RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

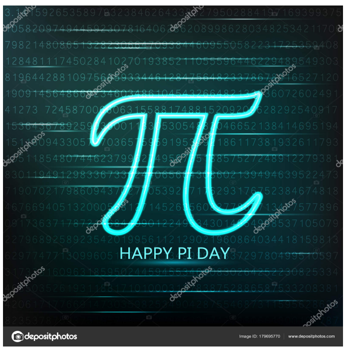
Université Ibn Khaldoun de Tiaret
Faculté des Sciences de la Nature et de la Vie

Socle commun 1ère année
Domaine : Sciences de la Nature et de la Vie

Polycopié d'analyse Mathématiques et statistiques

Présenté par :

Mr. BENMEHIDI Hammou, MCB



Année Universitaire : 2021/2022

CONTENTS

Avant Propos

Le présent polycopie est principalement destiné à un cours de premier cycle en l'analyse mathématiques et statistique.
Lobjectif de ce polycopie de cours est de rendre accessibles les fondements théoriques de l'analyse mathématiques et statistique aux étudiants du premier cycle des filières scientifiques, Biologie, Agronomie, Géologie, . . .
Il peut être utilisé aussi par les étudiants, les professeurs et toute personne ayant besoin des outils de base de l'analyse mathématiques et statistique. Enseigner ce cours plusieurs fois avec de nombreux exercices différents chaque année m'a permis de rassembler tous les exercices donnés dans ce polycopie.

Il est composé de quatre chapitres :

- ☐ Généralités sur les fonctions réelles
- ☐ Séries numériques
- ☐ Statistique descriptive
- ☐ Lois de probabilités

Avant de terminer, je souhaite la bienvenue et je serai heureux de recevoir toutes les suggestions, questions (ainsi que le signalement d'éventuelles erreurs et fautes de frappe) des lecteurs à mon adresse e-mail :

benmehidi-h@outlook.com.

Enfin, des remerciements particuliers sont dus aux messieurs DELLAL MOHAMED et à CHOHRI MOHAMED, ainsi qu'à tout le personnel de la faculté SNV de Tiaret.

CHAPTER 1

GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTION RÉELLES

1.1 Notation

L'ensemble des entier naturel, est notée $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ..., ...\}$
L'ensemble des entier relatifs, est noté $\mathbb{Z} = \{..., ..., 2, -1, 0, 1, 2, ..., ...\}$
L'ensembles des nombres réels, est noté $\mathbb{R}$.

1.2 Definitions

Définition 1.2.1 *On définit une fonction réelle f de la variable réelle x, quand à tout élément x d'un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$, on fait correspondre au plus un élément y de $\mathbb{R}$. Autrement dit :*

$$\forall x \in A \subseteq \mathbb{R}, \quad \exists y\,(unique) \in \mathbb{R} \text{ tel que } x \longmapsto y = f\,(x)$$

L'ensemble non vide $A \subseteq \mathbb{R}$ des réels x qui ont effectivement un correspondant unique y dans $\mathbb{R}$ est le domaine de définition de la fonction f, qui est dite définie sur A.

Remarque 1.2.1 *On note souvent, à l'ensemble de définition de fonctions $f, g, h, ...$ par $D_f, D_g, D_h, ...$ respectivement.*

Exemple 1.2.1 *1) La fonction réelle $f(x) = x^2 + x + 3$ est définie sur $\mathbb{R}$*

2) La fonction réelle $f(x) = \sqrt{14x - x^2}$ est définie sur l'intervalle $[0, 14]$.
En effet, la fonction f est définie si est seulement si

$$14x - x^2 \geq 0 \tag{1.1}$$

On résoudre l'inéquation 1.1 On a

$$14x - x^2 \geq 0 \Longleftrightarrow x\,(14 - x) \geq 0 \Longleftrightarrow x \in [0, 14]$$

3) La fonction $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ est définie sur l'intervalle $[-1, 1[$
(on doit avoir $(1-x)(1+x) \geq 0$ et $x \neq 1$)

1.3 Représentation graphique

Dans cette section, on muni le plan $\mathcal{P}$ d'un repère orthogonal $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

Définition 1.3.1 *Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$.*
*La **représentation graphique** de f est la courbe $(\mathcal{C}_f)$ formée des points $M\,(x, y)$ où $x \in \mathcal{D}$ et $y = f(x)$.*
*On dit aussi que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ **a pour équation** $y = f(x)$.*

1.4 Egalité de deux fonctions

Définition 1.4.1 *Soient f et g deux fonctions .*
On dit que les deux fonction f et g sont égales si et seulement si :

1) Elles ont même ensemble de définition: $D_f = D_g$.

2) Pour tout $x \in D_f$: $f\,(x) = g\,(x)$

Exemple 1.4.1 *Considérons les deux fonction f et g définies par:*

$$\begin{array}{ccc} f & : & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{(x-1)^2} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} g & : & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x-1| \end{array}$$

Les fonctions f et g Sont-elles égales ?
Solution: *Déterminons leur ensembles de définition : Les deux fonction f et g sont définies sur $\mathbb{R}$.*
$\forall x \in \mathbb{R}$, *on a* $f(x) = \sqrt{(x-1)^2} = |x-1| = g(x)$.
D'où f et g sont égales.

Exemple 1.4.2 *On considère deux fonctions f et g définies par:*

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x-2} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} g & : & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 + 1 \end{array}$$

Les fonctions f et g ne sont pas égales car elles n'ont pas le même ensemble de définition:

□ *La fonction f est définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$.*
□ *La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$.*
□ *Pour tout $x \in \mathbb{R} - \{2\}$, on a*

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x-2} = \frac{(x-2)(x^2+1)}{x-2} = x^2 + 1 = g(x).$$

On a donc pour tout $x \in \mathbb{R} - \{2\}$, $f(x) = g(x)$ mais $f \neq g$.

Définition 1.4.2 *Soit I un intervalle et soient f et g deux fonctions définies au moins sur I. On dit que :*

□ *f est inférieure à g sur I lorsque : $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in I$. On note:$f \leq g$ sur I.*

□ *f est positive sur I lorsque $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.*
□ *f est majorée sur I lorsquil existe un réel M tel que: $f(x) \leq M$ pour tout $x \in I$.*
□ *f est minorée sur I lorsquil existe un réel m tel que: $m \leq f(x)$ pour tout $x \in I$.*

☐ *f est bornée sur I lorsquil existe des réels M et m tels que :* $m \leq f(x) \leq M$ *pour tout* $x \in I$.

Exemple 1.4.3 *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par:*

$$f(x) = 4\cos x + 3$$

est bornée sur $\mathbb{R}$. En effet, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{gathered} -1 \leq \cos x \leq 1 \\ -4 \leq 4\cos x \leq 4 \\ -1 \leq 4\cos x + 3 \leq 7. \end{gathered}$$

C'est-à-dire

$$-1 \leq g(x) \leq 7.$$

Proposition 1.4.1 *Si f une fonction monotone sur un intervalle $I = [a, b]$ alors f est bornée.*

Démonstration 1 *Nous traitons le premier cas: supposons que la fonction f est croissante sur l'intervalle $I = [a, b]$. On a $x \in I$, alors $a \leq x \leq b$. Puisque f est croissante sur l'intervalle I, alors $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$. Si on prend $m = f(a)$ et $M = f(b)$, on obtient*

$$m \leq f(x) \leq M.$$

Pour le deuxième cas: on a $x \in I$, alors $a \leq x \leq b$. Puisque f est décroissante sur l'intervalle I, alors $f(b) \leq f(x) \leq f(a)$. Si on prend $M^{'} = f(a)$ et $m^{'} = f(b)$, on obtient

$$m^{'} \leq f(x) \leq M^{'}.$$

1.5 Parité dune fonction

1.5.1 fonction paire

Définition 1.5.1 *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que la fonction f est paire si et seulement si lon a :*
☐ *Son ensemble de définition D_f est symétrique par rapport à lorigine.*
☐ $\forall x \in D_f : f(-x) = f(x)$.

Exemple 1.5.1 *Les fonctions suivantes:*

$$f(x) = x^4, f(x) = cosx, f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 1$$

sont paire sur leur ensemble de définition.

Proposition 1.5.1 *La représentation graphique dune fonction paire est symétrique par rapport à laxe des ordonnées.*

1.5.2 fonction impaire

Définition 1.5.2 *Soit $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que la fonction g est paire si et seulement si lon a :*
☐ *Son ensemble de définition D_f est symétrique par rapport à lorigine.*
☐ $\forall x \in D_g : g(-x) = -g(x)$.

Exemple 1.5.2 *Les fonctions suivantes:*

$$f(x) = x^3, f(x) = sinx, f(x) = x^5 - 2x$$

sont impaires sur leur ensemble de définition.

Proposition 1.5.2 *La représentation graphique dune fonction impaire est symétrique par rapport à lorigine.*

Remarque 1.5.1 *Si $\forall x \in \mathcal{D}_f : f(-x) \neq f(x)$ et $f(-x) \neq -f(x)$, alors f n'a pas de parité définie.*

Remarque 1.5.2 *La propriété de parité d'une fonction f permettent de réduire l'intervalle de l'étude à l'intervalle $\mathcal{D}_f \cap]0; +\infty[$.*

1.6 Symétries

Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}_f$ de $\mathbb{R}$ et α, β deux réels.

- ☐ Le graphe de f admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x = \alpha$, si
$$\forall x \text{ tel que } (\alpha \pm x) \in \mathcal{D}_f : f(\alpha + x) = f(\alpha - x)$$

- ☐ Le graphe de f admet le point de coordonnées (α, β) centre de symétrie, si
$$\forall x \text{ tel que } (\alpha \pm x) \in ID_f : f(\alpha + x) + f(\alpha - x) = 2\beta$$

Exemple 1.6.1 ☐ *la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2 + (x-1)^3$. La courbe de f admet le point $\Omega(2, 1)$ comme centre de symétrie.*

☐ *la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2 + (x-3)^2$. La courbe de g admet la droite d'équation $x = 3$ axe de symétrie.*

1.7 Périodicité

Définition 1.7.1 *Une fonction f est dite périodique sur un ensemble $I \subseteq \mathcal{D}_f$, si et seulement s'il existe un reél non nul T tel que*

$$\forall x \in I \text{ tel que } (x+T) \in I : f(x+T) = f(x)$$

Remarque 1.7.1

- ☐ *S'il existe plusieures valeurs de T, la plus petite valeur positive, notée T_0 de celles-ci s'appelle la période de f.*

- ☐ *Toutes les périodes d'une fonction f sont de la formes $kT_0, k \in \mathbb{Z}$.*

Exemple 1.7.1

- ☐ $f(x) = \sin x$ est $2\pi-$périodique

- ☐ $h(x) = \tan x$ est $\pi-$périodique

Remarque 1.7.2 *Lorsqu'une fonction f est périodique, de période T, on peut restreindre son étude à un intervalle $[a, b]$ quelconque de longueur T appartenant à $\mathcal{D}_f$, le graphe complet se déduit du graphe sur $[a, b]$ par translations successives en x, d'un vecteur $\pm T\overrightarrow{i}$*

Remarque 1.7.3 *La somme de deux fonctions périodiques quelconques f et g n'est pas nécessairement une fonction périodique. Par exemple $f(x) = \sin x + \tan x$.*

1.8 Composée de deux fonction

Définition 1.8.1 *Etant donnée deux fonctions f et g, la composée $f \circ g$ (appelée aussi la composée de f et g) est définie par*

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Le domaine de définition de $f \circ g$ est l'ensemble de toutes les valeurs de x du domaine de définition de g qui sont telles que $g(x)$ appartient au domaine de définition de f.

Exemple 1.8.1 *Donner l'expression de $f \circ g$ et $g \circ f$, si $f(x) = x^2$ et $g(x) = x + 1$.*

Solution: Nous avons

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+1) = x^2 + 2x + 1.$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1.$

Remarque 1.8.1 *L'exemple précédent montre clairement que, en générale* $f \circ g \neq g \circ f$.

1.9 Limite d'une fonction

1.9.1 Limite d'une fonction en un point

Définition 1.9.1 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, x_0 un point de I ou extrimité de I, et $l \in \mathbb{R}$. On dit que f admet pour limite l en x_0 quand x tend vers x_0 lorsque :$f(x)$* ***devient aussi proche de** l **que l'on veut lorsque** x **est suffisamment proche de*** *x_0. On écrit alors*

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = l.$$

Cette définition peut encore s'écrire, en choisissant des intervalles ouverts centrées en l et de rayon $\epsilon > 0$, aussi petit qu'on veut ; c'est-à-dire :

$$\forall \epsilon >, 0 \ \exists \delta > 0, \ \forall x \in I, 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - l| < \epsilon$$

Exemple 1.9.1 *Dans cet exemple, nous utilisons la définition précise pour montrer que:*

$$\lim_{x \longrightarrow 2} (x^2 + 3x) = 10.$$

Soit $\epsilon > 0$ choisi. En doit trouver un $\delta > 0$ tel que, chaque fois que $|x - 2| \leq \delta \Longrightarrow |(x^2 + 3x) - 10| \leq \epsilon$. Tout dabord, nous notons que

$$|(x^2 + 3x) - 10| = \left|(x-2)^2 - 7(x-2)\right| \leq \left|(x-2)^2\right| + 7|x-2|.$$

De plus, si $0 < \delta \leq 1$, alors $\delta^2 \leq \delta$. Par conséquent, si nous prenons δ pour être le minimum de 1 et $\frac{\epsilon}{8}$, alors, chaque fois que $|x - 2| \leq \delta$,

$$|(x^2 + 3x) - 10| \leq \delta^2 + 7\delta \leq \delta + 7\delta = 8\delta \leq \epsilon.$$

Proposition 1.9.1 *Soit f une fonction. Si f admet une limite au point x_0, alors cette limite est unique.*

Démonstration 2 *Exercice de TD.*

1.9.2 Limite à droite et limite à gauche

Soit f une fonction

Définition 1.9.2 *On dit que f admet une limite à droite en x_0 (ou encore, quand x tend vers x_0 par valeurs supérieures) et on note $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0^+} f(x) = l$ si et seulement si*

$$\forall \epsilon >, 0 \ \exists \delta > 0, \ \forall x \in I, x_0 < x < x_0 + \delta \implies |f(x) - l| < \epsilon$$

On dit que f admet une limite à gauche en x_0 (ou encore,quand x tend vers x_0 par valeurs inférieures) et on note $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0^-} f(x) = l$ si et seulement si,

$$\forall \epsilon >, 0 \ \exists \delta > 0, \ \forall x \in I, x_0 - \delta < x < x_0 \implies |f(x) - l| < \epsilon$$

Proposition 1.9.2 *Si les limites unilatères existent et sont égales à une meme valeur l alors $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = l$.*

Exemple 1.9.2 *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par*

$$f(x) = \frac{x^2 - |x|}{2x}$$

Montrer que $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x)$ n'existe pas.
Solution: *On a*

$$\begin{aligned}
\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{x^2 - |x|}{2x} \\
&= \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{x^2 - x}{2x} \\
&= \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{x(x-1)}{2x} \\
&= -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{x^2 - |x|}{2x} \\
&= \lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{x^2 + x}{2x} \\
&= \lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{x(x+1)}{2x} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Les limites à droite et à gauche de f étant différentes, il résulte que $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x)$ *n'existe pas.*

Exemple 1.9.3 *Soit f la fonction définie par:*

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-4} & si \quad x > 4 \\ 8 - 2x & si \quad x < 4 \end{cases}$$

Calculer $\lim\limits_{x \longrightarrow 4} f(x)$.
Solution: *Pour $x > 4$, on a*

$$\lim_{x \longrightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 4^+} \sqrt{x-4} = 0.$$

Pour $x < 4$, on a

$$\lim_{x \longrightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 4^+} (8 - 2x) = 0.$$

Les limites à droite et à gauche de la fonction f au point 4 *sont égales. Ainsi la limite existe et* $\lim\limits_{x \longrightarrow 4} f(x) = 0$.

