



RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN TIARET
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUES
Département de Mathématiques



MÉMOIRE DE MASTER

Présenter en vue de l'obtention du diplôme de master

Spécialité :
« Mathématiques »

Option :
« Analyse Fonctionnelle et Application »

Présenté Par :
FARHI Sara

Sous L'intitulé :

Théorèmes du point fixe sur les espaces métriques généralisés et leurs applications.

Soutenu publiquement le 22 / 06 /2025
À Tiaret devant le jury composé de :

SOUID Mohammed Said	Grade : Professeur	Université Ibn Khaldon Tiaret	Président
MOKHTARI Mokhtar	Grade : MCA	Université Ibn Khaldon Tiaret	Encadreur
BOUAZZA Zoubida	Grade : MCA	Université Ibn Khaldon Tiaret	Examineur

Année universitaire : 2024/2025

Remerciements :

Avant toute chose, nous tenons à remercier « Allah », le Tout-Puissant, pour nous avoir donné la force, la patience et la persévérance nécessaires.

✓ J'exprime ma profonde gratitude à mon encadrant de mémoire, Dr. Mokhtari Mokhtar, pour son accompagnement, ses précieux conseils, son orientation et son aide tout au long de ce travail.

✓ Mes remerciements les plus sincères vont également aux membres du jury pour l'honneur qu'ils m'ont fait en évaluant mon travail. Je remercie particulièrement Monsieur Pr. Souid Mohammed Said président du jury, et Madame Dr. Bouaza Zoubida.

✓ Je n'oublie pas l'ensemble des enseignants qui ont contribué à ma formation au cours de mes cycles d'études.

✓ Enfin, je tiens à remercier tous ceux et celles qui, de près ou de loin, ont participé à l'accomplissement de ce mémoire.

** À vous tous, un grand merci. **

إِهْدَاء



بسم الله الذي فضله وكرمه تتم النعم،
إلى من كان لهم الفضل بعد الله في وصولي إلى هذه اللحظة التي طالما حلمت بها،
إلى أمي الحبيبة:

نبض قلبي وسر سعادتي، من كانت لي الصدر الحنون والقلب الكبير، من سهرت الليالي تدعوني بالنجاح.
أمي، كل كلمات الشكر تقف عاجزة أمام عطاءك الذي لا يقدر بثمن.
هذا الإنجاز هو ثمرة صبرك وتضحياتك.
إلى أبي الغالي:

صانع الأمل الأول في حياتي، من زرع في نفسي القوة والإصرار، من كان دائماً قدوتي وملهمي. أبي، كلماتك
المشجعة كاهت نوراً أضاء دربي، ودعاؤك مان سلاً في كل لحظة صعبة.
إلى اخي وأخواتي:

شركاء الفرح والسند الذي لا يميل، من كنتم لي أوطاناً صغيرة أجد فيها الأمان والدفع. دعمكم وحبكم كانا أعظم
هدية لي.

إلى أساتذتي الأفاضل:

من غرسوا فيّ العلم والمعرفة، وكانوا لي مصدر الإلهام والتحفيز. شكراً لكم على كل ما قدمتموه لي من علم ونصيحة.
إلى صديقاتي العزيزات:

شقيقات الروح ورفيقات الدرب، من قضيت معهن أجمل أيام حياتي، وكنّ لي دعماً في كل خطوة. أشكر الله
على وجودكن في حياتي.

إلى نفسي:

يا من اجتهدت وصبرت ووصلت، تذكري دائماً أن كل حلم يتحقق هو بداية لحلم جديد.
وأخيراً، إلى كل من أحبني ودعا لي :

إلى من كان له أثر في حياتي، أهديكم هذا النجاح الذي هو بفضلكم بعد الله.
هذا التخرج ليس نهاية الطريق، بل بداية جديدة نحو طموحات أكبر، أسأل الله أن يوفقني
ويوفقكم جميعاً لما فيه الخير.

سارة



Table des matières

Table des matières	1
Introduction	2
1 Préliminaire :	4
1.1 Quelques notions et propriétés d'un espace métrique :	4
1.2 Définitions et propriétés dans un espace métrique :	6
1.2.1 Convergence et continuité dans un espace métrique :	7
1.2.2 Complétude d'un espace métrique :	8
1.3 Quelques théorèmes de point fixe :	8
1.3.1 Le premier théorème du point fixe :	8
1.3.2 Théorème du point fixe de Banach :	11
1.3.3 Théorème du point fixe de Reich :	11
1.3.4 Théorème du point fixe de Chatterjea :	11
1.4 Les applications contractantes :	13
2 Espace métrique Généralisé :	15
2.1 Quelques notions et propriétés d'un espace métrique généralisé :	15
2.2 Le point fixe et suites récurrentes :	17
2.3 La topologie sur un espace G-métrique :	18
2.4 Convergence dans les espaces G-métriques :	21
2.5 Complétude des espaces G-métriques :	21
3 Applications :	23
3.1 Application 1 :	23
3.1.1 Exemple sur Le cas non symétrique :	26
3.2 Application 2 :	27
Conclusion	32

Introduction :

Le concept d'espace métrique standard est un outil de base en topologie, en analyse fonctionnelle et en analyse non linéaire. De telles structures ont attiré beaucoup d'attention parmi les mathématiciens, notamment en raison du développement de la théorie des points fixes dans ces espaces.

Ces dernières années, plusieurs généralisations d'espaces métriques standard ont émergé. En 1993, Czerwik a introduit le concept d'espace b-métrique, jetant les bases d'un grand nombre d'études sur la théorie du point fixe dans cet espace. Plus tard, en 2000, Hitzler et Seda ont proposé le concept d'espaces métriques mal alignés, où la distance d'un point à lui-même ne doit pas nécessairement être égale à zéro. Ces espaces jouent un rôle crucial dans la topologie et la programmation logique et ont conduit à des avancées importantes dans la théorie du point fixe.

Dans le même temps, la théorie des espaces de modules a été initiée par Nakano, liée à la théorie des espaces d'ordre, et plus tard généralisée par Musielak et Orlicz. Ces espaces permettent d'associer une norme pour considérer un espace particulier de fonctions de Banach. Bien que la notion classique de métrique ne soit pas définie dans ces espaces, de nombreux problèmes liés à la théorie du point fixe peuvent y être reformulés.

Dans ce travail, nous introduisons un nouvel espace métrique généralisé et étendons certains théorèmes de point fixe bien connus. Ce nouvel espace englobe une large classe d'espaces topologiques, notamment les espaces métriques standard, les espaces b-métriques, les espaces métriques mal alignés et les espaces de modules.

Ainsi, nous établissons de nouvelles versions de théorèmes de point fixe classiques tels que le principe de contraction de Banach, le théorème de point fixe de Picard et les résultats de point fixe de Reich et Chatterjea.

L'ensemble de ce travail met généralement l'accent sur l'importance des théorèmes du point fixe et des espaces métriques généralisés dans l'analyse mathéma-

tique moderne. Ces résultats ne se limitent pas à de simples généralisations de concepts classiques, mais s'appuient également sur des outils puissants tels que l'optimisation, la théorie des jeux et la modélisation mathématique pour résoudre des problèmes spécifiques dans divers domaines.

Ce mémoire est structuré en trois chapitres :

- Le premier chapitre introduit les concepts de base, les définitions et les résultats nécessaires à la suite du travail, avec un accent particulier sur les espaces métriques.
- Le deuxième chapitre est consacré à l'espace G -métriques. Nous présentons leurs définitions, leurs principales propriétés et les concepts connexes tels que la convergence, la continuité, la topologie et l'exhaustivité des séquences .
- Enfin, dans le troisième chapitre, nous analysons et discutons quelques résultats sur l'existence et l'unicité des points fixes pour les applications .

Chapitre 1

Préliminaire :

Ce chapitre est consacré à quelques définitions et des éléments basiques qui sont indispensables pour le reste de notre travail .

1.1 Quelques notions et propriétés d'un espace métrique :

Définition 1.1.1. une distance sur un espace X est une application $d : X^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant les trois suivantes :

1. $\forall x, y \in X, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (identité)
2. $\forall x, y \in X, d(x, y) > 0$ si $x \neq y$ (non négative)
3. $\forall x, y \in X, d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie).
4. $\forall x, y, z \in X, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, (inégalité triangle).

une paire (X, d) s'appelle un espace métrique .

