

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique Université

Ibn Khaldoun de Tiaret



Faculté des Sciences Appliquées

Département de Génie Civil

Mémoire de fin d'études en vue de l'obtention du

Diplôme de Master

Spécialité : Génie Civil Option : Géotechnique

Présenté par :

MOUZTI ZOHRA

CHREIT MORSLI

Sujet du mémoire

**Modélisation du comportement des poutres reposant sur fondations élastiques
par la méthode des éléments finis**

Membres du jury :

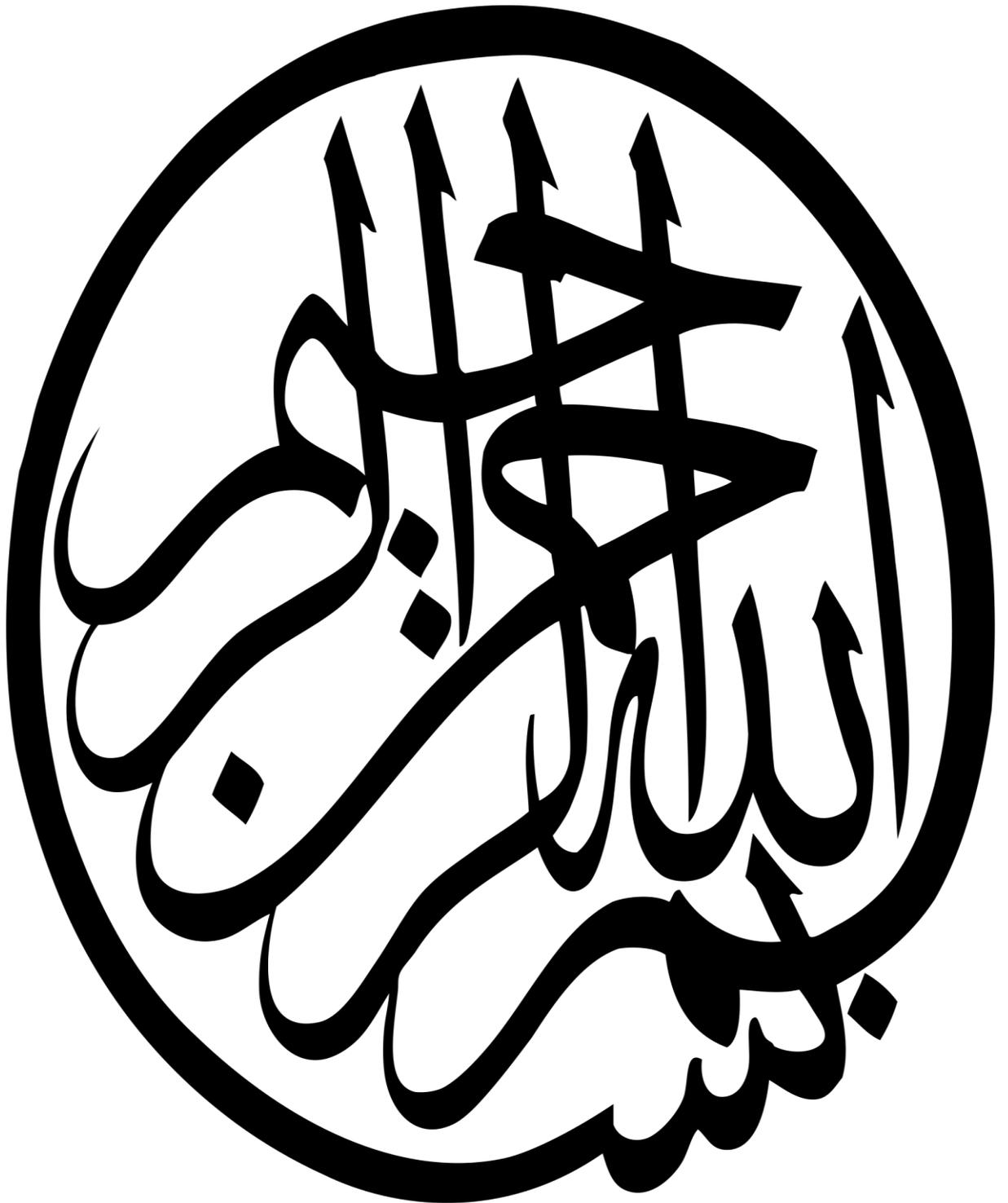
Président : M. HADJI. L

Rapporteur : M.ABDELAZIZ.H. H

Examineur : M.AIT AMAR MEZIANE Med

Examineur : Mr. REBAHI ABDERAZAK

Année universitaire : 2023/2024



Remerciement

Nous tenons tout d'abord à exprimer notre gratitude envers Allah, le clément et la miséricorde de dieux, pour nous avoir donné la force et le courage de mener à bien ce travail. Nous remercions également nos parents qui nous ont soutenus tout au long de nos études.

Nos sincères remerciements vont à tous les professeurs qui nous ont enseigné depuis nos années d'études primaires jusqu'à l'obtention de notre diplôme de master. Leur contribution a été essentielle.

Nous souhaitons exprimer notre reconnaissance à toutes les personnes qui ont contribué, de près ou de loin, à l'achèvement de ce travail, en particulier notre encadreur, M. HADJ HENI.ABDELAZIZ, ainsi que notre chef de département, M. Rebahi pour leurs orientations, leur aide et leurs précieux conseils.

Nous tenons également à remercier chaleureusement tous les membres du personnel de l'université Ibn Khaldoun et tous nos amis avec qui nous avons partagé des moments agréables et des souvenirs précieux.

Enfin, Nous remercions également le président et les membres du jury présent lors de notre soutenance.

Dédicaces

Je dédie ce projet

A mes chers parents, pour leur soutien

Indéfectible tout au long

De ce parcours académique.

A mes amis, pour leur présence Et

leurs encouragements.

A mes professeurs, pour leur enseignement

Précieux et leurs conseils avisés.

Ce travail est le fruit de vos efforts combinés, et je vous en suis profondément reconnaissant.

ZOHRA

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail

à:

Vous les âmes les plus chères de ma vie, mes très chers mes enfants, que dieu vous préserve de tout malheur Mes enfants ; Mourad. iyad

Mes camarades le long de mes études, Et à toute la promotion 2 année master géotechnique

MORSLI

Résumé

L'art de cette étude est de modéliser le comportement des poutres reposant sur fondation élastiques en utilisant la méthode des éléments finis en développant un programme de calcul utilisant cette méthode, qui inclut principalement des expressions de déplacement et des moments.

Le programme de calcul et de validation du modèle numérique proposé a été mis en œuvre en le comparant à la solution de la résistance des matériaux et à l'utilité de cette méthode approchée pour résoudre les problèmes de systèmes de symptômes excédentaires que nous pouvons rencontrer dans la pratique. Des exemples concrets sont présentés dans le dernier chapitre de cet article.

Mots clés : méthode des éléments finis, fondation élastique, poutres, déplacements, moments.

Abstract

The art of this study is to model the behaviour of symptoms from two elastic supports using the finite element method by developing a computational programme using this method, which mainly includes displacement expressions and moments. The proposed numerical model calculation and validation programme was implemented by comparing it to the solution of the strength of materials and to the usefulness of this approximate method to solve the problems of the

Keywords: finite elements method, beams, elastic foundation, displacements, Moments.

ملخص:

هدفنا من هذه الدراسة هو نمذجة سلوك العوارض المرتكزة على دعامتين مرنيتين باستخدام طريقة العناصر المنتهية وذلك بتطوير برنامج للحساب باستخدام هذه الطريقة التي تتضمن بشكل أساسي تعابير الانزياح و اللحظات .

تم تنفيذ برنامج الحساب والتحقق من صحة النموذج العددي المقترح من خلال مقارنته بحل مقاومة المواد و فائدة هذه الطريقة التقريبية في حل مشكلات الأنظمة الفائضة للعوارض التي يمكن ان نواجهها في الممارسة تم عرض امثلة واقعية في الفصل الأخير من هذا البحث

الكلمات المفتاحية: طريقة العناصر المحدودة ، الحزم ، الأساس المرن ، الإزاحة ،

Table des Matières :

Remerciement	I
Dédicace.....	II
Dédicace.....	III
Résumer.....	IV
Abstract	V
Table des Matières	VI
Liste des Figures	VIII
Liste des Tableaux	X
Introduction Générale	1

Chapitre I: étude bibliographique sur la méthode des éléments finis

I.1 Introduction	1
I.2 Définition de la méthode des éléments finis	3
I.3 Historique de la méthode des éléments finis	4
I.4 principe de la méthode des éléments finis	5
I.5 Présentation de la méthode des éléments finis.....	6
I.5.1-Domains d'application de la méthode des éléments finis.....	7
I.6 Etape de calcul par la méthode des éléments finis	8
I.7 Caractéristiques d'un élément fini:.....	11
I.7.1 Les nœuds géométriques:.....	11
I.7.2 Attributs d'un élément fini:.....	11
I.7.3 Type des éléments finis	12
I.7.4 Choix des éléments finis	13
I.7.5 Qualité d'un élément fini.....	13
I.8 Concept de la MEF:.....	14
I.9 Les avantages et les inconvénients de MEF	14
I.9.1 Les avantages de la méthode des éléments finis	14
I.9.2 Les inconvénients de la MEF	15
Conclusion	16

Chapitre II: Généralité sur les fondations élastiques

II.1 Introduction	18
II.2 Modélisation d'un système solide reposant sur un milieu élastique.....	18

II .2 .1	Modèle élastique à un seul paramètre (Winkler).....	19
II.2.2	Modèle des fondations élastiques à deux et plusieurs paramètres.....	21
II.2.2.1	Modèle Filanenko Borodich (1940):.....	21
II.2.2.2	Modèle de Pasternak(1954):.....	23

II.2.2.3 Modèle Reissner (1958) :.....	23
II.2.2.4 Modèle de Kerr (1964), modèle à trois paramètres:.....	25
II.3 Le rôle de fondation simple.....	26
II.4 Le rôle de fondation élastique :.....	26
II.5 Comparaison entre les fondations élastiques et les fondations simples :.....	27
II.2.5 Fondations simples :.....	27
II.3.5 Fondations élastiques :.....	28
II.6 Les modèle le plus efficace dans la modélisation des fondations élastiques:.....	29
Conclusion.....	30

Chapitre III : Modélisation des poutres reposant sur fondations élastiques

III.1 Introduction.....	32
III.2 Etape de calcul par la méthode des éléments finis.....	32
III.3 formulation en élément fini	33
III.3.1 Equation fondamentale pour éléments finis	33
III.3.1.1 Fonction de déplacement	34
III.3.1.2 Relation déplacement- déformation	35
III.3.1.3 Relation déformation- contrainte	35
III.3.1.4 Les efforts internes (moment de flexion)	36
III.3.1.5 Formulation globale	36
III.4 Développement d'un programme de calcul par éléments finis	38
III.4.1 Code Maple	38
III.5 Calcul numérique	41
III.5.1 Etude comparative	41
III.5.2 Représentation des résultats	43
III.5.2.1 Exemple (1)	43
III.5.2.2 Exemple (2)	44
III.6 Conclusion	46
Conclusion générale	48
Référence bibliographique	

Liste des figures

Chapitre I

Fig.I.1. (a) Solide (Poutre en I); (b) Modèle éléments finis	4
Fig.I.2. Classification des problèmes de la mécanique	7
Fig.I.3. diagramme représenter les étapes de calcul par MEF	9
Fig.I.4. Domaine V discrétisé par sous domaine V_e	11
Fig.I.5. maillage du domaine en triangle à trois nœuds	14

Chapitre II

Fig.II.1. Déformations des fondations élastiques sous pression: a - Fondation Winkler;b- fondations pratiques (réel) du sol. Uniforme	19
Fig.II.2. Modèle de Winkler (a) charge quelconque ; (b) charge concentrée, (c) fondation rigide, (d) fondation flexible.	20
Fig.II.3. Modèle de Winkler (déplacement sous chargement répartie).	20
Fig.II.4. Modèle Filanenko Borodich	22
Fig.II.5. : poutre repose sur une fondation élastique à deux paramètres (Winkler-Pasternak) au reposait après déformation	23
Fig.II.6. Modèle de Kerr	25

Chapitre III

Fig.III.1. : Degré de liberté d'un élément en flexion simple.....	33
Fig.III.2. Assemblage a deux éléments	37
Fig.III.3. poutre consol sur appui élastique	38
Fig.III.4. Geométrie et chargement de la poutre	43
Fig.III.5. la variation des déplacements le long d'une poutre uniformément chargée et reposant sur fondation élastique pour différents raideurs avec $L/h = 20$	43
Fig.III.6. la variation des moments le long d'une poutre uniformément chargée et reposant sur fondation élastique pour différents raideurs avec $L/h=20$	44
Fig.III.7. Geométrie et chargement dans une poutre reposant sur deux appuis élastiques.....	44
Fig.III.8 la variation des déplacements le long d'une poutre uniformément chargée et reposant sur deux appuis élastiques	45
Figure III.9 la variation des moments le long d'une poutre uniformément chargée et reposant sur deux appuis élastiques pour différents raideurs avec $L/h = 20$	45

Liste des tableaux :

Tableaux III.1 : comparaison des déplacements et contraintes adimensionnels pour $L/h=20$ Et reposant sur fondation élastique..... 44

INTRODUCTION GENERALE

INTRODUCTION GENERALE

Le génie civil est la branche de l'ingénierie concernée par la conception et la construction d'infrastructures communautaires, telles que des routes, des ponts, des barrages, des bâtiments, des aéroports et des systèmes de gestion de l'eau et des eaux usées.