1.9.3 Limite infinie d'une fonction en un point

Définition 1.9.3 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, x_0 un point de I ou extrimité de I.*

On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) quand x tend vers x_0 lorsque

$$\begin{aligned} \lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) &= +\infty \iff \forall A > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, 0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) > A \\ \lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) &= -\infty \iff \forall A > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, 0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) < -A \quad \text{(resp.)} \end{aligned}$$

Asymptote verticale :

Définition 1.9.4 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, x_0 un point de I ou extrimité de I.*

Si $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty$ (resp.) $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0^\pm} f(x) = \pm\infty$ $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty$, on dit que la droite d'équation $x = x_0$ est une asymptote verticale à la courbe de f.

Exemple 1.9.4 *Limite de f la fonction inverse en* 0.

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \ et \ \lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Donc, la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à la courbe.de f.

1.9.4 Limite finie d'une fonction à l'infini

Définition 1.9.5 *Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]x_0, +\infty[$ et $l \in \mathbb{R}$.*

On dit que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers $+\infty$ lorsque

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R} \iff \forall \epsilon > 0, \exists B > 0 \text{ te lque } x > B \implies |f(x) - l| < \epsilon$$

D'une manière analogue, nous pouvons écrire une définition de la limite d'une fonction, égale à l , lorsque x tend vers $-\infty$:

Définition 1.9.6

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = l \in \mathbb{R} \iff \forall \epsilon > 0, \exists B > 0 \textit{ tel que } x < -B \implies |f(x) - l| < \epsilon$$

Asymptote horizontale :

Définition 1.9.7 *Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]x_0, +\infty[$ (resp. $]-\infty; x_0[$).*

Si f admet une limite finie $l \in \mathbb{R}$, lorsque x tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), on dit que la droite d'équation $y = l$ est une asymptote horizontale à la courbe de f vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Exemple 1.9.5 *Soit f la fonction définie par $f(x) = 2 + \frac{1}{x-1}$. On a*

$$\lim_{x \longrightarrow 1} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1} \left(2 + \frac{1}{x-1}\right) = 2,$$

alors la droite d'équation $y = 2$ est une asymptote horizontale à la courbe de f.

1.9.5 Limite infinie d'une fonction à l'infini

Définition 1.9.8 *On a les définitions suivantes*

$$\begin{aligned}
\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) &= +\infty \iff \forall A > 0, \exists B > 0 \textit{ tel que } x > B \implies f(x) > A, \\
\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) &= +\infty \iff \forall A > 0, \exists B > 0 \textit{ tel que } x < -B \implies f(x) > A, \\
\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) &= -\infty \iff \forall A > 0, \exists B > 0 \textit{ tel que } x < -B \implies f(x) < -A, \\
\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) &= -\infty \iff \forall A > 0, \exists B > 0 \textit{ tel que } x < -B \implies f(x) < -A
\end{aligned}$$

Exemple 1.9.6

1) $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\left(2x^3+2x+1\right)=+\infty,$ 2) $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}\left(x^5+4\right)=-\infty,$ 3) $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\sqrt{x-1}=+\infty.$

Dans la définition (1.9.8), il est judicieux d'affiner l'information en précisent le type de branche infinie, la méthode est la suivante :

$$\text{Calculer } \lim_{x\longrightarrow\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\alpha$$

$\triangleright$ Si α est nul, on a une branche parabolique de direction Ox
$\triangleright$ Si α est infini, on a une branche parabolique de direction Oy.
$\triangleright$ Si α est un nombre fini non nul :

$$\text{Calculer } \lim_{x\longrightarrow\pm\infty}(f(x)-\alpha x)=\beta$$

$\triangleright$ β est un nombre fini, le graphe de f admet pour asymptote la droite d'équation $y=\alpha x+\beta$
$\triangleright$ β est infini, le graphe de f admet pour direction asymptotique la droite d'équation $y=\alpha x$.
$\triangleright$ Le graphe de la fonction $f(x)=\ln x$ admet une branche parabolique de direction Ox
$\triangleright$ Le graphe de la fonction $f(x)=e^{-2x}$ admet une branche parabolique de direction Oy, quand $x\longrightarrow-\infty$.
$\triangleright$ Le graphe de la fonction $f(x)=x+1+\frac{2}{x}$ admet pour asymptote la droite d'équation $y=x+1$,quand $x\longrightarrow\pm\infty$.

1.9.6 Opérations sur les limites

Proposition 1.9.3 *Si* $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0}f(x)=l\in\mathbb{R}$ *et* $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0}g(x)=l^{'}\in\mathbb{R}$, *alors*

1) $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0}(\lambda f)(x)=\lambda\lim\limits_{x\longrightarrow x_0}f(x),\ \forall\lambda\in\mathbb{R}.$

2) $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0}[f(x)+g(x)]=\lim\limits_{x\longrightarrow x_0}f(x)+\lim\limits_{x\longrightarrow x_0}g(x).$

3) $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0}[f(x)\times g(x)]=\lim\limits_{x\longrightarrow x_0}f(x)\times\lim\limits_{x\longrightarrow x_0}g(x).$

Remarque 1.9.1

1) Si $l\in\mathbb{R}^*$, alors $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0}\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{l}.$

2) si $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

Remarque 1.9.2

1) Les propriétés présédente restent vraies quand

$$x \longrightarrow x_0^+,\ x \longrightarrow x_0^-,\ x \longrightarrow +\infty,\ x \longrightarrow -\infty.$$

2) Dans le cas ou $l, l' = \pm\infty$, dans la proposition (1.9.3), il ya des résultats qui ne sont pas parfaitement déterminées. Il faudra alors utiliser de différentes méthodes et techniques pour lever l'indétermination.

Les formes indéterminées: Voici une liste de forme indéterminée:

$$+\infty - \infty, 0 \times \infty, \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 1^{\infty}, \infty^{0}.$$

Exemple 1.9.7 *Calculer les limites suivantes:*

$$1) \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2+1}}{x}, \quad 2) \lim_{x \longrightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}.$$

Solution:

1) On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2+1}}{x} &= \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2+1})(\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2+1})}{x(\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2+1})} \\
&= \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x+1-x^2-1}{x(\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2+1})} \\
&= \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x(1-x)}{x(\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2+1})} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

2) On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x \longrightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2} &= \lim_{x \longrightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)} \\
&= \lim_{x \longrightarrow 2} \frac{x+2}{x-1} = 4.
\end{aligned}$$

1.9.7 Limite d'une fonction composée

Théorème 1.1 *Soit f et u deux fonctions de la variable réelle. a, b, et c désignent des nombres réels ou $+\infty$ ou $-\infty$. Alors*

$$\text{Si } \lim_{x\longrightarrow a} u(x) = b \text{ et } \lim_{x\longrightarrow b} f(x) = c, \text{ alors } \lim_{x\longrightarrow a} f(u(x)) = c.$$

Exemple 1.9.8 *Détermination de la limite de la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{3+\frac{1}{x}}$, quand $x \longrightarrow +\infty$. Cette fonction est la composée des deux fonctions :*

$$u : x \longmapsto 3 + \frac{1}{x} \text{ et } f : x \longmapsto \sqrt{x}, \text{ et } \lim_{x\longrightarrow +\infty} u(x) = 3.$$

Par conséquent $\lim_{x\longrightarrow +\infty} f(x) = \sqrt{3}$.

1.9.8 Limites et comparaison

Théorème 1.2 *Soit I un intervalle et a désigne soit un nombre réel $a \in I$, soit $+\infty$ ou $-\infty$. Soient f et g deux fonctions définies sur I telles que pour tout $x \in I$: $f(x) \leq g(x)$, alors*

$$\begin{array}{rcl} \text{Si } \lim_{x\longrightarrow a} g(x) & = & -\infty \Longrightarrow \lim_{x\longrightarrow a} f(x) = -\infty \\ \text{Si } \lim_{x\longrightarrow a} f(x) & = & +\infty \Longrightarrow \lim_{x\longrightarrow a} g(x) = +\infty. \end{array}$$

Théorème 1.3 *Soit I un intervalle et a désigne soit un nombre réel $a \in I$, soit $+\infty$ ou $-\infty$. Soient f, g et h trois fonctions définies sur I telles que pour tout $x \in I$:$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, alors*

$$\text{Si } \lim_{x\longrightarrow a} g(x) = h(x) = l \in \mathbb{R}, \text{ alors } \lim_{x\longrightarrow a} f(x) = l$$

Exemple 1.9.9 *Déterminons* $\lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} x$.

On sait que pour tout nombre réel x:

$$-1 \leq sinx \leq 1.$$

D'autre part, pour tout nombre réel $x > 0$:

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{sinx}{x} \leq \frac{1}{x}$$

Or les deux fonctions g et h définies par $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = -\frac{1}{x}$ admettent toutes les deux la même limite finie égale à 0 en $+\infty$, alors

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

1.10 Continuité d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$.

Définition 1.10.1 *On dit que la fonction f est continue au point x_0 si est seulement si $f(x_0)$ esxiste et*

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Définition 1.10.2 *On dit qu'une fonction f est continue à gauche du point x_0 si*

$$\lim_{x \longrightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

On dit qu'une fonction f est continue à droite du point x_0 si

$$\lim_{x \longrightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Exemple 1.10.1 *La fonction* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & si\ x \neq 0 \\ 1 & si\ x = 0 \end{cases}$ *est continue en* 1. *En effet,*

$$\lim_{x \longrightarrow 0} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = f(0).$$

Exemple 1.10.2 *Soit f une fonction définie par*

$$h(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & si\ x \leq 1, \\ 3x - 2, & si\ x > 1. \end{cases}$$

Pour vérifier la continuité de la fonction f en 1, *nous notons que*

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (x^2 - 2) = -1$$

et

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} h(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} (3x - 2) = 1$$

Puisque ces limites sont différentes, donc $\lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} h(x)$ *n'existe pas. Alors la fonction f nest pas continu au point* 1.

Remarque 1.10.1 *Dans le cas où la fonction f n'est pas continue en x_0, on dit que f est discontinue en x_0 ou f présente une discontinuité au point x_0. Implicitement, la remarque précédente requiert tris choses pour que la fonction f soit discontinue en x_0 :*

- *f n'est pas définie au point x_0.*
- *$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x)$ n'existe pas.*
- *$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$.*

Exemple 1.10.3 *Où les fonctions suivantes sont discontinues?*

1) $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 7}{x - 1}$.

2) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2} & si\ x \neq 2 \\ 9 & si\ x = 2 \end{cases}$

Solution:

1) On remarque que $f(1)$ n'est pas définie, ce qui entraine que la fonction f présente une discontinuité en 1.

2) Comme $f(2) = 9$, la fonction f est définie en 2, et

$$\lim_{x \longrightarrow 2} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim_{x \longrightarrow 2} \frac{(x-2)(x+3)}{x - 2} = 5.$$

existe. Mais

$$\lim_{x \longrightarrow 2} f(x) \neq f(2).$$

Alors la fonction f n'est pas continue en 2.

Proposition 1.10.1 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que la fonction f est continue sur l'intervalle I si et seulement si f est continue en tout point x_0 de I.*

La fonction partie entière :

E est la fonction « partie entière » définie sur $\mathbb{R}$ comme suit: pour tout $x \in \mathbb{R}: E(x) = n$, si et seulement si, n est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.

Autrement dit :

$$\forall x \in \mathbb{R}: \ n \leq E(x) < n+1$$

Exemple 1.10.4

$$E(4,56) = 4, \ E(\pi) = 3, \ E(-6,2) = -5, \ E\left(-\frac{1}{2}\right) = -1.$$

Nous étudions la continuité de la fonctions partie entière sur $\mathbb{R}$. Comme $E(x) = 4$ pour $4 \leq x < 5$, on a

$$\lim_{x \longrightarrow 4^+} E(x) = \lim_{x \longrightarrow 4^+} 4 = 4.$$

Comme $E(x) = 3$ pour $3 \leq x < 4$, on a

$$\lim_{x \longrightarrow 4^-} E(x) = \lim_{x \longrightarrow 4^-} 3 = 3.$$

Les limites unilatères n'étant pas égales, alors la fonction partie entière n'est pas continue en $x_0 = 4$.
Comme $E(x) = -1$ pour $-1 \leq x < 0$, on a

$$\lim_{x \longrightarrow -1^+} E(x) = \lim_{x \longrightarrow -1^+} (-1) = -1.$$

Comme $E(x) = -2$ pour $-2 \leq x < -1$, on a

$$\lim_{x \longrightarrow -1^-} E(x) = \lim_{x \longrightarrow -1^-} (-2) = -2.$$

Les limites unilatères n'étant pas égales, alors la fonction partie entière n'est pas continue en $x_0 = -1$.
D'une façon générale, la fonction E n'est pas continue en chaque point x_0 de la forme $x_0 = k \in \mathbb{Z}$, alors la fonction partie entière n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

Définition 1.10.3 *On dit que le point de discontinuité est $x_0 \in \mathbb{R}$ est de :*

1) *Première espèce si $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0^-} f(x)$ existes et sont distinctes.*

2) *Deuxième espèce si ou moin l'une des $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0^-} f(x)$ est infinie ou n'existe pas.*

Exemple 1.10.5 *1) La fonction* $f(x) = \dfrac{x-1}{(x-3)(x+2)}$ *a des points de discontinuité de deuxième espèce en* $x = 3$ *et* $x = -2$.

2) La fonction $E(x) = [x]$ *a un point de discontinuité de première espèce en* $x = -2$, *car*

$$\lim_{x \longrightarrow -2^-} E(x) = -3 \text{ et } \lim_{x \longrightarrow -2^+} E(x) = -2.$$

Remarque 1.10.2 *Si* $x_0 \notin \mathcal{D}_f$, *(un point d'éxtrimité de* $\mathcal{D}_f$ *) mais* $\lim_{x \longrightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow x_0^+} f(x)$, *on dit que la discontinuité de* f *en* x_0 *est* ***réductible ou écarté***.
On définie le prolongement par continuité de f *par*

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in \mathcal{D}_f \\ \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) \text{ si } x = x_0. \end{cases}$$

Exemple 1.10.6 *La fonction* $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ *n'est pas définie en* $x = 0$, *mais elle est prolongeable par continuité en* $x = 0$, *car* $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

▷ La fonction $f(x) = \dfrac{x^3 - 27}{x^2 - 9}$ est prolongeable par continuité en $x = 3$, et on a

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 27}{x^2 - 9} \text{ si } x \in \mathbb{R} - \{-3, 3\} \\ \dfrac{27}{6} \text{ si } x = 3. \end{cases}$$

Théorème 1.4 *(valeurs intermédiaires)*

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a, b]$. Alors pour tout nombre réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = k$.

Remarque 1.10.3 *Si* f *est strictement monotone, on a l'unicité de* k.

Corollaire 1.1 *Soit* f *une fonction définie et continue et strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur un intervalle* $[a, b]$ *et telle que* $f(a) \times f(b) < 0$, *alors* $\exists! c \in [a; b]$ *tel que* $f(c) = 0$.

Exemple 1.10.7 *Soit* f *la fonction définie par* $f(x) = x^2 + x - 1$. *Léquation* $f(x) = 0$ *admet une solution unique* $\alpha \in]0; 1[$, *car la fonction* f *est monotone sur* $]0; 1[$ *et* $f(0) \times f(1) < 0$.

