 Solution de Navier pour les plaques sandwichs en FGM

Pour une solution analytique des équations (22), la méthode de Navier est utilisée pour une plaque sandwich rectangulaire en FGM avec des conditions de frontière spécifiques (appuyée-appuyée).

Les fonctions des déplacements qui satisfont les équations des conditions aux limites sont développées en séries de Fourier comme suit :

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v \\ w_b \\ w_s \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} \cos(\lambda x) \sin(\mu y) e^{i\omega t} \\ V_{mn} \sin(\lambda x) \cos(\mu y) e^{i\omega t} \\ W_{bmn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) e^{i\omega t} \\ W_{smn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) e^{i\omega t} \end{Bmatrix} \quad \text{IV.23}$$

U_{mn}, V_{mn}, W_{bmn} et W_{smn} Sont des paramètres à déterminer et ω est la fréquence propre associée au $(m; n)$ nième mode propre, et $\lambda = m\pi / a$ et $\mu = n\pi / b$

IV.5 Une analyse aux valeurs propres pour les problèmes de vibration

Substituant les équations (IV.23) dans les équations de mouvement (IV.22) nous obtenons les équations, ci-dessous.

Des valeurs propres pour n'importe quelle valeur fixe de m et n, pour le problème de vibration libre

Chapitre IV: Etude analytique de la vibration de plaques sandwichs poreuses P-FGM et S-FGM.

$$[K] - \omega^2[M]\{\Delta\} = \{0\} \quad \text{IV.24}$$

Ou $\{\Delta\}$ représente le vecteur de colonne des inconnus.

$$\{\Delta\}^T = \{U_{mn}, V_{mn}, W_{bmn}, W_{smn}\} \quad \text{IV.25}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix}, \quad [M] = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} & m_{34} \\ 0 & 0 & m_{34} & m_{44} \end{bmatrix}, \quad \text{IV.26}$$

Pour lesquels :

$$\begin{aligned} a_{11} &= A_{11}\lambda^2 + A_{66}\mu^2 \\ a_{12} &= \lambda\mu(A_{12} + A_{66}) \\ a_{13} &= -\lambda[B_{11}\lambda^2 + (B_{12} + 2B_{66})\mu^2] \\ a_{14} &= -\lambda[B_{11}^s\lambda^2 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s)\mu^2] \\ a_{22} &= A_{66}\lambda^2 + A_{22}\mu^2 \\ a_{23} &= -\mu[(B_{12} + 2B_{66})\lambda^2 + B_{22}] \\ a_{24} &= -\mu[(B_{12}^s + 2B_{66}^s)\lambda^2 + B_{22}^s\mu^2] \\ a_{33} &= D_{11}\lambda^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda^2\mu^2 + D_{22}\mu^4 \\ a_{34} &= D_{11}^s\lambda^4 + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)\lambda^2\mu^2 + D_{22}^s\mu^4 \\ a_{44} &= H_{11}^s\lambda^4 + 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s)\lambda^2\mu^2 + H_{22}^s\mu^4 + A_{55}^s\lambda^2 + A_{44}^s\mu^2 \\ m_{11} &= m_{22} = I_0 \\ m_{33} &= I_0 + I_2(\lambda^2 + \mu^2) \\ m_{34} &= I_0 + J_2(\lambda^2 + \mu^2) \\ m_{44} &= I_0 + K_2(\lambda^2 + \mu^2) \end{aligned} \quad \text{IV.27}$$

IV.6 Conclusion

Ce chapitre a présenté une étude analytique du comportement en vibration des plaques sandwichs en matériaux à gradient de propriétés (FGM), en tenant compte des effets de la porosité et de la variation des propriétés mécaniques à travers l'épaisseur. En s'appuyant sur une

Chapitre IV: Etude analytique de la vibration de plaques sandwichs poreuses P-FGM et S-FGM.

théorie de déformation raffinée et la méthode de Navier, les équations de mouvement ont été formulées et résolues. Les résultats ont montré que la porosité, la distribution des matériaux et les paramètres géométriques influencent de manière significative les fréquences naturelles des plaques, permettant ainsi d'optimiser la conception des structures sandwichs FGM pour des applications soumises à des sollicitations dynamiques complexes.

Chapitre V :

Résultat et Discussion

V.1.Introduction

Ce chapitre est dédié à l'analyse et à la discussion des résultats numériques obtenus dans le cadre de l'étude vibratoire des plaques sandwich poreuses à gradient fonctionnel (FGM). Les simulations ont été menées en utilisant la théorie de cisaillement d'ordre supérieur (HSDT), offrant une modélisation plus fidèle du comportement dynamique des structures multicouches. Les résultats, présentés sous forme de figures et de tableaux, mettent en évidence l'influence de divers paramètres, tels que l'indice de fraction volumique, le rapport géométrique a/h , le rapport d'aspect, ainsi que le coefficient de porosité. Cette analyse a pour objectif de mieux cerner l'impact de chacun de ces paramètres sur les fréquences naturelles sans dimension, tout en évaluant la pertinence et la précision du modèle HSDT dans ce contexte.