Leur responsabilité est de gérer pour répondre aux besoins de la société tout en assurant la sécurité de public. Ils exercent leur activité dans des domaines très variés, principalement dans les grands domaines d'intervention : structure, géotechnique, hydraulique, transport et management.

Dans le domaine de la structure, la méthode des éléments finis est appliquée en génie civil lorsqu'il est nécessaire d'analyser les déformations structurelles et les chargements sur des structures complexes.

Cette méthode est utilisée pour calculer les contraintes et les déformations dans les matériaux et les structures et pour effectuer des tests basés sur les forces et les déformations afin de garantir que la structure se comportera correctement sous charge.

D'une manière pratique la méthode est en grande majorité des cas mise en œuvre le calcul informatique ces outils de calcul sont aujourd'hui largement utilisés industriellement.

Notre étude est composée à trois chapitres, Dans le premier nous présentons une étude bibliographique sur la méthode des éléments finis. Ainsi qu'une présentation de quelques aperçus sur les fondements et l'histoire de cette méthode. Par ailleurs, nous citons d'une part les caractéristiques de la méthode des éléments finis, et d'autre part les différents modèles d'un élément fini en particulier les avantages et les inconvénients de cette méthode.

Dans le deuxième, nous avons exposé des généralités sur les fondations élastiques. Ainsi de présentation sur les fondations simple puis la définition de fondation élastique. Par ailleurs, nous citons d'une part les différents types de fondation élastique.

Le dernier chapitre est consacré à la modélisation des comportements des poutres reposant sur deux appuis élastiques par la méthode des éléments finis qui se suit par exposition des exemples d'application.

Le travail se clôture par une conclusion générale qui englobe les diverses constatations obtenues pendant la préparation de ce mémoire.

Chapitre I

**Etude bibliographique sur la
méthode des éléments finis**

I.1 Introduction :

Lorsqu'on analyse un phénomène naturel en général ou un problème d'ingénierie en particulier, on est souvent contraint de concevoir un modèle mathématique capable de décrire, de manière aussi fiable que possible, le problème en question.

Il peut arriver que la résolution analytique d'équations différentielles soit source de difficultés insurmontables, et trouver une solution exacte qui décrive bien le problème étudié n'est pas toujours facile. Pour trouver une solution similaire à la solution recherchée, il est nécessaire d'utiliser des modèles physiques et des simulations expérimentales, ce qui peut entraîner des dépenses en temps et en ressources.

En raison des avancées technologiques dans le domaine de l'informatique et des performances de plus en plus élevées des ordinateurs, il est désormais possible de résoudre des systèmes d'équations différentielles très complexes en utilisant diverses techniques de résolution numérique. Ces solutions ont été développées et mises en œuvre avec succès pour répondre à des problèmes d'ingénierie très variés.

La méthode des éléments finis est considérée comme l'une des techniques numériques les plus puissantes. Elle offre la possibilité de développer un programme permettant de résoudre, avec peu de modifications, plusieurs types de problèmes.

I.2 Définition de la méthode des éléments finis :

La méthode des éléments finis est une technique de modélisation numérique utilisée pour résoudre des problèmes d'ingénieur et de physique.

Elle consiste à diviser un problème continu en un ensemble de petites parties, appelées "éléments finis", et à les approximer mathématiquement.

Ensuite, des équations algébriques sont utilisées pour résoudre le système résultant en prenant en compte les conditions aux limites, les charges appliquées et les propriétés des matériaux. (1)

La méthode des éléments finis se propose de mettre en place sur la base de formulation fiable, un algorithme discret (discrétisation) permettant de rechercher une solution approchée d'un problème aux dérivées partielles sur un domaine compact avec condition aux bords et /ou dans l'intérieure du compact.

Chapitre I : Etude bibliographique sur la méthode des éléments finis

Il s'agit donc de répondre aux questions d'existence et d'unicité de la solution de stabilité et de convergence de méthode numérique, ainsi que d'apprécier l'erreur entre la solution exacte et la solution approchée. (2)

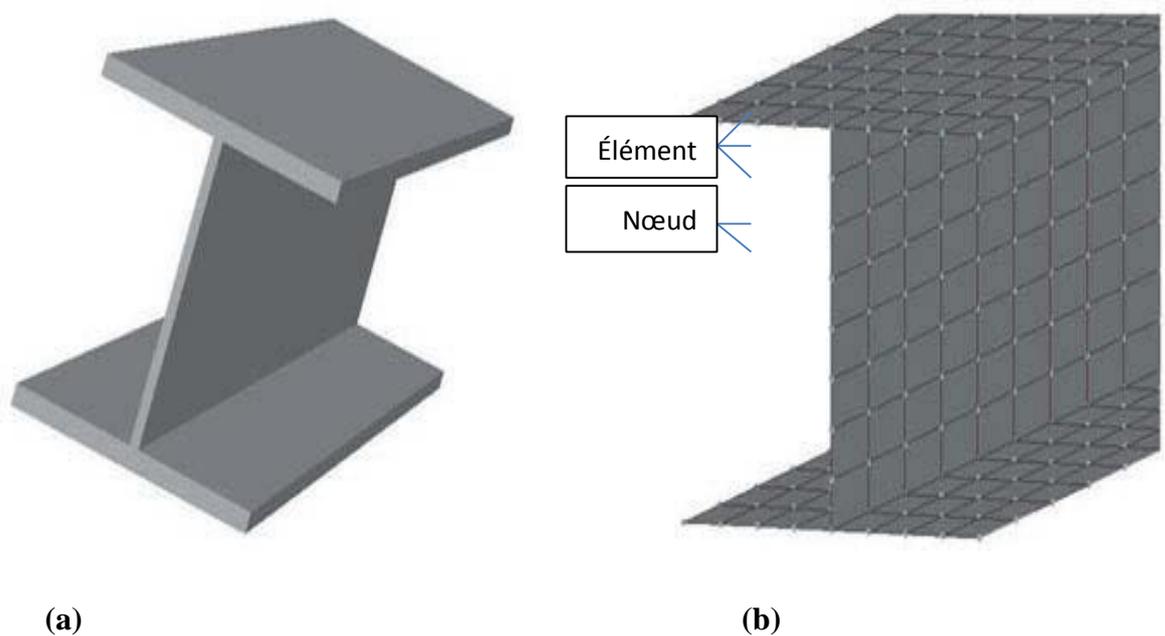


Figure (I.1) : –(a) Solide (Poutre en I); (b) Modèle éléments finis.

I.3 Historique de la méthode des éléments finis :

C'est l'ingénieur américain Ray William Clough qui, semble-t-il, a utilisé le terme de méthode des éléments finis le premier dans un article de 1960 intitulé *The Finite Element Method in plane Stress Analysis*. Le mot rigidité (Stiffness) apparaissait dans le titre de son article *Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures* datant de 1956.

La RDM, recourant au calcul manuel. Etait développée par Maxwell, Castigliano, Mohr.

Le concept d'éléments finis est né vers 1940, avec des figures comme Newmark, Hrennikoff(1941). Mc Henry. Courant(1942)...

La méthode des éléments finis (MEF) prend ses origines dans le besoin de résoudre des problèmes complexes d'élasticité et d'analyse de structures en ingénierie civile et aéronautique. Son développement remonte aux travaux d'Alexander Hrennikoff (1941) et de Richard Courant (1942).

Chapitre I : Etude bibliographique sur la méthode des éléments finis

Bien qu'utilisant des approches différentes, ces deux pionniers partagent la même caractéristique essentielle à savoir la discrétisation par maillage du domaine continu en sousdomaines discret, que l'on appelle éléments. C'est Olgierd Zienkiewicz de l'imperial College qui synthétisa ces deux méthodes en ce que l'on peut appeler la méthode des éléments finis et qui fit la première formalisation mathématique de la méthode.

Le développement de la méthode des éléments finis a véritablement commencé au milieu d'années 1950 pour l'analyse structurale et aéronautique, et prit de l'ampleur à l'université de Stuttgart grâce au travail de John Argyris et à Berkeley grâce au travail de Ray W. Clough (3).

A la fin des années 50, les concepts clés de matrice de rigidité et d'assemblage d'éléments existaient quasiment sous la forme actuelle. La NASA publia une demande de propositions pour le développement du logiciel d'éléments finis NASTRAN en 1965.

La base mathématique rigoureuse de la méthode des éléments finis a été consolidée en 1973 avec la publication de Strang et Fix de *An Analysis of The finite Element Method*. Elle a depuis été intégrée comme une branche des mathématiques appliquées à la modélisation numérique des systèmes physiques dans une large variété de disciplines. Pour une discussion plus approfondie des apports et contributions relatives des différents pionniers de cette méthode. On pourra se référer à bien que la méthode des éléments finis soit théoriquement généralisable à toutes les dimensions d'espace et à tous les ordres de dérivation, dans la pratique l'augmentation de ces paramètres accroît de manière dramatique la difficulté et on se contente de résoudre des problèmes limités à trois dimensions en espace et deux ordres de dérivation. (4)

I.4 principe de la méthode des éléments finis :

La méthode des éléments finis (MEF) est un outil puissant utilisé en **analyse numérique** pour résoudre numériquement des **équations aux dérivées partielles (EDP)**. Voici les points clés de cette méthode :

- **Discrétisation du domaine** : on découpe le domaine d'étude en **éléments géométriques simples** tels que des triangles, des quadrilatères ou des tétraèdres. Ces éléments finis forment un maillage qui représente la structure ou l'objet à étudier.

- **Approximation des solutions** : sur chaque élément du maillage, on choisit une approximation du déplacement (ou autre variable d'intérêt) en utilisant des fonctions d'interpolation. Ces approximations sont combinées pour former une solution approchée sur l'ensemble du domaine.

- **Formulation variationnelle** : la méthode des éléments finis repose sur les principes de la formulation variationnelle (ou formulation faible). Cette formulation permet de rechercher une solution approchée de l'EDP en tenant compte des conditions aux bords et/ou à l'intérieur du domaine.

- **Conditions aux bords** : on spécifie les conditions aux bords, telles que les valeurs aux bords (conditions de type dirichlet), les gradients aux bords (conditions de type Neumann) ou les relations entre gradients et valeurs sur le bord (conditions de type Robin).

- **Résolution approchée** : la méthode des éléments finis permet de trouver une solution approchée du problème initial. Elle garantit que les solutions vérifient des conditions d'existence plus faibles que celles des solutions exactes de l'EDP.

- **Qualité de la discrétisation** : outre l'algorithme de résolution, des questions importantes se posent concernant la qualité de la discrétisation, telles que l'existence et l'unicité de la solution, la stabilité, la convergence et la mesure d'erreur entre la solution discrète et la solution exacte.(5)

I.5 Présentation de la méthode des éléments finis:

La résolution analytique des problèmes mécaniques ne peut se faire que dans un nombre de cas limité, ce pendant les méthodes numériques basées sur la discrétisation des problèmes, présentent une alternative très efficace, souvent utilisées dans le domaine de la mécanique pour résoudre des problèmes complexes. La méthode des éléments finis est de toutes ses méthodes de discrétisation la plus utilisée car elle peut traiter des problèmes de géométrie complexe, elle couvre de nombreux domaines de la physique. Les moyens informatiques actuels (puissance des calculateurs, outils de visualisation et de simulation) la rende facile à la mise en œuvre. La méthode des éléments finis est la méthode la plus utilisée actuellement, son champ d'application ne cesse de s'élargir. Le succès de la méthode est que sa formulation utilise des procédés standards qui se répètent au cours de la résolution de problèmes de natures différentes.

