

République algérienne démocratique et populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique



Université Ibn-Khaldoun de Tiaret
Faculté des Sciences Appliquées
Département de Génie Mécanique



THÈSE

Présentée par

RAI Naceur Bouharkat

En vue de l'obtention du diplôme de :

Doctorat

Filière : **Génie Mécanique**

Spécialité : **Construction Mécanique**

THÈME

**Formulation de la méthode des éléments de frontière (BEM) pour l'analyse
mécanique des matériaux renforcés non homogènes**

Soutenu le : 27/02/2025

Devant le jury composé de :

Pr. HADJI Lazreg	Professeur	Président	Université de Tiaret
Pr. AIT AMAR MEZIANE Mohamed	Professeur	Encadrant	Université de Tiaret
Pr. BELABED Zakaria	Professeur	Examineur	C.U de Naama
Dr. HARICHE Lazhar	Maître de conférences A	Examineur	Université de Djelfa
Dr. MAKHFI Souad	Maître de conférences A	Examineur	Université de Tiaret
Dr. SAAD Mohamed	Maître de conférences A	Examineur	Université de Tiaret
Pr. MEDJAHED Driss Meddah	Professeur	Invité	C.U de Naama

Année Universitaire 2024-2025

Remerciements

Je souhaite exprimer ma profonde gratitude à mon directeur de Thèse, le Pr. AIT AMAR MEZIANE Mohamed, pour avoir accepté de poursuivre et superviser ce travail de recherche et pour m'avoir soutenu avec ses encouragements optimistes dans un domaine aussi vaste que difficile, mais aussi passionnant.

Mes remerciements vont également à Monsieur le Président le président du jury Pr. HADJI Lazreg, Professeur à l'Université de Tiaret, ainsi qu'aux membres du jury : Pr. BELABED Zakaria Professeur au Centre Universitaire de Naama, Dr. HARICHE Lazhar Maître de Conférences « A » à l'Université de Djelfa, Dr SAAD Mohamed Maître de Conférences "A" et Dr MAKHFI Souad Maître de Conférences « A » à l'Université de Tiaret.

Je remercie vivement le Pr. MEDJAHED Driss Meddah Professeur au Centre Universitaire de Naama pour sa précieuse aide. Je tiens à lui exprimer toute ma gratitude pour avoir accepté de nous honorer par sa présence en qualité de membre invité à cette soutenance.

Je tiens à saluer chaleureusement tous ceux qui ont apporté leur contribution à la réalisation de ce travail.

Je souhaite également adresser mes remerciements à tous mes amis qui étaient présents à chaque étape de mon parcours.

Enfin, à vous, Cher lecteur anonyme, qui prendra le temps de parcourir ces lignes, en espérant sincèrement que ce travail pourra vous être utile et qu'il contribuera à vous transmettre les connaissances nécessaires dans ce domaine

Dédicaces

À mon regretté père,

*Pour son soutien indéfectible, sa sagesse et son amour
inconditionnel qui ont été mes piliers tout au long de ce chemin.*

À ma mère,

*Pour sa tendresse infinie, sa patience et son dévouement qui
ont illuminé chaque étape de ma vie.*

À mes frères,

*Pour leur complicité, leur soutien inébranlable et leurs
encouragements qui ont enrichi cette expérience.*

À ma famille,

*Pour leur soutien constant, leurs prières et leur
amour qui ont été la fondation sur laquelle j'ai pu construire mes rêves.*

À tous ceux qui me sont chers,

*Pour leur présence précieuse, leurs
conseils avisés et leur soutien sans faille qui ont rendu ce parcours
possible.*

ملخص

هذا العمل يسلط الضوء على أهمية المواد المركبة المقواة بالألياف (MRF) في هندسة المواد، ويسلط الضوء على وزنها الخفيف وقوتها مقارنة بالمعادن الصلبة. يتم التركيز على الحاجة إلى فهم شامل للخصائص الفيزيائية للمواد المركبة المقواة بالألياف نظرًا لتنوعها الهيكلي والتركيب. يستكشف البحث جانبين رئيسيين: دراسة متعمقة للهياكل والمواد المركبة، مع التركيز على MRFs المعززة بالألياف، ونمذجة سلوك MRFs غير المتجانسة، باستخدام طريقة العنصر الحدودي (BEM).

تؤكد نتائج الدراسة فعالية الأساليب المستخدمة في تحليل الخواص الميكانيكية لـ MRFs ، من خلال تسليط الضوء على تأثير الجزء الحجمي من الإدراج. توضح الفصول المخصصة لنمذجة BEM1D واقتراح BEM/FIBER على التوالي فعالية الطريقة للهياكل المختلفة وإمكاناتها في التحليل الشامل لسلوك MRFs

باختصار، تهدف الأطروحة إلى تعميق فهم MRFs ، من خلال الجمع بين نمذجة السلوك غير المتجانس مع الأساليب العددية المتقدمة، وتوفير وجهات نظر عملية للصناعة، لا سيما في تصميم المركبات الجديدة والتنبؤ بخصائصها.

الكلمات المفتاحية: المواد المركبة المقواة بالألياف (MRF) ، طريقة العناصر الحدودية (BEM) ، نمذجة BEM1D ، اقتراح BEM/FIBER ، جزء حجم الإدراج

Abstract

This present work highlights the importance of fiber-reinforced (MRF) composite materials in materials engineering, highlighting their light weight and strength comparable to solid metals. Emphasis is placed on the need for a thorough understanding of the physical properties of MRFs due to their structural and compositional diversity. The research explores two major aspects : an in-depth study of reinforced structures and composites, with a focus on fiber-reinforced MRFs, and modeling the behavior of non-homogeneous MRFs, using the boundary element method (BEM).

The results of the study confirm the effectiveness of the approaches used in the analysis of the mechanical properties of MRFs, by highlighting the influence of the volume fraction of inclusions. The chapters dedicated to BEM1D modeling and BEM/FIBER coupling respectively demonstrate the effectiveness of the method for different structures and its potential in the overall analysis of the behavior of MRFs

.In summary, the thesis aims to deepen the understanding of MRFs, by combining the modeling of non-homogeneous behavior with advanced numerical methods, and to provide practical perspectives for the industry, notably in the design of new composites and the prediction of their properties.

Keywords : Fiber reinforced composite materials (MRF), Boundary element method (BEM), BEM1D modeling, BEM/FIBER coupling, Volume fraction of inclusions.

Résumé

Le présent travail met en évidence l'importance des matériaux composites renforcés de fibres (MRF) dans l'ingénierie des matériaux, en mettant en avant leur légèreté et leur résistance comparables à celles des métaux solides. L'accent est mis sur la nécessité d'une compréhension approfondie des propriétés physiques des MRF en raison de leur diversité structurelle et compositionnelle. Cette recherche explore deux aspects majeurs : une étude approfondie des structures renforcées et des composites, avec un focus sur les MRF renforcés par des fibres, et la modélisation du comportement des MRF non homogènes, utilisant la méthode des éléments de frontière (BEM).

Les résultats de l'étude confirment l'efficacité des approches utilisées dans l'analyse des propriétés mécaniques des MRF, en mettant en lumière l'influence de la fraction volumique des inclusions. Les chapitres dédiés à la modélisation BEM1D et au couplage BEM/FIBRE démontrent respectivement l'efficacité de la méthode pour différentes structures et son potentiel dans l'analyse globale du comportement des MRF.

En résumé, la thèse vise à approfondir la compréhension des MRF, en combinant la modélisation du comportement non homogène avec des méthodes numériques avancées, et à fournir des perspectives pratiques pour l'industrie, notamment dans la conception de nouveaux composites et la prédiction de leurs propriétés.

Mots-clés : Matériaux composites renforcés de fibres (MRF), Méthode des éléments de frontière (BEM), Modélisation BEM1D, Couplage BEM/FIBRE, Fraction volumique des inclusions.

Table des matières

<i>Remerciements</i>	E
rror! Bookmark not defined.	
<i>Abstract</i>	III
<i>Résumé</i>	Er
ror! Bookmark not defined.	
<i>Table des matières</i>	VIII
<i>Liste des figures</i>	X
<i>Introduction générale</i>	XI
<i>Introduction générale</i>	2
<i>Chapitre 1: Structures renforcées et matériaux composites</i>	
<i>.11.Introduction</i>	5
<i>.12 Les Matériaux à Gradient Fonctionnel (FGM)</i>	5
<i>.12.1 Les Matériaux Renforcés de Fibres (MRF)</i>	5
<i>.12.2 Caractérisation avancée et essais mécaniques des composites renforcés de fibres</i>	6
<i>.12.3 Raidisseurs et Modèles de Conception Structurale dans les Matériaux Composites Renforcés</i>	7
<i>1.2.4 Avancements en Matériaux Composites</i>	9
<i>.13 Avancées récentes dans l'analyse des matériaux composites renforcés</i>	11
<i>.13.1Avancées dans la Modélisation des Matériaux à Gradient Fonctionnel</i> .	11
<i>.13.2 Analyse Avancée des Structures Raidies par Méthodes Numériques</i>	13
<i>.13.3 Optimisation Structurale des Panneaux Raidis</i>	14
<i>.13.4 Modélisation Mécanique des Systèmes Structuraux Renforcés</i>	16

<i>Chapitre 2: Généralités sur la méthode des éléments de frontière (BEM) ...</i>	<i>19</i>
2.1 Historique de la (BEM)	20
2.2 État de l'art	24
2.2.1 Méthode des éléments de frontière (BEM)	24
2.2.2 Couplage de la BEM à d'autres méthodes numériques	29
2.2.3 Accouplement raidisseur BEM	33
2.2.4 BEM unidimensionnel (BEM 1D)	36
<i>Chapitre 3: Modélisation du comportement des matériaux renforcés non</i>	
<i>homogènes</i>	<i>38</i>
3.1 Introduction	39
3.2. Modélisation par des méthodes numériques	40
3.2.1. Méthode FEM	40
3.2.2 Méthode BEM	45
3.2.3 Couplage BEM – raidisseur	53
3.2.4. Représentation algébrique	54
3.3 Méthode des éléments de frontière unidimensionnels (1D BEM)	58
3.3.1 Points internes	63
3.3.2 Rotation et union des éléments	65
<i>Chapitre 4: Résultats et discussion</i>	<i>68</i>
<i>Résultats et discussion</i>	<i>69</i>
<i>1ère Section</i>	<i>69</i>
4.1.1 Influence de la fraction volumique des inclusions	69
4.1.2 Calcul des tenseurs de déformations macroscopiques	71
4.1.3 Plaque carrée serrée sur les quatre côtés sous une charge uniformément répartie	72

<i>4.1.4 Conclusion</i>	76
<i>2ème Section</i>	77
<i>4.2.1 BEM1D - Exemple 1 : Élément à force linéaire répartie</i>	77
<i>4.2.2 BEM 1D - Exemple 2 : Élément avec force quadratique répartie</i>	80
<i>4.2.3 BEM 1D - Exemple 3 : Union et Rotation d'éléments</i>	84
<i>4.2.4 Conclusions partielles - BEM 1D</i>	87
<i>Chapitre 5 : Couplage BEM/FIBRE validation et application</i>	89
<i>5. Introduction</i>	89
<i>5.1 Couplage - Exemple 1</i>	89
<i>5.1.1 Changement de discrétisation</i>	92
<i>5.2. Conclusion de l'article</i>	93
<i>Conclusion Générale</i>	94
<i>Conclusion Générale</i>	95
<i>Annexe</i>	98
<i>Bibliographie</i>	102

Liste des figures

Figure 1.1.	Raidisseurs longitudinaux	8
Figure 1.2.	Section centrale d'un chasseur de mines	10
Figure 3.2.	Approche pour les croisements entre les renforts et les interfaces des sous-égions	58
Figure 4.1.	Contrainte homogénéisée dans la direction x_2 , en considérant différentes fractions volumiques pour les inclusions.....	70
Figure 4.2.	Stratifié unidirectionnel avec trou central soumis à un déplacement positif, θ étant l'angle d'orientation des fibres	71
Figure 4.3.	Discrétisation du stratifié et conditions aux limites	71
Figure 4.4.	Déformation des points internes dans (a) La direction x , (b) La direction y	73
Figure 4.5.	Déformation des points internes dans la direction xy	74
Figure 4.6.	Plaque encastree orthotrope carrée	74
Figure 4.7.	Moment de flexion du nœud central de la plaque en fonction du temps, en faisant varier le nombre de points internes	75
Figure 4.8.	Élément avec force normale distribuée linéairement	77
Figure 4.9.	Réponse BEM 1D – Force distribuée linéairement	80
Figure 4.10.	Réponse BEM 1D – Force quadratique distribuée	83
Figure 4.11.	Réponse BEM 1D, 41 nœuds – Force quadratique distribuée.....	84
Figure 4.12.	Ferme formée de 3 éléments	84

Figure 4.13.	Modèle et sa déformation	85
Figure 4.14.	Modèle et forces normales générées dans le programme informatique Ftool.....	86
Figure 5.1.	Modèle de panneau avec raidisseurs (Mesures en cm, charges en kN/m)	90
Figure 5.2.	Modèle dans ANSYS	91
Figure 5.3.	Déplacements dans la direction x – Couplage, discrétisation....	92
Figure 5.4.	Déplacements dans la direction y – Couplage, discrétisation...	93
Figure ANX.1.	Déplacement le long de la poutre avec une force au point milieu et des appuis aux extrémités	100

Liste des tableaux

Tableau 4.1 -	Données des éléments. ,, 85
Tableau 4.2 -	Comparaison des résultats de déplacement et des réactions d'appui de la méthode avec Ftool,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,, 86
Tableau 4.3 -	Comparaison du résultat des efforts normaux de la méthode avec Ftool,,, 86

Liste des abréviations et symboles :

u^*	la fonction de poids
Ω	le domaine du corps
$\mathbf{n}$	vecteur normal au contour
Γ	le contour du corps
2D	bidimensionnelle
1D	unidimensionnelle
ϕ_i	les fonctions de base
$\tilde{u}$	la solution approchée
α_i	les coefficients
G	le module d'élasticité transverse
ν	le coefficient de Poisson
ε	représente le tenseur de déformation
p_i	représente les forces de surface
n_j	le vecteur normal à la frontière
Δ	la fonction delta de Dirac
δ_{lk}	représente le delta de Kronecker
r	la distance au point source
q_{km}	la matrice de paramètres complexes
$\mu \bar{\bar{1}}$	la racine conjuguée complexe
E	le module d'élasticité longitudinal, ou module de Young

A	l'aire de la section transversale.
u^*	la fonction de pondération
J	le Jacobien de la fonction
q_i	les intégrales de la force répartie
R	la matrice de rotation
θ	l'angle d'orientation des fibres.
$\{\sigma\}$	le vecteur formé par les composantes de contrainte normales
$\{b\}$	le vecteur des forces volumiques dans les directions x et y
$\{\bar{t}\}$	le vecteur des forces de surface prescrites.
$\{F\}$	le vecteur de force
$[L]$	matrice représentant l'opérateur divergent.
$[K]$	la matrice de rigidité
$[N]$	la matrice contenant les composantes
BEM	méthode des éléments de frontière
PRF	plastiques renforcés de fibres
FGM	les matériaux à gradient fonctionnel
XFEM	la méthode des éléments finis étendus
FEM	la méthode des éléments finis
FDM	la méthode des différences finies
BIEM	La méthode des équations intégrales aux limites

MLPG	La méthode de Petrov-Galerkin sans maille
MFEL	la matériaux fragiles par la mécanique élastique linéaire de la rupture
CQM	la méthode de quadrature de convolution
DEM	la méthode des éléments distincts
EA	l'algorithme évolutif
NREL	le National Renewable Energy Laboratory
MSS	la Méthode de soustraction de singularité.
PFH	Partie Finie d'Hadamart
MRF	matériaux composites renforcés de fibres

Introduction générale

Introduction générale

Les matériaux composites renforcés de fibres (MRF) représentent actuellement l'un des types de composites les plus importants dans le domaine de l'ingénierie. Cette classe de matériaux tire parti de la haute résistance des fibres à sections transversales minuscules en les incorporant dans une matrice plus souple. Ainsi, ces composites offrent des niveaux de résistance et de rigidité comparables à ceux des métaux les plus robustes, tout en étant considérablement plus légers, pesant souvent un tiers de l'acier. Ces caractéristiques en font des candidats naturels pour diverses applications, en particulier dans le domaine aérospatial, et ont suscité un intérêt et une activité de recherche considérables au cours de la dernière décennie.

Pour une utilisation efficace et confiante de ces nouveaux matériaux, une compréhension approfondie et fiable de leurs propriétés physiques est essentielle. Contrairement aux matériaux d'ingénierie conventionnels, les propriétés physiques des MRF ne peuvent pas être simplement déterminées par l'expérience en raison de leur grande variété structurelle et physique. Les paramètres géométriques de la structure interne des MRF, tels que les volumes occupés par les fibres et la matrice, les directions de renforcement des fibres, les formes des sections transversales des fibres et leurs positions relatives, offrent une multitude de possibilités lorsqu'ils varient. De plus, le choix des constituants, principalement les fibres (verre, carbone, bore) et les matrices (plastiques, métaux légers), ajoute une autre dimension de variabilité.

Dans cette thèse, notre focus se concentre sur une étude approfondie des matériaux composites renforcés de fibres (MRF), en explorant deux axes principaux de recherche. Le premier axe concerne la modélisation et la caractérisation du comportement des MRF non homogènes, en tenant compte des différentes microstructures possibles et des variations de fraction volumique des inclusions. Le deuxième axe de recherche explore l'intégration des méthodes numériques, notamment la méthode des éléments de frontière (BEM), pour une meilleure compréhension et prédiction du comportement mécanique des MRF sous diverses conditions de chargement.

Dans le chapitre 1, nous détaillerons les structures renforcées et les composites, en mettant particulièrement l'accent sur les composites renforcés de fibres. Nous examinerons également leurs avantages et leurs applications potentielles, en soulignant leur importance cruciale dans l'industrie aérospatiale.

Le chapitre 2 consistera en une revue approfondie des méthodes numériques utilisées pour l'analyse des structures composites, avec un focus particulier sur la méthode des éléments de frontière (BEM). Nous discuterons des développements historiques et de l'état actuel de la BEM, en explorant ses applications et son intégration avec d'autres méthodes numériques.

Le chapitre 3 abordera spécifiquement la modélisation du comportement des matériaux renforcés non homogènes. Nous étudierons les différentes microstructures envisageables et analyserons leur influence sur les propriétés macroscopiques des composites.

Enfin, dans le chapitre 4, nous présenterons les résultats de nos analyses numériques et en discuterons les implications. Nous examinerons les cellules représentatives (RVEs) et évaluerons les propriétés homogénéisées, en comparant les résultats obtenus à partir de la modélisation BEM avec ceux issus du modèle d'éléments finis (FEM). Nous analyserons également l'impact de divers paramètres, tels que la fraction volumique des inclusions, sur le comportement global des composites renforcés de fibres.

Enfin, dans le chapitre 5, nous conclurons cette thèse en intégrant les résultats et en discutant des perspectives futures. Nous mettrons en lumière l'importance des modèles basés sur la microstructure dans la conception de nouveaux composites et dans la prédiction de leurs propriétés. Nous soulignerons également l'utilité industrielle de notre approche en mettant en avant son potentiel dans la sélection de configurations optimisées pour des applications spécifiques. Nous terminerons en explorant les possibilités d'application de notre travail dans le domaine de la mécanique multi-échelle et en soulignant son caractère polyvalent et universel.

Chapitre 1

Structures renforcées et matériaux composites

.11. Introduction :

Pour comprendre et optimiser les systèmes structuraux renforcés, la modélisation mécanique joue un rôle crucial. Les matériaux renforcés de fibres (MRF), tels que les composites, offrent une combinaison unique de résistance et de légèreté, les rendant essentiels dans des domaines comme l'aérospatiale et l'automobile. Cependant, la complexité des propriétés physiques et mécaniques des MRF nécessite une approche systématique pour leur modélisation et leur simulation. Ce défi est abordé par des techniques avancées telles que la méthode des éléments frontières (BEM), qui permet une analyse détaillée des comportements non homogènes et des interactions complexes entre les matériaux. Cette approche intégrée est cruciale pour prédire avec précision le comportement des systèmes structuraux renforcés sous différentes contraintes, facilitant ainsi la conception optimale et la durabilité des structures dans diverses applications industrielles.

.12 Les Matériaux à Gradient Fonctionnel (FGM) :

.12.1 Les Matériaux Renforcés de Fibres (MRF) :

Du point de vue de l'ingénierie, le type de composites le plus important à l'heure actuelle sont les matériaux renforcés de fibres (désormais abrégés MRF). L'idée derrière ce genre de matériel est simple et les résultats sont surprenants. La très haute résistance de divers types de fibres de sections transversales minuscules est exploitée en les incorporant dans une matrice relativement molle. Il devient ainsi possible de fabriquer des matériaux dont la résistance et la rigidité sont comparables à celles des métaux les plus résistants et dont le poids spécifique est aussi faible qu'un tiers de celui de l'acier.

Cette combinaison de rigidité et de résistance élevées avec un faible poids fait de ces matériaux des candidats naturels pour les applications aérospatiales. Ces applications ont été la principale motivation de l'intense activité de recherche et de développement concernant le MRF au cours de la dernière décennie.

Si l'ingénieur veut utiliser ces nouveaux matériaux en toute confiance, il doit avoir une connaissance détaillée et fiable de leurs propriétés physiques. Alors que pour les matériaux d'ingénierie conventionnels, tels que les métaux et les plastiques, les propriétés physiques sont presque exclusivement déterminées par l'expérience,

une telle approche n'est pas pratique pour les MRF en raison de leur grande variété structurelle et physique. Les aspects typiques de la structure interne du MRF sont : les volumes occupés par les fibres et la matrice, les directions du renforcement des fibres, les formes des sections transversales des fibres et les positions relatives des fibres. La variation de ces seuls paramètres géométriques conduit à un nombre énorme de possibilités.

Une variété supplémentaire est introduite par le choix des constituants. À l'heure actuelle, les fibres sont principalement constituées de verre, de carbone et de bore, tandis que les matrices utilisées sont des plastiques tels que l'époxy et des métaux légers tels que l'aluminium et le magnésium.

Plus de variété est introduite par la portée des propriétés physiques qui doivent être étudiées. D'intérêt principal sont : l'élasticité, la dépendance au temps (par exemple la viscoélasticité), la conduction thermique et électrique, les propriétés diélectriques et magnétiques, le comportement thermomécanique, l'élasticité et la résistance, la fatigue et les caractéristiques dynamiques.

.12.2 Caractérisation avancée et essais mécaniques des composites renforcés de fibres :

Enfin, il convient de noter que les MRF sont anisotropes, ce qui nécessite dans chaque cas la détermination de tout un ensemble de constantes physiques pour rendre compte des propriétés dans différentes directions.

On voit qu'un programme purement expérimental pour étudier les propriétés physiques exigerait un nombre prodigieux d'expériences. Même si de telles expériences étaient menées, il est peu probable que la multitude de données expérimentales qui en résulterait puisse conduire à des lignes directrices pour l'ingénieur. [1]

Au cours des 50 dernières années, de grands progrès ont été réalisés dans le développement de matériaux composites renforcés de fibres artificielles, utilisant généralement des filaments de diamètres microscopiques. Un éventail de formes de renforcement peut être utilisé dans des applications commerciales - la microstructure étant un facteur critique dans la réalisation des propriétés requises dans un matériau. La caractérisation microstructurale des composites renforcés de

fibres examine de manière approfondie l'application de techniques avancées de caractérisation microstructurale aux composites renforcés de fibres.

Pour concevoir une structure ou un composant, il faut examiner attentivement la relation intime entre la façon dont le composant est censé fonctionner et les propriétés du matériau à partir duquel il est fabriqué. Cela peut être un exercice d'équilibre délicat, même avec des matériaux isotropes et homogènes. De par leur nature même, les matériaux composites peuvent présenter des problèmes complexes lors du test de leurs performances structurelles. Se concentrant sur les composites de fibres avancées dans une matrice plastique, Essais mécaniques des composites de fibres avancées fournit le contexte et les principes généraux pour résoudre ces problèmes. Des contributeurs experts examinent comment ces matériaux réagissent à tous les types de chargement, notamment en traction, en compression, en cisaillement, à court ou à long terme, et dans divers environnements susceptibles de modifier considérablement leur comportement. Ils explorent la préparation des échantillons pour les tests, abordent les tests de traction, de flexion, de compression, de cisaillement, d'impact et hors du plan, et discutent de la mécanique de la fatigue et de la rupture. Réunissant un large éventail de méthodes de test applicables à l'ensemble des matériaux composites, mécanique Testing of Advanced Fiber Composites forme un manuel pratique plein d'analyses d'experts. Les scientifiques des matériaux, les ingénieurs et les concepteurs y trouveront tous un outil précieux pour comprendre et utiliser les composites dans la création de structures qui répondent à leurs exigences de conception.

.12.3 Raidisseurs et Modèles de Conception Structurale dans les Matériaux Composites Renforcés:

L'un des domaines les plus importants et passionnants de la recherche sur les composites est le développement de techniques de modélisation pour prédire la réponse des matériaux composites à différents types de contraintes. La modélisation prédictive permet à la fois de mieux comprendre le comportement des composites dans différentes conditions et de développer des matériaux aux performances améliorées pour des applications industrielles particulières. La

modélisation multi-échelle des systèmes de matériaux composites résume les principales recherches dans ce domaine et leurs implications pour l'industrie.

Le mot « raidissement » suggère essentiellement le but de fournir une capacité ou une rigidité supplémentaire de résistance aux contraintes à l'élément structurel existant.

Les raidisseurs sont des plaques ou des sections secondaires qui sont fixées aux âmes ou aux semelles des poutres pour les raidir contre les déformations hors du plan. Presque toutes les poutres principales du pont auront des raidisseurs. Cependant, la plupart n'auront que des raidisseurs d'âme transversaux, c'est-à-dire des raidisseurs verticaux attachés à l'âme.

Tout ce qui est utilisé uniquement pour fournir de la résistance à la structure d'un navire peut être appelé un raidisseur. Un raidisseur soudé dans le sens longitudinal est appelé « raidisseur longitudinal ». De la même façon un raidisseur soudé dans le sens transversal est simplement appelé « raidisseur transversal ».

Les poutres (Girders) sont une forme de raidisseurs longitudinaux (fig. 1). (strengthening of girder : renforcement de poutre).

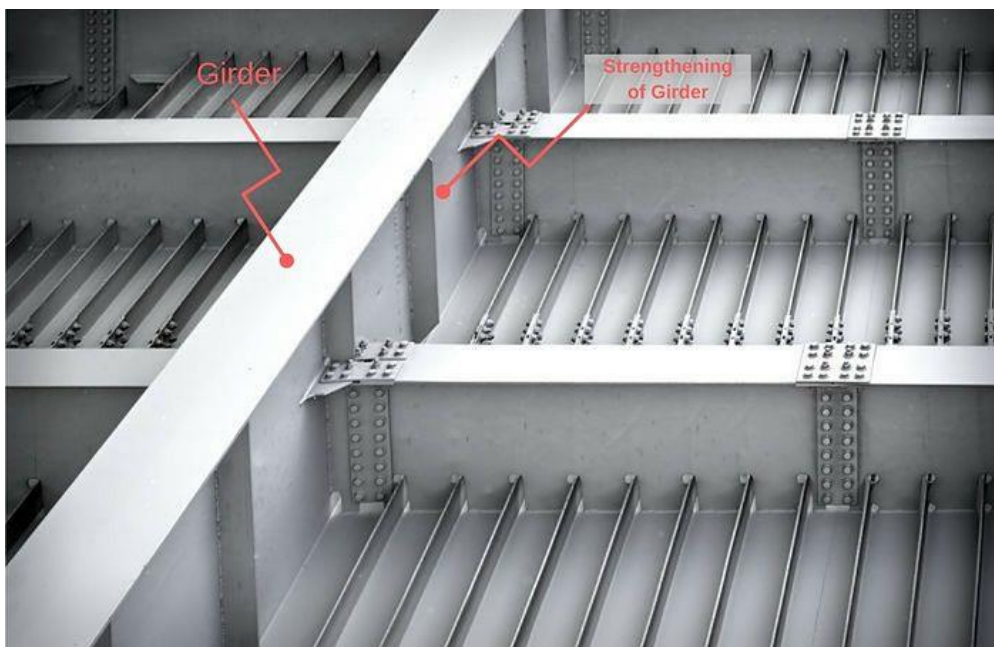


Figure 1.1. Raidisseurs longitudinaux.

Dans un domaine bidimensionnel, un raidisseur peut être défini comme un élément linéaire inséré dans un matériau dans le but d'améliorer ses propriétés mécaniques.

La figure 2 montre les éléments structuraux d'une section médiane d'un navire moderne en plastiques renforcés de fibres (PRF) de construction à simple paroi essentiellement renforcée. Une caractéristique clé de la conception moderne [2], est l'adoption d'un cadrage longitudinal. Les avantages de cette forme de raidissement (par rapport à l'ossature transversale) sont les suivants :

- (i) une plus grande partie de la structure est efficace pour résister à la flexion de la poutre de coque ;
- (ii) les intersections de raidisseurs sont fortement réduites ;
- (iii) les problèmes d'instabilité, notamment dans la structure du tablier, sont minimisés.

Ceux-ci ont dû être pondérés par rapport aux inconvénients perçus, qui sont :

- (i) les bases des raidisseurs doivent être façonnées pour atterrir à la verticale sur l'angle d'élévation variable du fond du navire ;
- (ii) le laminage des longitudinaux sur la coque latérale est difficile ;
- (iii) les cloisons transversales principales doivent être plus solides et plus lourdes afin de supporter les longitudinaux.

.12.4 Avancements en Matériaux Composites :

Il existe de nombreuses manières différentes de renforcer les matériaux par l'ajout d'une seconde phase. Les matériaux renforcés de fibres en sont l'exemple le plus courant. Les matériaux de remplissage de renforcement sont utilisés dans une variété de formes et de géométries. Un intérêt considérable s'attache au développement d'une théorie mécanique de la déformation des plastiques renforcés de verre et d'autres matériaux structurels obtenus en renforçant une substance ayant de bonnes propriétés de liaison avec des éléments linéaires ou plans à haute résistance.

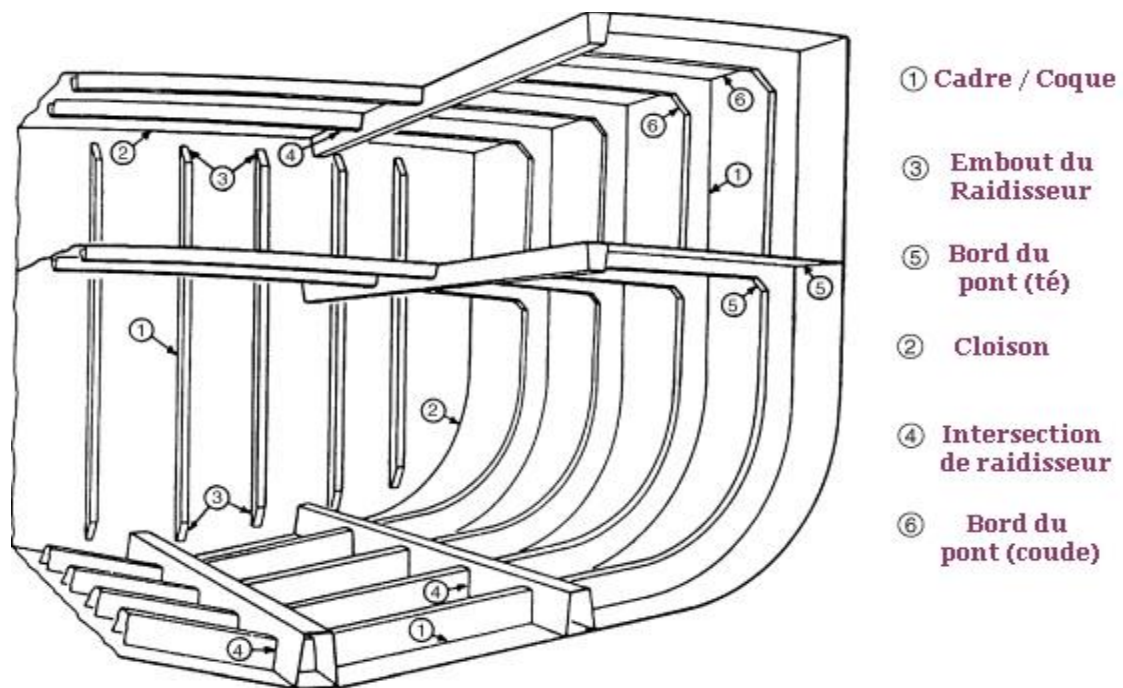


Figure 1.2. Section centrale d'un chasseur de mines.