1.11 Dérivée d'une fonction

Définition 1.11.1 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non vide, non réduit à un point et a un point de I.*

On dit que f est dérivable en a si la limite

$$\lim_{x \longrightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{existe et finie.}$$

On écrit $f^{'}(a) = \lim_{x \longrightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Remarque 1.11.1 *Si on pose $x - a = h$, soit $x = a + h$, pour obtenir le nombre dérivée de f en a, on cherche $\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(a)}{h}$*

Exemple 1.11.1 *Montrons que $f(x) = \sin x$ est dérivable ,$\forall x \in \mathbb{R}$.*

Remarque 1.11.2 *L'exprésion $f^{'}(a) .h$ est appelée différentielle de f au point x et on la note*

$$df(x) = hf^{'}(x) = f^{'}(x)\, dx$$

ou bien $f^{'}(x) = \frac{dy}{dx}$

Proposition 1.11.1 *Toute fonction f dérivable en un point a y est continue.*

Remarque 1.11.3 *La réciproque de cette proposition est **FAUSSE** . Ainsi, la fonction $|x|$ est continue en 0, mais n'est pas dérivable en ce point.*

Définition 1.11.2 *On dit que la fonction f est dérivable à droite (resp.à gauche) en $a \in \mathbb{R}$ si le taux d'accroissement $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie à droite (resp.à gauche).*

On les désignes par

$$f_d^{'}(a) = \lim_{x \longrightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{et} \quad f_g^{'}(a) = \lim_{x \longrightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Proposition 1.11.2 *Soient f une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et a un point de I.*

La fonction f est dérivable en a si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite en a, et si ses dérivées à gauche et à droite en a sont égales.

Exemple 1.11.2 *On considère la fonction* $f(x) = |x|$. *On a*

$$\begin{aligned} f_d'(0) &= \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1, \\ f_g'(0) &= \lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1 \end{aligned}$$

Puisque $f_d'(0) \neq f_g'(0)$, *alors la fonction* f *n'est pas dérivable au point* 0.

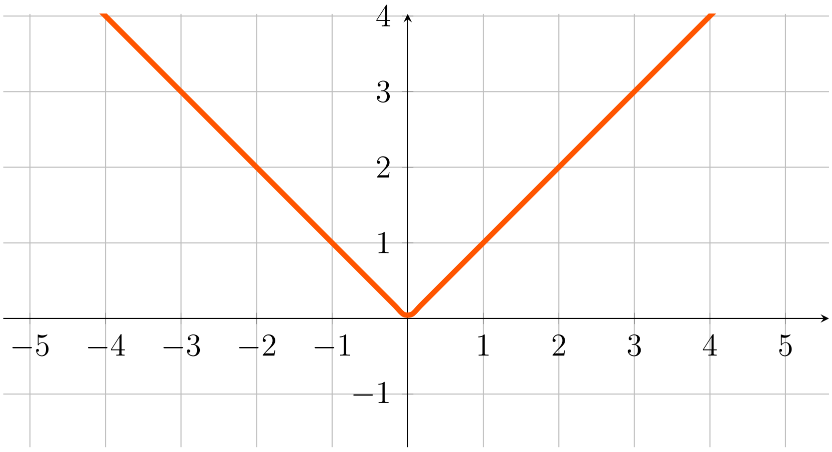


Figure 1.1: $f(x) = |x|$

Remarque 1.11.4 *Une fonction* f *n'est pas dérivable en* $a \in \mathbb{R}$ *si l'une des conditions est vérifiée:*

- $\triangleright$ $f_d'(a), f_g'(a)$ existent et $f_d'(a) \neq f_g'(a)$,
- $\triangleright$ $f_d'(a) = \pm\infty$ ou $f_g'(a) = \pm\infty$.

1.11.1 Opérations algébriques sur les dérivées

Soient f et g des fonctions définies sur un même intervalle I de $\mathbb{R}$ Alors :

Si f et g sont dérivables sur I, les fonctions $f + g$ et fg sont dérivables sur I, et pour tout x de I:

- $\triangleright$ $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$,
- $\triangleright$ $(fg)'(x) = f'(x)\, g(x) + f(x) g'(x)$,
- $\triangleright$ $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) g(x) - f(x) g'(x)}{g^2(x)}$ $(g \neq 0)$.

Théorème 1.5 *(dérivée logarithmique)*

Soit f une fonction dérivable en x_0 et $f(x_0) \neq 0$. Alors la fonction $\log|f(x)|$ est dérivable en x_0 et on a

$$(\log|f(x)|)'_{x=x_0} = \frac{f'(x)}{f(x_0)}.$$

Exemple 1.11.3 *Si* $f(x) = x^{\cos x}, x > 0,$ *alors* $\log f(x) = \log\left(x^{\cos x}\right) \implies \frac{f'(x)}{f(x)} = -\sin x \log x + \frac{\cos x}{x} \implies f'(x) = x^{\cos x}\left(\frac{\cos x}{x} - \sin x \log x\right).$

1.11.2 Dérivées d'ordres supérieurs

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

Définition 1.11.3 *On définie la dérivée $n -$ ième ou d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ de f par* $f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)', x \in I,$ *notée aussi par* $\frac{d^n f}{dx^n}(x)$

Définition 1.11.4 *On dit q'une fonction est de classe C^n si elle est n fois dérivable et si sa dérivée $n -$ ième est continue.*

Exemple 1.11.4 *Les fonctions* $e^x, \sin x, \cos x$ *sont des fonction* $C^\infty(\mathbb{R})$.

Formule de Leibniz : Soient f et g deux fonctions de classe $C^n(I)$, alors on a

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)}$$

Démonstration 3 *Exercice en TD.*

Exemple 1.11.5 *Soit* $f(x) = x^3 \cos x$. *Calculons* $f^{(n)}(x), \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$.

1.12 Théorèmes fondamentaux des fonctions dérivables

Théorème 1.6 (*Théorème de Rolle*) *Soit f une fonction vérifiant les conditions suivantes:*

1) f est définie et continue sur l'intervalle $[a;b]$;
2) f est dérivable sur l'intervalle $]a;b[$;
3) $f(a) = f(b)$. Alors il existe un $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème 1.7 (*Formule des accroissements finis (A.F.)*) *Soit f une fonction vérifiant les conditions suivantes :*

1) f est définie et continue sur l'intervalle $[a;b]$;
2) f est dérivable sur l'intervalle $]a;b[$. Alors il existe un $c \in]a;b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b-a)\, f^{'}(c).$$

Exemple 1.12.1 *Montrons que :*

$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |\cos x - \cos y| \leq |x-y|\,.$$

En effet, comme la fonction $f(x) = \cos x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors, d'après la formule des A.F sur $[x;y]$ ($x < y$), il existe $\eta \in]x;y[$ tel que

$$|\cos x - \cos y| = |x-y|\, f^{'}(c) = |x-y| \sin c \leq |x-y|$$

1.13 Applications de la dérivée:

Théorème 1.8 *(Première règle de L'Hospital. Limite de la forme $\dfrac{0}{0}$)*

Soient f, g deux fonctions définies et dérivables dans un voisinage V de $x_0 \in \mathbb{R}$ telle que $g(x) \neq 0$ et $g^{'}(x) \neq 0$ sur V(telles que $g^{'}$ ne s'annules pas
1) $g(x) \neq 0$ et $g^{'}(x) \neq 0$ sur V
2) $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} g(x) = 0$
Si $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \dfrac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)} = l$ (fini ou infini) alors $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$

Exemple 1.13.1 *Calculer* $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{e^{\sin x} - 1}{\sin x}$

Solution: On a

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\left(e^{\sin x} - 1\right)^{'}}{(\sin x)^{'}} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\cos x e^{\sin x}}{\cos x} = 1,$$

d'où $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{e^{\sin x} - 1}{\sin x} = 1.$

Théorème 1.9 *(Deuxième règle de L'Hospital. Limite de la forme $\dfrac{\infty}{\infty}$)*

Soient f, g deux fonctions définies et dérivables dans un voisinage épointé V de x_0 (fini ou infini) telles que :

1) $(x) \neq 0$ et $g^{'}(x) \neq 0$ sur V

2) $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} g(x) = \infty$

Si $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \dfrac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)} = l$ (fini ou infini) alors $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$

Exemple 1.13.2 *Calculer* $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{x + \log x}{x \log x}$.

Solution: En appliquant la règle de L'Hospital pour $f(x) = x + \log x$ et $g(x) = x \log x$ on obtient :

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{(x + \log x)^{'}}{(x \log x)^{'}} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\log x + 1} = 0$$

Donc $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{x + \log x}{x \log x} = 0$.

Exemple 1.13.3 *Calculer* $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} x \log x$.

Solution: On a $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} x \log x = 0 \times \infty \, (F.I)$. On peut écrire $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} x \log x = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\log x}{\frac{1}{x}} = \dfrac{\infty}{\infty}$.

En appliquant la règle de L'Hospital, on obtient

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{(\log x)^{'}}{\left(\frac{1}{x}\right)^{'}} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x \longrightarrow 0} x = 0$$

Donc $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} x \log x = 0$.

1.14 Fonctions circulaires réciproques

1.14.1 La fonction Arcsin:

Soit f la fonction définie par

$$\begin{array}{ccl} f & : & \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1; 1] \\ x & \mapsto & \sin x \end{array}$$

Alors cette fonction est continue et strictement croissante sur $[-1;1]$, donc f est une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ dans $[-1;1]$. Sa bijection réciproque est la fonction notée **arcsin** :

$$\begin{array}{rcl} arc\sin & : & [-1;1] \longrightarrow \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right] \\ x & \mapsto & Arc\sin x \end{array}$$

continue et strictement croissante sur $[-1;1]$.

On a donc, par définition de la bijection réciproque :

$$\begin{array}{rcl} \sin(\arcsin x) & = & x, \forall x \in [-1;1] \\ \arcsin(\sin x) & = & x, \forall x \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right] \end{array}$$

Proposition 1.14.1 *La fonction* $f(x) = arc\sin x$ *est dérivable sur* $]-1;1[$, *et on a*

$$(arc\sin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \forall x \in]-1;1[.$$

En effet, On démarre de l'égalité $\sin(\arcsin x) = x$ *que l'on dérive*

$$\begin{array}{rcl} \sin(\arcsin x) & = & x \\ & \Longrightarrow & \arcsin' x \cos(\arcsin x) = 1 \\ & \Longrightarrow & \arcsin' x = \dfrac{1}{\cos(\arcsin x)} \\ & \Longrightarrow & \arcsin' x = \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} \\ & \Longrightarrow & \arcsin' x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{array}$$

D'une façon générale, si u est une fonction dérivable, alors

$$(Arc\sin u(x))' = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}.$$

1.14.2 La fonction Arccos:

Soit g la fonction définie par

$$\begin{array}{rcl} g & : & [0;\pi] \longrightarrow [-1;1] \\ x & \mapsto & \sin x \end{array}$$

Alors cette fonction est continue et strictement croissante sur $[-1;1]$, donc f est une bijection de $[0;\pi]$ dans $[-1;1]$. Sa bijection réciproque est la fonction fonction notée **arccos** :

$$\begin{array}{rcl} arc\cos & : & [-1;1] \longrightarrow [0;\pi] \\ x & \mapsto & arc\cos x \end{array}$$

continue et strictement croissante sur $[-1;1]$.

On a donc, par définition de la bijection réciproque :

$$\begin{array}{rcl} \cos(arc\cos x) & = & x, \forall x \in [-1;1] \\ arc\cos(\cos x) & = & x, \forall x \in [0;\pi] \end{array}$$

Proposition 1.14.2 *La fonction $f(x) = arc\cos x$ est dérivable sur $]-1;1[$, et on a*

$$(arc\cos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \forall x \in]-1;1[.$$

En effet, On démarre de l'égalité $\cos(arc\cos) = x$ que l'on dérive

$$\begin{array}{rcl} \cos(arc\cos) & = & x \\ & \Longrightarrow & -arc\cos' x \times \sin(arc\cos) = 1 \\ & \Longrightarrow & arc\cos' x = -\dfrac{1}{\sin(arc\cos)} \\ & \Longrightarrow & arc\cos' x = -\dfrac{1}{\sqrt{1-\cos^2(arc\cos)}} \\ & \Longrightarrow & arc\cos' x = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{array}$$

D'une façon générale, si u est une fonction dérivable, alors

$$(arc\cos u(x))' = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}.$$

1.14.3 La fonction Arctan:

Soit f la fonction définie par

$$\begin{array}{rcl} f & : & \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan x \end{array}$$

Alors cette fonction est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, donc f est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$. Sa bijection réciproque est la fonction fonction notée **arctan** :

$$\begin{array}{rcl} arc\tan & : & \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[\\ x & \mapsto & Arc\tan x \end{array}$$

continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

On a donc, par définition de la bijection réciproque :

$$\begin{array}{rcl} \tan(\arctan x) & = & x, \forall x \in \mathbb{R} \\ \arctan(\tan x) & = & x, \forall x \in \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[\end{array}$$

Proposition 1.14.3 *La fonction $h(x) = arc\tan x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a*

$$(arc\tan x)' = \frac{1}{1+x^2}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

D'une façon générale, si u est une fonction dérivable, alors

$$(\arctan u(x))' = \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}.$$

1.15 Développements limités

Un développement limité d'une fonction au voisinage d'un point un nouvel outil permettant :

☐ approcher cette fonction par un polynôme,

☐ déterminer la limite en un point d'une fonction donnée sous une forme indéterminée,

☐ trouver l'équation de la tangente à son graphe en ce point,

☐ préciser la position relative du graphe et de sa tangente.

1.15.1 Développement limité au voisinage d'un point

Soient $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition 1.15.1 *On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de a, s'il existe des nombres réels $c_0, c_1, ..., c_n$ et une fonction ϵ de limite nulle en 0 tels que, pour tout réel $x \in I$:*

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + ... + c_n(x-a)^n + (x-a)^n \epsilon(x-a) \tag{1.2}$$

Définition 1.15.2 *On appelle partie principale d'ordre n du déve]oppement limité de f le polynôme :*

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + ... + c_n(x-a)^n.$$

Remarque 1.15.1

1) On peut remplacer le terme $(x-a)^n \epsilon(x-a)$ dans la définition (1.2) par $R_n(x-a)$, et on obtient

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + ... + c_n(x-a)^n + R_n(x-a)$$

où $R_n(x-a)$ est appelé retste du développement limité.

2) On trouve quelquefois la notation $R_n(x-a)$ est remplacée par la notation $o((x-a)^n)$, et on lit : « petit o ».