Exemple 1.1. dans $\mathbb{R}$, on peut considérer la distance d suivante dite distance usuelle :

$$d(x, y) = |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Preuve : Pour montrer que $d(x, y) = |x - y|$ est une distance sur $\mathbb{R}$, nous devons vérifier qu'elle satisfait les quatre propriétés suivantes :

1. Identité :

On doit montrer que $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$.

– Si $x = y$, alors $d(x, y) = |x - y| = |x - x| = 0$.

– Si $d(x, y) = 0$, alors $|x - y| = 0$, ce qui implique $x - y = 0$, donc $x = y$.

Donc La propriété d'identité est satisfaite.

2. Non-négativité :

On doit montrer que $d(x, y) \geq 0$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, et $d(x, y) > 0$ si $x \neq y$.

- Par définition, $d(x, y) = |x - y|$, qui est toujours un nombre réel non négatif (c'est une propriété de la valeur absolue).
- Si $x \neq y$, alors $|x - y| > 0$.

Donc la propriété de non-négativité est satisfaite.

3. Symétrie :

On doit montrer que $d(x, y) = d(y, x)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

- Par définition, $d(x, y) = |x - y|$ et $d(y, x) = |y - x|$.
- Ou, $|x - y| = |y - x|$ (c'est une propriété de la valeur absolue).

Donc la propriété de symétrie est satisfaite.

4. Inégalité triangulaire :

On doit montrer que $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$.

- Par définition, $d(x, z) = |x - z|$, $d(x, y) = |x - y|$, et $d(y, z) = |y - z|$.
- L'inégalité triangulaire pour la valeur absolue indique que :

$$|x - z| \leq |x - y| + |y - z|.$$

Donc l'inégalité triangulaire est satisfaite.

Puisque $d(x, y)$ satisfait les quatre propriétés, $d(x, y) = |x - y|$ est une distance sur $\mathbb{R}$. La paire $(\mathbb{R}, d)$ est donc un espace métrique.

Définition 1.1.2. (Lipschitzienne)

Soit (E, d) un espace métrique, une application $f : E \rightarrow E$ est dite lipschitzienne de rapport $k \geq 0$ si :

$$\forall x, y \in E, d(f(x), f(y)) \leq k d(x, y)$$

k est dite constante de Lipschitz.

L'application lipschitzienne f est appelée :

1. non expansive si $k \leq 1$
2. contraction si $k < 1$

Remarque 1.1.1. Une application lipschitzienne est nécessairement continue.

1.2 Définitions et propriétés dans un espace métrique :

Définition 1.2.1. (Ouverts - Fermés) :

Soit (X, d) un espace métrique et $U, F \subset X$. On dit que :

- U est ouvert dans X , si pour tout $x \in U$, il existe un $r > 0$ tel que :
 $B(x, r) \subset U$.
- F est fermé dans X , si son complément $X \setminus F$ est ouvert dans X .

Définition 1.2.2. soit f une fonction d'un ensemble E dans lui-même ($f : E \rightarrow E$). Elle n'est pas nécessairement définie sur E tout entier (domaine de définition) $D_f \subset E$.

On dit qu'un point $x \in E$ est un point fixe si :

1. $x \in D_f$
2. $f(x) = x$

Exemple 1.2. 1. Dans le plan, la symétrie par rapport à un point A admet un unique point fixe a .

2. L'application inverse (définie sur l'ensemble des réels non nuls) admet deux points fixes : -1 et 1 .

Remarque 1.2.1. Peut être une application ne possédant aucun point fixe. Alors toutes les fonctions n'ont nécessairement pas de point fixe.

Exemple 1.3. 1. $f(x) = x + 1$. on applique la définition :

$$f(x) = x \implies x + 1 = x \implies x - x = 1 \implies 0 = 1.$$

(Impossible). Alors f n'admet pas de points fixes .

2. $f : (\mathbb{R}, |\cdot|) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$,

$$f(x) = \frac{1}{2} (x + \sqrt{1 + x^2}).$$

le point fixe :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (x + \sqrt{1 + x^2}) &= x \\ \iff (x + \sqrt{1 + x^2}) &= 2x \\ \iff \sqrt{1 + x^2} &= x \\ \iff 1 + x^2 &= x^2 \\ \iff 1 &= 0 \end{aligned}$$

(Impossible).

Donc f n'admet pas de points fixes.

1.2.1 Convergence et continuité dans un espace métrique :

Définition 1.2.3. (Application continue) :

Soient (X, d) et (Y, d') deux espaces métriques et soit $a \in X$.

On dit qu'une application $f : X \rightarrow Y$ est continue au point a si :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \gamma > 0, \forall x \in X : d(a, x) < \gamma \implies d'(f(a), f(x)) < \varepsilon.$$

Définition 1.2.4. (Continuité sur un ensemble) :

On dit que $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$ est continue sur (X, d) si elle est continue en tout point de X .

Définition 1.2.5. (Suite convergente) :

Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments d'un espace métrique (X, d) converge ou tend vers un point $a \in X$ lorsque $n \rightarrow \infty$ si et seulement si :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, a) = 0$$

C'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : d(x_n, a) < \varepsilon.$$

On dit aussi que a est la limite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et on note $x_n \rightarrow a$ ou

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

Proposition 1.1. Si la limite d'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ existe, alors cette limite est unique.

Théorème 1.2.1. Soit (X, d) un espace métrique, et $E \subset X$, $a \in X$

$$E \text{ est fermé} \iff \left[\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies a \in E \right].$$

Définition 1.2.6. (Suite extraite) :

On appelle suite extraite (ou sous-suite) de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de la forme $(x_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ où $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.

Lemme 1. Soit $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\psi(n) > n$.

Proposition 1.2. Soit (X, d) un espace métrique et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$. On a $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers a si et seulement si toute sous-suite $(x_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers a .

Définition 1.2.7. Soit (X, d) un espace métrique complet, une fonction

$f : X \rightarrow X$ est appelée contraction s'il existe $k < 1$ telle que :

$$\forall x, y \in X, d(f(x), f(y)) \leq k d(x, y)$$

1.2.2 Complétude d'un espace métrique :

Définition 1.2.8. (Suite de Cauchy) :

On dit qu'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'un espace métrique (X, d) est de Cauchy si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $m, n \geq N_\varepsilon$, on a $d(x_m, x_n) \leq \varepsilon$. C'est-à-dire si dans $\mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} d(x_m, x_n) = 0$$

Proposition 1.3. Dans un espace métrique (X, d) , on a :

1. Toute suite convergente est de Cauchy.
2. Toute suite extraite d'une suite de Cauchy est de Cauchy.
3. Toute suite de Cauchy admettant une sous-suite convergente est convergente.

Définition 1.2.9. Un espace métrique (X, d) est dit complet si toute suite de Cauchy $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans X converge dans X .

Proposition 1.4. Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$:

- Si (A, d) est complet, alors A est un fermé de X .
- Si (X, d) est complet et A est un fermé de X , alors (A, d) est complet.

Remarque 1.2.2. Toute suite qui converge est de Cauchy : si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, cela veut dire que :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \text{ tel que } n > N_\varepsilon \implies d(x_n, a) < \varepsilon$$

et donc :

$$n, m > N_{\varepsilon/2} \implies d(x_n, x_m) \leq d(x_n, a) + d(a, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Par contre, il y a des suites de Cauchy qui ne convergent pas : dans l'espace $] -1, +1[$, la suite $\{1 - 1/n\}$ est une suite de Cauchy, puisque la même suite converge dans $\mathbb{R}$ vers 1, mais $1 \notin] -1, +1[$. Cet exemple peut paraître artificiel. Remarquons encore que 2 métriques équivalentes définissent la même notion de suite de Cauchy.

1.3 Quelques théorèmes de point fixe :

1.3.1 Le premier théorème du point fixe :

Ce théorème donne l'existence et l'unicité d'un point fixe pour une contraction sur un espace métrique complet.

Théorème 1.3.1. (Picard)

Soient (E, d) un espace métrique complet et $\varphi : E \rightarrow E$ une application contractante, i.e. Lipschitzienne de rapport $k < 1$.

