RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN TIARET
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUES
Département de Mathématiques

MÉMOIRE MASTER

Présenter en vue de l'obtention du diplôme de master

Spécialité :

« Mathématiques »

Option :
« Analyse Fonctionnelle et Applications »

Présenté Par :
Kroumli Nadjet et Zenouda Ouafaa

Sous L'intitulé :

La dérivée fractionnaire Du ψ-caputo et application sur les equations différentielles fractionnaires

Soutenu publiquement le : 27 / 06 / 2024
à Tiaret devant le jury composé de :

Mr BENDOUMA Bouharket	MCA	Université de Tiarte	Président
Mr BENHABI Mohamed	MAA	Université de Tiarte	Examinateur
Mr MAHROUZ Tayeb	MCA	Université de Tiarte	Encadreur

Année universitaire : 2023/2024

Remerciements

J'aimerais en premier lieu remercier mon dieu ***Allah*** *qui ma donné la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail.*

Mes plus vifs remerciements vont aussi à mon encadreur ***Mr. Mahrouz Tayeb****, pour ses précieux conseils, son aide et son encouragement. Je remercie vivement* ***Mr. BENDOUMA Bouharket*** *de l'honneur qu'il me fait en présidant ce jury.*

J'adresse mes remerciements à ***Mr. BENHABI Mohamed*** *qui ma fait l'honneur de juger ce travail.*

Nous adressons également un grand merci à tous les enseignants de département de Mathématiques ainsi que l'administration en général.

Et en fin j'adresse mes sincère remerciement à mes parents, mes frères et sœurs, mes amis et à tous qui sont contribué de prés ou de loin à l'élaboration de ce travail.

Dédicaces

je dédie ce travail :

À mes chèrs parents pour leur soutien, leur patience

et leurs encouragements durent mon parcours universitaire.

À mes frères, ainsi ma famille ***KROUMLI*** *.*

À mes Amis. À Tous mes professeurs

qu'il soient du primaire, du secondaire ou du supérieur.

NADJET

je dédie ce travail :

À mes chères parents pour leur soutien, leur patience

et leurs encouragements durent mon parcours universitaire.

À mes frères, ainsi ma famille ***ZENOUDA*** *.*

À mes Amis. À Tous mes professeurs

qu'il soient du primaire, du secondaire ou du supérieur.

OUAFAA

TABLE DES MATIÈRES

1 Notions générales et définitions **10**

1.1 Espace fonctionnels 10

1.1.1 Espaces L^p, lorsque $p \in [1, +\infty[$ 10

1.1.2 Espaces $C^n([a, b], \mathbb{R}), n \in \mathbb{N}$ 11

1.2 Fonctions utiles 12

1.2.1 La fonction Gamma $\Gamma(.)$ d'Euler 12

1.2.2 La fonction Bêta 16

2 Intégrales et dérivées fractionnaires **19**

2.1 Intégrale fractionnaire 19

2.2 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville (R-L). 20

2.3 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville 23

2.4 Quelques propriétés de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville . 24

2.5 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo. 25

2.6 La relation entre l'approche de Riemann-Liouville et celle de Caputo. 27

2.7 Intégrales et dérivées fractionnaires par rapport une fonction. 27

2.8 Théorème de point fixe 30

2.9 Lemmes Fondamentaux 31

3 Problème aux limites pour l'équation différentielle non linéaire d'ordre fractionnaire 33

3.1 Introduction 33

3.2 Existence et unicité de la solution 34

3.2.1 Premier Résultat 35

3.2.2 Deuxième Résultat 37

3.3 Exemples 40

NOTATION

Dans tout ce qui suite, nous utiliserons les notations suivantes :

$\mathbb{N}$	:	Ensemble des nombres entiers naturels.
$\mathbb{R}$	:	Ensemble des nombres réels .
$\mathbb{C}$	:	Ensemble des nombres complexe.
$L^p(\Omega)$	:	Espace des fonctions mesurables de puissance $p \in [0, +\infty[$ intégrables Sur Ω.
$C(\Omega)$	:	Espace des fonctions continues sur Ω.
$C^n(\Omega)$	:	Espace des fonctions $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables n fois et $f^{(n)}$ continues.
$AC(\Omega)$	:	Espace des fonctions absolument continues sur Ω.
$AC^n(\Omega)$	:	Espace des fonctions dérivables à l'ordre $n-1$ et elle que $f^{(n-1)} \in AC(\Omega)$.
$\Gamma(.)$	:	La fonction Gamma.
$B(.;.)$	:	La fonction Beta.
$I^\alpha f$	:	Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$.
$D^\alpha f$	:	Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$.
${}^cD^\alpha f$	:	Dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $\alpha > 0$.
$Re(\mathbb{Z})$	:	Partie réelle de $\mathbb{Z}$.
$C(J, \mathbb{R})$	:	Espace des fonctions continues sur J et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

RÉSUMÉ

Dans ce travail, nous nous intéressons à étudier les résultats de l'existence et de l'unicité des solutions pour un problème différentielle non linéaire d'ordre fractionnaire, avec la dérivée de ψ- Caputo.

Ces résultats sont établis. En utilisant les théorèmes des points fixes de Leray-Schaouder, et le principe de contraction de Banach.

À la fin nous présentons un exemple concret pour appliquer les résultats théoriques obtenus.

Mots clés : Dérivée fractionnaire de Caputo, dérivée fractionnaire de ψ-Caputo, théorème du point fixe de Schaeder, principe de contraction de Banach.

ABSTRACT

In this work, we are interested in studying the results of the existence and uniqueness of solutions for a nonlinear differential problem of fractional order, with the ψ-Caputo derivative. These results are established. Using the Leray-Schaouder fixed point theorems, and the Banach contraction principle.

At the end we present a concrete example to apply the theoretical results obtained.

Keywords : Caputo fractional derivative, ψ-Caputo fractional derivative, Schauder's fixed point theorem, Banach cotraction principal.

INTRODUCTION

Le calcul fractionnaire est une théorie des intégrales et des dérivées d'ordre réel arbitraire ou même complexe. C'est une généralisation du calcul classique et par conséquent préserve beaucoup des propriétés de base. En tant que zone de développement intensif du calcul au cours des deux dernières décennies, elle offre de formidables nouvelles caractéristiques de la recherche et devient ainsi de plus en plus utilisée dans diverses applications.

Le terme calcul fractionnaire a plus de 300 ans. Le sujet est aussi vieux que le calcul de la différenciation et remonte à des temps où Leibniz, Gauss et Newton ont inventé ce genre de calcul. Dans une lettre adressée à L'Hôpital en 1695, Leibniz a posé la question suivante (Miller et Ross 1993 [22] : "Peut le sens de dérivées avec ordres entiers se généralisent aux dérivées avec des ordres non entiers ." L'histoire raconte que L'Hôpital était quelque peu curieux à propos de cette question et a répondu par une autre question à Leibniz : "Et si la commande sera de 1/2 ?"

Dans une lettre datée du 30 septembre 1695, Leibniz répond :"Cela conduira à un paradoxe, dont un jour des conséquences utiles seront tirées." La question soulevée par Leibniz pour une dérivée fractionnaire était un sujet récurrent au cours des 300 dernières années.

Les mathématiciens ont contribué à ce sujet au fil des années : Laplace (1812), Fourier (1822), Abel ($1823-1826$), Liouville ($1832-1837$), Riemann (1847). Grün-wald ($1867-1872$), Letnikov ($1868-1872$), Heaviside ($1892-1912$), Weyl (1917) et Erdélyi ($1939-1965$) et plusieurs

(Voir Gorenflo and Mainardi [29]) ont apporté des contributions majeures à la théorie du calcul fractionnaire. La première conférence spécialisée sur le calcul fractionnaire et ses applications en 1974 à l'université de New Haven, aux états-Unis, initie les livres les plus récents de (Miller and Ross [22], Podlubny [21], etc).

Les dérivées d'ordre entier ont une interprétation physique claire et sont utilisées pour décrire différents concepts en physique classique. Par exemple, la position d'un objet en mouvement peut être représentée en fonction du temps, la vitesse de l'objet est alors la dérivée première de la fonction, l'accélération est la dérivée seconde et ainsi de suite. Les dérivées et les intégrales fractionnaires, étant la généralisation des dérivées et des intégrales classiques, devraient avoir une signification encore plus large. Malheureusement, il n'y a pas de résultat dans la littérature jusqu'à maintenant. Certains auteurs (Moshrefi-Torbati and Hammond [28]) considèrent les opérateurs fractionnaires comme des filtres linéaires et cherchent aussi l'interprétation géométrique des opérateurs fractionnaires dans la géométrie fractale, dont la géométrie classique est une sous-classe. Un autre auteur (Podlubny [22]) fournit une interprétation physique de l'intégration fractionnaire en fonction de deux échelles de temps différents, à savoir l'échelle homogène, à débit équilibré et l'échelle de temps inhomogène. La première application d'une semi-dérivée (dérivée d'ordre 1/2) est faite par Abel en 1823 (voir [22]). Cette application du calcul fractionnaire est en relation avec la solution de l'équation intégrale pour le problème de la tautochrone. Ce problème concerne la détermination de la forme de la courbe telle que le temps de descente de la masse ponctuelle sans frottement glisse le long de la courbe sous l'action de la gravité indépendamment du point de départ.