V.2. Propriétés des matériaux

La plaque sandwich étudiée est composée d'un mélange de métal et de céramique. Les propriétés des matériaux métalliques (Aluminium – Al) et céramiques (Alumine – Al_2O_3) sont les suivantes :

- **Aluminium – Al:** $E_m = 70$ GPa, $\nu_m = 0,3$, $\rho_m = 2707$ kg/m³
- **Alumine – Al_2O_3 :** $E_c = 380$ GPa, $\nu_c = 0,3$, $\rho_c = 3800$ kg/m³

Il est à noter que plusieurs types de plaques sandwichs sont considérés :

La plaque sandwich FG (1–0–1)

Cette structure ne possède pas de cœur. La plaque est uniquement constituée de deux couches externes FG de même épaisseur. C'est-à-dire que :

$$h_0 = h_1 = 0 \quad V.1$$

La plaque sandwich FG (1–1–1)

Dans ce cas, la plaque est formée de trois couches de même épaisseur. Ainsi :

$$h_0 = -h/6, h_1 = h/6 \quad V.2$$

La plaque sandwich FG (1–2–1)

Ici, l'épaisseur du cœur est deux fois celle de chaque couche de surface. Ainsi :

$$h_0 = -h/4, h_1 = h/4 \quad V.3$$

La plaque sandwich FG (2–1–2)

À présent, l'épaisseur du cœur est la moitié de celle de chaque couche de surface. Ainsi :

$$h_0 = -h/10, h_1 = h/10 \quad V.4$$

La plaque sandwich FG (2–2–1)

Ici, une plaque sandwich non symétrique est considérée. Dans ce cas, l'épaisseur du cœur est égale à celle d'une couche de surface et au double de l'autre. Ainsi :

$$h_0 = -h/10, h_1 = 3h/10 \quad V.5$$

La plaque sandwich FG (2–1–1)

Une autre plaque sandwich non symétrique est présentée ici. Le cœur a une épaisseur égale à celle d'une couche de surface et à la moitié de l'autre. Ainsi :

$$h_0 = 0, h_1 = h/4 \quad V.6$$

Pour des raisons de commodité, les variables sans dimension suivantes sont utilisées pour illustrer graphiquement certains résultats numériques, et d'autres sont présentés sous forme de tableau :

$$\bar{\omega} = \frac{\omega a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_0}{E_0}} \quad V.7$$

Dans lesquelles les valeurs de référence du module d'Young et de la masse volumique des matériaux sont prises comme suit : $E_0 = 1 \text{ GPa}$ et $\rho_0 = 1 \text{ kg/m}^3$

V.3. Résultats numériques et discussion :

Le tableau V. 1 présente les effets de l'indice de fraction volumique, du sandwich et du rapport entre la longueur et l'épaisseur a/h sur la fréquence sans dimension pour deux modèles de plaques

Chapitre V : Résultat et Discussion

de plaques sandwich à gradient fonctionnel (FG) en utilisant les théories CPT, FPT, TSDT, SSDT. Il ressort de ce tableau que la fréquence sans dimension diminue avec l'augmentation de l'indice de fraction volumique p . Les valeurs les plus élevées sont obtenues pour la configuration (1-2-1). Il est également observé que les résultats obtenus à l'aide de la théorie proposée sont en bon accord avec ceux des autres théories de cisaillement d'ordre supérieur (HSDT).

Tableau V.1: Effets de l'indice de fraction volumique sur les fréquences non dimensionnelles d'une plaque sandwich carrée FG.

	k	Theory	1-0-1	1-1-1	1-2-1	2-1-2	2-2-1	2-1-1
P-FGM	0	Presente	1.82445	1.82445	1.82445	1.82445	1.82445	1.82445
		SHSDT (Daikh,2019)	1,82447	1,82447	1,82447	1,82447	1,82447	1,82447
		SSDT (Zenkour,2005)	1,82452	1,82452	1,82452	1,82452	1,82452	1,82452
		TSDT(Zenkour,2005)	1,82445	1,82445	1,82445	1,82445	1,82445	1,82445
		FPT (Zenkour,2005)	1,82442	1,82442	1,82442	1,82442	1,82442	1,82442
		CPT (Zenkour,2005)	1,87359	1,87359	1,87359	1,87359	1,87359	1,87359
	0,5	Presente	1.44424	1.51921	1.57451	1.48408	1.54899	1.50634
		SHSDT (Daikh, 2019)	1,44430	1,51924	1,57450	1,48413	1,54716	1,50643
		SSDT (Zenkour, 2005)	1.44436	1.51927	1.57450	1.48418	1.55202	1.51258
		TSDT(Zenkour,2005)	1.44424	1.51922	1.57451	1.48408	1.55199	1.51253
		FPT(Zenkour,2005)	1.44168	1.51695	1.57274	1.48159	1.55001	1.51035
		CPT(Zenkour,2005)	1.47157	1.54903	1.60722	1.51242	1.58374	1.54264
	1	Presente	1.24319	1.35332	1.43933	1.30011	1.39554	1.33325
		SHSDT(Daikh,2019)	1.24328	1.35336	1.43931	1.30017	1.39567	1.33343
		SSDT (Zenkour,2005)	1.24335	1.35339	1.43931	1.30023	1.40792	1.34894
		TSDT(Zenkour,2005)	1.24320	1.35333	1.43934	1.30011	1.40789	1.34888
		FPT(Zenkour,2005)	1.24031	1.35072	1.43722	1.29729	1.40555	1.34637
		CPT(Zenkour,2005)	1.26238	1.37521	1.46497	1.32023	1.43247	1.37150
	5	Presente	0.94598	1.04466	1.17397	0.98184	1.10869	1.03026
		SHSDT (Daikh,2019)	0.94616	1.04474	1.17398	0.98197	1.10902	1.03066
		SSDT (Zenkour,2005)	0.94630	1.04481	1.17399	0.98207	1.14741	1.07445
		TSDT(Zenkour,2005)	0.94598	1.04466	1.17397	0.98184	1.14731	1.07432
		FPT(Zenkour,2005)	0.94256	1.04183	1.17159	0.97870	1.14467	1.07156
		CPT(Zenkour,2005)	0.95844	1.05565	1.18867	0.99190	1.16195	1.08797
S-FGM	0	Presente	1.51721	1.50582	1.53035	1.50440	1.52900	1.52163
		SHSDT (Daikh,2019)	1.51724	1.50604	1.53048	1.50462	1.52921	1.52180