Alors, φ admet un unique point fixe $a \in E$.

De plus, pour tout point initial $x_0 \in E$, la suite itérée $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$, avec $x_0 \in E$ quelconque et $x_{p+1} = \varphi(x_p)$ converge vers a .

Théorème 1.3.2. (Point fixe de Banach-Picard) :

Soient (X, d) un espace métrique complet non vide et f une application de X dans lui-même. Si f est contractante (c'est-à-dire k -lipschitzienne avec $0 < k < 1$) alors f admet un unique point fixe dans X noté a .

De plus si l'on définit une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ par $x_0 \in X$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour $n \geq 1$ alors :

$$d(x_n, a) \leq \frac{k^n}{1 - k} d(x_1, x_0)$$

Autrement dit la convergence vers le point fixe a est géométrique.

Remarque 1.3.1. La seconde partie du théorème implique que la suite (x_n) converge vers l'unique point fixe a de f .

Preuve :

On va commencer par l'Existence de point fixe.

Existence :

Soit $x_0 \in X$ et $(x_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par récurrence par $x_{n+1} = f(x_n)$. Pour tout $n \geq 1$, on va montrer que la suite (x_n) est de Cauchy.

Pour tous $p \geq q$ entiers, en utilisant le fait que f est contractante, on a :

$$d(x_p, x_q) = d(f^p(x_0), f^q(x_0)) \leq k^q d(f^{p-q}(x_0), x_0) \quad (*)$$

Par inégalité triangulaire et en utilisant l'inégalité précédente, on a :

$$\begin{aligned} d(x_p, x_0) &\leq d(x_p, x_{p-1}) + d(x_{p-1}, x_0) \\ &\leq k^{p-1} d(x_1, x_0) + k^{p-2} d(x_1, x_0) + \cdots + k^0 d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

En itérant le procédé, on trouve que :

$$d(x_p, x_0) \leq (k^{p-1} + \cdots + k + 1) d(x_1, x_0) \leq \frac{1}{1 - k} d(x_1, x_0)$$

Par suite, en utilisant (*), on a :

$$d(x_p, x_q) \rightarrow 0 \quad \text{quand } p, q \rightarrow \infty$$

Ainsi, la suite (x_n) converge vers un point fixe de f .

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, p > q \implies d(x_p, x_q) \leq \frac{k^q}{1-k} d(x_1, x_0) \quad (**)$$

Unicité :

Supposons que a et b soient deux points fixes de f , alors :

$$\|a - b\| = \|f(a) - f(b)\| \leq k\|a - b\|$$

comme $0 < k < 1$, on en déduit que $\|a - b\| = 0$ et donc que $a = b$. Par suite f admet au plus un point fixe. ce qui prouve que la suite (x_n) est de Cauchy et comme l'espace X est complet alors la suite (x_n) converge vers une limite que l'on va noter a . Enfin comme $x_{n+1} = f(x_n)$ et que f est continue (car contractante), alors en faisant tendre n vers l'infini, on trouve que $a = f(a)$.

De plus, en faisant tendre p vers l'infini dans l'inégalité (**), on obtient :

$$d(a, x_q) \leq \frac{k^q}{1-k} d(x_1, x_0)$$

ce qui prouve que la convergence est géométrique.

Avant de donner une démonstration du théorème, on va montrer à l'aide de contre-exemples que toutes les hypothèses sont importantes.

Contre-exemple 1 : Si $X = [0, 42]$ et $f : x \mapsto x/5$, alors f est contractante mais n'admet pas de point fixe dans X .

Problème : X n'est pas complet.

Contre-exemple 2 : Si $X = \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$, alors X est complet mais f n'admet pas de point fixe.

Problème : f n'est pas contractante.

Contre-exemple 3 : Si $X = [0, 1]$ et $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$, alors X est complet, f est contractante mais f n'admet pas de point fixe.

Problème : $f(X) \not\subset X$.

Définition 1.3.1. Soit (X, d) un espace métrique et $f : X \rightarrow X$ une application. f est dite contractante s'il existe $k \in [0, 1[$ tel que, pour tout $x, y \in X$, on a :

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y). \quad (1)$$

1.3.2 Théorème du point fixe de Banach :

Théorème 1.3.3. *Soit (X, d) un espace métrique complet (ou bien un espace de Banach si X possède une norme) et $f : X \rightarrow X$ une contraction. Alors f admet un point fixe unique dans X , c'est-à-dire qu'il existe $x \in X$ tel que $f(x) = x$.*

1.3.3 Théorème du point fixe de Reich :

Théorème 1.3.4. *Soit (X, d) un espace métrique complet, et $T : X \rightarrow X$ une application satisfait la condition suivante :*

$$d(T(x), T(y)) \leq ad(x, T(x)) + bd(y, T(y)) + cd(x, y), \quad \forall x, y \in X, \quad (2)$$

où a, b, c sont des nombres non négatifs avec $a + b + c < 1$.

Alors, T a un point fixe unique (c'est-à-dire qu'il existe $u \in X$ tel que $Tu = u$).

1.3.4 Théorème du point fixe de Chatterjea :

Théorème 1.3.5. *Soit (X, d) un espace métrique complet et $T : X \rightarrow X$ une application.*

Supposons qu'il existe $k \in [0, \frac{1}{2}[$ tel que pour tous $x, y \in X$, on a :

$$d(T(x), T(y)) \leq k(d(x, T(y)) + d(y, T(x))). \quad (3)$$

Alors, T admet un point fixe unique dans X .

Théorème 1.3.6. *Soit (E, d) un espace métrique complet, et soit $f : E \rightarrow E$ une application contractante alors f admet un unique point fixe c'est-à-dire qu'il existe un unique $x \in E$ tel que :*

$$f(x) = x.$$

Preuve :

Existence :

soit (E, d) un espace métrique complet et $f : E \rightarrow E$ une application contractante, c'est-à-dire lipschitwienne de rapport

$$0 < k < 1$$

soit $x_0 \in E$, et on pose :

$$x_1 = f(x_0), \quad x_2 = f(x_1), \quad \dots \quad x_{n+1} = f(x_n).$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
 d(x_{n+1}, x_n) &= d(f(x_n), f(x_{n-1})) \\
 &\leq k d(x_n, x_{n-1}) \quad (\text{car } f \text{ lipschitzienne}) \\
 &\leq k^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \\
 &\leq k^3 d(x_{n-2}, x_{n-3}) \\
 &\vdots \\
 &\leq k^n d(x_0, x_1)
 \end{aligned}$$

• Si

$$d(x_0, x_1) = 0 \implies x_0 = x_1.$$

Car d est une distance.

On a

$$x_1 = f(x_0) \implies x_0 = f(x_0).$$

Donc x_0 est un point fixe de f .

• Si

$$\begin{aligned}
 d(x_0, x_1) \neq 0 &\implies d(x_{n+1}, x_n) > 0, \\
 &\implies d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n d(x_0, x_1) \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_{n+1}, x_n) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} k^n d(x_0, x_1) = 0 \quad (\text{car } 0 < k < 1).
 \end{aligned}$$

Donc la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy et puisque E est complet, donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeante.

Soit x sa limite où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

On a

$$x_n = f(x_{n-1}),$$

et

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \implies x = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{n-1}),$$

et on a f est continue uniformément alors :

$$x = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1}\right) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = f(x).$$

(Car $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$)

Donc f admet un point fixe.

L'unicité :

Soient x, y deux points fixes de f tels que $x \neq y$ alors :

$$y = f(y)$$

et

$$\begin{aligned} x &= f(x) \\ \implies d(x, y) &= d(f(x), f(y)) \\ &\leq k d(x, y) \end{aligned}$$

Donc

$$d(x, y) < d(x, y).$$

(Contradiction).

Donc $x = y$, alors f admet un point fixe unique.

1.4 Les applications contractantes :

Définition 1.4.1. Soit (X, d) un espace métrique. Une application $T : X \rightarrow X$ est dite :

1. **Lipschitzienne** (ou k -Lipschitzienne) si et seulement s'il existe une constante $k \geq 0$ telle que pour tout $x, y \in X$, on a :

$$d(Tx, Ty) \leq k \cdot d(x, y).$$

2. **contraction** ou une application contractante si $k < 1$.
3. **non expansive** si et seulement si elle est 1-Lipschitzienne.
4. **contractive** si et seulement si pour tout $x, y \in X$, on a .

$$d(Tx, Ty) < d(x, y).$$

Il est clair que, si T est non expansive, alors elle est Lipschitzienne.

