

**RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE**  
**SCIENTIFIQUE**  
**UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN DE TIARET**

---



**FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES**  
**DÉPARTEMENT DE GÉNIE CIVIL**

**Mémoire de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme de Master**

Spécialité : Travaux publics

Option : VOA

Présenté par :

BENSIFIA Selma

DEBA Marwa Amina

*Sujet du mémoire*

**EFFET DE LA POROSITÉ SUR LES FACTEURS DE CORRECTION DU**  
**CISAILLEMENT DES POUTRES POREUSES FONCTIONNELLEMENT**  
**GRADUÉES**

*Soutenu publiquement le 24/06/2024 devant le jury composé de :*

Mr, BENFERHAT Rabia	MCA	Président
Mr, Y. TLIDJI	MCA	Rapporteur
M <sup>lle</sup> ZAGAAR Yamina		Co-Rapporteur
Mr, K. DRAICHE	Pr	Examineur
M <sup>lle</sup> K. OUAZIR	MCB	Examineur
M <sup>me</sup> N ZOUATNIA	MAB	Examineur

PROMOTION : 2023-2024

## Remerciements

---

### Remerciement

Tout d'abord nous remercions avant tous, Allah le tout puissant qui nous a donné le courage, et la volonté pour atteindre notre objectif, et tous les enseignants qui ont contribué à notre formation durant tous les cycles .

Nous remercions vivement, notre promoteur Mr : TLIDJI YUCEF de nous avoir pris en charges, son aide et ses précieux conseils.

Ainsi ne saurons oublier de remercier les honorables membres du Jury qui nous ont fait l'immense honneur de Présider et d'examiner ce modeste travail.

À tous ceux ou celles qui nous ont apportés leur soutien, trouvez ici, l'expression de nos vives et sincères reconnaissances.

À tous les professeurs et à tous nos collègues du département de Génie Civil de l'Université de Tiaret, nous dirons merci pour les encouragements et le soutien qu'ils n'ont cessé de nous donner.

Nous ne saurons oublier de remercier les honorables Membres du Jury qui nous ont fait l'immense honneur de Présider et d'examiner ce Modeste travail.

MERCI

## ***Dédicaces***

---

### ***Je dédie ce travail***

À ma mère KARIMA ,qui à toujours été mon roc , ma source d'amour et de soutien inébranlable . Son dévouement et ses sacrifices out forgé ma détermination.

***À mon père MOHAMED qui m'a appris l'importance du travail acharné de la persévérance et de l'honnêteté , je suis reconnaissante pour tes conseils avisés et ton soutien sans faille.***

***À ma belle-sœur KHALIDA qui est devenue une amie et une confidente merci pour ta gentillesse , ton soutien et ton amour , et je suis fière de t'avoir dans ma vie .***

***À mes frères MOKHTAR, KHALED merci pour votre soutien constant ,votre amour contagieux et votre présence rëconfortante .***

***À mon mari ADIB AEK qui était père mère frère et ami , merci pour votre soutien et votre amour , je suis fier de t'avoir dans ma vie.***

***À ma chère tante et deuxième mère DALILA , merci pour votre soutien votre amour et vos conseils dans mon travail .***

***À mes cousins et mes amis proches DALILA LAMIA RAHMA MARIA ASMA FATIMA NADJAT KARIMA SALIMA FATIHA RIHAB SAFAE NINA merci pour votre amour.***

***À mes très chères amies FOZIA NORA AHELAM AICHA DJAMILA merci pour votre amour.***

***À mon binôme MARWA qui devenue une amie chère et une collaboratrice talentueuse.***

## **SALMA**

## **Dédicace**

---

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

{و ان للانسان الا ما سعى (39) و ان سعيه سوف يرى (40)  
و كان فضل الله علينا عظيما }

*"Nous n'avons parcouru les débuts que par Sa facilitation, nous n'avons atteint les fins que par Sa grâce, et nous n'avons réalisé nos objectifs que par Sa faveur. Louange à Dieu en parole et en action, louange à Dieu pour l'accomplissement et la réussite.*

*Je dédie mes efforts et mon travail à ma chère mère, mon paradis sur terre. C'est grâce à elle que j'ai entrepris ce chemin et c'est grâce à elle que je suis arrivé. Ma mère, par qui je suis ici aujourd'hui, puisses-tu rester pour moi une belle chose sans fin*

*À mon père, que Dieu le protège et le garde, à celui qui a été mon bouclier et mon soutien à chaque étape.*

*À mon pilier inébranlable, mes frères. (Akrem, Mohamed, Sami)*

*À mes amies de tout jour et mes compagnes dans cette vie (Nouria, Basma, Hakima, Malak, Salma, Ikram, Aicha, Ahlam, Sabrina).*

*À Salma, qui a marché avec moi et partagé le chemin avec ses joies et ses peines. Ensemble, nous avons atteint la fin du parcours.*

*À mon grand-père et ma grand-mère, que Dieu les ait en Sa miséricorde.*

## **Marwa**

## Résumé

---

Ce mémoire a pour but d'étudier l'effet de la porosité sur le facteur de correction de cisaillement des poutres poreuses à gradient fonctionnel (FGM). Pour atteindre cet objectif cinq formes de distribution de la porosité sont adaptées. Une expression générale du facteur de correction de cisaillement a été obtenue par un principe énergétique. Une application au problème de flambement a été entamée, Le principe des travaux a été appliqué pour déterminer les équations d'équilibre. Des modèles numériques sont exposés et analysés pour souligner les répercussions de la distribution de la porosité et de certains paramètres tels que l'indice de matériau, l'indice de porosité, l'élancement de la poutre sur le facteur de correction de cisaillement et la charge critique du flambement de la poutre FGM.

**Mots clés :** Poutres, Facteur de correction de cisaillement, Porosité, Flambement

## **Abstract**

---

This work aims to study the effect of porosity on the shear correction factor of functionally graded material (FGM) porous beams. To achieve this objective, five forms of porosity distribution are considered. A general expression for the shear correction factor was derived using an energy principle. An application to the buckling problem was initiated, where the principle of work was applied to determine the equilibrium equations. Numerical models are presented and analyzed to highlight the impact of porosity distribution and certain parameters, such as the material index, porosity index, and beam slenderness, on the shear correction factor and the critical buckling load of the FGM beam.

**Keywords:** Beams, Shear Correction Factor, Porosity, Buckling

---

يهدف هذا البحث إلى دراسة تأثير المسامية على عامل التصحيح القصي للعوارض المسامية ذات التدرج الوظيفي (FGM) لتحقيق هذا الهدف، تم اعتماد خمس أشكال لتوزيع المسامية. تم الحصول على تعبير عام لعامل التصحيح القصي باستخدام مبدأ الطاقة. تم البدء في تطبيق على مشكلة الانبعاج، حيث تم تطبيق مبدأ الأعمال لتحديد معادلات التوازن. تم عرض وتحليل نماذج رقمية لتسليط الضوء على تأثير توزيع المسامية وبعض المعلمات مثل مؤشر المادة، مؤشر المسامية، ونخافة العارضة على عامل التصحيح القصي والحمل الحرج لانبعاج العارضة ذات التدرج الوظيفي .

الكلمات المفتاحية: العوارض، عامل التصحيح القصي، المسامية، الانبعاج

## -Table des matières

Résumé.....	1
Abstract.....	v
ملخص .....	vi
Introduction générale .....	1
Chapitre 1 : Généralités sur les matériaux FGM	
1.1 Concept des matériaux fonctionnellement gradués : .....	2
1.2 Historique : .....	4
1.3 Types de matériaux FGM : .....	6
1.3.1 Matériaux à gradient de composition chimique : .....	6
1.3.2 Matériaux à gradient de porosité : .....	7
1.3.3 Matériaux à gradient microstructural .....	8
1.4 Comparaison des matériaux types FGM et les matériaux composites traditionnels : 9	
1.5 Lois de mélange : .....	11
1.5.1 Propriétés matérielles de la plaque P-FGM : .....	11
1.5.2 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM : .....	12
1.5.3 Propriétés matérielles de la plaque E-FGM : .....	13
1.6 Domaines d'applications des matériaux à gradient fonctionnel: .....	14
1.6.1 Aéronautique : .....	14
1.6.2 Médecine : .....	14
1.6.3 Articles de sports : .....	15
1.7 Avantages et inconvénients des FGM : .....	16
1.7.1 Avantage des FGM : .....	16
1.7.2 Inconvénients des FGM : .....	16
1.8 Porosité des FGM : .....	18
1.9 Caractérisation de la porosité : .....	18



1.9.1	Effet de la porosité sur les propriétés mécaniques des matériaux : .....	18
1.9.2	Porosité et module d'élasticité longitudinale (le module de Young/porosité) : 19	
1.10	Porosité et le module de cisaillement : .....	20
1.11	Porosité et le coefficient de Poisson $\nu$ : .....	20
1.12	Conclusion.....	21
Chapitre 2 : Théorie des poutre		
2.1	Introduction : .....	22
2.2	Historique : .....	22
2.3	Hypothèses cinématique de la théorie des poutres .....	22
2.3.1	Modèles des poutres : .....	23
2.4	Les différentes théories des poutres : .....	23
2.4.1	Modèle d'Euler Bernoulli .....	24
2.4.2	Modèle de Timoshenko: .....	25
2.4.3	Théorie d'Ordre Elevé:.....	26
2.5	Conclusion .....	29
Chapitre 3 : Formulation mathématique		
3.1	Introduction.....	30
3.2	Objectifs et méthodologies .....	30
3.3	Configuration géométrique .....	31
3.4	Dérivation de la rigidité au cisaillement transverse des poutres.....	33
3.4.1	Énergie de déformation .....	36
3.4.2	Énergie potentielle externe .....	36
3.5	Solution exacte pour la poutre FGM.....	37
3.6	Conclusion .....	38
Chapitre 4 : validation et comparaison des résultats		
4.1	Introduction .....	39
4.2	Résultats numériques .....	39
4.3	Application au problème du flambement.....	51

Conclusion .....	56
Conclusion générale et perspectives .....	57
Référence bibliographique .....	58

## Lise des tableaux

---

<b>Tableau (4.1)</b>	Propriétés matérielles de la poutre FGM.....	39
<b>Tableau (4.2)</b> <i>L/h = 5</i> )	Variations du facteur de correction de cisaillement (Forme homogène,	40
<b>Tableau (4.3)</b> <i>L/h = 20</i> )	Variations du facteur de correction de cisaillement (Forme homogène,	40
<b>Tableau (4.4)</b>	Variations du facteur de correction de cisaillement (Forme X, <i>L/h = 5</i> )	42
<b>Tableau (4.5)</b>	Variations du facteur de correction de cisaillement (Forme X, <i>L/h = 20</i> )	43
<b>Tableau (4.6)</b>	Variations du facteur de correction de cisaillement (Forme O, <i>L/h = 5</i> )	45
<b>Tableau (4.7)</b>	Variations du facteur de correction de cisaillement (Forme O, <i>L/h = 20</i> )	45
<b>Tableau (4.8)</b>	Variations du facteur de correction de cisaillement (Forme V, <i>L/h = 5</i> )	47
<b>Tableau (4.9)</b>	Variations du facteur de correction de cisaillement (Forme V, <i>L/h = 20</i> )	47
<b>Tableau (4.10)</b> <i>L/h = 5</i> )	Variations du facteur de correction de cisaillement (Forme Vre,	49
<b>Tableau (4.11)</b> <i>L/h = 20</i> )	Variations du facteur de correction de cisaillement (Forme Vre,	49

## Liste des figures

---

<b>Figure (1.1)</b> Schéma de la microstructure à gradation continue avec des constituants en métal-céramique (a) Microstructure à gradation progressive (b) Vue a grandie et (c) FGM en céramique-métal [2].	3
<b>Figure (1.2)</b> représentation schématique de la fonction matérielle dans les différentes structures; (a) matériau homogène, (b) composite, (c) FGM [6].	3
<b>Figure (1.3)</b> Illustration des caractéristiques thermiques entre les composites CLC et FGM [7].	4
<b>Figure (1.4)</b> Joint FGM entre Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> et Si <sub>3</sub> N <sub>4</sub> d'après [11].	6
<b>Figure (1.5)</b> (A) le schéma d'un FGM à porosité graduée, (B) une image montrant porosité graduelle d'un os.	8
<b>Figure (1.6)</b> Schéma d'une microstructure graduée	9
<b>Figure (1.7)</b> Caractéristiques des FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels [20].	10
<b>Figure (1.8)</b> La distribution composante des matériaux [21].	11
<b>Figure (1.9)</b> Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM [24].	12
<b>Figure (1.10)</b> Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM [25].	13
<b>Figure (1.11)</b> Variation de la fraction volumique dans une plaque E-FGM.	14
<b>Figure (2.1)</b> Schéma d'un élément de poutre.	23
<b>Figure (2.2)</b> Cinématique d'Euler Bernoulli	24
<b>Figure (2.3)</b> Cinématique de Timoshenko [44].	25
<b>Figure (3.1)</b> Configuration géométrique.	31
<b>Figure (4.1)</b> Variations du facteur de correction de cisaillement (Forme homogène, $L/h = 20$ $k = 0.5$ )	41
<b>Figure (4.2)</b> Variations du facteur de correction de cisaillement (Forme homogène, $L/h = 20$ $k = 2$ )	42
<b>Figure (4.3)</b> Variations du facteur de correction de cisaillement (Forme X, $L/h = 20$ $k = 0.5$ )	44
<b>Figure (4.4)</b> Variations du facteur de correction de cisaillement (Forme X, $L/h = 20$ $k = 2$ )	44
<b>Figure (4.5)</b> Variations du facteur de correction de cisaillement (Forme O, $L/h = 20$ $k = 0.5$ )	46
<b>Figure (4.6)</b> Variations du facteur de correction de cisaillement (Forme O, $L/h = 20$ $k = 2$ )	46

**Figure (4.7)** Variations du facteur de correction de cisaillement (Forme V,  $L/h = 20$   $k = 0.5$ ),

48

**Figure (4.8)** Variations du facteur de correction de cisaillement (Forme V,  $L/h = 20$   $k = 2$ ). 49

**Figure (4.9)** Variations du facteur de correction de cisaillement (Forme  $V_{\text{renversé}}$   $L/h = 20$   $k = 0.5$ ), 50

**Figure (4.10)** Variations du facteur de correction de cisaillement (Forme  $V_{\text{renversé}}$   $L/h = 20$   $k = 2$ ), 51

**Figure (4.11)** Variation de la charge critique de flambement adimensionnelle  $L/h = 20$   $k = 0.5$

53

**Figure (4.12)** Variation de la charge critique de flambement adimensionnelle  $L/h = 20$   $k = 0.5$  54

**Figure (4.13)** Variation de la charge critique de flambement adimensionnelle  $\xi = 0.10$   $k = 0.5$

54

**Figure (4.14)** Variation de la charge critique de flambement adimensionnelle  $\xi = 0.10$   $k = 0.5$

55

**Figure (4.15)** Variation de la charge critique de flambement adimensionnelle  $\xi = 0.25$   $k = 5$

55

**Figure (4.16)** Variation de la charge critique de flambement adimensionnelle  $\xi = 0.25$   $k = 5$  56

## Liste des symboles

---

$E_c$	Module de Young de la céramique.
$E_m$	Module de Young de métal.
$E(z)$	Module de Young en fonction de $z$ .
$\nu$	Coefficient de Poisson.
$V(z)$	Fraction volumique.
$V_c$	Fraction volumique de la céramique.
$V_m$	Fraction volumique du métal.
$p$	Indice de loi de puissance ou l'indice matérielle.
$\xi$	Indice porosité
$L, b, h$	Dimensions de la poutre.
$u, w$	Les déplacements suivant les directions $x$ et $z$ .
$w_\alpha$	Rotation due à la flexion (sans cisaillement).
$u_0, w_0$	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la poutre.
$\phi_x, \phi_z$	Les rotations autour des axes $x$ et $z$ .
$f(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse).
$f'(z)$	La première dérivée de la fonction de gauchissement par rapport à $z$ .
$\sigma_x, \sigma_z$	Contraintes normales.
$\tau_{xy}, \tau_{yz}$	Contraintes de cisaillement.
$\varepsilon_x$	Déformation dans les directions $x$ .
$\gamma_{xz}$	Déformation de distorsion.
$N$	Effort normal.
$M^b$	Moments de flexion pure.
$M^s$	Moments de flexion supplémentaire due au cisaillement transverse.
$S$	Effort de cisaillement pur.
$m$	Nombre de mode.
$A_{ij}$	Termes de rigidité en membrane de la poutre.
$B_{ij}$	Termes de rigidité de couplage de la poutre.
$D_{ij}$	Termes de rigidité de flexion de la poutre.
$H_{ij}$	Termes de rigidité de la poutre en cisaillement.
$Q_{ij}$	Coefficients de rigidité.
$\partial$	Dérivée partielle.
$d_{ij}, d_{ijl}$ et $d_{ijlm}$	Opérateurs différentiels.

$U$  Les énergies de déformation due aux effets mécaniques

$U_m$ ,  $W_m$ , et  $\varphi_m$  Paramètres arbitraires.

[K] Matrice symétrique des valeurs propres.

$\{\Delta\}$  Vecteur des déplacements.

$N_0$  Charge de flambement

$\bar{N}$  Charge critique de flambement adimensionnelle

## Introduction générale

---

Les Matériaux à gradients caractéristiques (en anglais : Functionally Graded Material "F.G.M"); sont des matériaux composites produits en changeant continuellement des fractions volumiques dans une certaine direction pour obtenir une structure bien définie. Ce processus de calibrage des matériaux permet de produire des produits industriels avec un continuum, évitant ainsi les phénomènes de concentration de contraintes, de fissuration et de délaminage qui se produisent dans les composites conventionnels. .

En raison des problèmes techniques lors de la fabrication des structures FGM, des pores peuvent apparaître dans les matériaux fonctionnellement gradués qui entraînent des microvides dans ces matériaux. Les structures poreuses FG présentent des nombreuses combinaisons intéressantes de propriétés mécaniques.

Ce travail a pour objectif principal d'étudier l'effet de la porosité sur le facteur de correction de cisaillement et une application au problème de flambement des poutres en FGM. Notre travail est constitué de quatre chapitres :

Le premier chapitre comporte des généralités sur les matériaux à gradient de propriété FGM.

Dans le deuxième chapitre, les différentes théories des poutres des structures FGM.

Le chapitre troisième présente la formulation mathématique du problème étudié, une expression générale du facteur de correction de cisaillement est dérivée puis les équations d'équilibre du problème de flambement des poutres en FGM sont obtenues par le principe des travaux virtuel et résolu par la méthode de Navier.

Le quatrième chapitre est consacré à la présentation des résultats numériques pour vérifier l'efficacité de l'approche proposée pour l'analyse de l'effet de la porosité sur le facteur de correction de cisaillement et dans la détermination des charges critiques de flambement.



# CHAPITRE 1 Généralités sur les matériaux FGM

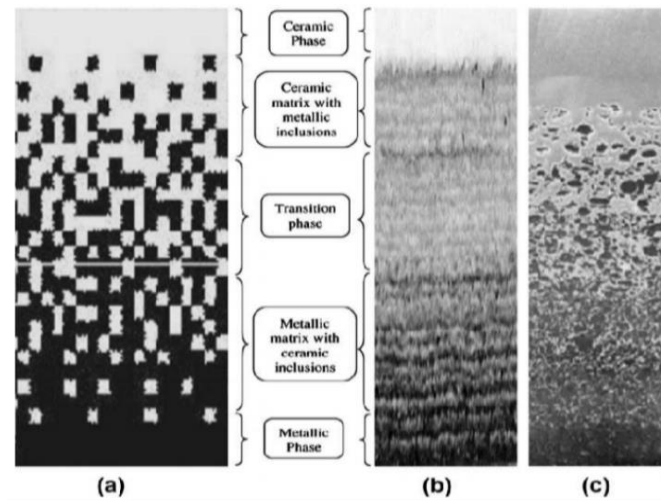
---

## 1.1 Concept des matériaux fonctionnellement gradués :

Le matériau à gradient de propriétés (FGM) est un nouveau concept pour la réalisation de propriétés et / ou de fonctions innovantes qui ne peuvent être obtenues avec des matériaux homogènes conventionnels. Dans sa structure la plus simple, il se compose d'un matériau d'un côté et de l'autre d'un second matériau, et une couche intermédiaire dont la structure, la composition et la morphologie varient doucement d'un matériau à l'autre de l'ordre du micron [1] voir (Figure 1.1).