Les dernières décennies prouvent que les dérivés et les intégrales d'ordre arbitraire sont très commodes pour décrire les propriétés des matériaux réels, par exemple les polymères. Les nouveaux modèles d'ordre fractionnaire sont plus satisfaisants que les anciens modèles d'ordre entier. Les dérivées fractionnaires sont un excellent outil pour décrire la mémoire et les propriétés héréditaires de divers matériaux et processus alors que dans des modèles d'ordre entier, ces effets sont négligés. Le calcul fractionnaire trouve aussi des applications dans différents domaines de la science, y compris la théorie des fractales, l'analyse numérique, la physique, l'ingénierie, la biologie, l'économie et la finance. Certaines propriétés de la visco-élasticité sont formulées et résolues par M. Caputo avec sa propre définition de la différenciation fractionnaire. Les intégrales et les dérivées fractionnaires apparaissent aussi dans la théorie du contrôle des systèmes dynamiques pour la description du système contrôlé et les équations différentielles fractionnaires contrôlées.

Ce travail est divisé en trois chapitres.

- Dans le premier chapitre, nous présenterons quelques définitions et théorèmes ainsi que quelques fonctions spéciales avec leurs propriétés que nous avons utilisées dans cette thèse.

- Dans le deuxième chapitre, nous avons mentionne les intégrales et dérivés fractionnaires de Riemann-Liouville et de Caputo, ainsi que la relation et la différence entre les deux.

- Dans le troisième chapitre, nous allons présenter quelques notions sur les équations différentielles fractionnaires. Á la fin de ce chapitre, nous allons résoudre une équation différentielle fractionnaire avec la dérivée fractionnaire de ψ-Caputo non linéaire donné par :

$$\begin{cases} (D_a^{\alpha;\psi} + \lambda D_a^{\alpha-1;\psi})\varphi(t) = f(t, \varphi(t)),\ t \in [a, b], \\ \varphi(a) = \varphi'(a) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

où $1 < \alpha < 2,\ t \in [a, b],\ 1 \leq a < b,\ f : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont donnés des fonctions continues (CFs), et λ est un nombre réel positif. Soit $\psi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ croissant via ψ' borné et $\psi'(t) \neq 0$, pour tout t. Le symbole $C(J, \mathbb{R})$ représente l'espace de Banach de CFs φ de J à $\mathbb{R}$ avec la norme

$$\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(t)| : t \in J\}.$$

CHAPITRE 1

NOTIONS GÉNÉRALES ET DÉFINITIONS

Dans ce chapitre, nous présentons des notations, des définitions, des concepts préliminaires et quelques notions d'analyse fonctionnelle qui seront utilisés par la suite dans ce mémoire.

1.1 Espace fonctionnels

1.1.1 Espaces L^p, lorsque $p \in [1, +\infty[$

Définition 1.1. *Soit $p \in \mathbb{R}$ tel que $1 \leq p \leq +\infty$. On désigne par $L^p([a,b])$ l'espace des classes d'équivalence des fonctions de puissance p-intégrables sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$:*

$$L^p([a,b]) = \Big\{ f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C} \, , \ \ \|f\|_p{<}\infty \Big\},$$

avec

$$\|f\|_p = \left(\int_{[a,b]} |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \ p < +\infty.$$

Pour $p = \infty$, l'espace $L^\infty(\Omega)$ est l'espace des fonctions mesurable, f bornées presque partout sur [a,b], on note

$$\|f\|_\infty = ess \sup_{x \in [a,b]} \|f(x)\| = \inf\{C \geq 0; \ |f(x)| \leq C \ p.p \ \ sur[a,b]\}.$$

1.1.2 Espaces $C^n([a,b],\mathbb{R}), n \in \mathbb{N}$

Définition 1.2. *Soit $n \in \mathbb{N}_0$. On note par $C^n[(a,b)]$ l'espace de fonction f $n-fois$ continuellement différentiables sur $[a,b]$ avec la norme .*

$$\|f\|_{C^n([a,b])} = \sum_{k=0}^{n} \sup_{x\in[a,b]} |f^k(x)|, \ n \in \mathbb{N}_0.$$

En particulier, pour $n = 0$, $C^0([a,b]) = C([a,b])$ est l'espace de fonctions continues sur $[a,b]$ avec la norme.

$$\|f\|_{C_{([a,b])}} = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

Définition 1.3. *On note par $AC([a,b])$ l'espace des fonctions absolument continues sur $[a,b]$ constitué des fonctions f qui sont des primitives des fonctions Lebesgue-sommables i.e. :*

$$f \in AC([a,b]) \Leftrightarrow \exists\varphi \in L^1([A,B]) \ \textit{tel que} \ f(x) = c + \int_a^x \varphi(x)dt.$$

Définition 1.4. *Soit $n \in \mathbb{N}$. On note par $AC^n([a,b])$, l'espace de fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ qui ont des dérivées continues sur $[a,b]$ jusqu'à l'ordre $(n-1)$ et telles $f^{(n-1)} \in AC([a,b])$, i.e. :*

$$AC^n([a,b]) = \Big\{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} : f^{(k)} \in C([a,b]), k \in \{0,1,..,n-1\} \ \textit{et} \ f^{(n-1)} \in AC([a,b])\Big\}.$$

Pour $\rho > 0$, introduisons la notation δ_ρ pour la dérivée définie par $\delta_\rho := t^{1-\rho}\dfrac{d}{dt}$.

Définition 1.5. *$AC^n_\rho[a,b], n \in \mathbb{N}, \rho > 0$ est l'espace des $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ qui ont des dérivées δ_ρ jusqu'à l'ordre $(n-1)$ et $\delta_\rho^{n-1}f$ est absolument continue sur $[a,b]$:*

$$AC^n_\rho([a,b]) := \Big\{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} : \delta_\rho^{n-1}f \in AC[a,b], \delta_\rho = t^{1-\rho}\frac{d}{dt}\Big\}.$$

Remarque 1.1. *Si $\rho = 1$ et $n = 1$, l'espace $AC^1_1[a,b]$ coïncide avec $AC[a,b]$.*

Définition 1.6. *Soit $(E, \|.\|_E)$ un espace vectoriel normé. Une application $T : E \longrightarrow E$ est dite :*

1.Lipschitzienne avec $k > 0$. Si pour tout x, y de E, nous avona :

$$\|Tx - Ty\|_E \leq k\|x-y\|_E.$$

La constante k est dite de Lipschitz.

2. Contractante si elle est k-Lipschitzienne avec $0 \leq k < 1$, ici k est appelée constante de contraction.

Définition 1.7. *Soit T une application dans un espace vectoriel E dans lui même. Un élément $x \in E$ est un point fixe de T si $Tx = x$.*

Définition 1.8. *Soit E et F deux espaces de Banach. Un opérateur continu $T : E \longrightarrow F$ est dit complètement continu s'il transforme tout borné de E en une partie relativement compacte dans F.*

Définition 1.9. *Soient (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques. Une famille A de fonctions continues de E dans F est dite équicontinue en $x \in E$ si*

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall f \in A \, \forall x' \in E \; d_E(x', x) < \delta \Rightarrow d_F(f(x), f(x')) < \epsilon.$$

A est dite uniformément équicontinue si

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall f \in A \, \forall x, x' \in E \; d_E(x', x) < \delta \Rightarrow d_F(f(x), f(x')) < \epsilon.$$

Theoreme Ascoli-Arzela

Soit E un espace compact. Si A est un sous-ensemble équicontinu et borné de $C(E)$, alors A est relativement compact.

1.2 Fonctions utiles

Dans cette section, nous présentons les fonction Gamma et Bêta qui seront utilisées dans la suite, ces fonction jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire et ces applications.

1.2.1 La fonction Gamma $\Gamma(.)$ d'Euler

La Γ d'Euler est une fonction qui prolonge naturellement la factorielle aux nombres réels, et même aux nombres complexes. Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $Re(z) > 0$.

Définition 1.10. *La fonction Gamma est généralement définie par l'intégrale suivante*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \;\; Re(z) > 0 \tag{1.1}$$

Proposition 1.1. *La fonction Gamma est bien définie sur l'ensemble $\mathbb{R}^+$.*

Preuve. On écrivons $\Gamma(z)$ sous la forme :

$$\Gamma(z) := \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt + \int_1^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = I_1 + I_2.$$

En étudiant la convergence de la première intégrale. On a

$$I_1 = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt \leq I_1 = \int_0^1 t^{z-1} dt = \frac{1}{z}$$

D'où la première intégrale est convergente pour $0 < z \leq 1$, maintenant nous étudions la convergence de la seconde. On a

$$\int_1^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}} t^{z-1} dt < \int_1^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}} dt = 2e^{-\frac{1}{2}}.$$

Par conséquent, la fonction Gamma est définie pour tout $z \in \mathbb{R}^+$. □

Propriétés de la fonction Gamma $\Gamma(.)$

Proposition 1.2. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $Re(z) > 0$, on a*

1. $\Gamma(n) = (n-1)!, \;\; \forall n \in \mathbb{N}^*$
2. $\Gamma(1) = 1$.
3. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.
4. $\Gamma(n+1) = n!, \forall n \in \mathbb{Z}_+$.