Théorème 1.4.1. (Extension d'Eldestein) :

Soient (X, d) un espace métrique complet et $T : X \rightarrow X$ une application satisfaisant :

$$d(Tx, Ty) < d(x, y)$$

pour tout $x, y \in X$. Supposons qu'il existe $y \in X$, telle que la suite (x_n) définie par :

$$\begin{cases} y = x_0 \\ x_{n+1} = Tx_n \quad \text{pour } n \geq 0 \end{cases}$$

possède une sous-suite (x_{n_k}) avec $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x \in X$, alors x est l'unique point fixe de T .

Théorème 1.4.2. (Contraction de Meir-Keeler) :

Soient (X, d) un espace métrique complet et $T : X \rightarrow X$ une application satisfaisant pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in X$:

$$\varepsilon \leq d(x, y) < \delta \implies d(Tx, Ty) < \varepsilon.$$

Alors T a un point fixe unique dans X . De plus, pour tout $x \in X$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T^n x = x^*.$$

Définition 1.4.2. (Contraction de Matkowski) :

Une application $T : X \rightarrow X$ d'un espace métrique (X, d) est dite contraction de Matkowski (ou ϕ -contraction) si et seulement s'il existe une fonction $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, strictement croissante vérifiant :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi^n(t) = 0, \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}_+$$

et

$$d(Tx, Ty) \leq \phi(d(x, y)).$$

Théorème 1.4.3. Toute ϕ -contraction T d'un espace métrique complet (X, d) dans lui-même admet un point fixe unique x^* . De plus, pour tout $x_0 \in X$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n x_0 = x^*$.

Théorème 1.4.4. (Contraction de Caristi) :

Soient (X, d) un espace métrique complet et $T : X \rightarrow X$ une application satisfaisant la condition suivante : il existe une fonction $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ semi-continue inférieurement telle que :

$$d(x, Tx) \leq \phi(x) - \phi(Tx)$$

pour tout $x \in X$. Alors T admet un point fixe.

Chapitre 2

Espace métrique Généralisé :

Dans ce chapitre, nous introduisons la notion d'espaces métriques généralisés. Nous débutons par présenter quelques définitions et propriétés fondamentales relatives à ces espaces. Par la suite, nous abordons d'autres concepts associés, tels que la convergence des suites, la continuité, la topologie, et bien d'autres notions connexes.

2.1 Quelques notions et propriétés d'un espace métrique généralisé :

Définition 2.1.1. Soit X un ensemble non vide et $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ une application telle que, pour tous $x, y \in X$, et pour tous $w, z \in X$ avec $z \neq x$, $z \neq w$, $w \neq y$, les propriétés suivantes soient vérifiées :

1 Identité des indiscernables :

$$d(x, y) = 0 \iff x = y$$

2 Symétrie :

$$d(x, y) = d(y, x)$$

3 Inégalité tétraédrique :

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, w) + d(w, y)$$

Alors on dit que (X, d) est un **espace métrique généralisé** (ou **gms**, pour "generalized metric space").

Définition 2.1.2. (Espace Métrique Complet)

L'espace métrique (X, d) est dit complet si toute suite de Cauchy dans X converge (dans X).

2.1 Quelques notions et propriétés d'un espace métrique généralisé : 16

Si (X, d) est un espace métrique ordinaire, alors (X, d) peut définir des G -métriques sur X par :

$$(E_s) \quad G_s(d)(x, y, z) = d(x, y) + d(y, z) + d(z, x). \quad (4)$$

$$(E_m) \quad G_m(d)(x, y, z) = \max\{d(x, y), d(y, z), d(z, x)\}. \quad (5)$$

Proposition 2.1. Soit (X, G) un espace G -métrique. Alors, pour tout x, y, z et $a \in X$, on a :

- (1) si $G(x, y, z) = 0$, alors $x = y = z$
- (2) $G(x, y, z) \leq G(x, x, y) + G(x, x, z)$
- (3) $G(x, y, y) \leq 2G(y, x, x)$
- (4) $G(x, y, z) \leq G(x, a, z) + G(a, y, z)$
- (5) $G(x, y, z) \leq \frac{2}{3}(G(x, y, a) + G(x, a, z) + G(a, y, z))$
- (6) $G(x, y, z) \leq G(x, a, a) + G(y, a, a) + G(z, a, a)$

Proposition 2.2. Tout espace G -métrique (X, G) définira un espace métrique (X, d_G) par :

$$d_G(x, y) = G(x, y, y) + G(y, x, x), \quad \forall x, y \in X. \quad (6)$$

Définition 2.1.3. Soit (X, G) un espace G -métrique.

Alors, pour $x_0 \in X$, $r > 0$, la G -boule de centre x_0 et de rayon r est donnée par :

$$B_G(x_0, r) = \{y \in X : G(x_0, y, y) < r\}. \quad (7)$$

Proposition 2.3. Soit (X, G) un espace G -métrique.

Alors, pour tout $x_0 \in X$ et $r > 0$, on a :

- (1) si $G(x_0, x, y) < r$, alors $x, y \in B_G(x_0, r)$
- (2) si $y \in B_G(x_0, r)$, alors il existe un $\delta > 0$ tel que $B_G(y, \delta) \subset B_G(x_0, r)$

Proposition 2.4. Soit (X, G) un espace G -métrique. La suite $(x_n) \subset X$ est dite G -convergente vers x si elle converge vers x dans la topologie G -métrique, $\tau(G)$.

Proposition 2.5. Soit (X, G) un espace G -métrique. Alors, pour une suite

$(x_n) \subset X$ et un point $x \in X$, les affirmations suivantes sont équivalentes :

- (1) (x_n) est G -convergente vers x
- (2) $G(x_n, x_n, x) \rightarrow 0$, lorsque $n \rightarrow \infty$
- (3) $G(x_n, x, x) \rightarrow 0$, lorsque $n \rightarrow \infty$
- (4) $G(x_m, x_n, x) \rightarrow 0$, lorsque $m, n \rightarrow \infty$

Définition 2.1.4. Soient (X, G) et (X', G') des espaces G -métriques, et soit $f : (X, G) \rightarrow (X', G')$ une fonction.

Alors f est dite G -continue en un point $a \in X$ si, et seulement si :
pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $x, y \in X$ et $G(a, x, y) < \delta$ impliquent $G'(f(a), f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Une fonction f est G -continue sur X si, et seulement si, elle est G -continue en tout $a \in X$.

Proposition 2.6. Soient (X, G) et (X', G') des espaces G -métriques.

Alors une fonction $f : X \rightarrow X'$ est G -continue en un point $x \in X$ si, et seulement si :

elle est G -séquentiellement continue en x ; c'est-à-dire, chaque fois que (x_n) est G -convergente vers x , on a $(f(x_n))$ G -convergente vers $f(x)$.

Proposition 2.7. Soit (X, G) un espace G -métrique. Alors la fonction $G(x, y, z)$ est continue par rapport à ses trois variables.

Définition 2.1.5. Soit (X, G) un espace G -métrique. Une suite $(x_n) \subset X$ est dite G -Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } G(x_n, x_m, x_l) < \varepsilon \text{ pour tout } n, m, l \geq N..$$

Définition 2.1.6. Un espace G -métrique (X, G) est dit G -complet (ou espace G -métrique complet) si toute suite G -Cauchy dans (X, G) est G -convergente dans (X, G) .

2.2 Le point fixe et suites récurrentes :

Théorème 2.2.1. Soit E un ensemble et f une application continue de E dans E et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par sa valeur initiale x_0 et par la relation de récurrence

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Dans ce cas, si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, elle le fait nécessairement vers un point fixe de f .

Remarque 2.2.1. Si f possède un point fixe pas nécessairement la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Preuve :

Notons x la limite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, c'est-à-dire :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

Et aussi la limite de la suite extraite $(x_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$, mais $x_{n+1} = f(x_n)$ et on obtient par continuité de f et unicité de la limite :

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}.$$

Et on a :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n) \\ \implies x &= \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \\ \implies &= f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) \quad (\text{car } f \text{ est continue}) \\ \implies x &= f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = f(x) \\ \implies x &= f(x) \end{aligned}$$

Donc x est un point fixe de f .