La plupart des navires et bateaux en plastique renforcé de fibres (FRP) sont fabriqués à l'aide d'un procédé de stratification humide à moule ouvert. Lors de l'assemblage de la structure des navires en FRP à partir de composants, il est inévitable que de nombreux joints collés doivent être formés entre des stratifiés complètement durcis. Des exemples sont les connexions cloison-coque et soldessus du réservoir. Actuellement, de tels joints sont formés par laminage de bandes de renforts de part et d'autre des pièces à assembler, formant un té à double angle. [3]

Une conception structurelle doit garantir des conditions de service adéquates, la sécurité contre l'effondrement et, surtout, être économiquement viable. Afin d'assurer ces conditions, il est nécessaire que l'ingénieur choisisse les caractéristiques qui s'adaptent le mieux aux spécifications du projet, à partir des systèmes structuraux, des matériaux et des ressources disponibles. Dans la plupart des cas, la solution souhaitée n'est pas facile à trouver, car elle varie selon les dimensions, les résistances et le système structurel adopté. Grâce à des techniques

d'optimisation, il est possible d'obtenir la combinaison parfaite de facteurs, qui répondent aux exigences propres à chaque projet.

Les nouvelles demandes d'ingénierie ont conduit à l'émergence de nouveaux matériaux sur mesure avancés, couvrant une large gamme de composites en couches et de matériaux non homogènes. Généralement, les matériaux homogènes ne fonctionnent pas correctement sous un gradient thermique élevé ou sous certaines charges mécaniques. D'autre part, les matériaux composites ont montré de graves inconvénients principalement sous la forme d'une concentration de contraintes et d'un délaminage aux interfaces. Alternativement, les matériaux à gradient fonctionnel (FGM) ont été conçus avec une variation continue des propriétés des matériaux pour éliminer les déficiences liées à l'existence d'interfaces et à la réponse inefficace des matériaux homogènes aux charges thermomécaniques générales. Ces dernières années, les FGM ont été largement utilisés dans des applications d'ingénierie de haute technologie telles que les revêtements de barrière thermique pour les applications spatiales [4], les dispositifs piézoélectriques et thermoélectriques [5-6], les convertisseurs thermoïniques [7], les composants résistants à l'usure et aux chocs [8] et biomédicaux et éco-matériaux [9,10]. Les FGM sont produits sous des formes isotropes et orthotropes, en utilisant certaines des techniques de fabrication telles que le revêtement par pulvérisation au plasma [11].

.13 Avancées récentes dans l'analyse des matériaux composites renforcés :

.13.1 Avancées dans la Modélisation des Matériaux à Gradient Fonctionnel :

La flexion des poutres FGM orthotropes [12], les FGM bimatériaux [13], la mécanique de la rupture des revêtements FGM à barrière thermique [14], la propagation des fissures dans les FGM [15,16] et enfin les FGM sous le chargement d'impact [17,18] sont parmi les principaux thèmes de recherche sur le sujet. Les applications des FGM pour résister simultanément à des charges mécaniques et thermiques élevées sont probablement le problème le plus important des FGM, car ils peuvent devenir extrêmement vulnérables à l'initiation et à la propagation des fissures. En conséquence, l'analyse de la rupture des FGM est devenue l'un des problèmes les plus importants à la fois pour l'étape de

conception des matériaux et pour l'analyse sous des charges thermomécaniques sévères. Par conséquent, plusieurs études numériques, en tant que moyen puissant pour prédire le comportement des FGM pour les analyses de fissures statiques [19-20] et dynamiques [21-22], ont été orientées vers ce sujet ces dernières années.

Il existe plusieurs méthodes pour évaluer les facteurs d'intensité de contrainte dans des conditions thermiques, notamment l'approche intégrale de domaine équivalent pour les FGM fissurés sur les bords [23], l'intégrale d'énergie d'interaction pour les matériaux isotropes non homogènes [24], l'intégrale J_k dans les FGM orthotropes. [25], l'intégrale d'interaction pour les FGM isotropes et orthotropes [26-27], et enfin, les FGM/biomatériaux homogènes avec système de fissures basé sur les équations intégrales singulières [27].

En plus de la méthode classique des éléments finis (FEM), plusieurs autres méthodes telles que la méthode des nœuds fantômes [28-29], les techniques sans maillage [30-31] et la méthode iso géométrique étendue [32] ont été développées au cours de la dernière décennie, mais aucune d'entre elles ne s'est avérée aussi robuste et puissante que la méthode des éléments finis étendus (XFEM), car elle hérite de la simplicité et de la robustesse de la FEM ainsi que de la précision et de l'efficacité des méthodes sans maillage pour capturer et simuler les problèmes généraux de propagation de fissures.

XFEM est une méthode robuste et précise pour résoudre les problèmes de discontinuité. Reproduire le champ singulier près d'une pointe de fissure, éviter des procédures de remaillage coûteuses, une flexibilité extraordinaire pour les problèmes de propagation de fissure, une formulation simple et une définition indépendante de la fissure à partir du maillage FEM sont quelques-uns des principaux avantages de XFEM. Parmi un grand nombre d'investigations et de développements précieux de cette méthode, diverses implémentations 2D [33-34], 3D [35-36], plaque et coque [37-38] peuvent être référencées. Pour une revue des développements récents de la méthodologie XFEM, se référer à [39].

Alors que XFEM a été précédemment développé pour analyser les FGM isotropes sous chargements mécaniques [40], Bayesteh et Mohammadi [41] ont étendu cette

méthode pour considérer les enrichissements asymptotiques dans les FGM orthotropes basés sur les solutions homogènes d'origine [42-43]. Bientôt, la méthode a été étendue pour considérer les chargements thermomécaniques dans les FGM orthotropes [44], et Zamani et al. [45] ont évalué les facteurs d'intensité de contrainte pour les matériaux homogènes sous le chargement thermique en utilisant des enrichissements de pointe d'ordre supérieur.

.13.2 Analyse Avancée des Structures Raidies par Méthodes Numériques :

Alors que Kim et KC [26] ont développé l'intégrale de l'énergie d'interaction pour les FGM orthotropes sous des chargements thermomécaniques sous la forme de formulations incompatibles, ils ne l'ont jamais utilisée pour l'analyse des fissures adiabatiques en mode mixte, car ils ont résolu l'équation de la chaleur sans tenir compte de la fissure. Aussi, Hosseini et al. [46] ont utilisé la même approche dans un cadre XFEM.

Soulignant l'importance de l'analyse mécanique des domaines raidis, plusieurs études dans la littérature cherchent des alternatives pour trouver leur solution et une meilleure représentativité. Les équations gouvernantes du problème à résoudre sont présentées sous forme d'équations différentielles, résolues analytiquement ou numériquement. Cependant, l'analyse du comportement des joints de matériaux ayant des propriétés mécaniques différentes peut être très complexe. Dans le cas de domaines raidis, par exemple, on utilise des éléments structuraux modélisés de différentes manières, comme des plaques avec des treillis ou des coques avec des poutres. Les solutions analytiques sont limitées à des cas restreints, exigeant plusieurs simplifications, et pour cette raison elles sont d'usage restreint.

Une autre méthode numérique remarquable est la méthode des éléments de frontière (BEM), qui se caractérise par la discrétisation des seuls éléments de frontière, l'approximation et l'intégration étant effectuées uniquement sur ceux-ci. Cela se traduit par une dimensionnalité de maillage réduite et souvent un temps de traitement réduit. Parce qu'il n'y a que des approximations de contour, dans la BEM, les résultats pour le domaine sont obtenus par post-traitement, satisfaisant exactement l'équation directrice. Parce que la solution de domaine est exacte,

l'utilisation de cette méthode devient très avantageuse dans les cas où il y a de grands gradients de contraintes, comme les problèmes de mécanique de la rupture. La méthode se distingue également par sa facilité de modélisation des moyens infinis, étant réalisée plus efficacement que les méthodes impliquant l'intégration dans le domaine.

La méthode des éléments de frontière (BEM) est une méthode numérique pour résoudre le problème des valeurs limites par la méthode de l'équation intégrale aux limites (BIE). Depuis que le problème potentiel a été formulé pour la première fois en termes de BIE direct et résolu numériquement par Jaswon [47], des efforts de recherche approfondis ont été faits dans les formulations BIE de problèmes de mécanique et leurs schémas de résolution numérique. La formulation directe de BIE pour le problème élastostatique a été présentée pour la première fois par Rizzo [48] en 1967 suite aux travaux de Jaswon. Plus tard, la formulation a été étendue avec succès par Cruse et Rizzo [49] et Cruse [50] à l'élastodynamique. Le nom Boundary Element Method est apparu à la fin des années 70 dans une tentative de faire une analogie avec la méthode des éléments finis (FEM). Aujourd'hui, le BIE/BEM a acquis de nombreuses applications dans de nombreux domaines de la mécanique numérique, tels que la propagation des ondes, le transfert de chaleur, la diffusion et la convection, l'écoulement des fluides, la mécanique de la rupture, les problèmes électriques, la géomécanique, les plaques et coques, les problèmes inélastiques, problèmes de contact, sensibilité de conception et optimisation et problèmes inverses [51- 52].

.13.3 Optimisation Structurale des Panneaux Raidis :

Les formulations de la méthode des éléments frontières (BEM) sont désormais disponibles pour de nombreux problèmes linéaires pertinents de mécanique appliquée (par exemple, élastostatique, élastodynamique, flexion des plaques, etc.) et également pour un certain nombre de problèmes non linéaires, tels que l'élastoplasticité, etc. les développements récents du BEM peuvent être trouvés dans Cruse [53]. Comme cela est bien connu, le BEM peut offrir des avantages de calcul substantiels par rapport aux autres techniques numériques. Cependant, afin

de parvenir à une implémentation numérique efficace de validité générale, un certain nombre de problèmes doivent être traités avec une attention particulière.

La rigidité relativement faible des armatures internes de polymères renforcés de fibre de verre (GFRP) par rapport aux armatures en acier fait souvent de la limite de déflexion ou de la largeur des fissures aux charges de service le critère déterminant pour la conception. Cela rend la prédiction des flèches, en particulier aux charges de service, plus importante pour la conception de Béton armé de polymères renforcés de fibre de verre (GFRP-RC) que pour les structures renforcées en acier. La contribution du béton dans la zone de tension peut être un facteur déterminant dans la détermination des flèches et des fissures. [54]

Dans l'analyse par éléments finis des structures en béton armé et précontraint, il est généralement nécessaire d'inclure le comportement des contraintes de traction du béton pour modéliser correctement la raideur avant plastification de l'armature. [55]

Dans les modèles de fissures étalées qui sont basés sur la moyenne mesurée expérimentalement du comportement contrainte-déformation du béton, ce comportement moyen en traction du béton est inclus comme expression du raidissement en traction. Si le renforcement est modélisé avec la résistance de la barre nue, comme dans la théorie modifiée du champ de compression [56], une vérification des fissures doit également être effectuée pour s'assurer que les contraintes de l'acier ne dépassent pas localement la limite d'élasticité au niveau de la fissure [57]. Inversement, si une courbe contrainte-déformation de renforcement intégrée est utilisée, par exemple, [58], aucune vérification de fissure n'est nécessaire. Cette dernière approche est utilisée par les méthodes de fissures maculées développées par [59].

La structure des panneaux raidis de l'avion, qui est modérément chargée et comporte par conséquent des éléments de plaque « minces », est conçue de telle manière que le flambement local des plaques entre les raidisseurs latéraux et longitudinaux puisse se produire à une fraction de la charge requise pour provoquer l'effondrement du panneau. Cette capacité de résistance post-flambement présente un potentiel important d'économie de poids structurel. De

plus, les progrès récents dans les caractéristiques de résistance et de tolérance aux dommages des matériaux métalliques aérospatiaux [60,61], offrent une opportunité supplémentaire d'augmenter le travail des panneaux et de limiter les contraintes. Pour maximiser ces améliorations matérielles en tant qu'économies de poids sur les structures primaires d'avions, il est souhaitable d'améliorer davantage la stabilité du panneau. L'amélioration de l'efficacité structurelle du panneau est plausible en introduisant un sous-raidisement des éléments de plaque [62]. En plus des améliorations potentielles de la stabilité du panneau, le sous-raidisement a également le potentiel d'améliorer les capacités de tolérance aux dommages [63-64]. Le concept de sous-raidisement des éléments de plaque pour des gains de performance de résistance statique repose sur l'introduction de caractéristiques structurelles qui modifient le mode de flambement initial de la plaque. Pour augmenter l'efficacité structurelle des panneaux raidis en alliage d'aluminium intégralement usinés, il est plausible d'introduire un sous-raidisement de la plaque pour augmenter la stabilité locale et donc les performances de résistance statique du panneau. La validation expérimentale du renforcement prismatique et la vérification informatique de ces concepts dans une structure récurrente plus large sont rapportées dans [65].

.13.4 Modélisation Mécanique des Systèmes Structuraux Renforcés :

Les systèmes structurels composés de matériaux renforcés ont été largement utilisés dans les applications mécaniques. En particulier, le couplage de matériaux renforcés différents par morceaux permet la conception de systèmes structurels complexes et efficaces, tels que des panneaux renforcés et des composites, qui sont souhaitables dans les industries automobile, aéronautique et navale, par exemple [66-67]. Dans le contexte des modèles couplés FEM/BEM appliqués à l'évaluation de l'intégrité mécanique, il convient de citer [68]. Ces recherches ont appliqué le modèle couplé dans les analyses élastoplastiques des domaines plans. Le FEM représente les régions dans lesquelles se développent les déformations plastiques tandis que le domaine complémentaire est modélisé par le BEM. L'équilibre des forces et la compatibilité des déplacements sont appliqués le long des interfaces des sous-domaines BEM et FEM. Parce que BEM est précis dans la

modélisation des discontinuités de fortes contraintes, BEM délimite avec précision les zones plastiques alors que FEM représente le comportement mécanique au niveau de ces zones. [69] simule la propagation des fissures de fatigue par une approche similaire. Ensuite, FEM tient compte du profil de contrainte résiduelle au niveau de la zone de processus de rupture tandis que le BEM effectue la propagation de la fissure. Un tel modèle rend compte du phénomène de retardement. [70]

Classiquement, le couplage FEM-BEM est réalisé en intégrant la formulation variationnelle volumique et la formulation intégrale surfacique dans une seule équation [71-72], ce qui donne lieu à un couplage FEM-BEM. En alternative au couplage fort FEM-BEM, d'autres méthodes de couplage ont été proposées [73,74], notamment des méthodes de décomposition de domaine de Schwarz itérant entre les deux domaines, à savoir le domaine volumique et le domaine extérieur. Conceptuellement, construire le couplage FEM-BEM comme une méthode de décomposition de domaine présente un avantage majeur : il permet un couplage plus faible entre la formulation variationnelle volumique et l'équation intégrale surfacique, chacune utilisant des codes optimisés distincts. D'un point de vue industriel, l'utilisation de deux solveurs indépendants peut également être très intéressante : cela permet à différents collaborateurs d'échanger uniquement des données d'interface sans partager les modèles détaillés sous-jacents de chaque sous-problème.

Cette étude présente une formulation BEM couplée pour la modélisation mécanique de systèmes structuraux renforcés non homogènes bidimensionnels. La BEM représente les domaines dans lesquels les comportements de matériaux isotropes/anisotropes et visqueux/indépendants du temps sont pris en compte. Les relations constitutives différentielles fournies par les modèles rhéologiques, tels que Kelvin–Voigt et Boltzmann, imposent correctement le comportement viscoélastique du matériau. La technique BEM de sous-région représente les systèmes structuraux non homogènes. De plus, le BEM représente les armatures à travers son approche unidimensionnelle (1DBEM). Ensuite, les armatures encastrées sont prises en compte par les éléments BEM en treillis, ce qui est une

contribution de la présente étude. Les renforts permettent un comportement d'élastoplasticité. La loi de comportement d'écrouissage isotrope bilinéaire classique impose le comportement élastoplastique le long des armatures. Quatre applications sont illustrées. Les résultats obtenus par la formulation proposée sont comparés aux réponses de référence. Les performances, la précision et la robustesse de la formulation proposée sont mises en évidence à travers ces applications.

Chapitre 2

Généralités sur la méthode des éléments de frontière (BEM)

2. Historique de la (BEM) :

Après cinq décennies de développement, la méthode des éléments de frontière (BEM) s'est établie comme une technique fiable dans le domaine des méthodes numériques pour les équations aux dérivées partielles. Contrairement aux méthodes numériques les plus courantes, telles que la méthode des éléments finis (FEM) et la méthode des différences finies (FDM), qui sont classées comme méthodes de domaine, la BEM est une méthode de frontière. Cela signifie que la discrétisation numérique se fait sur une dimension spatiale réduite. Par exemple, pour des problèmes en trois dimensions, la discrétisation est réalisée uniquement sur la surface enveloppante ; et en deux dimensions, uniquement sur le contour. Cette réduction de la dimension conduit à des systèmes linéaires plus petits, à une moindre consommation de mémoire informatique et à une plus grande efficacité de calcul. Cet avantage est particulièrement notable lorsque le domaine est illimité. Les méthodes de domaine nécessitent de tronquer et d'approximer les domaines illimités, tandis que la BEM modélise automatiquement le comportement à l'infini sans besoin de maillage supplémentaire. Dans les environnements industriels modernes, la préparation du maillage est souvent la partie la plus laborieuse et coûteuse de la modélisation numérique, surtout pour la FEM. En évitant la nécessité de maillage intérieur, la BEM est plus économique en termes de préparation de maillage. Pour les problèmes avec des frontières mobiles, l'ajustement du maillage est beaucoup plus simple avec la BEM, faisant d'elle l'outil de choix. Avec tous ces avantages, la BEM s'impose comme un élément indispensable dans l'arsenal des outils informatiques modernes..

Les méthodes numériques ne peuvent véritablement prospérer qu'après l'invention puis la large disponibilité des ordinateurs électroniques au début des années 1960. Il n'est pas surprenant que la FEM et la BEM aient commencé à cette époque. Pour la BEM, de multiples efforts ont commencé vers 1962. Un tournant qui a lancé une série d'efforts connexes, qui se sont rapidement transformés en un mouvement, peut être retracé à 1967. Dans les

années 1970, la BEM était encore une technique numérique novice, mais a vu une croissance exponentielle. A la fin de celui-ci, des manuels ont été rédigés et des conférences ont été organisées sur la BEM. Cet article passe en revue les premiers développements jusqu'à la fin des années 1970, laissant ce dernier développement aux futurs écrivains.

Avant de commencer, nous devons clarifier l'utilisation du terme « méthode des éléments de frontière » dans cet article. Dans la vue la plus étroite, on peut affirmer que BEM fait référence à la technique numérique basée sur la méthode des résidus pondérés, reflétant la formulation des éléments finis, sauf que la fonction de pondération utilisée est la solution fondamentale de l'équation gouvernante afin d'éliminer le besoin de domaine discrétisation [76,77]. Ou, on peut voir BEM comme l'implémentation numérique des équations intégrales aux limites basées sur la formule de Green, dans laquelle le concept d'élément par morceaux du FEM est utilisé pour la discrétisation [78]. Encore plus largement, la BEM a été utilisé comme terme générique pour une variété de méthodes numériques qui utilisent une discrétisation aux frontières ou de type frontière. Celles-ci peuvent inclure l'implémentation numérique générale des équations intégrales aux limites, connue sous le nom de méthode des équations intégrales aux limites (BIEM) [79], que des éléments soient utilisés dans la discrétisation ou non ; soit la méthode dite méthode indirecte qui distribue des solutions singulières sur le bord de la solution ; ou la méthode des solutions fondamentales dans laquelle les solutions fondamentales sont distribuées hors du domaine de façon discrète ou continue avec ou sans formulation d'équation intégrale ; ou encore la méthode de Trefftz qui distribue des solutions non singulières. Ces adoptions génériques du terme sont évidentes dans les nombreux articles parus dans la revue *Engineering Analysis with Boundary Elements* et dans de nombreuses contributions aux conférences *Boundary Element Method*. En effet, les développements théoriques de ces méthodes sont souvent imbriqués. Par conséquent, aux fins de l'examen historique actuel, nous adoptons une vision plus large et considérons dans cette catégorie toutes les méthodes numériques

pour les équations aux dérivées partielles dans lesquelles une réduction de la dimension du maillage d'un type de domaine à un type de frontière est accomplie. Plus exactement, ces méthodes peuvent être appelées « méthodes des frontières (limites) » ou « méthodes de réduction de maillage ». Mais nous céderons à l'adoption populaire du terme « méthode des éléments de frontière » pour sa large reconnaissance. Il sera utilisé de manière interchangeable avec les termes ci-dessus.

Une clé du succès de la méthode des éléments de frontière est la réduction de la dimension spatiale dans sa représentation par équation intégrale, conduisant à une discrétisation numérique plus efficace. L'une des techniques les plus célèbres de ce type est le théorème de divergence, qui transforme une intégrale de volume en une intégrale de surface, également appelé théorème de Gauss, est communément attribué à Gauss [80,81]. Un développement précoce a été trouvé dans les travaux de Lagrange [82] et Laplace.

Des travaux ultérieurs utilisant des équations intégrales résolvant des problèmes de diffusion acoustique incluent Chertock [83] en 1964 et Copley en 1967 [84] et 1968 [85]. Copley a été le premier à signaler la non-unicité de la formulation de l'équation intégrale en raison de l'existence de fréquences propres. Schenck [86] en 1968 a présenté le CHIEF (formulation d'équation intégrale de Helmholtz combinée). Waterman a développé la méthode du champ nul, d'abord en 1965 [87] pour résoudre les problèmes de diffusion électromagnétique, puis en 1969 [88] pour les problèmes acoustiques. Hess [89] en 1962 et Hess et Smith [90] en 1964 ont utilisé la méthode monocouche (30) pour résoudre des problèmes de flux de potentiel externe autour de corps tridimensionnels arbitraires. La formulation était la même que celle de Lotz [91] et Vandrey [92, 93]. La technique, appelée méthode de source de surface, a été développée en un outil numérique puissant pour l'industrie aéronautique [94]. Massonet [95] en 1965 a discuté d'un certain nombre d'idées d'utilisation d'équations intégrales aux limites pour résoudre des problèmes d'élasticité.

Au cours de la première décennie du 20^e siècle, l'introduction du théorème de l'équation intégrale de Fredholm a mis la théorie du potentiel sur une base

solide. Bien que tenté par Fredholm lui-même, le même niveau de succès n'a pas été trouvé pour les problèmes d'élasticité. En fait, une rigueur similaire n'a pas été accomplie avant 40 ans [96]. Commencée dans les années 1940, l'école géorgienne d'élastiques, dirigée par Muskhelishvili [97,98] et suivie par Ilia Nestorovich Vekua [99], Nikolai Petrovich Vekua [100] et Victor Dmitrievich Kupradze [101,102], tous associés à l'Université d'État de Tbilissi, avec Solomon Grigorevich Mikhlin [103] de Saint-Petersbourg, ont fait d'importants progrès dans la théorie des potentiels vectoriels (élasticité) grâce à l'étude des équations intégrales singulières. Le développement initial, cependant, était limité aux équations intégrales singulières unidimensionnelles, qui ne résolvaient que des problèmes bidimensionnels. Le développement des équations intégrales multidimensionnelles a commencé dans les années 1960 [104].

Kupradze en 1964 [105] et 1965 [101] ont discuté d'une méthode pour trouver des solutions approximatives de problèmes statiques et dynamiques de potentiel et d'élasticité. La méthode de Kupradze a été suivie de près en Russie sous le nom de « méthode du potentiel », notamment dans la solution des coques [106, 107] et des plaques [108, 109]. La technique de Kupradze de distribution des solutions fondamentales sur une frontière auxiliaire extérieure a été considérée par certains comme l'origine de la « méthode des solutions fondamentales » [110].

L'une des premières monographies sur la solution numérique des équations intégrales est par Buckner [111] en 1952. Une autre première monographie est par Mikhlin et Smolitsky [112] en 1967. Le domaine a prospéré dans les années 1970 avec la publication de plusieurs monographies—Kagiwada et Kalaba [113] en 1974, Atkinson [114] en 1976, Ivanov [115] en 1976 et Baker [116] en 1977. Certaines équations intégrales ont une origine physique comme l'écoulement autour de l'hydroptère, la compétition entre les populations et la diffusion quantique [117], contrairement à la plupart des autres. Les méthodes utilisées comprenaient la méthode de projection, la collocation polynomiale, la

méthode Galerkin, les moindres carrés, la méthode de quadrature, entre autres [118].

Un tournant marquant la croissance rapide des solutions numériques des équations intégrales aux frontières s'est produit en 1967 avec l'article de Rizzo [76]. Le travail était une extension de la thèse de doctorat de Rizzo [119]. Selon les propres souvenirs de Rizzo [120], il a été profondément influencé par son conseiller Marvin Stippes. Après avoir planté la graine qui est devenue la recherche doctorale de Cruse [121], Rizzo a déménagé à l'Université du Kentucky en 1966. Cruse a terminé sa thèse de manière indépendante en 1967 [122]. Leur première tentative a été de résoudre des problèmes d'élasticité avec des inclusions [123]. Ils se sont ensuite attaqués aux corps anisotropes plans [124]. En utilisant la transformée de Laplace et l'inversion de Laplace numérique, Rizzo et Shippy ont ensuite résolu les problèmes de conduction thermique transitoire [125] et les problèmes de viscoélasticité quasi statique [126].

Le développement des méthodes numériques telles que la FEM a connu une grande avancée vers 1960, coïncidant avec l'émergence des ordinateurs, un facteur fondamental pour sa diffusion en rendant l'utilisation de méthodes numériques très efficaces et souvent simples. Quant à la BEM, une grande avancée a été faite dans sa direction en 1967, avec l'article publié par Rizzo, intitulé 'Une approche d'équation intégrale des problèmes aux limites de l'élastostatique classique', à cette époque le nom de la méthode n'avait pas encore été définie telle qu'elle est connue aujourd'hui. Le terme BEM apparaît en 1977, en contrepoint de la MEF, à travers les travaux de Brebbia et Dominguez [127], Banerjee et Butterfield [128].

2.2État de l'art :

2.2.1Méthode des éléments de frontière (BEM) :

De nombreux articles ont été publiés sur les méthodes aux frontières 123~129-130 ~ 48-50. Ces méthodes sont présentées sous différentes appellations telles que « méthodes d'équations intégrales aux frontières », « solutions intégrales aux frontières », etc. Dans sa forme la plus générale, cette technique consiste à

subdiviser la frontière de la région considérée en une série d'éléments ; d'où le nom de "techniques d'éléments de frontière".

La technique des éléments de frontière est généralement présentée comme une méthode sans rapport avec d'autres méthodes d'analyse. Cependant, on peut montrer qu'elle a une application particulière aux techniques résiduelles pondérées. De cette façon, sa relation avec d'autres méthodes d'analyse, telles que les éléments finis, devient claire.

Les avantages de l'utilisation de techniques résiduelles pondérées en conjonction avec des éléments de frontière sont que la formulation gagne en clarté et que l'utilisateur comprend mieux comment les principes de départ sont obtenus [131].

A partir de cette base, avec l'utilisation du théorème de Gauss, l'origine des méthodes de domaine, de contour et mixte est montrée. On lui doit le nom de "Méthode des éléments de frontière" qui remplace désormais ce qu'on appelait la "Méthode des équations intégrales" [132].

Les méthodes de calcul pour l'analyse structurelle telles que la méthode des éléments finis (FEM) et la méthode des éléments frontières (BEM) ont atteint un niveau de développement qui en a fait des outils essentiels pour les ingénieurs de conception modernes. La FEM est couramment utilisée comme outil d'analyse générale dans l'industrie. L'applicabilité de la BEM à l'heure actuelle n'est pas aussi étendue que celle de la FEM, mais la méthode s'est imposée comme une alternative efficace à la FEM dans plusieurs domaines importants de l'analyse technique. Bien que la BEM, soit une technique relativement nouvelle pour l'analyse technique, les principes fondamentaux remontent aux formulations mathématiques classiques de Fredholm [133] et Mikhilin [134] en théorie du potentiel et Betti [135], Somigliana [136] et Kupradze [101] en élasticité. Le développement des formulations dans le cadre des équations intégrales aux frontières est dû à Jaswon [47], Hess et Smith [137], Massonnet [138], Rizzo [48], Cruse [139] et Kitahara [140]. Le travail de Lachat [78] et de Lachat et Watson [78] est peut-être la première contribution la plus significative pour que la BEM devienne une technique

numérique efficace. Ils ont développé une formulation isoparamétrique similaire à celles utilisées dans les méthodes d'éléments finis et ont démontré que la BEM peut être utilisé comme un outil efficace pour résoudre des problèmes avec des configurations complexes. À peu près à la même époque, le premier symposium international sur la méthode [79] a contribué à porter la BEM à l'attention de la communauté des ingénieurs et à encourager de nouvelles recherches sur le sujet.

La matrice de coefficients dans la BEM est entièrement peuplée et non symétrique. Comme le temps de résolution de ce type de matrice utilisant des solveurs directs est proportionnel à la puissance cubique des degrés de liberté totaux, le temps de calcul requis peut devenir important pour les modèles structurels complexes. Pour surmonter ce problème, un certain nombre de techniques ont été développées (voir par exemple [141, 142, 143]). Cette description plus simple du corps signifie que les régions à forte concentration de contraintes peuvent être modélisées plus efficacement car, si nécessaire, la forte concentration de points de grille est confinée à une dimension de moins.

La méthode des éléments frontières nécessite l'existence de ce qu'on appelle des "solutions fondamentales". Une solution fondamentale est la solution des équations gouvernantes dues à la force unitaire. En tant que tel, la dérivation de ces solutions peut être très difficile à réaliser. Par exemple, l'application de la BEM à des problèmes avec des propriétés de matériaux variables a été limitée en raison du manque de solutions fondamentales appropriées.

L'analyse structurelle des matériaux composites anisotropes à l'aide de BEM a déjà été étudiée par un certain nombre de chercheurs. La première application du BEM pour les matériaux composites est due à Cruse et Swedlow [144] qui ont développé des solutions fondamentales pour le problème élastique bidimensionnel anisotrope. Plus tard, la formulation a été étendue aux problèmes de fissures bidimensionnels par Snyder et Cruse [145] et un problème tridimensionnel général a été présenté par Wilson et Cruse [146]. Pour le cas de l'analyse dynamique, cette utilisation est observée dans (Stamos

et Beskos, [147]) où la BEM a été utilisée pour l'analyse dynamique des structures souterraines tridimensionnelles.

D'autre part, la première extension à l'élastodynamique bidimensionnelle dans le domaine temporel a été développée par Wang et al. [148]. D'autres applications de BEM pour les patchs collés peuvent être trouvées dans Young et Rooke [149]. Récemment, Lingyun et Daniel [150] ont analysé les comportements micromécaniques bidimensionnels des matériaux composites à l'aide de BEM. Une nouvelle formulation d'élément de frontière pour le patch composite fixé mécaniquement a été développée par Widagdo et Aliabadi [151].