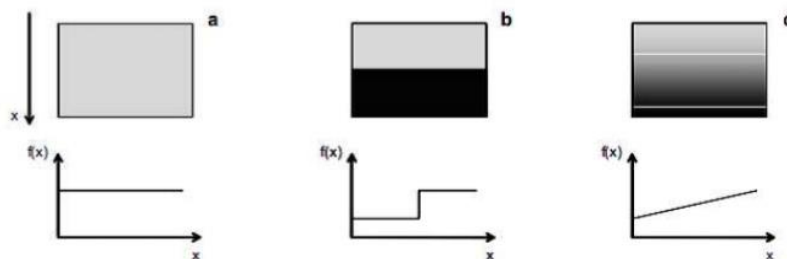
Le concept de "matériau à gradient de propriétés" se réfère clairement à la réalisation de propriétés innovantes suivies d'une inhomogénéité qui ne peut être réalisée par des matériaux conventionnels homogènes, en mettant l'accent sur les deux caractéristiques essentielles suivantes. La première caractéristique essentielle consiste à adapter artificiellement la composition chimique et la microstructure à partir de la prédiction quantitative du profil de distribution des propriétés pour obtenir la fonction souhaitée. La deuxième caractéristique essentielle inclut la disponibilité de processus de fabrication qui a une bonne reproductibilité, en tant que technologie avancée pour le gradient de propriétés. Les procédés doivent pouvoir produire un profil précis de la composition chimique et doivent pouvoir être directement fabriqués à partir des résultats des calculs effectués par les concepteurs de matériaux. Le matériau à gradation de propriétés fonctionnelle (FGM) c'est un matériau révolutionnaire qui appartient à une classe de matériaux avancés avec des propriétés variables sur une dimension changeante [3].

La variation des propriétés en douceur d'un matériau à l'autre dans les FGMs élimine les interfaces pointues existant dans les matériaux composites où les défaillances sont déclenchées [4]. Il remplace cette interface pointue par une interface dégradée qui produit une transition en douceur d'un matériau à l'autre [1]. Une de caractéristiques unique de FGM est la possibilité de personnaliser un matériau pour une application spécifique [5].



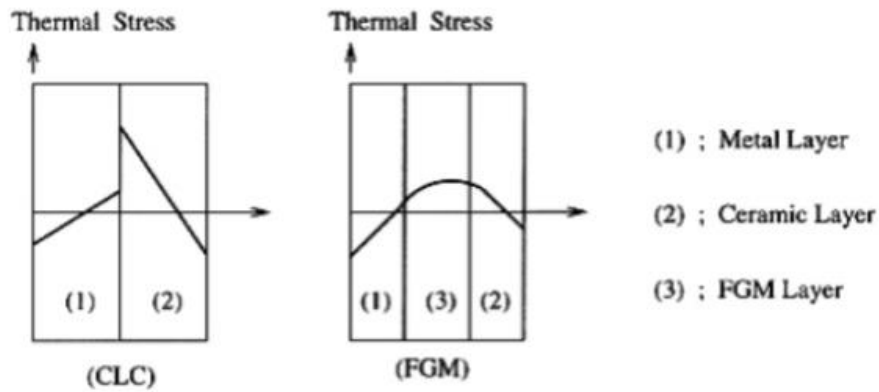
**Figure (1.1)** Schéma de la microstructure à gradation continue avec des constituants en métal-céramique (a) Microstructure à gradation progressive (b) Vue a grandie et (c) FGM en céramique-métal [2].

Les propriétés de tels matériaux peuvent être décrites par la fonction  $f(x)$ . Dans les matériaux homogènes, cette fonction est constante comme dans (Figure1.2.a). dans le cas d'un jonction de deux fonctions matérielles différentes,  $f(x)$  a une forme de déformation (Figure1.2.b). Dans les FGM, cette fonction matérielle doit être continue ou quasi-continue [6].



**Figure (1.2)** représentation schématique de la fonction matérielle dans les différentes structures; (a) matériau homogène, (b) composite, (c) FGM [6].

Au début du développement des matériaux à gradient de propriétés fonctionnelle, le concept consistait à supprimer l'interface pointue (le saut dans les contraintes thermiques) qui existait dans le matériau composite traditionnel et à la remplacer par l'interface qui se modifiait progressivement, ce qui se traduisait par une modification de la composition chimique de ce composite. De l'illustration (Figure1.3) nous voyons que la FGM présente une distribution des contraintes thermique plus douce que celle des composites stratifiés classique (CLC) [7].



**Figure (1.3)** Illustration des caractéristiques thermiques entre les composites CLC et FGM [7].

### 1.2 Historique :

En 1987, un programme national de recherche et développement sur les FGM a été lancé au Japon, impliquant une collaboration entre des chercheurs, des institutions publiques et l'industrie qui ont collaboré pour mettre à fin un grand projet qui été lancé par le gouvernement Japonais le projet intitulé «la recherche sur la technologie de base pour développement de Matériaux à Gradient de propriétés et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques ».

L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux. Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux sont appelés à travailler à des températures de surface de 1800°C ainsi qu'à un gradient de température de l'ordre de 1300°C. A cette année-là, aucun matériau industriel n'était connu pour supporter de telles sollicitations thermomécaniques. Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux :

- *Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau.*
- *Ténacité du matériau coté basse température.*
- *Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau.*

Pour répondre à un tel cahier de charges, l'idée originale des FGM a été proposée pour élaborer un nouveau composite profitant à la fois des propriétés des céramiques (Coté haute températures) et des métaux (Coté basse température) [8].

Le fruit de cette collaboration a été la construction d'une enveloppe extérieure d'une navette intercontinentale à base de matériau FGM, capable de protéger le fuselage contre des températures extrêmes lors de la rentrée de la navette dans l'atmosphère terrestre. Autrement dit : « Le flux de chaleur énorme frappant la majorité des surfaces qui sont exposées à la friction par l'air, lors de la période de rentrée de navette dans l'atmosphère terrestre et la protection intérieure contre un réchauffement étaient les défis majeurs. D'où la nécessité d'utilisation d'un revêtement céramique pour protéger le fuselage contre des températures qui se développent à la surface. L'idée fût alors de produire une transition douce, donc graduelle entre métal pure et céramique pure, appelée matériau à gradient fonctionnel ».

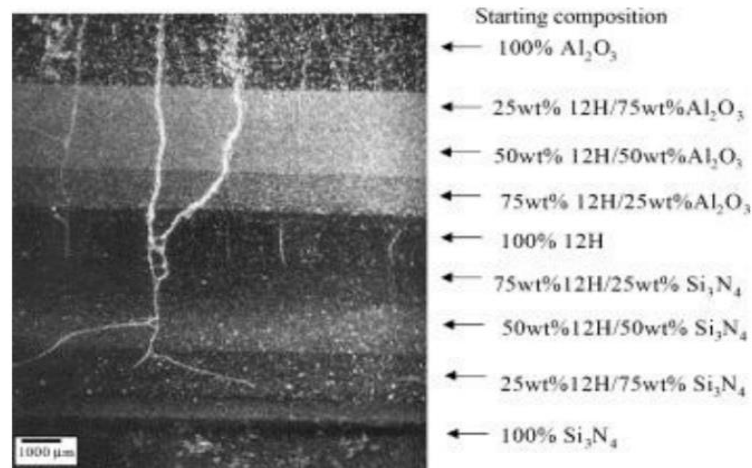
À la fin de la première étape (1987-1989), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000 K (Température de surface) et à un gradient de température de 1000 K [9].

Quatre techniques ont été utilisées pour fabriquer les matériaux présentant un gradient de composition et de structure ; les techniques utilisées dans la fabrication de tels matériaux sont les suivantes :

- *Le système SiC/C par C.V.D (Chemical Vapor Deposition ou dépôt chimique en phase vapeur).*
- *Le système PSZ/Mo par la technique de la compaction sèche des poudres*
- *Le système TiB<sub>2</sub>/Cu par synthèse par auto-propagation à haute température.*
- *Le système (Ni-Cr-Al-Y) / (zrO<sub>2</sub>-Y<sub>2</sub>O<sub>3</sub>) par projection plasma à double torches.*

En 1990 a eu lieu la première conférence internationale sur les FGM à Sendai-city au Japon. Dans la seconde étape (1990-1991), le but était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première étape. Pendant les années 90, non seulement les champs d'application des FGM s'est développé pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température, mais s'est aussi élargi à d'autres applications : biomécaniques, technologie de capteur, optique, etc...

On trouve une littérature très importante sur l'utilisation de ce matériau. Cependant, l'utilisation des structures en FGM dans les environnements avec de grands changements de température exige la connaissance des déformations.



**Figure (1.4)** Joint FGM entre  $Al_2O_3$  et  $Si_3N_4$  d'après [11].

En 1992, les matériaux à gradient fonctionnel ont été sélectionnés parmi les dix premières technologies de pointe au Japon et actuellement dans le monde entier.

Depuis, les matériaux à gradient fonctionnel ont connu un intérêt croissant dans de nombreux domaines d'application.

### 1.3 Types de matériaux FGM :

Au début du développement des matériaux à gradient fonctionnel, le concept était de supprimer l'interface qui existait dans le matériau composite traditionnel, et de le remplacer par une interface graduellement progressive. L'intérêt croissant pour ce type de matériau a entraîné le développement de différents types de FGM. Le type d'application prévue détermine généralement le type de FGM à utiliser. Les différents types de FGM qui sont actuellement produits comprennent le gradient de composition chimique FGM, le gradient de porosité FGM, et le gradient microstructural FGM. Chacun de ces types de FGM est discuté dans les sections suivantes.

#### 1.3.1 Matériaux à gradient de composition chimique :

Il s'agit du type de FGM qu'on va traiter en détail dans ce mémoire, où la composition chimique varie progressivement, en fonction du rayon dans le matériau. Cela pourrait être sous la forme d'une seule phase, ou dans un matériau multiphasé. Un FGM monophasé est produit lorsque le composite est produit à partir d'une seule phase, en raison de la solubilité des éléments chimiques d'une phase dans l'autre phase. Cela se produit généralement pendant

le processus de frittage [12]. Le changement progressif de la distribution des éléments chimiques dans la phase unique entraîne la formation du matériau à gradient fonctionnel.

Selon le diagramme de phase et les limitations thermodynamiques, lorsque certains matériaux sont ajoutés à un autre matériau, le matériau qui a été ajouté serait soluble dans une gamme de conditions de composition et de mélange. Un tel matériau deviendrait ce qu'on appelle un matériau monophasé, mais avec une composition chimique variable en raison de la solubilité.

Ce type de FGM est moins commun. Les matériaux classés de façon fonctionnelle les plus couramment utilisés sont ceux qui ont une composition chimique multiphasique [13. 14]. Les phases et la composition chimique sont faites pour varier à travers le volume du matériau. Comme la composition du matériau varie d'un matériau à l'autre, il en résultera différentes phases avec différentes compositions chimiques qui aideraient à réaliser l'application prévue, pour laquelle le FGM a été conçue. Les différentes phases qui sont produites dépendent de la quantité de composition du matériau de renforcement et des conditions d'élaborations, telles que la vitesse de refroidissement et le traitement thermique effectué sur ce matériau. En métallurgie des poudres, le procédé de production de FGM consiste à mettre couche par couche la composition de poudre requise, puis le compactage de la poudre et ensuite le frittage. Au cours du processus de frittage, certaines poudres métalliques réagiront pour former différents composés et phases chimiques. Ceux-ci varieraient en fonction de la position dans le volume du matériau à gradient fonctionnel.

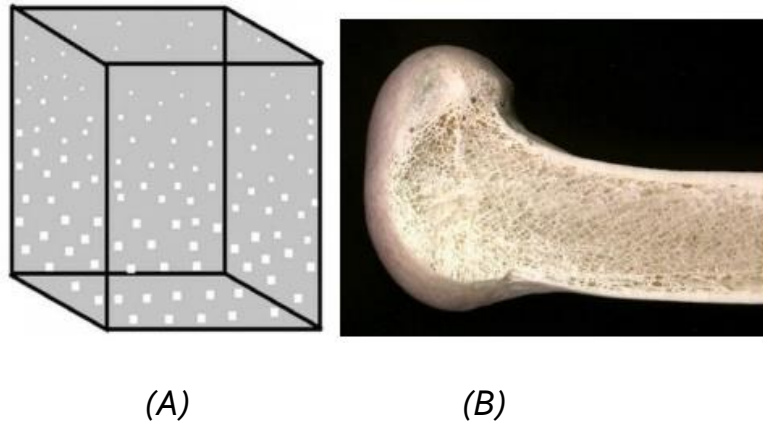
Il en existe deux autres types qui seront cités ci-dessous.

### **1.3.2 Matériaux à gradient de porosité :**

Le matériau à gradient fonctionnel de gradient de porosité est un autre type de FGM, dans lequel la porosité dans le matériau est amenée à changer par rapport à une direction dans le matériau. La forme et la taille des pores sont conçues et variées, selon les propriétés requises du matériau à gradation fonctionnel.

Ce type de matériau fonctionnel est très important pour les applications biomédicales, car le matériau naturel qu'ils ont l'intention de remplacer consiste en une porosité graduelle fonctionnelle, et la porosité graduelle aiderait également à l'intégration de l'implant et des tissus environnants. La porosité est importante pour le processus de cicatrisation de cet implant, et contribue également à la circulation sanguine vers les tissus intégrés. La porosité graduée aide également à réduire le poids total de l'implant et à améliorer le module d'élasticité du matériau de l'implant pour qu'il corresponde à celui du tissu humain. La porosité graduée aide à réduire la densité du bio-implant. Ceci est nécessaire pour éviter la

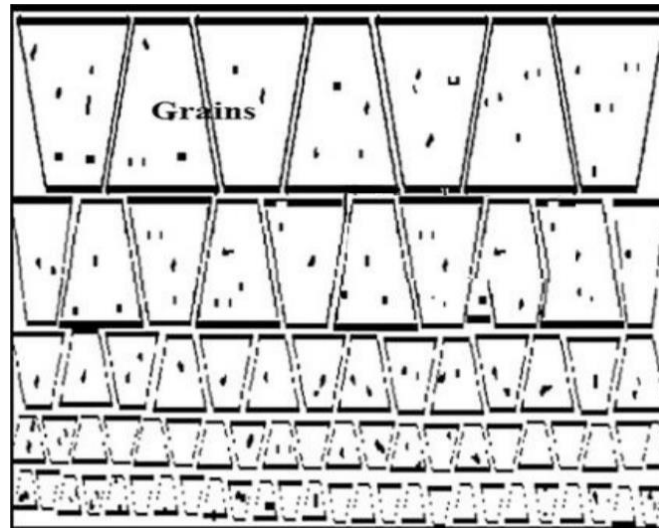
protection contre les contraintes qui se produit lorsque le module d'élasticité de l'implant est supérieur à celui de l'os humain figure (1.6).



**Figure (1.5) :** (A) le schéma d'un FGM à porosité graduée, (B) une image montrant porosité graduelle d'un os.

### 1.3.3 Matériaux à gradient microstructural

Le matériau à gradient fonctionnel microstructural est un autre type de FGM, où la microstructure est adaptée de sorte que les différentes microstructures sont produites dans le matériau, qui est amené à changer graduellement, de manière à obtenir les propriétés requises du matériau. La gradation microstructurale peut être obtenue au cours du processus de solidification, de sorte que la surface du matériau est trempée, par exemple, lors de la production d'une propriété de surface très dure du matériau. On laisse refroidir lentement le noyau du même matériau, ce qui aiderait à produire différentes microstructures de celles situées. Un diagramme schématique d'une microstructure typiquement graduée est présenté à la figure. (1.6).



**Figure (1.6)** Schéma d'une microstructure graduée

La microstructure graduée entraînerait un changement progressif des propriétés du matériau par rapport à la position, puisque la microstructure dépend de la position dans le FGM et que la microstructure est directement liée aux propriétés du matériau.

Les FGM à gradient microstructural trouvent leur application dans des composants qui doivent avoir une surface très dure pour résister à l'usure, et un noyau dur pour résister à l'impact élevé qui se produit pendant l'opération. Un exemple de ce type de matériau fonctionnellement gradué comprend l'acier cémenté, les cames ou les couronnes, les paliers ou arbres et les applications de turbine [15.16]. Les domaines d'application des différents types de FGM sont présentés dans la section suivante.

#### **1.4 Comparaison des matériaux types FGM et les matériaux composites traditionnels :**

Généralement, les FGM sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes. Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue les FGM des matériaux composites conventionnels comme illustré sur (Figure1.6) [17]. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés matérielles des FGM. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente [18].

Le concept FGM peut être appliqué dans divers domaines pour des usages structuraux et fonctionnels. Au Japon, plusieurs programmes ont été conduits au cours des années 80 et 90



afin de développer l'architecture des FGM, et d'étudier également ces matériaux pour les applications de hautes températures (par exemple, éléments pour navettes spatial hypersonique) ainsi que pour des applications fonctionnelles (par exemple, convertisseurs thermoélectriques et thermo-ioniques). Ces programmes ont conduit au développement de la conception architecturale du FGM et de ces perspectives [19].

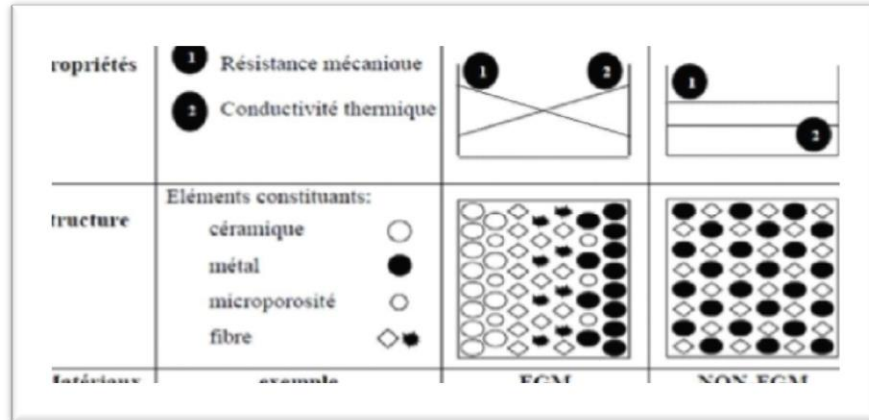
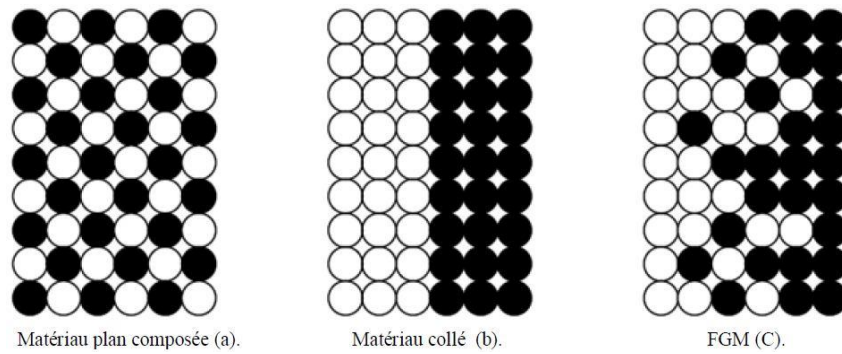


Figure (1.7) Caractéristiques des FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels [20].

