

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN DE TIARET



FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES
DÉPARTEMENT DE GÉNIE CIVIL

Mémoire de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme de Master

Spécialité : Génie Civil

Option : Matériaux et Structures

Présenté par :

Mlle SAHRAOUI Kheira Manal

Sujet du mémoire

Etude de l'influence des formes de la distribution de
porosité sur la flexion et la vibration
des poutres reposant sur fondation élastique

Soutenu publiquement le .../06/2024 devant le jury composé de :

M. AIT AMAR MEZIANE Med	Président
Mme KHELIFA Zoubida	Rapporteur
M. HADJI Lazreg	CO-Encadreur
Mr. ABDELAZIZ Hadj henni	Examineur
Mr. REBAHI Abderazak	Examineur

PROMOTION: 2023/2024

Résumé

Dans ce travail, une théorie de cisaillement hyperbolique est présentée pour l'analyse de la flexion et de la vibration libre des poutres sur fondations élastiques à gradient de propriétés en tenant compte des porosités qui peuvent éventuellement se produire à l'intérieur de ce matériau au cours de sa fabrication. Quatre types de porosité différentes sont utilisés dans cette étude. Les équations du mouvement sont dérivées en utilisant le principe d'Hamilton. La procédure de Navier est mise en oeuvre pour la résolution des équations du mouvement. Dans les exemples numériques, l'effet de plusieurs paramètres tels que : la fraction de porosité, forme de porosité sont étudiés. Il a été constaté que la forme de distribution de la porosité influe de manière significative sur le comportement statique et dynamique des poutres à gradient de propriétés sur fondations élastiques.

Mots-clés : Flexion ; Vibration libre ; Matériaux à gradient de propriétés ; Porosité ; fondation élastique.

Abstract:

In this work, a hyperbolic shear theory is presented for the analysis of bending and free free vibration of FG beams on elastic foundations taking into account the porosities that can possibly occur inside this material at during its manufacture. Four different types of porosity are used in this study. The equations of motion are derived using Hamilton's principle. The Navier procedure is implemented for solving the equations of motion. In the numerical examples, the effect of several parameters such as: porosity fraction, porosity shape are studied. It was found that the shape of porosity distribution significantly influences the static and dynamic behavior of FG beams on elastic foundations.

Keywords: Bending; Free vibration; Materials with gradient properties; Porosity; Elastic foundation.

ملخص

في هذا العمل، يتم تقديم نظرية القص الزائدية لتحليل الانحناء والاهتزاز الحر للعوارض على الأساسات المرنة ذات التدرج في الخصائص مع الأخذ بعين الاعتبار المساميات التي قد تحدث داخل هذا المادة أثناء تصنيعها. تم استخدام أربعة أنواع مختلفة من المسامية في هذه الدراسة. تم اشتقاق معادلات الحركة باستخدام مبدأ هاميلتون. تم تنفيذ إجراء نافير لحل معادلات الحركة. في الأمثلة العددية، تم دراسة تأثير عدة عوامل مثل: نسبة المسامية، وشكل المسامية. وقد تبين أن شكل توزيع المسامية يؤثر بشكل كبير على السلوك الاستاتيكي والديناميكي للعوارض ذات التدرج في الخصائص على الأساسات المرنة. الكلمات المفتاحية: انحناء؛ اهتزاز حر؛ مواد ذات تدرج في الخصائص؛ مسامية؛ أساس مرن.

Remerciement

En premier lieu, je remercie Dieu le tout-puissant qui m'a donné la volonté et le courage pour achever ce modeste travail.

Au terme de ce travail, je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mon co-encadreur Professeur HADJI Lazreg, pour son aide précieuse, ses remarques pertinentes, et le temps qu'il m'a accordé malgré ses nombreuses responsabilités. Ses conseils et ses compétences ont été extrêmement précieux pour le déroulement de ce travail. J'ai eu l'honneur de travailler avec mon enseignante madame KHELIFA Zoubida.

Je souhaite également exprimer toute ma gratitude aux enseignants et au personnel administratif du département de Génie Civil de l'université Ibn Khaldoun de Tiaret, où j'ai effectué mes études de Licence et Master, pour leurs conseils et encouragements.

Je remercie Messieurs les Membres du Jury Professeur. AIT AMAR MEZIANE Med, ABDELAZIZ Hadj henni et REBAHI Abderazak pour l'honneur qu'ils m'ont fait d'avoir acceptés d'examiner mon travail de thèse.

Je prends aussi un réel plaisir à remercier chaleureusement l'ingénieur Saad. A pour ces efforts.



*D*édicace

*C'est avec un très grand honneur que je dédie ce
modeste travail aux
Personnes les plus chères au monde, mes chers
parents pour leurs amours
Et bonté et que sans eux je n'aurai jamais pu atteindre
mon objectif, que
Dieu me les garde
À...
Mes parents
Mes soeurs
Mes frères
À tous mes amies
Tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin dans
L'accomplissement de ce travail.*



Liste des symboles

$V(z)$	Fraction volumique
$E(z)$	Module de Young en fonction de l'épaisseur
E_m	Module Young (Métal)
E_c	Module Young(Céramique)
k	Indice de puissance, Paramètre de puissance
ρ_z	Masse volumique en fonction de l'épaisseur
ρ_m	Masse volumique(Métal)
ρ_c	La masse volumique (Céramique)
$\{\}$	Vecteur colonne
$[]$	Matrice
$\{\sigma_{ij}\}$	Tenseur de contrainte
$\{\varepsilon_{ij}\}$	Tenseur de déformation
E_{ij}	Module de Young
ν	Coefficient de poisson
G_{xz}	Module de cisaillement dans le plan (x, z)
U	Déplacement suivant X
W	Déplacement suivant You bien la flèche
σ_x	Contrainte normal.
τ_{xz}	Contrainte de cisaillement
γ_{xz}	Déformation angulaire
H	Hauteur de la poutre
L	Longueur de la poutre
δ	Variation opérationnelle
δU	Variation de l'énergie de déformation interne de la poutre
δV	Variation de l'énergie de déformation duaux chargement extérieure.

Liste des tableaux

Tableau IV.1. Propriétés matérielles utilisées dans la présente étude.....	48
Tableau IV.2. Paramètres adimensionnels utilisés et leurs expressions correspondantes	48
Tableau IV.3: Effets de l'indice de la fraction de volume v_f sur les déplacements et contraintes adimensionnelles d'une poutre FGM soumise à une charge to sinusoïdal reposé sur une fondation élastique.	50
Tableau IV.4: Variation des fréquences naturelles adimensionnelles d'une poutre FGM reposée sur une fondation élastique.....	53

Liste des figures

Figure (I-1): Caractéristiques des matériaux composites FGM.....	5
Figure (I.2) : Un type dun matériau FGM en céramique et métal.	6
Figure (I.3) : variation continue de la microstructure.	8
Figure I-4. Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les atériaux composites conventionnels [3].....	9
Figure I-5. La distribution composante des matériaux.....	9
Figure (I.6) : Utilisation des FGM dans les implants dentaires [10].....	10
Figure (I.7) : géométrie d'une poutre FGM.....	15
Figure (I.8) : Lois de puissance (P-FGM).	15
Figure (I.9) : Fonction sigmoïde S-FGM.	15
Figure (I.10) : Variation du module de Young en fonction de l'épaisseur (E-FGM).	15
Figure (I.11) : Lois de puissance symétrique (SP-FGM).	17
Figure (I.12) : Modèle analytique pour une couche de matériau à gradient fonctionnel.	18
Figure(II.1) : Quelque poutre classique On appelle « poutre » un solide genre par des.....	24
Figure (II.2) : Poutres de courbe moyenne $G O G E$, de section droite S Et fibre neutre de section ds.....	25
Figure (II. 3) : La modélisation consiste à définir des paramètres de Forme ($L, I G , I Gy , I$ Gz) à partir de la forme de la pièce réelle.....	26
Figure (II. 4) : Cinématique de la poutre de Timoshenko et cinématique de la poutre d'Euler Bernoulli.	29
Figure (II.5) : Modèle de Winkler.	30
Figure (II.6) : Tassement du sol causé par la charge concentrée du modèle de continuum élastique	31
Figure(II.7) Modèle du Filonenko-Borodich[Filonenko-Borodich et al 1940].	32
Figure (II.8) Fondation de Hetenyi [Winkler, 1867 ; Hetényi, M 1946].	32
Figure (II.9) Modèle de Pasternak	33
Figure (II.10) :) : Équilibre de la couche de cisaillement.....	34
Figure (II.11) Modèle de Kerr [Kerr, A.D 1964].	35

Figure (III.1) : Poutre FGM reposant sur une fondation élastique à deux paramètres.	38
Figure IV.1 Géométrie et coordonnées d'une poutre FGM.	47
Figure IV.2 Distribution de la contrainte axiale adimensionnelle à travers l'épaisseur de la poutre poreuse en FGM. fonction de la fraction volumique de la porosité.	52
Figure IV.3. Variation de la fréquence adimensionnelle de la poutre poreuse en FGM en	55
Figure IV.4. Figure IV.3. Variation de la fréquence adimensionnelle de la poutre poreuse en FGM en fonction du rapport $L/$	56

Table des matières

Remerciement	
Dédicace	
Résumé	
Abstract	
ملخص	
Liste des figure	
Liste des tableaux.	
Liste des symboles	
Introduction générale.....	1

Chapitre 1. Généralités sur les matériaux FGM

I.1	Introduction.....	4
I.2	Définition.....	6
I.3	Historique et concept des FGM.....	6
I.4	Processus et technique de fabrication des FGM.....	7
I.5	Types de FGM.....	7
I.6	Comparaison des matériaux types FGM et les composites traditionnels.....	8
I.7	Domaines d'applications des matériaux fonctionnellement gradués.....	10
1.7.1	Aérospatial :	10
1.7.2	Médecine :	10
1.7.3	Défense :	11
1.7.4	Énergie nucléaire :	11
1.7.5	Optoélectronique :	11
1.7.6	Autres domaines d'application :	11
I.8	Pour des utilisations structurelles (intégration du caractère réfractaire)	11
I.9	Les avantages et les inconvénients des FGM.....	12
I.9.1	Les avantage.....	12
I.9.2	Les inconvénients.....	13
I.10	Propriétés des FGM.....	13
I.11	Propriétés matérielles des poutres FGM :	14
I.11.1	Fonction de puissance (P-FGM) :	15

I.11.2	Fonction sigmoïde(S-FGM) :	15
I.11.3	Fonction exponentielle (E-FGM) :	16
I.11.4	Fonction puissance symétrique SP-FGM :	17
I.12	Loi de mélange :	17
I.13	Conclusion.	18

Chapitre II

Théories des poutres

II.1	Introduction :	20
II.2	définition d'une poutre	20
II.3	Historique des théories des poutres.....	20
II.4	Le rôle de la poutre	21
II.5	Les types des poutres.....	21
II...5.1	Les poutres en béton armé :	21
II...5.2	Les poutres en bois :	21
II..5.3	Les poutres en acier :	22
II.6	différentes type des poutres	25
II..6.1	Poutre simple :	25
II..6.2	Poutre console :	25
II.7	modèle de la poutre	25
II.8	Le comportement des poutres FGM27	
II.9	Définition d'élasticité.....	28
II.10	Problème d'élasticité.....	28
II.11	Théories des poutres.....	29
II.12	Les modèles analytiques de l'interaction sol-structure.....	32
II.13	Conclusion.....	37

Chapitre III

Analyse du comportement statique et dynamique des poutres poreuses

III.1	Introduction	38
III.2	Formulation théorique	38
III.3	Hypothèses de base	38
III.4	Cinématique et équations constitutives	40
III.5	Équations constitutives	40
III.6.	Équations de mouvement	41

III.7	Solution analytique	44
III.8	Conclusion.....	45

Chapitre IV. Validation et comparaison des résultats

IV.1	Introduction	47
IV.2	Caractéristiques des paramètres étudiées.....	47
IV.3	Caractéristiques de la poutre considéré	47
IV.4.	Variations des paramètres étudiées	48
IV.5.	Analyse des résultats et discussions de l'effet des paramètres	49
IV.5.1.	Analyse de flexion	49
IV.5.2.	Analyse de la vibration libre	52
IV.6.	Conclusion.....	56
	Références bibliographiques.....	62

■ ■ *Introduction générale*

Dans le domaine de la construction et de la conception, les ingénieurs sont amenés à analyser des structures avec différents types de charges et sollicitations. Pour cela différents types de matériaux sont utilisés pour répondre à ces efforts. Néanmoins dans la nature aucun matériau n'est parfait et chaque matériau a ses points forts et ses faiblesses. Un matériau peut donc se montrer très efficace à un type de sollicitation donnée et faible par rapport à une autre. Ce qui a poussé les ingénieurs à combiner les matériaux entre eux, afin que chaque matériau réponde aux efforts qui lui sont appliqués.

Généralement les matériaux sont combinés entre eux en couche successive et chaque couche est destinée à un effort donné. Cette méthode est efficace pour reprendre les efforts composés, en parle alors de matériau composite et qui est largement utilisé dans la vie de tous les jours dans différents secteurs de l'industrie et de la construction. Néanmoins cette méthode présente un inconvénient parce que le fait de superposer les couches de matériaux entre elles crée une zone de fragilité qui constitue une faiblesse dans ce type de structure. Dans le but de pallier à ce type de problèmes une nouvelle gamme de matériaux composites a été mise au point. Dans cette nouvelle gamme les matériaux varient de façon graduelle d'un matériau à un matériau. De ce fait la frontière entre les deux matériaux n'existe plus, cette nouvelle gamme de matériau composite est appelée les matériaux à gradient fonctionnel ou en anglais functionally graded materials (FGM).

Initialement introduit pour le domaine aérospatial puis dans les autres domaines de l'industrie et de la construction, les matériaux FGM ont suscité un grand intérêt dans le domaine de la recherche scientifique. La première étude dans le domaine remonte à 1984 par une équipe de chercheurs japonais dirigée par Niino [2] dans le but de réaliser une barrière thermique dans les réacteurs spatiaux. Au vu de l'importance de ces matériaux le domaine de la recherche s'est étendu vers d'autres secteurs et plusieurs travaux ont été présentés par de nombreux chercheurs.

Néanmoins l'effet des fondations élastique sur la flexion et la vibration libre des poutres poreuses reste encore peu exploré.

Le but de la présente recherche est d'analyser le comportement mécanique des structures hétérogènes poreuses sur fondation élastique. A cet égard, pour la modélisation du problème de l'interaction sol-structure, on a proposé une théorie de cisaillement hyperbolique des poutres avec seulement trois inconnues pour la flexion et la vibration des poutres poreuses épaisses en FGM reposant sur une fondation Winkler-Pasternak.

Le présent travail de mémoire s'articule autour de deux aspects essentiels qui reflètent toute notre démarche, à savoir les aspects :

- Théorique
- Analytique

L'aspect théorique comprend trois chapitres :

Dans le premier chapitre des généralités sur les matériaux FGM sont exposées, après un bref historique sur le développement des structures FGM est donné, ainsi que les domaines

d'application. Les différentes méthodes de fabrication des matériaux à gradient fonctionnel sont données. Pour finir les avantages et les inconvénients des FGM sont exposés.

Dans le deuxième chapitre un bref exposé sur les différentes théories des poutres comme les modèles classiques des poutres de Bernoulli (CBT) et les poutres de Timoshenko sont présentées ainsi que les théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT).

L'aspect analytique en son rôle est scindé en deux chapitres :

Au quatrième chapitre, les différentes théories et hypothèses utilisés dans ce travail sont détaillés. Les formulations théoriques et les hypothèses de base sont données, les équations constitutives et les équations de mouvement utilisés sont illustrées, ainsi que les solutions analytiques utilisées pour la résolution des différentes équations.

Quant au quatrième chapitre : une application numérique d'un cas pour valider la théorie développée avec les résultats dans la littérature est présentée. L'effet de varier certains paramètres sur les résultats sont discutés. Enfin des analyses en flexion et en vibration libre sont effectués et les résultats sont analysés et discutés.

Le présent travail se termine par une conclusion générale où on souligne l'efficacité de cette théorie dans la résolution du comportement statique et dynamique des structures hétérogènes poreuses sur fondation élastique ainsi par des perspectives envisagées pour des travaux futur.



Chapitre I

Généralités sur les matériaux FGM

1.1 Introduction:

Les matériaux composites sont des solides formés par l'assemblage d'au moins deux matériaux non miscibles, mais ayant une forte capacité d'adhésion. Parmi les plus courants et dotés de propriétés mécaniques exceptionnelles, on trouve ceux constitués de deux phases : la matrice et les renforts [1].

Ces matériaux composites contribuent au renforcement de la sécurité grâce à leur résistance accrue aux chocs et au feu. Ils offrent également une meilleure isolation thermique ou phonique, ainsi qu'une bonne isolation électrique pour certains d'entre eux. De plus, ils élargissent les possibilités de conception en permettant d'alléger les structures et de réaliser des formes complexes capables de remplir plusieurs fonctions. Dans divers secteurs d'application tels que l'automobile, le bâtiment, l'électricité ou encore les équipements industriels, ces performances remarquables sont à l'origine de solutions technologiques innovantes.