Preuve. Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $Re(z) > 0$ alors

$$\begin{aligned}
\Gamma(z) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{1-x} dt \\
&= \left[\frac{e^{-t} t^z}{z}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{z} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^z dt \\
&= \frac{1}{z} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{(z-1)+1} dt \\
&= \frac{1}{z} \Gamma(z+1).
\end{aligned}$$

D'où

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \tag{1.2}$$

D'après (1.2) pour tout $z \in \mathbb{N}^*$ on obtient

$$\begin{aligned}
\Gamma(2) &= 1\Gamma(1) = 1! \\
\Gamma(3) &= 2\Gamma(2) = 2.1\Gamma(1) = 2! \\
\Gamma(4) &= 3\Gamma(3) = 3.2.1\Gamma(1) = 3! \\
&\vdots \\
\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) = (n-1)\cdots 2.1 = n!
\end{aligned}$$

$\square$

Quelques valeurs particulières de la fonction Gamma

Nous avons la relation de récurrence pour la fonction Gamma :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

Nous calculons $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$. On a

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt, \quad t = x^2 \quad donc \quad dt = 2xdx \\
&= 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx.
\end{aligned}$$

On calcul l'intégrale $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

En conséquence, nous effectuons les manipulations suivantes :

$$\begin{aligned}
I^2 &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 \\
&= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx\right) \\
&= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du\right)^2 \\
&= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dxdy.
\end{aligned}$$

Pour calculer la dernière intégrale, on utilise le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \;\; r \geq 0.$$

Alors

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dxdy \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r dr d\theta \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr, \;\; r^2 = w \quad donc \quad rdr = \frac{1}{2} dw \\ &= \pi \int_0^{+\infty} e^{-\omega} dw = \pi. \end{aligned}$$

D'où

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Ainsi, nous avons démontré que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \tag{1.3}$$

Proposition 1.3. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$*

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi}. \tag{1.4}$$

Preuve. On procédé par récurrence. Si $n = 0$, on a $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

On suppose que la formule est vraie au rang n. Alors

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2} + 2(n+1)\right) &= \Gamma\left(\frac{(2n+1)}{2} + 1\right) \\ &= \frac{2n+1}{2} \times \Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) \\ &= \frac{2n+1}{2} \times \Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right) \\ &= \frac{2n+1}{2} \times \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi} \\ &= \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1} n!} \sqrt{\pi} \\ &= \frac{(2n+2)}{(2n+2)} \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1} n!} \sqrt{\pi} \\ &= \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}(n+1)n!} \sqrt{\pi} = \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}(n+1)!} \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

Donc la formule est vraie au rang $n+1$. En utilisant la formule (1.4), on obtient :

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{9}{2}\right) &= \frac{105}{16}\sqrt{\pi} \approx 11,63\\ \Gamma\left(\frac{11}{2}\right) &= \frac{945}{32}\sqrt{\pi} \approx 52,34\\ \Gamma\left(\frac{13}{2}\right) &= \frac{10395}{64}\sqrt{\pi} \approx 287,89.\end{aligned}$$

□

1.2.2 La fonction Bêta

Définition 1.11. *Soit $z, w \in \mathbb{R}$ tel que $z, w > 0$. La fonction Bêta, notée $B(z,w)$ est définie par*

$$B(z,w) := \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt. \tag{1.5}$$

Exemple 1.1.

$$\begin{aligned}B(2,3) &= \int_0^1 t(1-t)^2 dt\\ &= \int_0^1 (t-2t^2+t^3)dt\\ &= \frac{1}{12}.\end{aligned}$$

Proposition 1.4. *La fonction Bêta vérifie la propriété suivante*

$$B(z,w) = B(w,z).$$

Preuve. Soient $z > 0, w > 0$, posons $u = 1-t \quad donc \quad dt = -du$, alors

$$\begin{aligned}B(z,w) &= \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt\\ &= \int_1^0 (1-u)^{z-1}u^{w-1}(-du)\\ &= \int_0^1 u^{w-1}(1-u)^{z-1}du\\ &= B(z,w).\end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration. □

La forme trigonométrique la fonction de Bêta

La forme trigonométrique la fonction de Bêta est donnée la proposition suivante :

Proposition 1.5. *Soit* $z, w < 0$, *alors*

$$B(z,w) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2z-1}(\cos\theta)^{2w-1}d\theta.$$

Preuve. On pose $t = \sin^2\theta$ donc $dt = 2\sin\theta\cos\theta d\theta$.

Si $t = 1, \theta = \frac{\pi}{2}$ et si $t = 0, \theta = 0$

et on a $1 - t = 1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$.

En remplace dans (1.5), on obtient

$$\begin{aligned} B(z,w) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2\theta)^{\alpha-1}(\cos^2\theta)^{\beta-1}(2\sin\cos\theta)d\theta \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2(\alpha-1)}(\cos\theta)^{2(\beta-1)}(\sin\cos\theta)d\theta \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2\alpha-1}(\cos\theta)^{2\beta-1}d\theta. \end{aligned}$$

□

Proposition 1.6. *Soit* $z, w \in \mathbb{R}$ *tel que* $\alpha, \beta > 0$. *Alors*

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}. \tag{1.6}$$

Preuve. On a $\Gamma(z) = \displaystyle\int_0^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt$.

Posson $t = x^2$ d'où $dt = 2xdx$, on a alors

$$\Gamma(z) = 2\int_0^{+\infty} x^{2(\alpha-1)}e^{-x^2}xdx = 2\int_0^{+\infty} x^{2\alpha-1}e^{-x^2}dx. \tag{1.7}$$

D'autre part,

$$\Gamma(w) = 2\int_0^{+\infty} y^{2\beta-1}e^{-y^2}dy. \tag{1.8}$$

Multiplions les deux intégrales (1.7) et (1.8) et passons en coordonnées polaires, on trouve

$$\begin{aligned}
\Gamma(z)\Gamma(w) &= 4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} x^{2z-1}y^{2w-1}e^{-(x^2+y^2)}dxdy \\
&= 4\int_0^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(r\cos\theta)^{2z-1}(r\sin\theta)^{2w-1}e^{-r^2}rdrd\theta \\
&= 2\int_0^{+\infty} r^{2(z)+w-1}e^{-r^2}dr \times 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)^{2z-1}(\cos\theta)^{2w-1}d\theta \\
&= \Gamma(z+w)B(z,w).
\end{aligned}$$

□

Exemple 1.2. *On a*

$$B(z,1) = \frac{1}{z}$$

En effet

$$B(z,1) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(1)}{\Gamma(z+1)} = \frac{\Gamma(z)}{z\Gamma(z)} = \frac{1}{z}.$$

CHAPITRE 2

INTÉGRALES ET DÉRIVÉES FRACTIONNAIRES

Ce chapitre est consacré aux définitions élémentaires pour les intégrales et les dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville, Caputo et ψ-Caputo.

2.1 Intégrale fractionnaire

Dans cette section, nous allons définir l'intégrale d'ordre fractionnaire sur un intervalle fini de l'axe réel au sens de Riemann-Liouville avec quelques propriétés dans l'espace des fonctions continues.

Définition 2.1. *Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$.*
Notons par $I_a^1 f$ la primitive qui s'annule en a :

$$\forall t \in [a, b] : (I_a^1 f)(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau.$$

Pour une primitive seconde et d'après le théorème de Fubini on aura :

$$\begin{aligned} I_a^2 f(t) &= \int_a^t I^1 f(u) du \\ &= \int_a^t \left(\int_a^u f(\tau) d\tau \right) du \\ &= \int_a^t \left(\int_\tau^t du \right) f(\tau) d\tau \\ &= \int_a^t (t - \tau) f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

En répétant n fois, on arrive à la n^{ieme} primitive de la fonction f sous la forme :

$$(I_a^n f)(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau)d\tau, \quad t>0, \quad n\in\mathbb{N}^*. \tag{2.1}$$

Cette formule est appelée formule de Cauchy et depuis la généralisation du factoriel par la fonction Gamma : $\Gamma(n) = (n-1)!$.

2.2 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville (R-L).

Définition 2.2. *Supposons que $\alpha > 0$ et $f \in L^1([a,b])$. L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche de la fonction $f(t)$ pour un ordre non entier α est définie par :*

$$(I_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \quad \forall t\in[a,b]. \tag{2.2}$$

Exemple 2.1. *Soit la fonction $f(x) = (x-a)^\beta$, tel que $\beta > -1, u \in [a,b]$*

$$\left(I_{a^+}^\alpha (t-a)^{\beta-1}\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}(\tau-a)^{\beta-1}d\tau. \tag{2.3}$$

En effectuant le changement de variable :

$$\tau = a + s(t-a).$$

Où : $s=0$ quand $\tau=a$ et $s=1$ quand $\tau=t$ et $d\tau = tds$, alors devient :

$$\begin{aligned}
I_a^\alpha (x-a)^\beta &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-a+(x-a)\tau)^{\alpha-1}(a+(x-a)\tau-a)^\beta (x-a)dt\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (x-a)^{\alpha-1}(1-\tau)^{\alpha-1}(x-a)^\beta\tau^\beta(x-a)d\tau\\
&= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1}\tau^\beta d\tau\\
&= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}B(\alpha,\beta+1)\\
&= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta+1)}(x-a)^{\alpha+\beta}
\end{aligned}$$

$$I_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(x-a)^{\alpha+\beta}. \tag{2.4}$$

Remarque 2.1. *Pour* $\beta = 0$

$$I_a^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(\alpha+1)}(x-a)^\alpha.$$

Lemme 2.1. *Pour* $\alpha = 0$*, on a :*

$$I_a^0 f(x) = f(x).$$

Preuve.

$$\begin{aligned} I_\alpha^a f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x f(t)d\left(-\frac{(x-t)^\alpha}{\alpha}\right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left[f(a)(x-a)^\alpha + \int_a^x f'(t)(x-t)^\alpha dt\right]. \end{aligned}$$

Nous trouvons

$$\begin{aligned} I_a^0 f(x) &= 1\left[f(a)1 + \int_a^x f'(t)dt\right] \\ &= f(a) + f(x) - f(a) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Donc

$$I_a^0 f(x) = f(x).$$

□

Théorème 2.1. *Pour toute fonction* $f \in L^1([a,b])$*, l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville possède la propriété suivante :*

$$I_{a^+}^\alpha [I_{a^+}^\beta f(t)] = I_{a^+}^{\alpha+\beta} f(t), \quad \textit{pour} \quad \alpha > 0,\ \beta > 0,\ \forall t \in [a,b]. \tag{2.5}$$