2.3 La topologie sur un espace G-métrique :

Pour tout ensemble non vide X , nous avons vu qu'à partir de toute métrique sur X , nous pouvons construire une G-métrique (par (E_s) ou (E_m)). Réciproquement, pour toute G-métrique G sur X ,

$$(E_d) \quad d_G(x, y) = G(x, y, y) + G(x, x, y) \quad (8)$$

définit immédiatement une métrique sur X , appelée la *métrique associée* à G , qui satisfait :

$$G(x, y, z) \leq G_s(d_G)(x, y, z) \leq 2G(x, y, z).$$

De même,

$$\frac{1}{2}G(x, y, z) \leq G_m(d_G)(x, y, z) \leq 2G(x, y, z).$$

De plus, en partant d'une métrique d sur X , nous avons :

$$d_{G_s(d)}(x, y) = \frac{4}{3}d(x, y), \quad \text{et} \quad d_{G_m(d)}(x, y) = 2d(x, y).$$

Définition 2.3.1. Soit (X, G) un espace métrique généralisé, alors pour tout $x_0 \in X$, $r > 0$, la G-boule de centre x_0 et de rayon r est donnée par :

$$B_G(x_0, r) = \{y \in X : G(x_0, y, y) < r\}.$$

Proposition 2.8. Soit (X, G) un espace G-métrique, alors pour tout $x_0 \in X$ et $r > 0$, on a :

- (1) Si $G(x_0, x, y) < r$, alors $x, y \in B_G(x_0, r)$
 (2) Si $y \in B_G(x_0, r)$, alors il existe $\delta > 0$ tel que $B_G(y, \delta) \subseteq B_G(x_0, r)$

Preuve :

- (1) On a $G(x_0, x, y) < r$ et $G(x_0, x, x) \leq G(x_0, x, y)$, et par suite $G(x_0, x, x) < r$.
 (2) Soit $y \in B_G(x_0, r)$ donc $G(x_0, y, y) < r$ et par suite $r - G(x_0, y, y) > 0$, soit $x \in B_G(y, \delta)$, alors $G(y, x, x) < \delta$, prenons $\delta = r - G(x_0, y, y)$, alors $G(x_0, y, y) + G(y, x, x) < r$, ce qui entraîne $G(y, x, y) + G(x_0, y, y) < r$, d'autre part d'après (G5) :

$$G(x_0, x, x) \leq G(x_0, y, y) + G(y, x, x)$$

alors $G(x_0, x, x) < r$ d'où $x \in B_G(x_0, r)$, donc $B_G(y, \delta) \subseteq B_G(x_0, r)$.

Remarque 2.3.1. Il résulte de (2) de la proposition précédente que la famille des G -boules :

$$F = \{B_G(x, r) : x \in X, r > 0\}$$

forme une base pour la topologie $\tau(G)$ dans X , c'est ce qu'on appelle la topologie G -métrique.

Proposition 2.9. Soit (X, G) un espace G -métrique, alors pour tout $x_0 \in X$ et $r > 0$, on a :

- (i) $B_{G_\infty}(x_0, \frac{1}{2}r) \subset B_{d_{G_\infty}}(x_0, r) \subseteq B_G(x_0, r)$
 (ii) $B_{G_1}(x_0, \frac{1}{3}r) \subset B_{d_{G_1}}(x_0, r) \subset B_G(x_0, \frac{2}{3}r)$
 (iii) $B_{G_p}(x_0, (\frac{1}{p+1})^p r) \subset B_{d_{G_p}}(x_0, r) \subset B_G(x_0, (\frac{p}{p+1})^p r)$

Preuve :

(i) Soit $x \in B_{G_\infty}(x_0, \frac{1}{2}r)$, alors $G(x_0, x, x) < \frac{r}{2}$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} d_{G_\infty}(x_0, x) &= \max\{G(x_0, x, x), G(x, x_0, x_0)\} \\ &\leq \max\{G(x_0, x, x), 2G(x_0, x, x)\} \\ &\leq 2G(x_0, x, x) < r. \end{aligned}$$

Cela implique, $x \in B_{d_{G_\infty}}(x_0, r)$. Soit maintenant $x \in B_{d_{G_\infty}}(x_0, r)$, alors

$$d_{G_\infty}(x_0, x) = \max\{G(x_0, x, x), G(x, x_0, x_0)\} < r$$

et puisque $G(x_0, x, x) < 2G(x, x_0, x_0)$, donc

$$G(x_0, x, x) \leq \max\{G(x_0, x, x), G(x, x_0, x_0)\} < r$$

c'est à dire, $G(x_0, x, x) < r$, d'où $x \in B_G(x_0, r)$.

(ii) Soit $x \in B_{G_1}(x_0, \frac{1}{3}r)$, alors $G(x_0, x, x) < \frac{r}{3}$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} d_{G_1}(x_0, x) &= G(x_0, x, x) + G(x, x_0, x_0) \\ &\leq G(x_0, x, x) + 2G(x_0, x, x) \\ &\leq 3G(x_0, x, x) < r \end{aligned}$$

d'où $x \in B_{d_{G_1}}(x_0, r)$.

Soit $x \in B_{d_{G_1}}(x_0, r)$, alors $d_{G_1}(x_0, x) = G(x_0, x, x) + G(x, x_0, x_0) < r$

et puisque $G(x_0, x, x) < 2G(x, x_0, x_0)$, on obtient :

$$\frac{3}{2}G(x_0, x, x) \leq G(x_0, x, x) + G(x, x_0, x_0) < r$$

et par suite,

$$G(x_0, x, x) < \frac{2}{3}r$$

on en déduit que $x \in B_G(x_0, \frac{3}{2}r)$

(iii) Soit $x \in B_G(x_0, (\frac{1}{2^p+1})^{\frac{1}{p}}r)$, alors $G(x_0, x, x) < \frac{r}{(2^p+1)^{\frac{1}{p}}}$, il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} d_{G_p}(x_0, x) &= (G(x_0, x, x)^p + G(x, x_0, x_0)^p)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq (G(x_0, x, x)^p + (2G(x_0, x, x))^p)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq (G(x_0, x, x)^p(2^p + 1))^{\frac{1}{p}} \\ &= (2^p + 1)^{\frac{1}{p}}G(x_0, x, x) < r \end{aligned}$$

d'où, $x \in B_{d_{G_p}}(x_0, r)$

et soit $x \in B_{d_{G_p}}(x_0, r)$, alors $d_{G_p}(x_0, x) = (G(x_0, x, x)^p + G(x, x_0, x_0)^p)^{\frac{1}{p}} < r$
et puisque $G(x_0, x, x) < 2G(x, x_0, x_0)$ donc :

$$\left(\frac{2^p + 1}{2^p}\right)^{\frac{1}{p}} G(x_0, x, x) \leq (G(x_0, x, x)^p + G(x, x_0, x_0)^p)^{\frac{1}{p}} < r$$

c'est à dire, $G(x_0, x, x) < \left(\frac{2^p}{2^p + 1}\right)^{\frac{1}{p}} r$ ce qui entraîne :

$$x \in B_G\left(x_0, \left(\frac{2^p}{2^p + 1}\right)^{\frac{1}{p}} r\right).$$

Remarque 2.3.2. La topologie G-métrique $\tau(G)$ coïncide avec la topologie induite par la distance d_G . Cela a permis de transporter plusieurs concepts et résultats des espaces métriques aux espaces G-métriques.

2.4 Convergence dans les espaces G-métriques :

Définition 2.4.1. Soit (X, G) un espace G-métrique. La suite $(x_n) \subseteq X$ est dite G-convergente vers x si elle converge vers x dans la topologie G-métrique, $\tau(G)$.