Établie un modèle simple illustrant les différences entre les matériaux à gradient de propriétés (FGM) et les matériaux plus conventionnels (Figure 1.7). Le matériau plan composé a une caractéristique plane, et le matériau lié a une frontière sur l'interface de deux matériaux. Les FGM ont d'excellentes caractéristiques qui diffèrent de ceux des matériaux plans composés et reliés. Par conséquent, les FGM attirent l'attention en termes de leur application dans les domaines industriels puisqu'ils ont une double propriété des deux matières premières qui sont mélangées ensemble, et la distribution composante est graduée sans interruption. Par exemple, l'un des FGM qui se compose du métal et de la céramique a la caractéristique de la conductivité thermique et de la force métallique dans le côté en métal et la résistivité aux hautes températures dans le côté en céramique [21].



**Figure (1.8)** La distribution composante des matériaux [21].

### 1.5 Lois de mélange :

La plupart des articles de la littérature sur les FGM utilisent la loi simple du mélange pour obtenir les propriétés matérielles effectives. En ce qui concerne les fonctions de distribution de fraction volumique, les propriétés matérielles équivalentes des FGM pourraient être déterminées par diverses fonctions sous forme de loi de puissance (P-FGM), sigmoïde (S-FGM) ou exponentielle (E-FGM) [22].

#### 1.5.1 Propriétés matérielles de la plaque P-FGM :

La fraction volumique des matériaux P-FGM est supposée obéir à une fonction en loi de puissance représentée par la relation :

$$V(z) = \left( \frac{z + h/2}{h} \right)^p \quad (1.1)$$

Avec :

- $p$  : paramètre matériau.
- $z$  : la coordonnée suivant l'épaisseur.
- $h$  : l'épaisseur de la structure.

Une fois la fraction volumique locale  $V(z)$  a été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées pour un mélange de céramique et métal par la loi suivante [23] :

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m) * V(z) \quad (1.2)$$

- $E_c$  et  $E_m$  sont respectivement les modules de Young de la surface supérieure (céramique) ( $z = h / 2$ ) et de la surface inférieure (métal) ( $z = - h / 2$ ) de la structure P- FGM.

La variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur (Figure 1.10). Il apparaît clairement que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour  $1 < p$ , et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour  $1 > p$ .

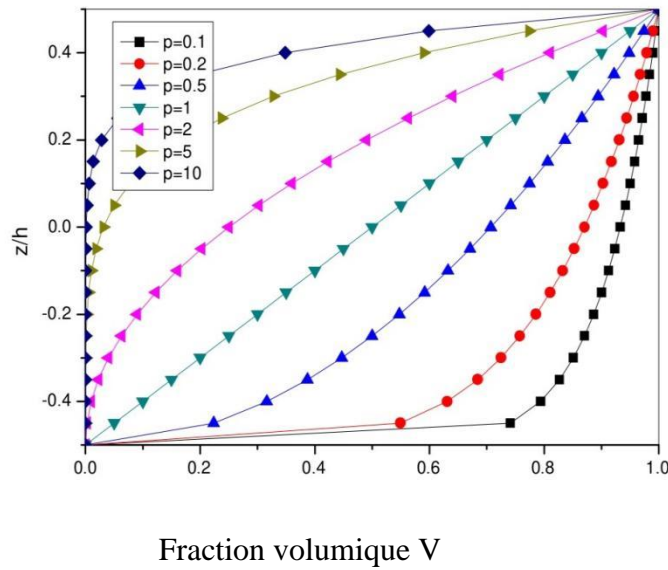


Figure (1.9) Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM [24].

### 1.5.2 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM :

Deux fonctions de loi de puissance sont utilisées pour définir la fraction volumique de la plaque, afin d'assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{z+h/2}{h/2} \right)^p, -h/2 \leq z \leq 0 \quad (1.3a)$$

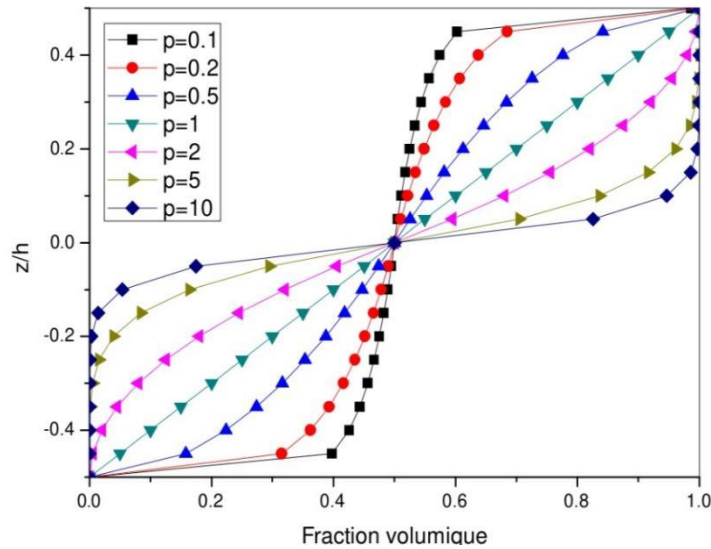
$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{z+h/2}{h/2} \right)^p, 0 \leq z \leq h/2 \quad (1.3b)$$

Le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V_1(z)E_1 + [1 + V_1(z)]E_2 , \quad -h/2 \leq z \leq 0 \quad (1.4a)$$

$$E(z) = V_2(z)E_1 + [1 + V_2(z)]E_2 , \quad 0 \leq z \leq h/2 \quad (1.4b)$$

(Figure 1.11) montre que la variation de la fraction volumique définie par les équations (1.3a) et (1.3b) représente les distributions sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée (Plaque S-FGM).



**Figure(1.10)** Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM [25].

### 1.5.3 Propriétés matérielles de la plaque E-FGM :

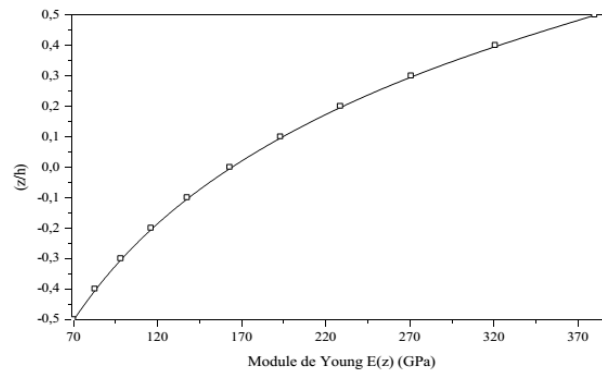
Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme :

$$E(z) = E_2 e^{B(z+h/2)} \quad (1.5a)$$

Avec :

$$B = \frac{1}{h} * \ln \left( \frac{E^1}{E^2} \right) \quad (1.5b)$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée sur (Figure 1.12).



**Figure (1.11)** Variation de la fraction volumique dans une plaque E-FGM

### 1.6 Domaines d'applications des matériaux à gradient fonctionnel:

En raison du développement technologique, il est nécessaire que la capacité avancée des matériaux devienne une priorité dans le domaine de l'ingénierie pour des systèmes plus performants. FGMs sont des matériaux relativement nouveaux et sont étudiés pour être utilisés dans des applications à haute température. Les FGMs sont utilisés dans une grande variété d'applications dans la pratique de l'ingénierie qui nécessite que la performance des matériaux varie avec les emplacements dans le composant [26]. Les applications les plus utilisées sont les suivantes :

#### 1.6.1 Aérospatiale :

Le secteur de l'aérospatiale est l'un des secteurs qui montre plus d'intérêt au développement des FGM. NASA et la JAXA ont montré un grand intérêt au développement de cette technologie. Comme le coût de lancement des navettes spatiales dépend du poids qu'ils soulèvent dans l'espace, la création de pièces avec des éléments de connexion moins est une solution. En outre, la conception optimale, l'équilibre entre le poids et la performance peut réduire les coûts de lancement. La performance et la sécurité sont toujours très préoccupantes dans l'aérospatiale. La protection de bouclier thermique des navettes spatiales pourrait être optimisée pour réduire le poids et augmenter la fiabilité en utilisant des plaques FGM.

#### 1.6.2 Médecine :

Le but d'utiliser les FGM pour produire des implants est d'utiliser les propriétés mécaniques des alliages, céramiques et composites gradué avec des matériaux biocompatibles. Ainsi, un implant osseux peut être constitué par un matériau solide et dur dans le noyau avec le tissu

osseux gradué compatible à la surface et un matériau de faible coefficient de frottement dans les articulations.

Industrie :

Un rouleau en céramique adapté pour diverses applications dans les industries hybrides constitué de nitrure de silicium comme matériau de base. Ce matériau possède d'excellentes propriétés mécaniques, idéal pour les applications de support de charge. Dans de nombreux cas, les composants entiers sont réalisés en carbure de tungstène, pour une application nécessitant des propriétés de résistance à l'usure. Avec un gradient, l'utilisation de carbures coûteux peut être réduite au minimum; réduisant ainsi le coût total du composant.

### 1.6.3 Articles de sports :

Divers composants et accessoires sportifs peuvent bénéficier de l'utilisation du FGM. Par exemple, pointes en carbure ont été fabriqués pour les chaussures de baseball afin de réduire l'usure. Entre la pointe et de la structure des chaussures une région à matériau gradué a été produite afin de réduire l'impact sur les extrémités [27]. Ceci est un excellent exemple comment les FGM pourraient être utilisées pour produire des articles de sport de haute performance. Avec la même idée de réduction d'usure, des outils d'escalade sur glace tels que crampons et piolets pourraient être gradué avec le carbure de tungstène dans les arêtes vives qui capte la glace.

Autres :

Il existe autres domaines d'application les FGM :

- *Champ optique (fibre optique, lentille etc.).*
- *Champ d'électronique (capteur, semi-conducteur à bande graduée, substrat, etc.).*
- *Champ chimique (Échangeur de chaleur, récipient de réacteur, tuyau (pipe) de chaleur etc.) .*
- *Champ de biomatériaux (peau artificielle, Système de délivrance de médicaments, prothèses, etc.) .*
- *Marchandises (Matériaux de construction, bon sport, Carrosserie etc.) .*
- *Conversion de l'énergie (Générateur thermoélectrique, convertisseur thermo-ionique, piles à combustible, cellules solaires etc.)*
- *Optoélectronique .*
- *Piézo-électricité. [28].*

### 1.7 Avantages et inconvénients des FGM :

Les matériaux fonctionnellement gradués présentent des avantages et des inconvénients:

#### 1.7.1 Avantage des FGM :

Outre l'accomplissement de son objectif principal, c'est à dire de fournir les différents requis des propriétés en divers points et des surfaces du futur produit qui, pourrait être réalisé par un simple revêtement [29] et beaucoup d'autres soulignent divers avantages supplémentaires de la FGM. Ils énumèrent certains avantages qui en résultent principalement de la non-existence d'une interface forte FGM, tels que:

Diminuer les contraintes thermiques causées par les différences de coefficients de dilatation thermique des matériaux utilisés. Absence d'une interface nette devrait conduire à un contrôle d'ensemble mieux des contraintes.

- *Meilleure cohésion entre différents matériaux, par exemple un métal et une céramique. Extension de la région fonctionnelle avant d'atteindre la valeur limite de la déformation plastique.*
- *Suppression de délaminage.*
- *Augmentation de la ténacité à la rupture.*
- *Élimination des singularités des contraintes à divers endroits, tels que les surfaces libres, des coins, des racines de fissures, etc.*

#### 1.7.2 Inconvénients des FGM :

Le principal obstacle à une application plus large de la FGM est leur fabrication compliquée en raison de l'inadéquation des propriétés différentes, par exemple, la température de fusion, des affinités différentes pour divers autres éléments, la taille des particules, la morphologie, etc. Un exemple type est un mélange d'un métal avec la température de fusion ( $T_1$ ) et une céramique avec une température de fusion ( $T_2$ ). Dans la plupart des cas, un tel couple est habituellement ( $T_1 \ll T_2$ ). Puis, si la température de fabrication est d'environ ( $T_1$ ), la céramique est encore non fondue et la structure finale contient des particules de céramique non fondue dans une matrice métallique.

Dans de nombreux cas, une telle structure présente une grande porosité et une petite adhérence entre les différents composants et son application générale est limitée. Cependant,

pour des applications spéciales, la présence de particules très dures (carbures) dans une matrice solide peut être souhaitable.

D'autre part, travailler autour de (T2) va certainement entraîner une oxydation rapide et de l'évaporation de nombreux métaux. La formation de phases indésirables, etc. Les matériaux doivent être fabriqués dans une atmosphère protectrice ou à une basse pression et ces deux technologies sont très coûteuses [30].

**Tableau (1.1)** Avantages et inconvénients des matériaux constituant les FGM.

<b>Matériau</b>	<b>Céramique</b> La face à haute température	<b>Céramique-métal</b> (la couche intermédiaire)	<b>Métal</b> (la face à basse température)
Bonne résistance thermique	✓		
Bonne résistance à l'oxydation	✓		
Élimination des problèmes de l'interface		✓	
Relaxer les contraintes thermiques		✓	
Bonne résistance mécanique			✓
Conductivité thermique élevée			✓
Très bonne ténacité			✓
Faible conductivité thermique	✓		
Fabrication compliquée		✓	
Faible résistance à la corrosion			✓



### 1.8 Porosité des FGM :

La porosité est la quantité de vides (pores) dans un matériau solide, qui sont remplis de fluides (liquide ou gaz). C'est une grandeur physique de 0 à 1 (ou un pourcentage de la grandeur physique de 0 à 1 (ou un pourcentage entre 0 et 100%)) qui détermine le débit et la capacité de rétention de substrat. La porosité est le volume de vide et le volume total du milieu poreux : la lumière totale du milieu poreux :

$$\varphi = \frac{V_{pore}}{V_{total}} \quad (1.6)$$

Avec :

- $\varphi$  : la porosité .
- $V_{PORE}$  : le volume des pores.
- $V_{total}$  : le volume total du matériau, du le volume des pores.

### 1.9 Caractérisation de la porosité :

La variété des méthodes de caractérisation de la porosité est liée à la variété des matériaux poreux et aux objectifs de chaque approche. Par exemple, lors de l'étude des adsorbants ou des matériaux utilisés en catalyse, les mesures de surface peuvent être préférables. En revanche, si l'objectif est de contrôler la taille des pores, alors la méthode de détermination de la distribution granulométrique est recommandée [31].

Les méthodes de caractérisation poreuse sont souvent associées à la classification des matériaux poreux selon certains critères. Les matériaux poreux peuvent être classés selon le type de porosité principale (fermée ou ouverte), l'origine de la porosité (inter-particule ou intra-particule), la résistance mécanique (rigidité ou fragilité) ou la taille des pores [32].

#### 1.9.1 Effet de la porosité sur les propriétés mécaniques des matériaux :

Les études des propriétés mécaniques des matériaux poreux sont généralement résumées en qui détermine la corrélation entre la porosité et les propriétés mécaniques. Une augmentation de la fraction volumique des pores signifie une diminution des propriétés mécaniques [33]. La

plupart des études disponibles dans la littérature se concentrent sur l'influence principal facteur de la porosité [34], la forme des pores, leur distribution en taille.

### 1.9.2 Porosité et module d'élasticité longitudinale (le module de Young/porosité) :

De vastes travaux expérimentaux et théoriques ont été entrepris pour relier l'interaction complexe de la microstructure et des propriétés mécaniques. Dans le cas de notre étude on s'est focalisé sur l'effet de la porosité sur le module d'élasticité longitudinal (le module de Young/porosité). Les expressions (relations empiriques) suivantes sont celles utilisées le plus souvent pour décrire ce comportement : [35].

$$E = E_0(1 - bp) \quad (1.7)$$

Avec :

- $E$  : le module de Young à la porosité  $P$ .
- $E_0$  : le module de Young à porosité nulle.
- $bp$  : Paramètre dépend de la nature et de la géométrie du matériau.

Ce modèle linéaire (1.6) repris dans la théorie de l'élasticité d'Einstein [36], qui l'utilisait pour décrire le comportement élastique d'un fluide avec une suspension de sphères dures.

$$E = E_0(e^{-bP}) \quad (1.8)$$

Cette relation exponentielle (1.8) a été utilisée pour la première fois par SPRIGGS pour analyser l'effet de la porosité sur le module élastique de la matière réfractaire poly cristalline, oxyde d'aluminium.

$$E = E_0(1 - P)/(1 + bp) \quad (1.9)$$

Ce modèle non linéaire (1.9) a été proposé par Hasselman en 1962 est directement basé sur les expressions obtenues par Hashin en 1962 pour les modules de matériaux avec suspensions diluées de pores sphériques.

$$E = E_0(1 - bp^{1/2}) \quad (1.10)$$

Cette relation (1.10) à puissance (2/3) a été dérivée par Martin et Haynes en 1971 pour le module de Young des matériaux poreux et a été utilisée tardivement pour analyser les données de plusieurs matériaux.

Le principal inconvénient de ces modèles est qu'ils ne peuvent pas être utilisés pour toute la plage de porosité. Il semble que certaines conditions doivent être remplies par un bon modèle pour toute la plage de porosité : il doit être aussi simple que possible, doit posséder le plus petit nombre possible de paramètres d'ajustement et il est nécessaire d'intégrer la porosité critique (seuil de percolation) [37] au modèle. A cause cela, le modèle exponentiel de Knudsen et Spriggs équation (1.8) ne convient pas car aucun seuil de percolation n'est pris en compte. De plus, il est également inapplicable pour les mousses, car il ne satisfait pas la condition limite  $E = 0$  pour  $P = 1$  ( $E$  est le module de Young et  $P$  est la porosité).

### 1.10 Porosité et le module de cisaillement :

Le même modèle de percolation est valable pour le module de cisaillement de matériaux poreux.

$$G = G_0 \left(1 - \frac{p}{pc}\right) f_G \quad (1.11)$$

Où  $f_G$  est l'exposant caractéristique du module de cisaillement. Du point de vue de la stabilité mécanique du système, on peut s'attendre à ce que le seuil de percolation soit évidemment le même pour le module de Young et le module de cisaillement. Cependant, les exposants caractéristiques du module de Young et du module de cisaillement ne sont pas identiques en général. Il existe de nombreux paramètres qui influencent le module de Young et le module de cisaillement des matériaux poreux [38].

### 1.11 Porosité et le coefficient de Poisson $\nu$ :

Dans le cas de matériaux isotropes homogènes, le coefficient de Poisson  $\nu$  peut être déterminé le coefficient de Poisson du matériau solide, nous pouvons simplifier

$$\nu = \frac{E}{2G} - 1 \quad (1.12)$$

Après le remplacement des équations (1.8) et (1.10) dans l'équation (1.12) nous obtenons :

$$\nu = \frac{E}{2G} \left[ \frac{pc - p}{pc} \right], \text{ pour } P \leq Pc \quad (1.13)$$

Puisque  $\frac{E_0}{2G}$  détermine le coefficient de Poisson du matériau solide, nous pouvons simplifier l'équation comme suit :

$$V = (V_0 + 1) \left[ \frac{pc - p}{pc} \right] - 1, \text{ pour } P \leq Pc \quad (1.14)$$

Dans ce cas, le seuil de percolation est à nouveau considéré comme identique du point de vue de la stabilité mécanique. Cependant, comme les exposants caractéristiques du module de Young et du module de cisaillement ne sont pas toujours les mêmes, il est nécessaire de considérer un nouvel exposant caractéristique pour le coefficient de Poisson Où :

$FV = FE - FG$  [39].

### 1.12 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons essayé de présenter et de définir la notion des matériaux composites et matériaux FGM, ainsi on a présenté l'histoire de la fabrication des FGM et les différentes méthodes d'usinage et les domaines d'application. Puis on a cité les propriétés matérielles effectives d'un matériau FGM.