Preuve. La preuve découle directement de la définition

$$\begin{aligned} I_a^\alpha (I_a^\beta) f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-s)^{\alpha-1}(I_a^\beta) f(s)ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-s)^{\alpha-1}\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^s (s-t)^{\beta-1} f(t)dt\right)ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x\int_a^s (x-s)^{\alpha-1}(s-t)^{\beta-1} f(t)dtds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x f(t)\left[\int_t^x (x-s)^{\alpha-1}(s-t)^{\beta-1}ds\right]dt. \end{aligned}$$

On pose $s = t + (x-t)\tau$, alors

$$ds = (x-t)d\tau$$

$$s = t \Longrightarrow t + (x-t)\tau = t \Longrightarrow \tau = 0$$

$$s = x \Longrightarrow t + (x-t)\tau = x \Longrightarrow \tau = 1.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\int_t^x (x-s)^{\alpha-1}(s-t)^{\beta-1}ds &= \int_0^1 (x-(t+(x-t)\tau)^{\alpha-1}(t+(x-t)\tau-t)^{\beta-1})(x-t)d\tau \\
&= \int_0^1 \left[(x-t)(1-\tau)\right]^{\alpha-1}\left[(x-1)\tau\right]^{\beta-1}(x-t)d\tau \\
&= (x-t)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 (1-\tau)^{a-1}\tau^{\beta-1}d\tau.
\end{aligned}$$

Retournons à la formule (2.6) et (1.6), ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
I_a^\alpha(I_a^\beta f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x f(t)\left[(x-t)^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\right]dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^x (x-t)^{(\alpha+\beta)-1}f(t)dt \\
&= (I_a^{\alpha+\beta}f)(x).
\end{aligned}$$

□

Proposition 2.1. *Pour $\alpha > 0$, intégrale de Riemann-Liouville est linéaire i.e. :*

$$I_a^\alpha(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda I_a^\alpha f(t) + \mu I_a^\alpha g(t).$$

Preuve.

$$\begin{aligned} I_a^\alpha(\lambda f+\mu g)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-\tau)^{\alpha-1}(\lambda f+\mu g)(\tau)d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_a^x (x-\tau)^{\alpha-1}\lambda f(\tau)d\tau+\int_a^x (x-\tau)^{\alpha-1}\mu g(\tau)d\tau\right] \\ &= \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-\tau)^{\alpha-1}\lambda f(\tau)d\tau+\frac{\mu}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-\tau)^{\alpha-1}\mu g(\tau)d\tau \\ &= \lambda I_a^\alpha f(x)+\mu I_a^\alpha g(x). \end{aligned}$$

Donc I_a^α est un opérateur linéaire. □

2.3 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 2.3. *Soit $f \in L^1([a,b])$ une fonction intégrable sur $[a,b]$, la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville à gauche de la fonction f d'ordre $\alpha > 0$ notée $D_{a^+}^\alpha f$ définie par :*

$$\begin{aligned} \forall t \in [a,b], \quad D_{a^+}^\alpha f(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n I_{a^+}^{n-\alpha} f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t (\tau-t)^{n-\alpha-1} f(\tau)d\tau. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Où : $n=[\alpha]+1$

Remarque 2.2. *Pour $\alpha = 0$*

$${}^{RL}D_a^0 f(x) = f(x).$$

Exemple 2.2. *Soit $f(x) = (x-a)^\beta$, $\beta > -1$*

$${}^{RL}D_a^\alpha f(x) = {}^{RL}D_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-1)^{\beta-\alpha}.$$

Cas particulier

Si $\beta = 0$

$${}^{RL}D_a^\alpha (x-a)^0 = {}^{RL}D_a^\alpha 1 = \frac{1}{\Gamma(-\alpha+1)}(x-a)^{-\alpha}.$$

La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'une fonction constante $f(t) = C$ n'est pas nulle.

Proposition 2.2. *Soit* $f, g \in L^1([a,b]), \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$^{RL}D_a[\lambda f(x) + \mu g(x)] = \lambda^{RL}D_a f(x) + \mu^{RL}D_a g(x).$$

Preuve. Pour la linéarité

$$\begin{aligned}
^{RL}D_a^{\alpha}\left(\lambda f(x) + \mu g(x)\right) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(I_a^{n-\alpha}(\lambda f(x) + \mu g(x)\right) \\
&= \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}\left(\lambda f(t) + \mu g(t) dt\right)\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \left[\lambda \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)dt + \mu \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} g(t)dt\right] \\
&= \lambda\left(\frac{d}{dx}\right)^n \left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)dt\right] + \mu\left(\frac{d}{dx}\right)^n \left[\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} g(t)dt\right] \\
&= \lambda^{RL}D_a^{\alpha} f(x) + \mu^{RL}D_a^{\alpha} g(x).
\end{aligned}$$

□

Proposition 2.3. *On a*

$$^{RL}D_a^{\alpha} \circ {}^{RL}D_a^{\beta} \neq {}^{RL}D_a^{\beta} \circ {}^{RL}D_a^{\alpha} \neq {}^{RL}D_a^{\alpha+\beta}.$$

pour tout $\quad \alpha \neq \beta, \alpha > 0, \beta > 0.$

Exemple 2.3.

$$f(x) = x \quad , \quad x \geq 0$$

Soit : $\beta = \dfrac{1}{2}$, $\alpha = 1$

Nous trouvons

$$\begin{aligned}
^{RL}D_0^1 x &= \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1)} x^{1-1} = 1 \\
^{RL}D_0^1 x &= \frac{\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} x^{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} x^{\frac{1}{2}} \\
^{RL}D_0^1 \circ {}^{RL}D_0^{\frac{1}{2}} x &= 1 \\
^{RL}D_0^{\frac{1}{2}} \circ {}^{RL}D_0^1 x &= \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)} = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}.
\end{aligned}$$

Donc

$$^{RL}D_0^1 \circ {}^{RL}D_0^{\frac{1}{2}} x \neq {}^{RL}D_0^{\frac{1}{2}} \circ {}^{RL}D_0^1 x.$$

et

$$^{RL}D_0^{1+\frac{1}{2}} x = {}^{RL}D_0^{\frac{3}{2}} x = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} x^{-\frac{1}{2}},$$

$$^{RL}D_0^1 \circ {}^{RL}D_0^{\frac{1}{2}} x \neq {}^{RL}D_0^{\frac{1}{2}} \circ {}^{RL}D_0^1 x \neq {}^{RL}D_0^{\frac{3}{2}}.$$

2.4 Quelques propriétés de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

L'opérateur de dérivation au sens de Riemann-Liouville possède les propriétés résumées dans la proposition suivant :

Proposition 2.4. *Pour* $n-1 < \alpha < n$, $m-1 < \beta < m$ *on a :*

1.Soit $\alpha > \beta > 0$ *alors pour* $f \in L^1([a,b])$, *on a :*

$$D_a^{\alpha}(I_a^{\alpha} f(t)) = f(t), \ \forall t \in [a,b].$$

2.Soit $\alpha > \beta > 0$, $f \in L^1([a,b])$, *on a :*

$$D_a^{\beta}(I_a^{\alpha} f(t)) = I_a^{\alpha-\beta} f(t), \ \forall t \in [a,b].$$

3.Pour $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{N}^*$ *, si les dérivées fractionnaires* $D_a^{\alpha} f$ *et* $D_a^{\beta+\alpha} f$ *existent, alors :*

$$D_a^{\beta}(I_a^{\alpha} f(t)) = D_a^{\beta+\alpha} f(t).$$

4.Si $f(t) \in C^n([a,b])$ *, alors :*

$$I_a^{\alpha} D_a^{\alpha} f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k.$$

2.5 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo.

Dans cette section, nous présentons les définitions et quelques propriétés des dérivées fractionnaires de Caputo.

Définition 2.4. *Soit $f \in AC^n([a,b])$ et $\alpha > 0$. La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α est définie comme suit*

$$
\begin{aligned}
{}^C D_a^\alpha f(t) &= I_a^{n-\alpha} \left(\frac{d}{dt}\right)^n f(t) \qquad (2.7)\\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau, \quad n-1 < \alpha < n,\ n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

Remarque 2.3. *On tenant compte de la définition :*

$$
{}^C D_a^\alpha f(t) := (I_a^{n-\alpha} D_a^n f)(t). \qquad (2.8)
$$

En particulier, si $0 < \alpha < 1$, on a

$$
{}^C D_a^\alpha f(t) := (I_a^{1-\alpha} D_a^1 f)(t). \qquad (2.9)
$$

où

$$
D_a^n = \frac{d^n}{dt^n}.
$$

Proposition 2.5. *Soit $\alpha > 0$, $\beta > 0$; $n = [\alpha] + 1$. Si $f(t) \in C^n([a,b])$, et si les dérivées fractionnaires $D_a^\alpha f$ et $D_a^{\beta+\alpha} f$ existent, alors :*

$$
{}^C D_a^\alpha ({}^C D_a^\beta) f(t) = ({}^C D_a^{\alpha+\beta}) f(t).
$$

Preuve.

$$
\begin{aligned}
{}^C D_a^\alpha ({}^C D_a^\beta) f(t) &= {}^C D_a^\alpha (I_a^{n-\beta} D_a^n) f(t)\\
&= I_a^{n-\alpha} D_a^n (I_a^{n-\beta} D_a^n) f(t)\\
&= I_a^{n-(\alpha+\beta)} D_a^n I_a^n D_a^n f(t)\\
&= I_a^{n-(\alpha+\beta)} D_a^n f(t)\\
&= {}^C D_a^{\alpha+\beta} f(t).
\end{aligned}
$$

□

Exemple 2.4. *Soit : $f(x) = (x-a)^\beta$*

$$
{}^C D_a^\alpha f(x) = {}^C D_a^\alpha (x-a)^\beta.
$$

Preuve. On a

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-n)}(x-a)^{\beta-n},$$

donc

$$\begin{aligned} I_a^{n-a}\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-a)^\beta\right] &= I_a^{n-a}\left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-n)}(x-a)^{\beta-n}\right] \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-n)} I_a^{n-a}(x-a)^{\beta-n} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-n)} \frac{\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta-n+1)}(x-a)^{\beta-a}. \end{aligned}$$

□

Remarque 2.4. *La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'une fonction constante est nulle i.e.*

$$^C D_a^\alpha C = 0, \quad \forall\, C \in \mathbb{R}.$$

2.6 La relation entre l'approche de Riemann-Liouville et celle de Caputo.

Dans cette section on donne la relation entre la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et la dérivée fractionnaire au sens de Caputo.