Cette méthode est l'une des techniques numériques les plus puissantes. L'un des avantages majeurs de cette méthode est le fait qu'elle offre la possibilité de développer un programme permettant de résoudre, avec peu de modifications,

Chapitre I : Etude bibliographique sur la méthode des éléments finis

plusieurs types de problèmes. En particulier, toute forme complexe d'un domaine géométrique où un problème est bien posé avec toutes les conditions aux limites, peut être facilement traitée par la méthode des éléments finis. [6]

I.5.1-Domains d'application de la méthode des éléments finis:

Les domaines d'application de la méthode des éléments finis sont très larges et très variés. En général pour les champs d'application de cette méthode sont :

1. La mécanique des milieux continus solides
2. La mécanique des milieux continus fluides
3. Analyse linéaire (statique et dynamique).
4. Electromagnétisme et l'électrostatique

Dans le cadre de la mécanique des milieux continus solides, on peut classer les problèmes de la manière suivante (figure2.1)

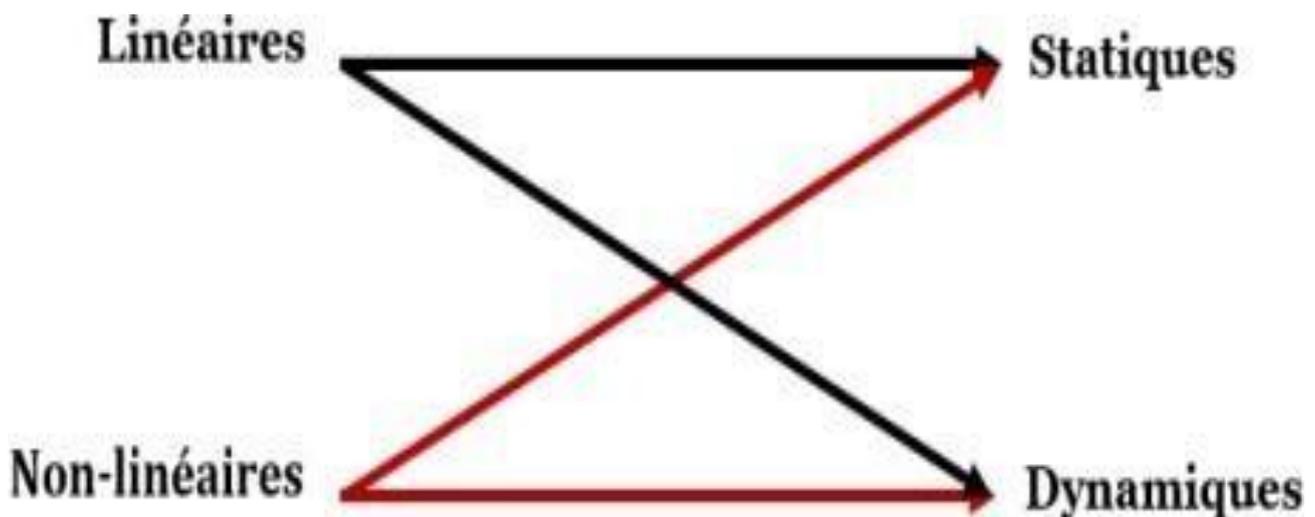


Figure (I.2):Classification des problèmes de la mécanique.

• Statique linéaire :

Ce type d'analyse concerne principalement les domaines ou les matériaux élastiques linéaires. On cherche la déformation du matériau (ε) et la contrainte (ζ) pour différents types de sollicitations.

• Dynamique linéaire

La dynamique linéaire étudie les structures élastiques linéaires soumises à des efforts cycliques (vibrations forcées) ou à des sollicitations initiales (vibrations libres).

Chapitre I : Étude bibliographique sur la méthode des éléments finis

Dans ce type d'analyses on recherche les déplacements et éventuellement les vitesses et les accélérations qui donnent les fréquences et les modes propres (analyse modale)

• Les problèmes non linéaires

Il existe trois classes de problèmes non linéaires:

Les non linéarités géométriques: Ce type d'analyse intervient lorsque les déplacements et les déformations ne sont plus petits. Dans ce cas la rigidité de la structure et les efforts dépendent des déplacements (inconnus). Ce type de non linéarité est souvent rencontré dans les études de la mise en forme des matériaux, dans le flambage et dans le post-flambage.

Les non linéarités de comportement: Lorsque le comportement du matériau n'est pas élastique linéaire, la rigidité de la structure dépend de la déformation. Le problème devient donc non linéaire. Ce type de non linéarité est généralement constaté dans le cas de la plasticité, la viscoplasticité et l'endommagement.

Les non linéarités de contact: Si au cours de la déformation les appuis changent, la rigidité de la structure sera modifiée, le problème est donc non linéaire. Ce problème est caractéristique de la mise en forme comme par exemple l'emboutissage d'une tôle.[7]

1.6 Etape de calcul par la méthode des éléments finis :

Dans des nombreux domaines d'ingénierie elle est principalement utilisée pour modéliser et simuler le comportement structurel et mécanique des matériaux, des pièces et des systèmes complexes. Par exemple, la méthode des éléments finis peut être utilisée pour analyser la résistance d'une structure métallique, la déformation d'un composant en plastique ou la chaleur transférée à travers un matériau isolant.

Cette méthode est également largement utilisée dans le domaine de la simulation numérique pour prédire le comportement de systèmes physiques soumis à différentes conditions de chargement. Dans ce paragraphe, nous essayerons de présenter d'une manière simplifiée, les étapes d'application de la méthode des éléments finis et outils nécessaires à sa mise en œuvre. La résolution d'un problème physique par éléments finis suit grosso modo les étapes suivantes (fig. 1.2)

Chapitre I : Etude bibliographique sur la méthode des éléments finis

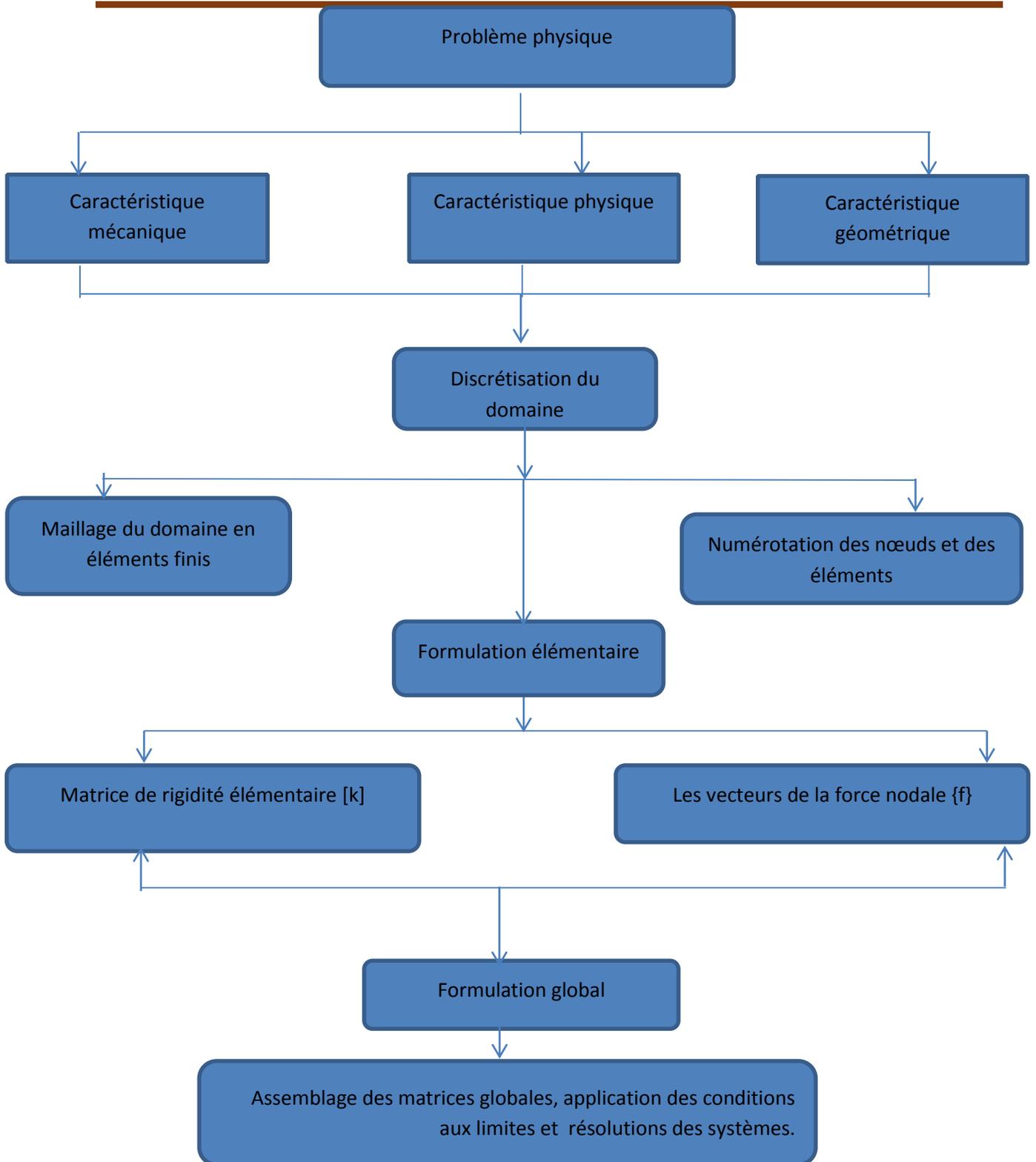


Figure (I.3) : diagramme représenter les étapes de calcul par MEF Etape1: Formulation des équations gouvernantes et des conditions aux limites.

La majorité des problèmes d'ingénierie sont décrits par des équations différentielles aux dérivées partielles associées à des conditions aux limites définies sur un domaine et son contour. L'application de la MEF exige réécriture de ces équations sous forme intégrale.

Chapitre I : Etude bibliographique sur la méthode des éléments finis

La formulation faible est souvent utilisée pour inclure les conditions aux limites.

Etape2: Division du domaine en sous domaines.

Dans chaque élément la variable tel que le déplacement, la pression, la température, est approximée par une simple fonction linéaire, polynomiale ou autre. Le degré du polynôme d'interpolation est relié au nombre de nœuds de l'élément. L'approximation nodale est appropriée. C'est dans cette étape que se fait la construction des matrices élémentaires.

Etape4:Assemblage et application des conditions aux limites.

Toutes les propriétés de l'élément (masse, rigidité,...) doivent être assemblées afin de former le système algébrique pour les valeurs nodales des variables physiques. C'est à ce niveau qu'on utilise les connectivités calculées à l'étape 2 pour construire les matrices globales à partir des matrices élémentaires.

Etape5: Résolution du système global

Le système global peut être linéaire ou non linéaire. Il définit soit un problème d'équilibre qui concerne un cas stationnaire ou statique ou un problème de valeurs critiques où il faut déterminer les valeurs et vecteurs propres du système qui correspondent généralement aux fréquences et modes propres d'un système physique.

Un problème de propagation qui concerne le cas transitoire (non stationnaire) dans le que il faut déterminer les variations dans le temps des variables physiques et la propagation d'une valeur initiale. Les méthodes d'intégration pas à pas sont les plus fréquentes telles que, méthode des différences finies centrales, méthode de Newmark, méthode de Wilson.