À la fin nous avons terminés par les différentes lois régissant la variation des propriétés matérielles du matériau FGM (module de Young, masse volumique et coefficient de poisson) selon l'épaisseur, ces lois peuvent être de puissances, exponentielles ou sigmoïde.

# CHAPITRE 2 Théories des poutres

---

## 2.1 Introduction :

La théorie des poutres est un modèle utilisé dans le domaine de la résistance des matériaux. On utilise deux modèles ; La théorie d'Euler-Bernoulli, qui néglige l'influence du cisaillement et la théorie de Timoshenko qui prend en compte l'effet du cisaillement.

Le terme de « poutre » désigne un objet dont la longueur est grande par rapport aux dimensions transverses (section fine). Stricto sensu, une poutre est un élément de structure utilisé pour la construction dans les bâtiments, les navires et autres véhicules, et dans la fabrication de machines. Cependant, le modèle des poutres peut être utilisé pour des pièces très diverses à condition qu'elles respectent certaines conditions.

## 2.2 Historique :

La paternité de la théorie des poutres est attribuée à Galilée mais des études récentes indiquent que Léonard de Vinci l'aurait précédé. Ce dernier avait supposé que la déformation variait de manière linéaire en s'éloignant de la surface neutre, le coefficient de proportionnalité étant la courbure, mais il ne put finaliser ses calculs car il n'avait pas imaginé la loi de Hooke. De son côté, Galilée était parti sur une hypothèse incorrecte (il supposait que la contrainte était répartie uniformément en flexion), et c'est Antoine Parent qui obtint la distribution correcte [40].

Ce sont Leonhard et Jacques Bernoulli qui émirent la première théorie utile vers 1750, tandis que Daniel Bernoulli, le neveu du précédent, écrivit l'équation différentielle pour l'analyse vibratoire. À cette époque, le génie mécanique n'était pas considéré comme une science, et l'on ne considérait pas que les travaux d'une académie des mathématiques puissent avoir des applications pratiques, et l'on continua à bâtir les ponts et les bâtiments de manière empirique. Ce n'est qu'au XIX<sup>e</sup> siècle, avec la Tour Eiffel et les grandes roues que l'on démontra la validité de la théorie à grande échelle.

## 2.3 Hypothèses cinématique de la théorie des poutres

L'hypothèse cinématique fondamentale de la théorie des poutres [41] est l'hypothèse de Navier. (Navier -Bernoulli et Navier -Timoshenko) : "Toute section droite de la configuration

de référence est supposée rester plane et inaltérée au cours du mouvement". L'hypothèse de Navier s'énonce aussi de la façon équivalente suivante : "Toute section droite est considérée comme ayant un mouvement de solide indéformable".

L'hypothèse d'Euler- Bernoulli énonce que la section droite de la poutre est indéformable reste plane et perpendiculaire à la fibre moyenne avant et après déformation, et la déformation transversale est nulle. L'hypothèse de Timoshenko énonce que la section droite de la poutre est indéformable ne reste pas perpendiculaire à la fibre moyenne après déformation (il y a une rotation de la section droite), et l'effet de cisaillement n'est pas nul et pris en compte.

### 2.3.1 Modèles des poutres :

Une poutre est un élément de structure utilisée dans la construction des bâtiments, des navires, et dans la fabrication de machines. Cependant, le modèle des poutres peut être utilisé pour des pièces très diverses à condition qu'elles respectent certaines normes. La théorie des poutres s'applique sur le solide élancé (les prismes dont la longueur vaut 10 fois la plus grande dimension transversal). Là où la détermination de la solution exacte pour les champs de contrainte et de déformation n'est pas possible, elle permet d'obtenir une solution approchée, qui donne une bonne idée sur les efforts et les déplacements [42].

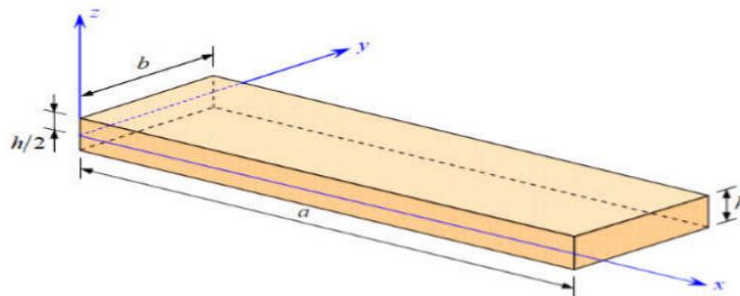


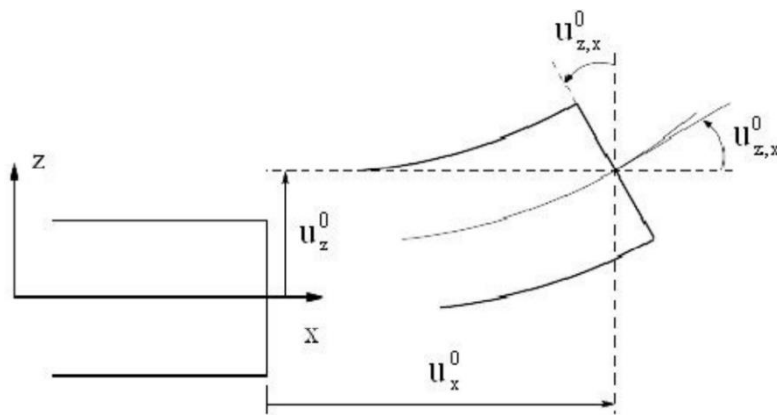
Figure (2.1) Schéma d'un élément de poutre.

### 2.4 Les différentes théories des poutres :

La théorie des poutres s'applique sur des solides élancés (typiquement les prismes dont la longueur vaut 10 fois la plus grande dimension transversale). Là où la détermination de la solution exacte pour les champs de contrainte et de déformation n'est pas possible, elle permet d'obtenir une solution approchée, qui donne une bonne idée sur les efforts et les déplacements.

### 2.4.1 Modèle d'Euler Bernoulli

Il est bien connu que la théorie d'Euler-Bernoulli (Ang : *Classical Beam theory* CBT) est basée sur la théorie élémentaire de flexion des poutres qui ne tient pas compte des effets de la déformation de cisaillement. Il est également connu qu'elle n'est applicable qu'aux poutres fines. Dans cette approche, le nombre d'équations ne dépend pas du nombre de couches puisque la poutre multicouche est homogénéisée, donc considérée comme une seule couche. Comme hypothèse de cette théorie, les déformations dues au cisaillement transversal sont négligées (pas de cisaillement sur la hauteur de la poutre), La section reste perpendiculaire à la ligne moyenne de la poutre et la section reste plane.



**Figure (2.1)** Cinématique d'Euler Bernoulli

Pour le cas des poutres élancées et d'après la théorie classique des poutres, le déplacement d'un point « M » est donné par les deux composantes suivantes :

$$U(M) \begin{cases} u(x, z) = u^0(x) - zw_x^0(x) \\ w(x, z) = w^0(x) \end{cases} \quad (2.2)$$

$u(x, z)$  : représente le déplacement suivant X.

$w(x, z)$  : le déplacement dans la direction de Z ou bien la flèche. La rotation autour de l'axe Y, provoquée par la flexion est tel que:

$$w_x^0(x) = \frac{\partial w^0}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (2.3)$$

$u^0(x)$  et  $w^0$  sont les composantes de déplacement ou milieu de la section et sur la ligne moyenne de la poutre, respectivement le long des axes X et Z.

Lorsque cette théorie est utilisée pour l'analyse des fréquences naturelles des poutres, les flèches sont sous-estimées. Ceci est la conséquence de la négligence de la déformation transversale.

### 2.4.2 Modèle de Timoshenko:

Le modèle de Timoshenko encore appelée modèle de cisaillement de premier ordre (Ang : *FirstOrder Shear Theory* : FOST) est plus riche et plus générale que la théorie élémentaire des poutres au prix d'une fonction supplémentaire. Cette solution permet d'affiner les solutions analytiques issues de la théorie classique. Toutefois ces solutions sont entachées d'erreurs au voisinage des appuis et de la zone indentation où nous pouvons avoir des concentrations de contrainte et des champs de déplacement non homogènes. Elle est basée sur le principe ; qu'après déformation, la section plane reste plane mais pas forcément perpendiculaire à la ligne moyenne de la poutre après déformation (Figure 2.3). Ceci est dû au cisaillement transversal, découvert par Timoshenko, sur l'épaisseur de la poutre. Cette théorie est analogue à la théorie de "Reissner-Mindlin". Dans le cas des plaques épaisses [43].

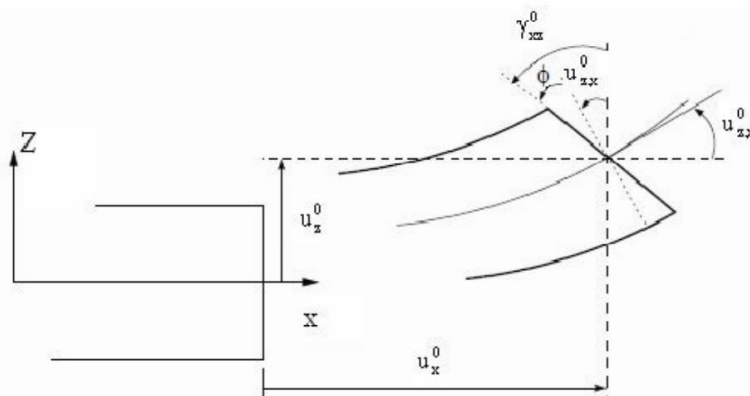


Figure (2.2) Cinématique de Timoshenko [44].

D'après Timoshenko le déplacement s'écrit comme suit :

$$U(M) \begin{cases} u(x, z) = u^0(x) - zw_x^0(x) + z\phi^0(x) \\ w(x, z) = w^0(x) \end{cases} \quad (2.4)$$

$$U(M) \begin{cases} u(x, z) = u^0(x) + z\gamma_{xz}^0(x) \\ w(x, z) = w^0(x) \end{cases} \quad (2.5)$$



$\gamma_{xz}^0(x)$ : C'est la distorsion ou la déformation angulaire mesurée sur la ligne moyenne de la poutre. Tel que :

$$\gamma_{xz}^0(x) = \varphi^0(x) - w_x^0(x) \quad (2.6)$$

$\varphi^0(x)$ : c'est la rotation total de la section mesurée sur la ligne moyenne de la poutre.

Par définition la distorsion est donnée par la relation suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{xz}(x) = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -w_x^0(x) + \gamma_{xz}^0(x) + \varphi^0(x) \\ \gamma_{xz}(x) = \gamma_{xz}^0(x) \end{array} \right. \quad (2.7)$$

Sachant que la contrainte de cisaillement est égale:

$$\tau_{xz} = G_{xz} \gamma_{xz} = G_{xz} \varphi^0(x) \quad (2.8)$$

$G_{xz}$ : est la module de cisaillement transversal qui est supposé constant.

Cette théorie est précise dans la description du comportement d'un bon nombre de structures. Cependant son utilisation implique la définition d'un facteur de correction pour contourner les problèmes de convergence appelés « shear locking ». Ainsi, certains auteurs ont proposé des modèles de cisaillement d'ordre élevé ne nécessitant pas l'utilisation du facteur de correction. Parmi ces théories, on peut citer la théorie de cisaillement de second ordre. Cette approche apporte une certaine relaxation à l'hypothèse cinématique en supposant que la section droite et perpendiculaire au plan moyen de la structure dans la configuration initiale ne conserve plus sa forme droite mais se déforme suivant une courbure cubique. Avec cette hypothèse, la distribution de la contrainte de cisaillement dans l'épaisseur de la structure est linéaire.

### 2.4.3 Théorie d'Ordre Elevé:

Dans cette théorie la distribution des champs de déplacement est non linéaire selon l'épaisseur de la poutre. Elle est plus précise que la théorie du premier ordre puisqu'elle introduit une fonction qui tient compte du phénomène de " gauchissement ". Ce phénomène apparaît lorsque la section transversale de la poutre perd sa planéité (figure 2.4). La fonction  $f(z)$  représente le gauchissement et sa dérivée  $f'(z)$  le cisaillement.

Ces théories sont bien adaptées à la modélisation du comportement des plaques ou des poutres épaisses, où la déformation transverse joue un grand rôle. La plupart de ces modèles utilisent un développement en série de Taylor [45], La précision augmente avec l'ordre de développement. Le champ de déplacement approché pour le troisième ordre, est de la forme [46]

$$u_0(x, z) = u_0(x) + z\Psi(x) + z^2\zeta(x) \quad (2.9)$$

Pour introduire le phénomène de "gauchissement " il faut modifier le coefficient du terme cubique par une fonction (z).

Pour réduire la complexité il faut éliminer les termes d'ordre deux dans le développement de déplacement dans l'épaisseur. Dans ce cas, le champ de déplacement devient :

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u^0(x) - zw_x^0(x) + f(x)\varphi^0(x) \\ w(x, z) = w^0(x) \end{cases} \quad (2.10)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -w_x^0(x) + f'(z)\varphi^0(x) + w_x^0(x) \quad (2.11)$$

$$\gamma_{xz} = f'(z)\varphi^0(x) \quad (2.12)$$

Pour que les contraintes tangentielles soient nulles sur les bords extrêmes de la poutre, on doit avoir:

$$f'(z) = 0$$

C'est la condition qui nous permet d'avoir une répartition parabolique des contraintes de cisaillement sur l'épaisseur de la poutre d'une part et de choisir correctement des fonctions qui répondent à la condition. Selon l'expression de la frontière de cisaillement f (z), quelques modèles d'ordre supérieur se sont distingués dans la littérature. Nous citons en particulier : L'approche de [47] :

$$f(x) = \frac{1}{2} z \left( \frac{1}{4} h^2 - \frac{1}{3} z^2 \right) \quad (2.14)$$

- L'approche de [48] :

$$f(x) = \frac{5}{4} z \left( 1 - \frac{4z^3}{3h^2} \right) \quad (2.15)$$

- L'approche de [49] :

$$f(z) = z \alpha^{-\frac{2z^2}{h^2 \ln \alpha}} \quad (2.16)$$

- L'approche de [50],[51],[52] :

$$f(z) = z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (2.17)$$

Dans le modèle de [52], le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal « w » est constant. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle. La distribution des contraintes de cisaillement transversal est parabolique dans l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

L'approche de [53] :

$$f(z) = \frac{h \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)}{\pi} \quad (2.18)$$

Touratier propose le modèle "sinus" qui est différent des autres modèles d'ordre supérieur puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoidale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur.

La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme ci dessous :

$$f(z) = \frac{h \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)}{\pi} = \frac{h}{\pi} \sum_n^{\infty} = \frac{(-1)^n}{2n+1!} \left(\frac{\pi z}{h}\right)^{2n+1} \quad (2.19)$$

Les contraintes de cisaillement transversal déterminées par le modèle "sinus" prennent une forme cosinusoidale dans l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy.

Afaq et al [54] ont propose un modèle exponentiel avec une cinématique plus riche. La fonction de cisaillement transverse est de la forme suivante :

$$f(z) = ze^{-\frac{2z^2}{h^2}} \quad (2.20)$$

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance pair et impair de la variable  $z$ , alors que la fonction (sinus) de [55] ne permet qu'un développement en puissance impair. Malgré le fait que les modèles d'ordre élevé assurent une continuité de déplacement et de déformation à l'interface, les contraintes de cisaillement Inter-laminaire et les contraintes d'interface, restent discontinues. Ceci présente un inconvénient lors de l'analyse locale de l'interface des structures multicouches dont les propriétés des couches sont très différentes.

### 2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exposé les différentes théories régissant les poutres à savoir l'approche monocouche équivalente. Nous avons essayé de montrer les différentes théories des poutres telles que ; la théorie classique (CBT), la théorie de cisaillement de premier ordre (FSDBT) et les théories d'ordre élevé HSDBT.

# CHAPITRE 3 Formulation mathématique

---

## 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, un modèle de poutre de Timoshenko est utilisée pour analyser l'effet de la porosité sur le facteur de correction de cisaillement ( $k_s$ ) des poutres poreuses à gradient de propriétés (FGM) et l'applique par la suite au problème du flambement des poutres. Les propriétés des matériaux de la poutre FGM sont supposés varie à travers l'épaisseur de poutre selon une loi de puissance. Dans cette recherche, une expression générale du facteur de correction de cisaillement ( $k_s$ ) est dérivée par un principe énergétique. Cinq configurations de distribution de la porosité sont choisies pour étudier l'effet de la porosité sur le facteur de correction de cisaillement ( $k_s$ ) des poutres poreuses à gradient de propriétés (FGM). Pour le problème du flambement, les équations d'équilibre sont obtenues par le théorème des travaux virtuels et qui sont résolues par la procédure de Navier.

## 3.2 Objectifs et méthodologies

Les principaux objectifs de cette recherche sont :

1. Étudier l'effet de la porosité sur le facteur de correction de cisaillement ( $k_s$ ) des poutres poreuses à gradient de propriétés (FGM) ;
2. Applique par la suite au problème du flambement des poutres.

Pour cette recherche, cinq formes de distributions de porosité sont adoptées pour étudier l'effet de la porosité sur le facteur de correction de cisaillement ( $k_s$ ) des poutres poreuses à gradient de propriétés (FGM). L'essentiel à l'application du modèle de poutre de Timoshenko est la détermination du facteur de correction, qui apparaît comme un coefficient dans l'expression de la résultante de la contrainte de cisaillement transverse, afin de compenser l'hypothèse selon laquelle la déformation de cisaillement est uniforme à travers l'épaisseur des poutres. En utilisant un principe énergétique, une expression générale est dérivée pour le facteur de correction de cisaillement ( $k_s$ ).

Les paramètres principaux du problème sont les conditions limites de la poutre, les dimensions géométriques. Les conditions aux limites sont celles d'une poutre simplement appuyée. Les paramètres géométriques sont la longueur de la poutre, son épaisseur. Les

paramètres qui traduisent les propriétés des matériaux utilisés sont le module de Young et le coefficient de Poisson. Le module de Young est calculé grâce à la loi de puissance P-FGM. Cependant le coefficient de Poisson est supposé constant.

### 3.3 Configuration géométrique

Considérons une poutre FGM de forme rectangulaire avec une épaisseur uniforme liée à un système de coordonnées rectangulaires  $(x, z)$  comme le montre la figure 3.1.

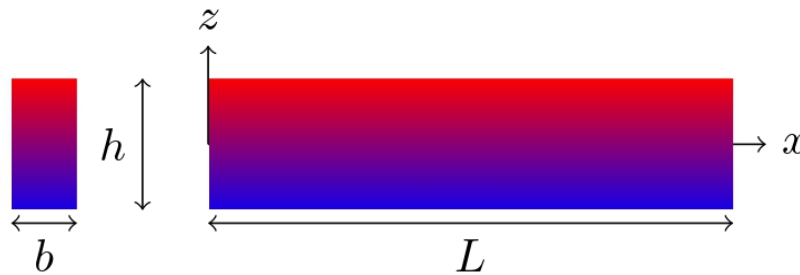


Figure (3.1) Configuration géométrique

Les faces supérieure et inférieure de la poutre sont à  $z = \pm h / 2$ , et les bords de la poutre sont parallèles à l'axes  $x$ . Les propriétés matérielles, comme le module de Young  $E$ , le coefficient de Poisson, peuvent être exprimées par la loi de mélange

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)V_c(z) \quad (3.1)$$

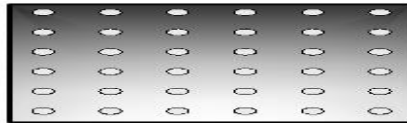
Où la fraction volumique de la céramique est donnée par l'expression suivante

$$V_c(z) = \left( \frac{1}{2} - \frac{z}{h} \right)^p \quad (3.2)$$

L'exposant  $p$ , nommé *indice de puissance* est toujours positif ( $p \geq 0$ ). Pour une valeur de  $p=0$ , la section obtenue est une section en céramique pure avec des propriétés matériaux constantes et lorsque les valeurs de l'indice de puissance augmentent, la nature de la section se rapproche de celle d'un métal pur.