BEM n'a besoin que d'une frontière discrète et présente les avantages d'une réduction de dimensionnalité et d'une grande précision de calcul, ce qui est très approprié pour l'analyse de problèmes multicouches à structure mince [152–153]. De nombreuses techniques ont été développées pour supprimer la quasi-singularité des solutions fondamentales, telles que les méthodes analytiques et semi-analytiques [154–155], les méthodes de subdivision d'éléments [156, 157] et les méthodes de transformation non linéaires [158–159]. Les méthodes de transformation non linéaires comprennent principalement la transformation exponentielle [158, 160], la transformation sigmoïdale [161, 162], la transformation de distance [163,164], la transformation polynomiale cubique [165], la transformation d'optimisation des coordonnées [166,167], la transformation $\sinh$ [168–169] et d'autres méthodes de transformation non linéaires. La singularité forte peut être supprimée en appliquant la méthode d'expansion approchée [170,171], la méthode indirecte et la méthode de régularisation [78,172]. [173] applique une méthode de transformation composite pour évaluer les intégrales de frontière singulières et presque singulières dans l'élément de frontière dans l'analyse des structures minces multicouches.

De plus, à la différence du cas isotrope, les solutions fondamentales anisotropes ne peuvent pas être dérivées sous des formes fermées et sont beaucoup plus compliquées, qui sont exprimées en termes d'intégrales infinies.

Les solutions fondamentales dérivées par transformée de Fourier [174–175] sont utilisées à la place de la transformée de Radon [176,177], car le calcul par transformée de Fourier est plus simple et efficace [178]. [179] proposent un BEM modifié implémenté dans des plaques anisotropes pour éviter l'erreur de calcul causée par les ondes réfléchies parasites dans les problèmes de diffusion 2D.

Pour les FGM (functionally graded materials) fissurés avec une géométrie générale et des conditions de chargement, des méthodes numériques avancées doivent être appliquées, en raison de la grande complexité mathématique des équations aux dérivées partielles correspondantes à coefficients variables, et parce que les méthodes analytiques les plus disponibles peuvent être appliquées avec succès aux FGM fissurés uniquement. avec une géométrie et des conditions de chargement très simples. Dans ce contexte, nous mentionnons simplement la méthode des équations intégrales singulières [19,180 ~ 181-182], la méthode de Galerkin sans éléments (EFG) [183,184], la méthode des équations intégrales aux frontières (BIEM) ou la méthode des éléments aux frontières (BEM) [185-186], et la méthode de Petrov-Galerkin sans maille (MLPG) [187-188].

Bien que la BEM ait été appliqué avec succès aux solides élastiques homogènes, isotropes et linéaires pendant de nombreuses années, son application aux FGM est encore très limitée en raison du fait que les solutions fondamentales correspondantes ou les fonctions de Green pour les FGM généraux ne sont pas disponibles ou mathématiquement trop complexes [159,190]. [191] présentent une analyse de fissure en 2-D, des FGM élastiques continuellement non homogènes, isotropes et linéaires avec une formulation d'équation intégrale dans le domaine limite.

[192] couple les méthodes BEM-FEM utilisant la BEM pour la modélisation de la région proche de la fissure et la FEM pour le champ lointain, où aucune singularité dans le champ de contrainte ne devrait apparaître. [193] présente une analyse de la BEM à domaine unique des problèmes de mécanique de la rupture dans un solide piézoélectrique isotrope.

S'inscrivent également dans la lignée de l'étude de la mécanique de la rupture à l'aide de la BEM les travaux de (Gonzalez et al., [194]) mettant en œuvre une manière non conventionnelle de calculer les facteurs d'intensité de contraintes. (Oliveira, [195]) ont également étudié les problèmes de mécanique de la rupture via ECM, mais appliqués aux matériaux viscoélastiques. De tels modèles ont été appliqués en modélisation probabiliste à travers la fiabilité des structures (en utilisant la méthode de simulation de Monte Carlo et la méta modélisation des surfaces de réponse). Des applications ont également été réalisées dans des cas d'optimisation topologique en couplant la BEM avec la méthode Level SET (MLS). Dans le cas de milieux hétérogènes, selon les hypothèses d'analyse, il est difficile de ne pas discrétiser le domaine, afin d'inclure les différentes propriétés du matériau dans le modèle. Dans les travaux de (Lee ; Wang ; Qin, [196]) l'objectif est justement d'éviter cette discrétisation, en utilisant des méthodes de transformation de domaine. (Andrade, [197]) ont utilisé la technique des sous-régions pour modéliser des domaines non homogènes. Les principales applications ont consisté en l'analyse des matériaux fragiles par la mécanique élastique linéaire de la rupture (MFEL) s'appliquant à des problèmes tels que la fracturation hydraulique. De plus, l'auteur a étudié des modèles de fissuration non cohésive et de fatigue hautement cyclique.

2.2.2 Couplage de la BEM à d'autres méthodes numériques

Compte tenu des mérites et des inconvénients du FEM et du BEM pris dans leur formulation originale, certains chercheurs ont commencé à combiner les deux méthodologies. Parmi les premiers auteurs qui ont suivi cette idée figuraient, par ex. Zienkiewicz et al. [72, 198] suggérant un « mariage à la mode – le meilleur des deux mondes ».

Le couplage des méthodes FE et BE n'est pas une tâche triviale et plusieurs problèmes difficiles liés à la fois à la théorie et à la mise en œuvre peuvent survenir [199-200,72]. Premièrement, la combinaison des deux méthodes nécessite la satisfaction des conditions de compatibilité et d'équilibre à travers l'interface entre les sous-régions FEM et BEM . En raison des différentes

formes d'inconnues de force utilisées (forces nodales par FEM et tractions nodales par BEM) et des différentes situations d'interface, les procédures d'imposition des conditions d'interface pour former les équations couplées finales peuvent être compliquées. Diverses procédures [201], telles que l'adaptation de la rigidité et de la traction, ont été suggérées pour réaliser le couplage des deux méthodes.

Depuis la première approche de la question [259], d'un point de vue pratique, le couplage des éléments finis et aux frontières a été un domaine de recherche très actif, fournissant l'un des premiers exemples concrets d'utilisation combinée de deux méthodes différentes. Donner le meilleur de chacune afin de résoudre des problèmes où les deux sont nécessaires. Dans cette catégorie, le couplage BEM - FEM est précurseur de beaucoup de ce qui se fait aujourd'hui sur le calcul multi physique ou multicode.

Le premier traitement mathématique de ce couplage est apparu dans trois articles différents [71], [202], [203]. Il est souvent appelé couplage Johnson-Nédélec (l'article le plus souvent cité est [203]) ou couplage à une équation.

La technique générale de couplage FEM-BEM a été développée dans un article classique de Zienkiewicz et al. [204]. Une étude approfondie de la littérature sur ce sujet peut être trouvée dans Li et al. [205]. Le développement et l'analyse de nouvelles techniques de couplage FEM-BEM ont fait l'objet d'un intérêt croissant ces dernières années. Il a été largement étudié et appliqué à des domaines tels que la mécanique des fluides et des solides, la géomécanique, l'électromagnétisme, l'acoustique, etc.. [205-206]. Les approches de couplage existantes peuvent être classées grosso modo en trois groupes principaux : FEM hébergé, BEM hébergé et ceux n'appartenant à aucune de ces deux catégories.

Différentes méthodes numériques sont utilisées pour les simulations dynamiques,

La méthode des éléments de frontière (BEM) peut modéliser avec précision des domaines infinis sans troncature [207]. Sa formulation pour l'élastodynamique [208-209] est donc adaptée pour capter la propagation des

ondes vers l'infini. La capacité de modéliser des domaines infinis découle de sa formulation, qui utilise des solutions fondamentales qui satisfont la condition de rayonnement, permettant l'élimination des intégrales de domaine [210]. Ce faisant, dans les limites de l'élasticité, la BEM bénéficie également d'un ordre de discrétisation réduit. Pour cette raison, la BEM peut capturer efficacement la propagation des ondes dans les simulations de tunnel [211] et de tremblement de terre [212, 213].

Depuis les travaux pionniers de Zienkiewicz et al. [72], plusieurs auteurs ont développé des schémas couplés BEM-FEM. La plupart des premiers modèles BEM-FEM considéraient des problèmes statiques [72,214,199]. Beer [199] a proposé le traitement de la région BEM comme un grand élément fini. Les travaux pionniers de Mansur et Brebbia [208] ont introduit une formulation BEM pour l'élastodynamique dans le domaine temporel. Les travaux de von Estorff et Prabucki [215] ont utilisé cette idée pour coupler la BEM et la FEM pour des problèmes transitoires dans le domaine temporel. Plus tard, Yu et al. [216] ont réalisé le couplage BEM-FEM en utilisant une version plus stable numériquement de la formulation dans le domaine temporel de la BEM. Les travaux de Soares et al. [217] ont amélioré l'efficacité de la solution couplée en tronquant la convolution BEM. Plusieurs travaux ont suivi dans les années suivantes, notamment dans l'amélioration de la stabilité numérique [218] et de l'efficacité de calcul Soares et Mansur [219].

Ensuite, Schanz [209] a introduit une formulation pour la BEM en dynamique en utilisant la méthode de quadrature de convolution (CQM) [220]. Le principal avantage de CQM-BEM est que les solutions fondamentales ne sont requises que dans le domaine de Laplace. Ainsi, des problèmes impliquant, par exemple, la viscoélasticité et la poroélasticité peuvent être traités. Moser et al. [221] ont utilisé les intégrales de Duhamel pour dériver une matrice de rigidité dynamique pour la BEM et l'ont couplée avec la FEM pour modéliser l'interaction sol-structure. Ruberg et Schanz [222] ont utilisé le CQM-BEM couplé au FEM pour résoudre les interfaces non conformes via une formulation lagrangienne. François et al. [223] introduisent un schéma de

couplage itératif pour permettre une discrétisation temporelle différente dans chaque sous-domaine.

Seules quelques tentatives ont été faites pour coupler le BEM avec des méthodes discontinues. Burczynski et al. [224] ont couplé la BEM avec Molecular Dynamics pour les analyses statiques. Mirzayee et al. [225] ont présenté un couplage entre la méthode des éléments distincts (Distinct Element Method-DEM) et la BEM dans le domaine fréquentiel. Les travaux existants dans le BEM-DEM couplé dans le domaine temporel se limitent à des simulations quasi-statiques car ils appliquent la formulation statique du BEM [226,227]. Les travaux de Malinowski et al. [228] est la première tentative d'analyse de problèmes dynamiques dans le domaine temporel en utilisant le BEM et le DEM. Cependant, leurs résultats reposent sur une couche FEM entre la BEM et la DEM. Ainsi, ils ne présentent pas de couplage BEM-DEM direct. Plus récemment, Barros et al. [229] ont étudié le couplage BEM-DEM dans le domaine temporel pour la propagation d'ondes unidimensionnelles dans des milieux élastiques. Les travaux actuels étendent les idées de Barros et al. [229] à deux dimensions et constitue la première tentative réussie de coupler BEM et DEM dans le domaine temporel pour des problèmes entièrement dynamiques. [230] propose une méthode de couplage Élément Fini-Élément de Frontière (FEM-BEM) pour la résolution du problème dans un domaine de calcul fini, délimité par une frontière artificielle β . Le travail de [231] présente un nouveau schéma pour coupler la méthode des éléments de frontière (BEM) et la méthode des éléments discrets (DEM) dans le domaine temporel.

Dans (Bird; Trevelyan; Augarde, [232]) le couplage de la BEM avec la méthode des éléments finis aux frontières échelonnées (SBFEM) est appliqué dans des problèmes de mécanique de la rupture. La méthode montre une vitesse de convergence adéquate. La SBFEM est défini par (Song; Wolf, [233]) comme dérivé de l'équation de diffusion de sorte que seule la frontière est discrétisée, mais contrairement à la BEM, aucune singularité n'apparaît. La méthode est une alternative à l'utilisation de la BEM, utilisée dans des

problèmes similaires, comme dans (Chen; Dai, [234]), pour l'analyse dynamique de l'interaction sol-structure avec la présence de fracture. (Rahnema; Mohasseb; Javidsharifi, [235]) utilise la méthode pour l'évaluation de l'interaction sol-structure dans le domaine temporel à l'aide de modèles de sol non linéaires, en le considérant comme composé de sable avec différentes valeurs de densité.

L'interaction sol-structure à travers le couplage BEM/FEM de sous-régions adjacentes est explorée dans les travaux de (Rizos; Wang, [236]) et (Romero; Galvín; Domínguez, [237]), dans lesquels la structure est modélisée à travers la FEM et le sol à travers la BEM. Dans les travaux de (Santana et al., [238]) une analyse dynamique est également réalisée à l'aide de la BEM, la structure est modélisée à l'aide de la MEF et la fondation, considérée comme homogène, isotrope, élastique ou poroélastique, modélisée à l'aide de la BEM. De même, dans les travaux de (Silva; Coda, [239]) le couplage BEM/FEM est réalisé, en utilisant une formulation non conventionnelle pour la FEM, afin de considérer les effets non linéaires de la structure avec une cinématique exacte. Les travaux de (Vasilev et al., [240]) utilisent le programme informatique commercial ANSYS pour évaluer la réponse sismique d'un système sol-structure, et (Schepers, [241]) proposent une méthode dite rapide de résolution de problèmes de ce type dans le domaine de la fréquence.

2.2.3 Accouplement raidisseur BEM :

L'optimisation est très importante dans l'ingénierie pratique. Le but de l'optimisation est d'améliorer certaines caractéristiques des structures et des matériaux et de satisfaire aux exigences appropriées. Afin d'augmenter la résistance, la rigidité et la stabilité, des structures renforcées sont utilisées à la place de structures non renforcées. L'efficacité du renforcement peut en outre être améliorée dans le processus d'optimisation, par exemple par le choix optimal du nombre de raidisseurs, de leurs propriétés et de leur emplacement dans une structure. Le couplage du BEM et du FEM en analyse élastodynamique de plaques raidies par des poutres est présenté par exemple dans [242]. L'analyse statique des plaques avec des concentrateurs de

contraintes sous forme de trous et de fissures et renforcées par des raidisseurs est présentée dans [243] et [244]. Les structures renforcées ont été analysées et optimisées par Górski et Fedeliński [245-246]. Ils ont été optimisés par l'algorithme évolutif (EA) en utilisant des critères de rigidité et de résistance. Le renforcement a été appliqué aux limites extérieures ou à l'intérieur des plaques. La forme d'une plaque simplement appuyée renforcée à la frontière est montrée dans [245]. La position des raidisseurs situés à l'intérieur de la plaque précitée a été recherchée dans [247]. La forme d'une plaque en porte-à-faux homogène renforcée à la frontière et soumise à des charges dynamiques a été optimisée dans [248] et [249]. L'optimisation évolutive de cette plaque a été présentée dans [250] et [246], mais les raidisseurs étaient situés entièrement à l'intérieur d'un modèle de la plaque. Dans l'article de [251], les extrémités des raidisseurs peuvent être situées non seulement à l'intérieur d'un modèle mais aussi à la frontière extérieure de ce modèle. Les coordonnées des points caractéristiques des raidisseurs sont des variables de conception, sur lesquelles les contraintes sont imposées. Le problème d'optimisation est résolu par une méthode évolutionnaire [315]. Les résultats d'optimisation sont comparés aux solutions obtenues pour la plaque sans armature et avant optimisation, montrant une diminution des valeurs des fonctions objectives.

Les panneaux stratifiés composites renforcés par des raidisseurs composites sont de plus en plus utilisés dans les constructions aérospatiales et marines. Par exemple, les fuselages de certains avions commerciaux récents sont constitués de panneaux composites renforcés par des raidisseurs composites. En général, les méthodes conventionnelles telles que la méthode des éléments finis (FEM) et la méthode des éléments de frontière (BEM) sont utilisées pour leur analyse vibro-acoustique. Récemment, Cotoni et Langley [252] ont développé une formulation de sous-système SEA basée sur une combinaison de la FEM, de synthèse de mode composant et de théorie de structure périodique pour analyser les structures périodiques 2D. Pour des géométries simples mais toujours représentatives, il existe deux méthodes déterministes qui peuvent être utilisées comme alternative aux techniques FEM-BEM :

l'approche modale Rayleigh-Ritz [253,254] pour les panneaux finis et l'approche spaceharmonic [255-256] pour les panneaux infinis. Dans la majorité des études publiées, la théorie classique des panneaux minces est utilisée dans les deux méthodes.

Dans les recherches de Cesar et al. [257], un élément fini poutre avec couplage flexion-torsion (BTCE) est dérivé. Le modèle développé établit une relation entre la flexion et la torsion en présence de couplage matériel. Le modèle a été appliqué à une poutre en aluminium avec des raidisseurs orientés décrits dans [258,259]. Les résultats de l'analyse modale ont également été comparés avec des résultats expérimentaux publiés précédemment [259]. Les capacités du BTCE pour l'analyse modale ont également été testées pour une pale d'éolienne à axe horizontal (HAWAT) de 5 MW développée par le National Renewable Energy Laboratory (NREL) [260] et pour une structure de poutre en caisson en graphite/époxy en porte-à-faux décrite dans [261,262] avec différentes couches.

(Mesquita ; Coda, [263]) ont étudié le cas d'un milieu raidi dans des problèmes viscoélastiques. Dans (Botta; Venturini, [264]) et (Leonel, [265]) le couplage BEM/FEM de raidisseur avec élément fini est réalisé avec approximation des déplacements par des polynômes du troisième degré et force de contact entre domaine et armature approximée de façon linéaire, compte tenu du glissement entre le médium et le renfort. Leonel, [265] effectue des analyses pour le cas du comportement élastoplastique des éléments raidisseurs, et de la propagation des fissures dans le domaine raidi. Dans (Rocha et al., [266]), la flexion et le glissement des renforts sont pris en compte. Le couplage est réalisé en approximant la force répartie, appelée force de contact, en tant que linéaire et les déplacements et rotations en tant que polynôme du troisième degré.

Dans plusieurs cas, le couplage BEM/MEF est utilisé pour analyser la présence de pieux dans le sol, ce fait est dû à l'avantage des éléments de frontière dans la modélisation des domaines infinis. Dans (Mendonça; Paiva, [267]) la structure est modélisée à l'aide de la MEF et le sol à l'aide de la BEM, en analysant à la fois le cas des fondations superficielles (radier) et des

fondations profondes (pieux). Dans le cas des pieux, ceux-ci sont modélisés comme un seul élément avec une approximation quadratique, inséré dans le domaine BEM et les déplacements étant couplés, compte tenu de l'effort tranchant à l'interface. Elle est encore considérée comme la réaction d'appui de la pointe du pieu, considérée comme une force répartie. Dans (Ribeiro; De Paiva, [268]), l'interaction avec les pieux est également étudiée, qui sont modélisés avec des éléments finis d'approximation polynomiale jusqu'au quatrième degré.

2.2.4 BEM unidimensionnel (BEM 1D) :

Les codes numériques basés sur la théorie BEM pour la conception et l'évaluation des performances des éoliennes à axe horizontal sont des outils puissants pour l'industrie et les institutions académiques. Ce sont des codes 1-D avec des temps de traitement extrêmement rapides et des résultats très fiables mais ils ont des aspects critiques spécifiques [269, 270].

Dans un code numérique 1-D, un effet 3-D ne peut pas être directement inclus. Seul un artifice mathématique permet d'en tenir compte. Ainsi, le code numérique 1-D devient assez fiable.

La méthode unidimensionnelle simple peut fournir une estimation approximative de la fréquence de résonance et du comportement d'atténuation des ondes. Afin d'examiner l'effet des ondes non planes dans la cavité et le col générées par la discontinuité de la zone sur les performances de suppression acoustique, Selamet et al. [271] ont développé une approche analytique bidimensionnelle (2D) axisymétrique pour les résonateurs concentriques de Helmholtz en utilisant un "modèle à piston". Les résultats analytiques sont également comparés avec ceux des expériences, BEM et les méthodes unidimensionnelles avec et sans correction de fin.

[272] développe une approche analytique tridimensionnelle (3D) pour tenir compte de la propagation des ondes non planes dans la cavité et le col des résonateurs de Helmholtz asymétriques circulaires "à piston". Les résultats analytiques 3D actuels sont comparés avec les prédictions numériques de la méthode des éléments de frontière (BEM) pour évaluer l'approche

analytique ; et la solution unidimensionnelle (1D) pour examiner l'effet des ondes non planes à la discontinuité de la zone entre le col et la cavité. Afin d'améliorer la solution 1D, la correction finale est également déterminée en utilisant l'approche analytique 3D.

[273] examine le comportement acoustique d'un silencieux à tube perforé typique à trois passages. En particulier, l'objectif est l'évaluation des performances acoustiques du silencieux en termes de réponse en fréquence du rapport de perte de transmission (TL), en utilisant différentes méthodes numériques, ainsi que l'estimation. De nombreux outils numériques différents peuvent être utilisés à cet effet, distingués par les modèles mathématiques utilisés pour décrire les phénomènes physiques et la schématisation géométrique du système. Ils diffèrent également par le temps et les efforts nécessaires pour modéliser l'appareil et par le temps de calcul requis. Les outils peuvent être classés en fonction de la dimensionnalité de l'approche. En bibliographie, différentes approches numériques ont été utilisées [274, 275, 276, 277, 278] employant des méthodes numériques BEM, FEM et 1-D dans le domaine temporel et/ou le domaine fréquentiel.

[279] présente une formulation BEM couplée pour la modélisation mécanique de systèmes structuraux renforcés non homogènes bidimensionnels. Le BEM représente les domaines dans lesquels les comportements de matériaux isotropes/anisotropes et visqueux/indépendants du temps sont pris en compte. La technique BEM de sous-région représente les systèmes structuraux non homogènes. De plus, le BEM représente les armatures à travers son approche unidimensionnelle (1DBEM). Ensuite, les armatures encastrées sont prises en compte par les éléments BEM en treillis.

Chapitre 3

Modélisation du comportement des matériaux renforcés non homogènes

3.1 Introduction :

Les systèmes structurels composés de matériaux renforcés ont été largement utilisés dans les applications mécaniques. En particulier, le couplage de matériaux renforcés différents par morceaux permet la conception de systèmes structurels complexes et efficaces, tels que des panneaux renforcés et des composites, qui sont souhaitables dans les industries automobile, aéronautique et navale, par exemple [66–67]. De plus, l'application de matériaux viscoélastiques par ces industries a augmenté au cours des dernières décennies. Notamment, grâce à des matériaux tels que les polymères et les composites, qui ont été progressivement introduits et présentent des propriétés visqueuses. Il convient de mentionner que les matériaux viscoélastiques possèdent des propriétés mécaniques élastiques et visqueuses, qui conduisent au fluage, à la relaxation et à l'hystérésis dans les structures [280, 281].

La modélisation mécanique précise de systèmes structuraux complexes composés de matériaux renforcés non homogènes, qui peuvent présenter un comportement visqueux ou indépendant du temps, a été réalisée par des méthodes numériques. De plus, le couplage de différents éléments structuraux tels que les contraintes/déformations planes et les treillis, les plaques et les poutres, la volumétrie et les treillis/poutres, entre autres, représente mécaniquement les systèmes structuraux renforcés non homogènes [282]. Parce que des éléments structuraux dissemblables composent le même système structural, le couplage de différentes techniques numériques est une alternative intéressante pour résoudre le problème. Ainsi, chaque méthode numérique représente la sous-structure dans laquelle elle présente les meilleures performances [283, 284]. Le couplage de la méthode des éléments limites (BEM) et de la méthode des éléments finis (FEM) a été proposé par Zienkiewicz et al. [72] et de nos jours les théories de couplage sont bien établies. L'état de l'art sur ce sujet a été présenté par les auteurs dans [285–286] et [287–288] mentionnent les limites et les avantages de ce type de couplage.

Les performances mécaniques de plusieurs matériaux ont été améliorées par des renforts intégrés. Dans ce cas, les armatures sont supposées être des sous-structures 1D, normalement représentées par des éléments en treillis.

Dans le domaine du génie civil, les modèles couplés FEM/BEM ont traité avec précision l'interaction mécanique du sol et des fondations. Le sol a été généralement représenté comme un domaine semi-infini par BEM alors que FEM modélise la superstructure et les éléments de fondation [289,237]. L'étude dans [290] présente une analyse multi-échelle de matériaux hétérogènes. La BEM représente le macro continuum alors que l'équilibre à l'échelle micro, c'est-à-dire l'élément de volume représentatif, a été résolu par la FEM. Les matériaux composites viscoélastiques ont été analysés mécaniquement par une approche FEM pure dans [291]. Les résultats obtenus par la FEM ont été comparés aux réponses fournies par un modèle FEM/BEM équivalent. Les deux approches conduisent à des résultats précis par rapport aux réponses expérimentales. Cependant, la première approche a nécessité moins d'efforts de calcul.

Les performances mécaniques de plusieurs matériaux ont été améliorées par des renforts intégrés. Dans ce cas, les armatures sont supposées être des sous-structures 1D, normalement représentées par des éléments en treillis. Ce type de couplage a été utilisé dans des structures en béton armé et des panneaux aéronautiques, par exemple, comme illustré par [292, 293].

3. 2. Modélisation par des méthodes numériques :

3.2.1. Méthode FEM :

Le couplage FEM/BEM n'est pas l'objet de la présente étude. Néanmoins, les résultats fournis par cette approche classique démontrent la précision et la robustesse du couplage 1DBEM/BEM dans la modélisation des matériaux à renforts intégrés. La formulation FEM pour les éléments de treillis est bien établie dans la littérature.

La FEM est basée sur la division du domaine analysé en un nombre fini de sous-domaines, appelés éléments finis. La méthode construit une approximation de la solution analytique en utilisant la forme variationnelle de l'équation différentielle qui régit le problème analysé. La forme variationnelle peut être obtenue de deux

manières : la méthode de Ritz, basée sur la construction de la fonctionnelle énergétique ; et la méthode de Galerkin, qui effectue l'intégration par parties de la fonction résiduelle, pondérée par une fonction de poids.

Le présent travail présentera la formulation du FEM en utilisant l'approche Galerkin, car elle est plus générale et résout une plus grande variété de problèmes. Sa formulation pour le cas bidimensionnel sera démontrée, sous forme matricielle, de la même manière que dans (De Freitas ; De Almeida ; Pereira, [294]). La formulation sera développée à partir du problème d'élasticité des milieux continus, tel que défini en annexe (point B.7 - Etat plat). Il est à noter que la méthode Galerkin peut être utilisée pour une variété d'autres problèmes physiques, et pour différentes dimensions (1D et 3D par exemple). Dans l'étude de l'élasticité linéaire des milieux continus, l'équation directrice du problème est donnée par :

$$[L]\{\sigma\} + \{b\} = 0 \quad (3.1)$$

Où $\{\sigma\}$ est le vecteur formé par les composantes de contrainte normales dans les directions x, y et la portion de contrainte de cisaillement xy, $\{b\}$ est le vecteur des forces volumiques dans les directions x et y, et $[L]$ est une matrice représentant l'opérateur divergent.

Cette équation est la forme dite forte d'un problème mécanique, qui consiste en une équation différentielle ordinaire linéaire. En supposant que sa solution n'est pas connue, ce sera

$$\int_{\Omega} ([L]\{\sigma\} + \{b\})u^* d\Omega = 0 \quad (3.2)$$

Où u^* est la fonction de poids (également appelée fonction de test), Ω est le domaine du corps, conformément à l'annexe B.

Le format de l'équation est appelé forme faible ou forme variationnelle directe. Le système de résolution est construit à partir de la forme faible du problème.

En intégrant par parties le premier terme de l'intégrale précédente, on obtient :

$$\int_{\Omega} [L]\{\sigma\} u^* d\Omega = \int_{\Gamma} [N]\{\sigma\} u^* d\Gamma - \int_{\Omega} ([L]^T u^*)^T \{\sigma\} d\Omega \quad (3.3)$$

Où $[N]$ est la matrice contenant les composantes du vecteur $\mathbf{n}$ normal au contour, défini à l'annexe B.7 et Γ est le contour du corps, conformément à l'annexe B.

L'introduction de l'éq. (3.3) dans l'éq. (3.2) on obtient l'Eq. (3.4):

$$\int_{\Gamma} [N]\{\sigma\} u^* d\Gamma - \int_{\Omega} ([L]^T u^*)^T \{\sigma\} d\Omega + \int_{\Omega} \{b\} u^* d\Omega = 0 \quad (3.4)$$

La condition aux limites de Neumann, aussi appelée condition aux limites naturelles, est imposée sous forme faible comme suit :

$$\int_{\Gamma_{\sigma}} ([N]\{\sigma\} - \{\bar{t}\}) u^* d\Gamma = 0 \quad (3.5)$$

Où $\{\bar{t}\}$ est le vecteur des forces de surface prescrites.

Puis en remplaçant Eq. (3.5) dans l'équation (3.4):

$$\int_{\Omega} ([L]^T u^*)^T \{\sigma\} d\Omega - \int_{\Omega} \{b\} u^* d\Omega - \int_{\Gamma} [N]\{\sigma\} u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_{\sigma}} \{\bar{t}\} u^* d\Gamma = 0 \quad (3.6)$$

Les conditions aux limites de Dirichlet, également appelées conditions aux limites essentielles, sont fortement imposées à l'approximation retenue. Cela signifie qu'une fonction de pondération homogène, u^* , est adoptée dans cette section :

$u^* = 0$ dans $d\Gamma$

$$\int_{\Gamma_u} [N]\{\sigma\} u^* d\Gamma = 0 \quad (3.7)$$

Les relations de constitution et de compatibilité sont décrites sous une forme forte, selon l'Eq. (3.8), et remplacé sous forme faible. Comme ça:

$$\{\sigma\} = k[L]^T \{u\} \quad (3.8)$$

$$\int_{\Omega} ([L]^T u^*)^T k[L]^T \{u\} d\Omega - \int_{\Omega} \{b\} u^* d\Omega = \int_{\Gamma_{\sigma}} \{\bar{t}\} u^* d\Gamma \quad (3.9)$$

Où $\{u\}$ est défini comme le vecteur de déplacement par rapport au vecteur de contrainte appliqué, et k est un coefficient de rigidité de l'élément.

La technique des éléments finis¹³ est la stratégie utilisée pour déterminer la fonction solution approchée de problèmes formulés sous forme faible. Cette technique consiste à effectuer des approximations basées sur la combinaison linéaire de fonctions polynomiales ayant la propriété d'unité de partition – appelées polynômes de Lagrange. A titre d'exemple, en utilisant la technique pour le cas d'un problème unidimensionnel où l'on cherche une approximation des déplacements, on obtient l'équation suivante, définie dans une note.

$$\tilde{u}(x) = \alpha_i \phi_i(x) \quad (3.10)$$

Avec $\tilde{u}$ la solution approchée, les fonctions de base ϕ_i sont choisies de manière à ce que les coefficients α_i soient égaux à la valeur de la fonction inconnue de chaque nœud :

$$\alpha_i = \tilde{u}(x_i) = \tilde{u}_i \quad (3.11)$$

Ainsi, pour un nœud j nous avons :

$$\phi_i = \begin{cases} 1, & \text{para } i = j \\ 0, & \text{para } i \neq j \end{cases} \quad (3.12)$$

Autrement dit, les coefficients α_i peuvent être définis comme suit :

$$\alpha_j = \tilde{u}(x_j) = \tilde{u}_i \phi_i(x_j) = \tilde{u}_j \quad (3.13)$$

Les fonctions ϕ_i sont alors appelées fonctions de forme. On utilise généralement des fonctions polynomiales, faisant varier le nombre de coefficients selon le degré d'approximation adopté. Pour la fonction linéaire, il n'y a que deux coefficients (relatifs aux deux nœuds - 1 et 2), tandis que pour la fonction quadratique, il y a trois coefficients α_j .