De nouveaux processus de conception, d'industrialisation et de fabrication permettent d'étendre les possibilités techniques des matériaux composites et de mieux répondre à des besoins parfois contradictoires tels que le poids ou les fonctions auxquels les matériaux homogènes classiques ont du mal à répondre. En effet, les matériaux composites présentent un comportement particulier qui est principalement dû à deux facteurs. Le premier facteur découle du comportement anisotrope du matériau utilisé dans la couche élémentaire : contrairement aux matériaux isotropes, les matériaux composites sont peu rigides en cisaillement. Le deuxième facteur est lié à la stratification, qui consiste en l'empilement de plusieurs couches et favorise l'effet de cisaillement, notamment le cisaillement transversal [2].

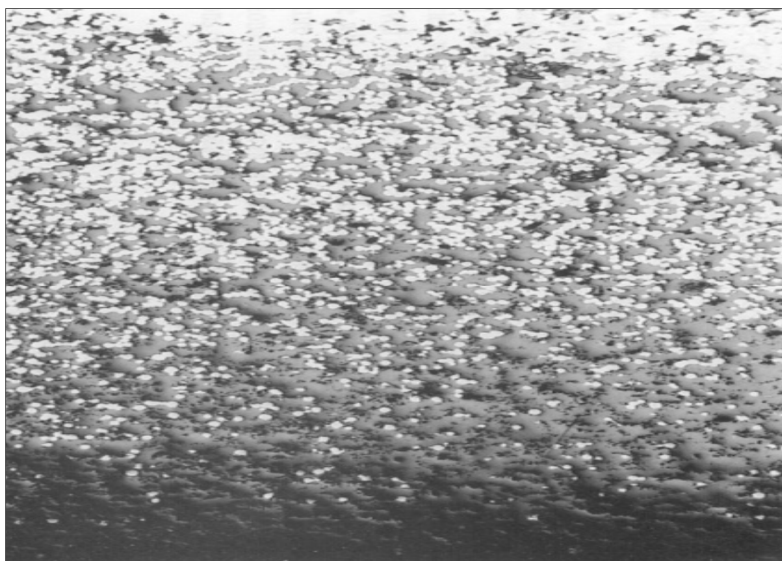


Figure (I-1): Caractéristiques des matériaux composites FGM

1.2 Définition des matériaux FGM:

Le terme matériau composite est un terme générique utilisé pour décrire une combinaison judicieuse de deux matériaux ou plus pour obtenir un produit plus efficace à partir de ses composants [3]. Jones RM. Mechanics of composite materials. CRC press; 2014. Ces matériaux sont largement utilisés dans le domaine du génie civil, grâce aux nombreux avantages qu'ils fournissent.

Plusieurs propriétés peuvent être améliorées ou affectées par la formation d'un matériau composite polymère, telles que la résistance, la rigidité, la ductilité, la résistance à la corrosion, le poids, la résistance à la fatigue [4]. Hensher DA. Fiber-reinforced-plastic (FRP) reinforcement for concrete structures: properties and applications. Elsevier; 2016.

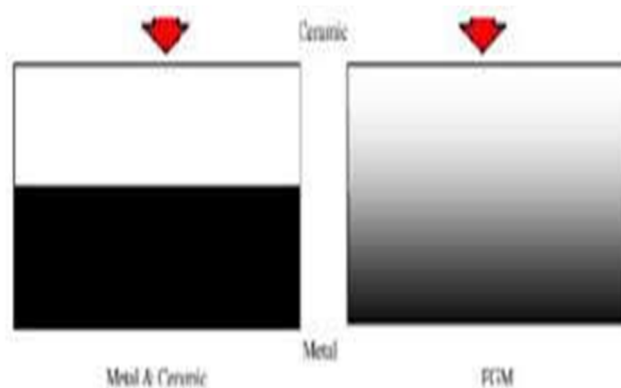


Figure (I.2) : Un type de matériau FGM en céramique et métal.

1.3 Historique et concept des FGM :

En 1987, le gouvernement Japonais a lancé une vaste recherche sur la technologie de base pour développement de matériaux à Gradient fonctionnel et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques ». L'intérêt du projet est d'améliorer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux.

Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux doivent supporter des températures de surface de 1800°C, ainsi qu'à un gradient de température de l'ordre de 1300°C. A cette année-là, aucun matériau industriel n'était connu pour supporter de telles sollicitations thermomécaniques.

Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux : Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau ;

Ténacité du matériau coté basse température ; Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau.

Alors l'idée originale des FGM a été proposée pour élaborer un nouveau composite profitant à la fois des propriétés des céramiques (Coté haute températures) et des métaux (Coté basse température). A la fin de la première étape (1987-1989), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000 K (Température de surface) et à un gradient de température de 1000 K.

Dans la seconde étape, le but était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première étape.

Enfin, en 1990 la conférence internationale qui s'est tenue à Sendai, la technologie des FGM a vu le jour, et devenue non seulement au niveau des nations, mais aussi au niveau mondiale.[5] .

1.4. Processus et technique de fabrication des FGM:

Une variété des méthodes de production des FGM ont été créées, basée souvent sur une variation des méthodes de traitement des différents processus d'élaboration conventionnelles bien établis, des procédés qui sont capables de s'adapter à une étape de gradation, où on peut citer.[6]:

- La compaction sèche des poudres,
- La stratification des feuilles
- Les méthodes de dépôt chimique en phase vapeur.
- Le coulage centrifuge
- Coulage séquentiel en barbotine
- Coulage en bande
- Projection thermique (plasma)

1.5 Types de FGM:

Au début du développement des matériaux à gradient de propriétés, le concept consistait à supprimer l'interface pointue qui existait dans le matériau composite traditionnel et à la remplacer par l'interface qui se modifiait progressivement, ce qui se traduisait par une modification de la composition chimique de ce composite. A cet effet deux critères différents sont utilisés pour classer les matériaux fonctionnels à gradient de propriétés. L'un est basé sur la structure du matériau et l'autre sur la taille des matériaux à gradient de propriétés de manière fonctionnelle. les FGM peuvent être divisés en deux groupes principaux basés sur la structure des matériaux : FGM

Structurée en continue et structurée de manière discontinue. Dans les FGM continues, il existe un gradient continu d'un matériau à l'autre. Cependant, en cas de FGM discontinue, le gradient de matière est fourni en couches, La variation continue des propriétés figures (I.4) trouve son application lorsque, par exemple, la face supérieure est exposée à une haute température alors que la face inférieure est exposée à une basse température. Dans ce cas, la face supérieure est à 100% céramique et la face inférieure est à 100% métal, avec une transition graduelle entre les deux.

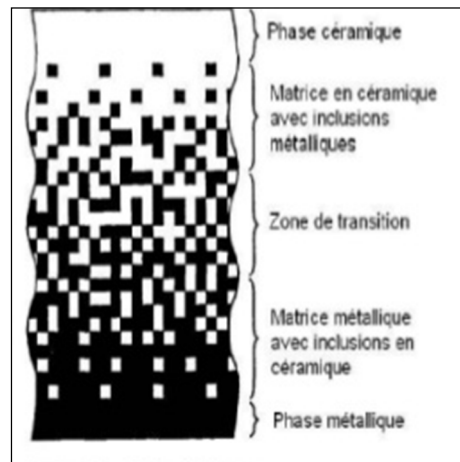


Figure (I.3) : variation continue de la microstructure.

1.6 Comparaison des matériaux types FGM et les composites traditionnels:

Généralement, les FGM sont des matériaux constitués de plusieurs matériaux contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement non homogènes. Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue les FGM des matériaux composites conventionnels comme illustré sur la **figure I-1** [7]. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés matérielles des FGM. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure

Propriétés	1 Résistance mécanique		
	2 Conductivité thermique		
Structure	Eléments constitutifs:		
	céramique ○ métal ● microporosité ○ fibre ◇		
Matériaux	exemple	FGM	NON-FGM

Figure I-4. Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels [3]

Yoshihisa [8], a établi un modèle simple illustrant les différences entre les matériaux à gradient évalué (FGM) et les matériaux conventionnels (figure I-4). Le matériau plan composé à une caractéristique plane, et le matériau relié à une frontière sur l'interface de deux matériaux. Les FGM ont d'excellentes caractéristiques qui diffèrent les matériaux plans composés et reliés. Par conséquent, les FGM attirent l'attention en termes de leur application dans les domaines industriels.

Puisque les FGM ont une double propriété des deux matières premières qui sont mélangées ensemble, et la distribution composante est graduée sans interruption. Par exemple, l'un des FGM qui est composé du métal et de la céramique réunit les caractéristiques de la bonne conductivité thermique et mécanique.

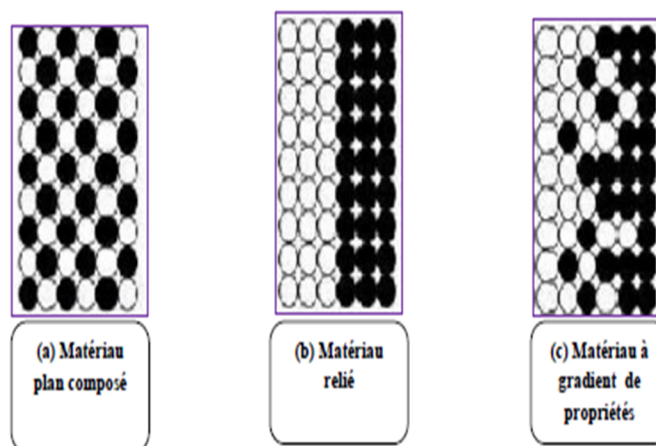


Figure I-5. La distribution composante des matériaux.

1.7 Domaines d'applications des matériaux fonctionnellement gradués: [9].

Le concept des matériaux fonctionnellement gradués est applicable dans nombreux domaines. Il a été initialement conçu pour l'industrie de l'aéronautique, où les FGM ont fournis deux propriétés contradictoires telles que la conductivité et l'isolation thermique. Actuellement, Ils permettent la production des matériaux légers, forts et durables, et ils sont applicables dans un large intervalle des domaines tels que :

1.7.1 Aérospatial :

Le secteur de l'aérospatiale est l'un des secteurs qui montre plus d'intérêt au développement des FGM. NASA et la JAXA ont montré un grand intérêt au développement de cette technologie. Comme le coût de lancement des navettes spatiales dépend du poids qu'ils soulèvent dans l'espace, la création de pièces avec des éléments de connexion moins est une solution.

En outre, la conception optimale, l'équilibre entre le poids et la performance peut réduire les coûts de lancement. La performance et la sécurité sont toujours très préoccupantes dans l'aérospatiale. La protection de bouclier thermique des navettes spatiales pourrait être optimisée pour réduire le poids et augmenter la fiabilité en utilisant des plaques FGM. Bhatt, 1989 a montré l'utilisation de céramiques à base de nitrure de silicium pour les Aubes de distributeur de turbine.

1.7.2 Médecine :

Le but d'utiliser les FGM pour produire des implants est d'utiliser les propriétés Mécaniques des alliages, céramiques et composites gradué avec des matériaux biocompatibles.

Ainsi, un implant osseux peut être constitué par un matériau solide et dur dans le noyau avec le tissu osseux gradué compatible à la surface et un matériau de faible coefficient de frottement dans Les articulations.

Kumar et Maruno (2002) ont également ajouté le verre à la poudre d'hydroxyapatite et des Implants en titane revêtus pour une meilleure biocompatibilité.

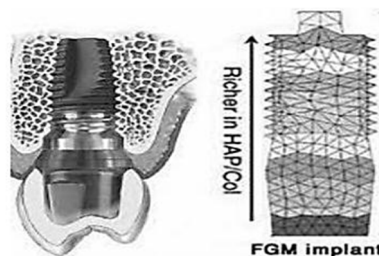


Figure (I.6) : Utilisation des FGM dans les implants dentaires [10]

1.7.3 Défense :

Dans la demande de défense, tels que des plaques de blindage et des gilets pare-balles, la Pénétration des matériaux résistants est nécessaire. Une des caractéristiques les plus importantes du matériau à gradient fonctionnel est la capacité à inhiber la propagation des fissures, ce qui rend les matériaux à gradient fonctionnel appropriés pour les applications de défense.

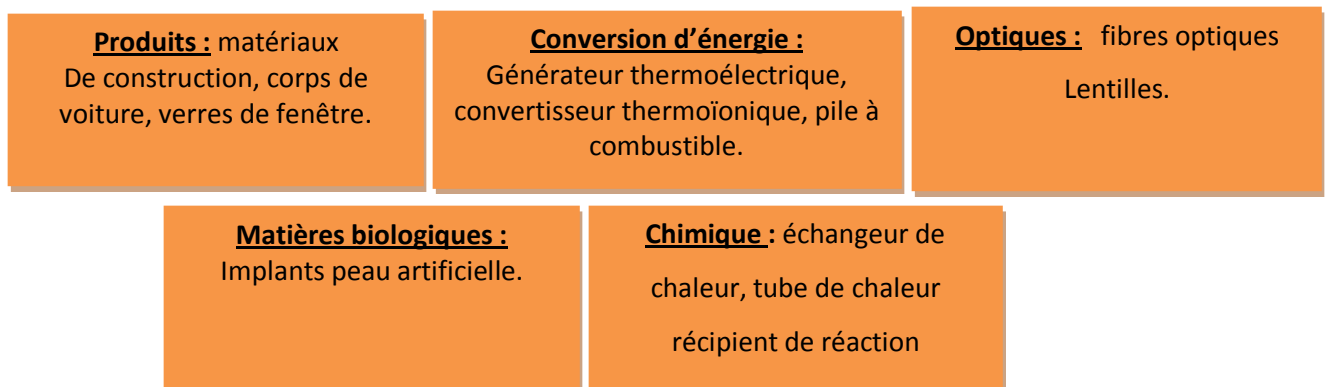
1.7.4 Énergie nucléaire :

Les FGM sont utilisés dans les dispositifs de conversion d'énergie. Ils fournissent Également une barrière thermique et ils sont utilisés comme revêtement de protection sur des Aubes de turbine dans le moteur à turbine à gaz et aussi dans le générateur thermoélectrique, pile à combustible, réacteurs nucléaires, pastilles de combustible

1.7.5 Optoélectronique :

Les FGM trouvent aussi leur application dans l'optoélectronique comme les matériaux à Indice de réfraction gradués et des disques audio-vidéo ; support de stockage magnétique, semi- conducteur à bande graduée.

1.7.6 Autres domaines d'application :



1.8 Pour des utilisations structurelles (intégration du caractère réfractaire) :

Il existe deux causes principales derrière les défaillances dans les structures, il s'agit d'un changement de fonctionnalité (La sur-augmentation des charges d'exploitation) ou bien la détérioration des matériaux utilisés. Le vieillissement de ces matériaux (Acier, alliages ou autres matériaux traditionnels), est un souci inquiétant pour les ingénieurs, ce qui confirme le besoin d'une avancée technologique dans le domaine du renforcement. Dans ce contexte, plusieurs méthodes ont été utilisées durant les années 1960, parmi lesquelles, la méthode de soudure des plaques d'acier à la Structure a été largement utilisée pour le renforcement des structures endommagées, étant donné que Cette méthode améliorait la rigidité, la résistance et

réduit les fissures ainsi que leurs propagations (Vilnay, 1988 ; Roberts et al 1989 ; Robert, 1989 ; Liu & Zhu, 1994 ; Taljsten, 1997). Cette méthode avait des inconvénients, en effet, la tôle d'acier subissait la corrosion qui dégrade et fragilise la Structure, c'est un grand problème susceptible d'annuler toute l'opération de renforcement.

Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux :

- Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la Couche superficielle Du matériau ;
- Ténacité du matériau côté basse température Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau [11]
- Aussi, la mise en œuvre de cette technique s'est avérée difficile en raison du poids et de la taille des tôles d'acier. La technique du renforcement par composite en fibre durant les dernières décennies apparaît comme une solution de renforcement des méthodes traditionnelles. Elle consiste à coller des plaques en composite FRP (Les composites en fibres De carbone,...etc.) En utilisant les nouvelles colles époxy. Cette technique de renforcement, est une excellente alternative par rapport à l'ancienne méthode utilisant les plaques d'acier et ce, en raison de ses avantages dans le domaine du génie civil, dans le domaine aéronautique et dans l'aérospatial. (Baker, 1984) Cette technique a été commercialisée durant les années 1980 Aux Etats-Unis, en Europe et au Japon. Des applications ayant pour but la prévention de la détérioration des structures lors des séismes et des catastrophes naturelles. Le séisme Hyogoken-Nanbu, qui a dévasté la ville de Kobe au Japon en 1995, a été un élément accélérateur de la recherche dans le domaine du renforcement des constructions par la nouvelle technique des composites FRP.

1.9. Avantages et inconvénients des matériaux FGM:

1.9.1. Avantages des matériaux FGM:

Outre l'accomplissement de son objectif principal, c'est à dire de fournir les différents requis des propriétés en divers points et des surfaces du futur produit qui, pourrait être réalisé par un simple revêtement[12], et beaucoup d'autres soulignent divers avantages supplémentaires de la FGM. Ils énumèrent certains avantages qui en résultent principalement de la non-existence d'une interface forte FGM, tels que :

- Diminuer les contraintes thermiques causées par les différences de coefficients de dilatation thermique des matériaux utilisés.
- Absence d'une interface nette devrait conduire à un contrôle d'ensemble mieux des contraintes.
- Meilleure cohésion entre différents matériaux, par exemple un métal et une céramique.

- Extension de la région fonctionnelle avant d'atteindre la valeur limite de la déformation plastique.
- Suppression de délaminage.
- Augmentation de la ténacité à la rupture.
- Elimination des singularités des contraintes à divers endroits, tels que les surfaces libres, des coins, des racines de fissures, etc. [12].