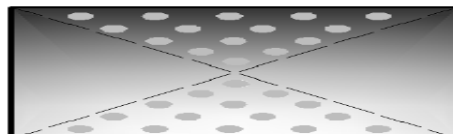
Les cinq configurations de distribution de la porosité choisies sont :

- Distribution homogène de porosité:



$$E(z) = E_c + (E_m - E_c)V - (E_m + E_c) \frac{\xi}{2} \quad (3.3)$$

- Distribution de forme 'X' de porosité:



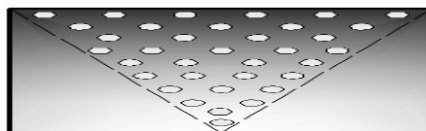
$$E(z) = E_c + (E_m - E_c)V - (E_m + E_c) \frac{\xi}{2} \left( \frac{2z}{h} \right) \quad (3.4)$$

- Distribution de forme 'O' de porosité:



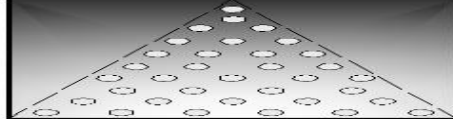
$$E(z) = E_c + (E_m - E_c)V - (E_m + E_c) \frac{\xi}{2} \left( 1 - \frac{2|z|}{h} \right) \quad (3.5)$$

- Distribution de forme 'V' de porosité:



$$E(z) = E_c + (E_m - E_c)V - (E_m + E_c) \frac{\xi}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{|z|}{h} \right) \quad (3.6)$$

- Distribution de forme 'V' renversé de porosité:



$$E(z) = E_c + (E_m - E_c)V - (E_m + E_c) \frac{\xi}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{|z|}{h} \right) \quad (3.7)$$

### 3.4 Dérivation de la rigidité au cisaillement transverse des poutres

Le modèle utilisé dans notre étude est le model du première ordre de Timoshenko (FSDT), le champ de déplacement est exprimé sous la forme

$$u(x, z, t) = u_0(x, t) + z\theta(x) \quad (3.8a)$$

$$w(x, z, t) = w(x, t) \quad (3.8b)$$

Les valeurs  $u_0$  et  $w$  sont les composants de déplacement dans les directions de  $x$  et de  $z$ , respectivement, et  $\varphi$  est la rotation de la section transversale de la poutre.

Le champ de déformation associé au champ de déplacement est

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = u' + z\varphi' \\ \gamma_{xz} = w' + \varphi \end{cases} \quad (3.9)$$

L'état de contrainte dans la poutre FGM est donné par la loi de Hooke généralisée comme suit:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = E(z)\varepsilon_{xx} \\ \tau_{xz} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}\gamma_{xz} \end{cases} \quad (3.10)$$

La rigidité au cisaillement transverse des poutres FGM est dérivée en utilisant la méthodologie employée par Nguyen et al. [56]. La relation entre la déformation dans le plan et la contrainte est régie par l'équation constitutive.

$$\sigma_{xx} = E(z) \left( \varepsilon^0(x) + z\chi(x) \right) \quad (3.11)$$



$E(z)$ : module de Young ;  $\varepsilon^0(x)$  et  $\chi(x)$  sont respectivement la déformation axiale et la courbure de la poutre. Ces composantes sont liées au déplacement  $u$  et à la rotation  $\theta$  de la poutre :  $\varepsilon^0(x) = u'$ ,  $\chi(x) = \theta'$ . Les résultantes de contraintes généralisées  $(N_x, M_x)$  sont liées à la contrainte dans le plan par les relations constitutives globales.

$$\begin{cases} N_x = A\varepsilon^0(x) + B\chi(x) \\ M_x = B\varepsilon^0(x) + D\chi(x) \end{cases} \quad (3.12)$$

Où  $A$ ,  $B$  et  $D$  sont les rigidités des poutres à gradient de propriétés (FGM), données par :

$$[A, B, D] = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [1, z, z^2] E(z) b dz \quad (3.13)$$

Les déformations dans le plan et la courbure sont finalement exprimées par :

$$\begin{cases} \varepsilon^0(x) = aN_x + bM_x \chi(x) \\ \chi(x) = bN_x + dM_x \end{cases} \quad (3.14)$$

où  $a$ ,  $b$  et  $d$  sont les composantes de la matrice de souplesse, qui peuvent être explicitement calculées en termes de  $E(z)$ . En substituant l'équation (3.14) dans l'équation (29), on obtient.

$$\sigma_{xx}(x, z) = n(z)N_x(x) + m(z)M_x(x) \quad (3.15)$$

Avec

$$n(z) = E(z)(a + zb) \quad (3.16a)$$

$$m(z) = E(z)(b + zd) \quad (3.16b)$$

La contrainte de cisaillement transversal est déterminée en résolvant l'équation d'équilibre.

$$\sigma_{xx,x} + \sigma_{xz,z} = 0 \quad (3.17)$$

Ce qui donne :

$$\sigma_{xz} = - \int_{-\frac{h}{2}}^z \sigma_{xx}(x, \xi) d\xi \quad (3.18)$$

Où le coefficient d'intégration est choisi pour satisfaire la condition aux limites pour la contrainte de cisaillement aux faces supérieure et inférieure de la poutre. Cela est réalisé en substituant l'équation (3.13) dans l'équation (3.18) et en utilisant les équations d'équilibre de la poutre. ( $N_{x,x} = 0$  et  $M_{x,x} + Q_{xz} = 0$ ), la relation suivante est obtenue.

$$\sigma_{xz} = \tilde{m}(z) Q_{xz}(x) \quad (3.19)$$

$$\tilde{m}(z) = - \int_{-\frac{h}{2}}^z m(\xi) d\xi = -bA_z(z) - dB_z(z) \quad (3.20)$$

$$A_z(z) = - \int_{-\frac{h}{2}}^z E(\xi) d\xi, B_z(z) = - \int_{-\frac{h}{2}}^z \xi E(\xi) d\xi \quad (3.21)$$

En tenant compte de l'équilibre de l'énergie de déformation due au cisaillement [57], et en incorporant la contrainte de cisaillement telle que définie dans l'équation (3.19), une expression améliorée de la rigidité au cisaillement transverse des poutres FG peut être formulée.

$$H = \left( \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{(bA_z(z) + dB_z(z))^2}{Q_{55}} dz \right)^{-1} \quad (3.22)$$

$Q_{55} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}$  est le module de cisaillement à l'emplacement  $z$

Il est bien connu que le modèle de poutre basé sur le model du première ordre de Timoshenko (FSDT) nécessitent un facteur de correction de cisaillement approprié pour calculer la force de cisaillement transversale. Pour les poutres FG, ce facteur est généralement pris comme étant cinq-sixièmes de la valeur des poutres homogènes. Cependant, dans cette recherche, il peut être facilement obtenu à partir de l'expression de la rigidité au cisaillement transverse comme suit :

$$k_s = \left( \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{55} dz \right)^{-1} \left( \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{(bA_z(z) + dB_z(z))^2}{Q_{55}} dz \right)^{-1} \quad (3.23)$$

Les équations d'équilibre des poutres poreuses à gradient de propriétés peuvent être dérivées en utilisant le principe des travaux virtuels.

$$\int_V (\delta U - \delta T) dV = 0 \quad (3.24)$$

### 3.4.1 Énergie de déformation

La fonctionnelle de l'énergie de déformation de la poutre à gradient fonctionnel est donnée par

$$U = \frac{1}{2} \int_V [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}] dv \quad (3.25)$$

L'énergie de déformation de la poutre peut être écrite comme

$$\delta U = \frac{1}{2} \int_0^\ell [N_x \delta \varepsilon_x^0 + M_x \delta \chi + Q_{xz} \delta \gamma_{xz}] dx \quad (3.26)$$

### 3.4.2 Énergie potentielle externe

Le travail des actions exercées par la charge de compression latérale  $N_0$ .

$$T = \frac{1}{2} \int_0^\ell [N_0 (w, x)^2] dx \quad (3.27)$$

La variation du travail des actions s'exprime finalement en prenant la variation de (3.27), soit

$$\delta T = \frac{1}{2} \int_0^\ell \left[ N_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \delta w dx \quad (3.28)$$

Ou  $N_0$  est la force appliquée transversale à la surface supérieure de la poutre.

Le principe de travaux virtuels pour un corps élastique peut être représenté par

$$\int_{-h/2}^{h/2} \int_0^\ell (\sigma \delta \varepsilon) dx dz - \int_0^\ell N_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta W dx = 0 \quad (3.29)$$

En remplaçant l'équation (3.26) dans l'équation (3. 29) et en intégrant par parties, en rassemblant les coefficients  $\delta u, \delta w, \delta \varphi$ , les équations d'équilibres pour la poutre FGM résultantes sont :

$$\begin{aligned}\delta u &= \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} = 0 \\ \delta w &= \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} - N_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \\ \delta \varphi &= \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} - Q_{xz} = 0\end{aligned}\quad (3.30)$$

Équations (3.30) peuvent être exprimées en termes des déplacements  $(u, w, \varphi)$  en remplaçant les forces résultantes de l'équation (3.12). Pour la poutre de FGM, les équations d'équilibre prennent la forme :

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0 \quad (3.31a)$$

$$H \frac{\partial \varphi}{\partial x} + H \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - N_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (3.31b)$$

$$B \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - H \frac{\partial w}{\partial x} + D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - H \varphi = 0 \quad (3.31c)$$

### 3.5 Solution exacte pour la poutre FGM

La procédure de solution de Navier est utilisée pour obtenir les solutions analytiques pour les conditions aux limites simplement appuyé. À cette fin, les fonctions de déplacement sont exprimées comme le produit de coefficients indéterminés et de fonctions trigonométriques connues pour satisfaire les équations gouvernantes et les conditions à  $x=0$  et  $x=L$ , qui sont données par :

$$w(0) = w(L) = M(0) = M(L) = 0 \quad (3.32)$$

Ces conditions aux limites permettent d'approximer les déplacements par les développements suivants :

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \\ \varphi \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_m \cos(\alpha x) \\ W_m \sin(\alpha x) \\ \varphi_m \cos(\alpha x) \end{Bmatrix} \quad (3.33)$$

Où  $U_m$ ,  $W_m$  et  $\varphi_m$  sont des paramètres à déterminer.  $\alpha = \frac{m\pi}{L}$   
 En substituant les équations (3.33) dans l'équation (3.31) et en collectant paramètres à déterminer,  $U_m$ ,  $W_m$  et  $\varphi_m$ , le problème de valeurs propres suivant est obtenu :

$$([K])\{\Delta\} = \{0\} \quad (\text{III.17}) \quad (3.34)$$

Ou

$$K = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{III.16}) \quad (3.35)$$

$\{\Delta\}$  représente le vecteur de colonne des inconnus :

$$\{\Delta\}^T = \{U_m, W_m, \varphi_m\} \quad (3.36)$$

Dans lequel :

$$\begin{aligned} a_{11} &= A\alpha^2, \quad a_{12} = 0, \quad a_{13} = B\alpha^2 \\ a_{21} &= 0, \quad a_{22} = H\alpha^2 - N_0\alpha^2, \quad a_{23} = H\alpha^2 \\ a_{31} &= B\alpha^2, \quad a_{32} = H\alpha^2, \quad a_{33} = D\alpha^2 + H \end{aligned} \quad (3.37)$$

### 3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, L'analyse l'effet de la porosité sur le facteur de correction de cisaillement ( $k_s$ ) des poutres poreuses en FGM est étudié. Pour se faire cinq formes de distributions de porosité sont adoptées dans cette recherche. Une expression générale du facteur de correction de cisaillement ( $k_s$ ) est dérivée par un principe énergétique. On suppose que les propriétés matérielles varient selon l'épaisseur de la poutre seulement selon une distribution de loi de puissance (P-FGM). Les équations d'équilibres pour la poutre en FGM ont été obtenues par l'utilisation du principe d'énergie des travaux virtuel. Les solutions sont obtenues en utilisant la procédure de Navier, et les charges critiques de flambement sont trouvées en résolvant un problème à valeurs propres.

# CHAPITRE 4 Validation et comparaison des résultats

---

## 4.1 Introduction

Dans ce présent chapitre, plusieurs exemples numériques sont présents et discutés. Une poutre simplement appuyée en FGM composée de la céramique et du métal est étudiée dans cette recherche. Dans un premier temps nous présentons les résultats de l'effet de la porosité sur le facteur de correction de cisaillement à travers des tableaux et des figures. Dans la deuxième partie du travail, une analyse du flambement des poutres poreuses en FGM sont investiguées. Dans cette analyse, la charge critique de flambement est obtenue par résolution analytique du problème aux valeurs propres.

## 4.2 Résultats numériques

On considère une poutre de longueur  $L$  et de section rectangulaire de hauteur  $h$  et de largeur  $b$  dans le système de coordonnées direct  $(o, x, z)$ . La structure à gradient de propriétés est constituée de la céramique (Alumine  $Al_2O_3$ ) noté (c) et de métal (Aluminium Al) noté (m) et est modélisé par la loi P-FGM avec une fraction volumique des constituants dépendants de la coordonnée  $z$ , pour laquelle les propriétés matérielles sont :

**Tableau (4.1)** Propriétés matérielles de la poutre FGM.

Propriétés	Métal (Aluminium Al)	Céramique (Alumina $Al_2O_3$ )
$E$ (GPa)	70	380
$\nu$	0.30	0.30

Les tableaux 4.2 et 4.3 montrent les variations du facteur de correction de cisaillement ( $k_s$ ) des poutres poreuses en FGM. Dans le cas d'une distribution de porosité homogène, l'indice de porosité  $\xi$  prend les valeurs 0 pour les poutres non-poreuses 5%, 10%, 15% et 20%. L'indice des propriétés matérielles a les valeurs 0.5, 0.2, 1 et 2. Dans cette partie du travail, un rapport entre le module de Young de la céramique et celui du métal est défini et noté  $n$  ( $n = E_c/E_m$ ), ce rapport prend les valeurs suivantes (1, 2, 5, 8 et 10). Les résultats présentés pour deux rapports  $L/h = 5$  et 20.

**Tableau (4.2)** Variations du facteur de correction de cisaillement  
(Forme homogène,  $L/h = 5$ )

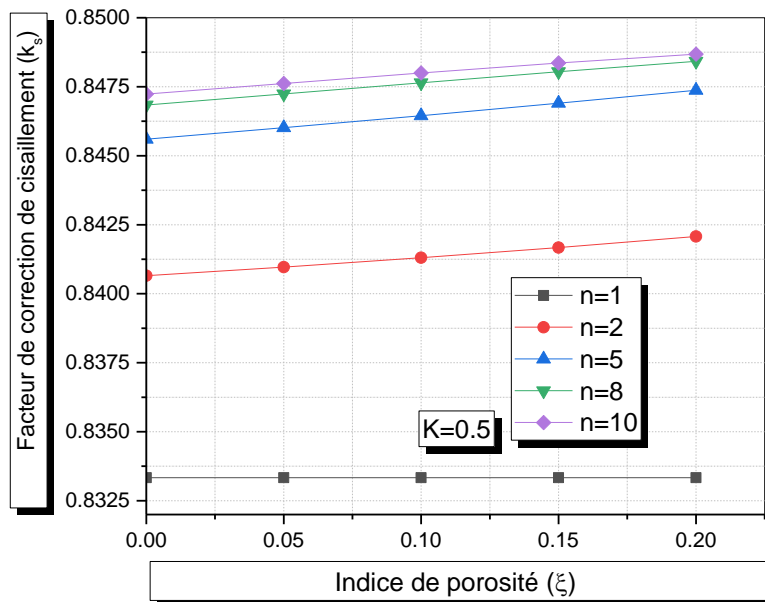
P	$\xi$	$n = E_c/E_m$				
		1	2	5	8	10
0.5	0	0.833333	0,840656	0.845604	0.846839	0.847233
	0.05	0.833333	0,840966	0.846017	0.847238	0.847617
	0.10	0.833333	0,841304	0.846451	0.847642	0.847999
	0.15	0.833333	0,841672	0.846905	0.848043	0.848362
	0.20	0.833333	0,842076	0.847372	0.848419	0.848679
0.2	0	0.833333	0.839615	0.843513	0.844483	0.844804
	0.05	0.833333	0.839867	0.843834	0.844808	0.845130
	0.10	0.833333	0.840140	0.844174	0.845152	0.845473
	0.15	0.833333	0.840436	0.844536	0.845514	0.845834
	0.20	0.833333	0.840758	0.844921	0.845897	0.846215
1	0	0.833333	0.832034	0.830373	0.830821	0,831201
	0.05	0.833333	0.831915	0.830426	0.831207	0,831727
	0.1	0.833333	0.831780	0.830577	0.831767	0,832407
	0.15	0.833333	0.831629	0.830874	0,832493	0,833111
	0.20	0.833333	0.831460	0.831373	0,833202	0.833199
2	0	0,833333	0,809474	0,767708	0,756268	0,756298
	0.05	0,833333	0,806011	0,763116	0,755237	0,755194
	0.1	0,833333	0,803886	0,758777	0,759559	0,758631
	0.15	0,833333	0,801415	0,755589	0,776372	0,772496
	0.20	0,833333	0,772042	0,759365	0,756298	0.781803

**Tableau (4.3)** Variations du facteur de correction de cisaillement  
(Forme homogène,  $L/h = 20$ )

P	$\xi$	$n = E_c/E_m$				
		1	2	5	8	10
0.5	0	0.833333	0,840656	0.845604	0.846839	0.847233
	0.05	0.833333	0,840966	0.846017	0.847238	0.847617
	0.1	0.833333	0,841304	0.846451	0.847642	0.847999
	0.15	0.833333	0,841672	0.846905	0.848043	0.848362
	0.20	0.833333	0,842076	0.847372	0.848419	0.848679
0.2	0	0.833333	0.839615	0.843513	0.844483	0.844804
	0.05	0.833333	0.839867	0.843834	0.844808	0.845130
	0.1	0.833333	0.840140	0.844174	0.845152	0.845473
	0.15	0.833333	0.840436	0.844536	0.845514	0.845834
	0.20	0.833333	0.840758	0.844921	0.845897	0.846215
1	0	0.833333	0.832034	0.830373	0.830821	0,831201
	0.05	0.833333	0.831915	0.830426	0.831207	0,831727
	0.1	0.833333	0.831780	0.830577	0.831767	0,832407
	0.15	0.833333	0.831629	0.830874	0,832493	0,833111
	0.20	0.833333	0.831460	0.831373	0,833202	0.833199
2	0	0,833333	0,809474	0,767708	0,756268	0,756298

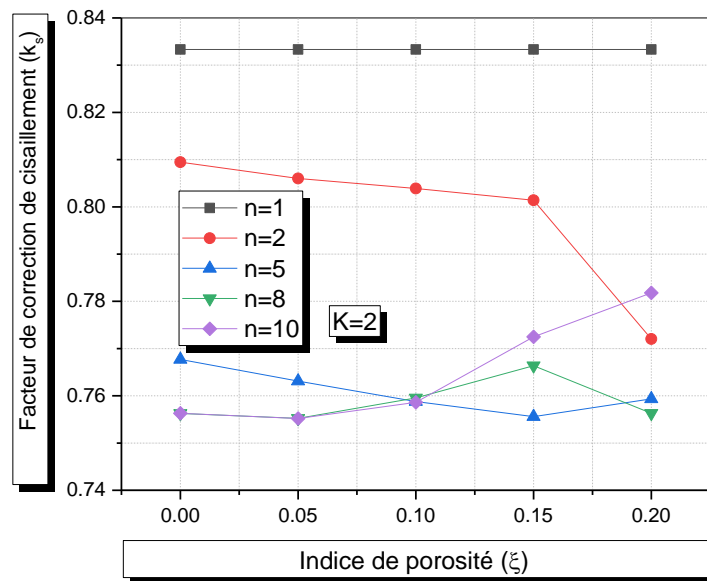
	0.05	0,833333	0,806011	0,763116	0,755237	0,755194
	0.1	0,833333	0,803886	0,758777	0,759559	0,758631
	0.15	0,833333	0,801415	0,755589	0,776372	0,772496
	0.20	0,833333	0,772042	0,759365	0,756298	0,781803

A partir de ces tableaux, on peut remarquer que le facteur de correction de cisaillement ( $k_s$ ) diminue lorsque les valeurs de l'indice de puissance  $k$  augmentent. Par contre, pour  $k = 0.2$  et  $0.50$ , il augmente avec l'augmentation de l'indice de porosité et de ceux du rapport  $n$ . Alors que pour  $k = 1$  et  $2$ , le facteur de correction de cisaillement, en général, diminue avec augmentation du rapport  $n$ . Pour  $n = 1$  (poutre homogène entièrement en métal), le facteur de correction de cisaillement ( $k_s$ ) est égale à  $5/6$  quelles soit les valeurs de l'indice de porosité et de l'indice de puissance figure (4.2) et (4.3). Il est important de noter que le facteur de correction au cisaillement dépend fortement des valeurs de  $k$  et du rapport  $n$ .