Chapitre V : Résultat et Discussion

		SSDT	1.51728	1.50623	1.53060	1.50482	1.52933	1.52190
		TSDT	1.51722	1.50583	1.53035	1.50440	1.52907	1.52169
		FPT	1.52379	1.50763	1.53238	1.50712	1.53168	1.52522
		CPT	1.55809	1.53602	1.56035	1.53716	1.56069	1.55569
	0,5	Presente	1.33330	1.40116	1.46732	1.36537	1.43742	1.39386
		SHSDT (Daikh,2019)	1.33340	1.40125	1.46735	1.36549	1.43757	1.39403
		SSDT	1.33348	1.40132	1.46738	1.36558	1.43762	1.39409
		TSDT	1.33330	1.40116	1.46733	1.36538	1.43752	1.39398
		FPT	1.33506	1.40260	1.46961	1.36662	1.43963	1.39591
		CPT	1.35796	1.42539	1.49423	1.38892	1.46365	1.41917
	1	Presente	1.24319	1.35332	1.43933	1.30011	1.39554	1.33325
		SHSDT (Daikh,2019)	1.24328	1.35336	1.43931	1.30017	1.39567	1.33343
		SSDT	1.24335	1.35339	1.43931	1.30023	1.40792	1.34894
		TSDT	1.24320	1.35333	1.43934	1.30011	1.40789	1.34888
		FPT	1.24031	1.35072	1.43722	1.29729	1.40555	1.34637
		CPT	1.26238	1.37521	1.46497	1.32023	1.43247	1.37150
	5	Presente	1.09902	1.28141	1.39825	1.19966	1.33263	1.23931
		SHSDT (Daikh,2019)	1.09907	1.28138	1.39817	1.19966	1.33272	1.23950
		SSDT	1.09912	1.28135	1.39811	1.19967	1.33270	1.23950
		TSDT	1.09902	1.28142	1.39825	1.19966	1.33276	1.23949
		FPT	1.09884	1.28277	1.40083	1.20027	1.33455	1.24045
		CPT	1.11152	1.30013	1.42211	1.21530	1.35362	1.25669

Dans le tableau V.2 l'effet des quatre modèles de distribution des porosités sur la fréquence de vibration libre des plaques sandwichs carrées P-FGM et S-FGM est illustré en utilisant la présente théorie de déformation par cisaillement d'ordre supérieur. Le coefficient de porosité est choisi comme $\xi = 0,1$; $0,2$. On observe que la fréquence non dimensionnelle obtenue pour les plaques imparfaites avec le coefficient de porosité $\xi = 0,2$ est inférieure à celle obtenue pour $\xi = 0,1$, quel que soit le modèle de porosité.

Chapitre V : Résultat et Discussion

Tableau V.2 : Effets de la porosité sur les fréquences non dimensionnelles de la plaque sandwich carrée FG ($a/h = 10, p = 2$)

P-FGM	Porosity	ξ	1-0-1	1-1-1	1-2-1	2-1-2	2-2-1	2-1-1
	Perfect	0	1.06144	1.18842	1.30245	1.12239	1.24370	1.16501
	Imperfect I	0,1	0.99123	1.12957	1.25708	1.05620	1.18998	1.10200
		0,2	0.89346	1.05712	1.20451	0.97054	1.12429	1.02025
	Imperfect II	0,1	1.03691	1.16238	1.28129	1.09495	1.21987	1.13919
		0,2	1.00867	1.13372	1.25860	1.06414	1.19369	1.11013
	Imperfect III	0,1	1.02628	1.15529	1.27564	1.08660	1.21327	1.13115
		0,2	0.98926	1.12139	1.24873	1.04949	1.18219	1.09597
	Imperfect IV	0,1	1.05962	1.17528	1.28869	1.11245	1.23111	1.15538
		0,2	1.05758	1.16100	1.27404	1.10151	1.21744	1.14475
S-FGM	Perfect	0	1.16169	1.31150	1.41381	1.24257	1.35702	1.27904
	Imperfect I	0,1	1.11317	1.26935	1.37933	1.19652	1.31840	1.23529
		0,2	1.04892	1.21887	1.33996	1.13912	1.27234	1.18063
	Imperfect II	0,1	1.14072	1.29183	1.39744	1.22157	1.33909	1.25922
		0,2	1.11688	1.27041	1.37999	1.19828	1.31957	1.23719
	Imperfect III	0,1	1.14955	1.29371	1.39877	1.22564	1.34078	1.25997
		0,2	1.13386	1.27139	1.37827	1.20448	1.31881	1.23659
	Imperfect IV	0,1	1.15367	1.30045	1.40515	1.23181	1.34882	1.26947
		0,2	1.14300	1.28550	1.39123	1.21771	1.33486	1.25599