A ces méthodes doivent être associées des techniques d'itération pour traiter le cas non linéaire. La plus célèbre la méthode de Newton Raphson.[8]

I.7 Caractéristiques d'un élément fini:

I.7.1 Les nœuds géométriques:

Nous choisissons un ensemble de n points, sur le domaine V , qui servira à définir la géométrie des éléments. Ces points, appelés **les nœuds géométriques**, Elle coïncider éventuellement avec les nœuds d'interpolation. Puis nous remplaçons le domaine V par un ensemble de domaines V^e de formes relativement simples [9]. (Voir figure 1.3)

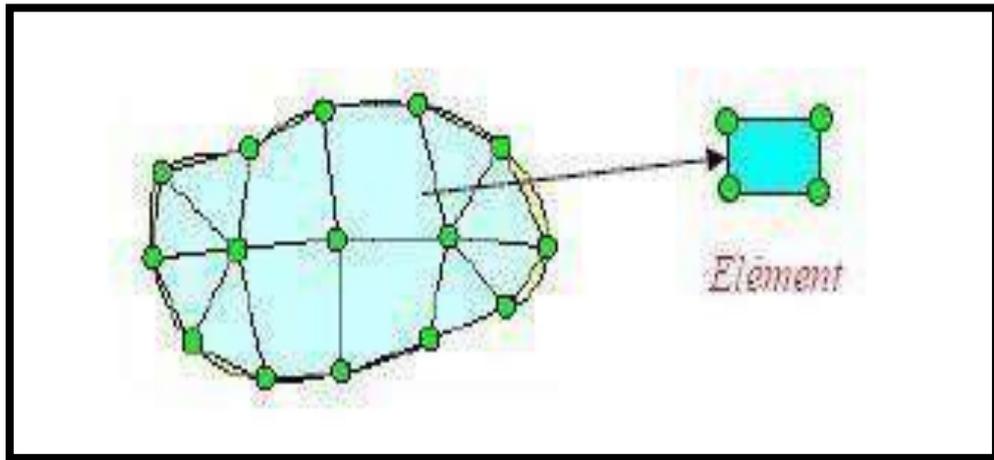


Figure I.4: domaine V discrétisé par sous domaine V^e [9].

I.7.2 Attributs d'un élément fini:

Éléments finis permet d'isoler un de ces éléments pour l'étudier et établir les caractéristique

L'identification d'un élément fini comprend les points suivants:

Géométrie: un élément fini peut être un segment de droite ou de courbe, triangulaire ou quadrilatère (plan ou courbe), tétraèdre, prismes ou hexaèdre (brique). Les frontières entre les éléments peuvent être respectivement des points, des segments de droite ou de courbe, des faces planes ou courbes.

Matériau: le matériau de l'élément est défini par une loi de comportement (loi de

Hooke isotrope...etc.).

Nœuds : les nœuds définissent la géométrie et assurent la connectivité des éléments les uns aux autres, ils occupent les sommets, les milieux des arêtes et faces, selon le type de l'élément et la théorie adaptée.

Chapitre I : Etude bibliographique sur la méthode des éléments finis

Degrés de liberté: la fonction d'approximation (ex: le champ de déplacements) est exprimée en fonction des valeurs particulières qu'elles prennent aux nœuds, valeurs qui deviennent les inconnues nodales. L'union, par leurs degrés de nœuds communs des différents éléments adjacents, permet de reconstituer la solution complète (assemblage) tout en veillant à respecter certaines règles, dites critères de convergence.

Forces nodales : à travers les nœuds transitent des forces associées aux degrés de liberté. Elles sont des charges appliquées à l'élément (poids propre, charge uniforme, température etc.).

Ces paramètres d'identification permettent de construire les deux caractéristiques clés d'un élément fini qui sont sa matrice de rigidité et son vecteur force.

I.7.3 Type des éléments finis [10]:

La sélection de l'élément sera fonction du type de problème à résoudre, généralement. Ils sont groupés en quatre classes :

- 1-les déplacements et les déformations planes.
- 2-la flexion des plaques.
- 3-les coques.
- 4-l'analyse des solides (3D).

Nous distinguons trois familles correspondant à des différents types d'éléments finis à une, deux, trois dimensions :

- **Les éléments unidimensionnels (1D):** barres, poutres rectilignes ou courbes utilisées de façon individuelle ou associées à des plaques pour modéliser les raidisseurs dans un voile.
- **Les éléments bidimensionnels (2D) :** élasticité plane (déformation contrainte) on plaque en flexion, coques courbes, de forme triangulaire ou quadrangulaire. □ **Les éléments tridimensionnels (3D):** éléments de volume ou coques épaisses
- **Les éléments axisymétriques:** qui constituent une classe bien particulière :

Toutes à section triangulaire ou quadrangulaire, coques conique ou méridienne courbe, (éléments de volume ou coques épaisses).

I.7.4 Choix des éléments finis [11]:

Les éléments doivent s'adapter à la nature du problème à traiter, c'est-à-dire respecter les hypothèses et se conformer aux caractéristiques de la modélisation. Certains programmes offrent un choix très vaste, d'autres très limité. Il convient donc de passer en revue les particularités essentielles des éléments disponibles :

- Modèle (déplacement, équilibre, mixte,...);
- Convergence (critère settaux);
- Degré (des divers champs);
- Nœuds, et inconnues aux divers nœuds;
- Compatibilité des éléments les uns avec les autres;
- Performances et limitations.

I.7.5 Qualité d'un élément fini: [11]

Un bon élément fini doit réunir les propriétés suivantes

- Aucun défaut de base (mécanisme...);
- Convergence rapide;
- Bonne précision, déjà dans un maillage grossier;
- Qualités de convergence et précision conservée pour une distorsion raisonnable ;
- Vecteurs forces consistants;
- Souplesse d'emploi;
- Connexion (conforme) possible avec d'autres modèles ;
- Dérivation théorique simple et claire;
- Programmation efficace et limpide.

I.8 Concept de la MEF:

Le concept de base de la méthode des éléments finis est la subdivision du modèle mathématique en des composants disjoints de géométrie simple appelés (Éléments finis), le comportement de chaque élément est exprimé en terme d'un nombre fini de degrés de liberté, le comportement (réponse) du modèle mathématique est considéré, approximativement, celui du modèle discret obtenu par connexion ou assemblage des éléments [12].

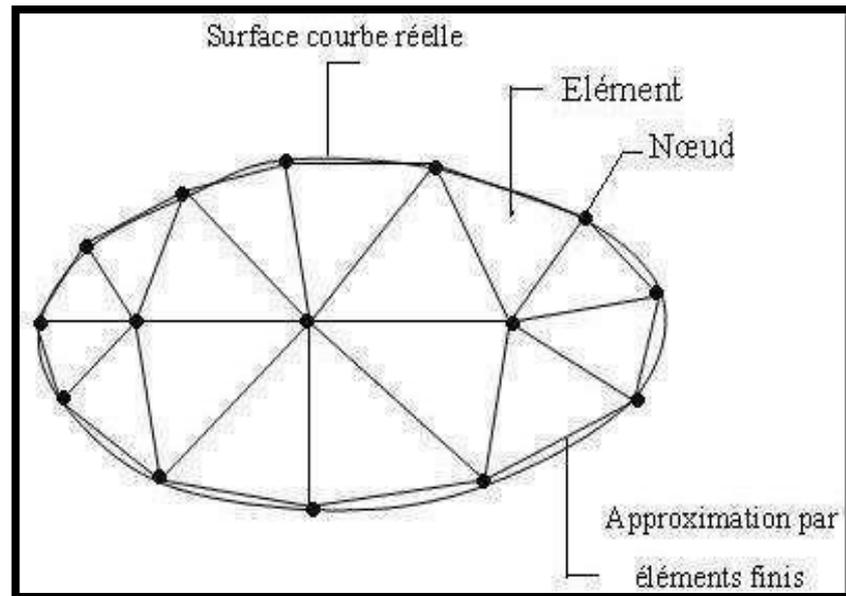


Figure I.5 : Maillage du domaine en triangles à trois nœuds [12].

I.9 Les avantages et les inconvénients de MEF :

Toutes les méthodes permettent de résoudre des problèmes aux limites de manière approximative (séries, différences finies...) la méthode des éléments finis présente de tels avantages qu'elle est la plus utilisée sauf cas particuliers.

I.9.1 Les avantages de la méthode des éléments finis :

polyvalence : la méthode des éléments finis peut être utilisée pour résoudre une grande variété de problèmes de différente nature, tels que les problèmes de structures, de vibrations, de transfert de chaleur, de fluide, etc.

Chapitre I : Etude bibliographique sur la méthode des éléments finis

précision : la méthode des éléments finis permet d'obtenir des solutions précises pour des problèmes complexes, en prenant en compte les effets de la géométrie, des conditions aux limites.

Flexibilité : la méthode des éléments finis permet de modéliser des systèmes avec des formes géométriques complexes et de réaliser des analyses paramétriques pour étudier l'impact de différentes variables sur les résultats.

I.9.2 Les inconvénients de la MEF :

Complexité : la mise en œuvre de la méthode des éléments finis nécessite une expertise en analyse numérique et en modélisation. Il peut être difficile de choisir les bonnes approximations et les paramètres pour obtenir des résultats fiables.

Temps de calcul : la résolution numérique des équations aux éléments finis peut nécessiter des ressources informatiques importantes, en termes de temps de calcul, surtout pour les modèles complexes avec un grand nombre d'éléments.

Sensibilité aux erreurs : la méthode des éléments finis peut être sensible aux erreurs de modélisation, telles que les approximations de géométrie, de matériaux, de charges et de conditions aux limites. Il est crucial de valider et de vérifier les modèles pour s'assurer de la fiabilité des résultats

Chapitre I : Etude bibliographique sur la méthode des éléments finis

Conclusion :

La méthode des éléments finis est une méthode largement utilisée dans de nombreux domaines, tels que l'ingénierie structurale, la mécanique des fluides et l'électromagnétisme.

C'est vraiment fascinant de voir comment cette méthode permet de modéliser et d'analyser des systèmes réels avec précision.

Notre objet dans ce chapitre est de donner un aperçu sur la méthode des éléments finis.

Chapitre II

Généralité sur les

fondations élastique

II.1 Introduction :

Tous les ouvrages peu importe leur nature font usage du sol comme organe porteur. Afin que le sol puisse mieux supporter les charges imposées par la structure. Il est crucial que les constructeurs et les planificateurs sachant qu'il est important d'avoir des fondations capables de répartir ces charges à travers le sol dans de bonnes conditions.

La pose de bâtiments est l'une des activités géotechniques les plus anciennes dans le domaine du bâtiment et des travaux publics, et la problématique la plus fréquente du génie civil de nos jours.

En termes les plus stricts, une fondation est un élément qui supporte les charges de travail et de service. Elle inclut la couche superficielle de la croûte terrestre et l'élément du bâtiment destiné à transmettre les efforts au sol.

Les fondations représentent l'intérêt fondamental d'un bâtiment, car elles constituent la partie structurelle qui assure sa capacité portante et peut contrôler les tassements, selon la nature du sol ou de la roche à supporter les structures, les fondations peuvent être superficielles ou profondes.

En cas de résistance insuffisante du sol de surface pour supporter l'ouvrage. Il est nécessaire de mettre en place des fondations profondes. Ce type de fondation permet de reporter les charges dues à l'ouvrage qu'elles supportent sur des couches de sol situées à une profondeur variable, de quelques mètres à plusieurs dizaines de mètres.

Ce chapitre sur les modèles des fondations élastiques met en avant l'importance des fondations élastiques et des différentes approches en mécanique pour modéliser un système solide reposant sur un milieu élastique. Le modèle de Winkler, initialement développé pour l'analyse des voies de chemin de fer, est mentionné comme étant efficace. Des chercheurs tels que Boussinesq, Pasternak, Reissner et Kerr ont également contribué à l'amélioration des modèles existants. Cette introduction pose le cadre pour explorer les divers modèles élastiques à un seul paramètre et à plusieurs paramètres, offrant ainsi une base pour la compréhension des fondations élastiques.

II .2 Modélisation d'un système solide reposant sur un milieu élastique

La modélisation d'un système solide reposant sur un milieu élastique est abordée dans ce chapitre à travers différentes approches en mécanique. Les modèles présentés incluent le modèle de Winkler, le modèle de Filonenko et Borodich, le modèle de Hetényi, le modèle Winkler-Pasternak, le modèle de Vlasov et le modèle de Kerr. Ces modèles visent à représenter de manière réaliste la fondation élastique sur laquelle repose un solide, en prenant en compte des

paramètres tels que la raideur du sol, les déformations sous chargement, et les interactions entre les ressorts et les couches élastiques.

II .2 .1 Modèle élastique à un seul paramètre (Winkler)

Le modèle élastique à un seul paramètre, également connu sous le nom de modèle de Winkler, a été initialement développé pour l'analyse des voies de chemin de fer. Ce modèle suppose que la fondation élastique est représentée par une série de ressorts verticaux indépendants, linéairement élastiques et d'une raideur constante. Lorsqu'une charge est appliquée sur la fondation, la déformation est considérée uniquement sur la partie chargée, sans prendre en compte les déformations de cisaillement transversal pour simplifier l'obtention des solutions analytiques.