1.9.2. Inconvénient des matériaux FGM :

Le principal obstacle à une application plus large de la FGM est leur fabrication compliquée en raison de l'inadéquation des propriétés différentes, par exemple, la température de fusion, des affinités différentes pour divers autres éléments, la taille des particules, la morphologie, etc ; un exemple type est un mélange d'un métal avec la température de fusion (T_1) et une céramique avec une température de fusion (T_2). Dans la plupart des cas, un tel couple est habituellement ($T_1 \ll T_2$). Puis, si la température de fabrication est d'environ (T_1), la céramique est encore non fondue et la structure finale contient des particules de céramique non fondue dans une matrice métallique. Dans de nombreux cas, une telle structure présente une grande porosité et une petite adhérence entre les différents composants et son application générale est limitée. Cependant, pour des applications spéciales, la présence de particules très dures (carbures) dans une matrice solide peut être souhaitable.

1.10 Propriétés des matériaux FGM :

Les matériaux FGM peuvent incorporer des fonctions incompatibles telles que la résistance à la chaleur, à l'usure et à l'oxydation des céramiques avec la ténacité élevée, la résistance élevée, l'usinabilité et la capacité de liaison des métaux sans contrainte thermique interne sévère [16], souvent constitués de deux types de matériaux de base, céramique et métal, choisie en fonction des propriétés physiques de chaque composant [17].

• Les métaux

Lorsque la majorité des éléments chimiques dans le tableau de Mendeleïev sont les métaux, ils possèdent plusieurs avantages :

- Très bons conducteurs de chaleur,
- Très bons conducteurs d'électricité,
- Plus souvent durs et rigides,
- Déformables plastiquement,
- Un nombre important possèdent une température de fusion très élevée.

Les métaux les plus souvent utilisés sont le fer, le nickel, le tungstène, le titane, le magnésium et l'aluminium [17].

- **Les céramiques**

Les céramiques sont en général, des matériaux très durs, résultent de la combinaison des éléments métalliques (Al, Ni, Ti, Zr...) et non métalliques dont le plus courant est l'oxygène.

Ils sont largement utilisés comme abrasifs et typiquement dans les régions où les environnements est réfractaires schématisés par leurs résistances mécaniques et thermiques très élevées [17]. Alors qu'ils ont généralement un comportement fragile ce qui réduit leurs emplois pour des applications où les chocs mécaniques et thermiques importants. Ce matériau est choisi grâce à ses caractéristiques exceptionnelles qui sont énumérées comme suit [18] :

- Faible réactivité chimique, bonne tenue à la corrosion,
- Haute température de fusion ou de décomposition,
- Haut module d'élasticité et haute dureté,
- Charge à la rupture élevée,
- Bas coefficient de frottement, bonne résistance à l'usure.

1.11 Propriétés matérielles des poutres FGM :

Les matériaux FGM sont une combinaison de deux ou plusieurs matériaux dont les caractéristiques et les propriétés diffèrent, où la transition entre les deux matériaux est idéalement continue et graduelle. La dépendance des propriétés de la position se traduit par la prise en compte de la loi des mélanges.

Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La majorité des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume.

Selon l'étude de [Jin et al 1999]. Le coefficient de Poisson peut être supposé constant étant donné que son effet sur la déformation est négligeable par rapport à celui du module de Young.

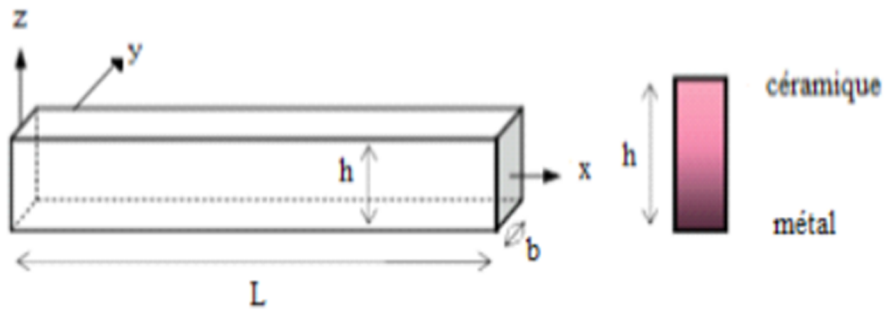


Figure (I.7) : géométrie d'une poutre FGM

1.11.1 Fonction de puissance (P-FGM) :

La première fonction les propriétés matérielles obéit à une fonction en loi de puissance (P-FGM) comme suit [13] :

$$P_e = P_m V_m + P_c V_c \tag{1.1}$$

Sont les propriétés du métal et de la céramique, représentes la fraction Volumique du métal et de la céramique définies par

$$V_c = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^k \tag{1.2.a}$$

$$V_m = 1 - V_c \tag{1.2.b}$$

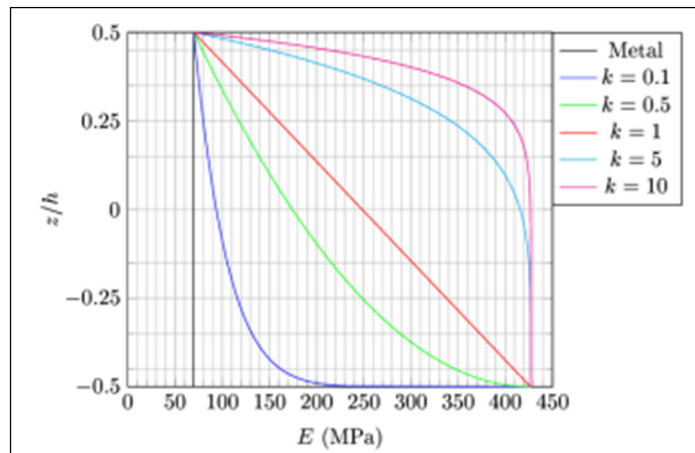


Figure (I.8) : Lois de puissance (P-FGM).

1.11.2 Fonction sigmoïde (S-FGM) :

La troisième fonction utilisée dans cette étude est la fonction sigmoïde (S-FGM), (Aldousari (2017), Bouguenina et al. 2015).

$$P_e = P_m + \frac{1}{2} (P_m + P_c) \left(1 + \frac{2z}{h} \right)^k \quad \left(-\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \right) \tag{1.3.1}$$

$$P_e = P_m + \frac{1}{2} (P_m - P_c) \left(1 - \frac{2z}{h} \right)^k \quad \left(0 \leq z \leq \frac{h}{2} \right) \tag{1.3.b}$$

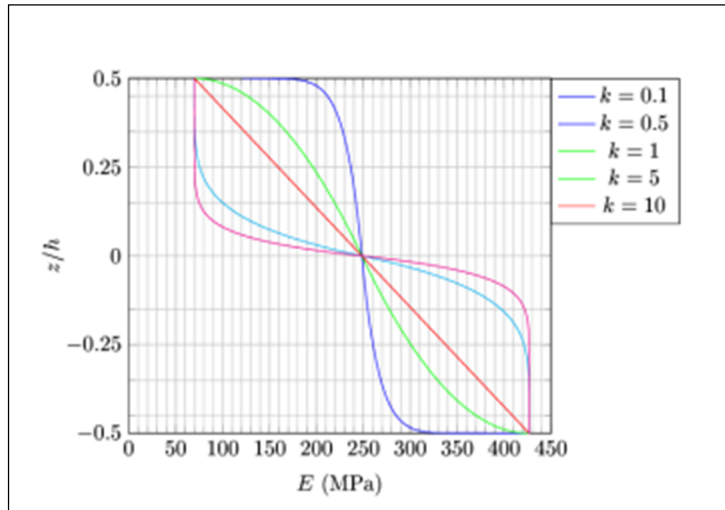


Figure (I.9) : Fonction sigmoïde S-FGM.

La distribution du module de Young à travers l'épaisseur d'une poutre P-FGM, SP-FGM et distribution sigmoïdale est présentée aux Fig. 2, 3 et 4, respectivement.

1.11.3 Fonction exponentielle (E-FGM) :

La fonction exponentielle est utilisée pour décrire les propriétés matérielles d'une poutre FGM ; elle s'écrit comme suit (Delale et Erdogan 1983) :

$$E(z) = E_m \cdot e^{\beta(z + \frac{h}{2})}$$

Avec :

$$\beta = \frac{1}{h \ln(E_c / E_m)}$$

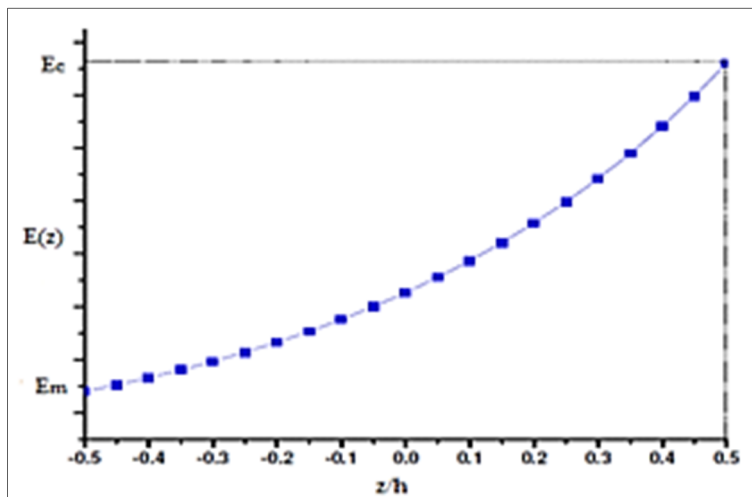


Figure (I.10) : Variation du module de Young en fonction de l'épaisseur (E-FGM).

1.11.4 Fonction puissance symétrique SP-FGM :

La loi de puissance symétrique modifiée (S-P-FGM), Aldousari (2017), a la forme suivante :

$$P_e = P_c + (P_m + P_c) \left(-\frac{2z}{h}\right)^k \quad \left(-\frac{h}{2} \leq z \leq 0\right)$$

(1.5.a)

$$P_e = P_c + (P_m + P_c) \left(\frac{2z}{h}\right)^k \quad \left(0 \leq z \leq \frac{h}{2}\right)$$

(1.5.b)

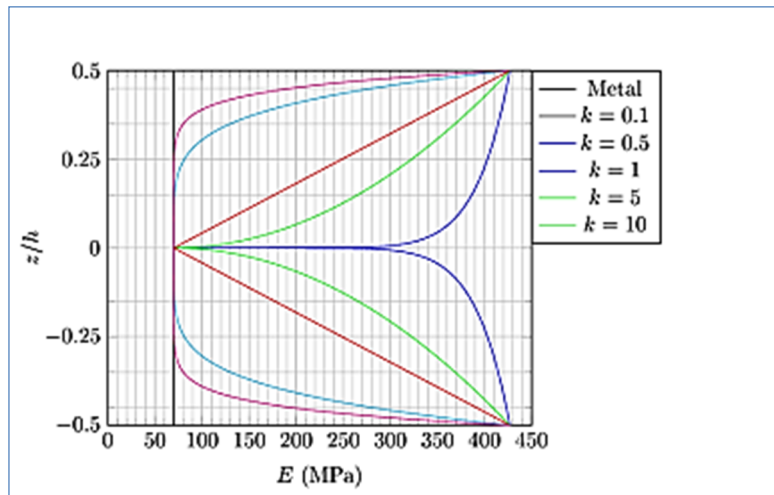


Figure (I.11) : Lois de puissance symétrique (SP-FGM).

1.12 Loi de mélange :

Plusieurs approches sont utilisées pour décrire la variation matérielle du FGM qui sont fabriqués à partir de deux phases de matériaux. En général, la plupart des approches sont basées sur la distribution de la fraction volumique plutôt que développé à partir de microstructures classées réelles [14]. Deux types de fraction volumique (variations/gradations) sont populaires dans la littérature qui couvre la plupart des modèles Analytiques existants (figure1.12a).

Une variation continue de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumé, et celle du métal peut être représentée comme une fonction de coordonnées suivant l'épaisseur (z)(figure1.12b).

Une variation par morceaux de la fraction volumique de la céramique ou du métal est Assumée, et le FGM est pris pour être posé avec la même fraction volumique dans chaque région, c.-à-d. une couche quasi-homogène de céramique-métal (figure 1.12a).

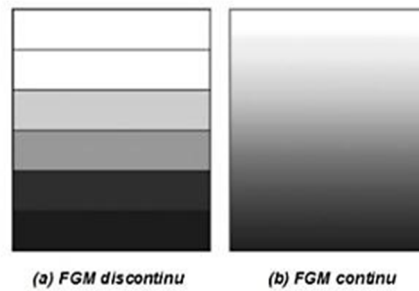


Figure (I.12) : Modèle analytique pour une couche de matériau à gradient fonctionnel.

1.13 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons défini les matériaux à gradient de propriétés (FGM), leurs Propriétés, leurs domaines d'application, l'histoire de leur développement. Après nous avons cités les propriétés matérielles effectives d'un matériau FGM.

Enfin nous avons terminé par la présentation des différentes lois qui servent à décrire la variation des propriétés matérielles du matériau FGM suivant l'épaisseur de la poutre. Ces lois pouvaient être sigmoïdes, exponentielles et même loi de puissance.

Chapitre II

Théories des poutres

II.1 Introduction

La théorie des poutres est un modèle utilisé dans le domaine de la résistance des matériaux.

Elle consiste à ramener la résolution d'un problème tridimensionnel (3D) à la résolution d'un Problème unidimensionnel (1D) en obtenant une solution approchée pour les champs de Contrainte et de déformation donnant une bonne idée des efforts et des déplacements.

La déformation des matériaux et les contraintes transmises par ceux-ci dépendent de leur forme, de conditions aux limites et de l'histoire des sollicitations externes.

La théorie des poutres est utile pour déterminer des solutions analytiques de modèles mécaniques simples. Et l'avantage des solutions analytiques sur les prévisions obtenues par des méthodes numériques est de permettre de visualiser l'influence de différents paramètres tels que la forme, la taille, le comportement du matériau et même l'hétérogénéité.

Ceci permet de mieux comprendre une structure ou de mieux optimiser son architecture, dans le cadre d'une première approche d'un problème de conception ou de compréhension.

Dans ce chapitre on va présenter les différentes théories déjà existantes dans la littérature qui sont utilisées dans les calculs des poutres.

On utilise essentiellement deux modèles :

- **La théorie d'Euler-Bernoulli, qui néglige l'influence du cisaillement ;**
- **La théorie de Timoshenko, qui prend en compte l'effet du cisaillement :**

II.2 Définition d'une poutre :

C'est un objet dont la longueur est grande par rapport aux dimensions transverses. Une poutre est un élément de construction des bâtiments, les navires et autres véhicules, et dans la fabrication de machines. Elle sert à soutenir des charges au-dessus du vide et à relier les piliers, les colonnes ou encore les murs sur lesquels elle s'appuie.

Les poutres peuvent être en bois, en béton, en préfabriqué, elles peuvent également être précontraintes c'est-à-dire posséder des câbles incorporés. La section d'une poutre est étudiée pour la meilleure résistance possible à la flexion. Une poutrelle est une poutre de section de moins de 20cm².

II.3 Historique des théories des poutres:

La paternité de la théorie des poutres est attribuée à Galilée, mais des études récentes indiquent que Léonard de Vinci l'aurait précédé. Ce dernier avait supposé que la déformation

variait de manière linéaire en s'éloignant de la surface neutre, le coefficient de proportionnalité étant la courbure, mais il ne put finaliser ses calculs car il n'avait pas imaginé la loi de Hooke. De son côté, Galilée était parti sur une hypothèse incorrecte (il supposait que la contrainte était répartie uniformément en flexion), et c'est Antoine Parent qui obtint la distribution correcte. Ce sont Leonhard Euler et Jacques Bernoulli qui émirent la première [18].

II...4 Le rôle de la poutre :

La poutre sert à soutenir des charges au-dessus du vide et à relier les piliers, les colonnes ou encore les murs sur lesquels elle sappuie. [la-construction/beams]

II...5 Les types des poutres:

Il existe différents types de poutres de construction en fonction du choix du matériau de construction. Les matériaux courants sont le béton armé, le bois, l'acier et les matériaux polymères renforcés de fibres. [la-construction/beams]

II...5.1 Les poutres en béton armé :

Sont fabriquées lorsque des barres d'acier sont encastrées le long d'un élément structurel afin d'augmenter la résistance à la traction de la structure. Ce sont les types de poutres les plus courants.

- Poutres de section rectangulaire
- Poutres en retombée rectangulaire de section variable (en fonction de la norme sélectionnée).
- Poutres en « L » et en « T ».
- Poutres treillis.
- Poutres précontraintes.
- Appui sur mur (poutre avec rigidité infini).
- Chainage non structurel ou limite (poutre avec rigidité nulle).

[produit/poutres-en-beton-arme]

II.5.2 Les poutres en bois :

Les poutres sont des morceaux de bois de grandes dimensions, capables de résister à d'importantes contraintes. Elles peuvent être faites de bois massif ou de bois d'ingénierie.

- Les poutres en bois massif.
- Les poutres en bois massif abouté (BMA).
- Les poutres en contreplaqué laminé LVL (Laminated veneer lumber).
- Les poutres en bois lamellé-collé (BLC).

- Les poutres en bois massif reconstitué (BMR).

II.5.3 Les poutres en acier :

Les poutres et poutrelles en acier sont un recours précieux aussi bien en construction neuve qu'en extension et en rénovation. La poutre en acier offre une excellente résistance tout en étant de mise en œuvre rapide et facile.