Les coefficients de l'équation (α_i) ont la signification de valeurs nodales de la fonction inconnue et peuvent être calculés par la méthode de Galerkin. Cette méthode de résolution impose que la fonction de pondération utilisée, u^* , ait la

même base que la fonction de résolution approchée $\tilde{u}(x)$. En introduisant l'approximation pour la fonction de poids, avec δu ses coefficients, on obtient :

$$u^* = \phi_\Omega \delta u \quad (3.14)$$

La réponse doit être la même pour tout δu , introduisant ainsi l'approximation des déplacements dans le domaine sous la forme faible déjà présentée dans l'Eq. (3.9), on obtient l'équation FEM en termes de déplacements :

$$u = \{\phi_\Omega\}^T \{u_\Omega\} \quad (3.15)$$

$$[K]\{u_\Omega\} = \{F\} \quad (3.16)$$

où $[K]$ est la matrice de rigidité et $\{F\}$ est le vecteur de force, calculés, respectivement, par les équations suivantes :

$$[K] = \int_\Omega ([L]^T \{\phi_\Omega\})^T k ([L]^T \{\phi_\Omega\}) d\Omega \quad (3.17)$$

$$\{F\} = \int_{\Gamma_\sigma} \{\phi_\Omega\}^T \{t\} d\Gamma + \int_\Omega \{\phi_\Omega\}^T \{b\} d\Omega \quad (3.18)$$

Une observation importante est que les conditions aux limites de Dirichlet n'ont pas besoin d'être imposées à l'avance. Elles peuvent être imposées au système résolvant final, rendant la méthode très pratique à mettre en œuvre. De plus, la matrice de rigidité définie dans l'équation (3.17) est symétrique, ce qui réduit le coût de calcul de la solution du système. Par la suite, à partir des relations de compatibilité et de comportement, il est possible d'obtenir les résultats pour les déformations et les contraintes.

Dans la forme classique, la FEM a des limites - les déformations et les contraintes ont un ordre d'approximation réduit, leur obtention implique une dérivation. Comme l'approximation dépend de fonctions de forme polynomiales, il est

difficile d'obtenir des réponses précises dans des régions à fort gradient de déformation, nécessitant un grand raffinement du maillage.

3.2.2 Méthode BEM :

L'obtention de la formulation de la BEM pour des problèmes élastostatiques plans sera détaillée ci-dessous. De la même manière que la FEM commence par l'équation différentielle d'équilibre infinitésimal, écrite sous forme d'indice comme suit :

$$\sigma_{kj,j} + b_k = 0 \quad (3.19)$$

Cette équation est appelée la forme forte du problème mécanique. Nous essayons de minimiser son erreur, en trouvant sa forme faible ou sa variation directe. Comme suit:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{kj,j} + b_k) w_k d\Omega = 0 \quad (3.20)$$

La fonction de poids w sera considérée comme un champ de déplacements dans le problème dit fondamental, ayant des relations de compatibilité et de constitution écrites comme suit :

$$w_k = u_k^* \quad (3.21)$$

$$\sigma_{ij}^* = 2G \varepsilon_{ij}^* + \frac{2G\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk}^* \delta_{ij} \quad (3.22)$$

$$\varepsilon_{ij}^* = \frac{1}{2} (u_{ij}^* + u_{ji,i}^*) \quad (3.23)$$

Où G est le module d'élasticité transverse (de cisaillement), ν est le coefficient de Poisson et ε représente le tenseur de déformation.

L'équilibre des forces de surface est également observé dans le contour:

$$p_i^* = \sigma_{ij}^* n_j \quad (3.24)$$

Où p_i représente les forces de surface et n_j est le vecteur normal à la frontière.

La forme variationnelle directe, équation (3.20), prend la forme suivante :

$$\int_{\Omega} (\sigma_{kj,j} + b_k) u_k^* d\Omega = 0 \quad (3.25)$$

En intégrant le premier terme par parties, on obtient la relation suivante :

$$\int_{\Omega} \sigma_{kj,j} u_k^* d\Omega = \int_{\Gamma} p_k u_k^* d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{kj} \varepsilon_{kj}^* d\Omega \quad (3.26)$$

En substituant cette relation dans l'équation (3.25) on obtient :

$$\int_{\Gamma} p_k u_k^* d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{kj} \varepsilon_{kj}^* d\Omega + \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega = 0 \quad (3.27)$$

Cette équation est similaire à l'équation (3.4) utilisé dans la FEM, à l'exception de la notation adoptée. Cependant, à partir de ce moment, la BEM adopte une autre approche, où elle cherche à éviter les termes d'intégration dans le domaine. Ensuite, une nouvelle intégration par parties est effectuée, en l'occurrence au second terme, selon la relation (B.25), aboutissant à un nouveau terme intégral dans le contour :

$$\int_{\Omega} \sigma_{kj} \varepsilon_{kj}^* d\Omega = \int_{\Gamma} p_k^* u_k d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{kj,j}^* u_k d\Omega \quad (3.28)$$

En remplaçant dans l'équation (3.27), on obtient l'équation suivante, appelée théorème de réciprocité de Betti :

$$\int_{\Omega} \sigma_{kj,j}^* u_k d\Omega + \int_{\Gamma} b_k u_k^* d\Omega = - \int_{\Gamma} p_k u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma} p_k^* u_k d\Gamma \quad (3.29)$$

Dans cette équation, il y a deux termes intégraux dans le domaine et deux termes intégraux dans la frontière. La BEM vise à éviter l'intégration du champ de déplacement (u_k) dans le domaine, (premier terme de l'équation précédente), car pour cela il faut utiliser des approximations de domaine. Ainsi, dans la définition de la fonction de poids $\sigma_{kj,*}$ la fonction delta de Dirac Δ est utilisée :

$$\sigma_{lkj,j}^* + \Delta^i \delta_{lk} = 0 \quad (3.30)$$

Comme dans ce cas le champ de déplacement a plus d'une dimension, la fonction delta de Dirac est appliquée séparément pour chaque direction, représentée par la lettre l . δ_{lk} représente le delta de Kronecker et le point d'application, ou point source, de la fonction delta de Dirac est représenté par la lettre i . Cette équation est appelée le problème fondamental et sa solution est la solution fondamentale.

Par exemple, pour un problème à deux dimensions :

1. Dirac Delta appliqué dans le sens 1 :

$$l = 1$$

$$\phi_i = \begin{cases} \sigma_{11j,j}^* + \Delta^i \delta_{11} = 0 \\ \sigma_{12j,j}^* + \Delta^i \delta_{12} = 0 \end{cases} \quad (3.31)$$

C'est à dire :

$$\phi_i = \begin{cases} \sigma_{11j,j}^* + \Delta^i = 0 \\ \sigma_{12j,j}^* = 0 \end{cases} \quad (3.32)$$

2. Dirac Delta appliqué dans le sens 2 :

$$l = 2$$

$$\phi_i = \begin{cases} \sigma_{21j,j}^* + \Delta^i \delta_{21} = 0 \\ \sigma_{22j,j}^* + \Delta^i \delta_{22} = 0 \end{cases} \quad (3.33)$$

C'est à dire:

$$\phi_i = \begin{cases} \sigma_{21j,j}^* = 0 \\ \sigma_{22j,j}^* + \Delta^i = 0 \end{cases} \quad (3.34)$$

Avec l'utilisation de la fonction Delta de Dirac, l'intégration des déplacements dans le domaine n'est plus nécessaire. Comme suit:

$$\int_{\Omega} \sigma_{lkj,j}^* u_k d\Omega = \int_{\Omega} (-\Delta^i \delta_{lk}) u_k d\Omega = - \int_{\Omega} \Delta^i u_l d\Omega = -u_l^i \quad (3.35)$$

Avec cela, nous obtenons l'équation connue sous le nom d'identité Somiglianna :

$$c u_k + \int_{\Gamma} p_{lk}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} p_k u_{lk}^* d\Gamma + \int_{\Omega} b_k u_{lk}^* d\Omega \quad (3.36)$$

La variable c a une valeur dépendant de l'emplacement du point source du Delta de Dirac :

$c = 0 \rightarrow$ Pour les points hors domaine

$c = 1 \rightarrow$ Pour les points internes au domaine

Selon [121], pour obtenir le terme c dans le cas de points source sur le contour, une analyse limite du point source appartenant au domaine est effectuée, en le transportant vers le contour. Dans le cas d'un contour Γ lisse, on obtient :

$c = 0.5 \rightarrow$ Pour les points sur le contour

En utilisant l'équation (3.36), avec la solution fondamentale, en choisissant un point source externe ou sur le contour, on obtient l'équation de la solution du problème de valeur limite (PVC). Avec les réponses pour le contour, les réponses pour les points internes peuvent être obtenues, en les choisissant simplement comme points source.

En considérant qu'il n'y a pas de forces de domaine et en introduisant des approximations sur la géométrie et les champs mécaniques, on obtient :

$$b_k = 0$$

$$u_k = \phi_i u_{ki} \quad (3.37)$$

$$p_k = \phi_i p_{ki} \quad (3.38)$$

Pour le point source j , l'identité somiglianna prend la forme :

$$c u_{kj} + \int_{\Gamma} p_{lkj}^* \phi_i u_{ki} d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{lkj}^* \phi_i p_{ki} d\Gamma \quad (3.39)$$

En utilisant le delta de Kronecker et en passant aux coordonnées sans dimension, nous réécrivons l'équation précédente :

$$c \delta_{ji} u_{ki} + \int_{-1}^{+1} p_{lkj}^* \phi_i u_{ki} J(\xi) d\xi = \int_{-1}^{+1} u_{lkj}^* \phi_i p_{ki} J(\xi) d\xi \quad (3.40)$$

Par conséquent, l'équation précédente peut être présentée sous la forme compacte suivante :

$$H_{lkji} u_{ki} = G_{lkji} p_{ki} \quad (3.41)$$

Où H_{lkji} et G_{lkji} sont calculés respectivement par les équations suivantes.

$$H_{lkji} = c \delta_{ji} + \int_{-1}^{+1} p_{lkj}^* \phi_i J(\xi) d\xi \quad (3.42)$$

$$G_{lkji} = \int_{-1}^{+1} u_{lkj}^* \phi_i J(\xi) d\xi \quad (3.43)$$

Pour le cas bidimensionnel, l'équation (3.41) donne le système suivant :

$$\begin{bmatrix} H_{11ji} & H_{12ji} \\ H_{21ji} & H_{22ji} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{1i} \\ u_{2i} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11ji} & G_{12ji} \\ G_{21ji} & G_{22ji} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_{1i} \\ p_{2i} \end{Bmatrix} \quad (3.44)$$

Grâce au système précédent, les résultats pour l'esquisse du problème sont obtenus. Quant au cas des tensions internes, l'Identité Somiglianna est dérivée, Eq. (3.36), par rapport aux axes, en considérant les forces du domaine nul et à travers les relations de compatibilité et constitutives, on obtient une équation pour leur détermination :

$$c \sigma_{ij} + \int_{\Gamma} S_{kij}^* u_j d\Gamma = \int_{\Gamma} D_{kij}^* p_j d\Gamma \quad (3.45)$$

Les termes D_{kij}^* et S_{kij}^* sont obtenus en différenciant les noyaux u^* et p^* respectivement. Pour l'obtenir, il faut utiliser la Solution Fondamentale. La formulation ci-dessus est intéressante car elle dérive de la formulation dite hyper singulière, d'une grande importance pour l'analyse des problèmes de mécanique de la rupture.

3.2.2.1 Solution Kelvin fondamentale – Milieu isotrope :

La solution de l'éq. (3.30) est appelée la solution fondamentale. Elle est déterminée en considérant un corps de dimension infinie soumis à une force ponctuelle, représentée par le delta de Dirac. Voici la solution du cas isotrope obtenu par Kelvin, appelée solution fondamentale de Kelvin :

Pour les déplacements :

$$u_{lk}^* = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \ln\left(\frac{1}{r}\right) \delta_{lk} + r_{,l} r_{,k} \right] \quad (3.46)$$

Où r est la distance au point source.

En utilisant la relation de compatibilité, Eq. (B.9), on obtient la solution en termes de déformations :

$$\varepsilon_{ijk}^* = -\frac{1}{8\pi G r(1-\nu)} \left\{ (1-2\nu) [\delta_{ij} r_{,k} + \delta_{ik} r_{,j}] + 2r_{,i} r_{,j} r_{,k} - \delta_{kj} r_{,i} \right\} \quad (3.47)$$

Par la relation constitutive, Eq. (B.7), dans ce cas la loi de Hooke généralisée, la solution est obtenue en termes de contraintes :

$$\sigma_{ijk}^* = -\frac{1}{4\pi r(1-\nu)} \left\{ (1-2\nu) [\delta_{ij}r_{,k} + \delta_{ik}r_{,j} - \delta_{kj}r_{,i}] + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right\} \quad (3.48)$$

En appliquant l'équation d'équilibre de Cauchy, Eq. (B.3), on obtient en termes d'efforts surfaciques :

$$p_{lk}^* = -\frac{1}{4\pi r(1-\nu)} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{lk} + 2r_{,l}r_{,k}] + (1-2\nu)(n_l r_{,k} - n_k r_{,l}) \right\} \quad (3.49)$$

Où n_j représente le vecteur normal de surface, orienté à l'opposé du corps.

Pour obtenir les contraintes internes, Eq. (3.45), il faut calculer les termes D_{kij}^* et S_{kij}^* , obtenus en dérivant respectivement les noyaux u^* et p^* , ce qui donne :

$$D_{kij}^* = \frac{1}{4\pi r(1-\nu)r} \left\{ (1-2\nu) [\delta_{ki}r_{,j} + \delta_{kj}r_{,i} - \delta_{ij}r_{,k}] + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right\} \quad (3.50)$$

$$S_{kij}^* = \frac{1}{2\pi(1-\nu)r^2} \left\{ 2\frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{ij}r_{,k} + \nu(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i}) - 4r_{,i}r_{,j}r_{,k}] + 2\nu(n_i r_{,j}r_{,k} + n_j r_{,i}r_{,k}) + (1-2\nu)(2n_k r_{,i}r_{,j} + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}) - (1-4\nu)n_k \delta_{ij} \right\} \quad (3.51)$$

On observe que la solution fondamentale de Kelvin pour les déplacements et les forces de surface a des singularités de l'ordre de $\ln(r)$ et $1/r$ au point source. Vient ensuite le besoin de traiter cette singularité, ce qui se fera par le biais de la Méthode de soustraction de singularité (Singularity Subtraction Method) (MSS). Dans le cas de noyaux hyper singuliers de l'ordre de $1/r^2$ tels que S_{kij}^* , la solution analytique utilisant la VPC ne sera pas possible, nécessitant l'utilisation du concept de Partie Finie d'Hadamard (PFH). Ces noyaux apparaîtront dans la formulation appelée Hyper singulière.

3.2.2.2 Méthode de soustraction de singularité (MSS) – Milieu isotrope:

Selon (Aliabadi, [295] et Oliveira, [296]) une façon de traiter les noyaux d'intégration singuliers est de soustraire le point de singularité, donnant lieu à un nouveau noyau régulier et une nouvelle intégrale, toujours singulière :

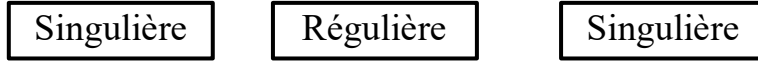


Figure 7. Séparation d'un seul noyau

$$\int_{-1}^1 F(x)dx = \int_{-1}^1 [F(x) - F^*(x)]dx + \int_{-1}^1 F^*(x)dx \quad (3.52)$$

Pour que le deuxième noyau soit régulier, il suffit que $F^*(x)$ ait le même degré de singularité que $F(x)$, et alors il est possible de faire l'intégration numériquement. La fonction $F^*(x)$ doit être telle que le troisième noyau puisse être intégré analytiquement.

La procédure de soustraction de singularité des solutions fondamentales a été effectuée par (Sahli, [297]), à la fois pour les noyaux singuliers, dans le cas d'ordre $\ln(r)$ et $1/r$, et pour les hyper singuliers, dans le cas d'ordre $1/r^2$. Les intégrales singulières sont évaluées sur un élément tangent au contour au point source.

3.2.2.3. Solution fondamentale – Milieu anisotrope :

Pour le cas du matériau anisotrope, la grande différence par rapport au matériau isotrope se produit dans la solution fondamentale, présentée par (Cruze & Swedlow, [298] et Cordeiro, [299]), développée en utilisant la théorie des fonctions complexes.

Premièrement, il faut obtenir les racines $\mu_1, \mu_2, \mu_1^{\bar{\bar{}}}$ et $\mu_2^{\bar{\bar{}}}$ de l'équation suivante :

$$C_{11}u^4 - 2C_{16}u^3 + (2C_{12} + C_{66})u^2 - 2C_{26}u + C_{22} = 0 \quad (3.53)$$

Où $\mu \bar{1}$ est la racine conjuguée complexe de $\mu 1$, il en va de même pour $\mu \bar{2}$.

Ensuite, la matrice de paramètres complexes q_{km} est calculée :

$$\begin{cases} q_{k1} \\ q_{k2} \end{cases} = \begin{cases} C_{11}u_k^2 + C_{12} - C_{16}u_k \\ C_{22}u_k^2 + C_{22} - C_{26}u_k \end{cases} \quad (3.54)$$

Il faut alors trouver les solutions du système complexe suivant :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ u_1 & -\bar{u}_1 & u_2 & -\bar{u}_2 \\ q_{11} & -\bar{q}_{11} & q_{12} & -\bar{q}_{12} \\ q_{21} & -\bar{q}_{21} & q_{22} & -\bar{q}_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_{l1} \\ \bar{A}_{l1} \\ A_{l2} \\ \bar{A}_{l2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\delta_{l2}/2\pi i \\ -\delta_{l1}/2\pi i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

A la fin, la solution en déplacements s'écrit :

$$u_{lk}^* = 2Re[q_{k1}A_{l1}ln(z_1 - z_1^0) + q_{k2}A_{l2}ln(z_2 - z_2^0)] \quad (3.56)$$

Et, dans le cas des forces de surface, le résultat est le suivant :

$$p_{lk}^* = 2Re \left[\frac{1}{z_1 - z_1^0} g_{k1}(u_1\eta_1 - \eta_2)A_{l1} + \frac{1}{z_2 - z_2^0} g_{k2}(u_2\eta_1 - \eta_2)A_{l2} \right] \quad (3.57)$$

Où η_p représente le vecteur normal à l'extérieur du corps et g_{km} est donné par :

$$g_{km} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

De manière similaire au cas isotrope, la solution fondamentale anisotrope présente également des singularités, procédant à son intégration à l'aide de MSS, en utilisant le concept de VPC et PFH.

3.2.3 Couplage BEM – raidisseur :

Une différenciation sera faite entre le couplage BEM/MEF pour les sous-régions adjacentes et le couplage BEM avec raidisseurs.

Dans le cas d'un couplage BEM/MEF pour des sous-régions adjacentes, il n'y aura couplage que de l'interface entre les méthodes. La compatibilité des déplacements est imposée, c'est-à-dire que pour le contour des deux sous-régions le déplacement sera le même. De plus, un équilibre est imposé, ce qui signifie dans ce cas que les forces de surface pour les deux sous-régions sont de même valeur absolue et opposées, c'est-à-dire qu'elles s'annulent.

Sinon, dans le couplage BEM avec des raidisseurs, ceux-ci sont présents dans n'importe quelle direction à l'intérieur du domaine BEM, qui sera appelé Domaine. Dans la formulation de la BEM, le milieu est considéré comme homogène. Afin de tenir compte de l'existence de raidisseurs, on utilise alors une superposition d'effets, le couplage étant réalisé en appliquant les conditions de compatibilité et d'équilibre sur les nœuds de la fibre.

3.2.4. Représentation algébrique :

Les raidisseurs, également appelés fibres, ont été adoptés linéaires avec une rigidité uniquement dans la direction axiale, c'est-à-dire des éléments en treillis. De la même manière que réalisé par (Leonel, [300]) pour le couplage BEM/MEF, les deux méthodes sont utilisées séparément pour réaliser ensuite la superposition des effets.

Considérons un domaine bidimensionnel renforcé Ω de bord Γ , dans lequel Γ est discrétisé en éléments de bord. Les renforts sont complètement encastrés dans Ω et positionnés à la ligne T . Le schéma de couplage tient compte de l'interaction entre les renforts et le domaine. Ensuite, les déplacements des armatures et les forces d'adhérence apparaissent et doivent être correctement traités, comme illustré à la Fig.3.1

Le modèle proposé suppose des conditions de liaison parfaites entre les renforts et le domaine. Par conséquent, les forces d'adhérence sont modélisées comme une charge répartie unidimensionnelle le long de la ligne de renforcement T . De plus, la compatibilité des déplacements et l'équilibre des efforts sont imposés entre les armatures et le domaine comme suit :

(L'adhérence entre les raidisseurs et le Domaine provoque l'apparition d'efforts répartis, appelés lignes de charge ou efforts d'adhérence. Par équilibre, la force appliquée sur la fibre doit être opposée à la charge appliquée sur le Domaine)

$$f^D = -f^F \quad (3.59)$$

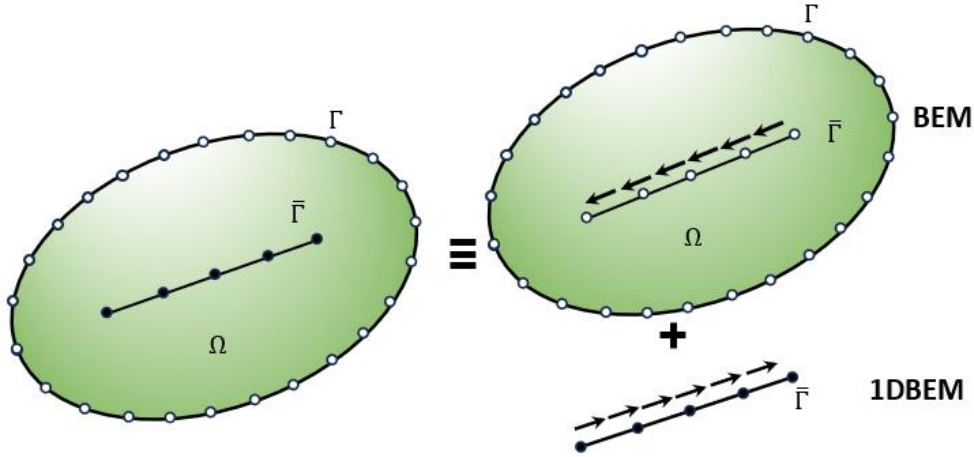


Figure 3.1. Schéma du domaine/ couplage du renforcement.

Où f^D et f^F sont respectivement les forces sur le Domaine et sur la fibre.

Sans tenir compte du glissement des fibres, le déplacement en leurs points doit être le même pour les deux méthodes, c'est-à-dire :

$$u^D = u^F \quad (3.60)$$

La force d'adhérence est prise en compte comme une force volumique dans la formulation BEM. Ainsi, le terme intégral de domaine (terme des forces volumique) est dégénéré et évalué uniquement le long du bord Γ . Par conséquent, les cellules ne sont pas nécessaires. Par conséquent, l'éq. (12) est réécrit pour les points frontières comme suit :

(En utilisant la formulation BEM pour le contour, à partir de l'identité somigliana, Eq. (3.36))

$$H_{CC}u_C = G_{CC}p_C + G_{CF}f^D \quad (3.61)$$

Où le premier indice indique l'emplacement du point source et le second l'emplacement des éléments intégrés par celui-ci, c'est-à-dire :

H_{CC} est la matrice H obtenue par BEM pour les points de contour intégrés au contour.

G_{CC} est la matrice G obtenue par la BEM pour les points de contour intégrés au contour.

G_{CF} est la matrice G obtenue par la BEM pour les points de contour intégrés à la fibre.

De même, l'équation algébrique des points de domaine rend compte de la force d'adhérence. En utilisant la formulation BEM pour le raidisseur, l'équation suivante est obtenue :

$$u_F + H_{FC}u_C = G_{FC}p_C + G_{FF}f^D \quad (3.62)$$

H_{FC} est la matrice H obtenue par BEM pour les points de fibre intégrés au contour.

G_{FC} est la matrice G obtenue par la BEM pour les points de fibre intégrés de contour.

G_{FF} est la matrice G obtenue par la BEM pour les points de fibre intégrés dans la fibre.

Dans la présente formulation, le comportement mécanique des armatures est évalué soit par FEM soit par 1DBEM. Ainsi, en supposant l'absence de forces concentrées le long du domaine, et pour compléter le couplage, il manque l'équation algébrique du raidisseur lui-même, qui peut s'écrire comme suit :

$$K_F u_F = G_F f^F \quad (3.63)$$

La différence entre les méthodes utilisées pour modéliser le raidisseur n'intervient que lors de l'obtention de cette dernière équation, que le milieu soit isotrope ou anisotrope. Pour le cas du couplage BEM/MEF, une approximation est nécessaire à la fois pour les déplacements et pour la force répartie. Avec l'utilisation du

couplage BEM/BEM 1D, il est nécessaire d'approximer uniquement la force distribuée.

En combinant les équations (3.71), (3.72) et (3.73) on obtient :

$$\begin{bmatrix} H_{CC} & 0 & -G_{CF} \\ H_{FC} & 1 & -G_{FF} \\ 0 & K_F & G_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_C \\ u_F \\ f^D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} G_{CC} \\ G_{FC} \\ 0 \end{Bmatrix} p_c \quad (3.64)$$

De cette manière, il est possible d'obtenir finalement la solution du problème en effectuant le processus d'échange de colonne.

On observe que les lignes de charge sont des inconnues du problème, pour les obtenir il faut utiliser des fonctions approchées. La technique des éléments finis est adoptée pour effectuer leur approximation, afin d'obtenir leurs valeurs nodales. Dans le cas du couplage avec le FEM, le même degré d'approximation est adopté, de cette manière, pour tous les nœuds du problème, des résultats de déplacements et de force d'adhérence sont obtenus. De plus, une formulation FEM a été adoptée, où des éléments de n'importe quel degré d'approximation peuvent être utilisés, puis les matrices sont construites par intégration numérique

3.2.5. Connexion de renforts entre des matériaux dissemblables :

Les formulations proposées permettent l'analyse mécanique du renforcement de systèmes structuraux non homogènes. Par conséquent, la formulation doit gérer la présence de renforts reliant deux ou plusieurs sous-domaines. Les formulations couplées présentées au point 3.3.1 nécessitent que tous les renforts soient complètement intégrés dans un seul domaine. Ainsi, la compatibilité des déplacements et l'équilibre des forces sont imposés aux points internes. Pour surmonter cette limitation, un schéma de connexion spécial est utilisé, comme illustré à la Fig.3.2.

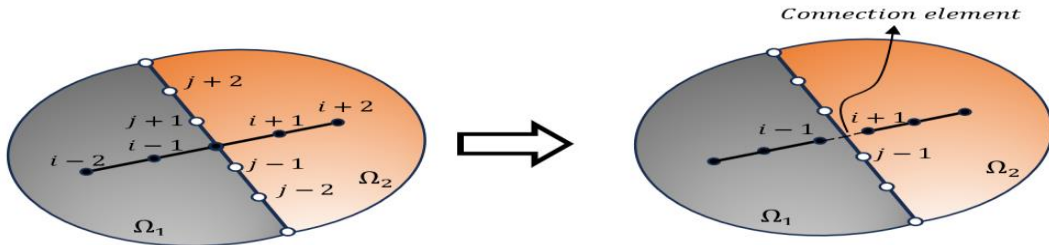


Figure 3.2. Approche pour les croisements entre les renforts et les interfaces des sous-régions.

Ce type de connexion peut être réalisé comme illustré dans la partie gauche de la Fig. 2. Dans ce cas, les points de collocation des renforts i et $i + 1$ doivent coïncider avec la collocation frontière. Ensuite, la compatibilité des déplacements est imposée à cette position. Néanmoins, ce schéma nécessite une construction de maillage coïncident, ce qui peut ne pas être pratique. Ce cas est particulièrement complexe lorsque des éléments de frontière d'ordre élevé discontinus sont utilisés, comme le permet la formulation proposée. Le couplage indépendant du maillage utilisé dans les présentes formulations est illustré dans la partie droite de la Fig. 2. Ainsi, des éléments de renforcement discontinus sont utilisés aux interfaces des matériaux. En conséquence, les nœuds i et $i + 1$ sont déplacés le long du domaine de renforcement respectif, ce qui satisfait à l'exigence de position interne. Néanmoins, les renforcements discontinus sont modélisés si une compatibilité des déplacements est effectuée impliquant de tels nœuds. Ensuite, pour assurer la continuité matérielle des armatures, la connexion/compatibilité entre les déplacements des nœuds i et $i + 1$ est effectuée. Ensuite, un élément de connexion est positionné entre les nœuds i et $i + 1$ imposant la continuité. Ainsi, cet élément assure la transmission des efforts entre les éléments de renforcement $J - 1$ et J , assurant la continuité du matériau. Il convient de mentionner que des opérations de frontière supplémentaires ne sont pas nécessaires dans ce schéma car les points sources impliqués sont internes. Enfin, ce schéma simule des renforts croisés sans points de placement coïncidents. De plus, il permet des maillages indépendants pour les armatures et les limites, ce qui rend l'approche pratique, générale et efficace.

3.3 Méthode des éléments de frontière unidimensionnels (1D BEM) :

Dans (Cruz, Mendonça [301]) la solution fondamentale pour le BEM 1D est présentée. Grâce à cette solution, il est possible de développer la formulation pour le cas des treillis à efforts répartis, nécessaire à la représentation du raidisseur dans un maillage d'éléments de frontière.

L'équilibre d'un treillis est donné par l'équation suivante :

$$\frac{dN(x)}{dx} = -p(x) \quad (3.65)$$

Où $N(x)$ est la force normale exercée sur la barre, $p(x)$ est la force répartie sur la barre et x est l'axe longitudinal.

En appliquant la relation constitutive et la relation de compatibilité, on obtient la relation :

$$N(x) = EA \frac{du(x)}{dx} \quad (3.66)$$

Où E est le module d'élasticité longitudinal, ou module de Young, A est l'aire de la section transversale.

En remplaçant l'éq. (3.76) dans l'éq. (3.75) l'équation directrice du problème de la barre en treillis en termes de déplacement est obtenue :

$$EA \frac{d^2 u(x)}{dx^2} = -p(x) \quad (3.67)$$

Soit u^* la fonction de pondération, la forme variationnelle directe est donnée par :

$$\int_0^L \left(EA \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + p(x) \right) u^* dx = 0 \quad (3.68)$$

Intégration par parties :

$$\left[EA \frac{du(x)}{dx} u^* \right]_0^L - \int_0^L \left[\frac{du}{dx} EA \frac{du^*}{dx} - p(x) \right] u^* dx = 0 \quad (3.69)$$

En intégrant à nouveau le second terme par parties :

$$\left[EA \frac{du(x)}{dx} u^* \right]_0^L + \int_0^L \left[u(x) EA \frac{d^2 u^*}{dx^2} + p(x) u^* \right] dx = 0 \quad (3.70)$$

La fonction de poids u^* est choisie de telle sorte que les relations (3.66) et (3.67) soient vérifiées. En substituant ces relations dans l'Eq. (3.70) on obtient :

$$[N(x)u^*]_0^L - [u(x)N^*]_0^L = \int_0^L u(x)p^* dx - \int_0^L p(x)u^* dx \quad (3.81)$$

La différentielle de BEM 1D est le choix de la fonction de poids p^* . De la même manière que pour le BEM, il est choisi afin d'éviter l'intégration dans le domaine, en utilisant pour cela le Delta de Dirac. Comme ça:

$$p^*(x, \hat{x}) = \Delta(x, \hat{x}) \quad (3.72)$$

$\Delta(x, \hat{x})$ est le delta de Dirac ;

x est le point à évaluer, appelé le Point de Champ ;

$\hat{x}$ est le point d'application du Delta de Dirac, appelé Point Source.

La solution de l'équation précédente est appelée Solution fondamentale de BEM 1D.