Le modèle de Winkler est largement utilisé pour représenter des fondations élastiques dans diverses applications en génie civil et en mécanique des sols. Il offre une approche simplifiée mais efficace pour modéliser le comportement d'un solide reposant sur un support élastique.

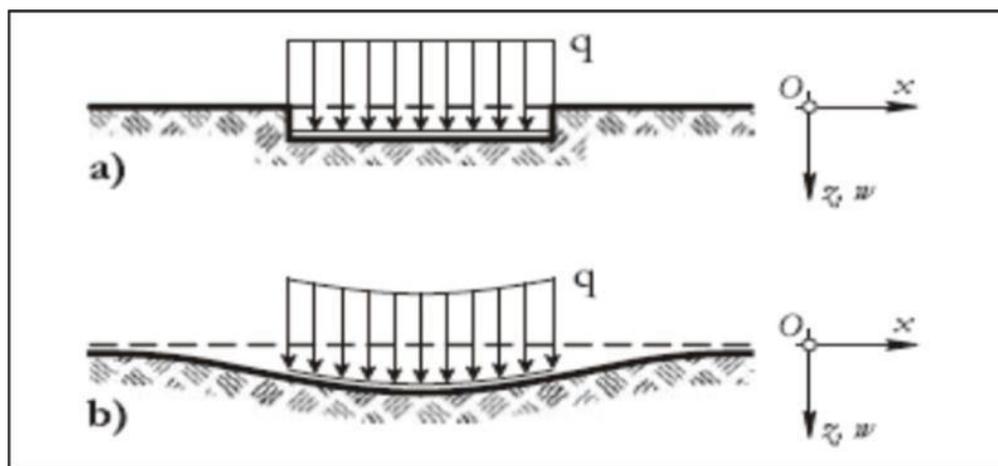


Figure II.1: Déformations des fondations élastiques sous pression: a - Fondation Winkler; b- fondations pratiques (réel) du sol. uniforme [13]

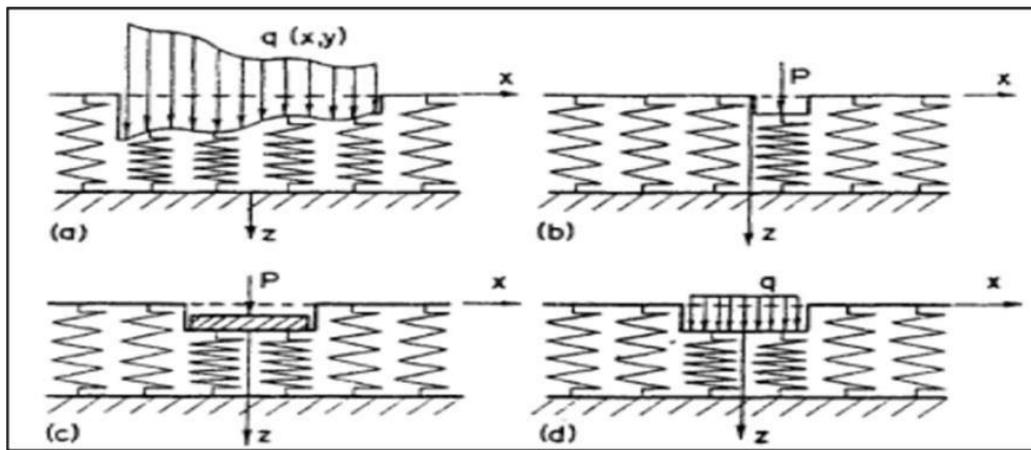


Figure II.2: Modèle de Winkler (a) charge quelconque ; (b) charge concentrée, (c) fondation rigide, (d) fondation flexible.[14]

La raideur indiquée ci-dessus est nommée par la constante de proportionnalité [15] et connue sous le nom de module de réaction de sol support [16].

Dans le cas d'un solide linéaire à rigidité constante [17], on peut écrire la relation pression-flexion en tout point (figure II.3):

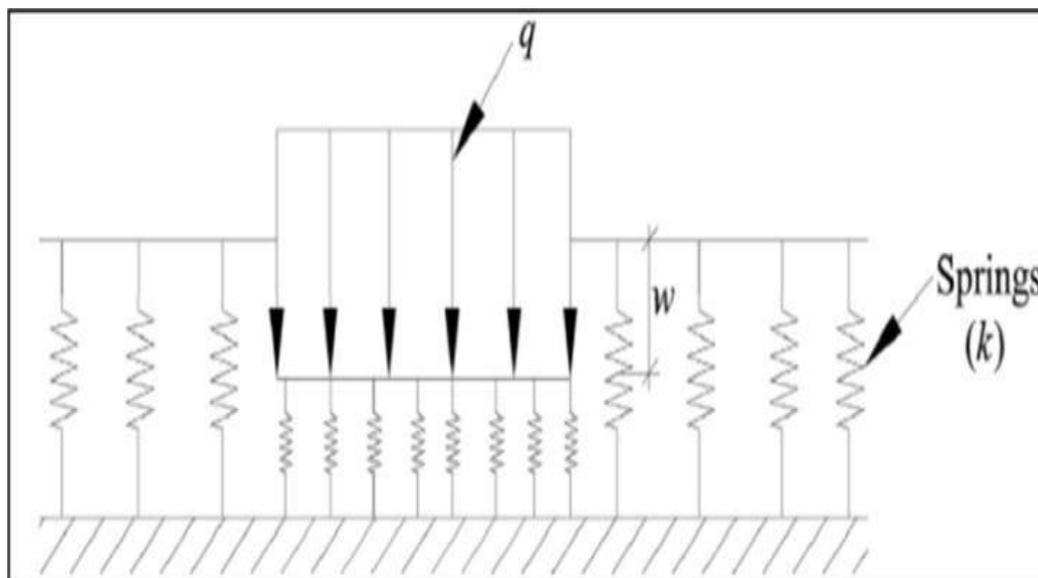


Figure II.3: Modèle de Winkler (déplacement sous chargement réparti).

$K_w(x)$ est la réaction sous-jacente proportionnel aux module de Young module du milieu élastique, $w(x)$:déflexion.

II.2.2 Modèle des fondations élastiques à deux et plusieurs paramètres

Le modèle des fondations élastiques à deux et plusieurs paramètres fait référence à des approches plus complexes pour modéliser le comportement d'un solide reposant sur un support élastique. Ces modèles vont au-delà du modèle de Winkler à un seul paramètre en introduisant des paramètres supplémentaires pour mieux représenter la réalité des interactions solide-support. Voici quelques points clés concernant ces modèles :

Théories d'amélioration du modèle de Winkler : Diverses théories ont été développées pour améliorer le modèle de Winkler, en introduisant des couches de cisaillement et des poutres le long des ressorts. Ces théories incluent les travaux de Filonenko-Borodich, Hetényi, Pasternak, Vlasov et Kerr.

Modèles à plusieurs paramètres : Ces modèles intègrent d'autres paramètres liés au support ou à des couches d'interfaces fictives pour mieux représenter le comportement de la fondation élastique. Lorsque ces paramètres supplémentaires sont pris en compte, la modélisation mécanique de la fondation peut converger vers une approche plus complexe que le modèle de Winkler.

Objectif des modèles à plusieurs paramètres : Ces modèles visent à fournir une représentation plus réaliste des interactions solide-support en prenant en compte des aspects tels que la continuité des déformations entre les régions chargées et non chargées du système structure-fondation.

En résumé, les modèles des fondations élastiques à deux et plusieurs paramètres offrent une approche plus sophistiquée pour la modélisation des interactions solide-support, en prenant en considération des paramètres supplémentaires pour mieux représenter la réalité du comportement élastique.

II.2.2.1 Modèle Filanencko Borodich (1940):

Le modèle Filonenko-Borodich, développé en 1940, est un modèle à deux paramètres qui vise à améliorer la représentation de la fondation élastique par rapport au modèle de Winkler à un seul paramètre. Voici quelques points clés concernant le modèle Filonenko-Borodich :

Continuité entre les éléments de ressort : Ce modèle introduit une continuité entre les éléments de ressort individuels du modèle de Winkler en les reliant à une membrane élastique mince sous l'effet d'une tension constante. Cette approche permet de mieux prendre en compte les interactions entre les ressorts et d'améliorer la représentation de la fondation élastique.

Interaction de traction remplacée par une interaction de cisaillement : Contrairement au modèle de Winkler qui se concentre principalement sur les déformations en compression, le modèle Filonenko-Borodich remplace l'interaction de traction par une interaction de cisaillement entre les ressorts. Cela permet de mieux modéliser les déformations dans la fondation élastique.

Représentation plus réaliste : En intégrant une membrane élastique mince et en considérant l'interaction de cisaillement, le modèle Filonenko-Borodich offre une représentation plus réaliste du comportement de la fondation élastique par rapport au modèle de Winkler.

En résumé, le modèle Filonenko-Borodich constitue une avancée par rapport au modèle de Winkler en introduisant une continuité entre les ressorts et en prenant en compte l'interaction de cisaillement pour améliorer la modélisation des fondations élastiques.

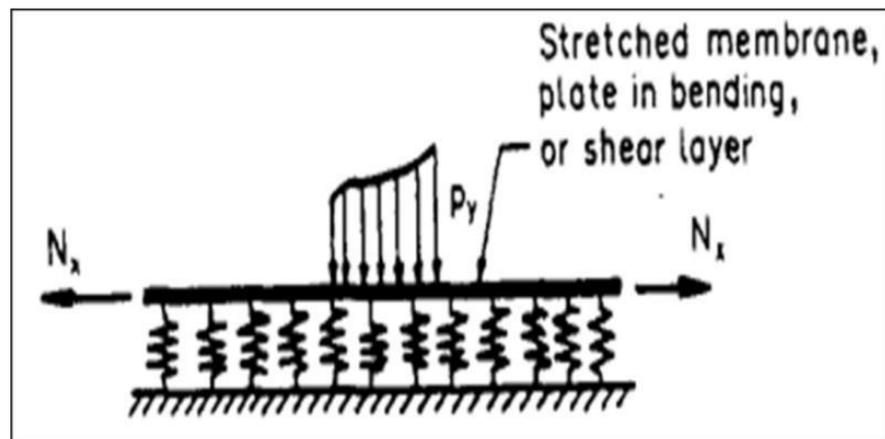


Figure II.4:Modèle Filanenko Borodich [13].

Ainsi en ajoutant au modèle de Winkler la rigidité

de la plaque, la relation de déflexion de pressions 'écrit Eq .

$$p = kw + D \Delta^2 w \tag{II.1}$$

Où représente la rigidité en flexion de la plaque ou de la poutre élastique, donné par Eq. (II.2)

$$D = (E_p h_p^3) / (12(1 - \mu_p)^2) \tag{II.2}$$

p est la pression dans l'interface entre la plaque et les ressorts, E_p et μ_p sont le module de Young et le coefficient de poisson de la plaques ou de la poutre, h_p est l'épaisseur de la plaque ou de la poutre.

.2 Modèle de Pasternak(1954):

Pasternaken 1954 a utilisé un modèle semblable à celle de Filanenko Borodich dans sa forme et équation, mais l'interaction de traction à été remplacé par une interaction de cisaillement entre les ressorts en reliant les extrémités des ressorts à une couche constituée d'éléments verticaux incompressibles qui ne se déforment que par cisaillement transversal [18]. C'est le modèle Winkler-Pasternak

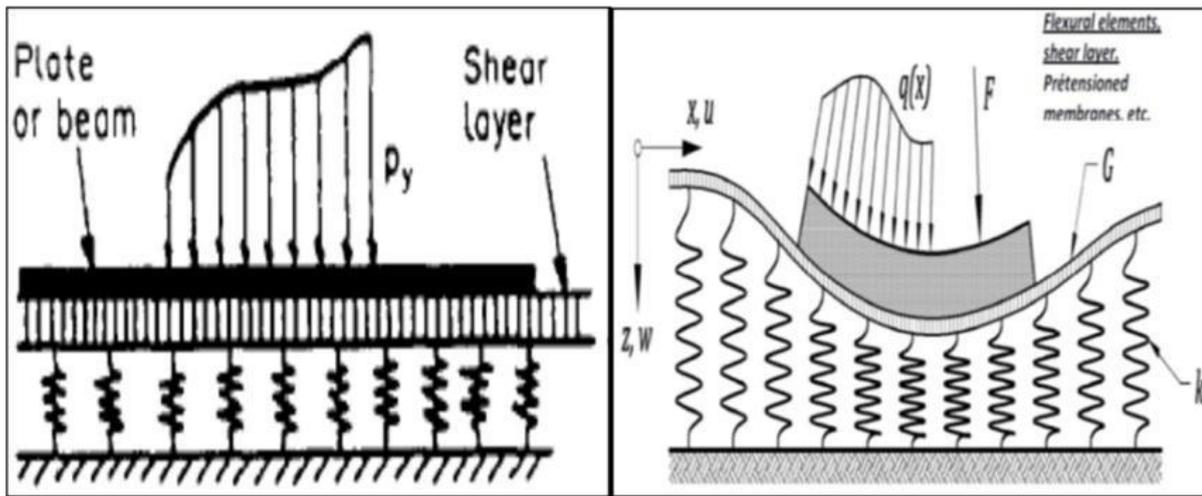


Figure II.5: poutre repose sur une fondation élastique à deux paramètres (Winkler-Pasternak) au reposait après déformation [19].