Les poutres en acier les plus couramment utilisées sont les **IPE, IPN, HE, UAP, UPN, SFB, IFB**

- IPN ou IPE : IPN pour poutrelle en I à profil normal (IPN) ou poutrelle en I à profil européen (IPE). La différence vient du raccordement entre les semelles (ailes) et l'âme ; alors qu'une IPE dispose d'une épaisseur constante des semelles, dans l'IPN, l'épaisseur des semelles augmente vers la liaison avec l'âme.
- UAP et UPN : c'est une autre distinction que pour les poutres à profil en I puisque dans les poutres à profil en U, les ailes sont à bords parallèles et d'épaisseur constante mais réduite pour les UPE. La hauteur maximale de l'aile (exprimée en mm) différencie les UAP (de 80 mm jusqu'à 300 mm) des UPE (de 80 mm à 400 mm).
- IFB et SFB : il s'agit de poutres et poutrelles à semelles asymétriques dont l'une est particulièrement large dans le but de réaliser des planchers-dalles. Les poutres IFB (Integrated Floor Beam) sont confectionnées ainsi au laminage alors que sur les poutres SFB (Slim Floor Beam) consistent en une tôle soudée sous une semelle qui en élargit la cote.
- HEA, HEB, HEM : les poutres et poutrelles à profil en H (ailes plus larges et âme moins haute que sur les poutres en I) répondent également à des appellations différentes en fonction de la hauteur de l'âme et de la largeur des semelles ou ailes

II.6 Les différents types des poutres:

Une poutre est une barre d'une charpente, une membrure d'une structure, ou un élément d'une machine. Les poutres sont placées dans la position horizontale et supportent des charges. Les charges sur les poutres tendent à les trancher (cisailier) et à les courber ou plier.

II.6.1 Poutre simple :

C'est une poutre (simplement appuyée) :

Reposant sur deux supports (un appui double et un appui simple).et Les points d'appui sont articulés de façon à ce que les extrémités puissent se mouvoir librement pendant la flexion.

II.6.2 Poutre console :

C'est une poutre encastree : tandis que extrémité est entièrement libre.et l'autre L'extrémité encastree ne bouge pas pendant la flexion.

II.6.3 Poutre avec porte-à-faux :

C'est une poutre qui repose sur deux appuis (un simple et l'autre double) et a une ou deux extrémités qui dépassent de façon appréciable les appuis (porte-à-faux).

Les poutres sont classées suivant leurs appuis. Les trois types de poutres précédentes entrent dans la catégorie des poutres statiquement déterminées (poutre isostatique) puisqu'elles possèdent trois inconnues reliées aux trois degrés de liberté et par le fait même aux trois équations d'équilibre.

Équilibre de translation:

1/ $\sum F_x = 0$ translation horizontale

2/ $\sum F_y = 0$ translation verticale

Équilibre de rotation:

3/ $\sum M_z = 0$ rotation par rapport à n'importe lequel axe perpendiculaire au plan des forces xy .

II.6.4 Poutre encastree et appuyee :

C'est une combinaison des types A et B. Dans ce cas la poutre a quatre réactions (4 inconnus) c'est donc une poutre en équilibre hyperstatique.

II.6.5 Poutre continue :

C'est une poutre soutenue par plus de deux supports, donc une poutre en équilibre Hyperstatique.

II.6.6 Poutre à double encastrement :

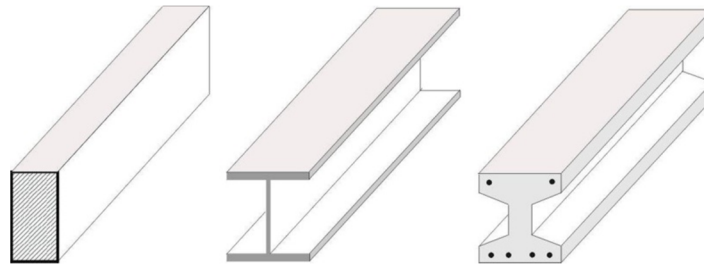
C'est une poutre supportée par deux encastresments, c'est donc une poutre en équilibre Hyperstatique. La figure nous montre une poutre à double encastrement.

II.6.7 Poutre supportee à double encastrement :

Soutenue par deux encastresments et supportée par un ou plusieurs supports, c'est Également une poutre en équilibre hyperstatique.

Les des poutres hyperstatiques. Elles et plus de fixations ou supports que nécessaires. cependant, ces supports augmentent la capacité portante de la poutre. Les équations des statiques ne suffisent pas pour analyser ces poutres. On a recouru à différentes méthodes. [19], en flambement et en vibration en utilisant les théories non locales de déformation de cisaillement des poutres. Université djillali liabes sidi bel abbes.

II.7 Modèle de la poutre:



Figure(II.1) : Quelques poutres classiques. On appelle « poutre » un solide engendré par des surfaces finies, appelées « sections droites »

Telles que :

- L'ensemble des centres de gravité des sections droites est une courbe continue et différentiable, appelée « courbe moyenne » ; son rayon de courbure est grand devant sa longueur.
- Les sections droites sont perpendiculaires à la courbe moyenne ; elles « varient de manière continue et lente »
- La racine carrée de la surface des sections droites est petite devant la longueur de la courbe moyenne.
- Le matériau est homogène et isotrope.

Si le rayon de courbure est faible ou que la section varie brutalement, il faudra considérer les concentrations de contrainte.

Dans les cas les plus simples, notamment celui des poutres au sens « élément de structure », la courbe moyenne est droite et les sections droites sont identiques. Mais on peut modéliser d'autres types de pièces. Par exemple, un arbre de transmission, un axe, un levier, un tuyau, un réservoir, ou même la coque d'un navire peuvent être modélisés par une poutre ; un ressort hélicoïdal (ressort à boudin) peut être considéré comme une poutre dont la courbe moyenne est hélicoïdale, et dont les sections droites sont des disques de même rayon.

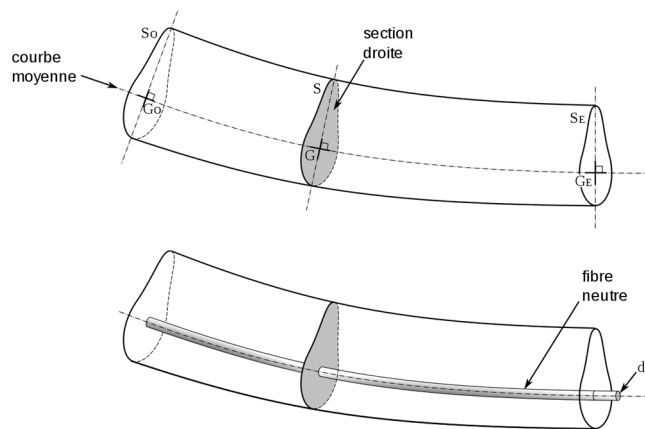
Telles que :

- L'ensemble des centres de gravité des sections droites est une courbe continue et différentiable, appelée « courbe moyenne » ; son rayon de courbure est grand devant sa longueur.
- Les sections droites sont perpendiculaires à la courbe moyenne ; elles « varient de manière continue et lente » ;

- La racine carrée de la surface des sections droites est petite devant la longueur de la courbe moyenne.
- Le matériau est homogène et isotrope.

Si le rayon de courbure est faible ou que la section varie brutalement, il faudra considérer les concentrations de contrainte.

Dans les cas les plus simples, notamment celui des poutres au sens « élément de structure », la courbe moyenne est droite et les sections droites sont identiques. Mais on peut modéliser d'autres types de pièces. Par exemple, un arbre de transmission, un axe, un levier, un tuyau, un réservoir, ou même la coque d'un navire peuvent être modélisés par une poutre ; un ressort hélicoïdal (ressort à boudin) peut être considéré comme une poutre dont la courbe moyenne est hélicoïdale, et dont les sections droites sont des disques de même rayon.



**Figure (II.2) : Poutres de courbe moyenne G O G E , de section droite S
Et fibre neutre de section ds.**

On appelle « fibre » un volume généré par une petite portion d^2S de la section droite suivant une courbe parallèle à la courbe moyenne. On appelle « fibre neutre » la fibre générée par la courbe moyenne elle-même.

Pour simplifier, sauf indication contraire, nous dessinerons des poutres dont la courbe moyenne est une droite avant déformation.

L'étape de modélisation consiste à :

- Considérer la fibre neutre seule, caractérisée par sa longueur L (et si la poutre n'est pas droite, par une fonction $y(x)$) ;
- Considérer les sections droites, caractérisées par leur aire S (pour la traction-compression) et leurs moments quadratiques I_G (pour la torsion), I_{Gy} et I_{Gz} (pour la flexion).

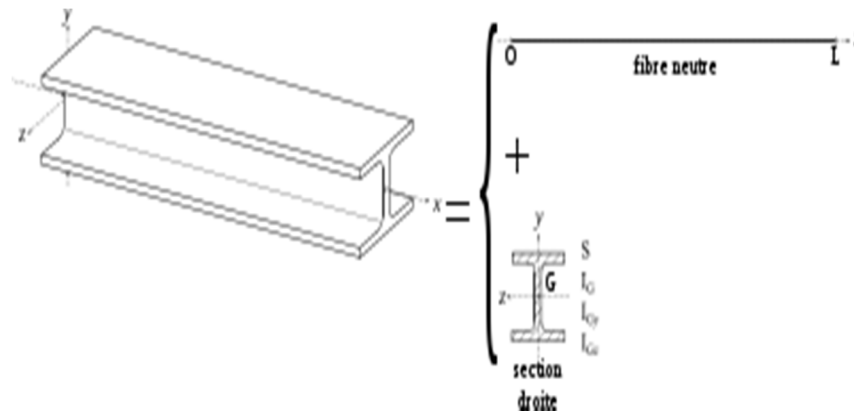


Figure (II. 3) : La modélisation consiste à définir des paramètres de Forme (L, I_G, I_{Gy}, I_{Gz}) à partir de la forme de la pièce réelle.

II.8 Le comportement des poutres FGM:

L'analyse d'une structure composite est plus complexe que celle d'une structure en matériaux traditionnels, métalliques par exemple. Cela est dû au caractère hautement anisotrope des Propriétés mécaniques du matériau de bastant sur les plans raideur que résistance, et qui sont concentrées dans la direction des fibres. L'importance de développer une analyse sur le Comportement des poutres est liée d'une part à l'utilisation des poutres comme éléments de base dans la réalisation des structures, d'autre part à la caractérisation des propriétés mécaniques des matériaux composites et ceci a partir des différentes mais sur des éprouvettes en forme de poutres. [20].

II.9 Définition d'élasticité:

L'élasticité est la propriété physique d'un corps de reprendre sa forme initiale après suppression de la sollicitation. Le corps est parfaitement élastique s'il retrouve complètement sa forme originale après suppression de la charge.

Il est partiellement élastique si la déformation produite par les forces externes ne disparaît pas complètement lorsque celles-ci sont annulées.

L'expérience montre que, si l'on ne dépasse pas une limite de déformation et donc une contrainte donnée (appelée limite élastique), les matériaux tels que l'acier et les alliages métalliques en général peuvent être considérés comme parfaitement élastiques.

II.9.1 L'élasticité bidimensionnelle :

Système d'équations en deux dimensions On considère que le solide dans le plan $(0, x_1, x_2)$, dans ce cas, tous les inconnus qui dépendent de (x_3) sont négligeables.

II.10 Problème d'élasticité :

II.10.1 La méthode des contraintes :

La théorie des contraintes (TOC) est une méthodologie d'amélioration des processus qui se concentre sur l'identification et la correction des contraintes ou des causes profondes des goulets d'étranglement. En s'attaquant à ces contraintes.

L'objectif de la théorie des contraintes est d'aider les entreprises à augmenter leur rendement et de guider les organisations vers la réalisation de leurs objectifs en tenant compte des contraintes par l'amélioration de leurs processus et l'optimisation de l'utilisation de leurs ressources.

II.10.2 La méthode des champs de déplacements :

a) La corrélation d'images numériques : est une méthode optique 2D ou 3D qui permet de mesurer les déplacements entre deux images.

Parmi les procédés de mesure basés sur l'optique, la corrélation d'images s'impose aujourd'hui comme un outil de mesure de champ de déplacement utilisable en milieux académiques et industriels en raison de sa grande flexibilité, de sa facilité d'emploi et de la grande richesse des informations fournies lors d'un essai mécanique. Historiquement, la corrélation d'images a d'abord été utilisée avec une seule caméra ne permettant d'étudier que des surfaces planes [M.A. Sutton et al 1983], sujettes à des champs de déplacements 2D.

D'autre part, les procédés optiques de numérisation 3D se sont fortement développés durant cette dernière décennie, faisant apparaître la technique d'ingénierie inverse permettant de réaliser rapidement la définition numérique d'un objet existant (par exemple à partir d'un modèle physique ou d'un prototype). Ces techniques sont également reconnues dans l'industrie comme moyen de contrôle dimensionnel rapide, même si un travail d'amélioration et de standardisation reste à faire [21].

II.11 Théories des poutres: [Sellai 2011] :

La zone métallique est utilisée pour supporter les charges mécaniques, tandis que la partie céramique sert de protection thermique. En raison de la croissance des applications FGM dans les structures d'ingénierie, différentes théories de poutre ont été développées pour prédire la réponse mécanique des poutres fonctionnellement graduées.

Les théories les plus classiques et les plus anciennes pour des milieux poutres sont :

- La théorie d'Euler-Bernoulli.
- La théorie de Timoshenko.
- La théorie d'Ordre Elevé.

II.11 .1 Modèle d'Euler Bernoulli (classical Beam Theory - CBT) :

La théorie des poutres classique (CBT Classical Beam Theory), connue sous le nom de théorie des poutres d'Euler-Bernoulli (EBBT Euler Bernoulli Beam Theory) (Euler, 1744).

C'est la plus simple des théories et elle s'applique uniquement aux poutres minces (élancées). Pour les poutres modérément épaisses, la CBT sous-estime la flèche et la contrainte de cisaillement, en ignorant l'effet de déformation de cisaillement transversale [Yang 2008, Simsek 2009, Alshorbagy 2011]. Pour cette raison elle ne s'applique pas aux poutres épaisses.

Pour le cas de la théorie classique des poutres CBT (théorie des poutres d'Euler-Bernoulli EBBT) : $f(z) = 0$ (cisaillement négligé).

Le champ de déplacement de n'importe point M est donné par les deux composantes suivantes :

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u_0 - z u_0 \cdot x(x) \\ w(x, z) = w_0 \end{cases} \quad (1)$$

Avec : (x, z) : C'est le déplacement suivant X et (x, z) est le déplacement dans la direction de Z ou bien la flèche. La rotation autour de l'axe Y, provoquée par la flexion est tel que :

$$w_0 x(x) - \frac{\delta u}{dx} - \frac{\delta w}{dx} \quad (2)$$

$u_0(x)$ et $w_0(x)$ sont les composantes de déplacement au milieu de la section et sur la ligne moyenne de la poutre, respectivement le long des axes X et Z

II.11 .2 Théorie des poutres de Timochenko Beam Theory (TBT) :

La deuxième théorie des poutres est la théorie des poutres à déformation de cisaillement transversal du premier ordre (FSDBT First Shear Déformation Beam Theory).

Elle est connue sous l'appellation de théorie des poutres de Timochenko Beam Theory (TBT Timochenko Beam Theory) [Timochenko, 1921, 1922]. Elle a été proposée pour surmonter les limitations de la CBT en tenant en compte de l'effet de déformation de cisaillement transversal. Puisque la FSDBT viole les conditions de contraintes de cisaillement nulles sur les surfaces supérieure et inférieure de la poutre, un facteur de correction de cisaillement est nécessaire pour justifier la divergence entre l'état de contrainte réel et l'état de contrainte supposé constant [22].

Dans le cas où nous avons un élancement faible, l'effet du cisaillement devient plus important sur la déformée. Dans ce cas, la fonction s'écrit comme suit :

$$(M) = \begin{cases} u(x, z) = u_0(x) - w_0, x(x) + z\gamma_{xz}^0(x) \\ w(x, z) = w_0(x) \end{cases} \quad (3)$$

Il existe un cisaillement uniforme et les déformations dues au cisaillement transversal ne sont pas négligées. C'est la théorie de premier ordre (FSDBT). Le champ de déplacements de Timoshenko s'écrit alors.

Avec :

γ_{xz}^0 , c'est la distorsion ou la déformation angulaire mesurée sur la ligne moyenne de la poutre.

Tel que :

$$\gamma_{xz}^0 = w_x^0(x) - \varphi^0(x) \quad (4)$$

$\varphi^0(x)$: Etant la rotation totale de la section mesurée sur la ligne moyenne de la poutre. La contrainte de cisaillement est :

$$\tau_{xz} = G_{xz}\gamma_{xz} = G_{xz}\gamma_{xz}^0 \quad (5)$$

G_{xz} : est le module de cisaillement transversal qui est supposé constant.

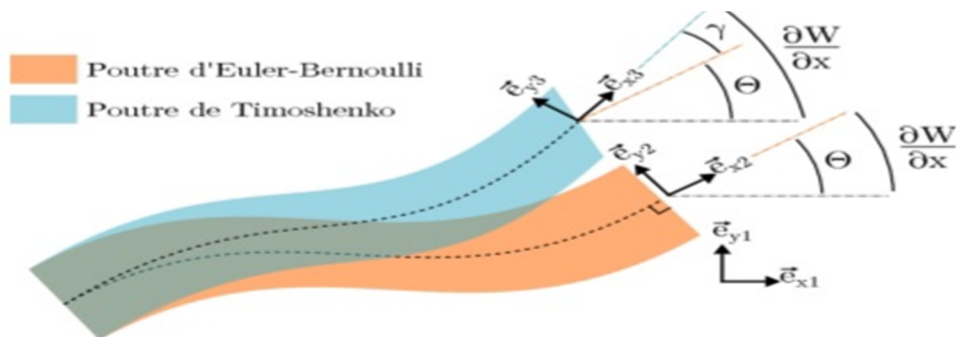


Figure (II. 4) : Cinématique de la poutre de Timoshenko et cinématique de la poutre d'Euler Bernoulli.