Chapitre V : Résultat et Discussion

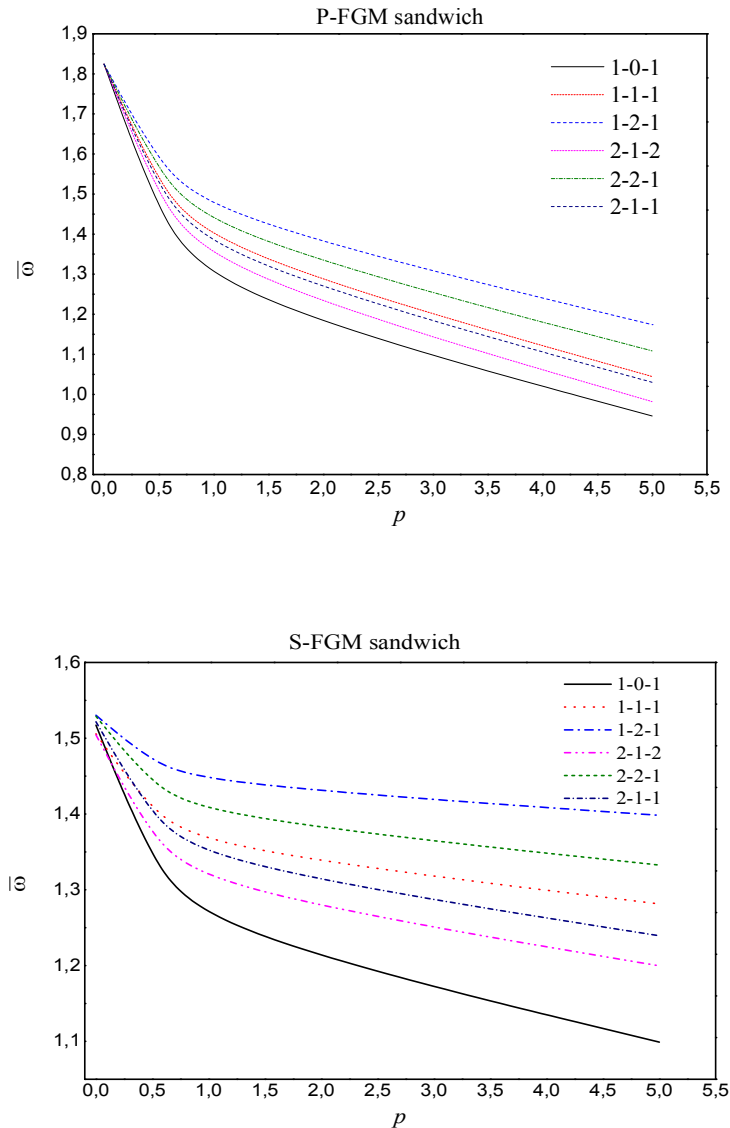


Figure V.1. Fréquence non dimensionnelle de la plaque sandwich FG en fonction de l'indice de fraction volumique ($a/h = 10$)

La figure V.1 montre la vibration des fréquences en fonction de l'indice de fraction volumique en utilisant la HSDT actuelle. Comme on peut le voir, l'augmentation de l'indice de fraction volumique produit une réduction des fréquences. Cette observation est valable pour tous les types de sandwichs FG. Notons que les fréquences non dimensionnelles des plaques sandwich P-FGM et S-FGM avec le schéma 1-2-1 sont sensiblement plus élevées que les valeurs obtenues sur d'autres sandwichs FG.

Chapitre V : Résultat et Discussion

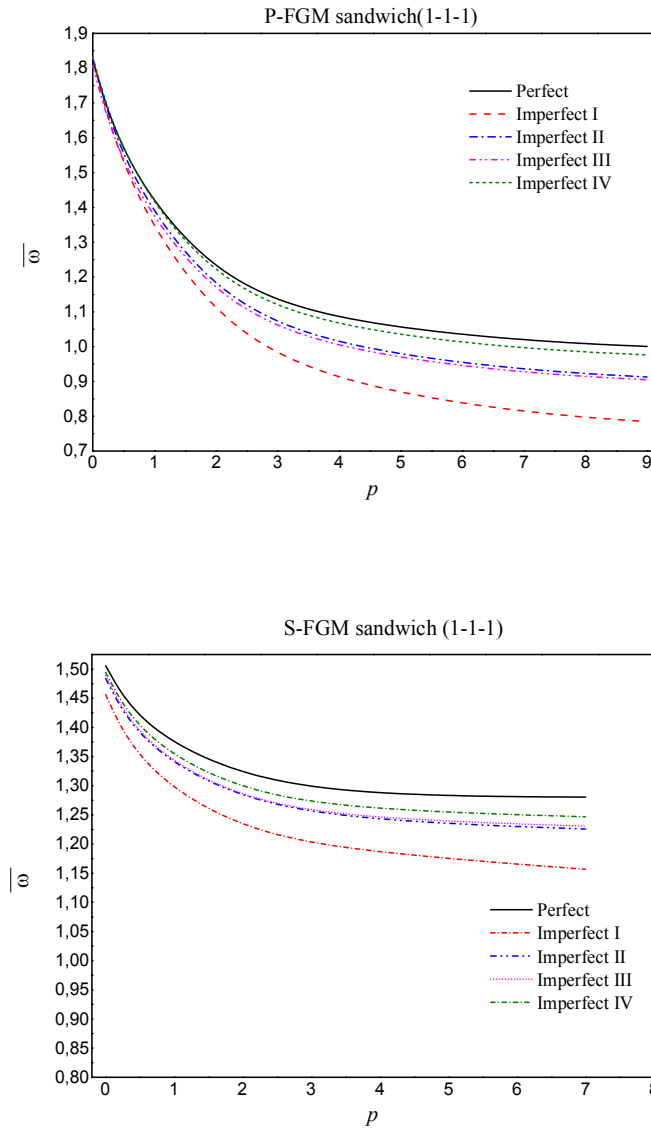


Figure V.2. Fréquence non dimensionnelle d'une plaque sandwich FG carrée parfaite et poreuse en fonction de l'indice de fraction volumique ($a/h=10$).