De cette façon, il n'est plus nécessaire d'intégrer les déplacements dans le domaine:

$$\int_0^L u(x) p^*(x, \hat{x}) dx = u(\hat{x}) \quad (3.73)$$

Éq. (3.81) prend alors la forme suivante :

$$u(\hat{x}) + [u(x) N^*(x, \hat{x})]_0^L = [N(x) u^*(x, \hat{x})]_0^L + \int_0^L p(x) u^*(x, \hat{x}) dx \quad (3.74)$$

Au moyen de cette équation et en utilisant la solution fondamentale, la réponse pour le contour de l'élément de ferme, c'est-à-dire ses extrémités, est trouvée. La solution fondamentale se trouve dans (Cruz, Mendonça [301]) :

$$u^*(x, \hat{x}) = -\frac{|x - \hat{x}|}{2EA} \quad (3.75)$$

$$N^*(x, \hat{x}) = EA \frac{du^*(x, \hat{x})}{dx} = -\frac{1}{2} \text{sign}(x - \hat{x}) \quad (3.76)$$

La nomenclature suivante sera adoptée :

N_{ij}^* $i \rightarrow$ Point source $j \rightarrow$ Point évalué

Pour une barre avec n nœuds, les nœuds extrêmes sont évalués :

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_n \end{Bmatrix}_L + \begin{bmatrix} -N_{11}^* & N_{1n}^* \\ -N_{n1}^* & N_{nn}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_n \end{Bmatrix}_L = \begin{bmatrix} -u_{11}^* & u_{1n}^* \\ -u_{n1}^* & u_{nn}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_n \end{Bmatrix} \quad (3.77)$$

La première ligne fait référence au point source 1 et la seconde au point source n . De plus, le vecteur suivant d'intégrales de la force répartie a été défini :

$$q_i = \int_0^L p(x) u^*(x, \hat{x}_i) dx \quad (3.78)$$

Mais les forces normales dans l'équation ne sont pas sur les axes locaux, la valeur positive indique la force de traction et la force de compression négative. Pour les laisser sur l'axe local nous avons :

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -N_1 \\ N_n \end{Bmatrix}_L \quad (3.79)$$

C'est à dire:

$$\begin{bmatrix} 1 - N_{11}^* & N_{1n}^* \\ -N_{n1}^* & 1 + N_{nn}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{1n}^* \\ u_{n1}^* & u_{nn}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_n \end{Bmatrix}_L + \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_n \end{Bmatrix} \quad (3.80)$$

D'une autre manière, en nommant les matrices :

$$[A]\{u\}_L = [B]\{N\}_L + \{q\} \quad (3.81)$$

L'équation ci-dessus peut aussi s'écrire sous la forme :

$$[B]^{-1}[A]\{u\}_L = \{N\}_L + [B]^{-1}\{q\} \quad (3.82)$$

On cherche à calculer les intégrales de la force répartie q_i . En changeant d'espace on obtient :

$$q_i = \int_{-1}^1 p(\xi) u^*(\xi, \hat{\xi}_i) J d\xi \quad (3.83)$$

Où J est le Jacobien de la fonction.

On constate que jusqu'à présent aucune approximation n'a été introduite. Cependant, lors du couplage BEM/BEM 1D, il est nécessaire d'approximer les efforts répartis sur le raidisseur, qui sont les efforts qui lui sont transmis par le milieu dans lequel il est inséré, le Domaine. Pour faire l'approximation, la technique des éléments finis sera utilisée, à travers des fonctions de forme, avec b_i étant les valeurs nodales de la force répartie :

$$p(\xi) = \phi_i(\xi) b_i \quad (3.84)$$

Comme les forces distribuées sont définies par des valeurs nodales, le concept d'éléments linéaires, quadratiques, etc. est maintenu, mais cela signifiera seulement que les forces distribuées sont approximées par ce degré d'approximation dans l'élément.

En introduisant l'équation (3.94) dans l'équation (3.93) on obtient :

$$q_i = \int_{-1}^1 \phi_j(\xi) u^*(\xi, \hat{\xi}_i) J d\xi b_j \quad (3.85)$$

Vous pouvez alors écrire :

$$\{q\} = [C]\{b\}_L \quad (3.86)$$

Puisque $[C]$ est donné par :

$$C_{ij} = \int_{-1}^1 u^*(\xi, \xi_i) \phi_j(\xi) J d\xi \quad (3.87)$$

Substituant l'éq. (3.96) dans (3.92) :

$$[B]^{-1}[A]\{u\}_L = \{N\}_L + [B]^{-1}[C]\{b\}_L \quad (3.88)$$

Ce format d'équation est similaire à celui utilisé dans la FEM, mais il n'est valable que pour le contour des éléments. Pour que le format devienne le même, les points internes des éléments doivent être inclus dans l'équation précédente.

3.3.1 Points internes :

Dans le couplage de méthodes, il est intéressant qu'il soit possible pour l'élément d'avoir n'importe quel nombre de nœuds. Cela fournira que la force distribuée a une approximation polynomiale de n'importe quel ordre. Nous essayons ensuite d'inclure les points internes dans l'équation. Pour le cas d'un point intérieur j l'équation serait la suivante :

$$u_j - N_{j1}^* u_1 + N_{jn}^* u_n = -u_{j1}^* N_1 + u_{jn}^* N_n + q_j \quad (3.89)$$

Ajout aux matrices de points extrêmes :

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_j \\ u_n \end{Bmatrix}_L + \begin{bmatrix} -N_{11}^* & 0 & N_{n1}^* \\ -N_{j1}^* & 0 & N_{jn}^* \\ -N_{n1}^* & 0 & N_{nn}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_j \\ u_n \end{Bmatrix}_L = \begin{bmatrix} u_{11}^* & 0 & N_{n1}^* \\ u_{j1}^* & 0 & N_{jn}^* \\ u_{n1}^* & 0 & N_{nn}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_j \\ N_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_j \\ q_n \end{Bmatrix}_L \quad (3.90)$$

A noter que dans ce cas :

$$B = \begin{bmatrix} u_{11}^* & 0 & N_{n1}^* \\ u_{j1}^* & 0 & N_{jn}^* \\ u_{n1}^* & 0 & N_{nn}^* \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

La matrice B obtenue n'est pas inversible. Cependant, en observant que $N_j=0$, on peut alors adopter $B_{jj}=EA/L$ sans préjudice du produit $[B]\{N\}$.

Incorporant le point interne à l'Eq. (3.88') d'après (3.100) et (3.101) et en regroupant les matrices on obtient l'équation :

$$[K]_L\{u\}_L = \{N\}_L + [G]_L\{b\}_L \cdot [K]_L = [B]^{-1}[A] e [G]_L = [B]^{-1}[C] \quad (3.92)$$

Ce format d'équation est le même que celui utilisé dans la méthode des éléments finis. Il est intéressant de réaliser le couplage de méthodes, voire de réaliser la rotation et l'union d'éléments, comme cela sera expliqué plus loin.

Après avoir résolu le problème, obtenu u_G , et b_G , on essaie de trouver les valeurs des efforts normaux des éléments, pour cela, l'équation (3.65) est utilisée sous la forme suivante :

$$\{N\}_L = [K]_L\{u\}_L - [G]_L\{b\}_L \quad (3.93)$$

Cependant, l'équation précédente ne fournit que les valeurs des efforts normaux aux nœuds extrêmes de l'élément, les valeurs aux nœuds internes sont également recherchées. Puisque la BEM 1D est utilisée, seule la force distribuée est définie le long de l'élément. Sur cette base, l'équation (3.65), présentée précédemment, peut être utilisée pour obtenir les efforts normaux.

En intégrant jusqu'au point d'intérêt j , où 1 est le premier point de l'élément :

$$N_j = N_1 - \int_0^{L_j} p(x)dx = N_1 - \left(\int_0^{L_j} \phi_i dx \right) b_i \quad (3.94)$$

La stratégie d'effectuer le changement d'espace en 2 étapes a été adoptée, la première par rapport à l'ensemble de l'élément et la seconde par rapport à la partie de l'élément qui doit effectivement être intégrée. De cette façon, en effectuant un changement d'espace par rapport à l'ensemble de l'élément, on obtient :

$$N_j = N_1 - \left(\int_{-1}^{\xi_j} \phi_i (\xi) J d\xi \right) b_i \quad (3.95)$$

Le Jacobien J est calculé de la manière habituelle. Ensuite, un nouveau changement d'espace est effectué, par rapport à l'intervalle entre -1 et ξ_j , avec le calcul du Jacobien Équivalent J_E :

$$N_j = N_1 - \left(\int_{-1}^1 \phi_i(\xi) J J_E d\xi_E \right) b_i \quad (3.96)$$

$$J_E = \frac{\xi_{j+1}}{2} \quad (3.97)$$

$$\xi = (\xi_E + 1) * \frac{\xi_{j+1}}{2} - 1 \quad (3.98)$$

De cette façon, il peut être intégré numériquement pour obtenir les efforts normaux, à la fois pour la BEM 1D et pour la MEF.

3.3.2 Rotation et union des éléments :

Tant pour le couplage que pour l'union des éléments, il faut que les axes adoptés soient les mêmes, c'est-à-dire globaux. Pour cela, alors, les axes des éléments sont tournés de la même manière que pour les éléments finis, de manière similaire à ce que l'on trouve dans (Proença, [302]).

Les éléments sont tournés à l'aide de la matrice de rotation R , proprement orthogonale, de sorte que

$$\begin{aligned} [R]^{-1} &= [R]^T \\ \{u\}_G &= [R]\{u\}_L \\ \{N\}_G &= [R]\{N\}_L \\ \{b\}_G &= [R]\{b\}_L \end{aligned} \quad (3.99)$$

En remplaçant dans l'éq. (3.65):

$$[K]_L [R]^T \{u\}_G = [R]^T \{N\}_G + [G]_L [R]^T \{b\}_G \quad (3.100)$$

ou bien :

$$[R][K]_L [R]^T \{u\}_G = \{N\}_G + [R][G]_L [R]^T \{b\}_G \quad (3.101)$$

Par conséquent, on peut écrire les matrices tournées comme suit :

$$\begin{aligned} [K]_G &= [R][K]_L[R]^T \\ [G]_G &= [R][G]_L[R]^T \end{aligned} \quad (3.102)$$

Quant à l'union des éléments, la compatibilité des déplacements et de l'équilibre du nœud commun i est imposée, se traduisant par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} u_i^{(1)} &= u_i^{(2)} \\ N_i^{(1)} + N_i^{(2)} &= 0 \end{aligned} \quad (3.103)$$

Où:

$u_i(1)$ est le décalage du nœud i à l'élément 1

$u_i(2)$ est le décalage du nœud i à l'élément 2

$N_i(1)$ est la force normale appliquée au nœud i pour l'élément 1

$N_i(2)$ est la force normale appliquée au nœud i pour l'élément 2

De la même manière que dans (Proença, [302]) cela se fait pour les éléments finis, il est possible de réunir les équations des éléments en une seule équation globale, comme suit :

$$[K]_G \{u\}_G = \{N\}_G + [G]_G \{b\}_G \quad (3.104)$$

Chapitre 4

Résultats et discussion

Résultats et discussion

1^{re} Section

Dans cette section, différentes microstructures (RVEs) ont été adoptées, dont les réponses constitutives homogénéisées sont comparées à celles obtenues à partir du modèle FEM pour la microstructure proposée dans [303], [304], et [305] afin de valider la formulation développée ici. Dans cette comparaison, le même maillage a toujours été adopté pour les modèles BEM et FEM, c'est-à-dire que pour le modèle d'éléments finis, les éléments triangulaires ont été adoptés en coïncidant avec les cellules triangulaires du modèle développé avec la BEM. Il convient de mentionner que bien qu'ils ne soient pas présentés ici, des tests de convergence des résultats avec le raffinement du maillage ont été testés à la fois pour le modèle BEM et le modèle FEM. Comme les deux modèles numériques sont assez différents, un maillage a été adopté qui présentait de bons résultats pour les deux méthodes, afin de comparer les résultats. Ainsi, afin de simuler le processus de chargement incrémental lié au problème du macro-continuum dans une analyse multi-échelle, toute déformation est imposée au RVE par incréments. Ensuite, après avoir résolu le RVE pour chaque augmentation de déformation, les valeurs homogénéisées du vecteur contrainte et du tenseur constitutif sont obtenues. Il est important de noter qu'une analyse de la convergence des résultats avec le raffinement du maillage a été effectuée dans tous les exemples. Ainsi, lorsque cette étude n'est pas présentée, nous avons toujours utilisé un maillage dont les résultats avaient déjà atteint cette convergence.

4.1.1 Influence de la fraction volumique des inclusions :

Dans ce premier ensemble de RVE, une inclusion élastique a été définie au centre de la RVE, le comportement du matériau de la matrice étant régi par le modèle constitutif de von Mises. Différentes fractions volumiques ont été considérées pour cette inclusion, afin de vérifier son influence sur la réponse constitutive de la RVE. Dans tous les calculs, le modèle des fluctuations périodiques du contour de la RVE a été adopté. Les fractions volumiques suivantes ont été retenues : $f_v = 10\%$, $f_v = 30\%$ et $f_v = 37\%$ (voir Figure 1). Les propriétés suivantes ont été adoptées pour les inclusions, qui sont adoptées comme élastiques : module

d'élasticité $E = 200\text{GPa}$ et coefficient de Poisson $\nu = 0,2$. Pour la matrice, il a été adopté : $E = 70\text{GPa}$, $\nu = 0,3$, limite d'élasticité $\sigma_y = 243\text{MPa}$ et module d'écroutissage $K = 2,24\text{GPa}$. Le vecteur de déformation suivant a été imposé au RVE en 25 incréments : $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \varepsilon_{12}\} = \{-0,0015 \ 0,0048 \ 0\}$.

Les maillages considérés pour le RVE (avec $f_v = 10\%$, $f_v = 30\%$ et $f_v = 37\%$) contiennent respectivement :

- a) 220 cellules et 131 nœuds (40 éléments de contour et 12 éléments d'interface),
- b) 204 cellules et 123 nœuds (40 éléments de contour et 20 éléments d'interface)
- et
- c) 236 cellules et 139 nœuds (40 éléments de contour et 24 éléments d'interface).

Dans la figure (1), la tension est homogénéisée dans la direction x_2 tout au long du processus incrémental et en considérant les trois RVE différents. Comme prévu, la réponse la plus rigide fait référence à RVE avec $f_v = 37\%$ et la réponse la plus flexible fait référence à RVE avec $f_v = 10\%$. De plus, sur la figure (1), on remarque que les résultats du BEM et du FEM sont très similaires.

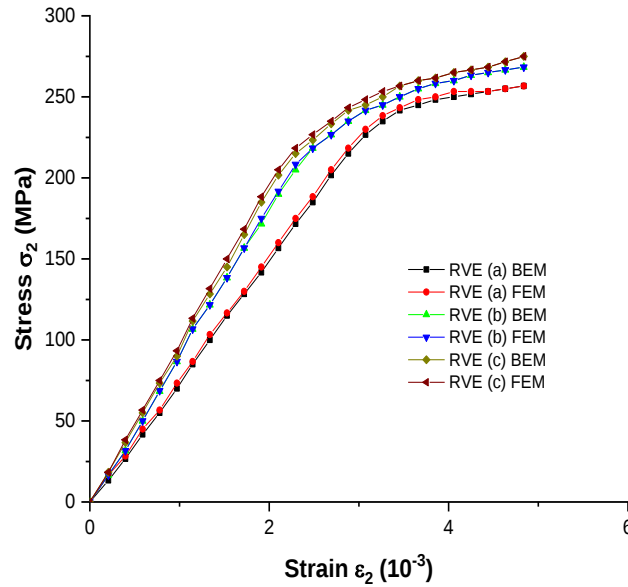


Figure 4.1. Contrainte homogénéisée dans la direction x_2 , en considérant différentes fractions volumiques pour les inclusions.

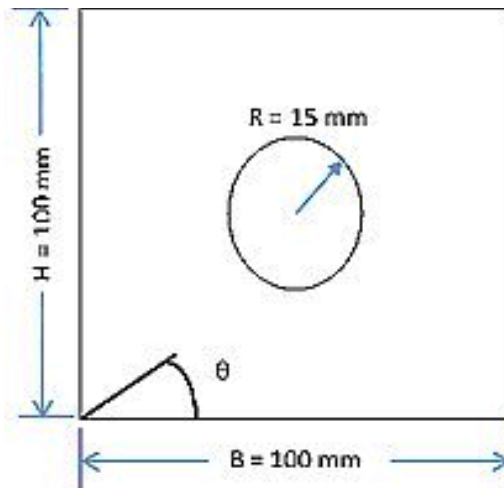


Figure 4.2. Stratifié unidirectionnel avec trou central soumis à un déplacement positif, θ étant l'angle d'orientation des fibres.

4.1.2 Calcul des tenseurs de déformations macroscopiques :

En utilisant les données géométriques illustrées à la Fig. 2 et se référant au stratifié époxy AS4 3501-6 pour ce qui est de l'orientation des fibres avec une épaisseur de 1 mm, l'analyse a été menée dans le plan du stratifié en utilisant la méthode des éléments de frontière (BEM) pour l'élasticité anisotrope. On a ainsi déterminé les tenseurs de déformation associés aux points matériels internes. Pour ce faire, le stratifié, incluant le contour extérieur et le trou central, a été discrétisé en utilisant 7 éléments quadratiques discontinus et 52 points matériels internes

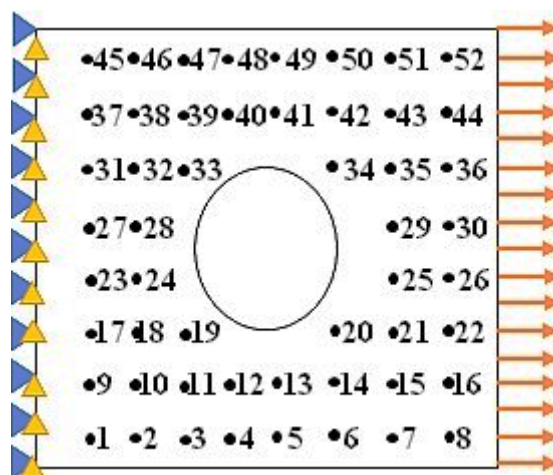


Figure 4.3. Discrétisation du stratifié et conditions aux limites.

Pour un stratifié avec des fibres orientées à $\theta = 0^\circ$ et soumis à un déplacement positif de 0,20 mm sur le bord droit le long de l'axe, avec des restrictions de mouvement vers et depuis les directions gauche et/ou droite, comme illustré dans la Fig. 3, les tenseurs de déformation ont été obtenus à partir de chaque point matériel interne. Ces tenseurs correspondent aux déformations macroscopiques, identiques aux tenseurs de déformations homogénéisées EVRS. Les graphiques présentés dans la Fig. 4 et la Fig. 5 montrent les valeurs obtenues des tenseurs de déformation pour les points internes du stratifié, comparées aux valeurs obtenues à l'aide du logiciel d'éléments finis ABAQUS. Dans ce logiciel, le stratifié a été discrétisé en un maillage quadrangulaire linéaire de 4 nœuds, chaque élément ayant une longueur de 2. Les figures montrent également le pourcentage moyen des erreurs relatives obtenues pour chaque point, indiquant que les résultats sont cohérents et que le pourcentage moyen d'erreurs est minimal

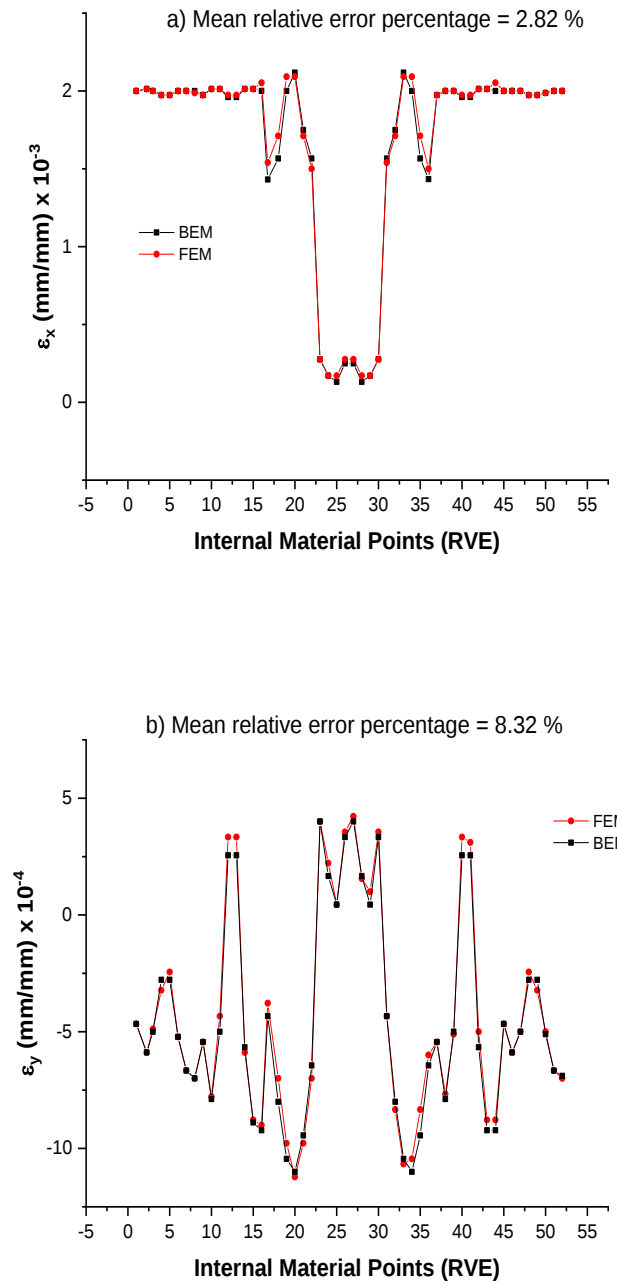
4.1.3 Plaque carrée serrée sur les quatre côtés sous une charge uniformément répartie :

Considérons une plaque encadrée (Figure 6) chargée au temps $t_0 = 0$ s par une charge de type marche $q = 2,07 \times 10^6$ N/m². La plaque est orthotrope et a les propriétés et dimensions suivantes :

$E_2 = 6895$ MPa, $E_1 = 2E_2$, $G_{12} = 2651,9$ MPa, $\nu_{12} = 0,3$, $\rho = 7166$ kg/m³, $a = 254$ mm et épaisseur $h = 12,7$ mm.

Le moment de flexion statique du nœud central de la plaque est donné par $m_{statx} = 4,06 \times 10^3$ N.m / m et le facteur de normalisation du temps par :

$$t_0 = \frac{a^2 \sqrt{\frac{\rho h}{a_{11}}}}{4}$$

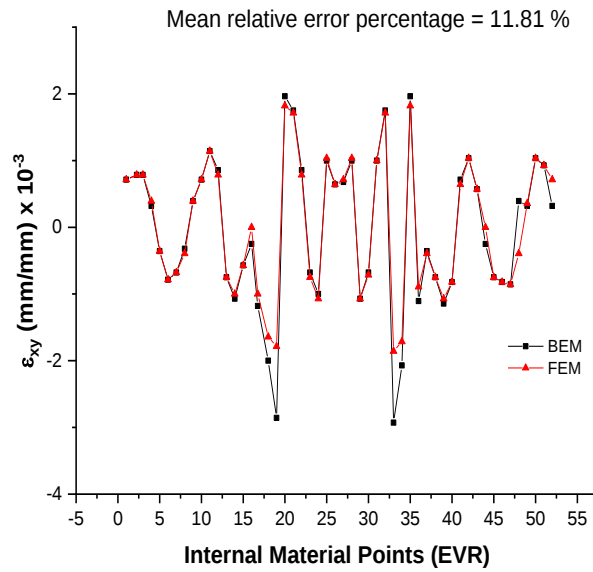


(a) Pourcentage moyen d'erreur relative = 2,82 %

(b) Pourcentage moyen d'erreur relative = 8,32 %

Figure 4.4. Déformation des points internes dans

(a) La direction x, (b) La direction y.



Pourcentage moyen d'erreur relative = 11,81 %

Figure 4.5. Déformation des points internes dans la direction xy.

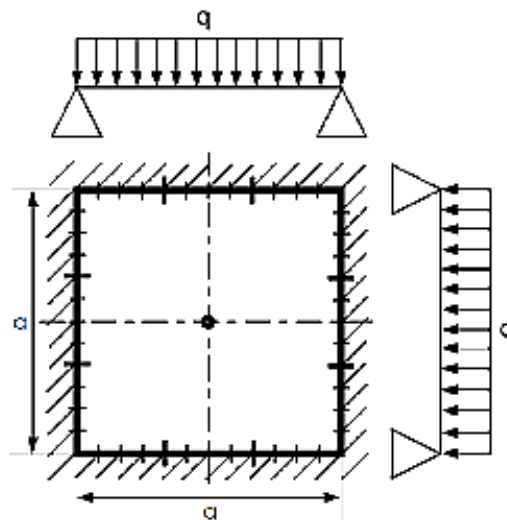


Figure 4.6. Plaque encastée orthotrope carrée.

La plaque a été discrétisée en utilisant 12 éléments de contour carrés discrets de même longueur et pas de temps $\Delta\tau = 2,1915 \times 10^{-5}$ s. Le problème a été analysé en utilisant 1, 9 et 25 points internes uniformément répartis. La figure 7 montre le moment de flexion du nœud central de la plaque en fonction du temps. De plus, les résultats utilisant le MLPG et les éléments finis présentés par Sladek et al. [306].

On peut voir que des points internes sont nécessaires pour obtenir une plus grande précision des résultats, comme le montre la figure 6. Avec un seul point interne, il y a une différence expressive par rapport aux autres résultats. Le résultat avec 25 points internes s'est avéré plus proche des solutions obtenues par Sladek et al. [306]. Le résultat avec 9 points internes était en bon accord avec les résultats de la littérature.

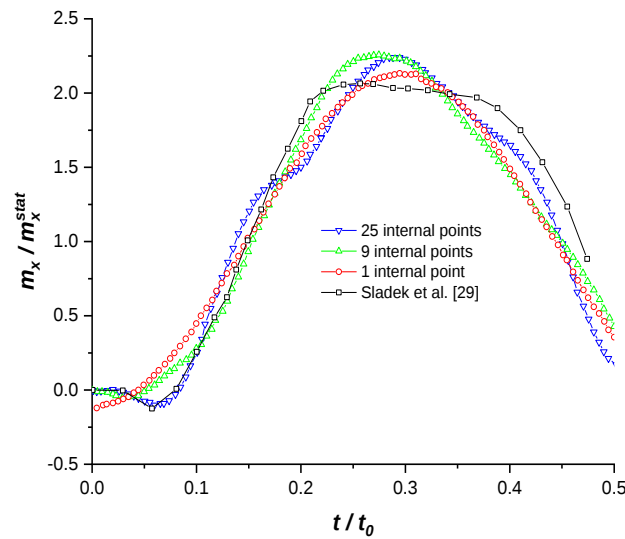


Figure 4.7. Moment de flexion du nœud central de la plaque en fonction du temps, en faisant varier le nombre de points internes.

4.1.4 Conclusion :

L'analyse de défaillance d'une structure composite multicouche a été examinée dans cette étude. Le stratifié analysé pour cette défaillance est composé de dix couches. Les critères de rupture de Tsai-Hill et de déformation maximale concordent, indiquant que le stratifié époxy AS4 3501-6 ne se rompra pas dans les conditions définies. Les résultats obtenus montrent que les critères de rupture utilisés sont efficaces pour prédire la rupture interfibres dans une structure composite multicouche.

Les résultats présentés dans cet article démontrent que la micromécanique computationnelle est devenue un outil puissant pour relier les caractéristiques microstructurales des composites renforcés de fibres unidirectionnelles aux propriétés des couches macroscopiques. Ces capacités ont été intégrées dans un ensemble d'outils de calcul pour Abaqus, BEM et Matlab. Cela permet de concevoir des composites stratifiés en calculant les propriétés macroscopiques (rigidité, résistance) à partir des propriétés mécaniques des fibres, de la matrice et de l'interface, ainsi que de la fraction volumique, de la forme et de la distribution des fibres. Cet outil est extrêmement utile du point de vue industriel pour sélectionner de nouvelles configurations de matériaux avec des propriétés optimisées pour des applications spécifiques et fournir les données d'entrée nécessaires à l'analyse structurelle des stratifiés dans le cadre de la méso-mécanique computationnelle.

Le concept de modélisation numérique basée sur la microstructure présenté dans cette étude constitue une méthode prometteuse pour la conception de nouveaux composites. Le potentiel de cette approche réside dans son applicabilité à toute microstructure complexe. Un modèle basé sur la microstructure est beaucoup plus polyvalent et universel qu'une approche analytique, car il permet de modéliser des

microstructures arbitraires avec n'importe quel nombre de phases, de morphologies et de propriétés.

2^{ème} Section

Afin de valider la formulation mise en œuvre, des structures dont les réponses mécaniques sont connues seront analysées. Tout d'abord, la formulation BEM1D sera testée avec des éléments dans la même direction, puis testée avec des éléments en rotation.

4.2.1 BEM1D - Exemple 1 : Élément à force linéaire répartie :

Dans un premier temps, le cas d'un élément isolé avec une force normale distribuée linéairement sera évalué, comme le montre la figure 8 :

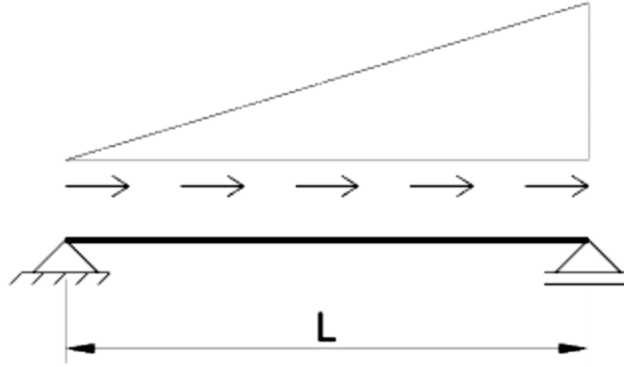


Figure 4.8. Élément avec force normale distribuée linéairement

Dans ce cas, L a été adopté comme longueur de l'élément et la force répartie a été définie par la formule suivante, où a est une valeur constante :

$$p(x) = a \cdot x \quad (4.1)$$

Les relations (3.75), (3.76) et (3.77) sont valides :

$$N(x) = u'(x)EA \quad (4.2)$$

$$u''(x) = -\frac{p(x)}{EA} \quad (4.3)$$

C'est à dire:

$$u''(x) = -\frac{a.x}{EA} \quad (4.4)$$

Comme les conditions aux limites ont été adoptées :

$$\begin{aligned} u(0) &= 0 \\ N(0) &= 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

De cette façon :

$$u'(L) = 0 \quad (4.6)$$

Intégration (4.3) :

$$u'(x) = -\frac{a.x^2}{2EA} + C_1 \quad (4.7)$$

Application des conditions aux limites :

$$C_1 = \frac{a.L^2}{2EA} \quad (4.8)$$

$$u'(x) = -\frac{a.x^2}{2EA} + \frac{a.L^2}{2EA} \quad (4.9)$$

$$N(x) = -\frac{a.x^2}{2} + \frac{a.L^2}{2} \quad (4.10)$$

En intégrant (4.9) et en appliquant la condition aux limites essentielle, on obtient la solution analytique :

$$u(x) = -\frac{a.x^3}{6EA} + \frac{a.L^2.x}{2EA} \quad (4.11)$$

Quant à la réaction de support R, elle peut être obtenue par l'équation (4.10) :

$$R = -N(0) = -\frac{a.L^2}{2} \quad (4.12)$$

La réponse analytique étant connue, une comparaison a été faite avec le résultat de la formulation BEM 1D. Adopté :

$$\begin{cases} a = 1 \\ L = 6 \end{cases} \quad (4.13)$$

La barre a été discrétisée à 5 nœuds. Dans un premier temps, 4 éléments linéaires ont été utilisés, puis 2 éléments quadratiques et enfin 1 élément du quatrième degré. Le résultat est visible sur la figure ci-dessous.