II.11.3 Modèle d'ordre élevé (High shear deformation beam theory HSDBT) :

Dans cette théorie la distribution des champs de déplacement est non linéaire selon L'épaisseur de la poutre. Elle est plus précise que la théorie du premier ordre puisqu'elle introduit une fonction qui tient compte du phénomène de « gauchissement ».

Ce phénomène apparaît lorsque la section transversale de la poutre perd sa planéité. La fonction représente le gauchissement et sa dérivée représente le cisaillement.

Le champ de déplacement devient :

Pour que les contraintes tangentielles soient nulles sur les bords extrêmes de la poutre, on doit avoir

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u_0(x) - z w_0 \cdot x(x) + \varphi(z) \gamma_{xx}^0(x) \\ w(x, z) = w_0 \end{cases} \quad (6)$$

$$\gamma_{xx}(x) = \frac{\delta u}{\delta x} - \frac{\delta w}{\delta x} = -w''(x) + \varphi'(z) \gamma_{xx}^n + w_0 x(x) \quad (7)$$

$$\gamma_{xx(x)} = \varphi'(z) \gamma_{xx}^0(x) \quad (8)$$

Cette condition qui nous permet d'avoir une répartition parabolique des contraintes de cisaillement sur l'épaisseur de la poutre d'une part et de choisir correctement des fonctions cubiques qui répondent à la condition

II.13 Les modèles analytiques de L'interaction sol-structure:

Lorsque nous parlons de modèles analytiques d'interaction sol-structure (ISS), nous devons distinguer deux parties, le sol et la structure. Dans diverses études sur l'ISS, la structure est toujours modélisée par un ou plusieurs faisceaux (Euler-Bernoulli, Timoshenko et HSDT), tandis que le sol est modélisé par différents modèles, dont le plus simple est le modèle de Winkler.

II.13.1 Modèle de Winkler

La représentation la plus simple du modèle de comportement du sol proposé par [Winkler 1867] consiste à discrétiser le sol support a en utilisant plusieurs des ressorts linéaires indépendants. La principale difficulté est d'évaluer de manière réaliste la rigidité des ressorts. En fait, nous trouvons de nombreuses façons dans la littérature de déterminer leurs valeurs numériques. Sous un chargement uniformément réparti, le déplacement est supposé constant sous la partie chargée et nulle hors cette zone (Figure II.5).

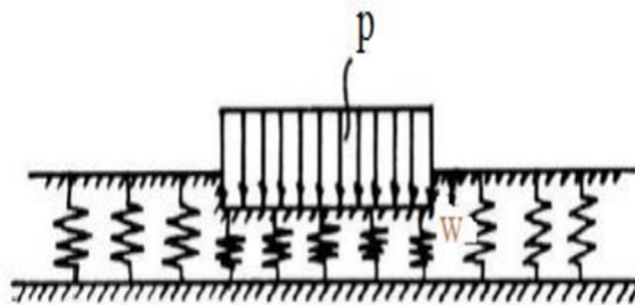


Figure (II.5) : Modèle de Winkler.

La force de réaction de la fondation R et la flèche de la surface de la fondation sont parallèles à l'axe z est lié par la relation suivante :

$$R = k w \quad (9)$$

$$f_e = K_w W \quad (9a)$$

p : la pression appliquée en un point,

w : le déplacement vertical en ce point.

K_w : le module de la fondation, Constante du ressort.

II.13.2 Modèle de continuum élastique :

La modélisation du sol comme milieu semi-infini, élastique et continu, caractérisé par deux paramètres : le module d'Young E et le coefficient de Poisson ν , permet de prendre en compte la continuité des tassements. Les premiers travaux dans ce domaine sont les travaux de [Boussinesq 1885] qui a étudié le problème d'un milieu élastique linéaire isotrope homogène semi-infini continuum élastique pour résoudre le problème d'interaction sol-fondation conduit à des problèmes mathématiques complexes. Des solutions à ces problèmes ont été proposées dans les Travaux [23].

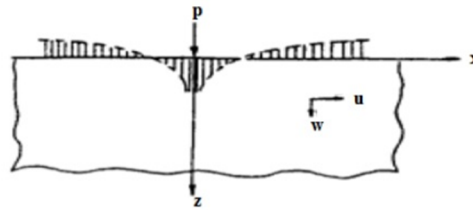


Figure (II.6) : Tassement du sol causé par la charge concentrée du modèle de continuum élastique

Le défaut inhérent du modèle de Winkler à décrire le comportement continu d'un sol réel et la complexité mathématique du modèle continu élastique ont conduit à l'introduction d'hypothèses Simplificatrices pour le développement d'autres modèles.

II.13.3 Modèle de Filonenko-Borodich

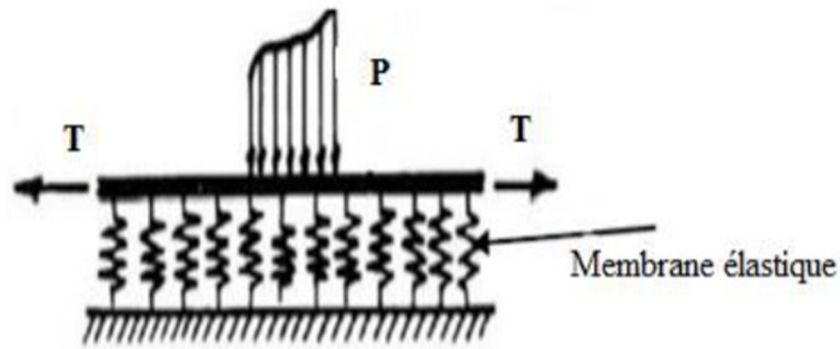
Le modèle proposé par **Filonenko-Borodich**[24] assure la Continuité entre les ressorts du modèle de Winkler en les reliant à une fine membrane élastique sous Contrainte constante T (**Figure II.7**). Le tassement W à la surface du sol sous la pression P qu'elle Reçoit est de :

$$q(x, y) = k_s w(x, y) - T \nabla^2(x, y) \quad (10)$$

$$\nabla^2 = \frac{\delta^2}{x^2} + \frac{\delta^2}{y^2} \quad (11)$$

Et k_s est le coefficient de réaction du sol.

Les deux constantes élastiques du modèle sont le coefficient de réaction k_s et la tension T



Figure(II.7) Modèle du Filonenko-Borodich[Filonenko-Borodich et al 1940].

II.13.4 Modèle Hetenyi :

Dans le modèle proposé par Hetenyi [25], l'interaction entre les ressorts Indépendants du modèle de Winkler est complétée par la poutre élastique dans le cas bidimensionnel Ou la plaque élastique dans le cas tridimensionnel (Figure II.8). Les deux constants élastiques du Modèle sont le coefficient de réaction k_s et la rigidité en flexion de la poutre D .

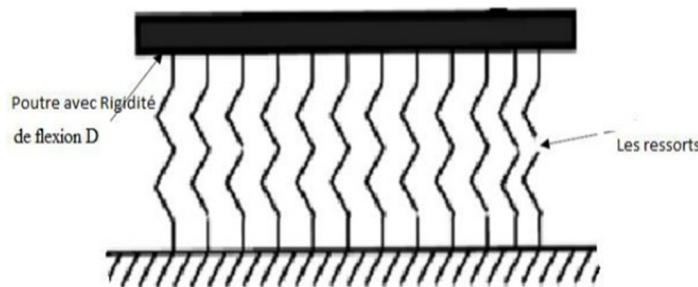


Figure (II.8) Fondation de Hetenyi [Winkler, 1867 ; Hetényi, M 1946].

L'expression reliant le tassement w à la pression q est :

$$q(x, y) = k_s w(x, y) - D \nabla^4 w(x, y) \tag{12}$$

$$D = \frac{E_p h_p^3}{12(1-\nu_p^2)} \tag{13}$$

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \tag{14}$$

En supposant que la couche de cisaillement est isotrope dans le plan (x, y) , et le module de cisaillement $G_x = G_y = G_p$, on peut obtenir :

$$q(x, y) = k_s w(x, y) - \nabla^2 w(x, y) \tag{15}$$

II.13.5 Modèle de Pasternak

Contrairement au modèle de Winkler basé sur une représentations du sol par des ressorts Identiques indépendants et linéaires, le modèle de Pasternak [Pasternak, P et al 1954] propose une Modélisation a deux paramètres. Le modèle est représenté par un système de ressort relié à une Couche d'éléments verticaux pour transmettre les forces de cisaillement proportionnelles à des éléments verticaux, ce qui va pallier à l'inconvénient du modèle Winkler ou les charges sont limitées aux zones de chargement. Pour représenter la forme parabolique des déplacements les ressorts sont reliés à leurs extrémités à une poutre ou une plaque constituée d'éléments horizontaux incompressibles, qui se déforment qu'en cisaillement transversal comme montré dans la **figure (II.9)**

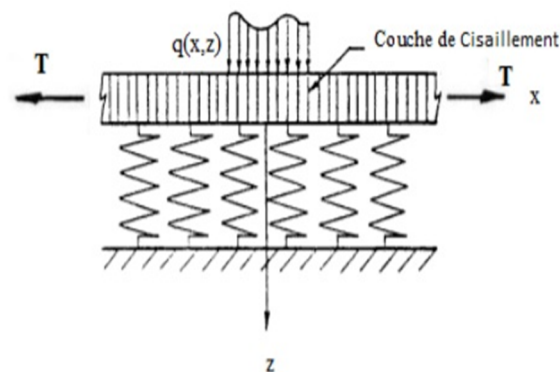


Figure (II.9) Modèle de Pasternak

[26] a expliqué la dérivation de la relation entre la charge et la flèche selon L'hypothèse de Pasternak. Supposons l'équilibre vertical des éléments de la "couche de cisaillement" délimité par les surfaces $(x, x + dx)$, $(y, y + dy)$, comme le montre la figure (II.9). En supposant que ce matériau de fondation est homogène et isotrope dans les plans x et y ,

$G_x = G_y = G$.

$$\begin{cases} \tau_{xz} = G_x \gamma_{xz} = G \frac{\delta W}{\delta x} \\ \tau_{yz} = G_y \gamma_{yz} = G \frac{\delta W}{\delta y} \end{cases} \quad (15)$$

L'unité de force de cisaillement par unité de longueur est donnée par.

$$\begin{cases} N_X = \int_0^1 \gamma_{XZ} dz = G \frac{\delta W}{\delta X} \\ N_Y = \int_0^1 \gamma_{YZ} dz = G \frac{\delta W}{\delta Y} \end{cases} \quad (16)$$

L'équation d'équilibre est donnée par la formule suivante :

$$\frac{\delta N_X}{\delta x} + \frac{\delta N_Y}{\delta y} + p - q_x = \quad (17)$$

En substituant l'équation (17) dans l'équation (18) et en considérant que $q_s = kw$, on

$$f_e = kw - G\nabla^2 w \quad (18)$$

$$f_e = k_w w - k_p \nabla^2 w \quad (19b)$$

K_w : Constante du ressort couche de ressort.

K_p : Constante de la couche de cisaillement

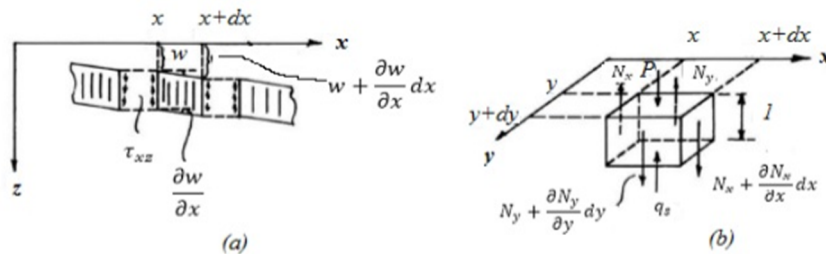


Figure (II.10) :) : Équilibre de la couche de cisaillement.

II.13.6 Modèle de Kerr:

Le modèle de comportement du sol proposé par Kerr [Kerr, A.D.1964] est un modèle élastique à trois paramètres représenté par une couche de cisaillement introduite dans la fondation Winkler et il a supposé que les couches supérieures et inférieures modélisées par des ressorts distribués (Figure II.11), sont supposées être différentes selon cette formulation (Kerr,1964,1965,1967). Pour la dérivation de la relation entre la déflexion et la réaction de la fondation, il a considéré que la déflexion de la structure w est composée de deux paramètres.

$$w(x, y) = w_1(x, y) + w_2(x, y) \quad (20)$$

w_1 est la déflexion provoquée par la contraction ou l'étirement de la couche supérieure du ressort.

w_2 Est la déflexion due au reste de la fondation.

$$p(x, y) = k_u + w_1 \tag{21}$$

$$p(x, y) = k_1 w_1 - k_p \nabla^2 w_2 \tag{22}$$

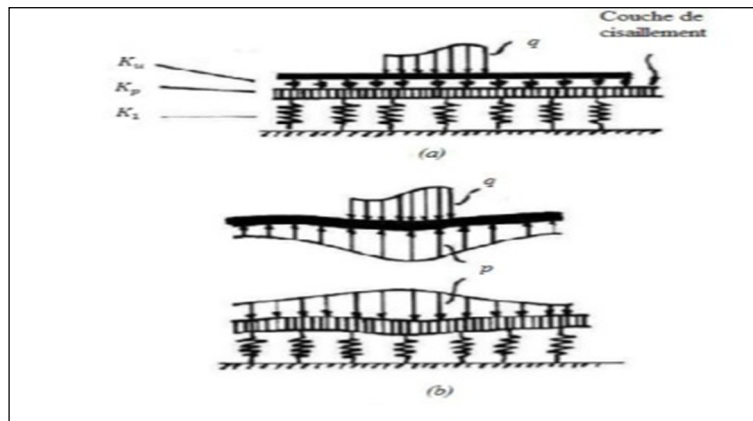


Figure (II.11) Modèle de Kerr [Kerr, A.D 1964]

Où K_u : Constante de ressort de la couche de ressort supérieure.

K_1 : Constante du ressort couche de ressort inférieure.

K_p : Constante de la couche de cisaillement.

Les paramètres K_u , K_1 et K_p sont déterminés par les caractéristiques de sol de fondation.

En remplaçant le rapport $\left(\frac{k_1}{k_u} - \frac{k_p}{k_u} \nabla^2\right)$ dans l'équation(21) puis on additionnant le résultat avec l'équation (22) et en considérant l'équation (22) ; on trouve la relation entre réaction et déflexion de la fondation comme suit :

$$\left(1 + \frac{k_1}{k_u} - \frac{k_p}{k_u} \nabla^2\right) p - \frac{k_p}{k_u} \nabla^2 p = k_1 w - k_p \nabla^2 w \tag{23}$$

Cette équation différentielle a été résolue par **Kerr (1965, 1967) et Kneifati.[27] .**

Dans l'étude de la structure **FGM** une formule simple est utilisée pour la force de réaction de la Fondation élastique, et les trois paramètres sont les suivants :

$$f_e = \left(\frac{k_1 k_u}{k_1 + k_u}\right) w - \left(\frac{k_1 k_u}{k_1 + k_u}\right) \nabla^2 w \tag{24}$$

II.13 Conclusion:

Dans ce chapitre, nous avons examiné les différentes théories des poutres, notamment la théorie de Bernoulli (**CBT**), la théorie de Timoshenko (**FSDBT**) et la théorie d'ordre élevé (**HBT**). Nous avons également abordé les théories d'interaction sol-structure analytiques telles que le modèle de Winkler, le continuum élastique, Filonenko-Borodich, Hetenyi, Pasternak et Kerr.

De plus, nous avons présenté différents modèles de poutres avec une approche monocouche. Le modèle monocouche équivalent est particulièrement adaptée aux matériaux **FGM** car il évite les changements brusques dans les caractéristiques mécaniques qui peuvent poser problème dans les composites conventionnels où le délaminage peut se produire.

En résumé, notre travail dans ce chapitre a consisté à explorer les diverses théories des poutres existantes ainsi que les modèles adaptés à l'analyse des matériaux FGM. Ces connaissances permettront une meilleure compréhension et optimisation des structures dans le cadre de problèmes de conception ou de recherche.

Chapitre III

*Analyse du comportement statique et dynamique
des poutres poreuses*

III.1. Introduction

Dans ce chapitre nous allons faire une modélisation analytique du comportement statique et dynamique des poutres poreuses en matériau FGM reposant sur fondation élastique. En utilisant les modèles d'ordre élevé et d'autres modèles trouvés dans littératures.

À l'aide de principe d'énergie d'Hamilton et la solution de Navier on a pu arriver aux équations de mouvement de la poutre poreuses en FGM. Quatre forme de distribution de la porosité ont été utilisés dans ce travail de mémoire à savoir la distribution H, X, O et V.

III.2 Formulation théorique

Les propriétés du FGM varient de façon continue en fonction de la fraction volumique des matériaux suivant la direction de l'épaisseur h d'une poutre de longueur L .