La Figure V.2. Le coefficient de porosité est fixé à $\xi = 0,2$. Les sandwichs FG imparfaits (distribution uniforme) présentent les résultats les plus faibles, tandis que les sandwichs FG parfaits présentent les résultats les plus élevés.

Des résultats similaires sont obtenus pour les sandwichs FG imparfaits II (distribution inégale) et III (distribution logarithmique inégale). L'impact de l'indice de fraction volumique sur

Chapitre V : Résultat et Discussion

la réponse de la plaque sandwich P-FGM est plus important que pour les plaques sandwich S-FGM.

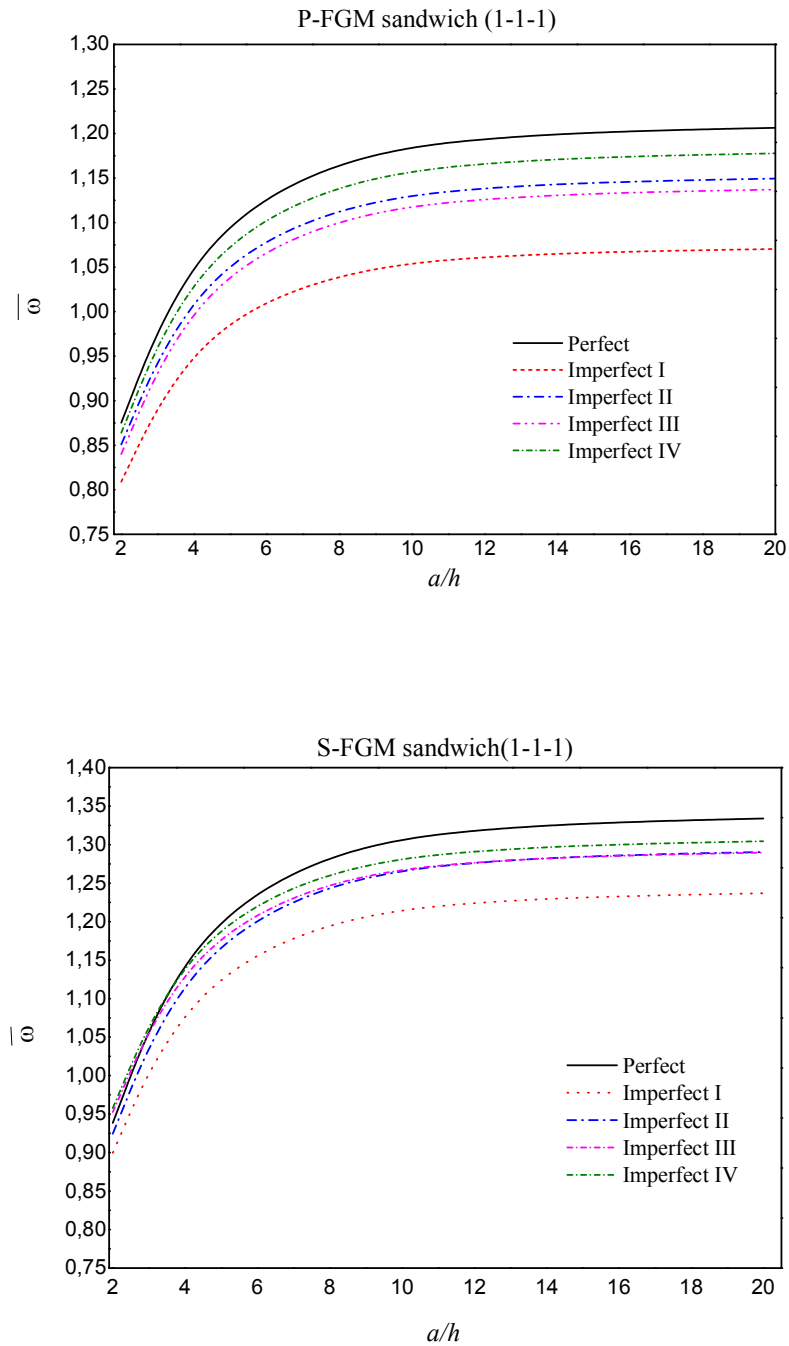


Figure V.3. Fréquence non dimensionnelle d'une plaque sandwich FG carrée parfaite et poreuse en fonction du rapport entre le côté et l'épaisseur ($p=2$).

Chapitre V : Résultat et Discussion

La Figure V.3 présentent les fréquences non dimensionnelles On constate que les résultats des fréquences augmentent avec l'augmentation du rapport entre les côtés et l'épaisseur.