Proposition 2.10. Soit (X, G) un espace G-métrique. Alors, pour une suite $(x_n) \subset X$ et un point $x \in X$, les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. (x_n) est G-convergente vers x
2. $d_G(x_n, x) \rightarrow 0$, lorsque $n \rightarrow \infty$ (c'est-à-dire, (x_n) converge vers x par rapport à la métrique d_G)
3. $G(x_n, x_n, x) \rightarrow 0$, lorsque $n \rightarrow \infty$
4. $G(x_n, x, x) \rightarrow 0$, lorsque $n \rightarrow \infty$
5. $G(x_m, x_n, x) \rightarrow 0$, lorsque $m, n \rightarrow \infty$

2.5 Complétude des espaces G-métriques :

Définition 2.5.1. Soit (X, G) un espace G-métrique.

1. Une suite (x_n) dans X est dite G-convergente à un point $x \in X$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $m, n \geq n_0$

$$G(x_m, x_n, x) < \varepsilon.$$

2. Une suite (x_n) dans X est dite G -Cauchy si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $m, n, l \geq n_0$,

$$G(x_m, x_n, x_l) < \varepsilon.$$

Proposition 2.11. Soit (X, G) un espace G -métrique. Alors la fonction $G(x, y, z)$ est continue conjointement en ses trois variables.

Définition 2.5.2. Soit (X, G) un espace G -métrique. Une suite $(x_n) \subset X$ est dite G -Cauchy si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $G(x_n, x_m, x_l) < \varepsilon$ pour tous $n, m, l \geq N$.

La proposition suivante découle directement des définitions.

Proposition 2.12. Dans un espace G -métrique (X, G) , les affirmations suivantes sont équivalentes.

1. La suite (x_n) est G -Cauchy.
2. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $G(x_n, x_m, x_m) < \varepsilon$, pour tous $n, m \geq N$.
3. La suite (x_n) est une suite de Cauchy dans l'espace métrique (X, d_G) .

Corollaire 2.5.1. Toute suite G -convergente dans un espace G -métrique est G -Cauchy.

Corollaire 2.5.2. Si une suite G -Cauchy dans un espace G -métrique (X, G) contient une sous-suite G -convergente, alors la suite entière est G -convergente.

Définition 2.5.3. Un espace G -métrique (X, G) est dit G -complet si toute suite G -Cauchy dans (X, G) est G -convergente dans (X, G) .

Proposition 2.13. Un espace G -métrique (X, G) est G -complet si et seulement si (X, d_G) est un espace métrique complet.

Chapitre 3

Applications :

3.1 Application 1 :

Lemme 2. Soit (X, G) un espace métrique Généralisés et soit $T : X \rightarrow X$ une application telle que :

$$G(Tx, Ty, Tz) \leq \phi(M(x, y, z))$$

Pour tous $x, y, z \in X$, où $\phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ est une fonction telle que $\phi(t) < t$ pour tout $t > 0$.

Si $x \in X$ satisfait $T^n x \neq T^{n+1}x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors les propriétés suivantes sont vérifiées :

- (a) $M(T^n x, T^{n+1}x, T^{n+1}x) = G(T^n x, T^{n+1}x, T^{n+1}x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- (b) $G(T^n x, T^{n+1}x, T^{n+1}x) \leq \phi(G(T^{n-1}x, T^n x, T^n x)) < G(T^{n-1}x, T^n x, T^n x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Théorème 3.1.1. Soit (X, G) un espace G -métrique complet et $T : X \rightarrow X$ une application satisfaisant la condition suivante pour tout $x, y, z \in X$:

$$G(Tx, Ty, Tz) \leq \phi G(x, y, z), \quad (9)$$

où $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, strictement croissante vérifiant :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi^n(t) = 0, \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}_+$$

Alors T admet un point fixe unique.

Dans cette section, nous présentons l'application suivante concernant l'existence et l'unicité des solutions pour une classe d'équations intégrales non linéaires. Nous considérons l'équation intégrale non linéaire suivante :

$$u(t) = \int_0^1 k(t, s, u(s)) ds \quad \text{pour tout } t \in [0, 1]. \quad (10)$$

Soit $k : [0, 1] \times [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $X = C([0, 1])$ l'ensemble des fonctions réelles continues sur $[0, 1]$. Nous munissons X de la G-métrique standard :

$$G_\infty(u, v, w) = \max_{t \in [0, 1]} |u(t) - v(t)| + \max_{t \in [0, 1]} |v(t) - w(t)| + \max_{t \in [0, 1]} |w(t) - u(t)|$$

pour tous $u, v, w \in X$. Il est bien connu que (X, G) est G-complet. Considérons l'application $T : X \rightarrow X$ définie par :

$$Tu(t) = \int_0^1 k(t, s, u(s)) ds \quad \text{pour tout } t \in [0, 1]. \quad (11)$$

Notez que u est une solution de (18) si et seulement si u est un point fixe de T . Soient $(\alpha, \beta) \in X^2$ et $(\alpha_0, \beta_0) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\alpha_0 \leq \alpha(t) \leq \beta(t) \leq \beta_0 \quad \text{pour tout } t \in [0, 1]. \quad (12)$$

Supposons que, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\alpha(t) \leq \int_0^1 k(t, s, \beta(s)) ds, \quad (13)$$

et

$$\beta(t) \geq \int_0^1 k(t, s, \alpha(s)) ds. \quad (14)$$

Supposons également que, pour tous $t, s \in [0, 1]$, $k(t, s, \cdot)$ est une fonction décroissante, c'est-à-dire que, pour $x, y \in \mathbb{R}$,

$$x \leq y \implies k(t, s, x) \geq k(t, s, y). \quad (15)$$

Enfin, soit $t, s \in [0, 1]$, $x, y \in \mathbb{R}$ tels que pour $(x \leq \beta_0$ et $y \geq \alpha_0)$ ou $(x \geq \alpha_0$ et $y \leq \beta_0)$ ou $(x \geq \alpha_0$ et $y \geq \alpha_0)$:

$$|k(t, s, x) - k(t, s, y)| \leq \frac{1}{3}\phi(|x - y|), \quad (16)$$

où $\phi \in \Phi$. Prenons

$$\mathcal{W} = \{u \in X : \alpha \leq u \leq \beta\}.$$

Théorème 3.1.2. *Sous les hypothèses (12)-(16), le problème (10) admet une et une seule solution $u \in \mathcal{W}$.*

Preuve :

Prenons :

$$A_1 = \{u \in X : u \leq \beta\} \quad \text{et} \quad A_2 = \{u \in X : u \geq \alpha\}.$$

A_1 et A_2 sont G-fermé(e)s. Vérifions que :

$$T(A_1) \subset A_2 \quad \text{et} \quad T(A_2) \subset A_1.$$

Pour tout $u \in A_1$, nous avons $u(s) \leq \beta(s)$. En utilisant l'hypothèse (14), nous obtenons :

$$k(t, s, u(s)) \geq k(t, s, \beta(s)),$$

pour tout $t \in [0, 1]$. Ainsi, d'après (13),

$$Tu(t) = \int_0^1 k(t, s, u(s)) ds \geq \int_0^1 k(t, s, \beta(s)) ds \geq \alpha(t).$$

Ainsi, $Tu \in A_2$.

De même, soit $u \in A_2$, nous avons $u(s) \geq \alpha(s)$. En utilisant de nouveau l'hypothèse (15), nous obtenons :

$$k(t, s, u(s)) \leq k(t, s, \alpha(s))$$

pour tout $t \in [0, 1]$. Ainsi, d'après (13) :

$$Tu(t) = \int_0^1 k(t, s, u(s)) ds \leq \int_0^1 k(t, s, \alpha(s)) ds \leq \beta(t),$$

donc $Tu \in A_1$.