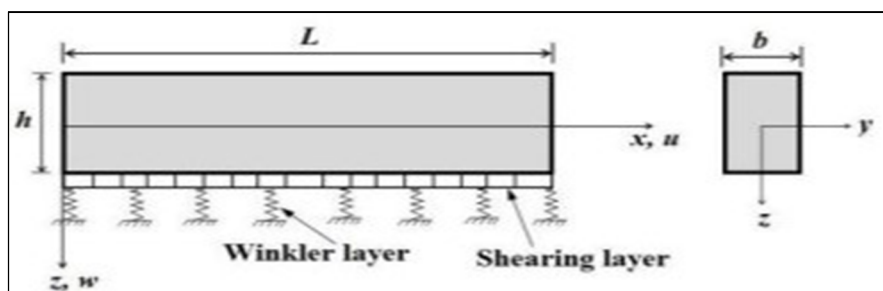


Figure (III.1) :Poutre FGM reposant sur une fondation élastique à deux paramètres.

III.3. Hypothèses de base

Les hypothèses de la présente théorie sont les suivantes :

- Les déplacements sont faibles par rapport à la hauteur de la poutre et, par conséquent, les déformations impliquées sont infinitésimales.
- Le déplacement transversal w comprend deux composantes de flexion w_b et de cisaillement w_s .

Ces composantes sont des fonctions de coordonnées x, t uniquement :

$$w(x, z, t) = w_b(x, t) + w_s(x, t) \quad (1)$$

- La contrainte normale transversale σ_z est négligeable par rapport aux contraintes dans le plan σ_x .
- Le déplacement axial u dans la direction x comprend les composantes d'extension, de flexion et de cisaillement.

$$u = u_0 + u_b + u_s \quad (2)$$

La composante de flexion u_b est supposée similaire aux déplacements donnés par la théorie classique des poutres.

$$u_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial x} \quad (3)$$

La composante de cisaillement us donne lieu, conjointement avec w_s , à la variation hyperbolique de la contrainte de cisaillement γ_{xz} et donc à la contrainte de cisaillement τ_{xz} à travers l'épaisseur de la poutre de telle sorte que la contrainte de cisaillement τ_{xz} est nulle sur les faces supérieure et inférieure de la poutre faisceau. Par conséquent, l'expression pour nous peut être donnée comme

$$u_s = -f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (4)$$

Ou

$$f(z) = z \left[1 + \frac{3\pi}{2} \sec h \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right] - \frac{3\pi}{2} h \tanh \left(\frac{z}{h} \right) \quad (5)$$

III.4 Cinématique et équations constitutives

Sur la base des hypothèses faites dans la section précédente, le champ de déplacement peut être obtenu à l'aide des équations. (1) - (5) comme :

$$U(x, z, t) = u_0(x, t) - z \left(\frac{\partial w_b(x, t)}{\partial x} \right) - f(z) \left(\frac{\partial w_s(x, t)}{\partial x} \right) \quad (6a)$$

$$w(x, z, t) = w_b(x, t) + w_s(x, t) \quad (6b)$$

Les déformations associées aux déplacements dans l'Eq. (6) sont :

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + z k_x^b + f(z) k_x^s \quad (7a)$$

$$\gamma_{xz} = g(z) \gamma_{xz}^s \quad (7b)$$

Ou

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}, k_x^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}, k_x^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}, \gamma_{xz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (8a)$$

$$g(z) = 1 - f'(z) \text{ et } f'(z) = \frac{df(z)}{dz} \quad (8b)$$

En supposant que le matériau de la poutre FGM obéit Loi de Hooke, les contraintes dans la poutre deviennent :

$$\sigma_x = Q_{11}(z)\varepsilon_x \text{ et } \tau_{xz} = Q_{55}(z)\gamma_{xz} \quad (9)$$

OU

$$Q_{11}(z) = E(z) \text{ et } Q_{55}(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad (10)$$

III.5. Équations constitutives

Dans ce travail, une poutre poreuse rectangulaire d'épaisseur uniforme h , de longueur L et de section rectangulaire $b \times h$, constituée de FGM et supportée par une fondation élastique est considérée. Comme illustré dans la figure III.1.

Les propriétés mécaniques des FGM telles que Young le module E et la densité de masse ρ peuvent être exprimés comme :

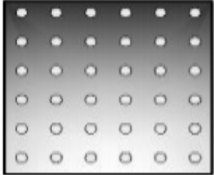
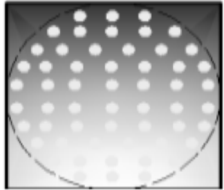

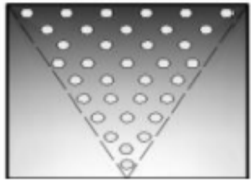
$$\begin{cases} E(z) = E_m + (E_c - E_m) \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{z}{h} \right) \right]^p \\ \rho(z) = \rho_m + (\rho_c - \rho_m) \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{z}{h} \right) \right]^p \end{cases} \quad (11)$$

Ou les indices m et c représentent respectivement les constituants métalliques et céramiques ; et p est l'exposant de la fraction volumique. La valeur de p égale à zéro représente un faisceau entièrement céramique, tandis que p infini indiquent un faisceau entièrement métallique. La variation du coefficient de Poisson ν est généralement faible et elle est supposée être une constante par commodité.

Le module d'Young (E) et la densité de masse du matériau FGM imparfait peut être écrit en fonction de coordonnée d'épaisseur z comme (Hadji 2015a ; Hadji 2015b) :

$$\begin{aligned} E(z) &= (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + E_m - \frac{\alpha}{2} (E_c + E_m) \\ \rho(z) &= (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + \rho_m - \frac{\alpha}{2} (\rho_c + \rho_m) \end{aligned} \quad (12)$$

Les propriétés matérielles d'une poutre FGM parfaite peuvent être obtenu lorsque la fraction volumique de porosité α est fixée à zéro. En raison des faibles variations du coefficient de Poisson ν , il est supposée constante. Plusieurs formes de porosité ont été étudiés dans le présent travail, tels que « H », « O », « X » et « V » (Voir Tableau III.1).

Forme de distribution de la porosité	Expression du module de young	Schéma
Forme H	$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + E_m - \frac{\alpha}{2} (E_c + E_m)$	
Forme O	$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + E_m - \frac{\alpha}{2} (E_c + E_m) \left(1 - 2 \frac{ z }{h} \right)$	
Forme X	$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + E_m - \frac{\alpha}{2} (E_c + E_m) \left(2 \frac{z}{h} \right)$	
Forme V	$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + E_m - \frac{\alpha}{2} (E_c + E_m) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)$	

III.6. Équations de mouvement

Afin d'obtenir les équations du mouvement, la méthode énergétique est adoptée et l'énergie totale de la structure est requise. Cela inclura l'énergie de déformation du faisceau UP, UB, l'énergie de déformation de la fondation UF , l'énergie potentielle de la charge V et l'énergie cinétique du système de masse T .

L'énergie de déformation de la poutre peut être exprimée comme :

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{zx} \delta \gamma_{xz}) dz dx \\ &= \int_0^L (N_x \delta \varepsilon_x^0 - M_x^b \delta k_x^b - M_x^s \delta k_x^s + Q_{xz} \delta \gamma_{xz}^s) dx \end{aligned} \quad (13)$$

Où N_x , M_x^b , M_x^s et défini Q_{xz} sont les résultantes de contraintes comme :

$$(N_x, M_x^b, M_x^s) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, z, f(z)) \sigma_x dz \quad (14a)$$

$$Q_{xz} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} g(z) dz \quad (14b)$$

L'énergie de déformation de la fondation peut être exprimée comme :

$$\delta U_{ef} = \int_0^L \left[\begin{array}{c} K_w (w_b + w_s) \delta (w_b + w_s) \\ -k_p \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x^2} \delta (w_b + w_s) \end{array} \right] dx \quad (15)$$

Où K_w et K_p sont respectivement les coefficients de rigidité transversale et de cisaillement de la fondation.

La variation du travail effectué par la charge transversale externe q peut être exprimée comme :

$$\delta V = - \int_0^L (q \delta w) dx \quad (16)$$

La variation de l'énergie cinétique peut être exprimée comme :

$$\begin{aligned} \delta T &= \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) [\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{w} \delta \dot{w}] dz_{ns} dx \\ &= \int_0^L \left\{ I_0 [\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + (\dot{w}_b + \dot{w}_s) (\delta \dot{w}_b + \delta \dot{w}_s)] - I_1 \left[\dot{u}_0 \frac{d\dot{w}_b}{dx} \delta \dot{u}_0 \right] + I_2 \left[\frac{d\dot{w}_b}{dx} \frac{d\delta \dot{w}_b}{dx} \right] - \right. \\ &\quad \left. J_1 \left[\dot{u}_0 \frac{d\delta \dot{w}_s}{dx} + \frac{d\dot{w}_s}{dx} \delta \dot{u}_0 \right] + k_2 \left[\frac{d\dot{w}_s}{dx} \frac{d\delta \dot{w}_s}{dx} \right] + J_2 \left[\frac{d\dot{w}_b}{dx} \frac{d\delta \dot{w}_s}{dx} + \frac{d\dot{w}_s}{dx} \frac{d\delta \dot{w}_b}{dx} \right] \right\} dx \quad (17) \end{aligned}$$

Où la convention point-exposant indique la différenciation par rapport à la variable temporelle variable t ; $\rho(z)$ est la masse volumique ; et $(I_0, I_1, J_1, I_2, J_2, K_2)$ sont les inerties de m Où :

$$I_0 = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) dz \quad (18a)$$

$$I_1 = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) z dz \quad (18b)$$

$$J_1 = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) f(z) dz \quad (18c)$$

$$I_2 = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) z^2 dz \quad (18d)$$

$$J_2 = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) f(z) z dz \quad (18e)$$

$$K_2 = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) f(z)^2 dz \quad (18f)$$

Le principe de Hamilton

Est utilisé ici pour dériver les équations du mouvement. Le principe peut être énoncé sous une forme analytique comme :

$$\int_{t_2}^{t_1} (\delta U + \delta U_{ef} + \delta V - \delta T) dt = 0 \quad (19)$$

Remplacer les expressions par $\delta U, \delta U_{ef}, \delta V$ et δT d'après les éqs. (11), (15), (16) et (18) dans l'équation. (18) et en intégrant les gradients de déplacement par parties et en mettant $\delta U_0, \delta w_b$ et δw_s à zéro séparément, les équations de mouvement suivantes sont obtenues :

$$\delta u_0: \frac{dN_x}{dx} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{d\ddot{w}_b}{dx} + J_1 \frac{d\ddot{w}_s}{dx} \quad (20a)$$

$$\begin{aligned} \delta w_b: \frac{d^2 M_b}{dx^2} + q + K_P \left(\frac{d^2(w_b + w_s)}{dx^2} \right) - k_w(w_b + w_s) \\ = I_0(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_1 \frac{d\ddot{u}_0}{dx} - I_2 \frac{d^2 \ddot{w}_b}{dx^2} - J_2 \frac{d^2 \ddot{w}_s}{dx^2} \end{aligned} \quad (20b)$$

$$\begin{aligned} \delta w_s: \frac{d^2 M_s}{dx^2} + \frac{dQ_{xz}}{dx} + q + K_P \left(\frac{d^2(w_b + w_s)}{dx^2} \right) - k_w(w_b + w_s) \\ = I_0(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_1 \frac{d\ddot{u}_0}{dx} - I_2 \frac{d^2 \ddot{w}_b}{dx^2} - J_2 \frac{d^2 \ddot{w}_s}{dx^2} \end{aligned} \quad (20c)$$

Présentation de l'éq. (13) en éq. (19), les équations du mouvement peuvent être exprimées en termes de déplacements (u_0, w_b, w_s) (u_0, w_b, w_s) et les équations appropriées prennent la forme:

$$\begin{aligned} A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - B_{11} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} - B_{11}^5 \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} \\ = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{d\ddot{w}_b}{dx} + J_1 \frac{d\ddot{w}_s}{dx} \end{aligned} \quad (21a)$$

$$\begin{aligned} B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - D_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - D_{11}^5 \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + q + K_P \left(\frac{d^2(w_b + w_s)}{dx^2} \right) - k_w(w_b + w_s) \\ = I_0(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_1 \frac{d\ddot{u}_0}{dx} - I_2 \frac{d^2 \ddot{w}_b}{dx^2} - J_2 \frac{d^2 \ddot{w}_s}{dx^2} \end{aligned} \quad (21b)$$

$$B_{11}^5 \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - D_{11}^5 \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - H_{11}^5 \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + A_{11}^5 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + K_P \left(\frac{d^2(w_b + w_s)}{dx^2} \right) - k_w(w_b + w_s) \quad (21c)$$

A_{11}, D_{11} etc., sont la rigidité de la poutre, définie par:

$$\begin{aligned} & (A_{ij}, A_{ij}^5, B_{ij}, D_{ij}B_{ij}^5, D_{ij}^5H_{ij}^5) \\ & = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij}(1, g^2(z), z, z^2, f(z), zf(z), f^2(z)) dz \end{aligned} \quad (22)$$

III.7 Solution analytique

Des solutions analytiques de type Navier sont obtenues pour l'analyse en flexion et en vibration libre de poutres fonctionnellement graduées reposant sur une fondation élastique à deux paramètres.

Selon la technique de résolution de type Navier, les variables de déplacement inconnues sont développées dans une série de Fourier comme indiqué ci-dessous

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ w_b \\ w_s \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_m \cos(\lambda x) e^{-I\omega t} \\ W_{bm} \sin(\lambda x) e^{-I\omega t} \\ W_{sm} \sin(\lambda x) e^{-I\omega t} \end{Bmatrix} \quad (23)$$

Où U_m , W_{bm} et W_{sm} sont des paramètres arbitraires à déterminer, ω est la fréquence propre associée au même mode propre, et $a = m\pi/L$.

La charge transversale q est également étendue en série de Fourier

$$Q(x) = \sum_{m=1,2,3}^{\infty} Q_m \sin(ax) dx \quad (24)$$

Où Q_m est l'amplitude de charge calculée à partir de

$$Q_m = \frac{2}{L} \int_0^L q(x) \sin(ax) dx \quad (25)$$

Les coefficients Q_m sont donnés ci-dessous pour quelques charges typiques. Dans le cas d'une charge distribuée sinusoïdalement, on a

$$m = 1 \text{ et } Q_1 = q_0 \quad (26a)$$

Et pour le cas d'une charge uniformément répartie, nous avons

$$Q_m = \frac{4q_0}{m\pi}, \quad (m = 1, 3, 5 \dots) \quad (26b)$$

Substitution d'équation(23) et (24) dans l'équation. (21), les solutions analytiques peuvent être obtenues par les équations aux valeurs propres ci-dessous, pour toute valeur fixe de m .

Pour problème de vibration libre

$$([K] - \omega^2[M])\{\Delta\} = \{0\} \quad (27a)$$

Pour les problèmes statiques, on obtient l'équation d'opérateur suivante

$$([K] - \omega^2[M])\{\Delta\} = \{0\} \quad (27b)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (28a)$$

$$[M] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{12} & m_{22} & m_{23} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{bmatrix} \quad (28b)$$

Et

$$\{\Delta\} = \begin{Bmatrix} u_m \\ w_{bm} \\ w_{xm} \end{Bmatrix}, \{F\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ Q_m \\ Q_m \end{Bmatrix} \quad (28c)$$

Avec

$$\begin{aligned} a_{11} &= A_{11}\alpha^2, a_{12} = -B_{11}\alpha^3, \\ a_{13} &= -B_{11}^S\alpha^3, a_{22} = D_{11}\alpha^4 + K_W + K_P\alpha^2, \\ a_{23} &= D_{11}^S\alpha^4 + K_W + K_P\alpha^2, \\ a_{23} &= H_{11}^S\alpha^4 + A_{55}^S\alpha^2 + k_w + k_p\alpha^2 \end{aligned} \quad (29a)$$

$$\begin{aligned} m_{11} &= I_0, m_{12} = -I_1\alpha, \\ m_{13} &= -J_1\alpha, m_{22} = I_0 + I_2\alpha^2 \end{aligned} \quad (29b)$$

III.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une théorie de cisaillement hyperbolique pour l'analyse de la flexion et la vibration libre de poutres poreuses fonctionnellement graduées sous chargement sinusoïdales reposant sur une fondation élastique à deux paramètres. Cette théorie prend en compte les effets de cisaillement transversal et la distribution parabolique des contraintes de cisaillement suivant l'épaisseur de la poutre et satisfait les conditions de nullité de la contrainte de cisaillement sur les faces supérieure et inférieure de la poutre FGM sans l'aide des facteurs de correction de cisaillement. Quatre forme de porosité ont été étudié dans ce travail à savoir : la forme H ; X ; O et V. Le module de Young est supposé varie dans la direction de l'épaisseur de la poutre.



Chapitre IV

Résultats et discussions

IV.1. Introduction

Ce chapitre vise à mettre en évidence la théorie de déformation de cisaillement raffinée des poutres développée dans le chapitre précédent pour la flexion et la vibration des poutres épaisses en FGM avec porosité reposant sur une fondation Winkler-Pasternak. La théorie proposée contient trois inconnues et trois équations gouvernantes, par ailleurs elle vérifie les conditions limites sans contraintes sur les surfaces supérieure et inférieure de la poutre poreuse en FGM, sans tenir compte du facteur de correction de cisaillement. Dans ce contexte, l'étude de la réponse mécanique sera réalisée pour l'analyse de la flexion et la vibration libre des poutres en matériaux fonctionnellement gradués FGM reposant sur une fondation Winkler-Pasternak. Les effets de divers paramètres, tels que le rapport d'épaisseur, l'indice de gradient, la fraction volumique de la porosité et les paramètres de la fondation sur la flexion et la vibration libre des poutres sont tous discutés. Les solutions obtenues sont vérifiées en les comparant avec ceux rapportés dans la littérature.