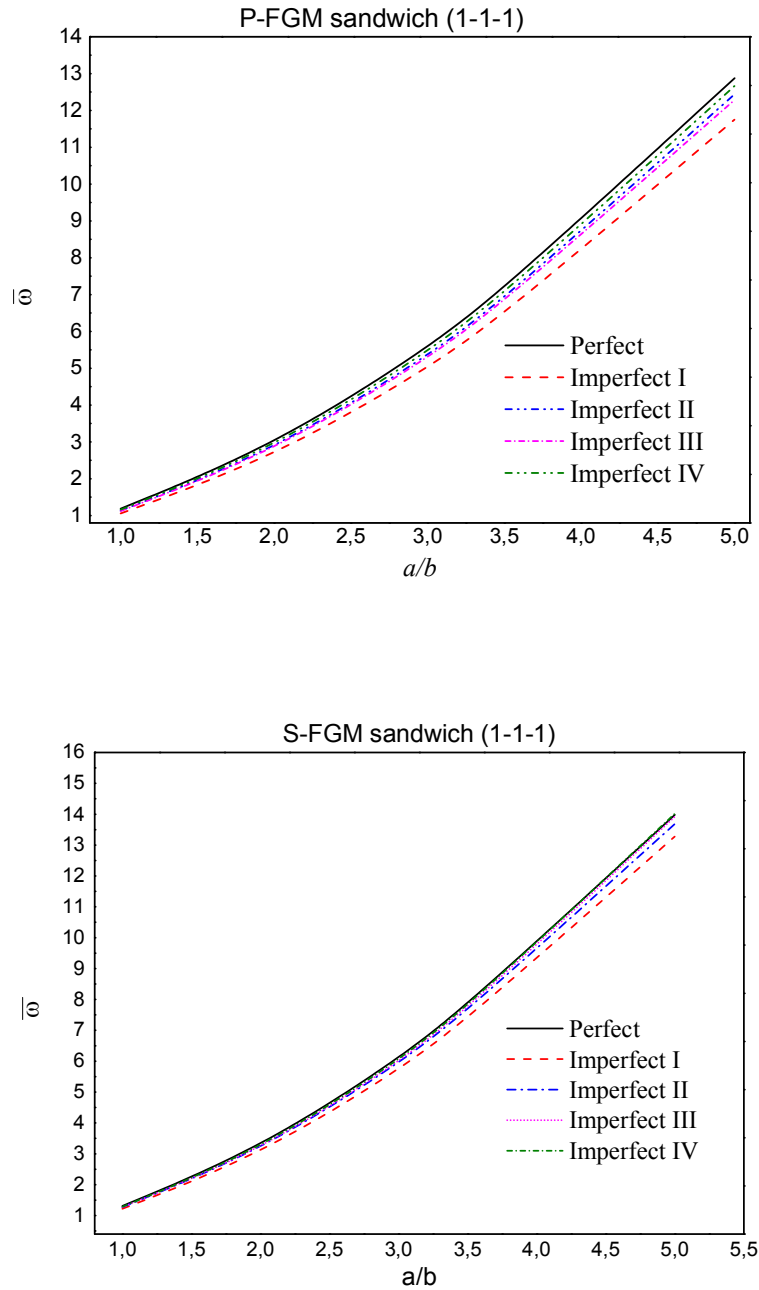


Figure V.4. Fréquence non dimensionnelle d'une plaque sandwich FG carrée parfaite et poreuse en fonction du rapport d'aspect ($p=2$).

Chapitre V : Résultat et Discussion

Dans La Figure V.4 L'augmentation du rapport d'aspect augmente les fréquences de vibration Il est évident que la différence entre les plaques sandwich parfaites et imparfaites s'accroît avec l'augmentation du rapport d'aspect.