Maintenant, soit $(u, v, w) \in A_1 \times A_2 \times A_2$, c'est-à-dire, pour tout $t \in [0, 1]$:

$$u(t) \leq \beta(t), \quad v(t) \geq \alpha(t), \quad \text{et} \quad w(t) \geq \alpha(t).$$

Cela implique d'après la condition (11) que, pour tout $t \in [0, 1]$:

$$u(t) \leq \beta_0, \quad v(t) \geq \alpha_0, \quad \text{et} \quad w(t) \geq \alpha_0.$$

Compte tenu de (16) et des inégalités ci-dessus, nous avons :

$$\begin{aligned} |Tu(t) - Tv(t)| &\leq \int_0^1 |k(t, s, u(s)) - k(t, s, v(s))| ds \\ &\leq \frac{1}{3} \int_0^1 \phi(|u(s) - v(s)|) ds \\ &\leq \frac{1}{3} \phi \left(\max_{t \in [0, 1]} |u(t) - v(t)| \right) \leq \frac{1}{3} \phi(G_\infty(u, v, w)). \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\max_{t \in [0,1]} |Tu(t) - Tv(t)| \leq \frac{1}{3} \phi(G_\infty(u, v, w)). \quad (17)$$

De façon similaire, nous avons :

$$\max_{t \in [0,1]} |Tv(t) - Tw(t)| \leq \frac{1}{3} \phi(G_\infty(u, v, w)), \quad (18)$$

et

$$\max_{t \in [0,1]} |Tw(t) - Tu(t)| \leq \frac{1}{3} \phi(G_\infty(u, v, w)). \quad (19)$$

En additionnant (15) à (18), nous obtenons :

$$G_\infty(Tu, Tv, Tw) \leq \phi(G_\infty(u, v, w)). \quad (20)$$

Toutes les conditions du Théorème (3.1.1) sont satisfaites. Alors T admet un unique point fixe $u \in A_1 \cap A_2 = \mathcal{W}$, c'est-à-dire qu'il est la solution unique du problème (10).

3.1.1 Exemple sur Le cas non symétrique :

Soit $X = \mathbb{R}$ muni de la G-métrique définie par :

(i) $G(x, x, x) = 0$

(ii) $G(x, x, y) = G(x, y, x) = G(y, x, x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < y \\ 2 & \text{si } x > y \end{cases}$

(iii) $G(x, y, z) = G(x, z, y) = G(y, z, x) = \dots$ (symétrie dans les trois variables)

(iv) $G(x, y, z) = 2$ si toutes les variables sont distinctes.

Notez que G n'est pas symétrique puisque $G(1, 1, 2) = 1 \neq 2 = G(1, 2, 2)$. Il est facile de voir que (X, G) est un espace G-métrique complet. Définissons $T : X \rightarrow X$ par :

$$T_x = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 2 & \text{si } x = 1 \text{ ou } 2 \\ g(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

où g est une fonction donnée.

Prenons $A_1 = \{0, 1\}$ et $A_2 = \{1, 2\}$. Pour tout $(x, y, z) \in A_1 \times A_2 \times A_2$, nous avons :

$$G(T_x, T_y, T_z) \leq \phi(G(x, y, z)),$$

pour chaque $\phi \in \Phi$ avec $\phi(2) \geq 1$. Il suffit de considérer $\phi(t) = at$ avec $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$. Toutes les hypothèses du Théorème (3.2.2) sont satisfaites, et $u = 1$ est le point fixe unique de T dans $Y = A_1 \cup A_2$.

3.2 Application 2 :

Théorème 3.2.1. Soit (X, G) un espace G -métrique complet et $T : X \rightarrow X$ une application satisfaisant la condition suivante pour tout $x, y \in X$:

$$G(Tx, Ty, Ty) \leq kG(x, y, y), \quad (21)$$

où $k \in [0, 1)$. Alors T admet un point fixe unique.

Théorème 3.2.2. Soit (X, G) un espace G -métrique complet et $T : X \rightarrow X$ une application satisfaisant la condition suivante pour tout $x, y \in X$:

$$G(Tx, Ty, Ty) \leq kG(x, Tx, y), \quad (22)$$

où $k \in [0, 1)$. Alors T admet un point fixe unique.

Preuve : Soit $x_0 \in X$ un point arbitraire, et définissons la suite x_n par $x_n = T^n(x_0)$. D'après (22), nous avons :

$$G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq kG(x_{n-1}, x_n, x_n). \quad (23)$$

En continuant ce raisonnement, nous obtenons :

$$G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq k^n G(x_0, x_1, x_1). \quad (24)$$

De plus, pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, $n < m$, nous avons, par l'inégalité rectangulaire :

$$\begin{aligned} G(x_n, x_m, x_m) &\leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) \\ &\quad + G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3}) + \cdots + G(x_{m-1}, x_m, x_m) \\ &\leq (k^n + k^{n+1} + k^{n+2} + \cdots + k^{m-1}) G(x_0, x_1, x_1) \\ &\leq \frac{k^n}{1-k} G(x_0, x_1, x_1). \end{aligned} \quad (25)$$

et donc, $\lim_{n, m \rightarrow \infty} G(x_n, x_m, x_m) = 0$. Ainsi, (x_n) est une suite G -de Cauchy.

En raison de la complétude de (X, G) , il existe $u \in X$ tel que (x_n) G -converge vers u . Supposons que $Tu \neq u$, alors :

$$G(x_n, Tu, Tu) \leq kG(x_{n-1}, x_n, u). \quad (26)$$

En prenant la limite lorsque $n \rightarrow \infty$, et en utilisant le fait que la fonction G est continue, nous avons :

$$G(u, Tu, Tu) \leq kG(u, u, u). \quad (27)$$

Cette contradiction implique que $u = Tu$.

Pour prouver l'unicité, supposons qu'il existe $u \neq v$ tel que $Tv = v$, alors :

$$G(u, u, v) = G(Tu, Tu, Tv) \leq kG(u, Tu, v) \leq kG(u, u, v). \quad (28)$$

Ce qui implique que $u = v$.

Exemple 3.1. Soit $X = [0, \infty)$ et

$$G(x, y, z) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = y = z, \\ \max\{x, y, z\}, & \text{sinon.} \end{cases}$$

G est une G -métrique sur X . Définissons $T : X \rightarrow X$ par $Tx = \frac{1}{5}x$. Alors, la condition du Théorème (3.2.2) est vérifiée. En effet,

$$G(Tx, Ty, Ty) = \frac{1}{5} \max\{x, y\}$$

et

$$G(x, Tx, y) = \max\{x, y\}$$

et donc,

$$G(Tx, Ty, Ty) \leq \frac{1}{4}G(x, Tx, y)$$

Ainsi, les conditions du Théorème (3.2.2) sont vérifiées pour cet exemple.

Exemple 3.2.

Soit $X = [0, \infty)$ muni de la G -métrique habituelle

$$G(x, y, z) = |x - y| + |y - z| + |z - x|$$

, et $\leq$ l'ordre habituel sur $\mathbb{R}$. Nous définissons un nouvel ordre $\leq$ sur X tel que $x \leq y$ si et seulement si $y \leq x$, pour tous $x, y \in X$.

Nous définissons les fonctions $f, g, h, T, S, U : X \rightarrow X$ par :

$$f(x) = \ln \left(1 + \frac{x}{6} \right)$$

$$g(x) = \ln \left(1 + \frac{x}{12} \right)$$

$$h(x) = \ln \left(1 + \frac{x}{18} \right)$$

$$U(x) = e^{6x} - 1$$

$$T(x) = e^{12x} - 1$$

et

$$S(x) = e^{18x} - 1$$

Ici :

$$f(X) \subseteq U(X), g(X) \subseteq T(X), h(X) \subseteq S(X)$$

.

Maintenant, pour tout $x \in X$, nous avons :

$$1 + \frac{x}{6} \leq e^x, 1 + \frac{x}{12} \leq e^x, 1 + \frac{x}{18} \leq e^x$$

donc :

$$f(x) = \ln \left(1 + \frac{x}{6} \right) \leq x$$

$$g(x) = \ln \left(1 + \frac{x}{12} \right) \leq x$$

$$h(x) = \ln \left(1 + \frac{x}{18} \right) \leq x$$

Cela implique que :

$$x \leq f(x), x \leq g(x), x \leq h(x)$$

Ainsi, f, g, h sont des applications dominantes.

De plus, pour tout $x \in X$, nous avons :

$$\begin{aligned} f(U(x)) &= \ln \left(1 + \frac{T(x)}{6} \right) \\ &= \ln \left(1 + \frac{e^{6x} - 1}{6} \right) \\ &= \ln \left(\frac{5 + e^{6x}}{6} \right) \\ &= \ln \left(e^{3x} \cdot \frac{5e^{-3x} + e^{3x}}{6} \right) \\ &= 3x + \ln \left(\frac{5e^{-3x} + e^{3x}}{6} \right) \geq x. \end{aligned}$$

Cela implique que $f(U(x)) \leq x$.