Théorème 2.2. *Soit $\alpha > 0$ avec $n-1 < \alpha < n,\ \ n \in \mathbb{N}^*$.*

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que les dérivées fractionnaires $^C D_a^\alpha f$ et $D_a^\alpha f$ existent alors :

$$^C D_a^\alpha f(t) = {}^{RL} D_a^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(k)(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(t-a)^{k-\alpha}.$$

En particulier, $0 < \alpha < 1$ on a :

$$^C D_a^\alpha f(t) = {}^{RL} D_a^\alpha f(t) - \frac{f(a)}{\Gamma(-\alpha+1)}(t-a)^{-\alpha}.$$

Cette dernière relation peut aussi s'écrire

$$^C D_a^\alpha f(t) = {}^{RL} D_a^\alpha \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(k)(a)}{k}(t-a)^{k!}\right].$$

2.7 Intégrales et dérivées fractionnaires par rapport une fonction.

Dans cette section , nous présentons des définitons et des lemmes des intégrales et dérivées fractionnaires d'un fonction par rapport à une autre fonction, pour une lecture plus de détailles et d'application, voir [9, 27, 28].

Soit $\psi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante, ayant une dérivée continue ψ' dans $[a,b]$ et $\psi'(t) \neq 0$, $\forall t \in [a,b]$.

Définition 2.5. *L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'une fonction φ intégrable sur $[a,b]$ par rapport à ψ et donnée par*

$$I_a^{\alpha;\psi}\varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (\psi(t)-\psi(\tau))^{\alpha-1}\psi'(\tau)\phi(\tau)d\tau.$$

Si $\psi(t) = t$ nous obtenons l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville.

Définition 2.6. *La dérivée fractionnaire ψ-Caputo CFD d'ordre $\alpha > 0$ de φ est définie par*

$$\begin{aligned}{}^C D_a^{\alpha;\psi}\varphi(t) &= I_a^{n-\alpha;\psi}\left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^n \varphi(t)\\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (\psi(t)-\psi(\tau))^{n-\alpha-1}\psi'(\tau)\partial_\psi^n\varphi(\tau)d\tau,\end{aligned}$$

où $[n] = \alpha + 1$ et $\partial_\psi^n = \left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Lemme 2.2. *Soit $\alpha, \beta > 0$, et $\varphi \in C([a,b],\mathbb{R})$. Alors*

1. $I_a^{\alpha;\psi}I_a^{\beta;\psi}\varphi(t) = I_a^{\alpha+\beta;\psi}\varphi(t)$.
2. $D_a^{\alpha;\psi}I_a^{\alpha;\psi}\varphi(t) = \varphi(t)$.

Preuve.

$$\begin{aligned}
I_{a^+}^{\alpha;\psi} I_{a^+}^{\beta;\psi} h(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha-1} I_{a^+}^{\beta;\psi} h(s) ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \psi'(s)[\psi(t)-\psi(s)]^{\alpha-1} \left[\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^s \psi'(\tau)[\psi(s)-\psi(\tau)]^{\beta-1} h(\tau) d\tau\right] ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^t \psi'(s)[\psi(t)-\psi(s)]^{\alpha-1} \left[\int_\tau^t \psi'(\tau)[\psi(s)-\psi(\tau)]^{\beta-1} h(\tau) ds\right] d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^t \psi'(\tau) h(\tau) \left[\int_\tau^t [\psi(t)-\psi(s)]^{\alpha-1}[\psi(s)-\psi(\tau)]^{\beta-1} \psi'(s) ds\right] d\tau.
\end{aligned}$$

Pour calculer la dernière intégrale, on utilise le changement de variables suivant :

$\psi(t) = \psi(\tau) + z[\psi(t)-\psi(\tau)]$, ce qui implique $\psi'(s)ds = [\psi(t)-\psi(\tau)]dz$.

Alors

$$\begin{aligned}
I_{a^+}^{\alpha;\psi} I_{a^+}^{\beta;\psi} h(t) &= \int_\tau^t [\psi(t)-\psi(s)]^{\alpha-1}[\psi(s)-\psi(\tau)]^{\beta-1} \psi'(s) ds \\
&= [\psi(t)-\psi(\tau)]^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-z)^{\alpha-1} z^{\beta-1} dz \\
&= [\psi(t)-\psi(\tau)]^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},
\end{aligned}$$

par conséquence

$$\begin{aligned}
I_{a^+}^{\alpha;\psi} I_{a^+}^{\beta;\psi} h(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^t \psi'(\tau) h(\tau) \left[[\psi(t)-\psi(\tau)]^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\right] d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^t \psi'(\tau)[\psi(t)-\psi(\tau)]^{\alpha+\beta-1} h(\tau) d\tau \\
&= I_{a^+}^{\alpha+\beta;\psi} h(t).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_a^{\alpha;\psi} I^{\alpha;\psi} h(t) &= D_a^{\alpha;\psi}(I^{\alpha;\psi} h(t)) \\
&= \left[\frac{d}{\psi'(t)dt}\right]^n I_a^{n-\alpha;\psi} I^{\alpha;\psi} h(t) \\
&= \left[\frac{d}{\psi'(t)dt}\right]^n I^{n-\alpha+\alpha;\psi} h(t) \\
&= \left[\frac{d}{\psi'(t)dt}\right]^n I^{n;\psi} h(t) = h(t).
\end{aligned}$$

$\square$

2.8 Théorème de point fixe

L'équation différentielle fractionnaire est considérée comme des équations différentielles linéaires et non linéaires, alors plusieurs théorèmes ont été utilisés pour résoudre ce type d'équation. Des méthodes les plus utilisées : les théorèmes du point fixe. En effectues théorèmes accordent des conditions suffisantes pour assurer l'existence d'un point fixe pour une fonction donnée. Dans le cas des EDFs, on transforme un problème donné en un problème du point fixe et le point fixe déterminé est considéré soit comme une solution unique pour le problème, soit l'une de ses solutions.

Alternative non linéaire de Leray-Schauder.

L'alternative non linéaire de Leray-Schauder est un outil puissant utilisé dans l'analyse fonctionnelle et la théorie des équations aux dérivées partielles. Elle permet de prouver l'existence de solutions pour des problèmes non linéaires en établissant l'existence d'un point fixe pour une application continue. Cette alternative trouve des applications dans de nombreux domaines, tels que les problèmes aux limites.

Théorème 2.3. *(Leray-Schauder Nonlinear Alternative) .*
Soit E un espace de Banach et $\Omega \subseteq E$ un ensemble fermé et convexe. Supposons que K un sous-ensemble relativement ouvert de Ω avec $0 \in K$ et que $T : k \to \Omega$ soit une application continue et compacte.
Alors, soit
1. T a un point fixe dans k
2. Il existe $x \in \partial K$ tel que $x = \lambda T x$ pour certains $\lambda \in (0, 1)$.

Théorème 2.4. *Soit E un espace de Banach et $T : E \to E$ un opérateur complètement continu. Si l'ensemble $V = \{x \in E : x = \mu T x,\ 0 < \mu < 1\}$ est borné, alors T admet au moins un point fixe dans E.*

Principe de Contraction de Banach.

Le principe de contraction de Banach qui garantit l'existence d'un point fixe pour une contraction est le plus connu des théorèmes de point fixe.

Théorème 2.5. *Si E est un espace métrique complet non vide, et $T : E \to E$ est un opérateur contractant, alors T possède un unique point fixe $x \in E$.*

2.9 Lemmes Fondamentaux

Dans cette section, nous fournissons quelques lemmes de dérivées fractionnaire, qui joueront un rôle majeur dans notre étude. Pour plus de détails, voir [19, 24, 30].