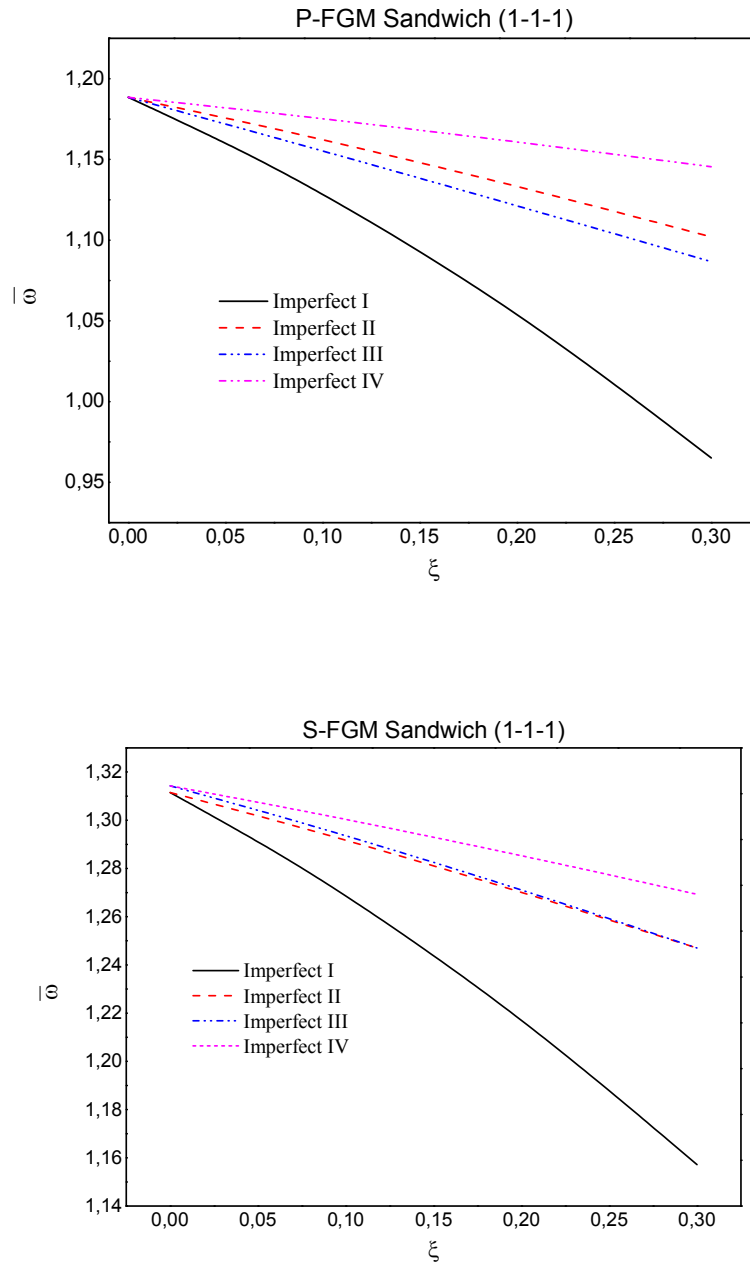


Figure V. 5. Effet du coefficient de porosité sur la fréquence non dimensionnelle d'une plaque sandwich FG carrée ($p=2$, $a/h=10$).

Chapitre V : Résultat et Discussion

La figure V.5 Le coefficient de porosité a un effet important sur la réponse de la plaque principalement pour le modèle de distribution uniforme (Imparfait I) où l'augmentation de la porosité

V.3. Conclusion

Ce chapitre a porté sur l'étude du comportement vibratoire des plaques sandwich à gradient fonctionnel (FGM), en tenant compte de différentes configurations de porosité et de l'imperfection. La modélisation a été réalisée à l'aide de la théorie de cisaillement d'ordre supérieur (HSDT), offrant une meilleure précision dans la représentation des déformations transversales. Les résultats ont été confrontés à ceux obtenus par des théories classiques telles que CPT, FPT, TSDT et SSDT, validant ainsi la pertinence du modèle HSDT. Cette étude souligne l'efficacité du modèle à intégrer de manière simultanée l'influence de la porosité et des caractéristiques géométriques sur le comportement dynamique des plaques sandwich. Elle offre ainsi un cadre méthodologique solide pour la conception et l'optimisation des structures sandwich FGM en environnement vibratoire.

Conclusion Générale

Conclusion Générale

Les matériaux à gradient fonctionnel (FGM) constituent une innovation majeure dans le domaine des composites, en permettant une transition progressive des propriétés entre des matériaux distincts, tels que les métaux et les céramiques. Cette variation continue réduit les concentrations de contraintes aux interfaces et améliore les performances mécaniques et thermiques des structures. La présente étude s'est concentrée sur l'analyse du comportement vibratoire des plaques sandwich en FGM, en tenant compte de l'effet de la porosité et de la distribution des propriétés au travers de l'épaisseur.

Les résultats ont montré que l'utilisation de structures sandwich FGM (qu'elles soient de type P-FGM ou S-FGM) améliore significativement la réponse dynamique. La variation continue des propriétés permet de réduire les fréquences naturelles et de distribuer les contraintes plus efficacement. Cependant, la présence de porosité (en particulier dans une distribution uniforme) réduit les fréquences naturelles en raison d'une rigidité effective diminuée. Il a également été observé qu'une augmentation de l'indice de fraction volumique (p) diminue les fréquences, tandis qu'une augmentation du rapport d'aspect (a/h) ou du rapport longueur/épaisseur les augmente.

Sur le plan théorique, la théorie simplifiée de déformation en cisaillement a démontré une grande précision dans la modélisation du comportement vibratoire de ces plaques, comparativement aux modèles classiques (CPT) ou aux théories de premier ordre (FSDT). Cela est dû à sa capacité à simuler la distribution non linéaire des contraintes à travers l'épaisseur sans nécessiter de facteurs de correction.

Dans ce travail, nous présentons la vibration libre des plaques sandwich poreuses à l'aide d'une théorie simple de déformation par cisaillement d'ordre supérieur. Deux types de plaques sandwich sont proposés, les plaques sandwich P-FGM et S-FGM, avec quatre modèles de distribution de la porosité tenant compte de la composition et de la configuration de la plaque sandwich. Les équations explicites régissant la plaque sandwich FG simplement supportée sont dérivées en utilisant la théorie généralisée de la déformation par cisaillement d'ordre supérieur. La technique de solution de Navier est utilisée pour obtenir les solutions analytiques. L'influence de la porosité,

de la géométrie de la plaque sandwich et du paramètre d'inhomogénéité sur vibration libre de la plaque sandwich FG est examinée.

Les principaux résultats de notre analyse sont exprimés comme suit :

- L'augmentation du paramètre d'inhomogénéité p des plaques sandwich FG diminue les fréquences de vibration libre.
- Le rapport d'aspect a/b et le rapport côté/épaisseur a/h ont une influence significative sur les fréquences de vibration libre, où l'augmentation de ces paramètres géométriques augmente les fréquences non dimensionnelles.
- Les fréquences non dimensionnelles sont maximales pour les plaques sandwich FG non poreuses et diminuent lorsque le coefficient de porosité augmente, quel que soit le type de porosité.
- Un excellent accord peut être constaté entre la théorie actuelle et les théories précédentes.

En conclusion, cette étude propose un cadre analytique avancé pour comprendre et concevoir des structures sandwich en matériaux à gradient de fonction (FGM) dans des applications d'ingénierie complexes. À titre de perspective, nous envisageons d'appliquer le modèle développé à l'étude de la flexion et du flambement de structures fonctionnellement graduées aux géométries variées (coquilles, coques, poutres courbes...), en intégrant également l'effet de fondations élastiques de types Winkler ou Pasternak.