De manière similaire,

$$\begin{aligned} g(T(x)) &= \ln \left(1 + \frac{S(x)}{12} \right) \\ &= \ln \left(1 + \frac{e^{12x} - 1}{12} \right) \\ &= \ln \left(\frac{11 + e^{12x}}{12} \right) \\ &= \ln \left(e^{6x} \cdot \frac{11e^{-6x} + e^{6x}}{12} \right) \\ &= 6x + \ln \left(\frac{11e^{-6x} + e^{6x}}{12} \right) \geq x. \end{aligned}$$

Cela implique que $g(T(x)) \leq x$.

De plus :

$$\begin{aligned}
 h(S(x)) &= \ln \left(1 + \frac{U(x)}{18} \right) \\
 &= \ln \left(1 + \frac{e^{18x} - 1}{18} \right) \\
 &= \ln \left(\frac{17 + e^{18x}}{18} \right) \\
 &= \ln \left(e^{9x} \cdot \frac{17e^{-9x} + e^{9x}}{18} \right) \\
 &= 9x + \ln \left(\frac{17e^{-9x} + e^{9x}}{18} \right) \geq x.
 \end{aligned}$$

Cela implique que $h(S(x)) \leq x$.

Ainsi, f, g, h sont des annihilateurs faibles de U, T et S , respectivement.

Puisque :

$$f(U(x)) \leq x, x \leq f(x)$$

Nous avons :

$$f(U(x)) \leq f(x)$$

.

Par conséquent, (U, f) est partiellement faiblement croissant.

De même

$$g(T(x)) \leq x, x \leq g(x)$$

donc (T, g) est partiellement faiblement croissant.

De manière similaire

$$h(S(x)) \leq x, x \leq h(x)$$

donc (S, h) est partiellement faiblement croissant.

Maintenant, il existe une suite croissante $(x_n) = \frac{1}{n}$ dans X telle que

$$\frac{1}{n} \rightarrow 0, f(x_n) = \ln \left(1 + \frac{x_n}{6} \right) = \ln \left(1 + \frac{1}{6n} \right) \rightarrow 0$$

et

$$S(x_n) = e^{18x_n} - 1 = e^{\frac{18}{n}} - 1 \rightarrow 0$$

quand $n \rightarrow \infty$.

Aussi :

$$f(S(x_n)) = \ln \left(1 + \frac{S(x_n)}{6} \right) \rightarrow 0$$

et

$$S(f(x_n)) = e^{18f(x_n)} - 1 \rightarrow 0$$

Par conséquent :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G(f(S(x_n)), S(f(x_n)), S(f(x_n))) = 0$$

ce qui signifie que la paire (f, S) est une paire compatible et continue.

De manière similaire, la paire (g, T) est également une paire compatible et continue.

0 est le point de coïncidence de la paire (h, U) , et nous avons

$$h(U(0)) = h(0) = 0 = U(0) = U(h(0))$$

Par conséquent, la paire (h, U) est faiblement compatible.

Maintenant, nous définissons $\alpha(t) = \frac{1}{1+t}$ si

$t \in (0, \infty)$ et $\alpha(t) = 0$ si $t = 0$.

Alors pour

$$t_n = \frac{1}{n}, \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(t_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \rightarrow 1$$

Cela implique que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

Ainsi, $\alpha \in F$.

Pour $x, y, z \in X$, nous avons :

$$\begin{aligned} G(f(x), g(y), h(z)) &= |f(x) - g(y)| + |g(y) - h(z)| + |h(z) - f(x)| \\ &= \left| \ln \left(1 + \frac{x}{6} \right) - \ln \left(1 + \frac{y}{12} \right) \right| + \left| \ln \left(1 + \frac{y}{12} \right) - \ln \left(1 + \frac{z}{18} \right) \right| \\ &\quad + \left| \ln \left(1 + \frac{z}{18} \right) - \ln \left(1 + \frac{x}{6} \right) \right| \\ &\leq \frac{1}{12} |2x - y| + \frac{1}{36} |3y - 2z| + \frac{1}{18} |z - 3x| \\ &= \frac{1}{72} |12x - 6y| + \frac{1}{216} |18y - 12z| + \frac{1}{108} |6z - 18x| \\ &\leq \frac{1}{72} G(T(x), U(y), U(y)) + \frac{1}{216} G(S(y), T(z), T(z)) + \frac{1}{108} G(U(z), S(x), S(x)) \\ &\leq \frac{1}{36} \left[\frac{1}{2} G(T(x), U(y), U(y)) + \frac{1}{6} G(S(y), T(z), T(z)) + \frac{1}{3} G(U(z), S(x), S(x)) \right] \\ &\leq \frac{1}{36} M(x, y, z) \leq \alpha(M(x, y, z)) M(x, y, z). \end{aligned}$$

Cela est vrai si $\frac{1}{26} \leq \alpha(M(x, y, z)) < 1$, pour tous $x, y, z \in X$.

Ainsi 0 est le point fixe unique commun de f, g, h, S, T et U .

Conclusion :

Dans ce mémoire, nous explorons les concepts de base des espaces métriques classiques et généralisés, en nous concentrant sur l'existence et l'unicité des points fixes et leurs diverses applications.

L'ensemble de ce travail met généralement l'accent sur l'importance des théorèmes du point fixe et des espaces métriques généralisés dans l'analyse mathématique moderne. Ces résultats ne se limitent pas à des simples généralisations des concepts classiques, mais fournissent également des outils puissants pour résoudre des problèmes spécifiques dans divers domaines tels que l'optimisation, la théorie des jeux et la modélisation mathématique.

En conclusion, les espaces métriques généralisés et leurs théorèmes de point fixe constituent un domaine de recherche riche et prometteur avec de nombreuses perspectives de recherche futures. Ces perspectives incluent l'étude d'autres structures générales, le développement de nouvelles techniques analytiques et l'application à des problématiques interdisciplinaires.

Bibliographie

- [1] A. Malceski, K.Anevski, *Extention of Kannan and Chatterjea Fixed point theorems on complete Metric spaces*, *J.Math.* 17(1) : 1 -10; 2016 :
- [2] A. Monier, *Théorème du point fixe de Brouwer. j. des élève, ENS Lyon, vol 1, 1998. no. 4,p 202-206.*
- [3] C. W. Scal *Topologie et Analyse fonctionnell, Hermann Éditeur, 6 Rue de la Sorbonne, 75005 Paris,2012.*
- [4] Ferreira. M.A.M. and Andrade. M. (2011) *Hahn-Banach Theorem for Normed Spaces. International Journal of Academic Research* , 3, 13-16.
- [5] Fora. A. Bellour.A. Al-Bsoul. A : Some results in fixed point theory concerning generalized metric spaces. *Matematicki Vesnik.* 61(3), 203–208 (2009)
- [6] Jleli. M. and Samet. B (2014) *A New Generalization of the Banach Contraction Principle. Journal of Inequalities and Applications* , 2014, Article No. 38.
- [7] J. Córnicki, *Fixed Point Theorem for Kannan type mappings. J.Fixed Point Theory, App* 19, 2145-2152(2017)
- [8] J. J. Louis, *Espace métrique, 25030 Besançon, 16 Rue de Gray, octobre 2009.*
- [9] J. Nachbar, *Fixed point theorems. Econ* 511(2010), 1-16.
- [10] Khojasteh, F. et al (2016) *Some Applications of Caristi's Fixed Point Theorem in Metric Spaces. Fixed Point Theory and Applications* , 2016, Article No. 16.
- [11] Mihet.D : On Kannan fixed point principle in generalized metric spaces.*J. Nonlinear Sci. Appl.* 2(2), 92–96 (2009)
- [12] P.DAS, A fixed point theorem on a class of generalized metric spaces. *Korean J. Math. Sci.* 9, 29–33 (2002)
- [13] P.DAS, A fixed point theorem in a generalized metric space. *Soochow J. Math.* 33(1), 33–39 (2007)
- [14] P.DAS. Lahiri. BK : Fixed point of Ljubomir Ćirić's quasi-contraction mapping in a generalized metric space. *Publ. Math. Debrecen.* 61, 589–594 (2002)
- [15] P.DAS, Lahiri, BK : Fixed point of contractive mappings in generalized metric spaces, *Math, Slovaca.* 59(4),499–504 (2009)