L'erreur des résultats a été calculée à l'aide de la formule suivante :

$$Error = \left| \frac{x_{BEM\ 1D} - x_{FTOOL}}{x_{FTOOL}} \right| \quad (4.14)$$

Où x est la variable évaluée.

Dans ce cas, l'erreur maximale pour le déplacement du point et la réaction du support était de $4,44E^{-15}$. Par conséquent, ce n'était pas vraiment une erreur, mais une troncature de l'ordinateur lui-même. Autrement dit, on peut considérer que la réponse numérique coïncide avec la réponse analytique.

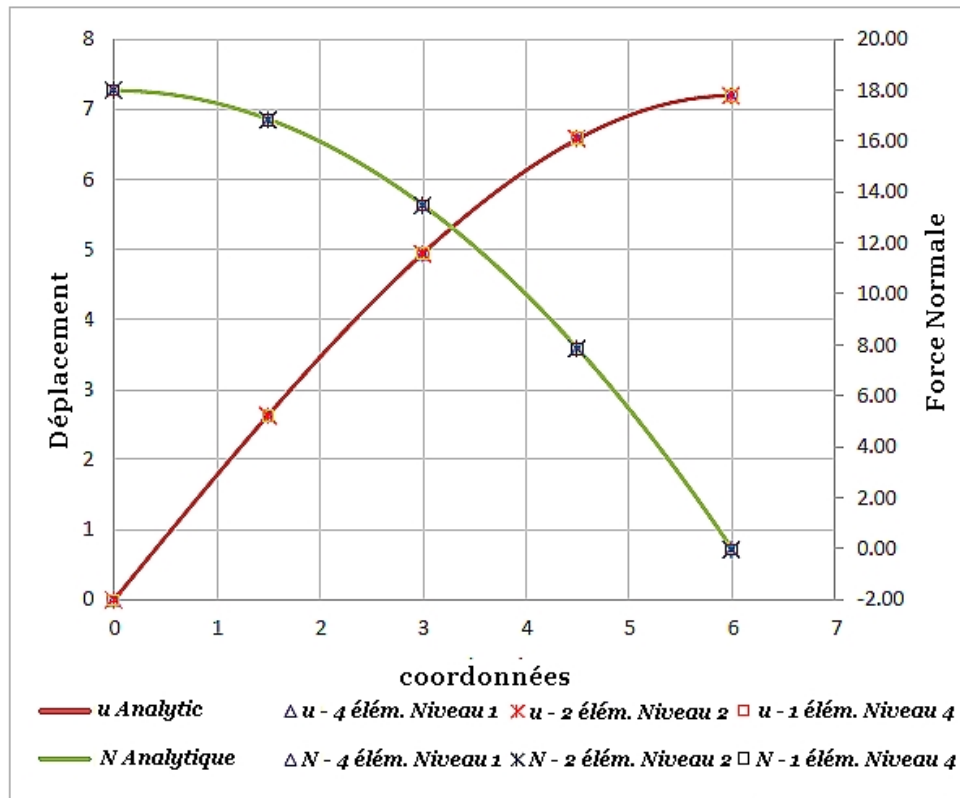


Figure 4.9. Réponse BEM 1D – Force distribuée linéairement

4.2.2 BEM 1D - Exemple 2 : Élément avec force quadratique répartie :

On va maintenant évaluer le cas d'un élément à effort réparti, régi de façon quadratique, d'équation suivante :

$$p(x) = a \cdot x^2 \quad (4.15)$$

Ensuite il y a ça :

$$u''(x) = -\frac{a \cdot x^2}{EA} \quad (4.16)$$

Conditions aux limites:

$$\begin{aligned} u(0) &= 0 \\ N(L) &= 0 \end{aligned} \tag{4.17}$$

Intégration (4.16) :

$$u'(x) = -\frac{a.x^3}{3EA} + C_1 \tag{4.18}$$

Mais, en utilisant la relation (3.76) dans (4.17) on observe la condition aux limites en fonction de la dérivée des déplacements :

$$u'(L) = 0 \tag{4.19}$$

En intégrant à nouveau et en appliquant la condition aux limites sur les déplacements, on obtient :

$$C_1 = \frac{a.L^3}{3EA} \tag{4.20}$$

$$u'(x) = -\frac{a.x^3}{3EA} + \frac{a.L^3}{3EA} \tag{4.21}$$

$$N(x) = -\frac{a.x^3}{3} + \frac{a.L^3}{3} \tag{4.22}$$

En intégrant à nouveau et en appliquant la condition aux limites sur les déplacements, on obtient :

$$u(x) = -\frac{a.x^4}{12EA} + \frac{a.L^3.x}{3EA} \tag{4.23}$$

La réaction de support R est alors donnée par :

$$R = -N(0) = -\frac{a.L^3}{3} \quad (4.24)$$

Une comparaison a été faite à nouveau du résultat de la formulation BEM 1D avec 5 nœuds, en utilisant 4 éléments linéaires, 2 éléments quadratiques ou 1 élément du quatrième degré. Adopté :

$$\begin{cases} a = 1 \\ L = 6 \end{cases} \quad (4.25)$$

Le résultat est visible sur la figure ci-dessous.

Encore une fois, l'erreur des résultats a été calculée, selon l'équation (4.14). Dans le cas de l'utilisation d'éléments quadratiques et du quatrième degré, l'erreur maximale était de $2,39E^{-15}$, ce qui peut être considéré comme coïncidant avec la réponse analytique. Cependant, dans le cas de l'utilisation d'éléments linéaires, une erreur pertinente a été obtenue, $3,13E^{-02}$. L'erreur est justifiée par le fait que la force distribuée est décrite à l'aide de la technique des éléments finis, selon l'équation (3.94). Autrement dit, comme il est défini par des valeurs nodales, avec l'utilisation d'éléments linéaires, il est également considéré comme linéaire au sein des éléments. Comme la force distribuée quadratique a été adoptée, lorsqu'elle est considérée comme linéaire dans les éléments, une erreur se produit. L'augmentation de la discrétisation des barres est une option pour réduire cette erreur.

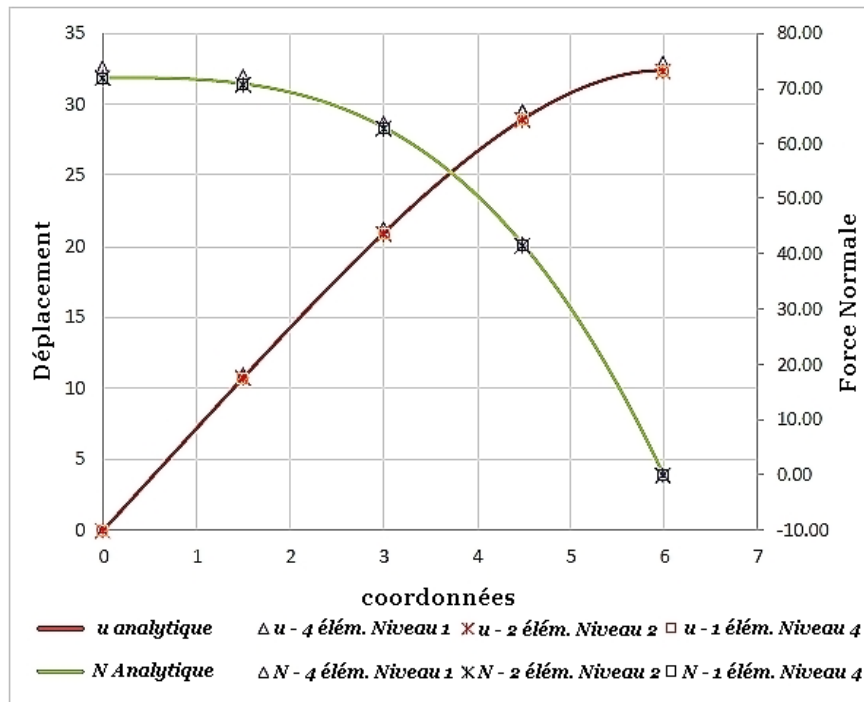


Figure 4.10. Réponse BEM 1D – Force quadratique distribuée

La dernière configuration a été ré-analysée à l'aide d'un élément à 41 nœuds. En utilisant la BEM 1D, le nombre de nœuds a moins d'influence sur le résultat, puisqu'en pratique la solution est donnée au moyen des nœuds de contour. La réponse pour les nœuds internes est obtenue par post-traitement (fig. 11).

Le point négatif de l'utilisation d'un grand nombre de nœuds dans un élément est dû au fait que la force distribuée est approximée par la technique des éléments finis. Comme l'approximation est définie par les valeurs nodales, étant dans ce cas de degré 40, une grande oscillation se produit éventuellement. Un autre facteur pertinent est la nécessité, du fait de la formulation adoptée, d'inverser une matrice non symétrique de taille proportionnelle au nombre de nœuds, ce qui peut entraîner des erreurs numériques plus importantes. Probablement pour ces raisons, les erreurs étaient plus importantes qu'avec l'utilisation d'éléments quadratiques ou du quatrième degré, avec une valeur maximale de $4,95E^{-4}$.

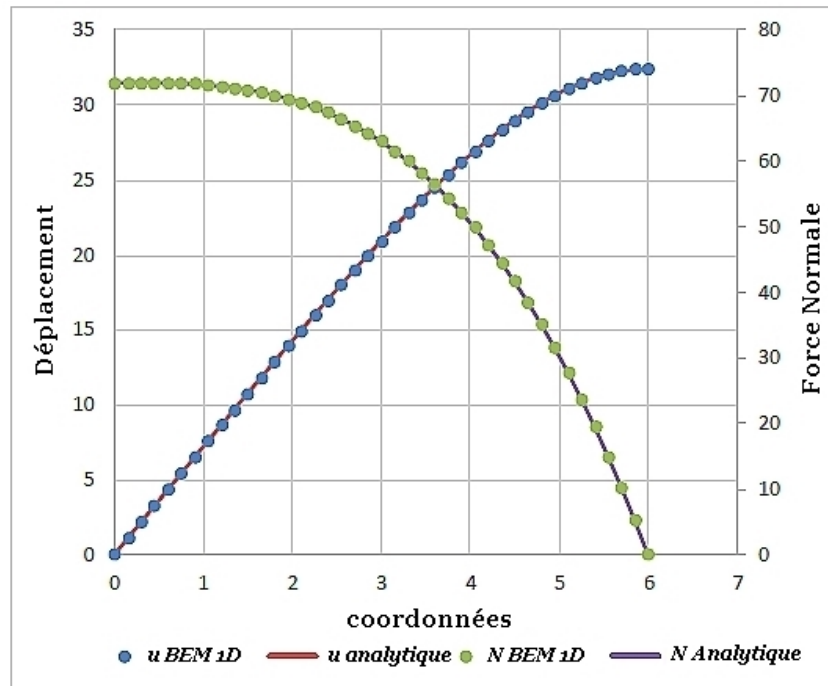


Figure 4.11. Réponse BEM 1D, 41 nœuds – Force quadratique distribuée

4.2.3 BEM 1D - Exemple 3 : Union et Rotation d'éléments ;

Dans ce cas, la rotation et l'union des éléments seront validées au moyen d'un exemple avec l'union de 3 éléments formant le treillis illustré à la Figure 12 :

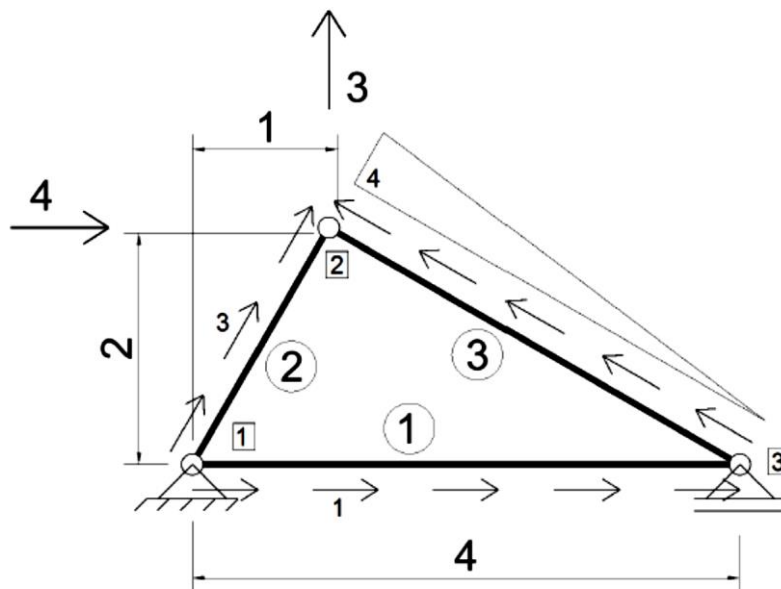


Figure 4.12. Ferme formée de 3 éléments

Le numéro d'élément est à l'intérieur d'un cercle et le numéro de nœud est à l'intérieur d'un rectangle. On peut voir qu'une charge concentrée a été appliquée sur le nœud numéro 2. Les données des éléments sont visibles dans le tableau 1. Comme il s'agit d'un exemple didactique dans le seul but de valider le programme développé, aucune unité n'est indiquée.

Tableau 4.1 - Données des éléments

Élément	EA	P	N nœud
1	10	1	2
2	15	3	2
3	5	0-4	5

EA représente la rigidité de l'élément, p la force répartie et $N_{\text{nœud}}$ est le nombre de nœuds utilisés dans la modélisation 1D BEM.

Le programme informatique à usage académique Ftool, a été utilisé pour vérifier les résultats en comparant la configuration déformée, comme le montrent la figure 13 et le tableau 2, et entre les efforts normaux, selon la figure 14 et le tableau 3.

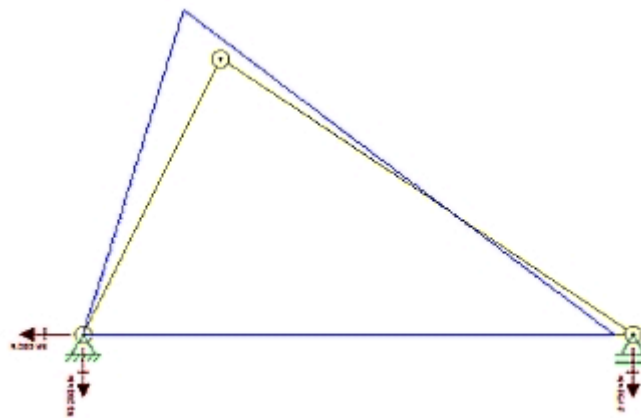


Figure 4.13. Modèle et sa déformation.

Les résultats ont été comparés en calculant l'erreur entre eux, à l'aide de l'équation (4.14) :

Tableau 4.2 - Comparaison des résultats de déplacement et des réactions d'appui de la méthode avec Ftool.

	Erreur			
	Déplacements		Réactions des appuis	
Direction	1	2	1	2
Nœud1	0,00E+00	0,00E+00	2,84E-10	6,72E-12
Nœud2	4,75E-05	1,73E-06	0,00E+00	0,00E+00
Nœud3	6,51E-10	0,00E+00	2,14E-18	3,07E-10

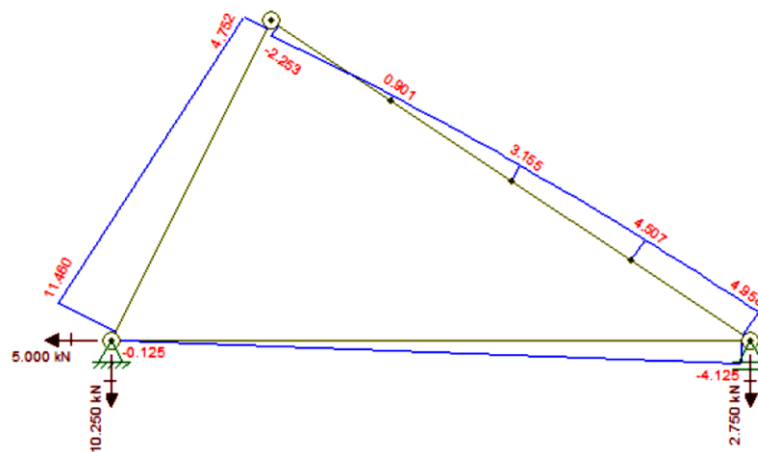


Figure 4.14. Modèle et forces normales générées dans le programme informatique Ftool

Pour la comparaison des efforts normaux, les nœuds de chaque élément ont été numérotés :

Tableau 4.3 - Comparaison du résultat des efforts normaux de la méthode avec Ftool.

	Forces normales - Erreur		
Élément	1	2	3
Nœud1	1.11E-08	1.32E-05	7.40E-05
Nœud2	3.35E-10	7.48E-05	1.35E-05
Nœud3	-	-	4.52E-05
Nœud4	-	-	4.30E-04
Nœud5	-	-	2.08E-04

On observe que la réponse de la formulation BEM 1D tant pour le déplacement des points que pour la réaction d'appui et les forces normales par rapport au Ftool se traduit par une erreur maximale de $4.30E^{-04}$. Compte tenu du fait que les formulations adoptées sont différentes, Ftool lui-même comporte des erreurs, et que dans ce cas la différence de résultats est principalement due à la troncature de la réponse de Ftool, cette valeur d'erreur peut être évaluée comme satisfaisante.

4.2.4 Conclusions partielles - BEM 1D :

De bons résultats ont été obtenus en utilisant la méthode dans plusieurs cas, avec différentes conditions de chargement. L'influence du degré d'approximation adopté pour la force répartie était nette, l'utilisation d'une approximation d'un degré inférieur à celui appliqué conduit à une augmentation de l'erreur. Dans ce cas, augmenter la discrétisation de l'élément réduirait cette erreur.

Chapitre 5

Couplage BEM/FIBRE

validation et application

5. Introduction :

Ce chapitre évaluera différents exemples impliquant le couplage de BEM avec des raidisseurs, qui sont modélisés à la fois par la MEF et par la BEM 1D. Les milieux isotropes et anisotropes, les différentes propriétés des matériaux, la discrétisation et le degré d'approximation des raidisseurs seront pris en compte, les non-linéarités n'ont pas été prises en compte.

La modélisation des raidisseurs dans le couplage avec la BEM s'effectue en définissant d'abord leurs nœuds. Ensuite, le degré d'approximation et la connectivité des éléments sont définis. Tous les nœuds d'élément doivent avoir été préalablement définis, c'est-à-dire que lorsque l'on fait varier leur degré d'approximation, de nouveaux nœuds et degrés de liberté ne sont pas créés, leur connectivité est simplement modifiée afin de couvrir un plus grand nombre de nœuds. L'intégration numérique est effectuée à la fois sur le contour et sur les raidisseurs. L'intégration des contours est effectuée à l'aide de 400 points de Gauss, définis par une analyse de convergence précédemment effectuée.

Les résultats obtenus par la formulation proposée ont été comparés aux réponses fournies par des modèles équivalents obtenus par ANSYS, en utilisant la FEM. Dans le modèle généré dans ANSYS, le milieu est modélisé au moyen d'éléments plaques et les raidisseurs par des treillis, le couplage est réalisé en liant les degrés de liberté des nœuds médians avec les nœuds raidisseurs, en superposant les matrices de rigidité. C'est-à-dire qu'il n'est pas nécessaire d'approximer la force d'adhérence.

5.1 Couplage - Exemple 1 :

Dans un premier temps, un panneau en état de contrainte plane (ECP) à 3 raidisseurs a été simulé à l'aide de la BEM puis de la BEM et de la BEM 1D. Comme condition d'appui, son côté gauche a été fixé, des forces ont été appliquées à la fois sur le contour supérieur et sur le contour droit, générant respectivement des efforts de flexion et de traction :

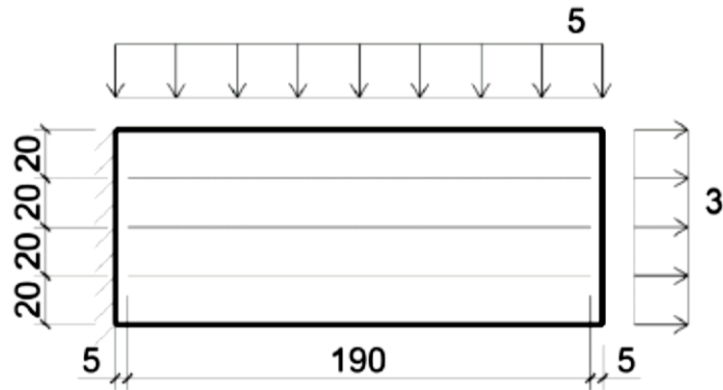


Figure 5.1. Modèle de panneau avec raidisseurs
(Mesures en cm, charges en kN/m)

Le béton a été considéré comme un milieu isotrope linéaire. Les propriétés mécaniques suivantes ont été retenues pour le domaine (indice C) et les raidisseurs (indice S) :

$$E_s = 200 \text{ GPa}$$

$$E_c = 25 \text{ GPa}$$

$$\nu_c = 0,25$$

$$A_s = 10 \text{ cm}^2 \text{ (par raidisseur)}$$

Sous ANSYS, l'environnement a été modélisé à l'aide d'éléments de plaques carrées avec une approximation quadratique.

Les raidisseurs ont été modélisés à l'aide d'éléments de treillis à approximation linéaire. Au total, 16 000 éléments ont été adoptés au milieu et 190 éléments pour chaque raidisseur, définis sur la base d'une étude précédente de convergence de maillage, résultant en un bon comportement de réponse. Le maillage utilisé pour l'analyse via ANSYS est présenté dans la figure suivante :

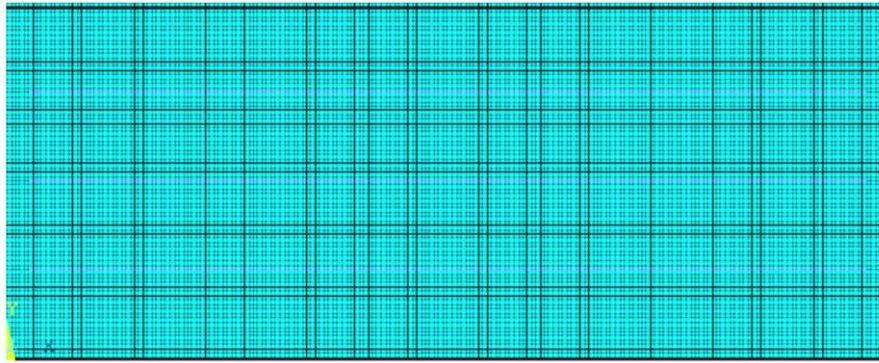


Figure 5.2. Modèle dans ANSYS

Dans le cas de l'analyse du couplage de la BEM avec des raidisseurs, le milieu a été modélisé à l'aide de la BEM, en utilisant 16 éléments de contour d'approximation quadratique. Pour l'analyse des déplacements et des réactions d'appui, le contour a été linéarisé dans le sens inverse des aiguilles d'une montre à partir du sommet inférieur gauche, la position étant identifiée par S dans les graphiques. Il est important de souligner que la prise en compte des valeurs positives ou négatives pour la traction ou la compression n'est pas utilisée, les résultats seront positifs lorsque leur direction coïncidera avec la direction de l'axe. En ce qui concerne les raidisseurs, modélisés à l'aide de la MEF et de la BEM 1D dans un premier temps, une analyse comparative sera effectuée par rapport à leur discrétisation, en évaluant les résultats pour 23, 51 et 111 nœuds avec des éléments d'approximation quadratique, avec respectivement 11, 25 et 55 éléments, les résultats présentés au point 5.1.1. Ensuite, l'effet de la modification du degré d'approximation des éléments raidisseurs sera évalué et les résultats seront présentés au point 5.1.2. Pour l'évaluation des résultats, les effets de la flexion et de la traction du panneau ont été discutés séparément. Les résultats des déplacements, des forces normales et de la force d'adhérence ont été présentés. Afin d'aider à l'interprétation, le graphique de ce dernier a été présenté sur le côté droit du graphique des forces normales. De plus, à l'intérieur de chaque item, nous avons essayé d'utiliser les mêmes limites d'axe, permettant une comparaison plus directe entre les graphiques.

Étant donné qu'à l'extrémité des raidisseurs, une concentration de force était attendue, des éléments plus petits ont été utilisés dans ces zones. En faisant varier la discrétisation et le degré d'approximation, on a observé que la création d'éléments irréguliers dans ces zones entraînait une plus grande augmentation de l'erreur, évitant ainsi cette situation.

5.1.1 Changement de discrétisation :

Dans un premier temps, différentes discrétisations des fibres ont été évaluées, vérifiant les effets mécaniques sur le contour du problème et sur les raidisseurs eux-mêmes.

5.1.1.1 Résultats sur le contour :

Dans le cas du contour, la variation de discrétisation des raidisseurs n'a pas influencé le résultat. On observe que la face inférieure du panneau a un déplacement négatif en x et la face supérieure a un déplacement positif, supérieur en module, les résultats obtenus sont conformes à ceux attendus puisqu'il s'agit d'un panneau soumis à la flexion-tension :

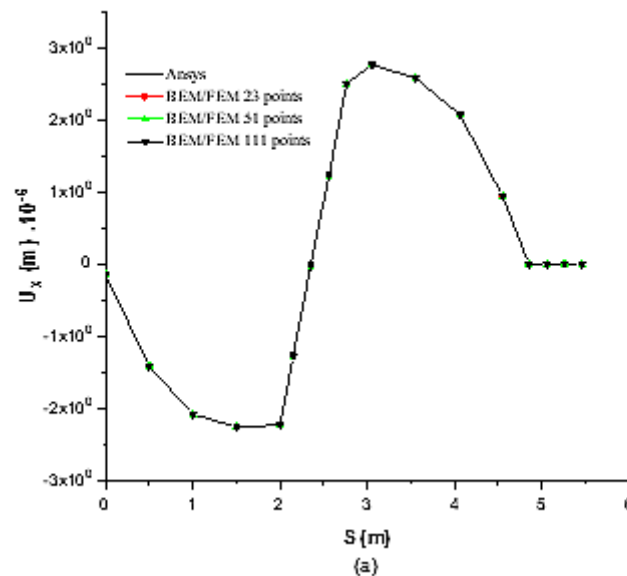


Figure 5.3. Déplacements dans la direction x – Couplage, discrétisation.

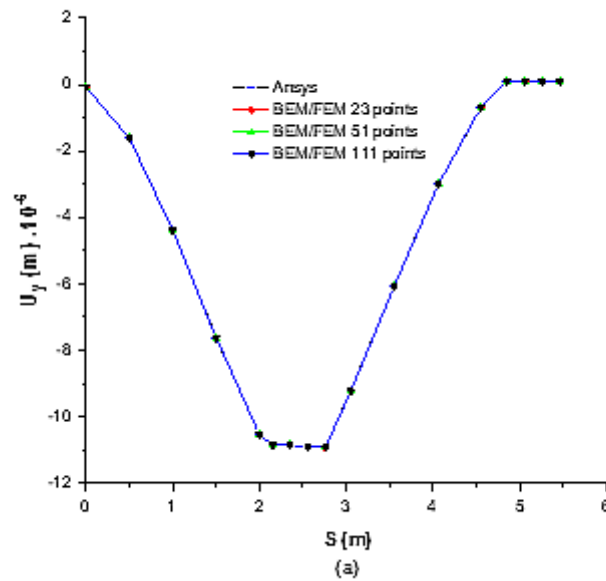


Figure 5.4. Déplacements dans la direction y – Couplage, discrétisation.

5.2. Conclusion de l'article :

Dans cette étude, nous avons exploré le couplage de la Méthode des Éléments de Frontière (BEM) avec des raidisseurs modélisés à la fois par la Méthode des Éléments Finis (MEF) et la BEM 1D. Nous avons pris en considération des milieux isotropes et anisotropes ainsi que différentes propriétés des matériaux. Néanmoins, les non-linéarités n'ont pas été prises en compte dans cette analyse.

La modélisation des raidisseurs a été réalisée en définissant d'abord leurs nœuds, suivie de la définition du degré d'approximation et de la connectivité des éléments. Les résultats obtenus par la formulation proposée ont été comparés à ceux de modèles équivalents générés par ANSYS, en utilisant la Méthode des Éléments Finis.

Dans l'exemple 1, un panneau en état de contrainte plane avec 3 raidisseurs a été simulé. Nous avons pris en considération différentes propriétés mécaniques pour les matériaux, et les résultats ont été analysés en termes de déplacements et de forces. Des études approfondies ont été menées sur la discrétisation des raidisseurs et son effet sur les résultats.

Conclusions Générales et perspectives

Conclusion Générale

Les matériaux renforcés de fibres (MRF) représentent une innovation majeure dans le domaine de l'ingénierie des matériaux. Ils exploitent la haute résistance des fibres à travers leur incorporation dans une matrice plus souple, offrant ainsi des matériaux dont la résistance et la rigidité rivalisent avec celles des métaux les plus solides, tout en conservant un poids spécifique considérablement plus faible. Ces caractéristiques en font des candidats prometteurs pour des applications aérospatiales et ont suscité un intense effort de recherche et développement au cours de la dernière décennie.

Cependant, l'utilisation confiante de ces nouveaux matériaux nécessite une compréhension approfondie et fiable de leurs propriétés physiques. Contrairement aux matériaux d'ingénierie conventionnels, où les propriétés sont souvent déterminées par l'expérience, les MRF présentent une grande variété de structures et de compositions, nécessitant une approche plus précise et détaillée pour évaluer leurs propriétés physiques.

Ce travail de recherche a exploré deux aspects majeurs liés aux MRF.

Le premier aspect consiste en l'étude approfondie des structures renforcées et des matériaux composites. Les MRF, en particulier ceux renforcés par des fibres, ont été examinés en profondeur, mettant en lumière leurs propriétés, leurs compositions, et leurs avantages pour des applications aérospatiales.

La seconde partie de cette étude a porté sur la modélisation du comportement des MRF non homogènes. En utilisant des outils tels que la méthode des éléments de frontière (BEM), des modèles et des simulations ont été développés pour mieux comprendre le comportement macroscopique de ces matériaux complexes.

Les résultats obtenus ont été concluants, montrant la pertinence et l'efficacité de ces approches dans l'analyse et la prédiction des propriétés mécaniques des MRF. Les analyses des microstructures (RVEs) ont montré des résultats prometteurs en termes de comportement mécanique, mettant en évidence l'influence de la fraction

volumique des inclusions et la nécessité d'une analyse fine des déformations pour mieux prédire le comportement macroscopique.

Dans le chapitre dédié à la modélisation BEM1D, des validations et des applications ont été effectuées pour tester la robustesse de la méthode. Les résultats obtenus ont montré que la méthode BEM1D est efficace pour analyser différentes structures, soulignant l'importance de l'approximation du degré dans la modélisation.

Le dernier chapitre a abordé le couplage BEM/FIBRE, explorant des exemples impliquant cette combinaison de méthodes. Cette approche a montré son potentiel dans l'analyse des structures renforcées, permettant ainsi une vision plus globale et précise du comportement des MRF.

En conclusion, ce travail de recherche offre une contribution significative à la compréhension et à l'application des MRF dans le domaine de l'ingénierie des matériaux.

Les approches explorées ont permis d'analyser et de modéliser efficacement ces matériaux complexes, ouvrant ainsi la voie à de futures recherches et à des applications innovantes dans divers domaines de l'ingénierie.

Comme future perspectives à ce travail on peut citer les points suivants :

Optimisation des microstructures : Poursuivre les études sur les microstructures (RVEs) en explorant des méthodes d'optimisation pour obtenir des configurations optimales en termes de comportement mécanique. L'optimisation des microstructures peut conduire à des améliorations significatives dans les propriétés macroscopiques des MRF.

Intégration des contraintes environnementales : Prenez en compte les contraintes environnementales auxquelles ces matériaux peuvent être soumis, comme l'humidité, les températures extrêmes, etc. Étudiez comment ces conditions influencent les propriétés des MRF et proposez des solutions pour atténuer leurs effets néfastes.