La relation pression-déflexion selon le modèle de Paste rnakest donnée par l'Eq. (2.3)

$$p = kw - G \Delta w \tag{II.3}$$

G Où est le module de cisaillement de la couche incompressible ou de la couche de cisaillement.

II.2.2.3 Modèle Reissner (1958) :

Reissneren1958 proposé un modèle introduisant des contraintes et les déplacements simplifiant les équations de base pour un milieu continu élastique linéaire isotrope. Les contraintes dans le plan (x , y), surtout et la profondeur de la sous-couche, et les composantes de déplacement, u, v, et w dans les directions x, y respectivement, satisfont les conditions de l'Eq [20]:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0 \tag{II.4}$$

$$\{ v = w = 0 \quad \text{à} \quad z = H$$

$$u=v=0 \quad \text{à} \quad z=0$$

La fonction du modèle de Reissner est donnée par l'Eq (2.5) :

$$c_1 w - c_2 \frac{d^2 w}{dx^2} = q - C_2 q \quad (II.5)$$

Où : w est le déplacement vertical de la surface de la couche élastique et q est la charge externe .Les constantes c_1 et c_2 caractérisent la réaction du sol , ils sont liés à E_s et G par:

$$C_1 = \frac{E_s}{H}$$

$$C_2 = \frac{HG}{3}$$

Où: E_s et G sont respectivement le module d'élasticité et le module de cisaillement du milieu élastique.

.4 Modèle de Kerr (1964), modèle à trois paramètres:

Le modèle de Kerr, développé en 1964, est un modèle à trois paramètres qui constitue une généralisation du concept de Pasternak pour la modélisation des fondations élastiques. Voici quelques points clés concernant le modèle de Kerr :

Composition du modèle : Le modèle de Kerr est composé de deux couches de ressorts élastiques de raideurs différentes, reliées entre elles par une couche de cisaillement d'un module de cisaillement spécifique. Cette configuration à trois paramètres permet de mieux représenter les interactions complexes entre le solide et le support élastique.

Amélioration de la représentation : En introduisant des couches de ressorts de raideurs différentes et une couche de cisaillement, le modèle de Kerr offre une représentation plus détaillée et réaliste du comportement de la fondation élastique par rapport aux modèles à un ou deux paramètres.

Équation différentielle gouvernante : L'équation différentielle qui régit la réponse de ce modèle prend en compte les déformations et les interactions entre les différentes couches de ressorts et la couche de cisaillement. Cette équation permet de modéliser de manière précise la déformation de la fondation élastique sous des charges externes.

En résumé, le modèle de Kerr à trois paramètres constitue une approche avancée pour la modélisation des fondations élastiques en prenant en considération des aspects plus complexes des interactions solide-support. Ce modèle permet d'obtenir des résultats[20]

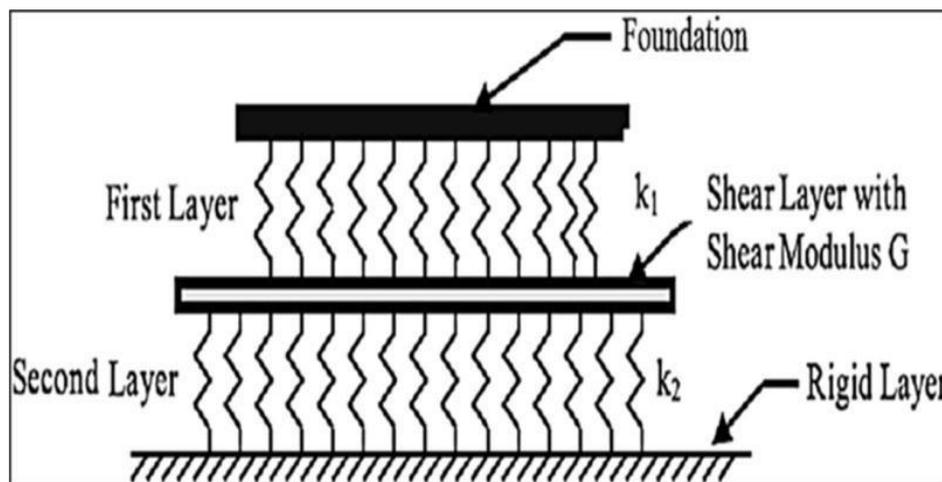


Figure II.6:Modèle de Kerr [21].

Où k_1 et k_2 sont les raideurs de la première et la deuxième couche sou séries de ressorts w est la déflexion de la première couche.

II.3 Le rôle de fondation simple

Le rôle des fondations est crucial dans la construction de structures, car elles servent à transmettre les charges de la structure au sol de manière sûre et efficace. Voici quelques points clés sur le rôle des fondations :

Support de charge : Les fondations sont conçues pour supporter le poids de la structure ainsi que les charges externes telles que le vent, la neige, et les forces sismiques. Elles doivent être dimensionnées de manière à répartir ces charges sur une surface suffisamment grande du sol pour éviter des tassements excessifs ou des instabilités.

Distribution des charges : Les fondations répartissent les charges de la structure de manière uniforme sur le sol afin d'éviter des contraintes locales trop élevées qui pourraient endommager le sol ou la structure elle-même. Une bonne répartition des charges contribue à assurer la stabilité et la durabilité de la construction.

Stabilisation du sol : Les fondations contribuent également à stabiliser le sol en empêchant son affaissement ou sa déformation excessive sous l'effet des charges appliquées. Elles doivent être conçues en fonction des caractéristiques du sol pour garantir une performance optimale.

Adaptation aux conditions du sol : Les fondations sont adaptées aux conditions spécifiques du sol sur lequel la structure est construite. Différents types de fondations, tels que les fondations superficielles, les fondations profondes, ou les fondations spéciales, sont utilisés en fonction des propriétés du sol et des charges à supporter.

En résumé, le rôle des fondations est essentiel pour assurer la stabilité, la sécurité et la durabilité des structures en transférant efficacement les charges au sol. Une conception appropriée des fondations est donc essentielle pour garantir la performance optimale de la construction. [22]

II.4 Le rôle de fondation élastique :

Les fondations élastiques jouent un rôle essentiel dans la construction de structures en permettant une interaction déformable entre la structure et le sol. Voici quelques points clés sur le rôle des fondations élastiques :

Distribution des charges : Les fondations élastiques permettent une répartition plus uniforme des charges de la structure sur le sol en absorbant une partie de ces charges à travers

leur déformation élastique. Cela contribue à réduire les contraintes locales sur le sol et à prévenir les tassements différentiels.

Adaptation aux déformations : Les fondations élastiques sont capables de s'adapter aux déformations du sol sous l'effet des charges appliquées, ce qui permet de limiter les déformations excessives de la structure et du sol. Elles offrent une certaine flexibilité pour absorber les variations de charges et les mouvements du sol.

Amortissement des vibrations : Les fondations élastiques peuvent également jouer un rôle dans l'amortissement des vibrations induites par des charges dynamiques telles que le vent, les machines ou les séismes. Leur capacité à absorber et dissiper l'énergie vibratoire contribue à améliorer la stabilité et le confort des occupants de la structure.

Réduction des contraintes : En permettant une déformation élastique du support, les fondations élastiques contribuent à réduire les contraintes et les déformations excessives dans la structure, ce qui peut prolonger sa durée de vie et prévenir les dommages structurels.

En résumé, les fondations élastiques jouent un rôle crucial dans la protection des structures en absorbant les charges, en adaptant aux déformations du sol, en amortissant les vibrations et en réduisant les contraintes excessives. Leur conception appropriée est donc essentielle pour assurer la performance et la durabilité des constructions. [22] **II.5 Comparaison entre les fondations élastiques et les fondations simples :**

Les fondations élastiques et les fondations simples diffèrent principalement par leur capacité à absorber les déformations et à redistribuer les charges. Voici une comparaison entre les fondations élastiques et les fondations simples :

II.5.1 Fondations simples :

- Les fondations simples sont généralement rigides et ne présentent pas de capacité significative à absorber les déformations du sol.
- Elles transmettent directement les charges de la structure au sol sans redistribution significative, ce qui peut entraîner des contraintes locales élevées.
- Les fondations simples conviennent aux sols stables et homogènes où les déformations sont prévisibles et les charges sont uniformément réparties.

II.5.2 Fondations élastiques :

Les fondations élastiques sont conçues pour absorber les déformations du sol sous l'effet des charges appliquées, ce qui permet de réduire les contraintes et les déformations dans la structure.

- Elles offrent une certaine flexibilité pour s'adapter aux mouvements du sol, ce qui contribue à prévenir les dommages structurels et les tassements différentiels.
- Les fondations élastiques sont particulièrement adaptées aux sols hétérogènes, aux charges variables et aux situations où des vibrations ou des charges dynamiques sont présentes.

En résumé, les fondations simples sont plus rigides et transmettent directement les charges au sol, tandis que les fondations élastiques sont conçues pour absorber les déformations, redistribuer les charges et offrir une certaine flexibilité pour s'adapter aux conditions du sol et aux charges appliquées. Le choix entre ces deux types de fondations dépend des caractéristiques du sol, des charges à supporter et des exigences de la structure. [22]

II.6 Les modèle le plus efficace dans la modélisation des fondations élastiques:

Dépend des caractéristiques spécifiques du sol, de la structure à supporter et des charges appliquées. Cependant, parmi les modèles couramment utilisés et considérés comme efficaces dans la modélisation des fondations, on peut citer le modèle de Winkler et le modèle de Pasternak. Voici quelques informations sur ces modèles :

Modèle de Winkler : Le modèle de Winkler, également connu sous le nom de modèle à un paramètre, est l'un des modèles les plus simples et les plus largement utilisés pour la modélisation des fondations élastiques. Il consiste en une série de ressorts verticaux indépendants qui représentent la réaction du sol sous la fondation. Ce modèle est efficace pour des sols relativement homogènes et pour des charges uniformément réparties.

Modèle de Pasternak : Le modèle de Pasternak est une extension du modèle de Winkler qui prend en compte la présence d'une couche élastique horizontale entre la fondation et le sol. Ce modèle est plus réaliste pour les situations où des effets de cisaillement sont importants ou lorsque la fondation est soumise à des charges non uniformes. Il permet de mieux représenter la distribution des contraintes et des déformations dans le sol.

Ces deux modèles, ainsi que d'autres modèles à plusieurs paramètres tels que le modèle de Kerr, le modèle de Filonenko-Borodich et le modèle de Vlasov, sont largement utilisés en ingénierie des fondations pour modéliser de manière plus précise le comportement des fondations élastiques sous différentes conditions de chargement et de sol.

Il est important de noter que le choix du modèle le plus efficace dépendra de la complexité de la situation, des objectifs de l'analyse et des caractéristiques du sol et de la structure. Il est recommandé de consulter des experts en génie civil ou en géotechnique pour sélectionner le modèle le plus approprié pour une application spécifique. [21]

Conclusion

On conclusion les fondations élastiques met en évidence les différentes approches existantes pour modéliser un solide reposant sur un milieu élastique. On distingue les modèles élastiques à un seul paramètre, comme le modèle de Winkler, où la déformation est principalement considérée sur la partie chargée sans cisaillement, et les modèles élastiques à plusieurs paramètres qui prennent en compte la continuité des déformations même pour la partie non chargée. Diverses représentations et modélisations de la couche élastique ont été examinées pour résoudre ce problème complexe.

De plus, la conclusion souligne que le modèle Kerr est considéré comme plus réaliste que les modèles Winkler et Pasternak pour la représentation des plaques composites, en raison de sa capacité à contrôler le degré de continuité entre les régions chargées et non chargées du système structure-fondation, offrant ainsi plus de flexibilité.