**Figure (4.2)** Variations du facteur de correction de cisaillement (Forme homogène,  $L/h = 20$   $k = 0.5$ )





**Figure (4.3)** Variations du facteur de correction de cisaillement (Forme homogène,  $L/h = 20$   $k = 2$  )

Les tableaux 4.4 et 4.5 montrent les variations du facteur de correction de cisaillement ( $k_s$ ) des poutres avec une distribution de forme X de la porosité. Le facteur de correction augmente avec l'augmentation de l'indice de porosité et rapport n, mais diminue avec l'augmentation de l'indice de porosité. Aussi, on remarque une légère variation du facteur de correction de cisaillement avec l'augmentation de l'indice de porosité, figure (4.4) et (4.5).

**Tableau (4.4)** Variations du facteur de correction de cisaillement (Forme X,  $L/h = 5$ )

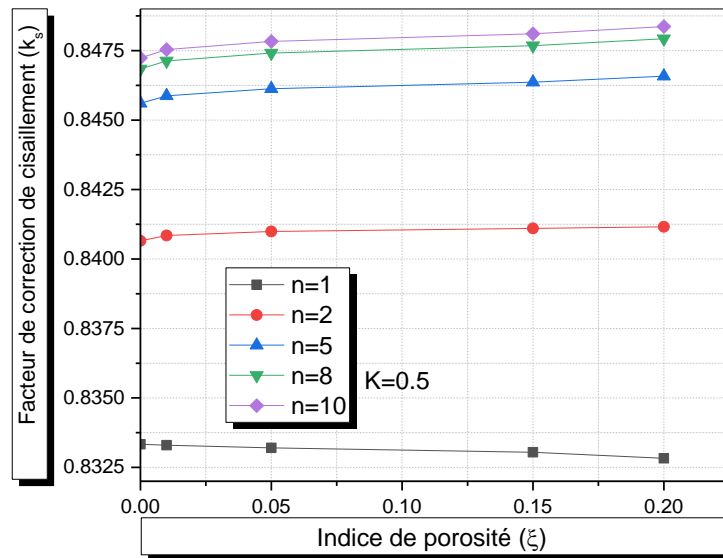
		$n = E_c/E_m$				
P	$\xi$	1	2	5	8	10
0.5	0	0.833333	0.840656	0.845604	0.846839	0.847233
	0.05	0.833300	0.840844	0.845872	0.847131	0.847537
	0.1	0.833202	0.840993	0.846126	0.847411	0.847829
	0.15	0.833043	0.841099	0.846363	0.847677	0.848106
	0.20	0.832826	0.841159	0.846578	0.847925	0.848366
0.2	0	0.833333	0.839615	0.843513	0.844483	0.844804
	0.05	0.833300	0.839689	0.843636	0.844617	0.844942
	0.1	0.833202	0.839724	0.843734	0.844729	0.845058
	0.15	0.833043	0.839718	0.843805	0.844817	0.845152
	0.20	0.832826	0.839671	0.843849	0.844881	0.845222
1	0	0.833333	0.832034	0.830373	0.830821	0.831201
	0.05	0.833300	0.832360	0.830419	0.830515	0.830748

## Chapitre 4 : Validation et comparaison des résultats

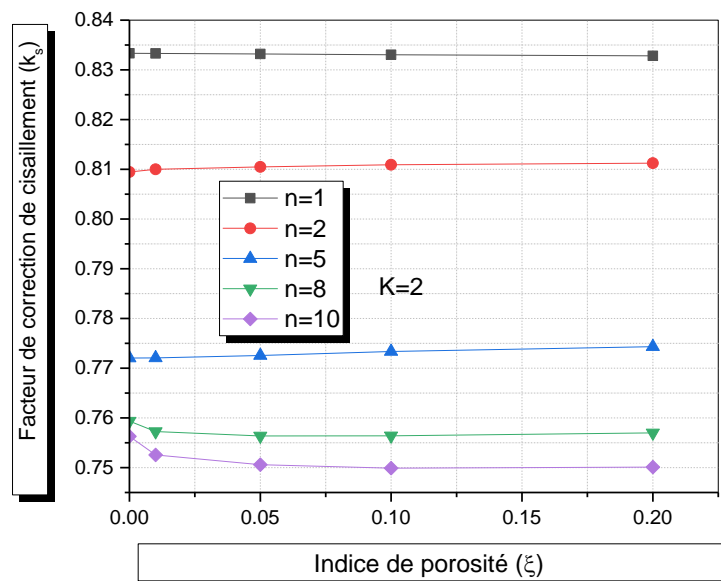
	0.1	0.833202	0.832654	0.830578	0.830382	0.830477
	0.15	0.833043	0.832904	0.830822	0.830398	0.830374
	0.20	0.832826	0.833102	0.831124	0.830534	0.830415
2	0	0.833333	0.809474	0.772042	0.759365	0.756298
	0.05	0.833300	0.810009	0.772078	0.757254	0.752543
	0.1	0.833202	0.810491	0.772565	0.756381	0.750582
	0.15	0.833043	0.810902	0.773352	0.756386	0.749902
	0.20	0.832826	0.811226	0.774320	0.756993	0.750110

**Tableau (4.5)** Variations du facteur de correction de cisaillement  
(Forme X,  $L/h = 20$ )

P	$\xi$	$n = E_c/E_m$				
		1	2	5	8	10
0.5	0	0.833333	0.840656	0.845604	0.846839	0.847233
	0.05	0.833300	0.840844	0.845872	0.847131	0.847537
	0.1	0.833202	0.840993	0.846126	0.847411	0.847829
	0.15	0.833043	0.841099	0.846363	0.847677	0.848106
	0.20	0.832826	0.841159	0.846578	0.847925	0.848366
0.2	0	0.833333	0.839615	0.843513	0.844483	0.844804
	0.05	0.833300	0.839689	0.843636	0.844617	0.844942
	0.1	0.833202	0.839724	0.843734	0.844729	0.845058
	0.15	0.833043	0.839718	0.843805	0.844817	0.845152
	0.20	0.832826	0.839671	0.843849	0.844881	0.845222
1	0	0.833333	0.832034	0.830373	0.830821	0.831201
	0.05	0.833300	0.832360	0.830419	0.830515	0.830748
	0.1	0.833202	0.832654	0.830578	0.830382	0.830477
	0.15	0.833043	0.832904	0.830822	0.830398	0.830374
	0.20	0.832826	0.833102	0.831124	0.830534	0.830415
2	0	0.833333	0.809474	0.772042	0.759365	0.756298
	0.05	0.833300	0.810009	0.772078	0.757254	0.752543
	0.1	0.833202	0.810491	0.772565	0.756381	0.750582
	0.15	0.833043	0.810902	0.773352	0.756386	0.749902
	0.20	0.832826	0.811226	0.774320	0.756993	0.750110



**Figure (4.4)** Variations du facteur de correction de cisaillement (Forme  $\chi$ ,  $L/h = 20$   $k = 0.5$ )



**Figure (4.5)** Variations du facteur de correction de cisaillement (Forme  $\chi$ ,  $L/h = 20$   $k = 2$ )

Les tableaux 4.6 et 4.7 montrent les variations du facteur de correction de cisaillement ( $k_s$ ) des poutres avec une distribution de forme O de la porosité. Le facteur de correction augmente avec l'augmentation de l'indice de porosité et rapport n, mais diminue avec l'augmentation

de l'indice de porosité. Aussi, on remarque une légère variation du facteur de correction de cisaillement avec l'augmentation de l'indice de porosité, figure (4.6) et (4.7).

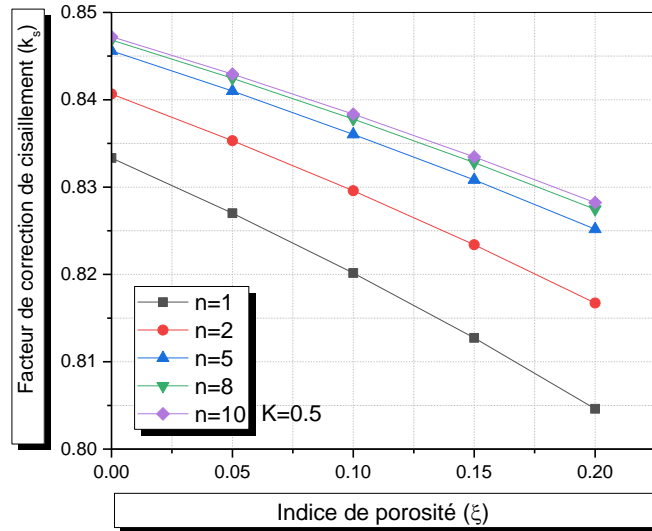
**Tableau (4.6)** Variations du facteur de correction de cisaillement  
(Forme O,  $L/h = 5$ )

P	$\xi$	1	2	5	8	10
0.5	0	0.833333	0.840656	0.845604	0.846839	0.847233
	0.05	0.827013	0.835316	0.841005	0.842464	0.842938
	0.1	0.820166	0.829578	0.836090	0.837796	0.838358
	0.15	0.812727	0.823395	0.830826	0.832806	0.833465
	0.20	0.804619	0.816719	0.825179	0.827462	0.828229
0.2	0	0.833333	0.839615	0.843513	0.844483	0.844804
	0.05	0.827013	0.834751	0.839568	0.840774	0.841174
	0.1	0.820166	0.829561	0.835402	0.836867	0.837354
	0.15	0.812727	0.824012	0.830995	0.832746	0.833329
	0.20	0.804619	0.818068	0.826328	0.828395	0.829083
1	0	0.833333	0.832034	0.830373	0.830821	0.831201
	0.05	0.827013	0.825563	0.823732	0.824315	0.824800
	0.1	0.820166	0.818542	0.816492	0.817214	0.817816
	0.15	0.812727	0.810900	0.808574	0.809437	0.810167
	0.20	0.804619	0.802556	0.799883	0.800890	0.801759
2	0	0.833333	0.809474	0.772042	0.759365	0.756298
	0.05	0.827013	0.800765	0.758476	0.743684	0.740059
	0.1	0.820166	0.791196	0.743152	0.725673	0.721271
	0.15	0.812727	0.780640	0.725731	0.704796	0.699290
	0.20	0.804619	0.768943	0.705788	0.680341	0.673229

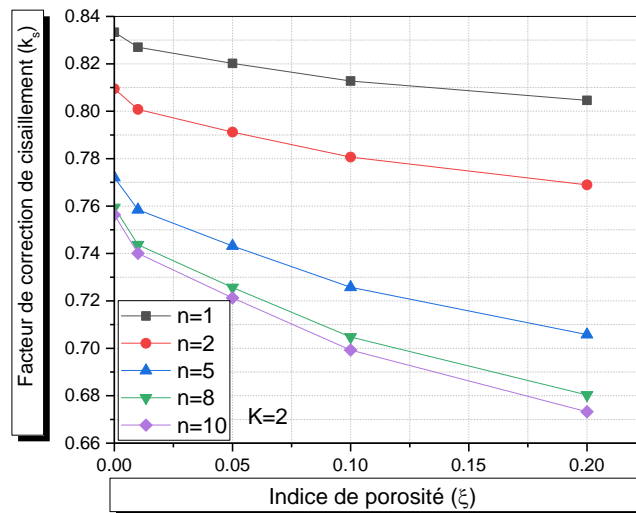
**Tableau (4.7)** Variations du facteur de correction de cisaillement  
(Forme O,  $L/h = 20$ )

P	$\xi$	1	2	5	8	10
0.5	0	0.833333	0.840656	0.845604	0.846839	0.847233
	0.05	0.827013	0.835316	0.841005	0.842464	0.842938
	0.1	0.820166	0.829578	0.836090	0.837796	0.838358
	0.15	0.812727	0.823395	0.830826	0.832806	0.833465
	0.20	0.804619	0.816719	0.825179	0.827462	0.828229
0.2	0	0.833333	0.839615	0.843513	0.844483	0.844804
	0.05	0.827013	0.834751	0.839568	0.840774	0.841174
	0.1	0.820166	0.829561	0.835402	0.836867	0.837354
	0.15	0.812727	0.824012	0.830995	0.832746	0.833329
	0.20	0.804619	0.818068	0.826328	0.828395	0.829083
1	0	0.833333	0.832034	0.830373	0.830821	0.831201
	0.05	0.827013	0.825563	0.823732	0.824315	0.824800
	0.1	0.820166	0.818542	0.816492	0.817214	0.817816
	0.15	0.812727	0.810900	0.808574	0.809437	0.810167
	0.20	0.804619	0.802556	0.799883	0.800890	0.801759
2	0	0.833333	0.809474	0.772042	0.759365	0.756298

	0.05	0.827013	0.800765	0.758476	0.743684	0.740059
	0.1	0.820166	0.791196	0.743152	0.725673	0.721271
	0.15	0.812727	0.780640	0.725731	0.704796	0.699290
	0.20	0.804619	0.768943	0.705788	0.680341	0.673229



**Figure (4.6)** Variations du facteur de correction de cisaillement (Forme  $0, L/h = 20 k = 0.5$  )



**Figure (4.7)** Variations du facteur de correction de cisaillement (Forme  $0, L/h = 20 k = 2$  )

Le facteur de correction de cisaillement ( $k_s$ ) des poutres avec une distribution de forme V de la porosité augmente avec l'augmentation de l'indice de porosité et rapport n, mais diminue avec l'augmentation de l'indice de porosité. Aussi, on remarque une légère variation du facteur de correction de cisaillement avec l'augmentation de l'indice de porosité (Tableaux 4.8 et 4.9) et figure (4.8) et (4.9).

**Tableau (4.8)** Variations du facteur de correction de cisaillement  
(Forme V,  $L/h = 5$ )

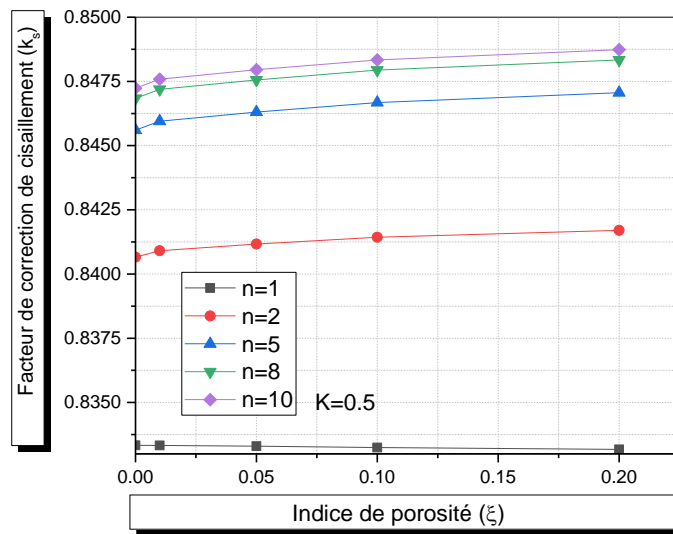
P	$\xi$	1	2	5	8	10
0.5	0	0.833333	0.840656	0.845604	0.846839	0.847233
	0.05	0.833325	0.840910	0.845948	0.847191	0.847587
	0.1	0.833297	0.841170	0.846305	0.847558	0.847955
	0.15	0.833247	0.841434	0.846677	0.847940	0.848338
	0.20	0.833172	0.841703	0.847063	0.848337	0.848737
0.2	0	0.833333	0.839615	0.843513	0.844483	0.844804
	0.05	0.833325	0.839782	0.843738	0.844716	0.845039
	0.1	0.833297	0.839948	0.843967	0.844953	0.845278
	0.15	0.833247	0.840110	0.844198	0.845194	0.845521
	0.20	0.833172	0.840269	0.844433	0.845438	0.845769
1	0	0.833333	0.832034	0.830373	0.830821	0.831201
	0.05	0.833325	0.832148	0.830372	0.830777	0.831151
	0.1	0.833297	0.832265	0.830374	0.830733	0.831100
	0.15	0.833247	0.832385	0.830382	0.830690	0.831048
	0.20	0.833172	0.832506	0.830395	0.830647	0.830996
2	0	0.833333	0.809474	0.772042	0.759365	0.756298
	0.05	0.833325	0.808978	0.769757	0.755999	0.752557
	0.1	0.833297	0.808451	0.767313	0.752343	0.748465
	0.15	0.833247	0.807887	0.764693	0.748358	0.743970
	0.20	0.833172	0.807281	0.761878	0.744002	0.739013

**Tableau (4.9)** Variations du facteur de correction de cisaillement  
(Forme V,  $L/h = 20$ )

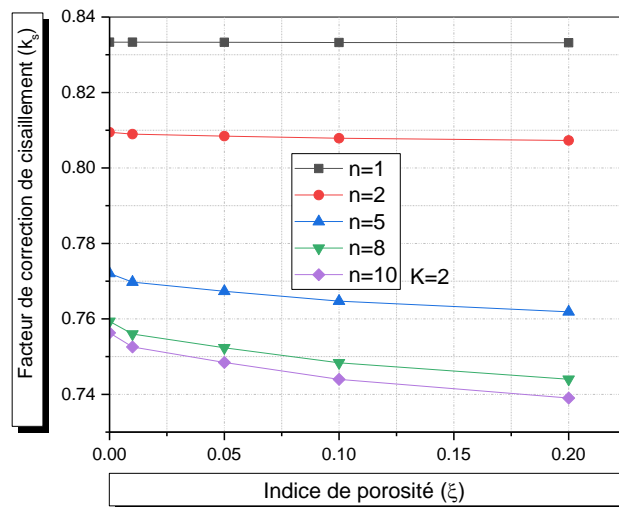
P	$\xi$	1	2	5	8	10
0.5	0	0.833333	0.840656	0.845604	0.846839	0.847233
	0.05	0.833325	0.840910	0.845948	0.847191	0.847587
	0.1	0.833297	0.841170	0.846305	0.847558	0.847955
	0.15	0.833247	0.841434	0.846677	0.847940	0.848338
	0.20	0.833172	0.841703	0.847063	0.848337	0.848737
0.2	0	0.833333	0.839615	0.843513	0.844483	0.844804
	0.05	0.833325	0.839782	0.843738	0.844716	0.845039
	0.1	0.833297	0.839948	0.843967	0.844953	0.845278
	0.15	0.833247	0.840110	0.844198	0.845194	0.845521
	0.20	0.833172	0.840269	0.844433	0.845438	0.845769
1	0	0.833333	0.832034	0.830373	0.830821	0.831201

## Chapitre 4 : Validation et comparaison des résultats

	0.05	0.833325	0.832148	0.830372	0.830777	0.831151
	0.1	0.833297	0.832265	0.830374	0.830733	0.831100
	0.15	0.833247	0.832385	0.830382	0.830690	0.831048
	0.20	0.833172	0.832506	0.830395	0.830647	0.830996
2	0	0.833333	0.809474	0.772042	0.759365	0.756298
	0.05	0.833325	0.808978	0.769757	0.755999	0.752557
	0.1	0.833297	0.808451	0.767313	0.752343	0.748465
	0.15	0.833247	0.807887	0.764693	0.748358	0.743970
	0.20	0.833172	0.807281	0.761878	0.744002	0.739013



**Figure (4.8)** Variations du facteur de correction de cisaillement (Forme  $v, L/h = 20, k = 0.5$ )



**Figure (4.9)** Variations du facteur de correction de cisaillement (Forme  $v, L/h = 20, k = 2$ )

La même tendance a été observée pour la distribution V renversé. C.-à-d. une augmentation du facteur de correction de cisaillement avec l'augmentation de l'indice de porosité et rapport n, mais diminue avec l'augmentation de l'indice de porosité. Une légère variation du facteur de correction de cisaillement avec l'augmentation de l'indice de porosité (Tableaux 4.10 et 4.11) et figure (4.10) et (4.11).