Exemple 1.15.1 *Au voisinage de zéro, la fonction $f(x) = sinx$ peut ainsi être approchée par les fonctions polynomiales $x \longmapsto x, x \longmapsto x - \frac{x^3}{6}$.*

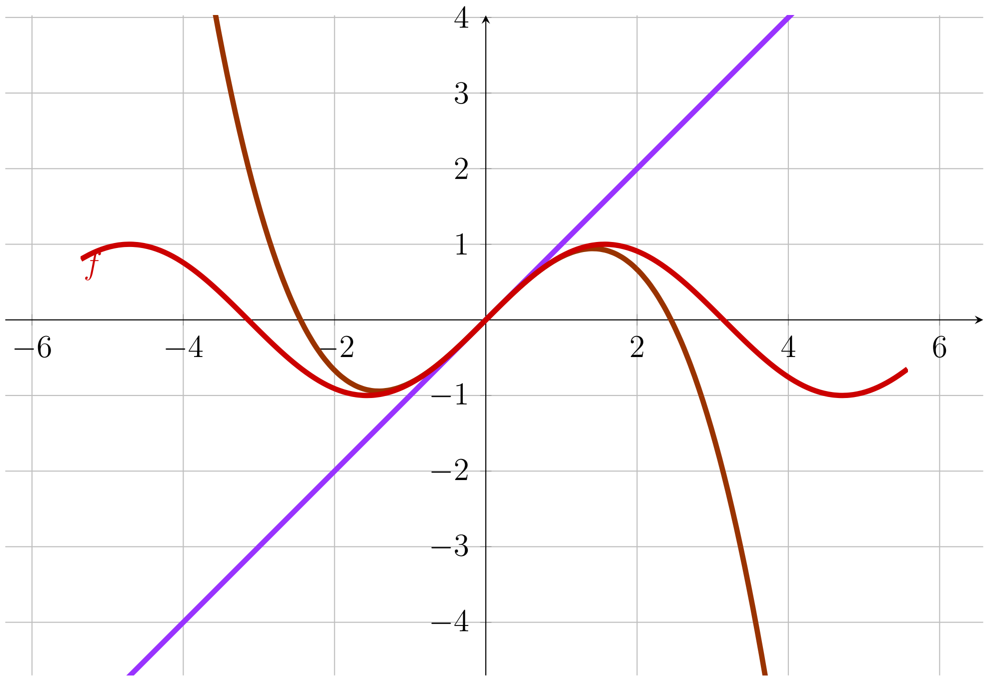


Figure 1.2: $f(x) = \sin x$

Proposition 1.15.1 *Soient f une fonction définie sur un intervalle I et a un point de I. Si f admet un développement limité d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ au voisinage de a, alors ce développement est unique.*

1.15.2 Formule de Taylor-Young

Théorème 1.10

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $a \in I$. Si f est n fois dérivable en a, alors f admet un développement limité d'ordre n en a donné par:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x-a)$$

Une fonction peut admettre un développement limité à un ordre $n \geq 2$ au voisinage d'un point, sans être n fois dérivable en ce point.

Comme cas prticullier, si on pose $a = 0$ dans le théorèm (1.10), on a la définition du développement limité d'ordre n, noté DL_n au voisinage de 0 :

Définition 1.15.3 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Si f est n fois dérivable en 0, alors f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 donné par:*

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$

Remarque 1.15.2 1) *Le DL* ***au voisinage de*** *0 d'une fonction paire (impaire) est un polynôme paire (impaire).*

2) *Un DL* ***au voisinage de*** *a peut toujours se ramener à un DL au voisinage de 0 :*

- *en posant un changement de variable $X = x - a$,*
- *en posant le changement de fonction $g(X) = f(x-a)$,*
- *en calculant un DL de $g(X)$ au voisinage de 0,*
- *et enfin en revenant à la variable initiale x.*

Exemple 1.15.2 *Calculons les DL des fonctions suivantes :*

$$\begin{aligned} 1.\ f(x) &= \cos x, \text{ au voisinage de } 0 \\ 2.\ g(x) &= \sin x, \text{ au voisinage de } \frac{\pi}{3} \\ 3.\ h(x) &= \ln(x), \text{ au voisinage de } 2. \end{aligned}$$

1. On a $f(0) = 1$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin x \Longrightarrow f'(0) = 0;\quad f''(x) = -\cos x \Longrightarrow f''(0) = -1 \\ f^{(3)}(x) &= \sin x \Longrightarrow f^{(3)}(0) = 0;\quad f^{(4)}(x) = \cos x \Longrightarrow f^{(4)}(0) = 1 \\ f^{(5)}(x) &= -\sin x \Longrightarrow f^{(5)}(0) = 0, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{f^{'}(0)}{1!}x + \frac{f^{''}(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... \end{aligned}$$

2. On a $g(\frac{\pi}{3}) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$\begin{aligned} g^{'}(x) &= \cos x \implies g^{'}(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2};\ g^{''}(x) = -\sin x \implies g^{''}(\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ g^{(3)}(x) &= -\cos x \implies g^{(3)}(\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2};\quad g^{(4)}(x) = \sin x \implies g^{(4)}(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} g(x) &= g\left(\frac{\pi}{3}\right) + g^{'}\left(\frac{\pi}{3}\right)\frac{\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1!} + g^{''}\left(\frac{\pi}{3}\right)\frac{\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2}{2!} + ... + g^{(n)}\left(\frac{\pi}{3}\right)\frac{\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^n}{n!} + ... \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1!} - \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2}{2!} - \frac{1}{2}\times\frac{\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3}{3!} + \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^4}{4!} + ... \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{2} - \frac{\sqrt{3}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2}{4} - \frac{\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3}{12} + \frac{\sqrt{3}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^4}{24} + ... \end{aligned}$$

3. On a $h(2) = \ln 2$,

$$\begin{aligned} h^{'}(x) &= \frac{1}{x} \implies h^{'}(2) = \frac{1}{2};\quad h^{''}(x) = -\frac{1}{x^2} \implies h^{''}(2) = -\frac{1}{4} \\ h^{(3)}(x) &= -\frac{2}{x^3} \implies h^{(3)}(2) = -\frac{1}{4};\quad h^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4} \implies h^{(4)}(2) = -\frac{3}{8}, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} h(x) &= h(2) + h^{'}(2)\frac{(x-2)}{1!} + h^{''}(2)\frac{(x-2)^2}{2!} + ... + h^{(n)}(2)\frac{(x-2)^n}{n!} + R_n(x-2) \\ &= \ln 2 + \frac{1}{2}\times\frac{(x-2)}{1!} - \frac{1}{4}\times\frac{(x-2)^2}{2!} - \frac{1}{4}\times\frac{(x-2)^3}{3!} - \frac{3}{8}\times\frac{(x-2)^4}{4!} + ... \\ &= \ln 2 + \frac{(x-2)}{2} - \frac{(x-2)^2}{8} - \frac{(x-2)^3}{24} - \frac{(x-2)^4}{192} - ... \end{aligned}$$

1.15.3 Développements limités usuels

Dans ce qui suit, n désigne un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= 1+x+x^2+...+x^n+x^n\epsilon(x) \\
\frac{1}{1+x} &= 1-x+x^2+...+(-1)^n x^n+x^n\epsilon(x) \\
\ln(1+x) &= x-\frac{x^2}{2}+...+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}x^n\epsilon(x) \\
\ln(1-x) &= -x-\frac{x^2}{2}-...-\frac{x^n}{n}x^n\epsilon(x) \\
e^x &= 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+x^n\epsilon(x) \\
\cos x &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+x^{2n+1}\epsilon(x) \\
\sin x &= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+x^{2n+2}\epsilon(x)
\end{aligned}$$

1.16 Applications du DL au calcul des limites

Exemple 1.16.1 *Calculer les limites suivantes*

$$1.\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2};\quad 2.\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\sin x}{x};\quad 3.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}.$$

1.17 Fonctions primitives

Définition 1.17.1 *Soit f une fonction définie sur l'intervalle I.de $\mathbb{R}$. On dit que $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une primitive de f sur I* ***ssi***

$$\forall x \in I : F^{'}(x) = f(x).$$

On note $F(x) = \int f(x)dx$.

On vérifier par dérivation que la fonction $f(x) = 2x+6$ admet pour primitives les fonctions : $x^2+6x, (x+3)^2$ ou $(x+2)(x+4)$. Une fonction donnée peut donc admettre plusieurs primitives.

Théorème 1.11 *Si la fonction donnée f admet sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ une primitive F elle en admet une infinité donnée par la formulle*

$$G(x) = F(x) + C \text{ où } C \text{ désigne une constante arbitraire.}$$

Réciproquement, si F et G sont deux fonctions primitives de f, les deux fonctions F et G ayant meme dérivée sur I ont une différence constante C sur I :

$$\forall x \in I : F^{'}(x) = G^{'}(x) = f(x) \implies G(x) = F(x) + C$$

Théorème 1.12 *Toute fonction f définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, admet une primitive.*

1.18 Primitives classiques

On désignant par $A, a, b, C_i, (i = 1; 2; 3; ...)$ des constantes.

1. $\int A dx = Ax + C$	10. $\int \tan x dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$
2. $\int x^m dx = \frac{1}{m+1} x^{m+1} + C, m \neq -1$	11. $\int (ax+b)^m dx = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^m}{m+1} + C$
3. $\int u^m u^{'} dx = \frac{1}{m+1} u^{m+1} + C, m \neq -1$	12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$
4. $\int \cos x dx = \sin x + C$	13. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
5. $\int \cos u u^{'} dx = \sin u + C$	14. $\int \sin u u^{'} dx = -\cos u + C$
6. $\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$	15. $\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1+\tan^2 x) dx = \tan x + C$	16. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\tan x} + C$
8. $\int \frac{dx}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{\lambda} + C,\ \lambda > 0$	17. $\int \frac{dx}{\lambda^2 + x^2} = \frac{1}{\lambda}\arctan\frac{x}{\lambda} + C,\ \lambda \neq 0$
9. $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$	18. $\int \frac{dx}{x+\lambda} = \ln\lvert x+\lambda\rvert + C, \lambda \in \mathbb{R}$

Proposition 1.18.1 *Soient f et g deux fonctions intégrables et α une constante, alors*

1) $\displaystyle\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

2) $\displaystyle\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx + c,\ c \in \mathbb{R}.$

Exemple 1.18.1 1.

$$\begin{aligned}\int\left(x^3+3x^2-8x+6\right)dx &= \int x^3dx+3\int x^2dx-2\int xdx+6\int dx\\ &= \frac{x^4}{4}+x^3-4x^2+6x+C,(C\in\mathbb{R}).\end{aligned}$$

2.

$$\int\cos^2 xdx=\int\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\int\frac{dx}{2}+\frac{1}{2}\int\cos 2xdx=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x+C$$

3.

$$\int\sin^2 x\cos xdx=\int\sin^2 xd\left(\sin x\right)=\int u^2du=\frac{u^3}{3}+C=\frac{1}{3}\sin^3 x+C$$

1.19 Techniques de calcul

1.19.1 Intégration par parties

Pour deux fonctions u et v dérivables, on a

$$(uv)^{'}(x)=u^{'}(x)v(x)+u(x)v^{'}(x)$$

On en déduit la formule d'intégration par parties:

Proposition 1.19.1 *Soit u et v deux fonction de classe C^1, on a*

$$\int u^{'}(x)v(x)dx=u(x)v(x)-\int u(x)v^{'}(x)dx$$

Exemple 1.19.1 *En utilisant lintégration par parties pour calculer $\int xe^xdx$.*

On pose $u(x)=x$ et $v^{'}(x)=e^x$. On a alors $u^{'}(x)=1$ et $v(x)=e^x$.On obtient donc

$$\int xe^xdx=xe^x-\int e^xdx=xe^x-e^x+C=(x-1)\,e^x+C.$$

Remarque 1.19.1 *Cette formule s'applique aussi aux calculs des primitives des fonctions de la formes $P\left(x\right)\cos x; P\left(x\right)\sin x; P\left(x\right)e^x$, avec $P\left(x\right)$ un polynome.*

1.19.2 Changement de variable

Théorème 1.13 *Soient φ une fonction continûment dérivable sur un intervalle I à valeurs dans un intervalle J Si f une fonction continue sur J, alors :*

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi^{'}(t)\, dt$$

Exemple 1.19.2 *On calcul $\int \cos(2x+5)dx$. En utilisant le changement de variable $u = 2x+5 \implies du = 2dx$, alors*

$$\int \cos(2x+5)dx = \frac{1}{2}\int \cos u du = \frac{1}{2}\sin u + C = \frac{1}{2}\sin(2x+5) + C$$

1.19.3 Primitives de fraction rationnelle

Lorsque f est une fraction rationnelle, il existe une méthode dite la méthode de décomposition en éléments simples qui permet de trouver ses primitives. On donne maintenant une idée de cette méthode pour les fractions du type :

$$f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{ax^2 + bx + c}$$

Il faut distinguer trois cas :

• **Cas 1:** le dénominateur admet deux racines réelles distinctes x_1 et x_2, dans ce cas on peut écrire

$$f(x) = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2}.$$

où A et B sont deux réels.

Exemple 1.19.3 *Calculer la primitive suivante : $\int \frac{x+2}{x^2+5x-6}dx$. En calculant a et b tels que $\frac{x+2}{x^2+5x-6} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+6}$.*

Par la comparaison, on a: $a = \frac{3}{7}$ et $b = \frac{4}{7}$, alors

$$\begin{aligned}\int \frac{x+2}{x^2+5x-6}dx &= \frac{3}{7}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{4}{7}\int \frac{dx}{x+6} \\ &= \frac{3}{7}\ln|x-1| + \frac{4}{7}\ln|x+6| + C\end{aligned}$$

• **Cas 2:** le dénominateur admet une racine double x_0, dans ce cas on peut écrire

$$f(x) = \frac{A}{(x-x_0)^2} + \frac{B}{x-x_0}.$$

où A et B sont deux réels.

Exemple 1.19.4 *Calculer la primitive suivante :* $\int \frac{x^3-2}{x^3-x^2}dx$. *En calculant* a, b, c *et* d *tels que* $\frac{x^3-2}{x^3-x^2} = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + \frac{d}{x-1}$.

Par la comparaison, on a: $a = 1; b = c = -2$ et $d = 3$, alors

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3-2}{x^3-x^2}dx &= \int \left(1 - \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x-1}\right) dx \\
&= \int dx - 2\int \frac{dx}{x} - 2\int \frac{dx}{x^2} + 3\int \frac{dx}{x-1} \\
&= x - 2\ln|x| - \frac{2}{x} + 3\ln|x-1| + C.
\end{aligned}$$

- Cas 3 : le dénominateur ne s'annule pas, dans ce cas on écrit

$$f(x) = A\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} + B\frac{1}{a\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}}. \, (a \neq 0)$$

où A et B sont deux réels.

Exemple 1.19.5 *Calculer la primitive suivante* $\int \frac{3x-1}{x^2-4x+8}dx$. *Pour rendre que le numérateur est la dérivée du dénominateur, on cherche* α *et* β *tel que*

$$3x - 1 = \alpha(2x-4) + \beta = 2\alpha x + \beta - 4\alpha$$

par comparaison, on a

$$\begin{cases} 3 = 2\alpha \\ \beta - 4\alpha = -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{3}{2} \\ \beta = 5 \end{cases} \Longrightarrow \text{, } \textit{d'où}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x-1}{x^2-4x+8}dx &= \int \frac{2x-4}{x^2-4x+8}dx + 5\int \frac{dx}{x^2-4x+8} \\
&= \frac{3}{2}\ln\left|x^2-4x+8\right| + 5\int \frac{dx}{x^2-4x+4-4+8} \\
&= \frac{3}{2}\ln\left|x^2-4x+8\right| + 5\int \frac{dx}{(x-2)^2+4} \\
&= \frac{3}{2}\ln\left|x^2-4x+8\right| + \frac{5}{2}\arctan\frac{x-2}{2} + C.
\end{aligned}$$

1.20 Exercices

Exercice N°1 : Déterminer l'ensemble de défnition de chacune des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2}$

2) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$

3) $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$

4) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{9 - x^2}}$

5) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$

Exercice N°2 : Tracez les graphiques des fonctions suivantes:

1) $f(x) = x^2 + 1.$

2) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad 0 < x < 2 \\ 2x & \text{si} \quad x \leq 2 \end{cases}.$

3) $f(x) = |x - 3|$

4) $f(x) = x - |x|$

5) $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$

Exercice N°3 : On donne

$$\lim_{x \longrightarrow 2} f(x) = 4 \quad , \quad \lim_{x \longrightarrow 2} g(x) = -2 \quad , \quad \lim_{x \longrightarrow 2} h(x) = 0$$

Trouver les limites qui existent. Si la limite n'existe pas, expliquez pourquoi.