CHAPITRE III

**Modélisation du comportement des
poutres reposant sur fondations
élastiques par la méthode des
éléments finis**

III.1. Introduction

Des fois si on applique des méthodes analytiques pour le traitement des problèmes de mécanique on rencontre des difficultés de résolution. Dans ce cadre on est intéressé d'utiliser des une méthode numérique est celle des éléments finis, cette méthode est basée sur le principe de discrétisation de la structure à étudier.

Ce chapitre est consacré à l'application de la méthode des éléments finis afin d'examiner l'effet de la fondation élastique sur la prédiction des déplacements et des moments dans une poutre simplement appuyée.

La résolution d'un problème par la méthode des éléments finis entraîne le calcul des matrices de rigidité et des forces nodales de tous les éléments de la structure discrétisée puis l'assemblage de ces matrices afin de résoudre l'équation fondamentale de cette approche.

III.2. Etapes de calcul par la méthode des éléments finis

Les étapes de construction d'un modèle éléments finis sont les suivantes :

- ❖ Entrée des données :
 - Les caractéristiques géométriques.
- ❖ Les caractéristiques physico-mécaniques.
- ❖ Discrétisation :
 - Maillage du domaine en éléments finis (type d'élément souhaité).
 - Numérotation des nœuds et des éléments).
- ❖ Formulation élémentaire :
 - construction de la matrice de rigidité élémentaire.
 - construction du vecteur des forces nodales.
- ❖ Formulation globale :
 - Assemblage des matrices de rigidité et vecteurs des forces nodales.
 - Introduction des conditions d'appuis ou les déplacements imposés.
 - Résolution du système global :
 - Détermination des déplacements aux nœuds.
- ❖ Calcul des contraintes ou des efforts dans chaque élément

III. 3. Formulation en élément finis :

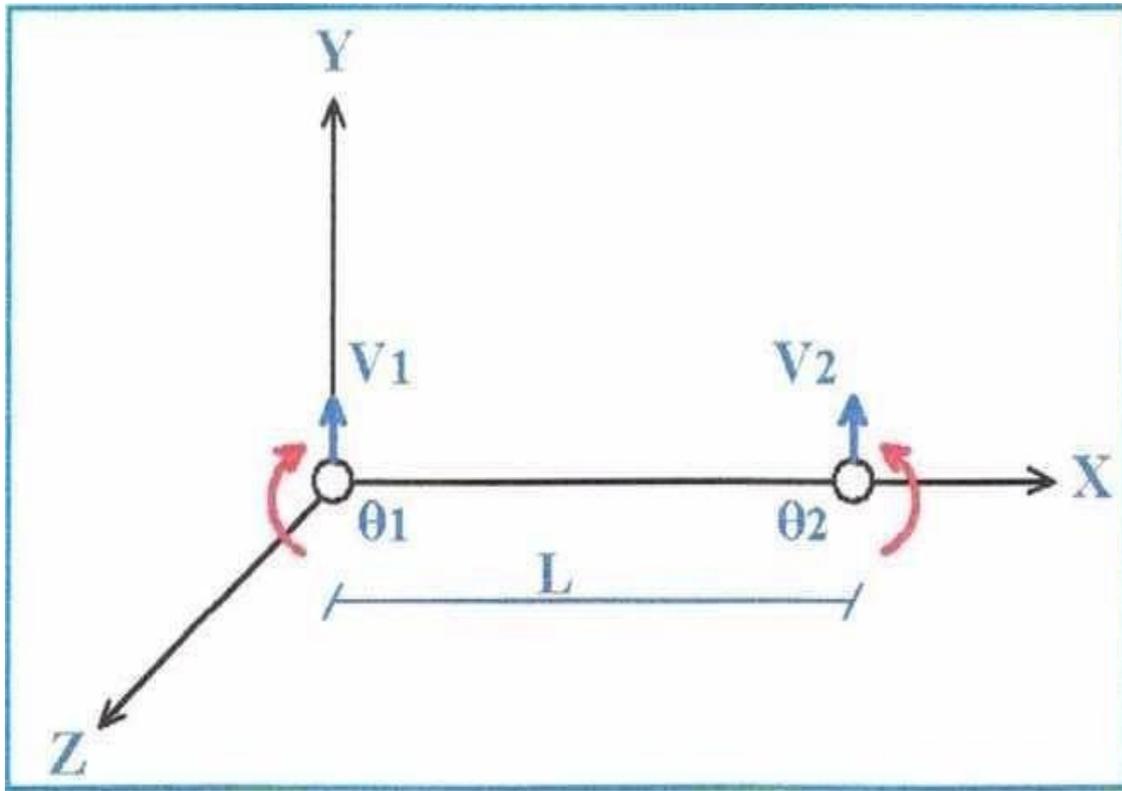


Figure III.1 : Degré de liberté d'un élément en flexion simple

On considère un élément de barre à deux (02) nœuds, chaque nœud possède deux degrés de liberté, à savoir le déplacement vertical (V) et une rotation (θ) autour de l'axe(z). Le nombre total de degrés de liberté est égal à quatre (04) ainsi que le vecteur de déplacement nodal $\{q\}$ et le vecteur de charges (forces) nodales $\{F\}$.

III .3 1 Equation fondamentale pour éléments finis

$$[K] \times \{q\} = \{F\} \quad (\text{III.1})$$

$[K]$: est la matrice de rigidité.

$\{F\}$: est le vecteur des forces nodales

$\{q\}$: est le vecteur des déplacements nodaux

III.3.1. 1 Fonction de déplacement

On choisit le polynôme suivant qui définit (V) sur le domaine de la poutre.

$$V(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 \quad (\text{III.2})$$

La rotation (Θ) étant la dérivée de déplacement (V) par rapport à (x)

$$\Theta(x) = \frac{dv(x)}{dx} = a_2 + 2a_3x + 3a_4x^2 \quad (\text{III.3})$$

A partir des conditions de déplacements aux nœuds de l'élément on a :

)

A partir des conditions de déplacements aux nœuds de l'élément on a :

Nœud 01:

$$V(0) = a_1 = V_1$$

$$\text{Pour } x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \theta(0) = a_2 \end{cases}$$

Nœud 02:

$$\text{pour } x = L \Rightarrow a_1 + a_2L + a_3L^2 + a_4L^3 = V_2$$

$$a_2 + 2a_3L + 3a_4L^2 = \theta_2$$

Sous forme matricielle

$$\{q\} = [A] \times \{a\} \Rightarrow \{a\} = \{q\} \times [A]^{-1} \quad (\text{III.4})$$

111.3.1.2 Relation déplacement - déformation :

La fonction des déformations est obtenue par la dérivation de la fonction de déplacement est donnée par :

$$\mathcal{E}(x) = [B(x)] \times [A]^{-1} \times \{q\} \quad (\text{III.5})$$

Avec: $[B(x)]$ est la dérivée des fonctions d'interpolation.

III.3.1.3 Relation déformation -contrainte :

En général : $\{\sigma(x)\} = [D] \times \{\epsilon(x)\}$ (III. 6) Où [D]:
représente la matrice des propriétés élastiques d'élément. D'après la
théorie des poutres on a :

$\{\sigma(x)\} = E \times (\epsilon x)$; (pour notre cas [D] est égal au module d'élasticité E) (III.7) Appliquons
le principe des travaux virtuels:

$$\sum Fq - Fe = \int \sigma \times \epsilon \times dv \quad (III. 8)$$

Avec $F_e = k.w$ est la force élastique

Le premier terme représente le travail externe des forces nodales dues à un déplacement virtuel.

$$Q_e = dq_1 p_1 + dq_2 p_2 + \dots + dq_n p_n \quad (III.9)$$

$$Q_e = [dq]^{-1} \times \{p\}$$

Le deuxième membre représente le travail interne Q_i , par unité de volume :

$$Q_i = \int [d\epsilon(x)]^T \times \sigma x dv \quad (III.10)$$

En utilisant les équations précédentes on obtient :

$$Q_i = \int y^2 \{ [B(x)][A]^{-1} \{dq\} \}^T [D] [B(x)][A]^{-1} \{q\} dV$$

$$Q_i = y^2 \{ [B(x)][A]^{-1} \{dq\} \}^T [D] [B(x)][A]^{-1} \{q\} dS \times dx \quad (III. 11)$$

$$\text{Avec : } \iint y^2 dS = I$$

I: étant le moment d'inertie. D'où:

$$Q_i = \int_0^L I \{ [B(x)][A]^{-1} \{dq\} \}^T [D] [B(x)][A]^{-1} \{q\} dx \quad (III.12)$$

En égalisant le premier et le second terme ; on obtient :

$$\{dq\} \{P\} = \int_0^L I \{ [B(x)][A]^{-1} \{dq\} \}^T [D] [B(x)][A]^{-1} \{q\} dx \quad (III.13)$$

On sait que : $\{P\} = [K] \{q\}$ D'où:

$$[K] = \int_0^L \{ [B(x)][A] - 1 \}^T [D] [B(x)][A]^{-1} dx \quad (III.14)$$

Avec : $[D] = E$

Si "I" est constant, la matrice de rigidité élémentaire d'un élément de barre à deux nœuds soumis en sollicitation de la flexion s'écrit comme suit :

$$[K]^e = EI/L \begin{bmatrix} \alpha - kg & 6/L & -\alpha & 6/L \\ 6/L & 4 & -6/L & 2 \\ -\alpha & -6/L & \alpha - kd & -6/L \\ 6/L & 2 & -6/L & 4 \end{bmatrix}$$

Avec : $\alpha = 12/L^2$ et kd et kg sont les raideurs aux nœuds.

III 3.1.4 Les efforts internes (moment de flexion):

L'expression du moment s'exprime comme suit :

$$\{M\}_e = (B)F \times \{q\} \quad - \quad -$$

III.3.1.5 Formulation globale :

Afin d'établir cette formulation ; on doit déterminer la matrice de rigidité globale et le vecteur des forces nodales globales, pour une structure composée des plusieurs éléments.

On appelle une matrice globale est la matrice correspondante à la somme des matrices élémentaires aussi de rigidité et des forces appliquées.

$$[K]^G = \sum_{e=1}^{ne} [k] ; \{F\} = \sum_{e=1}^{ne} \{F\} \quad (III. 17)$$

D'où: (n: nombre d'élément constituant une structure)

Prenons un exemple simple d'une structure composée de deux éléments de barre unidimensionnels, ayant deux degrés de liberté en chaque nœud.

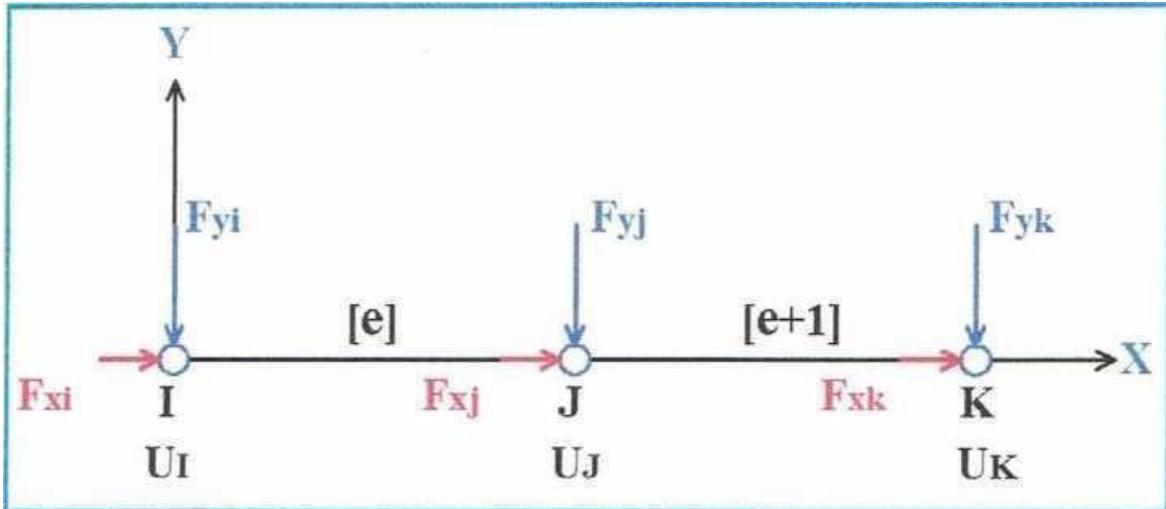


Figure III.2 : Assemblage de deux éléments

$[K]$: Matrice de rigidité globale

$\{q\}$: vecteur des déplacements nodaux

$\{F\}$: vecteur des forces nodales globales

D'après l'expression matricielle ci-dessus on peut constater que la règle d'assemblage des matrices de rigidités élémentaires consiste pour un nœud donné à additionner les sous matrices de rigidité affectées aux nœuds des éléments ayant ce nœud en commun

III.4 Développement d'un code de calcul par élément finis

En ce moment, l'utilisation de l'ordinateur facilité la complicité des calculs, ce qui rend le problème autrefois considérés insolubles avec les méthodes classiques plus faciles à résoudre. Sont maintenant facilement accessible avec les méthodes numériques, et conduit à l'apparition d'une nouvelle méthode qui convient par une nouvelle méthode dite méthode des éléments finis (M E F). Aux cette partie nous développons la formulation variationnelle par l'approche élément finis puis nous passons à lustrer l'organigramme de calcul qui sert à développer un programme de calcul en langage Maple et à la fin nous présentons les résultats concernant ce problème

III.4.1 CODE Maple :

Le code Maple c'est un logiciel de calcul formel développé depuis les années 1980 et aujourd'hui édité par la société canadienne Maple Soft.