Développement de nouveaux composites : Explorez la possibilité de développer de nouveaux composites en combinant différents types de fibres avec des matrices diverses. Cela peut ouvrir la voie à la création de matériaux encore plus performants et polyvalents pour une gamme étendue d'applications.

Applications spécialisées : Concentrez-vous sur des domaines d'application spécifiques tels que l'aérospatiale, l'automobile, les dispositifs médicaux, etc., pour adapter les propriétés des MRF aux besoins particuliers de ces secteurs. Cela peut impliquer des adaptations spécifiques de microstructures ou des traitements de surface pour optimiser les performances.

Étude des coûts et de la faisabilité industrielle : Évaluez les aspects économiques de l'utilisation généralisée des MRF. Considérez le coût de production, la disponibilité des matériaux et la faisabilité industrielle à grande échelle pour garantir que ces innovations technologiques puissent être mises en œuvre dans des conditions économiquement viables.

Intégration de technologies émergentes : Explorez comment les MRF peuvent être combinés avec des technologies émergentes telles que l'impression 3D ou la nanotechnologie. L'intégration de ces technologies peut ouvrir de nouvelles opportunités et élargir davantage le spectre d'applications des MRF.

Ces perspectives futures peuvent contribuer à approfondir les connaissances sur les MRF et à accélérer leur adoption dans divers domaines de l'ingénierie, ouvrant ainsi la voie à des applications plus innovantes et performantes.

Annexe

Voici un exemple de programme en MATLAB qui résout un problème de flexion d'une poutre soumise à une force au milieu, libre aux extrémités et appuyée sur des supports. en utilisant à la fois la méthode des éléments finis (FEM) et la méthode des éléments de frontière (BEM). Les résultats seront affichés dans un même graphe avec la différence entre les deux méthodes.

```
% Données de la poutre
```

```
L = 2.0; % Longueur de la poutre (en mètres)
```

```
F = 1000; % Force au point milieu (en Newton)
```

```
% Nombre d'éléments
```

```
Num_elements = 20;
```

```
% Calcul des déplacements en utilisant les éléments finis
```

```
X_elements = linspace (0, L, num_elements+1);
```

```
Element_length = L / num_elements;
```

```
Deplacements_ef = zeros (1, num_elements+1);
```

```
% Calcul des déplacements en utilisant les éléments finis
```

```
For i = 1:num_elements+1
```

```
    xi = x_elements(i);
```

```
    Deplacements_ef(i) = -(F * xi * (L - xi)) / (6 * sqrt(2) * L);
```

```
End
```

```
% Calcul des déplacements en utilisant la méthode des éléments de frontière  
(BEM)
```

```
deplacements_bem = zeros(1, num_elements+1);
```

```
For i = 1:num_elements+1
```

```
    xi = x_elements(i);
```

```

% Calcul des déplacements en utilisant BEM
Déplacements_bem(i) = -(2 * F * xi * (L - xi)) / (pi * sqrt(2) * L);
End
% Affichage des résultats
Figure;
plot(x_elements, déplacements_ef, '-o', 'MarkerSize', 6, 'LineWidth', 2,
'DisplayName', 'Éléments finis');
hold on;
plot(x_elements, déplacements_bem, '-x', 'MarkerSize', 6, 'LineWidth', 2,
'DisplayName', 'BEM');
xlabel('Position sur la poutre (m)');
ylabel('Déplacement (m)');
title('Déplacement le long de la poutre avec une force au point milieu et des
appuis aux extrémités');
legend;
grid on;

```

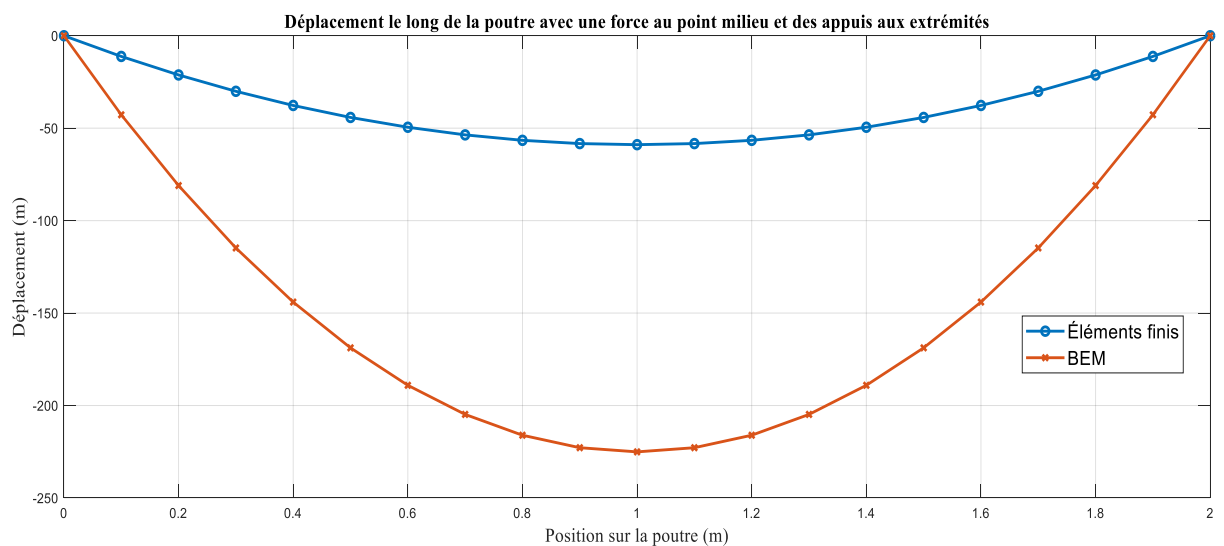


Figure ANX.1. Déplacement le long de la poutre avec une force au point milieu et des appuis aux extrémités

Bibliographie

Bibliographie

[1] zvi hashin (1974) theory of fiber reinforced materials. prepared by university of Pennsylvania philadelphia, pa. 19104. NASA CR-1974

Hashin, Z. (1972). *Theory of fiber reinforced materials* (No. NASA-CR-1974). NASA.

[2] Dodkins, A.R. (1993). In *Composite Materials in Maritime Structures*, eds. R. A. Shenoi and J. F. Wellicome, Cambridge, Ocean Technology Series, Cambridge Un Shenoi, R. A., & Wellicome, J. F. (Eds.). (1993). *Composite Materials in Maritime Structures: Volume 2, Practical Considerations* (Vol. 2). Cambridge University Press. iversity Press, Cambridge, UK, Vol. II, pp. 3–25.

[3] Dodkins, A. R., Shenoi, R. A., & Hawkins, G. L. (1994). Design of joints and attachments in FRP ships' structures. *Marine structures*, 7(2-5), 365-398.

[4] Hirano T, Teraki J, Yamada T. On the design of functionally gradient materials. In: *Proceedings of the first international symposium on functionally gradient materials*, Sendai, Japan; 1990. p. 5–10.

[5] Liu GR, Tani J. Surface waves in functionally gradient piezoelectric plates. *J Vib Acoust* 1994;116(4):440–8.

[6] Zhuang X, Augarde C, Mathisen K. Fracture modelling using meshless methods and level sets in 3D: framework and modelling. *Int J Numer Methods Engng* 2012;92:969–98.

[7] Desplat JL. Recent developments on oxygenated thermionic energy converter-overview. In: *Proceedings of the fourth international symposium on functionally graded materials*, Tsukuba City, Japan; 1996.

[8] Xing A, Jun Z, Chuanzhen H, Jianhua Z. Development of an advanced ceramic tool material – functionally gradient cutting ceramics. *Mater Sci Engng A* 1998;248(1–2):125–31.

[9] Watari F, Yokoyama A, Omori M, Hirai T, Kondo H, Uo M, et al. Biocompatibility of materials and development to functionally graded implant for biomedical application. *Compos Sci Technol* 2004;64(6):893–908.

[10] Malinina M, Sammi T, Gasik M. Corrosion resistance of homogeneous and FGM coatings. *Mater Sci Forum* 2005;492–493:305–10.

- [11] Sampath S, Herman H, Shimoda N, Saito T. Thermal spray processing of FGMs. *MRS Bull* 1995;20:27–31.
- [12] Gu P, Asaro RJ. Cracks in functionally graded materials. *Int J Solids Struct* 1997;34(1):1–17.
- [13] Marur PR, Tippur HV. Dynamic response of bimaterial and graded interface cracks under impact loading. *Int J Fract Mech* 2000;103(1):95–109.
- [14] Kawasaki A, Watanabe R. Thermal fracture behavior of metal/ceramic functionally graded materials. *Engng Fract Mech* 2002;69(14–16):1713–28.
- [15] Shukla A, Jain N. Dynamic damage growth in particle reinforced graded materials. *Int J Impact Engng* 2004;30(7):777–803.
- [16] Yao XF, Xu W, Arakawa K, Takahashi K, Mada T. Dynamic optical visualization on the interaction between propagating crack and stationary crack. *Opt Lasers Engng* 2005;43(2):195–207.
- [17] Zhangyu Z, Paulino GH. Cohesive zone modeling of dynamic failure in homogeneous and functionally graded materials. *Int J Plast* 2005;21(6):1195–254.
- [18] El-Hadek AM, Tippur HV. Dynamic fracture behavior of syntactic epoxy foams: optical measurements using coherent gradient sensing. *Opt Lasers Engng* 2003;40(4):353–69.
- [19] Delale F, Erdogan F. The crack problem for a nonhomogeneous plane. *J Appl Mech* 1983;50(3):609–14. *Struct* 2012;49(13):1637–55.
- [20] Zhang L, Kim JH. Higher-order terms for the mode-III stationary crack-tip fields in a functionally graded material. *J Appl Mech* 2011;78(1):1–10.
- [21] Atkinson C, List RD. Steady state crack propagation into media with spatially varying elastic properties. *Int J Engng Sci* 1978;16(10):717–30.
- [22] Kirugulige MS, Tippur HV. Mixed-mode dynamic crack growth in functionally graded glass-filled epoxy. *Exp Mech* 2006;46(2):269–81.
- [23] Dag S. Thermal fracture analysis of orthotropic functionally graded materials using an equivalent domain integral approach. *Engng Fract Mech* 2006;73(18):2802–28.
- [24] Guo L, Guo F, Yu H, Zhang L. An interaction energy integral method for nonhomogeneous materials with interfaces under thermal loading. *Int J Solids*

Struct 2012;49(2):355–65.

[25] Dag S, Arman EE, Yildirim B. Computation of thermal fracture parameters for orthotropic functionally graded materials using Jk-integral. *Int J Solids Struct* 2010;47(25–26):3480–8.

[26] Kim JH, KC A. A generalized interaction integral method for the evaluation of the T-stress in orthotropic functionally graded materials under thermal loading. *J Appl Mech* 2008;75(5):051112.

[27] Petrova V, Schmauder V. Thermal fracture of a functionally graded/homogeneous bimaterial with system of cracks. *Theor Appl Fract Mech* 2011;55(2):148–57.

[28] Rabczuk T, Zi G, Gerstenberger A, Wall WA. A new crack tip element for the phantom-node method with arbitrary cohesive cracks. *Int J Numer Methods Engng* 2008;75(5):577–99.

[29] Chau-Dinh T, Zi G, Lee PS, Rabczuk T, Song JH. Phantom-node method for shell models with arbitrary cracks. *Comput Struct* 2012;92–93:242–56.

[30] Bouhala L, Makradi L, Belouettar S. Thermal and thermo-mechanical influence on crack propagation using an extended mesh free method. *Engng Fract Mech* 2012;88:35–48.

[31] Ghorashi SS, Mohammadi S, Sabbagh-Yazdi SR. Orthotropic enriched element free Galerkin method for fracture analysis of composites. *Engng Fract Mech* 2011;78(9):1906–27.

[32] Ghorashi SS, Valizadeh N, Mohammadi S. Extended isogeometric analysis for simulation of stationary and propagating cracks. *Int J Numer Methods Engng* 2012;89(9):1069–101.

[33] Belytschko T, Black T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *Int J Numer Methods Engng* 1999;45(5):601–20.

[34] Motamedi D, Mohammadi S. Fracture analysis of composites by time independent moving-crack orthotropic XFEM. *Int J Mech Sci* 2012;54(1):20–37.

[35] Sukumar N, Chopp DL, Moës N, Belytschko T. Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method. *Comput Methods Appl Mech Engng* 2001;190(46–47):6183–200.

- [36] Sukumar N, Moës N, Belytschko T, Moran B. Extended finite element method for three-dimensional crack modeling. *Int J Numer Methods Engng* 2000;48(11):1549–70.
- [37] Stolarska M, Chopp DL, Moës N, Belytschko T. Modeling crack growth by level sets in the extended finite element method. *Int J Numer Methods Engng* 2001;51(8):943–60.
- [38] Bayesteh H, Mohammadi S. XFEM fracture analysis of shells: the effect of crack tip enrichments. *Comput Mater Sci* 2011;50(10):2793–813.
- [39] Mohammadi S. XFEM fracture analysis of composites. Wiley; 2012.
- [40] Dolbow J, Gosz M. On the computation of mix-mode stress intensity factors in functionally graded materials. *Int J Solids Struct* 2002;39(9):2557–74.
- [41] Bayesteh H, Mohammadi S. XFEM fracture analysis of orthotropic functionally graded materials. *Composites: Part B* 2013;44(1):8–25.
- [42] Asadpoure A, Mohammadi S. Developing new enrichment functions for crack simulation in orthotropic media by the extended finite element method. *Int J Numer Methods Engng* 2007;69(10):2150–72.
- [43] Asadpoure A, Mohammadi S, Vafai A. Modeling crack in orthotropic media using a coupled finite element and partition of unity methods. *Finite Elem Anal Des* 2006;42(13):1165–75.
- [44] Asadpoure A, Mohammadi S, Vafai A. Crack analysis in orthotropic media using the extended finite element method. *Thin-Walled Struct* 2006;44(9):1031–8.
- [45] Zamani A, Gracie R, Eslami MR. Higher order tip enrichment of extended finite element method in thermoelasticity. *Comput Mech* 2010;46(6):851–66.
- [46] Hosseini SS, Bayesteh H, Mohammadi S. Thermomechanical XFEM crack propagation analysis of functionally graded materials. *Mater Sci Engng A* 2013;561:285–302.
- [47]. Jaswon, M. (1963). Integral equation method in potential theory, I, *Proceedings of the Royal Society of London, Series A*, 275, 23-32, 1963.
- [48]. Rizzo, F. J. (1967). “An Integral Equation Approach to Boundary Value Problems of Classical Elastostatics.” *Quarterly of Applied Mathematics* 25: 83-95.

- [49]. Cruse, T. A. ; Rizzo, F. J. (1968). "A Direct Formulation and Numerical Solution of the General Transient Elastodynamic Problem I." *Journal of Math. Analysis and Applications*: 22: 244.
- [78]. Cruse, T. A. (1968). "A Direct Formulation and Numerical Solution of the General Transient Elastodynamic Problem II." *Journal of Math. Analysis and Applications*, 22: 341.
- [50]. Ciskowski, R. D. ; Brebbia, C. A. (1991). *Boundary Element Methods in Acoustics*. New York, Elsevier Applied Science.
- [51]. Wrobel, L. C. ; Brebbia, C. A. (1992). *Boundary Element Methods in HeatTransfer*. New York, Elsevier Applied Scienc
- [52]. Ingham, D. B. and Wrobel, L. C. (1997). *Boundary Integral Formulations for Inverse Analysis*. Bouston, Computational Mechanics Publication.
- [53] CRUSE, T. A. (1987). Recent advances in boundary element analysis methods. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 62, no 3, p. 227-244.
- [54] Sooriyaarachchi, H., Pilakoutas, K., & Byars, E. (2005). Tension stiffening behavior of GFRP-reinforced concrete. *Special Publication*, 230, 975-990.
- [55] Bentz, E. C. (2005). Explaining the riddle of tension stiffening models for shear panel experiments. *Journal of structural engineering*, 131(9), 1422-1425.
- [56] Vecchio, F. J., and Collins, M. P. (1986). "The modified compression field theory for reinforced concrete elements subjected to shear." *ACI J.*, 83(2), 219–231.
- [57] Collins, M. P.(1998). "Procedures for calculating the shear response of reinforced concrete elements: A discussion." *J. Struct. Eng.*, 124(12), 1485–1488.
- [58] Belarbi, A., and Hsu, T. T. C. (1994). "Concrete in tension and concrete stiffened reinforcing bars." *ACI Struct. J.*, 91(4), 465–474.
- [59] Hsu, T. T. C., and Zhu, R. H. (2002). "Softened membrane model for reinforced concrete elements in shear." *ACI Struct. J.*, 99(4), 460–469.

- [60] Knuewer M, Schumacher J, Ribes H, Eberl F and Bes B. 2198 Advanced Aluminium Lithium alloy for A350 skin sheet application. The 17th Advanced Aerospace Materials & Processes Conference and Exposition (AeroMat 2006), 15-18 May 2006, Seattle, USA.
- [61] Lequeu P, Dif R, Warner T, Dumont D and Wood P. New Solutions for Lightweight Upper Wing Skins of Large Airframes. The 16th Advanced Aerospace Materials & Processes Conference and Exposition (AeroMat 2005), 6-9 June 2005, Orlando, USA.
- [62] Murphy A, Quinn D, Mawhinney P, Ozakca M, and van der Veen S. Tailoring static strength performance of metallic stiffened panels by selective local sub-stiffening. 47th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, 1-4 May 2006, Newport, Rhode Island, AIAA-2006-1944.
- [63] Farley GL, Newman JA and James MA. Selective Reinforcement To Improve Fracture Toughness And Fatigue Crack Growth Resistance In Metallic Structures. 45th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics & Materials Conference, 19 - 22 April 2004, Palm Springs, California, AIAA 2004-1924.
- [64] Boscolo M, Allegri G and Zhang X. Design and Modeling of Selective Reinforcements for Integral Aircraft Structures. AIAA Journal, Vol. 46, No. 9, September 2008.
- [65] Quinn, D., Murphy, A., McEwan, W., & Lemaitre, F. (2009). Stiffened panel stability behaviour and performance gains with plate prismatic sub-stiffening. *Thin-Walled Structures*, 47(12), 1457-1468. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2009.07.004>
- [66] Ahmadian H, Liang B, Soghrati S. An integrated computational framework for simulating the failure response of carbon fiber reinforced polymer composites. *Comput Mech* 2017;60(6):1033–55. doi: 10.1007/s00466-017-1457-5 .

- [67] Oliveira HL, Leonel ED. Dual BEM formulation applied to analysis of multiple crack propagation. *Key Eng Mater* 2013;560:99–106. doi: 10.4028/www.scientific.net/KEM.560.99.
- [68] Boumaiza D, Aour B. On the efficiency of the iterative coupling FEM–BEM for solving the elasto-plastic problems. *Eng Struct* 2014;72:12–25. doi: 10.1016/j.engstruct.2014.03.036 .
- [69] Citarella R, CricriG. A two-parameter model for crack growth simulation by combined FEM-DBEM approach. *Adv Eng Softw* 2009;40:363–77. doi: 10.1016/j.advengsoft.2008.05.001 .
- [70] Neto, A. R., & Leonel, E. D. (2019). The mechanical modelling of nonhomogeneous reinforced structural systems by a coupled BEM formulation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 109, 1-18.
- [71] F. Brezzi and C. Johnson. On the coupling of boundary integral and finite element methods. *Calcolo*, 16(2):189–201, 1979.
- [72] O. C. Zienkiewicz, D. W. Kelly, and P. Bettess. The coupling of the finite element method and boundary solution procedures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 11(2):355–375, 1977.
- [73] A. Bendali, Y. Boubendir, and M. B. Fares. A FETI-like domain decomposition method for coupling finite elements and boundary elements in large-size problems of acoustic scattering. *Computers & Structures*, 85(9):526–535, 2007.
- [74] Y. Boubendir, A. Bendali, and M. B. Fares. Coupling of a non-overlapping domain decomposition method for a nodal finite element method with a boundary element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 73(11):1624–1650, 2008.
- [75] Belytschko T, Lu YY, Gu L. Element-free Galerkin methods. *Int J Numer Meth Engng* 1994;37:229–56.

- [76] Brebbia CA. The boundary element method for engineers. London/New York: Pentech Press/Halstead Press; 1978.
- [77] Brebbia CA. Introduction to boundary element methods. In: Brebbia CA, editor. Recent advances in boundary element methods, Proceedings of first international conference on boundary element methods. Pentech: University of Southampton; 1978. p. 1–42.
- [78] Lachat JC, Watson JO. Effective numerical treatment of boundary integral equations: a formulation for three-dimensional elastostatics. *Int J Numer Meth Eng* 1976;10:991–1005.
- [79] Cruse TA, Rizzo FJ. Boundary-integral equation method: computational applications in applied mechanics. Applied mechanics conference, ASME, Rensselaer Polytechnic Institute, June 23–25,. AMD-vol. 11 1975.
- [80] Gauss CF. *Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorumhomogeneorum methodo novo tractata*. *Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores* 1813;II:2–5.
- [81] Katz VJ. The history of Stokes theorem. *Math Mag* 1979;52:146–56.
- [82] Lagrange J. *Miscellanea Taurinasia* 1760;2:273.
- [83] Chertock G. Sound radiation from vibrating surfaces. *J Acoust Soc Am* 1964;36:1305–13.
- [84] Copley LG. Integral equation method for radiation from vibratingbodies. *J Acoust Soc Am* 1967;41:807–16.
- [85] Copley LG. Fundamental results concerning integral representation in acoustic radiation. *J Acoust Soc Am* 1968;44:28–32.
- [86] Schenck HA. Improved integral formulation for acoustic radiation problems. *J Acoust Soc Am* 1968;44:41–58.
- [87] Waterman PC. Matrix formulation of electromagnetic scattering.

Proc IEEE 1965;53:805–12.

[88] Waterman PC. New formulation of acoustic scattering. J Acoust Soc Am 1969;45:1417–29.

[89] Hess JL. Calculations of potential flow about bodies of revolution having axes perpendicular to the free stream direction. J Aero Sci 1962;29:726–42.

[90] Hess JL, Smith AMO. Calculations of nonlifting potential flow about arbitrary three-dimensional bodies. J Ship Res 1964;8:22–44.

[91] Lotz I. Calculation of potential flow past airship body in a yaw. NACA TM 675 1932.

[92] Vandrey F. On the calculation of the transverse potential flow past a body of revolution with the aid of the method of Mrs Flügge-Lotz. Astia AD40 089 1951.

[93] Vandrey F. A method for calculating the pressure distribution of a body of revolution moving in a circular path through a perfect incompressible fluid. Aero Res Council R&M No. 3139 1960.

[94] Hess JL. Review of integral-equation techniques for solving potential-flow problems with emphasis on the surface source method. Comp Meth Appl Mech Eng 1975;5:145–96.

[95] Massonet CE. In: Zienkiewicz OC, Hollister GS, editors. Numerical use of integral procedures. Stress analysis. New York: Wiley; 1965. p. 198–235. Chapter 10.

[96] Gegelia T, Jentsch L. Potential methods in continuum mechanics. Georgian Math J 1994;1(6):599–640.

[97] Niko Muskhelishvili, Curriculum Vitae,
<http://www.rmi.acnet.ge/person/muskhel/>; 2003.

[98] A survey of Muskhelishvili's scientific heritage,
<http://kr.cs.ait.ac.th/wradok/mus/mus10.htm>; 2003.

- [99] Vekua IN. New methods for solving elliptic equations. Amsterdam: North-Holland; 1967.
- [100] Vekua NP. Systems of singular integral equations and some boundary value problems.: Noordhoof; 1967.
- [101] Kupradze VD. Potential methods in the theory of elasticity. In: Sneddon IN, Hills R, editors. Israeli program for scientific translation, 1965 [earlier edition: Kupradze VD, Dynamical problems in elasticity, vol. III in Progress in solid mechanics, eds. Sneddon IN, Hills R. North-Holland; 1963].
- [102] Kupradze VD, Gegelia TG, Basheleishvili MO, Burchuladze TV. Three-dimensional problems of the mathematical theory of elasticity and thermoelasticity.: North-Holland; 1979 [Russian edition 1976].
- [103] Mikhlin SG. Integral equations and their applications to certain problems in mechanics, mathematical physics and technology. 2nd rev ed. New York: Pergamon Press; 1964 [first Russian edition 1949].
- [104] Gegelia T, Jentsch L. Potential methods in continuum mechanics. Georgian Math J 1994;1(6):599–640.
- [105] Kupradze VD, Aleksidze MA. The method of functional equations for the approximate solution of some boundary value problems. Zh vichisl mat i mat fiz 1964;4:683–715 [in Russian].
- [106] Gavelya SP. Periodical problems for shallow shells of arbitrary curvature with apertures. Rep Ukrain Acad Sci 1969;8:703–8.
- [107] Vainberg DV, Sinyavskii AL. Application of the potential method for numerical analysis of deformation in cylindrical shells. Rep Ukrain Acad Sci 1960;7:907–12.
- [108] Kulakov VM, Tolkachev VM. Bending of plates of an arbitrary shape. Rep Russ Acad Sci 1976;230.

- [109] Veriuzhskii YV. Numerical potential methods in some problems of applied mechanics.: Kiev State University Publishers; 1978.
- [110] Bogomolny A. Fundamental solutions method for elliptic boundary value problems. SIAM J Numer Anal 1985;22:644–69.
- [111] Buckner HF. Die praktische Behandlung von Integralgleichungen. Berlin: Springer; 1952.
- [112] Mikhlin SG, Smolitsky JL. Approximation methods for the solution of differential and integral equations. Amsterdam: Elsevier; 1967.
- [113] Kagiwada H, Kalaba RE. Integral equations via imbedding methods. New York: Addison-Wesley; 1974.
- [114] Atkinson KE. A survey of numerical methods for the solution of Fredholm integral equations of the second kind. SIAM 1976.
- [115] Ivanov VV. The theory of approximate methods and their application to the numerical solution of singular integral equations.: Noordhoff; 1976 [Russian edition 1968].
- [116] Baker CTH. The numerical treatment of integral equations. Oxford: Oxford University Press; 1977.
- [117] Delves LM, Mohamed JL. Computational methods for integral equations. Cambridge: Cambridge University Press; 1985.
- [118] Golberg MA. A survey of numerical methods for integral equations. In: Golberg MA, editor. Solution methods for integral equations. New York: Plenum Press; 1978. p. 1–58. Chapter 1.
- [119] Rizzo FJ. Some integral equation methods for plane problems of classical elastostatics. Doctoral dissertation. University of Illinois, Urbana-Champaign; 1964, p. 34.

- [120] Rizzo FJ. Springs, formulas and flatland: a path to boundary integral methods in elasticity. *Electron J Bound Elem* 2003;1:1–7
[<http://tabula.rutgers.edu/EJBE/>].
- [121] Rizzo FJ. In honor of T.A. Cruse. In: Brebbia CA, Cheng AH-D, editors. Tom Cruse Commemorative Issue. *Eng Anal Bound Anal*, 24, 2000. p. 703–5.
- [122] Cruse TA. The transient problem in classical elastodynamics solved by integral equations. Doctoral dissertation. University of Washington; 1967, pp.117
- [123] Rizzo FJ, Shippy DJ. Formulation and solution procedure for the general non-homogeneous elastic inclusion problem. *Int J Solids Struct* 1968;4:1161–79.
- [124] Rizzo FJ, Shippy DJ. A method for stress determination in plane anisotropic bodies. *J Compos Mater* 1970;4:36–61.
- [125] Rizzo FJ, Shippy DJ. A method of solution for certain problems of transient heat conduction. *AIAA J* 1970;8:2004–9.
- [126] Rizzo FJ, Shippy DJ. An application of the correspondence principle of linear viscoelasticity theory. *SIAM J Appl Math* 1971;21:321–30.
- [127] Brebbia, C. A.; Dominguez, J. Boundary element methods for potential problems. *Applied Mathematical Modelling*, v. 1, n. 7, p. 372-378, 1977.
- [128] Banerjee, P.K.; Butterfield, R. Boundary element method in geomechanics. In: GUDEHUS G. (editor). *Finite elements in geomechanics*. New York: Wiley; 1977.
- [129] Butterfield. R. and Banerjee, P. in ‘Numerical methods in soil and rock mechanics’. (Ed. G. Gudckus), Wiley. Chichester, 1977.
- [130] Watson, JO: *The Analysis of Thick Shells with Holes, by Integral Representation of Displacement*, PhD thesis, University of Southampton (1972).
- [131] Brebbia, C. A. Weighted residual classification of approximate methods. *Applied Mathematical Modelling*, v. 2, n. 3, p. 160–164, 1978a.

- [132] Brebbia, C. A. The Boundary Element Method for Engineers. London: Pentech 127 Press, 1978b.
- [133] Fredholm, I., Sur une classe d'equations fonctionnelles, *Acta Mathematica*, 27, 365-390, 1903.
- [134] Mikhlin, S.G., *Integral Equations*, Pergamon Press, London, 1957.
- [135] Betti, E. (1872). Teoria della elasticita'. *Il Nuovo Cimento* (1869-1876), 7(1), 69-97.
- [136] Somigliana, C., Sopra l'equilibrio di un corpo elastico isotrope, *Il Nuovo Cimento*, serie III, 20, 181-185, 1886.
- [137] Hess, J.L. and Smith, A.M.O., Calculation of potential flows about arbitrary bodies, *Progress in Aeronautical Sciences*, 8, Pergamon Press, London, 1967.
- [138] Massonnet, C.E., Numerical use of integral procedures, In *Stress Analysis*, Chapter 10, 198-235, Wiley, London, 1965.
- [139] Cruse, T.A., Numerical solutions in three-dimensional elastostatics, *International Journal of Solids and Structures*, 5, 1259-1274, 1969
- [140] Kitahara, M., *Boundary Integral Equation Methods to Eigenvalue Problems of Elastodynamics and Thin Plates*, Elsevier, 1985.
- [141] Araujo, F.C. and Martines, J.C., A study of efficient multi-zone BE/BE coupling algorithms based on iterative solvers- applications to 3D time-harmonic problems, *Advances in Boundary Element Techniques*, Hoggar, Geneva, 21-30, 2001.
- [142] Rigby, R and Aliabadi, M.H., Out of core solver for large multi-zone boundary element matrices, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38, 1507-1533 (1995).

- [143] Bucher, H.F. and Wrobel, L.C., A novel approach to applying fast wavelet transformations in the boundary element method, *Advances in Boundary Element Techniques*, Hoggar, Geneva, 3-12, 2001.
- [144] Cruse, T.A., Swedlow, J.L., 1971. Interactive program for analysis and design problems in advanced composites technology. Report AFML-TR-71-268, Carnegie-Mellon University.
- [145] Snyder, M.D., Cruse, T.A., 1975. Boundary-integral equation analysis of cracked anisotropic plates. *International Journal of Fracture* 11 (2), 315–328.
- [146] Wilson, R.B., Cruse, T.A., 1978. Efficient implementation of anisotropic three dimensional boundary integral equation analysis. *International Journal of Numerical Method in Engineering* 12 (9), 1383–1397.
- [147] Stamos, A. A.; Beskos, D. E. Dynamic analysis of large 3-D underground structures by the bem. **Earthquake Engineering & Structural Dynamics**, v. 24, n. 6, p. 917–934, 1995.
- [148] Young, A., Rooke, D.P., Cartwright, D.J., 1992. Analysis of patched and stiffened cracked panels using the boundary element method. *International Journal of Solids and Structures* 29 (17), 2201–2216.
- [149] Wang, C.Y., Achenbach, J.D., Hirose, S., 1996. Two-dimensional time domain BEM for scattering of elastic waves in solids of general anisotropy. *International Journal of Solids and Structures* 22 (26), 3843–3864.
- [150] Lingyun, P., Daniel, O.A., Frank, J.R., 1998. Boundary element analysis for composite materials and a library of Green's functions. *Computers and Structures* 66 (5), 685–693.
- [151] Widagdo, D., Aliabadi, M.H., 2001. Boundary element analysis of cracked panels repaired by mechanically fastened composite patches. *Engineering Analysis with Boundary Elements* 25 (339), 45.