1) $\lim\limits_{x \longrightarrow 2} [f(x) + 5g(x)]$

2) $\lim\limits_{x \longrightarrow 2} [g(x)]^3$

3) $\lim\limits_{x \longrightarrow 2} \sqrt{f(x)}$

4) $\lim\limits_{x \longrightarrow 2} \dfrac{3f(x)}{g(x)}$

5) $\lim\limits_{x \longrightarrow 2} \dfrac{g(x)}{h(x)}$

Exercice N°4 : Examiner si les fonctions suivantes sont paires, impaires ou aucun des deux.

1) $f(x) = x^5 + 2x$

2) $f(x) = 3 - x^6$

3) $f(x) = 2x - x^4$

Exercice N°5 : Calculer les limites suivantes:

1) $\lim\limits_{x \longrightarrow 3} (5x^3 - 3x^2 + x - 6)$

2) $\lim\limits_{x \longrightarrow 5} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 5}$

3) $\lim\limits_{x \longrightarrow -2} \dfrac{x + 2}{x^3 + 8}$

4) $\lim\limits_{x \longrightarrow 2} \dfrac{\sqrt{4x + 1} - 3}{x - 2}$

5) $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2 + x} \right)$

6) $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{x}$

7) $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$

8) $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \dfrac{x-2}{x^2+1}$

9) $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^4+1}}$

10) $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \left(x+\sqrt{x^2+2x}\right)$

Exercice N°6 : Soit

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x < 1 \\ 3 & \text{si} \quad x = 1 \\ 2-x^2 & \text{si} \quad 1 < x \leq 2 \\ x-3 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Calculer les limites suivantes, s'ils existent:

1) $\lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} f(x)$

2) $\lim\limits_{x \longrightarrow 1} f(x)$

3) $\lim\limits_{x \longrightarrow 2^-} f(x)$

4) $\lim\limits_{x \longrightarrow 2^+} f(x)$

5) $\lim\limits_{x \longrightarrow 2} f(x)$

Exercice N°7 : Étudier la continuité des fonctions suivantes:

1) $f(x) = \dfrac{1}{x+4}$, $x = -4$

2) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+2} & \text{si} \quad x \neq -2 \\ 1 & \text{si} \quad x = -2 \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } \quad x = 1 \end{cases}$

4) $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si} \quad x < \dfrac{\pi}{4} \\ \cos x & \text{si} \quad x \geq \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

5) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si} \quad x < 0 \\ e^x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

Exercice N°8 : Calculer les limites suivantes:

1) $\lim\limits_{x \longrightarrow 3} (5x^3 - 3x^2 + x - 6)$

2) $\lim\limits_{x \longrightarrow 5} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 5}$

3) $\lim\limits_{x \longrightarrow -2} \dfrac{x + 2}{x^3 + 8}$

4) $\lim\limits_{x \longrightarrow 2} \dfrac{\sqrt{4x + 1} - 3}{x - 2}$

5) $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2 + x} \right)$

6) $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{x}$

7) $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$

Exercice N°9 : Soit

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ 2 - x^2 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ x - 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Calculer les limites suivantes, s'ils existent:

1) $\lim\limits_{x\longrightarrow -1} f(x)$

2) $\lim\limits_{x\longrightarrow 1} f(x)$

3) $\lim\limits_{x\longrightarrow 2} f(x)$

Exercice N°10 :

Dans chacun des cas suivants, calculer la dérivée de la fonction f :

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^3 + x + 1)\sin x$
2. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{2}\left(1 + e^{-2x}\right)$
3. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{14x + 27}{x^2 + 120}$
4. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(2 - \frac{x}{97}\right)^{13}$

Exercice N°11 :

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{18 - 9x}{x^2 + 5}$$

1.Trouver l'ensemble de définition de f.

2. a) Déterminer les limites de la fonction f aux extrémités de l'ensemble de définition.

b) Que peut-on en déduire pour la courbe $(\mathcal{C}_f)$?

3. Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{9\left(x^2 - 4x - 5\right)}{\left(x^2 + 5\right)^2}$.

4. a) Étudier le signe de $f'(x)$.

b) Donner le tableau de variations de la fonction f .

Exercice N°12 :

1) Calculer la dérivée $n^{éme}$ de la fonction définie par

$$\varphi(x) = \left(x^3 - 99\right)e^x$$

2) En déduire $\varphi^{(2020)}(x)$.

Exercice N°13 :

Utilisez la règle de l'Hospitale pour calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}$, 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\cos\pi x}{x^2-2x+1}$, 3) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2e^{-x}$, 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2019^x-2020^x}{x}$,
5) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2\ln x$

Exercice N°14 :

En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que

$$\forall x>0, \frac{1}{1+x} < \ln(1+x)-\ln(x) < \frac{1}{x}$$

On déduire que

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$$

Exercice N°15 :

Soit $f(x)=\sqrt{1+x}$.

a) Donner le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de 0.
b) Donner une approximation de $\sqrt{101}$ avec 5 chiffres aprés la virgule.

Exercice N°16 :

En utilisant le développement limité calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-\sin x}{x}$.

CHAPTER 2

SÉRIES NUMÉRIQUES

2.1 Définitions

En général, si nous essayons d'additionner les termes d'une suite infinie $(u_n)_{n=0}^{\infty}$, nous obtenons une expression de la forme

$$u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$$

qui est appelée une série infinie (ouimplement une série) et est désignée, en abrégé, par le symbole

$$\sum_{n=0}^{\infty} \text{ ou } \sum$$

Définition 2.1.1 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. La série de terme général $u_n, n \in \mathbb{N}$, est la* ***suite des sommes partielles*** $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *, avec*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

2.2 Convergence et divergence

pour déterminer si une série a une somme ou non nous considérons les sommes partielles

$$\begin{aligned} S_1 &= u_1 \\ S_2 &= u_1 + u_2 \\ S_3 &= u_1 + u_2 + u_3 \\ S_4 &= u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \\ &\ldots \\ S_n &= u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \end{aligned}$$

2.2.1 Convergence d'une série numérique

Définition 2.2.1 *Soit la série numérique*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

On dit que $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ *converge si la suite des sommes partielles* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge (i.e. admet une limite finie).*

Exemple 2.2.1 *Supposons que nous avons la somme des* n *premiers termes de la série*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \frac{3n}{5n+7}$$

Alors la somme de la série est la limite de la suite (S_n)*:*

$$\sum u_n = \lim_{n\longrightarrow+\infty} S_n = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{3n}{5n+7} = \frac{3}{5}$$

Donc la série $\sum u_n$ *est convergente.*

2.2.2 Divergence d'une série numérique

Définition 2.2.2 *Soit la série numérique*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

On dit que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ *diverge si la suite des sommes partielles* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge (i.e. n'admet pas de limite finie).*

2.3 Condition nécessaire de convergence d'une série

Théorème 2.1 *Si la série* $\sum u_n$ *est convergente, alors*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = 0$$

Démonstration 4 *Soit* $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$*, alors* $u_n = S_n - S_{n-1}$*. Puisque la série* $\sum u_n$ *est convergente, alors* $\lim_{n \longrightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \longrightarrow +\infty} S_{n-1} = S$*. Donc*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \longrightarrow +\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} S_n - \lim_{n \longrightarrow +\infty} S_{n-1} = 0.$$

Remarque 2.3.1 *La réciproque du théorème 2.1 n'est pas vraie en général. Si* $\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = 0$*, on ne peut pas conclure que la série* $\sum u_n$ *est convergente. Par exemple on prend la série harmonique, son terme général* $u_n = \frac{1}{n}$ *tend vers zéro quand* $n \longrightarrow +\infty$ *mais la série est divergente.*

Proposition 2.3.1 *Si* $\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n$ *n'sexiste pas ou si* $\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n \neq 0$*, alors la série* $\sum u_n$ *est divergente.*

Exemple 2.3.1 *Montrer que la série* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{7n^2+3}$ *est divergente.*

Solution: *On a*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n^2}{7n^2+3} = \frac{1}{7} \neq 0$$

Alors la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{7n^2+3}$ *est divergente.*

Théorème 2.2 *Soient* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries convergentes et* $\lambda \in \mathbb{R}$*. Les séries de termes généraux* u_n+v_n*,* u_n-v_n *et* λv_n *respectivement convergent, et leurs sommes sont données par les formules suivantes :*

$$\sum (u_n + v_n) = \sum u_n + \sum v_n,$$
$$\sum (u_n - v_n) = \sum u_n - \sum v_n,$$
$$\sum \lambda u_n = \lambda \left(\sum u_n\right)$$

Corollaire 2.1 *Soient* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries. Si l'une de ces deux séries converge et si l'autre diverge, la série* $\sum (u_n + v_n)$ *diverge.*

2.4 Quelques séries remarquables

2.4.1 Les séries géométriques

Définition 2.4.1 *On appelle série géométrique toute série de la forme* $\sum ar^n$*, où* a *est le premier terme de cette série et* r *en est la raison.*

Théorème 2.3 *La série géométrique* $\sum ar^n$ *converge si et seulement* $|r| < 1$ *et sa somme est*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} ar^k = \frac{a}{1-r}$$

Si $|r| \geq 1$*, alors la série géométrique est divergente.*

Démonstration 5 *Si* $r \neq 1$*, on peut utiliser la formule donnant la somme des* $n+1$ *premiers termes d'une suite géométrique :*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} ar^k = a\left(\frac{1-r^{n+1}}{1-r}\right).$$

Lorsque n *tend vers l'infini, cette dernière quantité n'admet de limite que si* $|r| < 1$.
Si $r = 1$,

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k = \sum_{k=0}^{n} a = a\,(n+1)$$

Lorsque n *tend vers l'infini, cette dernière quantité tend vers l'infini.*

Exemple 2.4.1 *Trouver la somme de la série géométrique*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n}$$

Solution: *On a la raison de cette série est* $r = \frac{1}{3}$*, alors d'aprés le théorème 2.3*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 3$$

Exemple 2.4.2 *Trouver S_n et S dans les cas suivantes :*

$$\begin{aligned} &1) \quad \frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+... \\ &2) \quad \frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+... \end{aligned}$$

Solution:

1) *On a*

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k \quad =\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{5^k}=\frac{1}{5}\times\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1-\frac{1}{5}}=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{5^n}\right) \implies S=\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{5^n}\right)=\frac{1}{4}$$

2) *On remarque que*

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{1\times 2}=1-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{(1+1)} \\ S_2 &= \frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=1-\frac{1}{3}=1-\frac{1}{(2+1)} \\ S_3 &= \frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=1-\frac{1}{4}=1-\frac{1}{(3+1)} \\ &... \\ &... \\ &... \\ S_n &= 1-\frac{1}{(n+1)} \implies S=\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(1-\frac{1}{(n+1)}\right)=1 \end{aligned}$$

Exemple 2.4.3 *Écrire le nombre $2,3\overline{17}=2,317171717...$ sous forme quotient de deux nombres naturels.*

Solution: *On a*

$$2,3\overline{17}=2,317171717...=2,3+\frac{17}{10^3}+\frac{17}{10^5}+\frac{17}{10^7}+...$$

Après le premier terme, nous avons une série géométrique avec $u_1=\dfrac{17}{10^3}$ et $r=\dfrac{1}{10^2}$, alors

$$\begin{aligned}
2,3\overline{17} &= 2,317171717...\\
&= 2,3 + \frac{17}{10^3} + \frac{17}{10^5} + \frac{17}{10^7} + ...\\
&= 2,3 + \frac{\frac{17}{10^3}}{1-\frac{1}{10^2}}\\
&= \frac{1147}{495}
\end{aligned}$$

2.4.2 Séries exponentielles

Définition 2.4.2 *On appelle série exponentielle toute série de terme général* $\frac{a^n}{n!}, n \geq 0$, *où* $a \in \mathbb{R}$.

Exemple 2.4.4 *Les séries* $\sum \frac{1}{3^n n!}$ *et* $\sum \frac{5^n}{n!}$ *sont de type exponentielle.*

Théorème 2.4 *La série exponentielle* $\sum \frac{a^n}{n!}, n \geq 0$, *converge vers* $\exp(a)$ *pour tout réel a :*

$$\forall a \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} = \exp(a)$$

Exemple 2.4.5 *La série* $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{7^n}{n!}, n \geq 2$ *et de type exponentielle donc elle converge et, en tenant compte des termes manquant dindices* 0 *et* 1, *sa somme est* $e^7 - 4$.

2.4.3 Les séries de Riemann

Définition 2.4.3 *On appelle série de Riemann toute série de la forme* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, *où* α *est un réel.*

Théorème 2.5 *La série de Riemann* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ *converge si et seulement si* $\alpha > 1$.

Exemple 2.4.6 *Déterminer la nature des séries suivantes:*

1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$

2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

3) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

Solution:

1) La série de Riemann $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, aussi appelée série harmonique, est une série divergente.

2) La série de Riemann $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ est une série convergente, dont la somme vaut :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

3) La série de Riemann $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ est une série divergente$\left(\alpha = \frac{1}{2} < 1\right)$

2.5 Séries à termes réels positifs

Définition 2.5.1 *Une série* $\sum u_n$ *est dite à termes positifs si* $u_n \geq 0, \forall n \geq n_0$.

Remarque 2.5.1 *Les résultats de convergence des séries à termes positifs restent valables même si un nombre fini de termes ne sont pas positifs, i.e. à partir dun certain rang,* $u_n \geq 0$.

Les séries à termes réels positifs sont plus simples à étudier que les autres, à cause des deux résultats évidents suivants :

Proposition 2.5.1 *Soit* $\sum u_n$ *une série à termes réels positifs. La suite* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *des sommes partielles de cette série est croissante.*

Démonstration 6 *Soit* $n_0 \in \mathbb{N}$. *Alors on a* $S_n = \sum_{k\geq n_0}^{n} u_n$ *et* $S_{n-1} = \sum_{k\geq n_0}^{n-1} u_n$. *Donc*

$$S_n - S_{n-1} = u_n \geq 0,$$

d'où la conclusion.

Théorème 2.6 *Pour qu'une série* $\sum u_n$ *à termes réels positifs converge , il faut et il suffit que la suite* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de ses sommes partielles soit majorée, i.e. qu'il existe un réel* M *tel que :*

$$S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n \leq M \text{ pour tout } n \geq 0$$

Si cette condition est vérifiée, la somme de la série $\sum u_n$ *est la borne supérieure de* $\{S_n : n \geq 0\}$

2.6 Théorème de comparaison

Voici une application importante du théorème précédent :

Théorème 2.7 *Soient* $\sum a_n$ *et* $\sum b_n$ *deux séries à termes positifs. On suppose que l'on a* $a_n \geq b_n$ *pour tout* $n \geq 0$.