**Tableau (4.10)** Variations du facteur de correction de cisaillement (Forme Vre,  $L/h = 5$ )

P	$\xi$	1	2	5	8	10
0.5	0	0.833333	0.840656	0.845604	0.846839	0.847233
	0.05	0.833325	0.840697	0.845666	0.846880	0.847259
	0.1	0.833297	0.840728	0.845720	0.846903	0.847260
	0.15	0.833247	0.840750	0.845765	0.846899	0.847223
	0.20	0.833172	0.840764	0.845795	0.846852	0.847126
0.2	0	0.833333	0.839615	0.843513	0.844483	0.844804
	0.05	0.833325	0.839685	0.843598	0.844566	0.844886
	0.1	0.833297	0.839746	0.843676	0.844642	0.844961
	0.15	0.833247	0.839796	0.843747	0.844711	0.845029
	0.20	0.833172	0.839835	0.843809	0.844772	0.845088
1	0	0.833333	0.832034	0.830373	0.830821	0.831201
	0.05	0.833325	0.831800	0.830447	0.831258	0.831775
	0.1	0.833297	0.831550	0.830655	0.831865	0.832477
	0.15	0.833247	0.831291	0.831033	0.832592	0.833141
	0.20	0.833172	0.831030	0.831603	0.833228	0.833220
2	0	0.833333	0.809474	0.772042	0.759365	0.756298
	0.05	0.833325	0.808397	0.770266	0.759874	0.759012
	0.1	0.833297	0.807239	0.769073	0.762901	0.765827
	0.15	0.833247	0.806604	0.768936	0.770103	0.778721
	0.20	0.833172	0.804701	0.770629	0.783068	0.791561

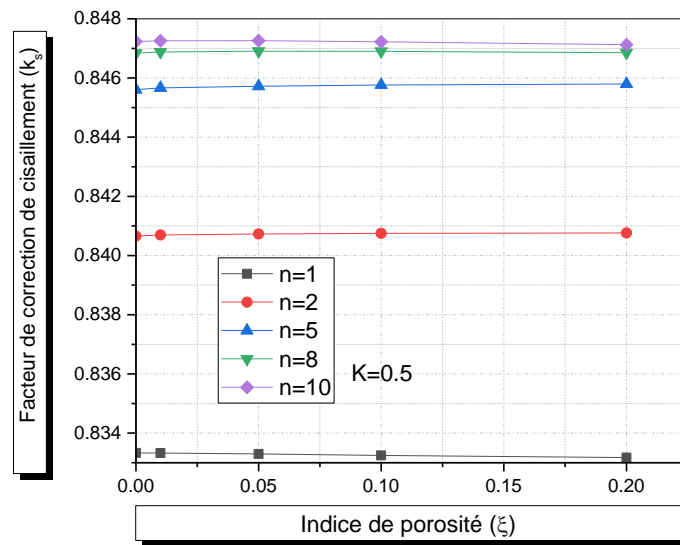
**Tableau (4.11)** Variations du facteur de correction de cisaillement (Forme Vre,  $L/h = 20$ )

k	$\xi$	1	2	5	8	10
0.5	0	0.833333	0.840656	0.845604	0.846839	0.847233
	0.05	0.833325	0.840697	0.845666	0.846880	0.847259
	0.1	0.833297	0.840728	0.845720	0.846903	0.847260
	0.15	0.833247	0.840750	0.845765	0.846899	0.847223
	0.20	0.833172	0.840764	0.845795	0.846852	0.847126
0.2	0	0.833333	0.839615	0.843513	0.844483	0.844804
	0.05	0.833325	0.839685	0.843598	0.844566	0.844886
	0.1	0.833297	0.839746	0.843676	0.844642	0.844961

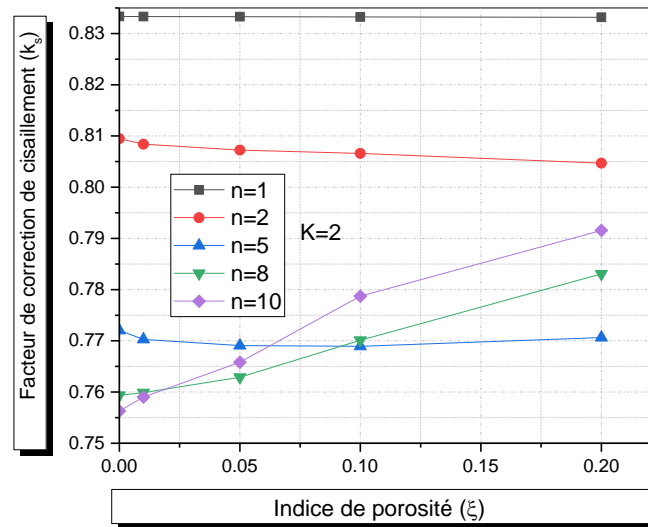


## Chapitre 4 : Validation et comparaison des résultats

	0.15	0.833247	0.839796	0.843747	0.844711	0.845029
	0.20	0.833172	0.839835	0.843809	0.844772	0.845088
1	0	0.833333	0.832034	0.830373	0.830821	0,831201
	0.05	0.833325	0.831800	0.830447	0.831258	0,831775
	0.1	0.833297	0.831550	0.830655	0.831865	0,832477
	0.15	0.833247	0.831291	0.831033	0.832592	0,833141
	0.20	0.833172	0.831030	0.831603	0.833228	0.833220
2	0	0.833333	0,809474	0,772042	0,759365	0,756298
	0.05	0,833325	0,808397	0,770266	0,759874	0,759012
	0.1	0,833297	0,807239	0,769073	0,762901	0,765827
	0.15	0,833247	0,806604	0,768936	0,770103	0,778721
	0.20	0,833172	0,804701	0,770629	0,783068	0.791561



**Figure (4.10)** Variations du facteur de correction de cisaillement (Forme  $V_{renversé} L/h = 20$   $k = 0.5$ ),



**Figure (4.11)** Variations du facteur de correction de cisaillement (Forme  $V_{renversé} L/h = 20$   $k = 2$  )

### 4.3 Application au problème du flambement

Dans cette partie, Nous considérons les propriétés matérielles suivantes du métal et de la céramique utilisées:

Céramique ( $P_1$ , alumine,  $Al_2O_3$ )  $E_c = 380GPa$ ,  $\nu = 0.23$ .

Métal ( $P_2$ , Aluminium,  $Al$ )  $E_m = 70GPa$ ,  $\nu = 0.23$ .

La charge critique de flambement correspond aux valeurs  $m$ , conduisant aux valeurs les plus faibles de  $N_0$ . Les résultats numériques sont présentés en termes des charges de flambement adimensionnelles défini comme :

$$\bar{N} = \frac{12N_{cr}L^2}{h^3E_m} \quad (IV.1)$$

La comparaison des charges critiques de flambement des poutres FG simplement appuyé avec  $L/h = 5$  et  $10$  entre le présent modèle est rapportée dans le tableau 4.1. Les charges critiques de flambement obtenues à partir du modèle présent et de celui avec  $k_s = 5/6$  montrent une différence indiquant que l'effet de la rigidité au cisaillement améliorée devient important et ne peut être négligé

**Tableau (4.11)** Charges critiques de flambement adimensionnel des poutres en FGM simplement appuyées  $\xi = 0$

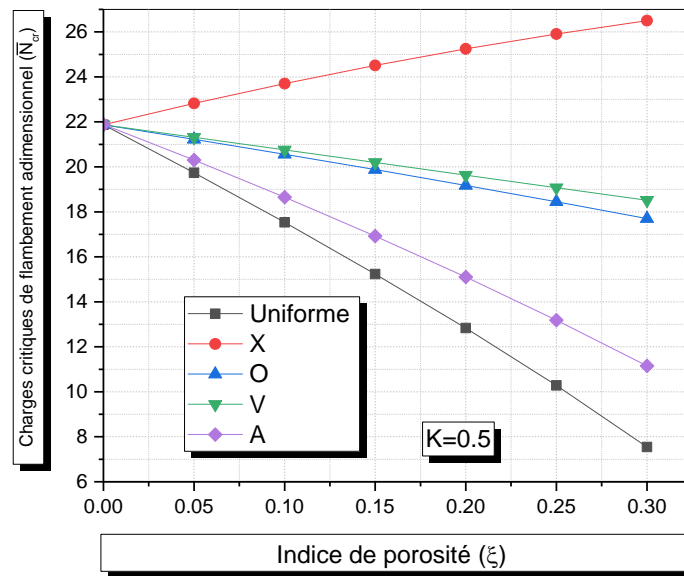
L\h	Modèle	p					
		0	0.5	1	2	5	10
5	Présent	51.310	33.642	25.949	20.099	16.474	14.820
	Présent ( $k_s = 5/6$ )	51.509	33.602	25.957	20.234	16.834	15.147
	Nguyen et al. [56]	51.309	33.637	25.949	20.099	16.474	14.820
10	Présent	55.157	35.862	27.599	21.494	18.024	16.361
	Présent ( $k_s = 5/6$ )	55.157	35.851	27.601	21.532	18.130	16.456
	Nguyen et al. [56]	55.157	35.857	27.599	21.494	18.024	16.361

Les charges critiques de flambement adimensionnel des poutres poreuses en FGM simplement appuyées pour une forme de porosité uniforme sont reporté sur le tableau (4.2). On que l'augmentation du taux de la porosité induit une diminution de la charges critiques de flambement adimensionnel. Le modèle des poutres a rigidité au cisaillement transverse améliorée tend a génère des charges critiques de flambement adimensionnel inferieure au modèle classique ( $k_s = 5/6$ ).

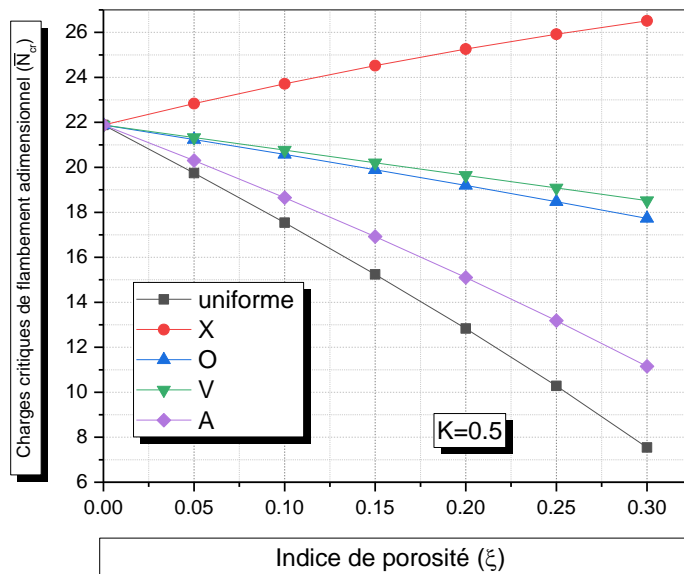
**Tableau (4.1)** Charges critiques de flambement adimensionnel des poutres poreuses en FGM simplement appuyées (Porosité uniforme).

$\xi$	L\h	Modèle	p					
			0	0.5	1	2	5	10
0.05	5	Présent	49.791	32.022	24.191	18.180	14.537	13.023
		Présent ( $k_s = 5/6$ )	49.790	31.983	24.197	18.306	14.897	13.366
	10	Présent	53.524	34.116	25.698	19.405	15.907	14.416
		Présent ( $k_s = 5/6$ )	53.524	34.106	25.700	19.441	16.013	14.519
0.1	5	Présent	48.272	30.392	22.404	16.199	12.506	11.148
		Présent ( $k_s = 5/6$ )	48.271	30.355	22.410	16.314	12.862	11.507
	10	Présent	51.891	32.360	23.767	17.247	13.681	12.380
		Présent ( $k_s = 5/6$ )	51.891	32.351	23.768	17.279	13.785	12.488
0.15	5	Présent	46.752	28.753	20.585	14.139	10.347	9.155
		Présent ( $k_s = 5/6$ )	46.752	28.716	20.589	14.239	10.687	9.529
	10	Présent	50.258	30.593	21.800	15.003	11.304	10.205
		Présent ( $k_s = 5/6$ )	50.258	30.584	21.801	15.031	11.403	10.317
0.20	5	Présent	45.233	27.101	18.725	11.977	8.000	6.973
		Présent ( $k_s = 5/6$ )	45.233	27.066	18.728	12.058	8.304	7.353
	10	Présent	48.625	28.813	19.791	12.650	8.709	7.804
		Présent ( $k_s = 5/6$ )	48.625	28.804	19.791	12.673	8.796	7.918

Les figure 4.12 et 4.13, illustre la variation de la charge critique de flambement en fonction de l'indice de porosité pour des poutres a rigidité au cisaillement transverse améliorée et le modèle classique ( $k_s = 5/6$ ). Lorsqu'on compare les résultats des cinq configurations de distribution de porosité, On peut voir que la forme X a donnée plus élèves charge critique de flambement cependant la distribution uniforme a génère de petite charge critique de flambement.

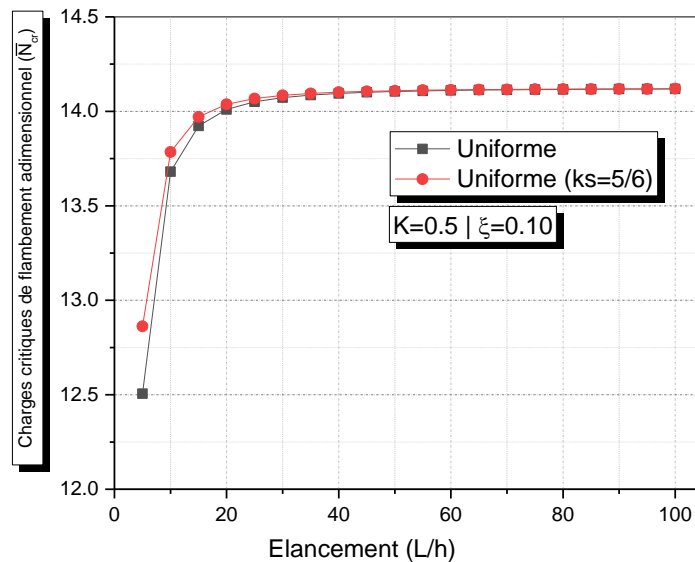


**Figure (4.2)** Variation de la charge critique de flambement adimensionnelle  $L/h = 20$   $k = 0.5$

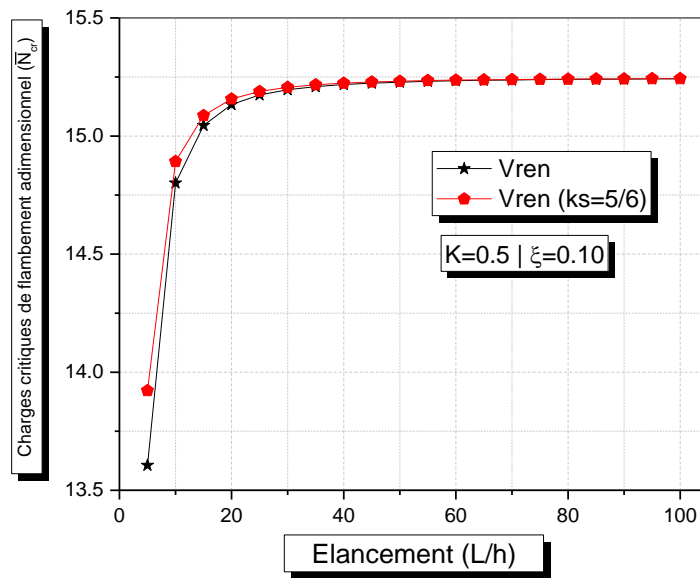


**Figure (4.3)** Variation de la charge critique de flambement adimensionnelle  $L/h = 20$   $k = 0.5$

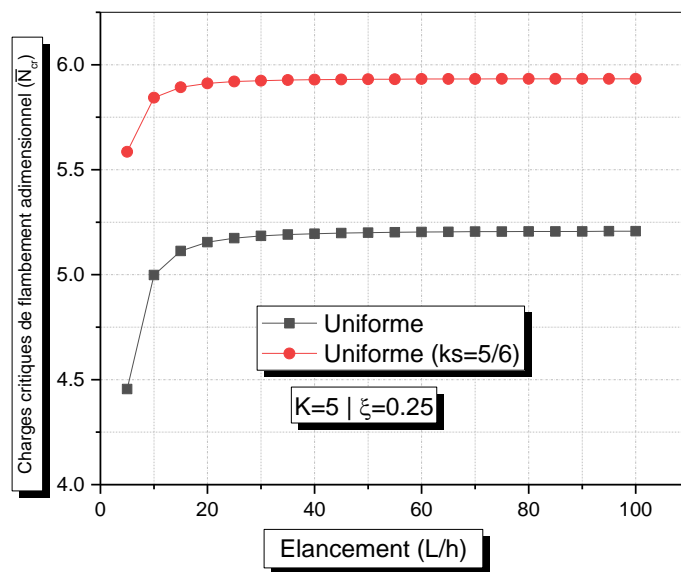
La figure 4.14-4.17, illustre la variation de la charge critique de flambement en fonction de élancement  $\bar{h}$  pour  $p = 0.5$  et  $5$  et pour deux configurations de distribution de porosité, la distribution uniforme et la forme V renversé avec  $\xi = 0.1$  et  $0.25$  et pour des poutres a rigidité au cisaillement transverse améliorée et le modèle classique ( $k_s = 5/6$ ). Le modèle a rigidité au cisaillement transverse améliorée à donne des charges critique inferieur a celui du modèle classique ( $k_s = 5/6$ ). Ce constat est bien clair pour le cas de distribution uniforme avec  $p = 5$  et  $\xi = 0.25$ .