- [152] Zhang YM, Gu Y, Chen JT. Internal stress analysis for single and multilayered coating systems using the boundary element method[J]. Eng Anal Boundary Elem 2011;35(4):708–17.
- [153] Zhong YD, Xie GZ, Hou JJ, et al. A boundary weak singularity elimination method for multilayer structures[J]. Eng Anal Boundary Elem 2021;130(2):69–78.
- [154] Zhou HL, Niu ZR, Cheng CZ, et al. Analytical integral algorithm applied to boundary layer effect and thin body effect in BEM for anisotropic potential problems[J]. Comput Struct 2008;86:1656–71.
- [155] Cheng CZ, Pan D, Han ZL, et al. A state space boundary element method with analytical formulas for nearly singular integrals[J]. Acta Mech Solida Sin 2018;31 (4):433–44.
- [156] Gao XW, Zhang JB, Zheng BJ, et al. Element-subdivision method for evaluation of singular integrals over narrow strip boundary elements of thin-walled and slender structures[J]. Eng Anal Boundary Elem 2016;66:145–54.
- [157] Zhang JM, Wang P, Lu CJ, et al. A spherical element subdivision method for the numerical evaluation of nearly singular integrals in 3D BEM[J]. Eng Comput 2017; 34(6):2074–87.
- [158] Zhang YM, Li XC, Sladek V, et al. A new method for numerical evaluation of nearly singular integrals over high-order geometry elements in 3D BEM[J]. J Comput Appl Math 2015;277(1):57–72.
- [259] Scuderi L. On the computation of nearly singular integrals in 3D BEM collocation [J]. Int J Numer Methods Eng 2008;74(11):1733–70.
- [160] Gu Y, Dong HQ, Gao HW, et al. An extended exponential transformation for evaluating nearly singular integrals in general anisotropic boundary element method[J]. Eng Anal Boundary Elem 2016;65:39–46.

- [161] Johnston PR. Application of sigmoidal transformations to weakly singular and near-singular boundary element integrals[J]. *Int J Numer Methods Eng* 1999;45 (10):1333–48.
- [162] Johnstona BM, Johnstona PR, Elliottb D. A new method for the numerical evaluation of nearly singular integrals on triangular elements in the 3D boundary element method[J]. *J Comput Appl Math* 2013;245:148–61.
- [163] Ma H, Kamiya N. A general algorithm for the numerical evaluation of nearly singular boundary integrals of various orders for two- and three-dimensional elasticity[J]. *Comput Mech* 2002;29(4–5):277–88.
- [164] Tan F, Lv JH, Jiao YY, et al. Efficient evaluation of weakly singular integrals with Duffy-distance transformation in 3D BEM[J]. *Eng Anal Boundary Elem* 2019;104: 63–70.
- [165] Telles JCF. A self-adaptive co-ordinate transformation for efficient numerical evaluation of general boundary element integrals[J]. *Int J Numer Methods Eng* 1987;24(5):959–73.
- [166] Sladek V, Sladek J. Optimal coordinate transformations in numerical integrations of weakly singular and nearly singular integrals in BEMs[J]. *WIT Trans Model Simul* 1998;20:233–42.
- [167] Sladek V, Sladek J, Tanaka M. Optimal transformations of the integration variables in computation of singular integrals in BEM[J]. *Int J Numer Methods Eng* 2015;47 (7):1263–83.
- [168] Johnston BM, Johnston PR, Elliott D. A sinh transformation for evaluating two-dimensional nearly singular boundary element integrals[J]. *Int J Numer Methods Eng* 2007;69(7):1460–79.
- [169] Xie GZ, Zhang DH, Zhang JM, et al. Implementation of sinh method in integration space for boundary integrals with near singularity in potential problems[J]. *Front Mech Eng* 2016;11(4):412–22.

- [170] Guiggiani M, Gigante N. A general algorithm for multi-dimensional Cauchy principal value integrals in the boundary element method. *ASME J Appl Mech* 1990;57:906–15.
- [171] Xie GZ, Zhong YD, Zhou FL, et al. Singularity cancellation method for time-domain boundary element formulation of elastodynamics: a direct approach[J]. *Appl Math Modell* 2020;80:647–67.
- [172] Sladek V, Sladek J, Tanaka M. Regularization of hypersingular and nearly singular integrals in the potential theory and elasticity. *Int J Numer Methods Eng* 1993;36 (10):1609–28.
- [173] Zhong, Y., Hou, J., Feng, S., Xie, G., Wang, X., He, W., ... & Hao, H. (2022). BEM analysis of multilayer thin structures using a composite transformation method for boundary integrals. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 134, 650-664.
- [174] Liu GR, Tani J, Ohyoshi T, Watanabe K. Characteristic wave surfaces in anisotropic laminated plates. *J Vib Acoust Trans ASME* 1991;113(3):279–85.
- [175] Liu GR, Lam KY. Scattering of SH waves by flaws in sandwich plates and its use in flaw detection. *Compos Struct* 1996;34(3):251–61.
- [176] Wang CY, Achenbach JD. Elastodynamic fundamental solutions for anisotropic solids. *Geophys J Int* 1994;118(2):384–92.
- [177] Wang CY, Denda M. 3D BEM for general anisotropic elasticity. *Int J Solids Struct* 2007;44(22–23):7073–91.
- [178] S´aez A, Dom´ınguez J. BEM analysis of wave scattering in transversely isotropic solids. *Int J Numer Methods Eng* 1999;44(9):1283–300.
- [179] Yang, C., Wang, B., Qian, Z., & Hirose, S. (2023). Modified BEM for scattering analysis by a flaw at interface in an anisotropic multi-layered plate. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 152, 704-727.

- [180] Schovanec L, Walton JR. On the order of the stress singularity for an antiplane shear crack at the interface of two bonded inhomogeneous elastic materials. *J Appl Mech* 1988;55(1):234–6.
- [181] Erdogan F. The crack problem for bonded nonhomogeneous materials under antiplane shear loading. *J Appl Mech* 1985;52:823-828.
- [182] Chan YS, Paulino GH, Fannjiang AC. The crack problem for nonhomogeneous materials under antiplane shear loading - A displacement based formulation. *Int J Solids Struct* 2001;38:2989-3005.
- [183] Chen J, Wu L, Du S. Element free Galerkin methods for fracture of functionally graded materials. *Key Eng Mater* 2000;183-187:487-492.
- [184] Rao BN, Rahman S. Mesh-free analysis of cracks in isotropic functionally graded materials. *Engng Fract Mech* 2003;70(1):1–27.
- [185] Yue ZQ, Xiao HT, Tham LG. Boundary element analysis of crack problems in functionally graded materials. *Int J Solids Struct* 2003;40:3273-3291.
- [186] Zhang Ch, Sladek J, Sladek V. Antiplane crack analysis of a functionally graded material by a BIEM. *Comp Mater Sci* 2005;32:611-619.
- [187] Zhang Ch, Sladek J, Sladek V. Transient dynamic analysis of cracked functionally graded materials. In: Aliabadi MH et al., editors. *Advances in Fracture and Damage Mechanics IV*. Copyright EC, Ltd., United Kingdom, 2005, pp. 301-308.
- [188] Sladek J, Sladek V, Zhang Ch. The MLPG method for crack analysis in anisotropic functionally graded materials. *Struct Integr & Dur* 2005;1:131-143.
- [189] Sladek J, Sladek V, Zhang Ch, Tan CL. Evaluation of fracture parameters for crack problems in FGM by a meshless method. *J Theoret Appl Mech* 2006;44:603-636.
- [190] Chan YS, Gray LJ, Kaplan T, Paulino GH. Green's function for a two-dimensional exponentially-graded elastic medium. *Proc Royal Soc London A* 2004;460:1689-1706.

- [191] X. W. Gao, Ch. Zhang, J. Sladek, V. Sladek. Fracture Analysis of Functionally Graded Materials by a BEM. *Composites Science and Technology*, 2009, 68(5), pp.1209. 10.1016/j.compscitech.2007.08.029.hal-00563488.
- [192] Frangi, A., & Novati, G. I. O. R. G. I. O. (2003). BEM–FEM coupling for 3D fracture mechanics applications. *Computational Mechanics*, 32, 415-422.
- [193] Pan, E. (1999). A BEM analysis of fracture mechanics in 2D anisotropic piezoelectric solids. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 23(1), 67-76.
- [194] Gonzalez, M. et al. A new displacement-based approach to calculate stress intensity factors with the boundary element method. *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 12, n. 9, p. 1677–1697, 2015.
- [195] Oliveira, Héllen L., DA Rosa, Wellington LO, Cuevas-Suárez, Carlos E., *et al.* Histological evaluation of bone repair with hydroxyapatite: a systematic review. *Calcified tissue international*, 2017, vol. 101, p. 341-354.
- [196] Lee, C. Y.; wang, H.; QIN, Q. H. Dual reciprocity boundary element method using 129 compactly supported radial basis functions for 3D linear elasticity with body forces. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, v. 12, n. 4, p. 463–476, 2016.
- [197] Andrade, H. C., & Leonel, E. D. (2020). An enriched dual boundary element method formulation for linear elastic crack propagation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 121, 158-179.
- [198] Zienkiewicz OC, Kelly DM, Bettles P. Marriage a la mode—the best of both worlds (Finite elements and boundary integrals). In *Energy Methods in Finite Element Analysis*, Chapter 5, Glowinski R, Rodin EY, Zienkiewicz OC (eds). Wiley: London, 1979; 81–106.
- [199] G. Beer, ‘Finite element, boundary element and coupled analysis of unbounded problems in elastostatics’, *Int. j. numer. methods ena*, 19, 567-580 (1983).

- [200] M. Margulies, ‘Combination of the boundary element and finite element methods’, in C. Brebbia (ed.), *Progress in Boundary Element Methods*, Vol. 1, Pentech Press, London, 1981, pp. 258-288.
- [201] T. A. Cruse and J. R. Osias, ‘Issues in merging the finite element and boundary integral equation methods, *Math. Comput. Modelling*, 15, 103-118 (1991).
- [202] F. Brezzi, C. Johnson, on the coupling of boundary integral and finite element methods. *Calcolo* 16 (1979), 189–201.
- [203] C. Johnson and J.-C. Nédélec. On the coupling of boundary integral and finite element methods. *Mathematics of Computation*, 35(152):1063–1079, 1980.
- [204] Cruse, T. A. (1968). *The direct potential method in three dimensional elastostatics* (No. NASA-CR-66673).
- [205] H-B. Li, G-M. Han, H.A. Mang, Y.P. Torzchy A new method for the coupling of finite element and boundary element discretized subdomains of elastic bodies *Comput. Methods Appl. Mech.*, 54 (1986), pp. 161-185
- [206] E. Schnack, K. Turke. Domain decomposition with BEM and FEM. *Int. J. Numer. Methods Engng.*, 40 (1997), pp. 2593-2610
- [207] G. Beer, J.O. Watson, Infinite boundary elements, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 28 (1989) 1233–1247.
- [208] W.J. Mansur, C.A. Brebbia, Formulation of the boundary element method for transient problems governed by the scalar wave equation, *Appl. Math. Model.* 6 (1982) 307–311.
- [209] M. Schanz, *Wave Propagation in Viscoelastic and Poroelastic Continua: A Boundary Element Approach*, Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [210] C.A. Brebbia, J.C.F. Telles, L.C. Wrobel, *Boundary Elements Techniques*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1984.

- [211] C. Duenser, G. Beer, Simulation of sequential excavation with the Boundary Element Method, *Comput. Geotechn.* 44 (2012) 157–166.
- [212] M. Panji, B. Ansari, Transient SH-wave scattering by the lined tunnels embedded in an elastic half-plane, *Eng. Anal. Bound. Elem.* 84 (2017) 220–230.
- [213] S. Chaillat, M. Bonnet, J.F. Semblat, A new fast multi-domain BEM to model seismic wave propagation and amplification in 3-D geological structures, *Geophys. J. Int.* 177 (2009) 509–531.
- [214] C. Brebbia, P. Georgiou, Combination of boundary and finite elements in elastostatics, *Appl. Math. Model.* 3 (1979) 212–220.
- [215] O. von Estorff, M.J. Prabucki, Dynamic response in the time domain by coupled boundary and finite elements, *Comput. Mech.* 6 (1990) 35–46.
- [216] G. Yu, W. Mansur, J. Carrer, S. Lie, A more stable scheme for BEM/FEM coupling applied to two-dimensional elastodynamics, *Comput. Struct.* 79 (2001) 811–823.
- [217] D. Soares, W.J. Mansur, O.V. Estorff, An efficient time-domain FEM/BEM coupling approach based on FEM implicit Green's functions and truncation of BEM time convolution process, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 196 (2007) 1816–1826.
- [218] D. Soares, W.J. Mansur, An efficient stabilized boundary element formulation for 2D time-domain acoustics and elastodynamics, *Comput. Mech.* 40 (2007) 355–365.
- [219] D. Soares, W.J. Mansur, An efficient time-truncated boundary element formulation applied to the solution of the two-dimensional scalar wave equation, *Eng. Anal. Bound. Elem.* 33 (2009) 43–53.
- [220] C. Lubich, Convolution quadrature and discretized operational calculus. I, *Numer. Math.* 52 (1988) 129–145.

- [221] W. Moser, H. Antes, G. Beer, Soil-structure interaction and wave propagation problems in 2D by a Duhamel integral based approach and the convolution quadrature method, *Comput. Mech.* 36 (2005) 431–443.
- [222] T. Ruberg, M. Schanz, Coupling finite and boundary element methods for static and dynamic elastic problems with non-conforming interfaces, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 198 (2008) 449–458.
- [223] S. Francois, P. Coulier, G. Degrande, Finite element–boundary element coupling algorithms for transient elastodynamics, *Eng. Anal. Bound. Elem.* 55 (2015) 104–121.
- [224] T. Burczynski, A. Mrozek, W. Ku's, A computational continuum-discrete model of materials, *Bull. Pol. Acad. Sci. Techn. Sci.* 55 (2007) 85–89.
- [225] M. Mirzayee, N. Khaji, M. Ahmadi, A hybrid distinct element–boundary element approach for seismic analysis of cracked concrete gravity dam–reservoir systems, *Soil Dyn. Earthq. Eng.* 31 (2011) 1347–1356.
- [226] L.J. Lorig, B.H.G. Brady, P.A. Cundall, Hybrid distinct element-boundary element analysis of jointed rock, *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.* 23 (1986) 303–312.
- [227] A.-B. Huang, M.Y. Ma, J.S. Lee, A micromechanical study of penetration tests in granular material, *Mech. Mater.* 16 (1993) 133–139.
- [228] L. Malinowski, G.F. Karlis, G. Beer, J. Rojek, Iterative coupling of boundary and discrete element methods using an overlapping FEM zone, in: *Coupled IV: Proceedings of the IV International Conference on Computational Methods for Coupled Problems in Science and Engineering*, CIMNE, 2011, pp. 301–312.
- [229] G. Barros, A. Pereira, J. Rojek, K. Thoeni, DEM-BEM coupling in time domain for one-dimensional wave propagation, *Eng. Anal. Bound. Elem.* 135 (2022) 26–37.

- [230] BEM coupling with the FEM fictitious domain approach for the solution of the exterior Poisson problem and of wave scattering by rotating rigid bodies / Falletta, Silvia. - In: IMA Journal of Numerical Analysis. - ISSN 1464-3642. - Stampa. - 38:2(2018), pp. 779-809.
- [231] Barros, G., Sapucaia, V., Hartmann, P., Pereira, A., Rojek, J., & Thoeni, K. (2023). A novel BEM-DEM coupling in the time domain for simulating dynamic problems in continuous and discontinuous media. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 410, 116040.
- [232] Bird, G. E.; Trevelyan, J.; Augarde, C. E. A coupled BEM/scaled boundary FEM formulation for accurate computations in linear elastic fracture mechanics. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 34, n. 6, p. 599–610, 2010.
- [233] Song, C.; Wolf, J. The scaled boundary finite element method—alias consistent infinitesimal finite element cell method—for diffusion. *International journal for numerical methods ...*, v. 45, n. 10, p. 1403–1431, 1999.
- [234] Chen, D.; Dai, S. Dynamic fracture analysis of the soil-structure interaction system using the scaled boundary finite element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 77, n. August 2016, p. 26–35, 2017.
- [235] Rahnema, H.; Mohasseb, S.; Javidsharifi, B. 2-D soil-structure interaction in time domain by the SBFEM and two non-linear soil models. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, v. 88, p. 152–175, 2016.
- [236] Rizos, D. C.; Wang, Z. Coupled BEM-FEM solutions for direct time domain soil-structure interaction analysis. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 26, n. 10, p. 877–888, 2002.
- [237] Romero, A.; Galvín, P.; Domínguez, J. 3D non-linear time domain FEM-BEM approach to soil-structure interaction problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 37, n. 3, p. 501–512, 2013.

- [238] Santana, A. et al. A BEM–FEM model for the dynamic analysis of building structures founded on viscoelastic or poroelastic soils. *Bulletin of Earthquake Engineering*, v. 14, n. 1, p. 115–138, 2016.
- [239] Silva, W. Q.; Coda, H. B. Numerical combination for nonlinear analysis of structures cou-. *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 1, p. 1–23, 2012.
- [240] Vasilev, G. et al. Soil-structure interaction using BEM-FEM coupling through ANSYS software package. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, v. 70, p. 104–117, 2015.
- [241] Schepers, W. Fast 3D FEM-BEM coupling for dynamic soil-structure interaction. *Procedia Engineering*, v. 199, p. 391–396, 2017.
- [242] Coda H.B., Venturini W.S. and Aliabadi M.H.: A simple coupling of 2D BEM and FEM bar model applied to mass matrix elastodynamic analysis. *Boundary Elements XIX* (Marchetti M., Brebbia C.A., Aliabadi M.H. eds), CMP, Southampton, UK, Boston, USA 1997, p. 137-146.
- [243] Salgado N.K.: *Boundary element method for damage tolerance design of aircraft structures*. Topics in Engineering, Computational Mechanics Publications, SouthamptonBoston, Vol. 33, 1998.
- [244] Salgado N.K. and Aliabadi M.H.: The application of the dual boundary element method to the analysis of cracked stiffened panels. *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 54, No. 1, 1996, p. 91-105.
- [245] Górski R. and Fedeliński P.: Optimization of stiffened plates by the coupled BEM/FEM and the evolutionary algorithm. In *Proceedings of the 6th World Congress on Computational Mechanics in conjunction with the 2nd Asian-Pacific Congress on Computational Mechanics*, Beijing, China, Abstract, Vol. II. Tsinghua University Press, Springer-Verlag (Yao Z.H., Yuan M.W., Zhong W.X. eds), 2004, p. 448 (CD-ROM Proceedings - 7 pages).

- [246] Górski R. and Fedeliński P.: Evolutionary optimal reinforcement of a weakened plate. *Methods of Artificial Intelligence* (Burczyński T., Cholewa W., Moczulski W. eds), Gliwice 2005, p. 55-56 (CD-ROM Proceedings – 4 pages).
- [247] Górski R. and Fedeliński P.: Optimal reinforcement of dynamically loaded plates. 16th International Conference on Computer Methods in Mechanics CMM-2005, CD-ROM Proceedings, Częstochowa 2005, 4 pages.
- [248] Górski R. and Fedeliński P.: Evolutionary shape optimization of reinforced plates. *Methods of Artificial Intelligence* (Burczyński T., Cholewa W., Moczulski W. eds), Gliwice 2004, p. 69-70.
- [249] Górski R. and Fedeliński P.: Evolutionary shape optimization of plates with reinforcements. In the *Proceedings of the Third MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics*, Cambridge, USA, Elsevier Ltd. UK (ed Bathe K.J.), 2005, p. 239242.
- [250] Górski R.: Dynamic analysis and optimization of composite materials by the boundary element method. PhD Thesis, Supervisor: Prof. P. Fedeliński, Gliwice 2005.
- [251] GÓRSKI, RADOSŁAW. Optimization of composite structures by the coupled boundary and finite element method. *Engineering modelling*, 2006, vol. 32, p. 171-178
- [252] Michalewicz Z.: Genetic algorithms + data structures = evolution programs. SpringerVerlag, Berlin 1996.
- [253] A. Mejdí and N. Atalla, “Dynamic and acoustic response of bidirectionally stiffened panels with eccentric stiffeners subject to airborne and structure borne excitations,” *J. Sound. Vib.* 329(21), 4422–4439 (2010).
- [254] B. Liu, L. Feng, and A. Nilsson, “Sound transmission through curved aircraft panels with stringer and ring frame attachments,” *J. Sound. Vib.*

300(3–5), 949–973 (2008).

[255] B. R. Mace, “Periodically stiffened fluid-loaded panels, I: Response to convected harmonic pressure and free wave propagation, J. Sound. Vib. 73(4), 473–486 (1980).

[256] J. Legault and N. Atalla, “Numerical and experimental investigation of the effect of structural links on the sound transmission of a lightweight double panel structure,” J. Sound. Vib. 324(3–5), 712–732 (2009).

[257] Patuelli, C., Cestino, E., & Frulla, G. (2023). A Beam Finite Element for Static and Dynamic Analysis of Composite and Stiffened Structures with Bending-Torsion Coupling. *Aerospace*, 10(2), 142.

[258] Cestino, E.; Frulla, G. Analysis of slender thin-walled anisotropic box-beams including local stiffness and coupling effects. *Aircr. Eng. Aerosp. Technol. Int. J.* 2014, 86, 345–355

[259] Patuelli, C.; Polla, A.; Cestino, E.; Frulla, G. Experimental and Numerical Dynamic Behavior of Bending-Torsion Coupled Box-Beam. *J. Vib. Eng. Technol.* 2022.

[260] Jonkman, J.; Butterfield, S.; Musial, W.; Scott, G. *Definition of a 5 MW Reference Wind Turbine for Offshore System Development*; National Renewable Energy Laboratory (NREL): Golden, CO, USA, 2009. [[CrossRef](#)]

[261] Armanios, E.; Badir, A. Free vibration analysis of anisotropic thin-walled closed-section beams. *Aiaa J.* 1995, 33, 1905–1910

[262] Chandra, R.; Chopra, I. Experimental-theoretical investigation of the vibration characteristics of rotating composite box beams. *J. Aircr.* 1992, 29, 657–664.

- [263] Mesquita, A. D.; Coda, H. B. A boundary element methodology for viscoelastic analysis: Part II without cells. *Applied Mathematical Modelling*, v. 31, n. 6, p. 1171–1185, 2007.
- [264] Botta, A. S.; Venturini, W. S. Reinforced 2d domain analysis using BEM and regularized BEM/FEM combination. *CMES - Computer Modeling in Engineering and Sciences*, v. 8, n. 1, p. 15–28, 2005.
- [265] Leonel, E. D., & Venturini, W. S. (2011). Multiple random crack propagation using a boundary element formulation. *Engineering Fracture Mechanics*, 78(6), 1077-1090.
- [266] Rocha, F. C. DA et al. Sliding frame-solid interaction using BEM/FEM coupling. *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 11, n. 8, p. 1376–1400, 2014.
- [267] Mendonça, A. V.; Paiva, J. B. An elastostatic FEM/BEM analysis of vertically loaded raft and piled raft foundation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 27, n. 9, p. 919–933, 2003.
- [268] Ribeiro, D. B.; DE Paiva, J. B. A new BE formulation coupled to the FEM for simulating vertical pile groups. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 41, p. 1–9, abr. 2014.
- [269] Jonkman JM. Modeling of the UAE Wind Turbine for refinement of Fast AD. NREL/TP-500-34755, December 2003.
- [270] J.G. Schepers, A.J. Brand, A. Bruining, J.M.R. Graham, M.M. Hand, D.G. Infield et al. “Final report of IEA Annex XIV : Field Rotor Aerodynamics” –ECN (Energy research Centre of the Netherlands) Report - ECN-C-97-027 - May 1997.
- [271] A. Selamet, P. M. Radavich, N. S. Dickey, and J. M. Novak, “Circularconcentric Helmholtz resonators,” *J. Acoust. Soc. Am.* 101, 41–51. 1997.

- [272] Selamet, A., & Ji, Z. L. (2000). Circular asymmetric Helmholtz resonators. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 107(5), 2360-2369.
- [273] Neto, A. R., & Leonel, E. D. (2019). The mechanical modelling of nonhomogeneous reinforced structural systems by a coupled BEM formulation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 109, 1-18.
- [274] Z. Li, S. Su and C. Liu, Acoustic Attenuation Performance Analysis of Three-pass Perforated Tube Muffler with End-resonator, *SAE 2008 International*, 2008
- [275] N. S. Dickey, A. Selamet and J. M. Novak, Multimass perforated tube silencers: a computational approach, *Journal of Sound and Vibration*, 1998.
- [276] M. L. Munjal, Analysis of extended-tube three-pass perforated element muffler by means of transfer matrices, *Fifth International Congress on Sound and Vibration*, 1997.
- [277] Z. L. Ji and A. Selamet, Boundary elements analysis of three-pass perforated duct mufflers, *Noise Control Engineering Journal*, 2000.
- [278] F. Bozza, M. Costa, D. Siano, 3D Analysis for the Prediction of the Noise Attenuation of a Spark Ignition Engine Filter Box, *ECOS 2006*.
- [279] Neto, A. R., & Leonel, E. D. (2019). The mechanical modelling of nonhomogeneous reinforced structural systems by a coupled BEM formulation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 109, 1-18.
- [280] Richard F, Poilane C, Yang H, Gehring F, Renner E. A viscoelastoplastic stiff- ening model for plant fibre unidirectional reinforced composite behaviour under monotonic and cyclic tensile loading. *Compos Sci Technol* 2018;167:396–403. doi: 10.1016/j.compscitech.2018.08.020 .
- [281] Zhang D, Smith DE. Dynamic simulation of discrete fiber motion in fiber-reinforced composite materials processing. *J Compos Mater* 2016;50(10):1301–19. doi: 10.1177/0021998315590266 .

- [282] Leonel ED, Venturini WS. Non-linear boundary element formulation applied to contact analysis using tangent operator. *Eng Anal Bound Elem* 2011;35:1237–47. doi: 10.1016/j.enganabound.2011.06.005 .
- [283] Citarella R, Giannella V, Lepore MA, Fellingner J. FEM-DBEM approach to analyse crack scenarios in a baffle cooling pipe undergoing heat flux from the plasma. *AIMS Mater Sci* 2017;4(2):391–412. doi: 10.3934/matersci.2017.2.391 .
- [284] Rocha FC, Venturini WS, Coda HB. Sliding frame-solid interaction using BEM/FEM coupling. *Lat-Am J Solids Struct* 2014; 11(8): 1376–400. doi: 10.1590/S1679-78252014000800006 .
- [285] Giannella V, Perrella M, Citarella R. Efficient fem-DBEM coupled approach for crack propagation simulations. *Theor Appl Fract Mech* 2017;91. doi: 10.1016/j.tafmec.2017.04.003 .
- [286] Soares D, Godinho L. Heat conduction analysis by adaptive iterative BEM-FEM coupling procedures. *Eng Anal Bound Elem* 2016;73:79–94. doi: 10.1016/j.enganabound.2016.09.003 .
- [287] Citarella R, Giannella V, Vivo E, Mazzeo M. FEM-DBEM approach for crack propagation in a low pressure aeroengine turbine vane segment. *Theor Appl Fract Mech* 2016;86(Part B):143–52. doi: 10.1016/j.tafmec.2016.05.004 .
- [288] Aurada M, Feischl M, Fuhrer T, Karkulik M, Melenk JM, Praetorius D. Classical FEM-BEM coupling: nonlinearities, well-posedness, and adaptivity. *Comput Mech* 2013;51:399–419. doi: 10.1007/s00466-012-0779-6 .
- [289] Ribeiro DB, Paiva JB. An alternative be-fe formulation for a raft resting on a finite soil layer. *Eng Anal Bound Elem* 2015; 50: 352–9. doi: 10.1016/j.enganabound.2014.09.016 .
- [290] Fernandes GR, Pituba JJ, Souza Neto EA. FEM/BEM formulation for multi-scale analysis of stretched plates. *Eng Anal Bound Elem* 2015; 54: 47–59. doi: 10.1016/j.enganabound.2015.01.005 .

- [291] Troyani N, Perez A. A comparison of a finite element only scheme and a BEM/FEM method to compute the elastic–viscoelastic response in composite media. *Finite Elem Anal Des* 2014;88:42–54. doi: 10.1016/j.finel.2014.05.003 .
- [292] Liberati EA, Nogueira CG, Leonel ED, Chateaufneuf A. Nonlinear formulation based on FEM, Mazars damage criterion and Fick’s law applied to failure assessment of reinforced concrete structures subjected to chloride ingress and reinforcements corrosion. *Eng Fail Anal* 2014;v. 46:247–68. doi: 10.1016/j.engfailanal.2014.09.006.
- [293] Citarella R, Cricri G. Three-dimensional bem and fem submodelling in a cracked FML full scale aeronautic panel. *Appl Compos Mater* 2014;21:557–77. doi: 10.1007/s10443-014-9384-5 .
- [294] De Freitas, J. A. T.; De Almeida, J. P. M.; Pereira, E. M. B. R. Non-conventional formulations for the finite element method. *Structural Engineering and Mechanics*, v. 4, n. 6, p. 655–678, 1996.
- [295] AliAbadi, M. H., & Shahmorad, S. (2002). A matrix formulation of the Tau method for Fredholm and Volterra linear integro-differential equations. *Korean Journal of Computational & Applied Mathematics*, 9, 497-507.
- [296] Oliveira, H. L.; Leonel, E. D. Cohesive crack growth modelling based on an alternative nonlinear BEM formulation. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 111, p. 86–97, out. 2013.
- [297] Sahli, A., Labbaci, B., Boutchicha, D., Djermane, M., & Rahmani, O. (2006). Efficient Evaluation of Integrals of Order $1/R$ and $\ln(1/R)$ in Boundary Element Method. *International Journal of Applied Engineering Research*, 1(2), 165-170.
- [298] Cruse, T. A., & Swedlow, J. L. (1971). *Interactive program for analysis and design problems in advanced composites technology*. carnegie-mellon univ pittsburgh pa dept of mechanical engineering.

- [299] Cordeiro, S. G. F., & Leonel, E. D. (2016). Cohesive crack propagation modelling in wood structures using BEM and the Tangent Operator Technique. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 64, 111-121.
- [300] Leonel, E.D., Chateaufneuf, A., Venturini, W.S., & Bressollette, P. (2010). Modèle couplé de fiabilité et d'éléments aux limites pour l'évaluation probabiliste de la durée de vie en fatigue dans la propagation de fissures en mode mixte. *Journal international de la fatigue*, 32(11), 1823-1834.
- [301] Cruz, J. M. F., & Mendonça, A. V. (2014). Torsional analysis of thin-walled beams of open sections by the direct boundary element method. *Computers & Structures*, 136, 90-97.
- [302] Proença, S. P. B., & Torres, I. F. R. (2008). Generalized finite element method for nonlinear three-dimensional analysis of solids. *International Journal of Computational Methods*, 5(01), 37-62.
- [303]- Z. Hashin, S. Shtrikman, A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. *JMech Phys Solids* 11 (2) 1963 pp.127–140. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(63\)90060-7](https://doi.org/10.1016/0022-5096(63)90060-7).
- [304]- B. Budiansky, On the elastic moduli of some heterogeneous materials. *J Mech Phys Solids* 13 (4) 1965 pp. 223–227 . [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(65\)90011-6](https://doi.org/10.1016/0022-5096(65)90011-6).
- [305]- A. V. Hershey, The elasticity of an isotropic aggregate of anisotropic cubic crystals. *Journal of Applied mechanics transactions of the ASME*, 1954, vol. 21, no 3, p. 236-240.
- [306] Sladek, J., SLADEK, V., KRIVACEK, J., *et al.* Local boundary integral equations for orthotropic shallow shells. *International Journal of Solids and Structures*, 2007, vol. 44, no 7-8, p. 2285-2303. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2006.07.010>