IV.2. Caractéristiques des paramètres étudiés

Afin de mettre en évidence l'exactitude de la théorie raffinée exposée dans le chapitre III, pour l'analyse du comportement statique et dynamique des poutres poreuses en matériaux fonctionnellement gradués simplement appuyées reposant sur une fondation de type Winkler-Pasternak une poutre rectangulaire en matériaux fonctionnellement gradués sera traitée.

IV.3. Caractéristiques de la poutre considérée

Considérons une poutre rectangulaire en matériau FGM qui repose sur une fondation élastique, de longueur L et d'épaisseur uniforme h et de section transversale rectangulaire b comme illustré dans la Figure IV.1.

La poutre est réalisée en matériau isotrope avec les propriétés matérielles qui varient sans interruption dans la direction de l'épaisseur.

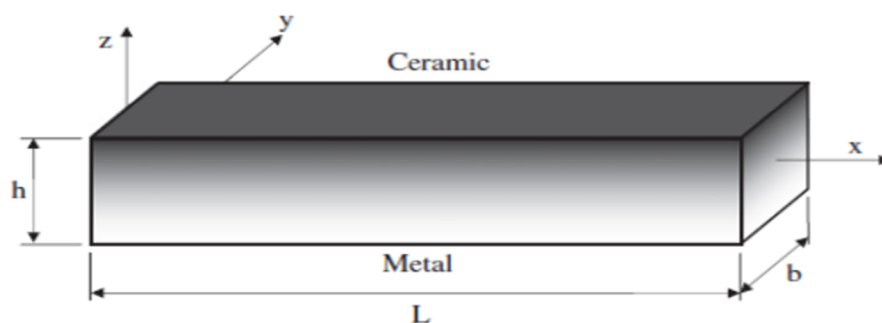


Figure IV.1 Géométrie et coordonnées d'une poutre FGM.

Les propriétés matérielles de la poutre en FGM sont supposées variables suivant l'épaisseur de la poutre selon une simple loi de puissance P-FGM. La partie inférieure de la

poutre FGM est riche en Métal (Aluminium, Al), tandis que la surface supérieur est riche en céramique (Alumine, Al₂O₃). Le tableau 1 montre les propriétés matérielles utilisées dans la présente étude.

Tableau IV.1. Propriétés matérielles utilisées dans la présente étude

	Matériaux	Définition des propriétés	Symbole
1	Céramique (Alumine, Al ₂ O ₃)	Le module d'élasticité	$E_c = 380 \text{ GPa}$
		Coefficient de poisson	$\nu = 0.3$
		La masse volumique	$\rho_c = 3960 \text{ kg/m}^3$
2	Métal (Aluminium, Al)	Le module d'élasticité	$E_m = 70 \text{ GPa}$
		Coefficient de poisson	$\nu = 0.3$
		La masse volumique	$\rho_m = 2702 \text{ kg/m}^3$

IV.4. Variations des paramètres étudiées

Les divers paramètres considérés dans cette étude sont :

Le rapport d'épaisseur L/h ,

L'indice de la fraction volumique p ,

Les paramètres de la fondation (ζ_w, ζ_p) ,

Le mode de vibration m .

Pour plus de commodité, les paramètres adimensionnels utilisés dans cette étude sont illustrés dans le tableau IV.2.

Tableau IV.2. Paramètres adimensionnels utilisés et leurs expressions correspondantes

Paramètre adimensionnels	Notation	L'expression
Pour l'analyse de flexion		
La flèche adimensionnelle	\bar{w}	$\bar{w} = 100 \frac{E_m h^3}{q_0 L^4} w \left(\frac{L}{2}, 0 \right);$
Le déplacement horizontal adimensionnel	\bar{u}	$\bar{u} = 100 \frac{E_m h^3}{q_0 L^4} u \left(0, -\frac{h}{2} \right);$
La contrainte normale adimensionnelle	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\sigma}_x = \frac{h}{q_0 L} \sigma_x \left(\frac{L}{2}, \frac{h}{2} \right);$

La contrainte tangentielle adimensionnelle	$\bar{\tau}_{xz}$	$\bar{\tau}_{xz} = \frac{h}{q_0 L} \tau_{xz}(0,0);$
Les paramètres de la fondation élastiques	ξ_w, ξ_p	$\xi_w = \frac{K_w l^2}{E_m h}, \xi_p = \frac{K_p}{E_m h}$
Pour l'analyse dynamique		
La fréquence de vibration adimensionnelle	$\bar{\omega}$	$\bar{\omega} = \frac{\omega L^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}};$

IV.5. Analyse des résultats et discussions de l'effet des paramètres

IV.5.1. Analyse de flexion

Dans cet exemple, la réponse en flexion de la poutre poreuse en FGM sous une charge sinusoïdale est étudiée.

Le tableau IV.3 présente les résultats des déplacements et les contraintes non dimensionnelles des poutres poreuses en FGM pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance p et avec les paramètres de fondation. Deux valeurs du rapport longueur/épaisseur L/h sont considérées, 5 et 20. Les résultats obtenus sont comparés aux résultats des théories des poutres existantes dans la littérature (c'est-à-dire la théorie hyperbolique inverse (IHBT) développé par Sayyad et Ghugal, la théorie de cisaillement parabolique (PSDBT) de Reddy et la théorie de cisaillement de premier ordre (FSDBT) de Timochenko.

D'après ces résultats on remarque que les déplacements et les contraintes obtenus par la présente théorie hyperbolique sont en excellent accord avec ceux obtenus à partir de Sayyad et Ghugal et de la théorie parabolique PSDBT de Reddy. La théorie FSDBT sous-estime les déplacements et les contraintes. De plus, on remarque à partir de ce tableau que les déplacements augmentent avec l'augmentation de l'indice de loi de puissance p alors que les contraintes sont identiques lorsque la poutre est entièrement en céramique ou entièrement en métal. Cela est dû au fait qu'une augmentation de l'indice de loi de puissance p rend la poutre FGM plus flexible, c'est-à-dire réduit leur rigidité.

On remarque aussi du tableau IV.3 que les déplacements et les contraintes de la poutre FGM diminuent lorsqu'elle repose sur la fondation élastique à deux paramètres, à savoir la couche de Winkler et la couche de cisaillement. Avec l'introduction de la porosité on constate que le déplacement transversal augmente avec l'augmentation de l'indice de la fraction de volume de la porosité. Cela est justifier par la présence des pores qui réduit la rigidité de la poutre qui entraîne à une augmentation de la flèche de la structure.

Tableau IV.3: Effets de l'indice de la fraction de volume α sur les déplacements et contraintes adimensionnelles d'une poutre FGM soumise à une charge to sinusoïdal reposé sur une fondation élastique

p	ξ_{sw}	ξ_p	Theories	α	L/ h=5			L/ h=20		
					\bar{W}	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\tau}_{xz}$	\bar{W}	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\tau}_{xz}$
0	0	0	Reddy 1984	$\alpha = 0$	2.5020	3.0916	0.4769	2.2838	12.171	0.4774
			Timoshenko (1921)	$\alpha = 0$	2.0523	3.0396	0.2653	2.2839	12.158	0.2653
			Sayyad et al. (2018)	$\alpha = 0$	2.5019	3.0922	0.4800	2.2839	12.171	0.4806
			Présente	$\alpha = 0$	2.5018	3.0948	0.4641	2.2838	12.1723	0.4645
				$\alpha = 0.1$	2.6593	3.0948	0.4641	2.4275	12.1723	0.4645
				$\alpha = 0.2$	2.6595	3.0948	0.4641	2.5906	12.1723	0.4645
	0.1	0	Reddy 1984	$\alpha = 0$	2.3547	2.9096	0.4488	1.1935	6.3606	0.2495
			Timoshenko (1921)	$\alpha = 0$	2.3205	2.8607	0.2499	1.1929	6.3539	0.1387
			Sayyad et al. (2018)	$\alpha = 0$	2.3547	2.9102	0.4517	1.1935	6.3608	0.2511
			Présente	$\alpha = 0$	2.3545	2.9127	0.4367	1.1935	6.3611	0.2427
				$\alpha = 0.1$	2.4935	2.9019	0.4351	1.2316	6.1756	0.2356
				$\alpha = 0.2$	2.6499	2.8898	0.4333	1.2722	5.9778	0.2281
	0.1	0.1	Reddy 1984	$\alpha = 0$	1.4894	1.8403	0.2839	0.2090	1.1136	0.0437
			Timoshenko (1921)	$\alpha = 0$	1.4756	1.8093	0.1589	0.2089	1.1124	0.0243
			Sayyad et al. (2018)	$\alpha = 0$	1.4894	1.8407	0.2857	0.2090	1.1136	0.0440
			Présente	$\alpha = 0$	1.4893	1.8424	0.2762	0.2089	1.1136	0.0425
				$\alpha = 0.1$	1.5437	1.7966	0.2694	0.2100	1.0534	0.0402
				$\alpha = 0.2$	1.6022	1.7474	0.2620	0.2112	0.9925	0.0378
0	0	Reddy 1984	$\alpha = 0$	4.9458	4.7857	0.5243	4.5773	18.813	0.5249	
		Timoshenko (1921)	$\alpha = 0$	4.8807	4.6979	0.5376	4.5734	18.792	0.5376	
		Sayyad et al. (2018)	$\alpha = 0$	4.9441	4.7867	0.5248	4.5774	18.814	0.5245	
		Présente	$\alpha = 0$	4.9454	4.7912	0.4641	4.5773	18.8151	0.4645	
			$\alpha = 0.1$	5.7282	5.0646	0.4641	5.3192	19.8930	0.4645	
			$\alpha = 0.2$	6.8545	5.4603	0.4641	6.3944	21.4558	0.4645	
	0.1	0	Reddy 1984	$\alpha = 0$	4.4015	4.2591	0.4666	1.6169	6.6456	0.1854
			Timoshenko (1921)	$\alpha = 0$	4.3499	4.1871	0.4791	1.6164	6.6418	0.1900

1			Sayyad et al. (2018)	$\alpha = 0$	4.4015	4.2600	0.4657	1.6169	6.6458	0.1851
			Présente	$\alpha = 0$	4.4013	4.2640	0.4130	1.6169	6.6462	0.1640
				$\alpha = 0.1$	5.0106	4.4302	0.4059	1.7006	6.3602	0.1485
				$\alpha = 0.2$	5.8517	4.6615	0.3962	1.7973	6.0307	0.1305
	0.1	0.1	Reddy 1984	$\alpha = 0$	2.1100	2.0417	0.2237	0.2190	0.9001	0.0251
			Timoshenko (1921)	$\alpha = 0$	2.0981	2.0195	0.2311	0.2190	0.8998	0.0257
			Sayyad et al. (2018)	$\alpha = 0$	2.1100	2.0422	0.2232	0.2190	0.9001	0.0251
			Présente	$\alpha = 0$	2.1099	2.0442	0.1980	0.2189	0.9001	0.0222
				$\alpha = 0.1$	2.2405	1.9811	0.1815	0.2204	0.8245	0.0192
				$\alpha = 0.2$	2.3944	1.9075	0.1621	0.2220	0.7449	0.0161
5	0	0	Reddy 1984	$\alpha = 0$	7.7723	6.6057	0.5314	6.9540	25.794	0.5323
			Timoshenko (1921)	$\alpha = 0$	7.5056	6.4382	0.9942	6.9373	25.752	0.9942
			Sayyad et al. (2018)	$\alpha = 0$	7.7739	6.6079	0.5274	6.9541	25.795	0.5313
			Présente	$\alpha = 0$	7.7643	6.5960	0.3712	6.9534	25.792	0.3717
				$\alpha = 0.1$	10.202	7.3784	0.3446	9.1594	28.813	0.3451
				$\alpha = 0.2$	15.858	8.9974	0.2954	14.403	35.104	0.2959
	0.1	0	Reddy 1984	$\alpha = 0$	6.5078	5.5310	0.4450	1.8389	6.8211	0.1408
			Timoshenko (1921)	$\alpha = 0$	6.3198	5.4210	0.8371	1.8377	6.8221	0.2634
			Sayyad et al. (2018)	$\alpha = 0$	6.5089	5.5327	0.4416	1.8389	6.8212	0.1397
			Présente	$\alpha = 0$	6.5021	5.5237	0.3109	1.8388	6.8208	0.0983
				$\alpha = 0.1$	8.1288	5.8789	0.2746	1.9639	6.1781	0.0740
				$\alpha = 0.2$	11.355	6.4430	0.2115	2.1302	5.1919	0.0437
	0.1	0.1	Reddy 1984	$\alpha = 0$	2.4975	2.1226	0.1708	0.2226	0.8258	0.0170
			Timoshenko (1921)	$\alpha = 0$	2.4693	2.1181	0.3271	0.2226	0.8264	0.0319
			Sayyad et al. (2018)	$\alpha = 0$	2.4976	2.1231	0.1694	0.2226	0.8258	0.0170
			Présente	$\alpha = 0$	2.4982	2.1250	0.1193	0.2226	0.8258	0.0119
				$\alpha = 0.1$	2.7063	1.9591	0.0913	0.2243	0.7058	0.0084
				$\alpha = 0.2$	2.9887	1.6966	0.0556	0.2263	0.5517	0.0046

La figure IV.2 montre la variation de la contrainte normale de flexion à travers l'épaisseur de la poutre poreuse avec une fraction de la porosité $\alpha = 0.2$. Quatre formes de porosité sont considérées dans ce graphe à savoir la distribution H, X, O et V. Pour les quatre formes la contrainte axiale est de traction sur la surface supérieure et de compression sur la

surface inférieure. La contrainte de traction est maximale dans le cas de distribution en H et elle est faible pour la distribution en X. Les distributions O et V sont intermédiaires.

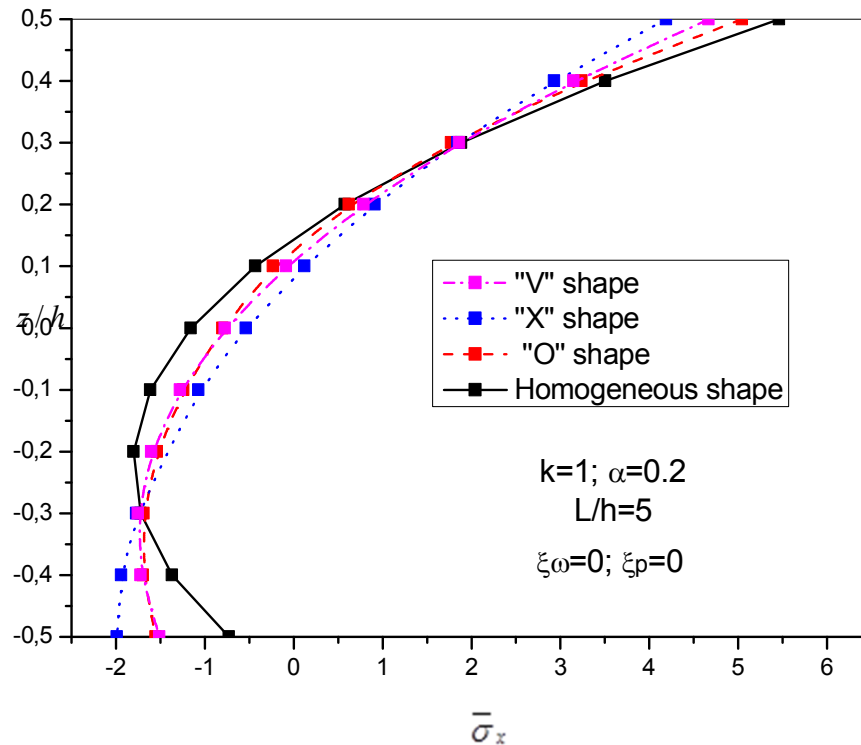


Figure IV.2 Distribution de la contrainte axiale adimensionnelle à travers l'épaisseur de la poutre poreuse en FGM.

IV.5.2. Analyse de la vibration libre

Les fréquences naturelles non dimensionnelles d'une poutre poreuse en FGM simplement appuyée en utilisant la présente théorie hyperbolique (HSDBT) sont données dans le tableau IV.4 pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance p . Les résultats de la présente théorie sont comparés à ceux présentés par Sayyad et Ghugal [109]. Un excellent accord entre les solutions de la présente théorie et les résultats existantes dans la littérature est obtenu lorsque la plaque est sans porosité ($\alpha=0$). Avec l'augmentation de pourcentage de vide (la porosité) on constate une diminution des fréquences de vibration quel que soit le mode de vibration. Aussi une augmentation dans l'indice matérielle k conduit à une diminution dans les fréquences de vibration. Aussi, on observe que les fréquences propres sont augmentées lorsque la poutre repose sur une fondation élastique à deux paramètres.

Tableau IV.4: Variation des fréquences naturelles adimensionnelles d'une poutre FGM reposée sur une fondation élastique.