1) Si $\sum b_n$ *converge* $\sum a_n$ *converge aussi, et l'on a :*

$$\sum a_n \leq \sum b_n$$

2) Si $\sum a_n$ *diverge,* $\sum b_n$ *diverge aussi.*

Supposons maintenant qu'il existe deux nombres réels m, M $0 < m \leq M$ *tels que l'on ait, à partir d'un certain rang* n_0

$$ma_n \leq b_n \leq Ma_n$$

Alors les séries $\sum a_n$ *et* $\sum b_n$ *sont de même nature.*

Voici un autre résultat important sur les séries à termes réels positifs :

Théorème 2.8 *Soit* $\sum u_n$ *une série à termes réels strictement positifs. Supposons que, lorsque* n *tend vers* $+\infty$*, le quotient* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *ait une limite* l*, finie ou égale à* $+\infty$*. Alors:*

1) Si $l \leq 1$*, la série converge.*

2) Si $l > 1$*, la série diverge.*

3) Si $l = 1$*, on ne peut rien dire a priori.*

Exemple 2.6.1 *Étudier la série suivante :*

$$\sum \frac{1}{n!}$$

Solution:
Notons $u_n = \frac{1}{n!}$ *son terme général. Pour tout* $n \geq 0$*,* $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n+1}$*. Ainsi* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *tend vers* 0 *quand* n *tend vers* $+\infty$*, donc la série donnée converge.*

Exemple 2.6.2 *Étudier la série suivante :*

$$\sum \frac{n^n}{n!}$$

Solution:
Le terme général de notre série est $a_n = \dfrac{n^n}{n!}$ *qui est positif. On a*

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^n} \\
&= \frac{(n+1)\,(n+1)^n}{(n+1)\,n!} \times \frac{n!}{n^n} \\
&= \left(1 + \frac{1}{n}\right) \to e \quad \textit{quand} \quad n \to +\infty.
\end{aligned}$$

Le test suivant est pratique à appliquer lorsque les puissances se produisent.

Théorème 2.9 *Soit* $\sum u_n$ *une série à termes réels strictement positifs.*

1) Si $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = L < 1$*, la série converge.*

2) Si $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\sqrt[n]{u_n}=L>1$*, la série diverge.*

3) Si $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\sqrt[n]{u_n}=1$ *, on ne peut rien dire a priori.*

Exemple 2.6.3 *Etudier la nature de la série suivante*

$$\sum\left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$$

Solution:

Le terme général de cette série est $u_n=\left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$*, alors*

$$\sqrt[n]{u_n}=\frac{2n+3}{3n+2}=\frac{2+\frac{3}{n}}{3+\frac{2}{n}}\to\frac{2}{3}<1 \quad \textit{quand} \quad n\to+\infty.$$

Donc la série $\sum\left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$ *est convergente.*

2.7 Exercices

Exercice N°1: Donner l'expresion des termes généraux des series suivantes :

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}+...$

b) $\frac{3}{2}+\frac{5}{4}+\frac{7}{6}+\frac{9}{8}+...$

c) $1+\frac{2}{2!}+\frac{4}{3!}+\frac{8}{4!}+\frac{16}{5!}+...$

d) $1+\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\frac{1}{125}+...$

Exercice N°2: Etudier la nature des séries suivantes :

$$1)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n};\quad 2)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n+1};\quad 3)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3}{\sqrt{n}};\quad 4)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{e^{n-2}};\quad 5)\sum_{n\geq 1}^{+\infty}\frac{n^{2017}}{n!}$$

$$6)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{3n};\quad 7)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{3^n};\quad 8)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2018}{n^n};\quad 9)\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n+6}{n}\right)^{n^2};\quad 10)\sum_{n\geq 1}^{+\infty}\left(\frac{n}{n^2+2}\right)^n$$

Exercice N°3 :

Etudier la nature de la série de terme général

$$u_n = \left(\frac{2n+3}{5n+4}\right)^n$$

Exercice N°4 :

Etudier la nature de la série de terme général

$$u_n = \left(\frac{\alpha n}{n+1}\right)^n (\alpha \text{ réel positif})$$

Exercice N°5 :

Etudier la nature de la série de terme général

$$u_n = \left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^{-n^2} \quad (\lambda \text{ réel})$$

CHAPTER 3

STATISTIQUE DESCRIPTIVE

3.1 Généralités et principales définitions

L'objectif de la statistique descriptive est de résumer et synthétiser l'information contenue dans les données étudiées afin d'en déduire un certain nombre de propriétés.

3.1.1 Population

Définition 3.1.1 *Une population est un ensemble, fini ou non, d 'éléments que l'on souhaite étudier. Ces éléments portent le nom d' individus ou d 'unités statistiques.*

Exemple 3.1.1 *Une usine fabrique des tiges métalliques utilisées dans lassemblage de certaines structures. Pour étudier la résistance à la traction de ces tiges, on mesure cette résistance pour un lot de 100 tiges.*
Propriété étudiée : la résistance à la traction de tiges métalliques.
Population statistique : lensemble des 100 tiges ou des 100 mesures.
Unité statistique : chacune des tiges ou chacune des 100 mesures.

3.1.2 Variable statistique

c'est une propriété possédée par les unités statistiques permettant de les décrire et de les distinguer les une des autres. Toute unité statistique peut être décrite où étudier selon un où plusieurs caractères.

- ☐ Une étude sur les étudiants de l'université peut porter sur les différentes variables (caractères): leur âge, leur sexe, leur moyenne de l'année, ...
- ☐ Une variable (caractères) **qualitative** est une variable qui ne prend pas des valeurs numériques.

Exemple 3.1.2 *Couleur, nationalité,...*

- ☐ Une variable (caractères) **quantitative** est une variable qui est de la forme d'une variable numérique.

Exemple 3.1.3 *âge, moyenne de l'année,...*

3.1.3 Échantillon

On étudier un échantillon, c'est-a-dire un sous ensemble, beaucoup plus petit de la population.

3.1.4 Représentations graphiques

Dans le cas d'un caractère quantitatif, une représentation graphique de la distribution est, en général, plus parlante qu'un tableau de nombres. Nous allons examiner quelques représentations graphiques usuelles.

Cas d'une variable statistique discrète.

Lorsque la variable est discrète, les valeurs prises par cette variable sont en nombre fini. Soient $x_1, x_2, x_3, ..., x_k$ ces valeurs rangées dans l'ordre croissant: $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq ... \leq x_k$.
Désignons par $f_1, f_2, f_3, ..., f_k$ les fréquences correspondantes.

Diagramme en bâtons

On porte en abscisses les valeurs $x_1, x_2, x_3, ..., x_k$ et on porte en cordonnées les fréquences $f_1, f_2, f_3, ..., f_k$.
Les segments dont les extrémités sont les points de coordonnées $(x_i, 0)$ et (x_i, f_i) constituent le diagramme en bâtons de la distribution statistique.
Au lieu de porter en ordonnées les fréquences f_i, on peut porter les effectifs n_i.

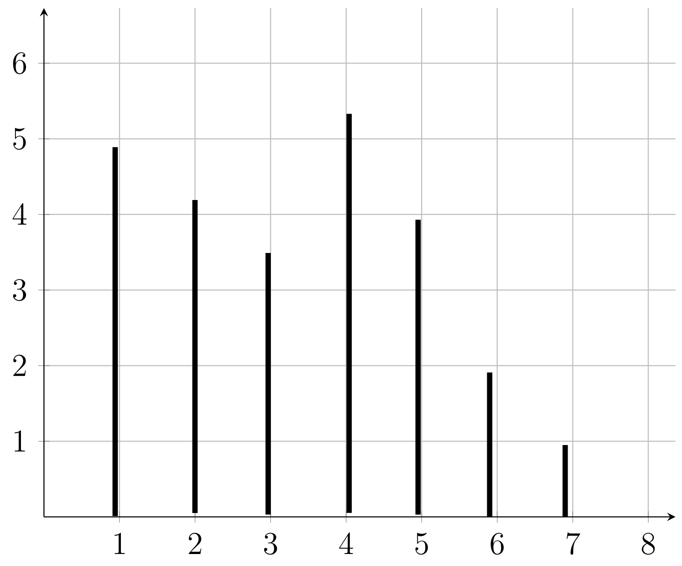
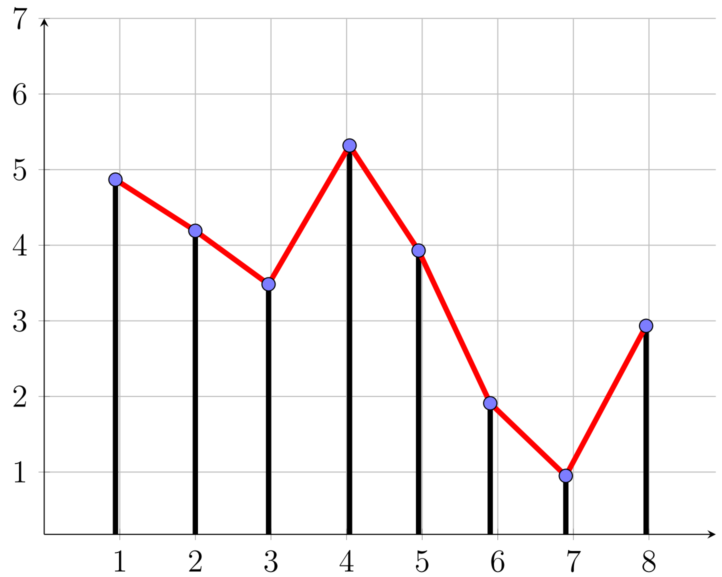


Figure 3.1: Diagramme en bâtons

Polygone de fréquence

On obtient le polygone de fréquence d'une distribution statistique en traçant les segments dont les extrémités sont les points de coordonnées (x_i, f_i) et (x_{i+1}, f_{i+1}). Cela revient à joindre les sommets consécutifs du diagramme en bâtons.



Cas d'une variable statistique continue.

Lorsque la variable statistique est continue les valeurs observées sont groupées en classes. Soient $[e_1, e_2[\,, [e_2, e_3[\,, ..., [e_i, e_{i+1}[$ les classes successives et $f_1, f_2, f_3, ..., f_k$ les fréquences correspondantes.

Histogramme

On subdivisé l'échelle des abscisses en intervalles consécutifs $[e_i, e_{i+1}[$, puis l'on construit sur chaque intervalle un rectangle dont l'aire est proportionnelle à la fréquence de la classe correspondante. Les rectangles obtenus constituent l'histogramme de la distribution statistique.

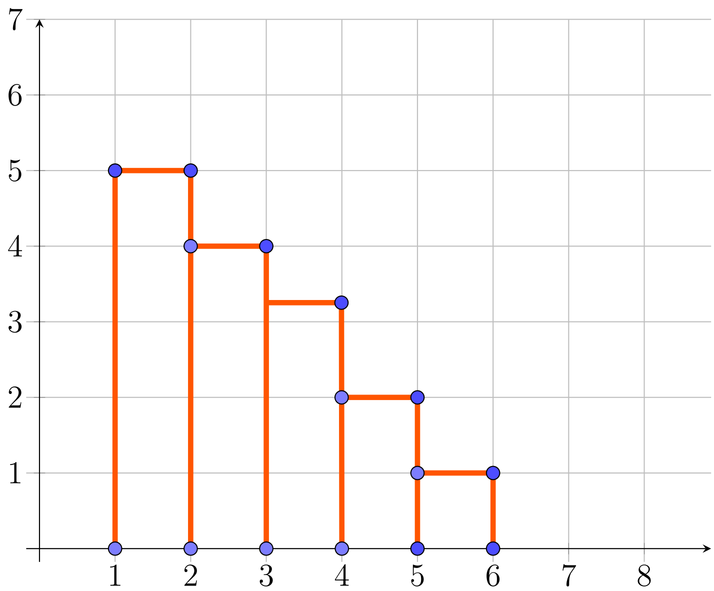


Figure 3.2: Histogramme

3.1.5 Fréquences absolues, relatives, cumulées

Dans le cas des variables discrètes, on appelle :

- ☐ Fréquence absolue n_i ou effectif, associée à une variable x_i, le nombre dapparitions de cette variable dans la population ou dans léchantillon.
- ☐ Fréquence relative, associée à la variable x_i de la population, le nombre

$$f_i = \frac{n_i}{N}$$

où n_i est la fréquence absolue et N le nombre total de données(effectif total).

- ☐ Fréquence cumulée absolue, associée à une valeur x_i de la variable, le nombre dindividus dont la mesure est inférieure ou égale à x_i .

$$N_i = \sum_{k=1}^{i} n_k$$

- ☐ On définit la fréquence cumulée relative :

$$F_i = \sum_{k=1}^{i} f_k$$

3.1.6 Fonction de répartition

Définition 3.1.2 *On appelle fonction de répartition d'une variable statistique X, la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ qui, à chaque réel λ, associe la fréquence $F(\lambda)$ des valeurs prises par X qui sont inférieur à λ.*

Remarque 3.1.1 *La fonction de répartition est donc une fonction croissante sur $\mathbb{R}$.*

Cas d'une variable discrète.
Soient $x_1, x_2, ..., x_k$ les valeurs, classées hdans l'ordre croissant, prise par la variable statistique discrète, et f_i la fréquence de la classe x_i.
Il résulte de la définition de la fonction de répartition F que :

si: $\lambda \leq x_1$, $\quad , F(\lambda) = 0$;
si:$x_1 < \lambda \leq x_2$, $\quad , F(\lambda) = f_1$;
si:$x_2 < \lambda \leq x_3$, $\quad , F(\lambda) = f_1 + f_2$;
si:$x_3 < \lambda \leq x_4$, $\quad , F(\lambda) = f_1 + f_2 + f_3$;
. . . .
si:$x_k < \lambda$, $\quad , F(\lambda) = f_1 + f_2 + f_3 + ... + f_k = \sum_{i=1}^{k} f_i$.
La fonction de répartition F est donc une fonction en escalier, croissante sur $\mathbb{R}$. Elle est continue en tout point λ_0 n'appartenant pas à $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$; elle est continue à gauche en chaque des points $x_1, x_2, ..., x_k$.

Cas d'une variable continue.
Soient $([e_{i-1}, e_i[\, , n_i)_{i=1}^{p}$ une sérié statistique continue et f_i la fréquence de la classe $[e_{i-1}, e_i[$.
Il résulte de la définition de la fonction de répartition F que:

si: $\lambda \leq x_1$, $\quad , F(\lambda) = 0$;
si:$\lambda = x_i$, $\quad , F(\lambda) = f_1 + f_2 + f_3 + ... + f_k = \sum_{i=1}^{k} f_k.$;
si:$\lambda \geq x_i$, $\quad , F(\lambda) = 1$.

La fonction de répartition F est croissante, il en résulte que si λ appartient à l'un des intervalles ouverts $]e_{i-1}, e_i[$, nous avons: $F(e_{i-1}) \leq F(\lambda) \leq F(e_i)$.

Paramètres de position

Les paramètres de position (ou de tendance centrale) permettent de savoir autour de quelles valeurs se situent les valeurs d'une variable statistique.

3.1.7 Le mode

Définition 3.1.3 *Soit* $(x_i, n_i)_{i=1}^N$ *une série statiqtique discrète. Le mode, noté* M_0 *la valeur de la variable statistique à laquelle correspond la plus grande fréquence (où effectif).*

Exemple 3.1.4 *(cas d'une série statistique discrète) Soit la série statistique suivante:*

Notes(x_i)	5	6	9	12	13	14
Nombre d'étudiants(n_i)	4	8	18	25	16	10

Le mode de cette série est $M_0 = 12$*, car il correspond au plus grand éffectif, soit* 25.