Lemme 2.3. *Soit $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi \in C^n([a,b],\mathbb{R})$, $D^{\alpha;\psi}\varphi \in C^n([a,b],\mathbb{R})$.*

$$I_a^{\alpha;\psi} D_a^{\alpha;\psi}\varphi(t) = \varphi(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_\psi^{(\alpha-k)}(a)}{\Gamma(\alpha-k+1)}(\psi(t)-\psi(a))^{\alpha-k}.$$

En particulier si $0 < \alpha < 1$, on a :

$$I_a^{\alpha;\psi} D_a^{\alpha;\psi}\varphi(t) = \varphi(t) - \varphi(a).$$

Lemme 2.4. *Soit $n = [\alpha] + 1$, $a > 0$, $\varphi \in C([a,b],\mathbb{R})$, $D^{\alpha;\psi}\varphi \in C([a,b],\mathbb{R})$, alors l'équation différentielle fractionnaire :*

$$D_a^{\alpha;\psi}\varphi = 0.$$

Admet une solution unique :

$$\varphi(t) = C_1(\psi(t)-\psi(a))^{\alpha-1} + C_2(\psi(t)-\psi(a))^{\alpha-2} + \ldots C_{n-1}(\psi(t)-\psi(a))^{\alpha-n}.$$

où : $C_l \in \mathbb{R}$, $l = 1\ldots,n-1$.

et

$$I_a^{\alpha;\psi} D_a^{\alpha;\psi}\varphi(t) = \varphi(t) + C_1(\psi(t)-\psi(a))^{\alpha-1} + C_2(\psi(t)-\psi(a))^{\alpha-2}$$
$$+ \ldots + C_{n-1}(\psi(t)-\psi(a))^{\alpha-n}.$$

où $C_l \in \mathbb{R},\ l = 1, 2 \ldots n-1.$

De plus :

$$D_a^{\alpha;\psi} I_a^{\alpha;\psi} \varphi(t) = \varphi(t).$$

Lemme 2.5. *Soit* $\alpha > 0, \varphi \in C([a,b])$ *et* $\psi \in C^1([a,b])$, *alors :*

$$I_{a^+}^{\alpha;\psi} : C([a,b]) \longrightarrow C([a,b]).$$

Est une application linéaire tel que :

$$I_a^{\alpha;\psi} \varphi(a) = \lim_{t \longrightarrow a} I_a^{\alpha;\psi} \varphi(t) = 0.$$

CHAPITRE 3

PROBLÈME AUX LIMITES POUR L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE NON LINÉAIRE D'ORDRE FRACTIONNAIRE

3.1 Introduction

L'équation de ψ-Caputo sont un type particulier d'équations différentielles fractionnaire qui généralisent les dérivées de Caputo traditionnelles.

Dans ce chapitre, nous étudions les critères d'existence et d'unicité par des solutions des problèmes aux limites pour l'équations différentielles non linéaire avec la dérivée de ψ-Caputo. On considére alors le problème suivant :

$$\begin{cases} D_a^{\alpha;\psi} + \lambda D_a^{\alpha-1;\psi}\varphi(t) = f(t,\varphi(t)) \\ \varphi(a) = \varphi'(a) = 0, \ \ t \in [a,b]. \end{cases} \tag{3.1}$$

Où $D_a^{\alpha;\psi}$ est la dérivée fractionnaire de ψ-Caputo d'ordre $\alpha \in]1,2[$, $1 \leq a < b$,

$f : J = [a,b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue donnée et ψ est une fonction continue croissante tel que : $\psi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de plus $\psi'(t) \neq 0$, $\forall t \in [a,b]$, on note par $C(J,\mathbb{R})$ l'espace de Banach de toutes les fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme usuelle définie par :

$$\|\varphi\| = \sup\{\varphi(t), \ t \in J\}.$$

3.2 Existence et unicité de la solution

Définition 3.1. *Une fonction $\varphi \in AC^2([a,b],\mathbb{R})$ est dite une solution du problème (3.1) si φ satisfait l'equation*

$$(D^{\alpha;\psi}\varphi(t) + \lambda D^{\alpha-1;\psi})\varphi(t) = f(t,\varphi(t)).$$

Avec les conditions

$$\varphi(a) = \varphi^{'}(a) = 0.$$

Dans le lemme suivant on donne la solution intégrale du problème linéaire (3.1).

Lemme 3.1. *Soit $f \in C(J,\mathbb{R})$, et $\varphi \in C^2(J,\mathbb{R})$. Alors la solution unique du problème linéaire*

$$(D^{\alpha;\psi} + \lambda D^{\alpha-1;\psi})\varphi(t) = f(t) \tag{3.2}$$

$$\varphi(a) = \varphi^{'}(a) = 0.$$

Est donné par

$$\varphi(t) = (\alpha-1)e^{-\lambda\psi(t)}\int_a^t \psi^{'}(\tau)e^{-\lambda\psi(\tau)} I_a^{\alpha-1;\psi} f(\tau)d\tau. \tag{3.3}$$

Démonstration. On a :

$$D_a^{\alpha;\psi}\varphi(t) + \lambda D_a^{\alpha-1;\psi}\varphi(t) = f(t). \tag{3.4}$$

En appliquant l'intégrale fractionnaire de ψ-Caputo d'ordre α aux deux côtés de l'équation (3.4) on obtient

$$I^{\alpha;\psi} D_a^{\alpha;\psi}\varphi(t) + \lambda I_a^{\alpha;\psi} D^{\alpha-1;\psi}\varphi(t) = I^{\alpha;\psi} f(t).$$

Alors

$$I^{\alpha;\psi} D_a^{\alpha;\psi}\varphi(t) + \lambda I_a^1 I_a^{\alpha-1;\psi} D^{\alpha-1;\psi}\varphi(t) = I_a^{\alpha;\psi} f(t).$$

En appliquant le lemme (2.4), on trouve.

$$\varphi(t) = b_1(\psi(t)-\psi(a))^{\alpha-1} - b_2(\psi'(t)-\psi(a))^{\alpha-2} + \lambda I_a^1(\varphi(t) - d_1(\psi(t)-\psi(a))^{\alpha-2}) - I_a^{\alpha;\psi} f(t).$$

Ce que donne :

$$\varphi(t) = b_1(\psi(t) + \psi(a))^{\alpha-1} + b_2(\psi(t) + \psi(a))^{\alpha-2}$$
$$-\frac{\lambda}{\Gamma(1)}\int_a^t (\varphi(\tau) - d_1(\psi(\tau) - \psi(a)^{\alpha-2})\psi^{'}(\tau)d\tau + I_a^{\alpha;\psi} f(t).$$

La condition $\varphi(a) = 0$ implique $b_2 = 0$.

D'autre part

$$\varphi^{'}(t) + \lambda\psi^{'}(t)\varphi(t) = (b_1(\alpha-1) + \lambda d_1)\psi^{'}(t)(\psi(t)) - \psi(a))^{\alpha-2} + (\alpha-1)\psi^{'}(t)I_a^{\alpha-1;\psi} f(t).$$

La condition $\varphi^{'}(a) = 0$ implique $b_1(\alpha-1) + \lambda d_1 = 0$.

Soit

$$\varphi(t) = e^{-\lambda\psi(t)}u(t),\ \ alors\ \ \varphi^{'}(t) = -\lambda\psi^{'}(t)e^{-\lambda\psi(t)}u(t) + e^{-\lambda\psi(t)}u^{'}(t).$$

Alors

$$e^{-\lambda\psi(t)}u^{'}(t) = (\alpha-1)\psi(t)I_a^{\alpha-1} f(t).$$

Donc

$$u^{'}(t) = (\alpha-1)\psi^{'}(t)e^{\lambda\psi(t)}I^{\alpha-1} f(t). \tag{3.5}$$

Par intégration de l'équation (3.2) on obtient

$$u(t) = u(a) + (\alpha-1)\int_a^t \psi^{'}(\tau)e^{\lambda\psi(\tau)}I^{\alpha-1;\psi} f(\tau)d\tau.$$

La condition $\varphi(a) = 0$ implique $u(a) = 0$, d'où

$$\varphi(t) = (\alpha-1)e^{-\lambda\psi(t)}\int_a^t \psi^{'}(\tau)e^{\lambda\psi(\tau)}I_a^{\alpha-1,\psi} f(\tau)d\tau.$$

La réciproque en découle par des calculs directs.

3.2.1 Premier Résultat

Dans le premier résultat, on utilise le principe de contraction de Banach pour établir l'existence et l'unicité des solutions du problème (3.1).

Théorème 3.1. *Supposons que :*

$f : [a,b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est continue satisfaisant la condition Lipschitz :*

(H_1) *: Il existe une constante* $k > 0$, *tel que :*

$$|f(t,\varphi) - f(t,\chi)| \leq k|\varphi(t) - \chi(t)|.$$

Pour tout $t \in [a,b], \varphi, \chi \in C([a,b],\mathbb{R})$.

Alors le problème (3.1)*a une solution unique sur* $[a,b]$, *si*

$$M = \frac{C_f e^{-\lambda\psi(a)}}{\lambda\Gamma(\alpha-1)}\Big(\psi(t) - \psi(a)\Big)^{\alpha-1}\Big(e^{\lambda\psi(t)-}e^{\lambda\psi(a)}\Big) < 1.$$

Preuve. On transforme le problème (3.1) en un problème de point fixe, on définit l'opérateur

$$P : C(J,\mathbb{R}) \longrightarrow C(J,\mathbb{R}).$$

Par

$$P\varphi(t) = (\alpha-1)e^{-\lambda\psi(t)}\int_a^t \psi'(\tau)e^{\lambda\psi(\tau)}I_a^{\alpha-1,\psi}f(\tau,\varphi(\tau))d\tau.$$

Pour établir l'existence et l'unicité de la solution, on utilise le théorème du point fixe de Banach. Pour cela, nous montrons que P est une contraction.

Soit $\varphi, \chi \in C([a,b],\mathbb{R}),\ \ t \in [a,b]$, on a :

$$\begin{aligned}\Big|P\varphi(t) - P\chi(t)\Big| &\leq (\alpha-1)e^{-\lambda\psi(a)}\int_a^t \psi'(\tau)e^{-\lambda\psi(\tau)}I_a^{\alpha-1;\psi}\Big(\Big|f(\tau,\varphi(\tau)) - f(\tau,\chi(\tau)\Big|\Big)d\tau \\ &\leq \frac{C_f e^{-\lambda\psi(a)}}{\lambda\Gamma(\alpha-1)}(\psi(b)-\psi(a))^{\alpha-1}\Big(e^{\lambda\psi(b)} - e^{\lambda\psi(a)}\Big)\|\varphi-\chi\| \\ &\leq M\|\varphi-\chi\|.\end{aligned}$$

Ce qui nous donne $\|P\varphi - P\chi\| \leq M\|\varphi - \chi\|$, comme $M < 1$, l'opérateur P est un contraction. Par conséquent P a un point fixe unique dans $C([a,b],\mathbb{R})$. De manière équivalente, on ne déduit que le problème (3.1) a une solution unique sur [a,b].