L/h	Mode	ξ_w	ξ_p	Théories	α	p				
						0	1	2	5	10
5	1	0	0	Sayyad et al. (2018)	$\alpha = 0$	5.1453	3.9826	3.6184	3.3917	3.2727
				Présente	$\alpha = 0$	5.1529	3.9905	3.6269	3.4028	3.2826
					$\alpha = 0.1$	5.2225	3.9071	3.4422	3.1497	3.0306
		$\alpha = 0.2$	5.3049		3.7865	3.1491	2.6982	2.5743		
		0.1	0	Sayyad et al. (2018)	$\alpha = 0$	5.3038	4.2216	3.8961	3.7066	3.6094
				Présente	$\alpha = 0$	5.3116	4.2299	3.9051	3.7183	3.6199
					$\alpha = 0.1$	5.3933	4.1774	3.7670	3.5284	3.4380
		$\alpha = 0.2$	5.4899		4.0981	3.5451	3.1882	3.1066		
		0.1	0.1	Sayyad et al. (2018)	$\alpha = 0$	6.6689	6.0973	5.9810	5.9830	5.9909
	Présente			$\alpha = 0$	6.6785	6.1088	5.9937	5.9989	6.0063	
				$\alpha = 0.1$	6.8543	6.2465	6.1062	6.1143	6.1481	
		$\alpha = 0.2$	7.0599	6.4057	6.2214	6.2098	6.2770			
	2	0	0	Sayyad et al. (2018)	$\alpha = 0$	17.589	13.754	12.388	11.260	10.748
				Présente	$\alpha = 0$	17.8816	14.0102	12.6436	11.5564	11.0310
					$\alpha = 0.1$	18.1231	13.7555	12.0519	10.7008	10.1145
$\alpha = 0.2$		18.4092	13.3833		11.1092	9.2238	8.5219			
0.1		0	Sayyad et al.	$\alpha = 0$	17.633	13.820	12.465	11.351	10.848	

			(2018)								
			Présente	$\alpha = 0$	17.926	14.077	12.722	11.649	11.132		
				$\alpha = 0.1$	18.171	13.830	12.143	10.812	10.239		
				$\alpha = 0.2$	18.461	13.469	11.220	9.3693	8.6898		
	0.1	0.1	Sayyad et al. (2018)	$\alpha = 0$	19.287	16.200	15.200	14.493	14.224		
				Présente	$\alpha = 0$	19.603	16.492	15.498	14.845	14.573	
					$\alpha = 0.1$	19.972	16.524	15.310	14.543	14.301	
			$\alpha = 0.2$		20.407	16.521	14.940	13.908	13.720		
3	0	0	Sayyad et al. (2018)	$\alpha = 0$	32.324	25.538	22.812	20.117	19.003		
				Présente	$\alpha = 0$	34.205	27.095	24.319	21.747	20.569	
					$\alpha = 0.1$	34.667	26.671	23.279	20.162	18.771	
			$\alpha = 0.2$		35.214	26.046	21.614	17.499	15.747		
			0.1	0	Sayyad et al. (2018)	$\alpha = 0$	32.346	25.570	22.849	20.163	19.053
						Présente	$\alpha = 0$	34.228	27.128	24.359	21.796
	$\alpha = 0.1$	34.691					26.709	23.324	20.220	18.838	
	$\alpha = 0.2$	35.241	26.088	21.668	17.574		15.837				
	0.1	0.1	Sayyad et al. (2018)	$\alpha = 0$	34.223	28.261	25.980	23.881	23.1.7		
				Présente	$\alpha = 0$	36.194	29.939	27.628	25.718	24.929	
					$\alpha = 0.1$	36.806	29.838	27.042	24.815	23.993	
	$\alpha = 0.2$	37.528	29.625		25.996	23.132	22.322				

Les effets du type de modèle de porosité et du rapport de fraction volumique de porosité sont examinés dans la figure IV.3. L'indice de loi de puissance et le rapport longueur/épaisseur sont respectivement pris comme étant $p=2$ et $L/h=5$. On obtient que la différence entre les modèles de porosité augmente avec l'augmentation de la fraction

volumique de porosité. Dans tous les schémas, le modèle de porosité « H » a les fréquences fondamentales sans dimension la plus basses. En outre, les valeurs des fréquences fondamentales sans dimension de « O » et Les modèles de porosité « V » sont très proches les uns des autres.

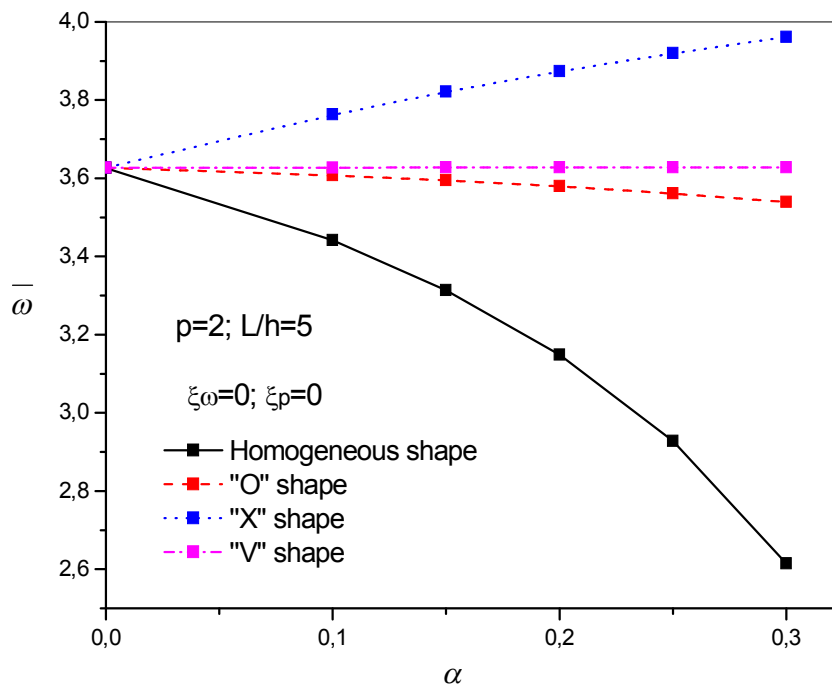


Figure IV.3. Variation de la fréquence adimensionnelle de la poutre poreuse en FGM en fonction de la fraction volumique de la porosité.

Les effets du type de modèle de porosité et du rapport longueur/épaisseur sont illustrés. L'indice de loi de puissance et la fraction volumique de porosité sont considérés comme $p = 2$ et $\alpha = 0,2$, respectivement. On observe que la différence entre les fréquences augmente avec l'augmentation du rapport L/h . En particulier, pour des valeurs élevées du rapport L/h , le type de de distribution de porosité joue un rôle important dans le comportement en vibration libre des poutres poreuses en FGM. Le modèle de porosité homogène (H) présente les fréquences fondamentales les plus basses.

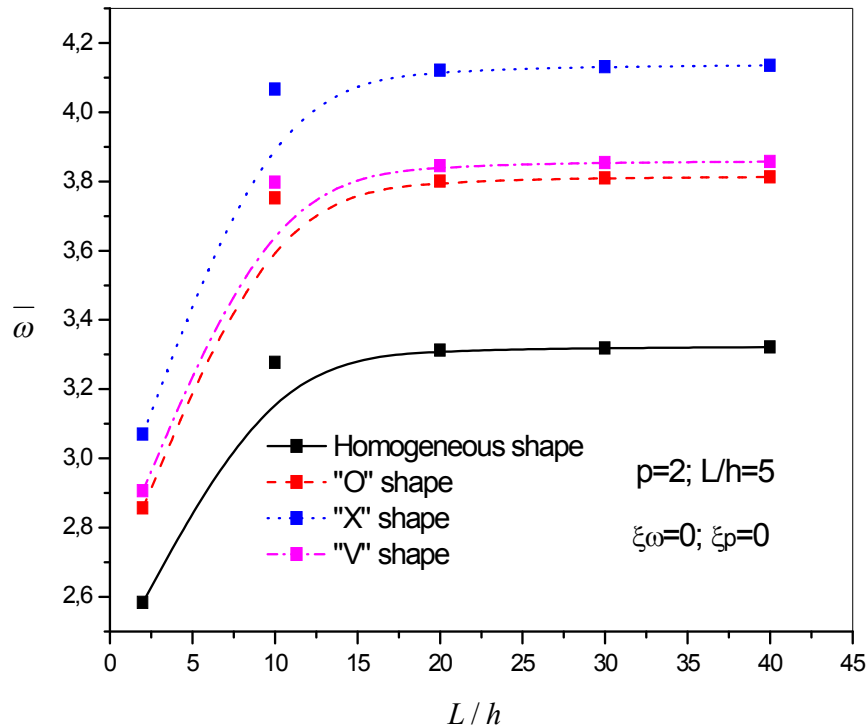


Figure IV.4. Figure IV.3. Variation de la fréquence adimensionnelle de la poutre poreuse en FGM en fonction du rapport L/h .

IV.6. Conclusion

Dans ce chapitre une théorie de cisaillement hyperbolique des poutre est proposée pour l'analyse de la flexion et de la vibration libre des poutres fonctionnellement graduées sous chargement sinusoïdales reposant sur une fondation élastique à deux paramètres. Cette théorie prend en compte les effets de cisaillement transversal et la distribution hyperbolique des contraintes de cisaillement suivant l'épaisseur de la poutre et satisfait les conditions de nullité de la contrainte de cisaillement sur les faces (supérieure et inférieure) de la poutre FGM sans l'aide de facteurs de correction de cisaillement. On assume que les propriétés matérielles de la poutre varie selon la loi de puissance P-FGM. Les équations de mouvement pour la poutre FGM est obtenue par le principe d'énergie d'Hamilton. Les solutions sont obtenues en utilisant les équations de Navier, et les déplacements, les contraintes et les fréquences fondamentales sont trouvées en résolvant le problème en valeurs propres.

En conclusion, le présent modèle peut être utilisé comme référence pour vérifier l'efficacité des méthodes numériques approchées. L'extension de cette étude est également

envisagée pour des conditions aux limites générales et différents types de poutres FGM soumises à différents chargements (mécaniques, thermiques, flambage).

■ *Conclusion générale*

Conclusion générale et perspectives

L'utilisation des matériaux composites fonctionnellement gradués apparaît comme une voie prometteuse dans le domaine des nouveaux matériaux composites grâce à leurs propriétés structurales très particulières. La conception et l'élaboration de ces matériaux nécessitent le développement d'outils d'analyse adaptés à leurs spécificités géométriques et matérielles.

L'objectif de ce travail a été d'apporter une contribution à l'analyse de la réponse mécanique des poutres poreuses fonctionnellement graduées FGM reposant sur fondation élastique de type Winkler-Pasternak en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse. Pour ce faire, nous avons développé notre travail comme suit:

Nous avons proposé un nouveau modèle analytique performant basé sur la théorie de cisaillement d'ordre élevé pour l'analyse de la réponse mécanique des poutres FGM. Les propriétés des matériaux de la structure analysée sont supposées être graduées dans le sens de l'épaisseur selon une distribution simple de loi de puissance P-FGM en termes des fractions de volume des constituants.

Toutes les études comparatives effectuées dans cette étude ont montrées que les résultats obtenus pour l'analyse du comportement des poutres poreuses sont presque identiques à ceux obtenus avec d'autres théories de déformation de cisaillement. L'effet de plusieurs paramètres de la poutre est aussi présenté dans cette investigation sous forme numérique et graphique dans plusieurs combinaisons de matériaux FGM.

- Les exemples numériques montrent que la présente théorie de cisaillement proposée donne des solutions presque identiques à celles obtenues en utilisant d'autres théories de déformation par cisaillement.
- Les déplacements de la poutre augmentent avec l'augmentation de l'indice de loi de puissance p alors que les contraintes sont identiques lorsque la poutre est entièrement en céramique ou entièrement en métal.
- Les déplacements et les contraintes de la poutre FGM sont diminuent lorsqu'elle repose sur la fondation élastique à deux paramètres, à savoir la couche de Winkler et la couche de cisaillement.
- Les contraintes axiale est de traction sur la surface supérieure et de compression sur la surface inférieure.
- La présence des pores dans la poutre FGM conduit à une augmentation de la flèche et cela quel que soit la forme de distribution de la porosité dans la poutre.

- Un excellent accord entre les résultats des fréquences adimensionnelles de la présente théorie et les fréquences des autres théories existantes dans la littérature.
- L'augmentation de la valeur de l'indice p entraîne une diminution des fréquences fondamentales et une diminution de la valeur du module d'élasticité.
- Les fréquences propres sont augmentées lorsque la poutre repose sur une fondation élastique à deux paramètres.
- La présence des pores dans la poutre FGM conduit à une diminution des fréquences de vibration et cela quel que soit la forme de distribution de la porosité dans la poutre.

Afin de compléter les résultats obtenus et de mieux cerner le comportement mécanique des poutres poreuses en FGM sur fondation élastique, nous envisageons les perspectives suivantes pour la suite de notre recherche :

- ✓ Utilisation de cette théorie pour étudier le comportement des poutres sandwiches en FGM ;
- Utilisation de cette théorie pour d'autres types d'appuis ;

La prise en compte de l'effet de la température dans l'étude de la flexion et de la vibration ;

Utiliser d'autre méthode des éléments finis pour résoudre le problème de la flexion et de la vibration des poutres poreuses en FGM.

Finalement, on espère que ce modeste travail reflète la modeste contribution dans le domaine de recherches des matériaux composites en matériaux à gradient évalué (FGM), précisément leurs comportements vis à vis des conditions de chargements statiques et vibratoires.



Références Bibliographiques

- [1] [Dorlot (1986)].
- [2] [Tafla (2007)].
- [3] Jones RM .mechanics of composite matériels .CRC press ; 2014.
- [4] Hensher DA .Fiber –reinforced –plastic (FRP) reinforcement for concrete structur s : Propreté and applications.Elsevier ;2016.
- [5] [BOUAMAMA Mohamed, ,2019] .
- [6] .Mahmoudi A. Thèse de doctorat en sciences. Étude de l'influence des modèles micromécaniques sur la réponse globale des structures FGM. Université DjillaliLiabes. Sidi Bel Abbes. Faculté de Technologie. Département de Génie Civil et Travaux Publics. 2019 :7-8 ; 10-11
- [7] Koizumi M.The concept of FGM. Ceramic transaction, functionally graded materials 34, 3–10, 1992.
- [8] Yoshihisa Uchida, Properties of functionally graded materials,Manufactured by Progressive Lamination Method for Applications,39- 51-B, Vol. 39-B, Mar., 2004.
- [9] [Bhartiet al. 2013]
- [10] Sadollah et al.2013
- [11] Abdizadeh H, 1997
- [12] Narottam P. Bansal, Jitendra P. Singh, Jacques Lamon, Sung R. Choi (2011),Processing and Properties of Advanced Ceramics and Composites III: Ceramic Transactions; John Wiley & Sons;page 110, 4 août 2011
- [13] ShenShen H. and Rong Li S, “Postbuckling of Sandwich Plates with FGM Face Sheets and TemperatureDependentProperties,” Compos: Part B 39, pp.332, 2008
- [14] Ait Sidhoum I. Thèse de doctorat en sciences. Analyse de la vibration libre des plaques épaisses en matériaux fonctionnellement gradué. Universités Mohamed-Boudiaf. Oran.
- [15] Miyamoto Y, Kaysser WA, Rabin BH, Kawasaki A, Ford RG. Functionally graded materials design, processing and applications, materials technology series.Springer science+ business media, llc.Ta418.9. F85f86, 1999.
- [16] Kolahchi et al. 2015, Bennai et al. 2015
- [17] Bao et Wang, 1995 ; Shen, 2009
- [18] théorie utile vers 1750. [27] Roberto Ballarini, The Da Vinci-Euler-Bernoulli Beam Theory?, in Mechanical
- [19] Larbi Chaht, F., 2014. Etude du comportement des nano-poutres en flexion, eniversité djillali liabes sidi bel abbes.

- [20] B Boudierba, M. S. A. Houari, and A. Tounni, « Thermomechanical Bending Response of FGM Thick Plates Resting on Winkler
- [21] [J.P. Chambard 2007 ; R. Kokku et al 2005].
- [22] Chakraborty et al. 2003, Signa, 2009, Wei, 2012].
- [23] [d'Harr et al 1966], [Popov et al (1972)].
- [24] Filonenko-Borodich[Filonenko-Borodich et al 1940
- [25] Hetenyi, M 1946
- [26] Kerr (1964) [Kerr, A.D 1964
- [27] Kerr (1965, 1967) et Kneifati.
[Kneifati, M.C 1985] .
- [28] Hadji, L. and Adda Bedia, E.A. (2015a), “Influence of the porosities on the free vibration of FGM beams”, Wind Struct., 21(3), 273-287.
<https://doi.org/10.12989/was.2015.21.3.273>.
- [29] Hadji, L., Hassaine Daouadji, T. and Adda Bedia, E.A. (2015b), “A refined exponential shear deformation theory for free vibration of FGM beam with porosities”, Geomech. Eng., 9(3), 361-372. <https://doi.org/10.12989/gae.2015.9.3.361>.
- [30] Chami, K., Messafer, T., and Hadji, L. (2020), “Analytical modeling of bending and free vibration of thick advanced composite beams resting on Winkler-Pasternak elastic foundation”, Earthquakes and Structures, Vol. 19, No. 2 (2020) 91-101
- [31] Reddy, J.N. (1984), A simple higher order theory for laminated composite plates, ASME J. Appl. Mech., 51, 745-752. <https://doi.org/10.1115/1.3167719>.
- [32] Sayyad, A.S. and Y.M. Ghugal, (2018), An inverse hyperbolic theory for FG beams resting on Winkler-Pasternak elastic foundation. Advances in aircraft and spacecraft science, 5(6): p. 671.
- [33] Timoshenko, S.P., (1921), On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 41(245): p. 744-746.