Exemple 3.1.5 *(cas d'une série statistique continue) On parle dans ce cas de la classe modèle* $[e_i, e_{i+1}[$. *Le tableau suivant donne lâge dune population de 1000 personnes.*

Salaires horaires(x_i) *.DA*	$[100, 150[$	$[150, 200[$	$[200, 250[$	$[250, 300[$	$[300, 350[$
Nombre d'ouvrier(n_i)	15	20	30	15	12

La classe modèle est $[200, 250[$. *Pour déterminer la valeur du mode, on utilise la formule suivante:*

$$M_0 = e_i + d \times \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \quad \textit{tels que}$$

e_i *: l'extrimité inférieure de la classe modèle*
d *: l'amplitude de la classe modèle* $(d = e_{i+1} - e_i)$
α_1*: la différence entre l'éffectif de la classe modèle et celle de la classe précédente*
α_2*:la différence entre l'éffectif de la classe modèle et celle de la classe suivante. Alors*

$$M_0 = 200 + 50 \times \frac{10}{10 + 15} = 220$$

3.1.8 La moyenne

Définition 3.1.4 *La moyenne dune série statistique discrète* $(x_i, n_i)_{i=1}^{N}$*, notée* $\overline{x}$ *est définie par*

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} n_i x_i$$

Exemple 3.1.6 *On prend lexemple 3.1.4, alors*

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} n_i x_i \\ &= \frac{1}{81}\left(4\times 5 + 8\times 6 + ... + 16\times 13 + 10\times 14\right) \\ &= 10,83.\end{aligned}$$

Remarque 3.1.2 *Lorsque on utilise les fréquences, on obtient la formule suivante*

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i \\ &= \frac{n_1}{N}x_1 + \frac{n_2}{N}x_2 + ... + \frac{n_k}{N}x_k \\ &= f_1x_1 + f_2x_2 + ... + f_kx_k \\ &= \sum_{i=1}^{k} f_i x_i.\end{aligned}$$

3.1.9 Médiane

Définition 3.1.5 *Soit* $(x_i, n_i)_{i=1}^{p}$ *une série statistique discrète. La médiane notée* M_e *est la valeur centrale qui partage la population étudier (série statistique) en deux groupes égales.*

Calcul de la médiane pour une série discrète:

- ☐ Pour déterminer la médiane, il faut ordonner la série d'une façons croissante ou décroissante.
- ☐ Si l'effectif total est impaire, c'est-à-dire $N = 2k + 1$, alors

$$M_e = x_{k+1}$$

- ☐ Si l'effectif total est paire, c'est-à-dire $N = 2k$, alors

$$M_e = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$$

Exemple 3.1.7 *Soit la série statistique suivante:*

$$16, 18, 14, 6, 8, 9, 6, 14, 2, 18, 5$$

□ *Pour déterminer la médiane de cette série, on doit ordonner la série:*

$$2, 5, 6, 6, 8, 9, 14, 14, 16, 18, 18$$

□ *On a* $N = 11 = 2 \times 5 + 1$, *alors la médiane de cette série est* $M_e = 9$.

Exemple 3.1.8 *On considère la séries dobservations suivante:*

$$11, 14, 8, 2, 5, 6$$

□ *Observations classées par ordre croissant,* $2, 5, 6, 8, 11, 14$
□ *On a* $N = 6 = 2 \times 3$, *alors la médiane de cette série est* $M_e = \frac{6+8}{2} = 7$.

Calcul de la médiane pour une série discrète:
Soit $([e_{i-1}, e_i[\,, n_i)_{i=1}^{p}$ une série statistique continue. Pour déterminer la médiane, on détermine la classe médiane $[e_{i-1}, e_i[$ en utilisant les effectifs cumulés. Dans ce cas la médiane est donnée par la formule:

$$M_e = e_{i-1} + d \times \frac{\frac{N}{2} - N_k}{n_k} \quad \text{tels que}$$

e_{i-1}:l'extrimité inférieure de la classe mediane
d:l'amplitude de la classe mediane ($d = e_{i-1} - e_i$)
N_k:effectif cumulé inférieure à e_{i-1}.
n_k:effectif de la classe médiane.
N: effectif totale.

Exemple 3.1.9 *Soit une étude sur la note d'une population de* 50 *étudiant.*

Notes	$[0, 5[$	$[5, 8[$	$[8, 12[$	$[12, 15[$	$[15, 20[$
Effectifs	10	8	12	11	9
Effectifs cumulés	10	18	30	41	50

La médiane se trouve dans la classe $[8, 12[$, *alors*

$$M_e = 8 + 4 \times \frac{\frac{50}{2} - 18}{12} = 10,33.$$

Paramètres de dispersion

3.1.10 Étendue

Définition 3.1.6 *L'étendue d'une série statistique quantitative, noté L est la différence entre la plus grande valeur de la variable (discrète ou continue) et la plus petite valeur.*

$$L = x_{max} - x_{min}$$

3.1.11 Quantiles

Définition 3.1.7 *Les quantiles sont des caractéristiques de position partageant la série statistique ordonnée en k parties égales.*
Pour $k = 4$, les quantiles, appelés quartiles, sont trois nombres Q_1, Q_2, Q_3 tels que :

- ☐ 25% *des valeurs prises par la variable sont inférieures à Q_1,*
- ☐ 25% *des valeurs prises par la variable sont supérieures à Q_3,*
- ☐ Q_2 *est la médiane M_e ,*
- ☐ $Q_3 - Q_1$ *est lintervalle interquartile, il contient* 50% *des valeurs de la variable.*

Exemple 3.1.10 *Soit la série ordonnée par ordre croissant a* 12 *termes*

$$11, 12, 13, 15, 16, 16, 17, 17, 18, 19, 20, 22$$

Rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Série	11	12	13	15	16	16	17	17	18	19	20	22

- ☐ *Un quart* (25%) *des données correspond à $12 \times 0,25 = 3$, alors $Q_1 = 13$.*
- ☐ *Trois quart* (75%) *des données correspond à $12 \times 0,75 = 9$, alors $Q_3 = 18$.*

3.1.12 Déciles

Définition 3.1.8 ☐ *On appelle* ***premier décile*** *d'une série statistique la plus petite valeur D_1 des termes de la série pour laquelle au moins un dixième* (10%) *des données inférieur ou égale D_1.*

☐ *On appelle* ***neuvième décile*** *d'une série statistique la plus petite valeur D_9 des termes de la série pour laquelle au moins un neuf dixièmes* (90%) *des données inférieur ou égale D_9.*

□ *On appelle* ***intervalle inter-décile*** *d'une série statistique l'intervalle* $[D_1, D_9]$.

□ *On appelle* ***écart inter-décile*** *d'une série statistique le nombre* $D_9 - D_1$.

Exemple 3.1.11 *Soit la série ordonnée par ordre croissant à* 11 *termes suivante:*

$$1500, 1650, 1700, 1800, 1850, 2000, 2100, 2300, 2500, 2650, 2700$$

Rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Série	1500	1650	1700	1800	1850	2000	2100	2300	2500	2650	2700

□ *Un dixième* (10%) *des données correspond à* $11 \times 0,01 = 1,1$ *et* $2 \geq 1,1$, *alors* $D_1 = 1650$.

□ *neuf dixième* (90%) *des données correspond à* $11 \times 0,9 = 9,9$ *et* $10 \geq 9,9$, *alors* $D_1 = 2650$.

3.1.13 La Variance

Définition 3.1.9 *Soit* $(x_i, n_i)_{i=1}^{p}$ *une série statistique. La variance dun échantillon, notée* $V(x)$, *est appelée aussi écart quadratique moyen ou variance empirique.*

$$V(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{p} n_i (x_i - \overline{x})^2$$

Proposition 3.1.1 *Soit* $(x_i, n_i)_{i=1}^{p}$ *une série statistique. La variance est donnée par la formule*

$$V(x) = \overline{x^2} - \overline{x}^2$$

Démonstration 7 *On a par définition*

$$\begin{aligned}
V(x) &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i (x_i - \overline{x})^2 \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i \left(x_i^2 - 2x_i\overline{x} + \overline{x}^2\right) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2 - \frac{2\overline{x}}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i + \frac{\overline{x}^2}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i \\
&= \overline{x^2} - 2\overline{x}^2 + \overline{x}^2 \\
&= \overline{x^2} - \overline{x}^2.
\end{aligned}$$

3.1.14 L'écart-type

Définition 3.1.10 *Lécart-type d'une série statistique$(x_i, n_i)_{i=1}^{p}$, noté par $\sigma(x)$, est, par définition, la racine carrée de la variance de cette série, c'st-à-dire*

$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)}$$

Remarque 3.1.3 *1) Si $\sigma(x)$ est faible, cela signifier que les valeurs de série statistique sont assez concentrées autour de la moyenne.*

2) Si $\sigma(x)$ est élevé, cela signifier que les valeurs de série statistique sont plus dispersées autour de la moyenne.

3.2 Exercices

Exercice N°1:

Soit la série statistique donnant les notes obtenues à un examen de mathématiques :

2; 2; 2; 2; 2; 2; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 7; 7; 7; 7; 7; 7; 7; 8; 8; 8; 8; 9; 9; 10; 10; 10; 11; 12

1) Déterminer la population statistique, le caractère étudié et sa nature.

2) Déterminer la valeur du mode, la médiane et la moyenne de cette série.

3) Regrouper les données dans un tableau, en calculant les fréquences, les effectifs cumulées croissantes et décroissantes.

4) Représenter cette série statistique.

Exercice N°2:

Au poste de péage, on compte le nombre de voitures se présentant sur une période de $5mn$. Sur 100 observations de $5mn$, on obtient les résultats suivants :

Nombre de voitures	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nombre d'observations	2	8	14	20	19	15	9	6	2	3	1	1

1) Construire la table des fréquences et le diagramme en bâtons en fréquences de la série.

2) Calculer la moyenne et lécart-type de cette série.

3) Déterminer la médiane et le mode de cette série.

4) Etudier la symétrie de la série.

Exercice N°3:

Le tableau statistique suivant donne la longueur totale du crâne de 60 souris.

Longueur totale du crâne (mm)	$22,5$	23	$23,5$	24	$24,5$	$24,5$	25
Effectifs	6	6	21	9	10	6	2

1) Quelle est la population statistique étudiée ? Quelle est la variable étudiée et sa nature ?

2) Calculer la longueur totale du crâne moyen $\overline{X}$.

3) Calculer l'écart-type σ.

4) Déterminer le nombre de souris où la longueur totale du crâne appartient à l'intervalle $\left]\overline{X}-\sigma, \overline{X}+\sigma\right[$.

Exercice N°4:

La température est relevée chaque heure pendant 4 jours dans une foret. Les résultats obtenus ont été triés et sont rassemblés dans le tableau suivant :

Températeur	$14,5$	15	$15,5$	16	$16,5$	17	$17,5$	18	$18,5$
Effectifs	5	7	10	12	15	10	11	9	8

1) Quelle est la variable statistique étudiée et sa nature ?
2) Calculer la moyenne de cette serie.
3) Déterminer la médiane et le mode de cette serie.
4) Calculer la variance et l'écart-type

Exercice N°5:

Désirant connaitre mieux sa clientèle, le directeur dune entreprise fait procéder à un sondage. Il obtient, entre autre informations, la répartition par âge des clients.

âge (ans)	$[15, 20[$	$[20, 25[$	$[25, 30[$	$[30, 35[$	$[35, 40[$	$[40, 45[$	$[45, 50[$
effectif	13	26	28	15	10	5	3

1) Représenter cette série statistique, en déduire le mode.

2) Tracer les courbes de fréquences cumulées croissantes et décroissantes, en déduire la médiane.

3) Retrouver les valeurs du mode, la médiane et la moyenne arithmétique par le calcul.

4) Donner la proportion des clients dont lâge est supérieur ou égale à 40 ans.

CHAPTER 4

LOIS DE PROBABILITÉS

4.1 Intoduction

La théorie des probabilités est une discipline mathématique qui tire son origine de l'études des jeux de hasard: Pile ou Face,dés, jeux de cartes...
L'utilisation de la théorie des probabilités comme modèle mathématique pour interpréter les données statistiques a donnée naissance à une nouvelle discipline: la statistique Mathématique.
Actuellement, la théorie des probabilité a des applications dans des domaines variés: physique, chimie, biologie, médecine,...

4.2 Espace probabilisable

4.2.1 Expérience aléatoire, événements aléatoires

Définition 4.2.1 *Une expérience est qualifiée d'aléatoire si on ne peut pas prévoir par avance son résultat et si, répétée dans les meme conditions, elle peut donner des résultats différents.*

Exemple 4.2.1 *1) On lance un dé, c'est une expérience aléatoire.*

2) Relevé des durées de vie d'un lot de 1000 *lampes.*

3) Lancer plusieurs fois une même pièce de monnaie parfaitement équilibrée.

Définition 4.2.2 *Les résultats possible d'une expérience aléatoire constituent l'ensemble fondamental* Ω *appelé aussi univers*

4.3 événement aléatoire

Définition 4.3.1 *Etant donnée une experience aléatoire, on appelle événement aléatoire les différentes résultats possibles de cette experience.*

Exemple 4.3.1 *On lance un dé deux foid de suite, on s'intéresse aux chifres inscrit sur les faces supérieures. Dans ce cas*

$$\Omega = \{(1,1)\,;(1,2)\,;(1,3)\,;...;(2,1)\,;(2,3)\,;...;(6,6)\}$$

On a $card\,(\Omega) = 36$ (*nombres des couples*) .

Soit l'événement A : "*la somme des deux chifres est inférieure à* 4", *donc* A *c'est une événement donnée par*

$$A = \{(1,1)\,;(1,2)\,;(1,3)\,;(2,1)\,;(2,2)\,;(3,1)\}$$

4.4 Algèbre des événements

- ☐ A tout événement A, on associe sont contraire $\overline{A}$
- ☐ Si A et B deux événements, on associe leur union $A \cup B$, leur intersection $A \cap B$.
- ☐ L'événements certain est Ω.
- ☐ L'événements imposible est
- ☐ On appelle tribu de partie d'un ensemble Ω un ensemble $\mathcal{A}$ de parties de Ω vérifiant

$$\begin{cases} \cdot\ \Omega \in \mathcal{A} \\ \cdot\ \forall A \in \mathcal{A}, \overline{A} \in \mathcal{A} \\ \cdot\ \cup_{i\in I} A_i \in \mathcal{A} \end{cases}$$

- ☐ On appelle espace probabilisable un couple $(\Omega, \mathcal{A})$.

4.5 Probabilité

Définition 4.5.1 *On appelle probabilité sur l'espace probabilisable* $(\Omega, \mathcal{A})$ *une application*

$$P : \mathcal{A} \longrightarrow [0,1] \ \ \textit{tel que}$$

□ $P(\Omega) = 1$
□ $\forall A_1, A_2, ..., A_i, ...$ *d'événements incompatible,* $P(\cup_{i\in I} A_i) = \sum_i P(A_i)$.
□ *Le triplet* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *est appelé espace probabilisé.*

4.6 Evénements élémentaires equibrobables

Soit Ω un univers contient n évenements élémentaires équiprobables. Si A est un évenement de Ω formé de la réunion de k élémentaires, alors

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{\text{le nombre de cas favorables}}{\text{le nombre de cas possibles}}$$

Exemple 4.6.1 *On lance deux dés, donc il ya* 36 *événements élémentaires c'est-à-dire l'ensemble* $\Omega = \{(i,j)\,;\ 1 \le i, j \le 6\}$. *Chaque paire aura donc une probabilité d'apparition de* $\frac{1}{36}$. *Soient les événements suivantes:* A :*" la somme des deux chifres est* 3*"*
B :*" la somme des deux chifres est* < 5*"*
C :*" la somme des deux chifres est paire", alors*

$$A = \{(1,2)\,;(2,1)\} \longrightarrow P(A) = \frac{card\,(A)}{card\,(\Omega)} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

$$B = \{(1,2)\,;(2,1)\,(1,3)\,;(3,1)\,;(2,2)\} \longrightarrow P(B) = \frac{card\,(B)}{card\,(\Omega)} = \frac{5}{36}$$

$$C = \left\{ \begin{array}{c} (1,1)\,;(2,2)\,,(3,3)\,;(4,4)\,;(5,5)\,,(6,6)\,,(1,5)\,,(5,1)\,,(6,4)\,,(4,6)\,, \\ (3,5)\,,(5,3)\,,(2,6)\,,(6,2) \end{array} \right\}$$

$$\longrightarrow P(C) = \frac{card\,(C)}{card\,(\Omega)} = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$$

4.7 Variables aléatoires

Définition 4.7.1 *On appelle variable aléatoire* X *toute application de* $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

Si l'ensemble des valeurs de cette application est finie ou dénombrable, on dit que cette variable est discrète.