3.2.2 Deuxième Résultat

Nous montrons un résultat d'existence par le problème (3.1) en utilisant le théorème du point fixe de Scheafer pour démontrer que l'opérateur :

$$P : C([a, b], \mathbb{R}) \longrightarrow C([a, b], \mathbb{R}).$$

A au moins un point fixe dans l'espace $C([a, b], \mathbb{R})$.

Théorème 3.2. *Supposons que :*

$f : [a, b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est continue sur* $[a, b]$.

(H_2) *: Il existe une constante* $A_f > 0$, *tel que :*

$$|f(t, \varphi)| \leq A_f, \forall t \in [a, b], \;\; \varphi \in C([a, b], \mathbb{R}).$$

Alors le problème (3.1) *a au moins une solution dans* $[a, b]$.

Nous division la preuve en quatre étapes :

Étape 01 :

Montrons que l'opérateur P est continu.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonction qui converge vers x dans l'espace $C([a, b], \mathbb{R})$. Alors $\forall t \in [a, b]$, on a :

$$\begin{aligned}
\Big|p(x_n)(t) - p(x)(t)\Big| &= \Big|(\alpha - 1)e^{-\lambda\psi(t)} \int_a^t \psi'(\tau)e^{\lambda\psi(\tau)} I_a^{\alpha-1;\psi} f(\tau, x_n(\tau))d\tau \\
&\quad - (\alpha - 1)e^{-\lambda\psi(t)} \int_a^t \psi'(\tau)e^{\lambda\psi(\tau)} I_a^{\alpha-1;\psi} f(\tau, x(\tau))d\tau\Big| \\
&\leq (\alpha - 1)e^{-\lambda\psi(t)} \int_a^t \psi'(\tau)e^{\lambda\psi(\tau)} I_a^{\alpha-1;\psi} \Big|f(\tau, x_n(\tau)) - f(\tau, x(\tau))\Big|d\tau \\
&\leq (\alpha - 1)e^{-\lambda\psi(t)} \int_a^t \psi'(\tau)e^{\lambda\psi(\tau)} I_a^{\alpha-1;\psi} \sup_{t[a,b]} \Big|f(\tau, x_n(\tau)) - f(\tau, x(\tau))\Big| \\
&\leq (\alpha - 1)e^{-\lambda\psi(t)} \int_a^t \psi'(\tau)e^{\lambda\psi(\tau)} I_a^{\alpha-1;\psi} \Big\|f(\tau, x_n(\tau)) - f(\tau, x(\tau))\Big\|_\infty .
\end{aligned}$$

Puisque la fonction f est continue alors : $\|P(x_n(t)) - P(x)(t)\| \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

Donc l'opérateur P est continue dans $C([a, b], \mathbb{R})$.

Étape 02 :Nous allons montrer que $PB_{r_f} \subset B_{r_f}$.

Puisque f est continue alors il existe une constante $D_f > 0$, tel que

$$\sup \Big\{ f(t,0) : t \in [a,b] \Big\} \ \leq \ D_f.$$

Et choisissons

$$r_f \geq \frac{D_f e^{-\lambda\psi(a)}}{\lambda\Gamma(\alpha-1)}(\psi(b)-\psi(a))^{\alpha-1}(e^{\lambda\psi(b)}-e^{\lambda\psi(b)})(1-M)^{-1}.$$

Montrons que l'image d'un ensemble borné par T est un ensemble borné.

Soit $r_f > 0$:

$$B_{r_f} = \Big\{ \varphi \in C([a,b],\mathbb{R}); \|\varphi\| \leq r_f \Big\}.$$

Pour tout $\varphi \in B_{r_f}$, on a :

$$\begin{aligned}
|P\varphi(t)| &\leq (\alpha-1)e^{-\lambda\psi(a)} \int_a^t \psi^{'}(\tau)e^{\lambda\psi(\tau)} I_a^{\alpha-1;\psi}\Big(|f(\tau,\varphi(\tau))-f(\tau,0)|+|f(\tau,0)|\Big)d\tau \\
&\leq \frac{(C_f\|\varphi\|+D_f)(\psi(b)-\psi(a))^{\alpha-1}e^{-\lambda\psi(a)}}{\lambda\Gamma(\alpha-1)}\Big(e^{\lambda\psi(b)}-e^{\lambda\psi(a)}\Big) \\
&\leq \frac{D_f(\psi(b)-\psi(a))^{\alpha-1}e^{-\lambda\psi(a)}}{\lambda\Gamma(\alpha-1)}\Big(e^{\lambda\psi(b)}-e^{\lambda\psi(a)}\Big) + r_f M \\
&\leq r_f.
\end{aligned}$$

□

On remarque que

$$\begin{aligned}
|f(t,\varphi(t))| &= |f(t,\varphi(t)) - f(t,0) + f(t,0)| \\
&\leq |f(t,\varphi(t)) - f(t,0)| + |f(t,0)| \\
&\leq k|\varphi(t)| + D_f \\
&\leq kr_f + D_f.
\end{aligned}$$

Par conséquent, l'image d'un borné par P est un borné dans $C([a,b],\mathbb{R})$ .ie $PB_{r_f} \subset B_{r_f}$.

Étape 03 :

On montre que P est équi-continu dans $C([a,b],\mathbb{R})$. Soit $\varphi \in B_\rho$ et $t_1, t_2 \in [a,b], t_1 < t_2$ on a :

$$
\begin{aligned}
\Big|P\varphi(t_1) - P\varphi(t_2)\Big| &\leq (\alpha-1)e^{-\lambda\psi(t_2)} \int_a^{t_2} \psi^{'}(\tau)e^{\lambda\psi(\tau)} I_a^{\alpha-1,\psi} f(\tau,\varphi(\tau))d\tau \\
&+ (\alpha-1)e^{-\lambda\psi(t_1)} \int_a^{t_1} \psi^{'}(\tau)e^{\lambda\psi(\tau)} I_a^{\alpha-1,\psi} f(\tau,\varphi(\tau))d\tau \\
&\leq \frac{A_f e^{-\lambda\psi(t_2)}}{\lambda\Gamma(\alpha-1)}(\psi)(t) - \psi(a))^{\alpha-1}(e^{\lambda\psi(t_2)} - e^{\lambda\psi(t_1)}) \\
&+ \frac{A_f\left(e^{-\lambda\psi(t_2)} - e^{-\lambda\psi(t_1)}\right)}{\lambda\Gamma(\alpha-1)}(\psi(b) - \psi(a))^{\alpha-1}\left(e^{\lambda\psi(t_1)} - e^{\lambda\psi(a)}\right) \\
&\leq \frac{TA_f}{\Gamma(\alpha-1)}(\psi(b) - \psi(a))^{\alpha-1}\left(\psi(t_2) - \psi(t_1)\right) \\
&+ \frac{TA_f}{\Gamma(\alpha-1)}(\psi(b) - \psi(a))^{\alpha-1}\left(1 - e^{\lambda(\psi(a)-\psi(t_1))}\right)\left(\psi(t_2) - \psi(t_1)\right) \\
&= \frac{TA_f}{\Gamma(\alpha-1)}(\psi(b) - \psi(a))^{\alpha-1}\left(2 - e^{\lambda(\psi(a)-\psi(t_1))}\right)\left(\psi(t_2) - \psi(t_1)\right.
\end{aligned}
$$

Avec $T = \sup_{t\in[a,b]}|\psi^{'}(t)|$, quand $|t_2 - t_1| \longrightarrow 0$, alors $|P\varphi(t_2) - P\varphi(t_1)| \longrightarrow 0$.

Par conséquent, $P(B_\rho)$ est équi-continue, d'après le théorème de Arzela-Ascoli, on déduit que P est complètement continue.

Étape 04 :

Soit $A = \Big\{\varphi \in C([a,b],\mathbb{R}),\ \ \varphi = \mu P\varphi,\ \ 0 < \mu < 1\Big\}$.

On va montrer que l'ensemble A est borné.

Soit $\varphi \in A$ et $t \in [a,b]$, on a

$$|\varphi(t)| = |\mu P\varphi(t)| = \mu|P\varphi(t)|.$$

$$
\begin{aligned}
&= \mu\Big|(\alpha-1)e^{-\lambda\psi(t)} \int_a^t \psi^{'}(\tau)e^{\lambda\psi(\tau)} I_a^{\alpha-1;\psi} f(\tau,\varphi(\tau))d\tau\Big| \\
&\leq (\alpha-1)e^{-\lambda\psi(\tau)} \int_a^t \psi^{'}(\tau)e^{\lambda\psi(\tau)} I_a^{\alpha-1;\psi} A_f d\tau \\
&\leq \frac{A_f e^{-\lambda\psi(a)}}{\lambda\Gamma(\alpha-1)}\Big(\psi(b) - \psi(a)\Big)^{\alpha-1}\Big(e^{\lambda\psi(b)} - e^{\lambda\psi(a)}\Big) \\
&\leq \infty.
\end{aligned}
$$

D'où $\|\varphi\| < \infty$. Ce qui montre que l'ensemble A est borné.

Comme conséquence du théorème de point fixe de Scheafer, le problème (3.1) a au moins une solution définie sur $[a, b]$.