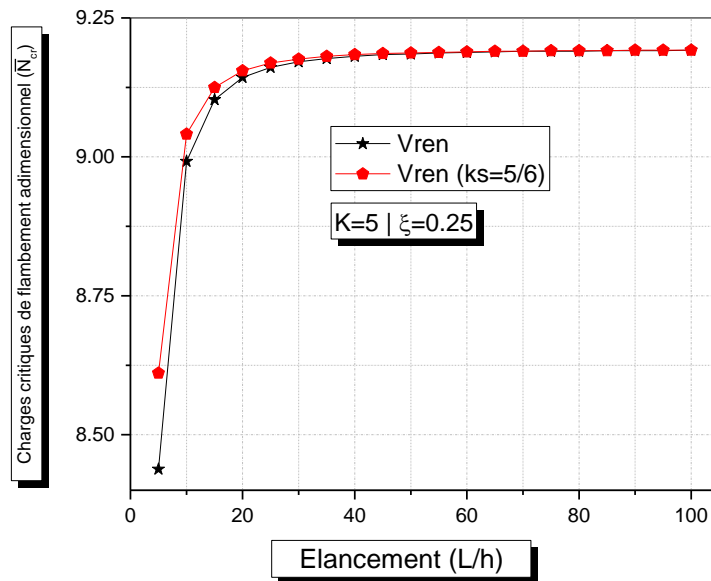
**Figure (4.4)** Variation de la charge critique de flambement adimensionnelle  $\xi = 0.10$   $k = 0.5$



**Figure (4.5)** Variation de la charge critique de flambement adimensionnelle  $\xi = 0.10$   $k = 0.5$



**Figure (4.6)** Variation de la charge critique de flambement adimensionnelle  $\xi = 0.25$   $k = 5$



**Figure (4.7)** Variation de la charge critique de flambement adimensionnelle  $\xi = 0.25$   $k = 5$

### Conclusion

Dans ce chapitre, l'efficacité de l'approche proposée a été démontrée pour l'analyse de l'effet de la porosité sur le facteur de correction de cisaillement. Cinq formes de distribution de porosité sont considérées variées suivant l'épaisseur d'une poutre P-FGM. En conclusion, nous pouvons dire que toutes les études comparatives ont démontré que la porosité et ses formes de distribution influent sur le facteur de correction de cisaillement. Pour le problème de flambement, on peut dégager les conclusions suivantes, la porosité induit une diminution des charges critiques de flambement. Le modèle des poutres à rigidité au cisaillement transverse améliorée tend à générer des charges critiques de flambement inférieures au modèle classique ( $k_s = 5/6$ ).

## Conclusion générale et perspectives

---

Dans ce travail nous avons présenté une analyse de l'effet de la porosité et ces formes de distribution sur le facteur de correction de cisaillement et une application au problème de flambement des poutres en FGM simplement appuyé. Dans cette étude, les propriétés matérielles varient selon l'épaisseur de la poutre seulement selon une distribution de loi de puissance (P-FGM). Une expression générale du facteur de correction de cisaillement ( $k_s$ ) est dérivée par un principe énergétique. Pour l'application au de flambement, les équations d'équilibres ont été trouvées en utilisant le principe des travaux virtuels. Les charges critiques de flambement ont été trouvées en résolvant un système aux valeurs propre:

Les résultats obtenus du facteur de correction de cisaillement montre que a porosité et ses formes de distribution influent sur le facteur de correction de cisaillement.

Pour le problème de flambement, la porosité tend a diminuer les charges critiques de flambement. Le modèle des poutres a rigidité au cisaillement transverse améliorée tend a génère des charges critiques de flambement inférieure au modèle classique ( $k_s = 5/6$ ).

Afin de compléter les résultats obtenus et de mieux cerner le comportement mécanique des poutres poreuses en FGM, nous envisageons les perspectives suivantes pour la suite de notre recherche :

- La prise en compte de l'effet de la température sur le facteur de correction de cisaillement et le flambement.
- Utilisation cette approche pour résoudre les autres problèmes (statique et dynamique).
- Etendue cette étude aux problèmes des plaques et des coques



## Référence bibliographique

---

- [1]: NIINO M., HIRAI T. AND WATANABE R. (1987), "THE FUNCTIONALLY GRADIENT MATERIALS," J JAP SOC COMPOS MAT, VOL.13, PP. 257-264.
- [2]: JHA, D.K. , TARUN KANT , R.K. SINGH. (2013), "A CRITICAL REVIEW OF RECENT RESEARCH ON FUNCTIONALLY GRADED PLATES". COMPOSITE STRUCTURES 96 , 833–849.
- [3]: ATAI, A. A. , NIKRANJBAR, A. AND KASIRI, R. (2012) "BUCKLING AND POST-BUCKLING BEHAVIOUR OF SEMICIRCULAR FUNCTIONALLY GRADED MATERIAL ARCHES: A THEORETICAL STUDY," PROCEEDINGS OF THE INSTITUTION OF MECHANICAL ENGINEERS, PART C: JOURNAL OF MECHANICAL ENGINEERING SCIENCE, ,VOL. 226, PP. 607-614.
- [4]: WANG S. S. (1983) "FRACTURE MECHANICS FOR DELAMINATION PROBLEMS IN COMPOSITE MATERIALS," JOURNAL OF COMPOSITE MATERIALS, , VOL. 17(3), PP. 210-223.
- [5]: P. SHANMUGAVEL, G. B. BHASKAR, M. CHANDRASEKARAN, P. S. MANI AND S. P. SRINIVASAN, "AN OVERVIEW OF FRACTURE ANALYSIS IN FUNCTIONALLY GRADED MATERIALS," EUROPEAN JOURNAL OF SCIENTIFIC RESEARCH, VOL.68 No.3 (2012), PP. 412-439.
- [6]: EL-WAZERY, M. S. , EL-DESOUKY , A. R. , (2015), "A REVIEW ON FUNCTIONALLY GRADED CERAMIC-METAL MATERIALS". MATER. ENVIRON. SCI. 6 (5) 1369-1376.
- [7]: CHO, J.R. , TINSLEY ODEN, J. (2000) , "FUNCTIONALLY GRADED MATERIAL: A PARAMETRIC STUDY ON THERMAL-STRESS CHARACTERISTICS USING THE CRANK±NICOLSON±GALERKIN SCHEME". COMPUT. METHODS APPL. MECH. ENGRG. 188, 17±38.
- [8] MERIEM LOUNIS, SABRINE HADDAD ; « ELABORATION, CARACTÉRISATION ET SIMULATION DES PROPRIÉTÉS EFFECTIVES D’UN FGM À BASE D’A-U4G ET AL2O3 » ; MÉMOIRE DE MAGISTER, 2019
- [9] YUKI, M., MURAYAMA, T. & IRISAWA, T., TEMPRATURE GRADIENT SINTERING OF PSZ/Mo FUNCTIONALLY GRADIENT MATERIAL BY LASER BEAM HEATING, IN PROCEEDING OF THE FIRS INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON FUNCTIONALLY GRADIENT MATERIALS-FGM'90- SENDAI-JAPAN, 1991, P. 203
- [10] YIN ET ALL (2004) MAJID KHAYAT , ABDOLHOSSEIN BAGHLANI , MOHAMMAD AMIR NAJAFGHOLIPOUR ; ALGORITHME HYBRIDE POUR LA MODÉLISATION ET L’ÉTUDE DE L’EFFET DES INCERTITUDES MATÉRIELLES ET MÉCANIQUES SUR LA STABILITÉ DES MATÉRIAUX FGM EN SANDWICH SOUS CHOC THERMIQUE 2022
- [11] CAROLINE S. LEE, SUNG-HOON AHN , LUTGARD C. DEJONGHE , GARETH THOMAS ; EFFET DES COUCHES DE MATÉRIAUX À GRADATION FONCTIONNELLE (FGM) SUR LA CONTRAINTE RÉSIDUELLE DE Si3N4-AL2O3 ASSEMBLÉS DE FAÇON POLYTYPIQUE 2006

- [12]: BHARTI, I., GUPTA, N., GUPTA, K.M.: NOVEL APPLICATIONS OF FUNCTIONALLY GRADED NANO, OPTO-ELECTRONIC AND THERMO-ELECTRIC MATERIALS. INT. J. MATER. MECH. MANUF. 1, 221–224 (2013).
- [13]: MAHAMOOD, R.M., AKINLABI, E.T.: LASER-METAL DEPOSITION OF FUNCTIONALLY GRADED Ti6Al4V/TiC. MATER. DES. 84, 402–410 (2015).
- [14]: MAHAMOOD, R.M., AKINLABI, E.T., SHUKLA M., PITYANA, S.: FUNCTIONALLY GRADED MATERIAL: AN OVERVIEW. IN: PROCEEDINGS OF THE WORLD CONGRESS ON ENGINEERING WCE 2012, VOL. 3, PP. 1593– 1597 (2012).
- [15]: SCHNEIDER, M.J.: THE TIMKEN COMPANY, AND MADHU S. CHATTERJEE, BODYCOTE INTRODUCTION TO SURFACE HARDENING OF STEELS. IN: DOSSETT, J., TOTTEN, G.E. (EDS) ASM HANDBOOK, STEEL HEAT-TREATING FUNDAMENTALS AND PROCESSES, VOL. 4 (2013).
- [16]: LU, L., CHEKROUN, M., ABRAHAM, O., MAUPIN, V., VILLAIN, G.: MECHANICAL PROPERTIES ESTIMATION OF FUNCTIONALLY GRADED MATERIALS USING SURFACE WAVES RECORDED WITH A LASER INTERFEROMETER. NDT AND E INT. 44(2), 169–177 (2011).
- [17]: KOIZUMI, M., "FGM ACTIVITIES IN JAPAN, COMPOSITES" 28(1-2):1-2.1997
- [18] BOCH, P., CHARTIER, T., AND HUTTEPAIN, M. 1986. "TAPE CASTING OF AL<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/ZRO<sub>2</sub> LAMINATED COMPOSITES". JOURNAL OF THE AMERICAN CERAMIC SOCIETY. 69(8), C-191. doi:10.1111/j.1151-2916.1986.tb04836.x.
- [19] BACHIR BOUIADJRA, R. 2015. "CONTRIBUTION À L'ETUDE DE LA STABILITÉ DES PLAQUES ÉPAISSES EN COMPOSITE SUR FONDATIONS ELASTIQUES". THÈSE DE DOCTORAT. UNIVERSITÉ DE DJILLALI LIABES DE SIDI BEL ABBES.
- [20] KOIZUMI, M. 1997. "FGM ACTIVITIES IN JAPAN". COMPOSITES PART B: ENGINEERING 28 (1-2): 1-4. doi:10.1016/s1359-8368(96)00016-9
- [21] UCHIDA, Y., KATO, K., HIGA, S., HAYASHI, N., AND UCHIDA, Y. 2004. "AIR PURIFICATION USING TITANIUM FUNCTIONALLY GRADED MATERIALS PRODUCED BY PROGRESSIVE LAMINATION METHOD". TRANSACTIONS MATERIALS RESEARCH SOCIETY OF JAPAN, 29, 2713-2716.
- [22] A. HOUARI, 2021], ENDOMMAGEMENT DANS LES PLAQUES ENTAILLÉES EN FGM, SIDI BEL ABBES, 2021.
- [23] G. BAO ET L. WANG, «MULTIPLE CRACKING IN FUNCTIONALLY GRADED CERAMIC/METAL COATINGS, ;» INT. J; SOLIDS STRUCTURES, VOL. 32 , N° %119, P. 2853–2871, 1995.
- [24] [R.MEKSI, 2019], INVESTIGATION SUR LES DIFFÉRENTS COMPORTEMENTS MÉCANIQUES DES STRUCTURES EN MATÉRIAUX COMPOSITES AVANÇES, SIDI BEL ABBES, 2019.

- [25] THE CONCEPT OF FGM .CERAMIC TRANSACTION ,FUNCTIONALLY GRADED MATERIALS 34 ,3-10 ,1992.
- [26] GAYEN, D. (2013). FINITE ELEMENT BASED VIBRATION AND STABILITY ANALYSIS OF FUNCTIONALLY GRADED ROTATING SHAFT SYSTEM UNDER THERMAL ENVIRONMENT. THÈSE DE DOCTORAT.
- [27] NIINO, M., AND KISARA, K. 2004. "THE PRESENT STATUS OF THE FUNCTIONALLY GRADED MATERIALS, AND FUTURE PREDICTION". JOURNAL OF THE JAPAN SOCIETY OF POWDER AND POWDER METALLURGY, 51(4), 242-249. DOI:10.2497/JJSPM.51.242.
- [28] UNIVERSITE DJILLALI LIABES DE SIDI BELABBES MÉMOIRE DE DOCTORA :BOUAMAMA MOHAMED.
- [29] NAROTTAM P. BANSAL, JITENDRA P. SINGH, JACQUES LAMON, SUNG R. CHOI , "PROCESSING AND PROPERTIES OF ADVANCED CERAMICS AND COMPOSITES III: CERAMIC TRANSACTIONS" ; JOHN WILEY & SONS; PAGE 110, 4 AOÛT ,(2011)
- [30] ABRATE S., "IMPACT ON COMPOSITE STRUCTURES", ÉDITION S. ABRATE, SOUTHERN ILLINOIS UNIVERSITY, CARBONDALE, 1998
- [31] DELALE. F, ERDOGAN. F "THE CRACK PROBLEM FOR A NON-HOMOGENEOUS PLANE". ASME « JOURNAL OF APPLIED MECHANICS »; 50 (3): 609-614. (1983),
- [32] SOROKA I., SEREDA P "INTERRELATION OF HARDNESS, MODULUS OF ELASTICITY AND POROSITY IN VARIOUS GYPSUM SYSTEMS" JOURNAL OF THE AMERICAN CERAMIC SOCIETY, 1968, VOL 51, N°6, P.337- 340.
- [33] KESKES BOUALEM « COMPORTEMENT EN FATIGUE DES COMPOSITES TYPES SANDWICHE EN NID D'ABEILLE » THÈSE DOCTORAT, UNIVERSITÉ DE SÉTIF DÉCEMBRE 2007.
- [34] REID S.R., ZOU G., "IMPACT BEHAVIOUR OF FIBRE-REINFORCED COMPOSITE MATERIALS AND STRUCTURES", ÉDITION CRC PRESS, 2000
- [35] : MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDE UNIVERSITÉ TIZI-OUZOU [ ABRATE S., "IMPACT ON COMPOSITE STRUCTURES", ÉDITION S. ABRATE, SOUTHERN ILLINOIS UNIVERSITY, CARBONDALE, 1998.].
- [36] : EINSTEIN I, ALBERT. EINSTEIN BESTIMMUNG DER MOLEKÜLDIMENSIONEN. ANNALEN DER PHYSIK, 1906, VOL. 324, NO 2, P. 289
- [37] : KOVACIK, J. CORRELATION BETWEEN ELASTIC MODULUS, SHEAR MODULUS, POISSON'S RATIO AND POROSITY IN POROUS MATERIALS. ADVANCED ENGINEERING MATERIALS, 2008, VOL. 10, NO 3, P. 250 29. KOVACIK, J. CORRELATION BETWEEN SHEAR MODULUS AND POROSITY IN POROUS
- [38] : KOVACIK, J. CORRELATION BETWEEN SHEAR MODULUS AND POROSITY IN POROUS

- [39] SAMIR BENSARD « CONTRIBUTION À LA CARACTÉRISATION ET À LA MODÉLISATION ÉLECTROMAGNÉTIQUE ET THERMIQUE DES MATÉRIAUX COMPOSITES ANISOTROPES » MÉMOIRE DE MASTER UNIVERSITÉ DE NANTES, 2006.
- [40] : DUFORT, L., S. DRAPIER, AND M. GRÉDIAC. "CLOSED-FORM SOLUTION FOR THE CROSS-SECTION WARPING IN SHORT BEAMS UNDER THREE-POINT BENDING". COMPOSITE STRUCTURES 52 (2): 233-246. DOI:10.1016/S0263-8223(00)00171-9. 2001.
- [41] : COFFIGNAL, GÉRARD. "MÉCANIQUE NON-LINÉAIRE ET ÉLÉMENTS FINIS." VERSION ELECTRONIQUE E.1.0, 2001. HTTP://WWW.PARIS.ENSAM.FR/LMSP.
- [42]: SALLAI BEN-OURANE 2010« ETUDE ET ANALYSE DES STRUCTURES EN FGM : COMPARAISON ENTRE E-FGM, P-FGM ET S-FGM. » THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE DJILLALI LIABES DE SIDI BEL ABBES 2011.
- [43] : TIMOSHENKO, S. P. AND GERE, J. M. (1972). MECHANICS OF MATERIALS. VAN NORDSTRAND REINHOLD COMPANY. NEW YORK.
- [44] : DUFORT, L., S. DRAPIER, AND M. GRÉDIAC. 2001. "CLOSED-FORM SOLUTION FOR THE CROSS-SECTION WARPING IN SHORT BEAMS UNDER THREE-POINT BENDING". COMPOSITE STRUCTURES 52 (2): 233-246. DOI:10.1016/S0263-8223(00)00171-9
- [45] : NGUYEN, VIET TUNG. 2004. "MODÉLISATION GLOBALE ET LOCALE DES STRUCTURES MULTICOUCHES PAR ÉLÉMENTS FINIS DES PLAQUES". DOCTORAL DISSERTATION, ECOLE DES PONTS PARISTECH.
- [46] : LO, K. H., R. M. CHRISTENSEN, AND E. M. WU. 1977. "A HIGH-ORDER THEORY OF PLATE DEFORMATION— PART 1: HOMOGENEOUS PLATES". JOURNAL OF APPLIED MECHANICS 44 (4): 663. DOI:10.1115/1.3424154
- [47] : AMBARTSUMYAN, S. A. 1969. "BASIC EQUATIONS AND RELATIONS IN THE THEORY OF ANISOTROPIC BODIES WITH DIFFERENT MODULI IN TENSION AND COMPRESSION". INZH. ZHUR. MTT, 3, 51-61.
- [48] : REISSNER, E. 1945. "THE EFFECT OF TRANSVERSE SHEAR DEFORMATION ON THE BENDING OF ELASTIC PLATES ". JOURNAL OF APPLIED MECHANICS, A69-A77
- [49] : AYDOGDU, M. 2005. "VIBRATION ANALYSIS OF CROSS-PLY LAMINATED BEAMS WITH GENERAL BOUNDARY CONDITIONS BY RITZ METHOD". INTERNATIONAL JOURNAL OF MECHANICAL SCIENCES, 47(11), 1740-1755. DOI:10.1016/J.IJMECSCI.2005.06.010.
- [50] : LEVINSON, M. 1980. "AN ACCURATE, SIMPLE THEORY OF THE STATICS AND DYNAMICS OF ELASTIC PLATES". MECHANICS RESEARCH COMMUNICATIONS. 7(6), 343-350. DOI:10.1016/0093-6413(80)90049-x.

- [51] : MURTHY, M. V. V. 1981. "AN IMPROVED TRANSVERSE SHEAR DEFORMATION THEORY FOR LAMINATED ANISOTROPIC PLATES
- [52] : REDDY, J. N. 1984. "A SIMPLE HIGHER-ORDER THEORY FOR LAMINATED COMPOSITE PLATES". JOURNAL OF APPLIED MECHANICS 51 (4): 745. doi:10.1115/1.3167719
- [53] : TOURATIER, M. 1991. "AN EFFICIENT STANDARD PLATE THEORY". INTERNATIONAL JOURNAL OF ENGINEERING SCIENCE 29(8): 901-916. doi:10.1016/0020-7225(91)90165-y.
- [54] : AFAQ K.S., KARAMA M. AND MISTOU S. 2003. "UN NOUVEAU MODÈLE RAFFINE POUR LE STRUCTURES MULTICOUCHES". IN COMPTES-RENDUS DES 13 EMES JOURNÉES NATIONALES SUR LES COMPOSITES. PAGES 289- 292. STRASBOURG.
- [55] : TOURATIER, M. 1991. "AN EFFICIENT STANDARD PLATE THEORY". INTERNATIONAL JOURNAL OF ENGINEERING SCIENCE 29(8): 901-916. doi:10.1016/0020-7225(91)90165-y.
- [56] : NGUYEN, T.K.; VO, T.P.; THAI, H.-T. STATIC AND FREE VIBRATION OF AXIALLY LOADED FUNCTIONALLY GRADED BEAMS BASED ON THE FIRST-ORDER SHEAR DEFORMATION THEORY. *COMPOS. PART B ENG.* **2013**, 55, 147–157.
- [57] : BERTHELOT JM. COMPOSITE MATERIALS: MECHANICAL BEHAVIOR AND STRUCTURAL ANALYSIS. NEW YORK: SPRINGER; 1999