Exemple 4.7.1 *On lance deux pièces de monaie. Soit* X *la variable aléatoire qui représente le nombre de pile. Les valeurs possibles de* X *sont :* $0, 1, 2$ *et l'univers de cette expérience aléatoire est :*

$$\Omega = \{(P,P)\,,(P,F)\,,(F,P)\,,(F,F)\}\,.$$

Alors

$$\begin{aligned}
P\{X=0\} &= P\{(F,F)\}=\frac{1}{4};\\
P\{X=1\} &= P\{(P,F),(F,P)\}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2};\\
P\{X=2\} &= P\{(P,P)\}=\frac{1}{4};
\end{aligned}$$

on obtient alors ce qu'on appelle loi de probabilité ou distribution de la variable X qui est donnée dans le tableau suivant

X	0	1	2
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

4.8 Fonction de répartiotion

Définition 4.8.1 *On appelle fonction de répartition d'une variable aléatoire X l'application $F_X:\mathbb{R}\longrightarrow[0;1]$ définie par*

$$F_X(t):=P(X\leq t)=\sum_{x_k\in X(\Omega),x_k\leq t}P(X=x_k)$$

Soit X une variable aléatoire réel discrète, alors
i) F_X est croissante sur $\mathbb{R}$.
ii) $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}F_X(x)=1$
iii) $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}F_X(x)=0$

Exemple 4.8.1 *Soit X la variable aléatoire donnant la somme des chifres obtenus en lançant deux dés à six faces bien équilibrés. L'ensemble fondamentale (l'univers) est*

$$\Omega=\{(i,j)\,;\ 1\leq i,j\leq 6\}\,,\ card(\Omega)=36\ \textit{couples et}\ X(i,j)=i+j$$

Alors

$$X(\Omega)=\{2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12\}$$

$$
\begin{aligned}
P_X(2) &= P(X=2) = P\{(1,1)\} = \frac{1}{36};\\
P_X(3) &= P\{X=3\} = P\{(1,2),(2,1)\} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}\\
P_X(4) &= P\{X=4\} = P\{(2,2),(3,1),(1,3)\} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}\\
P_X(5) &= \frac{4}{36};\ P_X(6) = \frac{5}{36};\ P_X(7) = \frac{6}{36};\ P_X(8) = \frac{5}{36};\\
P_X(9) &= \frac{4}{36};\ P_X(10) = \frac{3}{36};\ P_X(11) = \frac{2}{36};\ P_X(12) = \frac{1}{36}.
\end{aligned}
$$

La loi de X est donnée par

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

La fonction de répartition de X est définie par

$$F_X(t) := P(X \le t) = \sum_{x_k \in X(\Omega), x_k \le t} P(X = x_k).$$

On calcul $F_X(t)$ pour $t \in \{2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12\}$, on a

$$
\begin{aligned}
F_X(x) &= 0 \text{ si } x < 2.\\
F_X(2) &= P_X(2) = \frac{1}{36};\\
F_X(3) &= \sum_{x_k \in X(\Omega), x_k \le 3} P(X \le 3) = P_X(2) + P_X(3) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} = \frac{3}{36}\\
F_X(4) &= \sum_{x_k \in X(\Omega), x_k \le 4} = P(X \le 4) = P_X(2) + P_X(3) + P_X(4) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}\\
&\cdots\cdots\cdots\\
F_X(4) &= \sum_{x_k \in X(\Omega), x_k \le 12} = 1 \ (\ F_X \text{ est croissante })
\end{aligned}
$$

4.9 Espérence mathématique

Définition 4.9.1 *Soit X une variable aléatoire discète. On appelle espérence mathématique de X noté $E(X)$ le réel défini par*

$$E(X) = \sum_{x_k \in X(\Omega)} x_k P(X = x_k)$$

Proposition 4.9.1 *Si X et Y deux variables aléatoires discètes, alors*

i) $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
ii) $E(\alpha X) = \alpha E(X), \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Exemple 4.9.1 *On reprend l'exemple* $(4.7.1)$, *la loi de la variable X est donnée dans le tableau suivant*

X	0	1	2
$P(X = x_k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$E(X) = \sum_{x_k \in \{0;1;2\}} x_k P(X = x_k) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{2}{4} + 2 \times \frac{1}{4} = 1$$

4.10 Vriance etécart-type

Définition 4.10.1 *Soit X une variable aléatoire discète.*

On appelle variance de X notée $V(X)$ le réel défini par

$$V(X) = E\left[(X - E(X))^2\right] = \sum_{x_k \in X(\Omega)} (x_k - E(X))^2 P(X = x_k)$$

On appelle écart-type de X noté $\sigma(X)$ le réel positive défini par

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Proposition 4.10.1 *Soit X une variable aléatoire discète.*

$\triangleright$ $V(\alpha X) = \alpha^2 V(X), \forall \alpha \in \mathbb{R}$
$\triangleright$ $V(X + \beta) = V(X), \forall \beta \in \mathbb{R}$.

Proposition 4.10.2 *Si X une variable aléatoire, alors*

$$V(X) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2$$

Exemple 4.10.1 *On reprend l'exemple* $(4.7.1)$. *On calcul la vriance de X. On a*

$$\begin{aligned} V(X) &= E\left(X^2\right) - (E(X))^2 \\ &= \sum_{x_k \in X(\Omega)} x_k^2 P(X = x_k) - (E(X))^2 \\ &= \left(0 \times \frac{1}{4} + 1^2 \times \frac{2}{4} + 2^2 \times \frac{1}{4}\right) - (1)^2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

4.11 Variables aléatoires continues

4.11.1 Densité de probabilité

Définition 4.11.1 *Une fonction* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *à valeurs positives, intégrables (i.e* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ *existe) est appellée densité de probabilité si est seulement si*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$$

Exemple 4.11.1 *Soit* f *la fonction définie par*

$$f(x) = \begin{cases} 0 \ si\ x < 0 \\ e^{-x} \ si\ x \geq 0 \end{cases}$$

On a

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} 0.dx + \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x}dx = 1,$$

alors f *est une densité de probabilité.*

4.12 Espérence mathématique, variance

Définition 4.12.1 *Soit* X *une variable aléatoire continue de densité* f.

☐ *L'espérence mathématique de* X *est donné par l'intégrale (quand elle existe) suivante*

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx$$

☐ *La variance de* X *est donnée par l'intégrale (quand elle existe) suivante*

$$V(X) = \int_{\mathbb{R}} (x - E(X))^2 f(x)dx$$

Proposition 4.12.1 *La variance d'une variable aléatoire* X *est donnée par*

$$V(X) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)dx - (E(X))^2$$

4.13 Quelques exemples de loi de probabilité

4.13.1 Le cas discrète

Loi uniforme

Définition 4.13.1 *Soit X une v.a prenant ses valeurs dans l'ensemble* $\{1; 2, 3; ...; n\}$

La loi de X est dite uniforme sur $[1, n]$ si

$$\forall k \in [1, n] : P(X = k) = \frac{1}{n}$$

Proposition 4.13.1 *Soit X une variable aléatoire suit une loi uniforme, alors*

i) $V(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$
ii) $E(X) = \frac{n+1}{2}$

4.13.2 Loi de Bernoulli

Définition 4.13.2 *On dit que une variable aléatoire diiscète X suit la loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0; 1]$ si elle ne prend que les valeurs 0 et 1, avec*

$$P(X = 1) = p; \quad P(X = 0) = 1 - p$$

On note $X \rightsquigarrow \mathfrak{B}(p)$.

Proposition 4.13.2 *Soit X une variable aléatoire suit une loi de Bernoulli, alors*

i) $E(X) = p$
ii) $E(X) = p(1 - p)$

4.13.3 Loi binomiale

Définition 4.13.3 *On dit que une variable aléatoire diiscète X suit la loi binomiale de paramètre $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0; 1]$, si l'ensemble des valeurs possibles est*

$$X(\Omega) = \{1; 2; ...; n\}$$

et si

$$\forall k \in \{1; 2; ...; n\} : P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$$

On note $X \rightsquigarrow \mathfrak{B}(n, p)$.

Proposition 4.13.3 *Soit X une variable aléatoire suit une loi binomiale, alors*

i) $E(X) = np$
ii) $E(X) = np(1-p)$

4.13.4 Le cas continue

4.13.5 Loi uniforme

Définition 4.13.4 *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. On dit qu'une variable réelle suit une loi uniforme sur $[a, b]$ si sa densité f est telle que, $\forall x \in \mathbb{R}$*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & si\ x \in [a, b] \\ 0 & si\ x \notin [a, b] \end{cases}$$

Proposition 4.13.4 *Soit A un sous-ensemble de $[a, b]$ de longueur $|L|$, on a alors*

$$P(X \in A) = \frac{|L|}{b-a}$$

Proposition 4.13.5 *Soit X une variable continue suit une loi uniforme, alors*

i) $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$
ii) $E(X) = \dfrac{(a-b)^2}{12}$

4.13.6 Loi normale (ou gaussienne)

Ces lois sont peut-être les plus importantes de toute la théorie des probabilités.

Définition 4.13.5 *Soient μ et $\sigma > 0$ deux réels. Une variable aléatoire réel X suit la loi normale de paramètres μ, σsi sa densité de probabilité $f_{\mu,\sigma}$ est telle que,$\forall x \in \mathbb{R}$*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

On note $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

Remarque 4.13.1 *La fonction f est bien une densité de probabilité.*

i) $E(X) = \mu$
ii) $E(X) = \sigma^2$

Loi normale centrée réduite

Définition 4.13.6 *Une variable aléatoire continue X suit une loi normale centrée réduite si sa densité de probabilité est donnée par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

i) $E(X) = 0$
ii) $E(X) = 1$

Remarque 4.13.2 *Si X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, alors $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit une la loi normale réduite $\mathcal{N}(0,1)$.*

4.13.7 Calcul des probabilités d'une loi normale

Vu la symétrie de cette distribution, la table donne des probabilité que pour des valeurs positives de x. On remarquera que

$$P(X < -x) = P(X > x) = 1 - P(X < x)$$

Exemple 4.13.1

$$\begin{aligned} P(X &< -2) = P(X > 2) = 1 - P(X < 2) = \\ P(X &> 0,8) = 1 - P(X < 0,8) = \\ P(0,3 &< X < 2) = P(X < 2) - P(X < 0,3) = \end{aligned}$$

4.13.8 Lois déduites de la loi normale

Loi de $\mathcal{X}^2$ (ki-deux)

La loi de $\mathcal{X}^2$ (ki-deux) trouve de nombreuses applications dans le cadre de la comparaison de proportions, des tests de conformité d'une distribution observée à une distribution théorique et le test d'indépendance de deux caractères qualitatifs.

Soit $X_1, X_2, ..., X_n, n$ variables normales centrées réduites, on appelle $\mathcal{X}^2$ la variable aléatoire définie par :

$$\mathcal{X}^2 = X_1^2 + X_2^2 + ... + X_n^2 = \sum_{k=1}^{n} X_k^2$$

On dit que $\mathcal{X}^2$ suit une loi de Pearson à n degrés de liberté (d.d.l.).

Loi de student

La loi de Student (ou loi de Student-Fisher) est utilisée lors des tests de comparaison de paramètres comme la moyenne et dans l'estimation de paramètres de la population à partir de données sur un échantillon

Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale réduite $\mathcal{N}(0,1)$ et Z une variable aléatoire suivant une loi de Pearson à n degrés de liberté $\mathcal{X}_n^2$. X et Y étant indépendantes, on

dit alors que $T_n = \dfrac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$ suit une loi de Student à n degrés de liberté.

4.14 Exercices

Exercice N1 : Déterminer l'univers Ω associé aux expériences aléatoires suivantes :

1. On lance un dé non truqué.
2. On lance deux dés à la fois (non pipés)
3. On lance une pièce de monaie bien équilibrée

Exercice N2 : On lance une piece de monaie trois fois de suite.

1. Déterminer l'univers Ω associé à cette expérience aléatoire
2. Calculer la probabilité des événements suivantes :

A :‹‹ Obtenir 3 faces ››
B :‹‹ Obtenir 1 face et 2 piles ››
C :‹‹ Obtenir 2 faces et 1 pile ››
D :‹‹ Obtenir 3 piles ››

Exercice N3 : Etant donné la distribution de probabilité suivante :

X	1	3	4
$P(X)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$

1. Calculer l'espérence mathématique $E(X)$.
2. Calculer $E(X^2)$. En déduire la variance $V(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$.

Exercice N4 : Soit f la fonction définie par :

$$f_X(t) = \begin{cases} \lambda e^{-t} & \text{si} \quad t \geq 1 \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

1. Déterminer le paramètre λ pour que f soit bien une densité de probabilité d'une variable aléatoire X.

2. Déterminer la fonction de répartition F_X de X.
2. Calculer $P\left(1,5 \leq X \leq 3\right).$

Exercice N5 : On lance deux dés distincts équilibrés, et on s'intéresse au plus grand X obtenu.
1. Déterminer la loi de distribution de X.
2. Calculer $E\left(X\right)$ et $V\left(X\right).$ En déduire $\sigma\left(X\right).$
2. Déterminer la fonction de répartition F_X de X.

Exercice N6 :

Soit X la variable aléatoire représentant le poids d'un bébé à la naissance. On fait l'hypothèse que :

$$X \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(3500, 500\right)$$

1. Quelle est la probabilité q'un enfant ait un poids inferieure à $3,2\ kg$ à la naissance ?

Exercice N7 : En utilisant la table de la loi normale centré réduite, calculer les probabilités :

$$1.\ P\left(0 \leq X \leq 1,2\right);\quad 2.\ P\left(-0,66 \leq X \leq 0\right);\quad 3.\ P\left(-0,5 \leq X \leq 2,22\right)$$

BIBLIOGRAPHY

[1] J. Bass : Cours de mathématiques. 1971.

[2] J. Bass : Cours de mathématiques tome 3. 1977.

[3] N. Bourbaki : *Fonctions d'une variable réelle: théorie élémentaire.* Springer Science & Business Media, 2007.

[4] C. Cassidy : *Introduction à lanalyse. Fonctions d'une variable réelle.* Presses de l'Université Laval, 2018.

[5] J. Dixmier : Cours de mathématiques du premier cycle. 1969.

[6] Y. Dodge et Y. Dodge : *Premiers pas en statistique.* Springer, 2006.

[7] G. Haesbroeck et V. Henry : Pratique de la statistique descriptive: résolution et interprétation de problèmes. 2004.

[8] V. Jarník : Sur la dérivabilité des fonctions continues. 1934.

[9] J. Labelle et A. Mercier : *Introduction à l'analyse réelle.* Modulo, 1993.

[10] M. Lejeune : *Statistique: La théorie et ses applications.* Springer Science & Business Media, 2004.

[11] F. Liret : *Maths en pratique: A l'usage des étudiants.* Dunod, 2006.

[12] S. Morgenthaler : *Introduction à la statistique.* PPUR presses polytechniques, 2007.

[13] V. Rivoirard et G. Stoltz : Statistique mathématique en action, 2012.

[14] E. Ronchetti, G. Antille et M. Polla : Statistique et probabilités: Une introduction. 1991.

[15] S. M. Ross : *Initiation aux probabilités.* PPUR presses polytechniques, 2007.

[16] C. Wagschal : *Dérivation, intégration.* Editions Hermann, 1999.

[17] R. Walter : Principes danalyse mathématique, 1995.