3.3 Exemples

Exemple 3.1. *Dans cette section, nous présentons un exemple pour illustrer l'utilisé des résultats théoriques précédentes :*

Considérons le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} \left(D_a^{1.7;\psi} + 2D_a^{0.7;\psi}\right)\varphi(t) = \frac{1}{3}\arctan\varphi(t), t \in [a, b], \\ \varphi(a) = \varphi'(a) = 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

Soit $\psi(t) = \log t,\ \alpha = 1.7,\ \lambda = 2,\ a = 1,\ b = e,\ et\ f(t, \varphi(t)) = \frac{1}{3}\arctan\varphi(t).$

Avec

$$\lim_{\varphi \longrightarrow 0} \frac{1}{3}\frac{\arctan\varphi}{\varphi} = \frac{1}{3}.$$

et

$$M = 0.82034 < 1.$$

Puisque toutes les hypothèses du théorème (3.1) sont satisfaites, alors le problème (3.6) admet une solution unique dans $C([1, e], \mathbb{R})$.

Exemple 3.2. *Considérons le problème aux limites suivant :*

$$\begin{cases} \left(D_a^{\frac{6}{5};\psi} + \frac{1}{2}D_a^{\frac{1}{5};\psi}\right)\varphi(t) = 2\sqrt{3}\log(\varphi(t)+1), t \in [a, b], \\ \varphi(a) = \varphi'(a) = 0. \end{cases} \tag{3.7}$$

Soit $\psi(t) = \log t,\ \alpha = \frac{5}{6},\ \lambda\frac{1}{2},\ a = 1,\ b = e,\ et\ f(t, \varphi(t)) = 2\sqrt{3}\log(\varphi(t)+1).$

$$\lim_{\varphi \longrightarrow 0} 2\sqrt{3}\,\frac{\log(\varphi+1)}{\varphi} = 2\sqrt{3}.$$

et

$$M = 0.97901 < 1.$$

Puisque toutes les hypothèses du théorème (3.1) sont satisfaites, alors le problème (3.7) admet une solution unique dans $C([1, e], \mathbb{R})$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Ahmad,B. ; Matar M.M. ; Agarwal, R.P. Existence results for fractional differential equations of arbitrary order with nonlocal integral boundary conditions Bound. Value Probl. 2015 , 2015, 220. [CrossRef]

[2] Ahmad, B. ; Ntouyas , S.K. On Hadamard fractional integro-differential boundary value problems. J. Appl.Math. Comput. 2015,47, 119-131. [CrossRef]

[3] Ahmad, B. ;Nieto, J.J. Riemann-Liouvill fractional integro-differential equations with fractional nonlocal integral boundary conditions. Bound. Value Probl 2011, 2011, 36. [CrossRef]

[4] Ahmad, B. ; Matar, M.M ; Ntouyas, S.K. On General Fractional Differential Inclusions with Nonlocal Integral Boundary Conditions. Differ. Equ. Dyn. Syst 2016, 28,241-254. [CrossRef]

[5] . Ali, M.A. ; Kara, H. ; Tariboon, J. ; Asawasamrit, S ; Budak, H. ; Hezenci, F.Some New Simpson's-Formula-Type Inequalities for Twice-Differentiable Convex Functions via Generalized Fractional Operators. Symmetry 2021, 13, 2249. [CrossRef]

[6] Almeida, R. A Caputo fractional derivative of a function with respect to another function. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2017, 44, 460-481. [CrossRef]

[7] Ardjouni, A. ; Boulares , H. ; Laskri, Y.Stability in higher-order nonlinear fractional differential equations. Acta Comment. Univ. Tartu. 2018, 22, 37-47.[CrossRef]

[8] Almeida, R ; Malinowska , A.B. ; Monteiro, M.T.T.Fractional differential equations with a Caputo derivative with respect to a kernel function and their applications. Math. Methods Appl. Sci. 2018,41, 336-352 [CrossRef]

[9] Alsaedi, A. ; Ntouyas , S.K. ; Agarwal, R.P ; Ahmad, B On Caputo type sequential fractional differential equations with nonlocal integral boundary conditions . Adv. Differ. $Equ.$2015, 2015, 33. [CrossRef]

[10] Alsaedi, A ; ; Ntouyas S.K. ; Ahmad, B. ; Hobiny,A. Nonlinear Hadamard fractional differential equations with Hadamard type nonlocal non-conserved conditions. Adv. Differ. $Equ.$2015, 2015, 285. [CrossRef]

[11] Atangana, A. ; Baleanu , D. New fractional derivatives with non-local and non-sin gular kernel : Theory and application to heat transfer model. Therm. Sci 2016, 20,763-769. [CrossRef]

[12] Baitiche, Z.A. ; Derbazi, C. ; Benchohra, M. ; Zhou, Y.A.New Class of Coupled Systems of Nonlinear Hyperbolic Partial Fractional Differential Equations in Generalized Banach Spaces Involving the ψ-Caputo Fractional Derivative.Symmetry 2021, 13, 2412. [CrossRef]

[13] Balachandran, K. ; Matar, M ; Trujillo, J.J. Note on controllability of linear fractional dynamical systems.J.Control Decision 2016, 3, $267-279$ [CrossRef]

[14] Boulares, H. ; Ardjouni, A. ; Laskri, Y. Existence and uniqueness of solutions for nonlinear fractional nabla difference systems with initial conditions. Fract. Differ CalC. 2017,7,247-263 . [CrossRef]

[15] Boulares, H. ; Ardjouni,A. ; Laskri, Y. Existence and Uniqueness of Solutions to Fractional Order Nonlinear Neutral Differential Equations. Appl. Math-Note ; 2018, 18, 25-33 Available online : http : /www.math.nthu.edu .tw/amen/ (accessed on 20 September 2018).

[16] Hallaci, A. ; Boulares, H. ; Ardjouni, A. Existence and uniqueness for delay fractional differential equations with mixed fractional derivatives. Open J. Math, Anal. 2020, 4, 26-31 . [CrossRef]

[17] Butzer, P.L. ; Kilbas, A.A. ; Trujillo, J.J. Fractional calculus in the Mellin setting and Hadamard-type fractiona integrals. J. Math. Anal. $Appl.2002, 269, 1-27.$ [CrossRef]

[18] Boulares,H. ;Benchaabane, A ; Pakkaranang , N : ; Shafqat, R. ; Panyanak B. Qualitative properties of positive solutions of a kind for fractional pantograph problems using technique fixed point theory. Fractal Fract.2022, 6, 593. [CrossRef]

[19] Gambo, Y.Y : ; Jarad, F ; Baleanu D. ; Abdeljawad, T. On Caputo modification of the Hadamard fractional derivatives. Adv. Differ. Equ. 2014, 2014, 10 [CrossRef]

[20] Hallaci, A. ; Boulares, H. ; Kurulay, M. On the Study of Nonlinear Fractional Differential Equations on Unbounded Interval. Gen. Lett. Math. 2018, 5 , 111-117. [CrossRef]

[21] I. Podlubny, Fractional differential equations, Academic Press, San Diego, (1990).

[22] I. Podlubny, Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation. Fractional Calculus and Applied Analysis, Vol. 5, (2002), 367-386 .

[23] Kilbas,A.A.Hadamard-type fractional calculus. J. Korean Math , Soc. 2001,38,1191-1204.

[24] Kilbas, A.A. ; Srivastava , H.M. ; Trujillo, J.J. Theory and Applications Fractional Differential Equations ;North-Holland Mathematics Studies ; Elsevier Science B.V. : Amsterdam, The Netherlands , 2006.

[25] Kiataramkul, C. ; Yukunthom , W : ; Ntouyas, S.K ; Tariboon, —Sequential Riemann-Liouville and Hadamard-Caputo Fractional Differential Systems with Nonlocal Coupled Fractional Integral Boundary Conditions . Axioms 2021, 10, 174 [CrossRef]

[26] K. Miller and B. Ross, An introduction to the fractional calculus and frac- tional differential equations. John Wiley and Sons Inc., New York, (1993).

[27] Matar, M. On Existence of positive solution for initial value problem of non linear fractional differential equations of order.Acta Math. Univ. Comen. 2015 , 84, 51-57.

[28] M. Moshrefi-Torbati and J. K. Hammond, Physical and geometrical interpretation of fractional operators. Elsevier Science, Great Britain, (1998).

[29] Meral, F. ; Royston, T. ; Magin, R. Fractional calculus in viscoelasticity : An experimental study. Commun , Nonlinear Sci. Numer. Si. Numer. Simul. 2010, 15 , 939-945. [CrossRef]

[30] M. Tayeb, H. Boulares,A. Moumen, m. Imsatfia, Processing fractional differential equations using ψ-Caputo derivative, Symmetry, 15 (2023), 955. https : //doi.org/10.3390/sym 15040955.[CrossRef]

[31] Oldham, K. Fractional differential equations in electrochemistry. Adv. Eng Softw. 2010,41,9-12 [CrossRef]

[32] Pan, N. ; Zhang,. B. ; Cao, J. Degenerate Kirchhoff-type diffusion problems involving the fractional p-Laplacian , Nonlinear Anal. Real World Appl. 2017 , 37, 56-70.[CrossRef]

[33] R. Gorenflo and F. Mainardi, Essentials of fractional calculus. Preprint submitted to MaPhySto Center, preliminary version, (2000).

[34] Samko, S.G, ; Kilbas A.A. ; Marichev, O.I. Fractional Integrals and Derioatives : Theory and Applications ; Gordon and Breach Science : Yverdon, Switzerland, 1993.

[35] Salim, A. ; Alzabut,J ; Sudsutad, W ; Thaiprayoon ,C. On Impulsive Implicit ψ-Caputo Hybrid Fractional Differential Equations with Retardation and Anticipation. Mathematics 2022 ,10,4821. https ://doi.org./10.3390/mathh.10244621 [CrossRef]

[36] Smart, D.R.Fixed Point Theorems ; Cambridge University Press : London, UK , 1980.

[37] Tao, F. ; Wu, X. Existence and multiplicity of positive solutions for fractional Schrodinger equations with critical growth. Nonlinear Anal. Real World Appl 2017, 35, 158-174. [CrossRef]