Références Bibliographiques

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- (Allen, H. G. (1961)). *Analysis and Design of Structural Sandwich Panels*. Pergamon Press.
- (Ait Atmane, H.), Tounsi, A., Mechab, I., & Adda Bedia, E. A. (2010). Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory. *International Journal of Mechanical and Materials Design*, 6(2), 113–121.
- (Ait Atmane, H. (2011)). *Vibration des structures composites en tenant compte de l'effet du cisaillement*. Thèse de doctorat, Université Djilali Liabes, Sidi Bel Abbès.
- (Ait Atmane, H.), Tounsi, A., Bernard, F., & Mahmoud, S. R. (2015). A computational shear displacement model for vibrational analysis of functionally graded beams with porosities. *Steel and Composite Structures*, 19(2), 369–385.
- (Avila, A. F., & Carlsson, L. A. (2007)). Analysis of face/core debonding of sandwich beams under fatigue loading. *Composites Part B: Engineering*, 38(5–6), 584–592.
- (Belouettar, S., Abbadi, A., & Adda Bedia, E. A. (2009)). Numerical and experimental investigation of the mechanical behavior of sandwich composite panels. *Composite Structures*, 91(1), 169–177.
- (Berthelot, J.-M. (2010)). *Matériaux composites: Comportement mécanique et analyse des structures*. Techniques de l'Ingénieur.
- (Hadji, L., Ait Atmane, H., Tounsi, A., Mechab, I., & Adda Bedia, E. A. (2011)). Free vibration of functionally graded sandwich plates using four-variable refined plate theory. *Applied Mathematics and Mechanics - English Edition*, 32(7), 925–942.
- (Hadji, L. (2012)). *Mémoire sur la vibration des plaques sandwichs en FGM*. Université Djilali Liabes.
- (Hadji, L., Tahar, D., & Adda Bedia, E. A. (2015)). A refined exponential shear deformation theory for free vibration of FGM beam with porosities. *Geomechanics and Engineering*, 9(3), 361–372.
- (Hexcel Corporation. (2004)). *Technical Datasheets on Honeycomb Sandwich Structures*. <https://www.hexcel.com>
- (Jin, F., et al. (2003)). Flexural behavior of honeycomb sandwich beams with different core configurations. *Composites Part B: Engineering*, 34(8), 657–665.
- (Kaddouri, A., et al. (2021)). Applications des structures sandwichs à gradient fonctionnel dans l'ingénierie moderne. *Revue des Composites et des Matériaux Avancés*, 31(2), 105–119.
- (Karama, M., Abou Harb, B., Mistou, S., & Caperaa, S. (1998)). Bending, buckling and free vibration of laminated composite with a transverse shear stress continuity model. *Composites Part B*, 29(3), 223–234.

(Li, L., Zhang, D. G., & Zhu, W. D. (2014)). Free vibration analysis of a rotating hub FGM beam system with the dynamic stiffening effect. *Journal of Sound and Vibration*, 333(5), 1526–1541.

(Liu, Y., & Shu, D. W. (2014)). Free vibration analysis of exponential FGM beams with a single delamination. *Composites Part B: Engineering*, 59, 166–172.

(Ning, J., Sievers, D. E., Garmestani, H., & Liang, S. Y. (2020)). Analytical modeling of part porosity in metal additive manufacturing. *International Journal of Mechanical Sciences*, 172, 105428.

(Reddy, J. N. (1984)). A simple higher-order theory for laminated composite plates. *Journal of Applied Mechanics*, 51, 745–752.

(Reddy, J. N. (1997)). *Mechanics of Laminated Composite Plates: Theory and Analysis*. CRC Press.

(Reddy, J. N. (1999)). *Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells*. CRC Press.

(Reddy, J. N. (2000)). Analysis of functionally graded plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47, 663–684.

(Reddy, J. N. (2004)). *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells* (2nd ed.). CRC Press.

(Shahsavari, D., Shahsavari, M., Li, L., & Karami, B. (2018)). A novel quasi-3D hyperbolic theory for free vibration of FG plates with porosities. *Aerospace Science and Technology*, 72, 134–149.

(Sudharsan, T. S., et al. (2003)). Structural behavior of sandwich panels. *Composite Structures*, 59, 47–60.

(Thomsen, O. T. (1995)). Sandwich plates with soft core: modeling of bending and buckling response. *Composite Structures*, 32(1–4), 171–183.

(Thai, H.-T., & Kim, S.-E. (2010)). Free vibration of laminated composite plates using two variable refined plate theory. *International Journal of Mechanical Sciences*, 52(5), 626–633.

(Uemura, S. (2003)). The activities of FGM on new applications. *Materials Science Forum*, 423–425, 1–1.

(Wang, Y., & Wang, X. (2016)). Free vibration analysis of soft core sandwich beams by the novel weak form quadrature element method. *Journal of Sandwich Structures & Materials*, 18(3), 294–320.

(Xie, X., Zheng, H., & Jin, G. (2015)). Free vibration of four-parameter functionally graded spherical and parabolic shells of revolution. *Composites Part B: Engineering*, 77, 59–73.

(Yang, Y., Lam, C. C., Kou, K. P., & Iu, V. P. (2014)). Free vibration analysis of FG sandwich beams using meshfree boundary-domain method. *Composite Structures*, 117, 32–39.