Maple permet de résoudre des équations, comme par exemple des équations différentielles ou intégrales, ou encore des systèmes d'équations, d'obtenir des limites, de tracer des graphiques. Etc. Maple dispose d'un certain nombre de fonctions «de base» en particulier les fonctions trigonométriques et hyperboliques, les fonctions inverses associées, la valeur absolue, exponentielle, et logarithme. Maple est un langage interprété contrairement à Pascal qui sont des langages compilés. [24]

Afin d'appliquer cette méthode nous considérons une poutre console soumise à une force concentrée à son extrémité et reposant sur un appui élastique de raideur k (voir figure III.3)

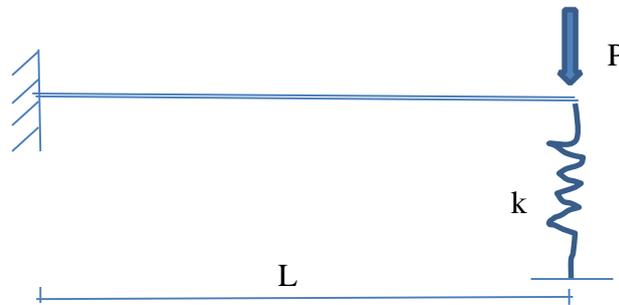


Figure III.3 poutre console sur appui élastique

En développant le programme de calcul des déplacements et des moments comme il est représenté ci-dessous : > **restart;**

```
> alpha:=1;beta:=1;
```

```
> ne:=1;nn:=ne+1;
```

```
> L:=1;
```

```
> l:=L/(2*ne);
```

```
> h:=evalf(L/20);
```

```
> e:=380;i:=(h**3)/12;ei:=evalf(e*i);em:=70;
```

```
> lambda[d]:=0.4;
```

```
> lambda[g]:=0.;
```

```
> for i to ne do kg(i):=alpha*lambda[g] end do;for j to ne do rd(j):=beta*lambda[d] end do;
```

CHAPITRE III Modélisation des poutres reposant sur fondations élastiques

```
> A:=Matrix([[1,0,0,0],[0,1,0,0],[1,1,1^2,1^3],[0,1,2*1,3*1^2]]);
> AA:=evalm(A**(-1));
> px:=Matrix([[1,x,x^2,x^3],[0,1,2*x,3*x^2]]);
> pa:=evalm(px&*AA);
> N(1):=pa[1,1];N(2):=pa[1,2];N(3):=pa[1,3];N(4):=pa[1,4];
diff(diff(N(1),x),x);diff(diff(N(2),x),x);diff(diff(N(3),x),x);diff(diff(N(4),x),x);
> for i to ne do;c[i,1]:=i; c[i,2]:=i+1 end do;
> for i to ne do f(i):=Matrix(2*nn,1)end do;
> f(ne)[2*c[ne,2]-1,1]:=-p;
> for i to ne do f(i)[2*c[i,1]-1,1]:=-q*1/2 end do; >
for i to ne do f(i)[2*c[i,2]-1,1]:=-q*1/2 end do;
> F:=evalm(sum(f(k),k=1..ne));
> ke:=Matrix(4,4);
> for i to 4 do;
> for j to 4 do;
> ke[i,j]:=ei*int(diff(diff(N(i),x),x)*diff(diff(N(j),x),x), x=0..l);
> end;
> end;
> print(ke);
> for i to ne do;c[i,1]:=i;c[i,2]:=i+1;end;
> for i to ne do;
> rl(i):=Matrix(2*nn,2*nn);end;
>> for i to ne do rl(i)[2*c[i, 1]-1, 2*c[i, 1]-1] := ke[1,1]-kg(i) end do;
> for i to ne do rl(i)[2*c[i, 1]-1, 2*c[i, 1]] := ke[1, 2] end do;
> for i to ne do rl(i)[2*c[i, 1]-1, 2*c[i, 2]-1] := ke[1, 3] end do;
> for i to ne do rl(i)[2*c[i, 1]-1, 2*c[i, 2]] := ke[1, 4] end do;
```

CHAPITRE III Modélisation des poutres reposant sur fondations élastiques

```
> for i to ne do rl(i)[2*c[i, 1], 2*c[i, 1]-1] := ke[2, 1] end do;
> for i to ne do rl(i)[2*c[i, 1], 2*c[i, 1]] := ke[2, 2] end do;
> for i to ne do rl(i)[2*c[i, 1], 2*c[i, 2]-1] := ke[2, 3] end do;
> for i to ne do rl(i)[2*c[i, 1], 2*c[i, 2]] := ke[2, 4] end do;
> for i to ne do rl(i)[2*c[i, 2]-1, 2*c[i, 1]-1] := ke[3, 1] end do;
> for i to ne do rl(i)[2*c[i, 2]-1, 2*c[i, 1]] := ke[3, 2] end do;
  > for i to ne do rl(i)[2*c[i, 2]-1, 2*c[i, 2]-1] := ke[3,3]-rd(i) end do;
  > for i to ne do rl(i)[2*c[i, 2]-1, 2*c[i, 2]] := ke[3, 4] end do;
  > for i to ne do rl(i)[2*c[i, 2], 2*c[i, 1]-1] := ke[4, 1] end do;
  > for i to ne do rl(i)[2*c[i, 2], 2*c[i, 1]] := ke[4, 2] end do;
> for i to ne do rl(i)[2*c[i, 2], 2*c[i, 2]-1] := ke[4, 3] end do;
> for i to ne do rl(i)[2*c[i, 2], 2*c[i, 2]] := ke[4, 4] end do;
> K:=evalm(sum(rl(m),m=1..ne));
> K[1,1]:=K[1,1]*10**(10);
> K[2,2]:=K[2,2]*10**(10);
> K[2*nn,2*nn]:=K[2*nn,2*nn]*10**(10);
> KK:=evalm(K**(-1));
> rs:=evalf(evalm(KK&*F));
> for i to nn do w(i):=simplify(rs[(2*i)-1,1]) end do;
> for i to nn do teta(i):=rs[2*i,1] end do;
> print(rs[2*nn-1,1]);
>
> y:=Matrix([-0.5*h,-0.4*h,-0.3*h,-0.2*h,-0.1*h,0*h,0.1*h,0.2*h,0.3*h,0.4*h,0.5*h]); >
x:=0;
> for i to ne do sxxg(i):=-y[1,11]*e*((-6/(l**2))*w(c[i,1])-
(4/l)*teta(c[i,1])+(6/(l**2))*w(c[i,2]))/(2/l)*teta(c[i,2]));print(sxx(i));end do;
> sigmaxb:=sxxg(ne)*h/q*L;
```

```
> for i to ne do sxxd(i):=-  
y[1,11]*e*((6/(l**2))*w(c[i,1])+(2/l)*teta(c[i,1])+(6/(l**2))*w(c[i,2])+(4/l)*teta(c[i,2]))end do;  
  
> sigmaxdb:=sxxd(ne)*h/q*L;  
  
> for i to ne do Mg(i):=-ei*((-6/(l**2))*w(c[i,1])-(4/l)*teta(c[i,1])+(6/(l**2))*w(c[i,2])-(2/l)*teta(c[i,2]))end  
do;  
  
> for i to ne do Md(i):=-ei*((6/(l**2))*w(c[i,1])+(2/l)*teta(c[i,1])+(-  
6/(l**2))*w(c[i,2])+(4/l)*teta(c[i,2]))end do;  
  
> for i to ne do print(element(i),...Mg(i),...Md(i))end do;
```

III.5 Calcul numérique

Le calcul des poutres reposant sur des appuis élastiques quelconques nécessite d'appliquer des méthodes numériques pour résoudre ce problème. A cet effet nous appliquons la présente méthode d'éléments finis pour prédire les déplacements ainsi que les moments de flexion.

Au premier lieu, nous commençons par une étude comparative pour valider notre modèle ensuite on doit traiter quelques exemples de poutres reposant sur appuis élastiques.

III 5.1 Etude comparative :

Cette étude est effectuée par la représentation des déplacements ainsi les contraintes dans le tableau de comparaison pour des poutres simplement appuyée et uniformément chargées reposant sur fondation élastique de raideurs répartis et constants . Les résultats obtenus numériquement sont comparé avec ceux de la théorie classique des poutres CBT et d'élasticité.

Paramètres de calcul :

$$\begin{aligned}\bar{w} &= 100.E_m.h^3 / q. L^4 \\ \bar{\sigma} &= \sigma_x .h^2 / q.L\end{aligned}$$

$$\zeta = k.h^2/E_m. L$$

CHAPITRE III Modélisation des poutres reposant sur fondations élastiques

Tableau (III.1) : comparaison des déplacements et contraintes adimensionnels pour $L/h=20$

Et reposant sur fondation élastique

Nombre d'éléments	Déplacements \bar{w}		Contraintes $\bar{\sigma}$	
	$\zeta = 0$	$\zeta = 0.1$	$\zeta = 0$	$\zeta = 0.1$
6	- 2.814	-1.471	-15.00	-7.642
12	- 2.862	-1.495	-15.00	-7.640
24	2.874	-1.501	-15.00	-7.640
48	2.877	-1.503	-15.00	-7.640
96	2.877	-1.503	-15.00	-7.640
Théorie CBT	2.878	-1.503	-15.00	-7.640
Théorie Elasticité []	2.895	-----	-----	-----

Le tableau III.1 montre la comparaison des résultats par la méthode des éléments finis pour une poutre reposant sur fondation élastique et uniformément chargées avec ceux donnés par la théorie CBT et celle de l'élasticité. On constate bien plus qu'on augmente le nombre des éléments les résultats correspondants sont satisfaisants c'est-à-dire que ces résultats sont en concordance avec les solutions existantes. Ce qui implique que notre modèle est validé.

III. 5.2 Représentation des résultats :

III.5.2.1 Exemple 01 :

Par la suite, nous voulons représenter la variation des déplacements et moments adimensionnels suivant la longueur d'une poutre uniformément chargée et reposant sur fondation élastique modélisée par des forces réparties sur la longueur comme il est montré en figure ci-dessous.

Les résultats exploités du programme sont représentés en Annexe.

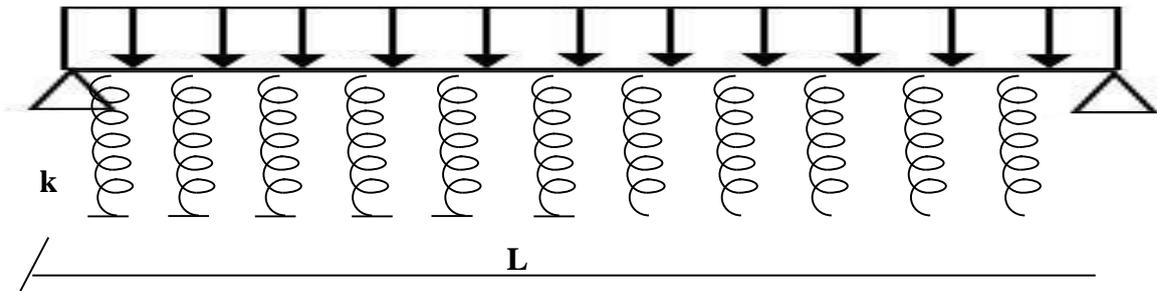


Figure (III.4) : géométrie et chargement de la poutre.

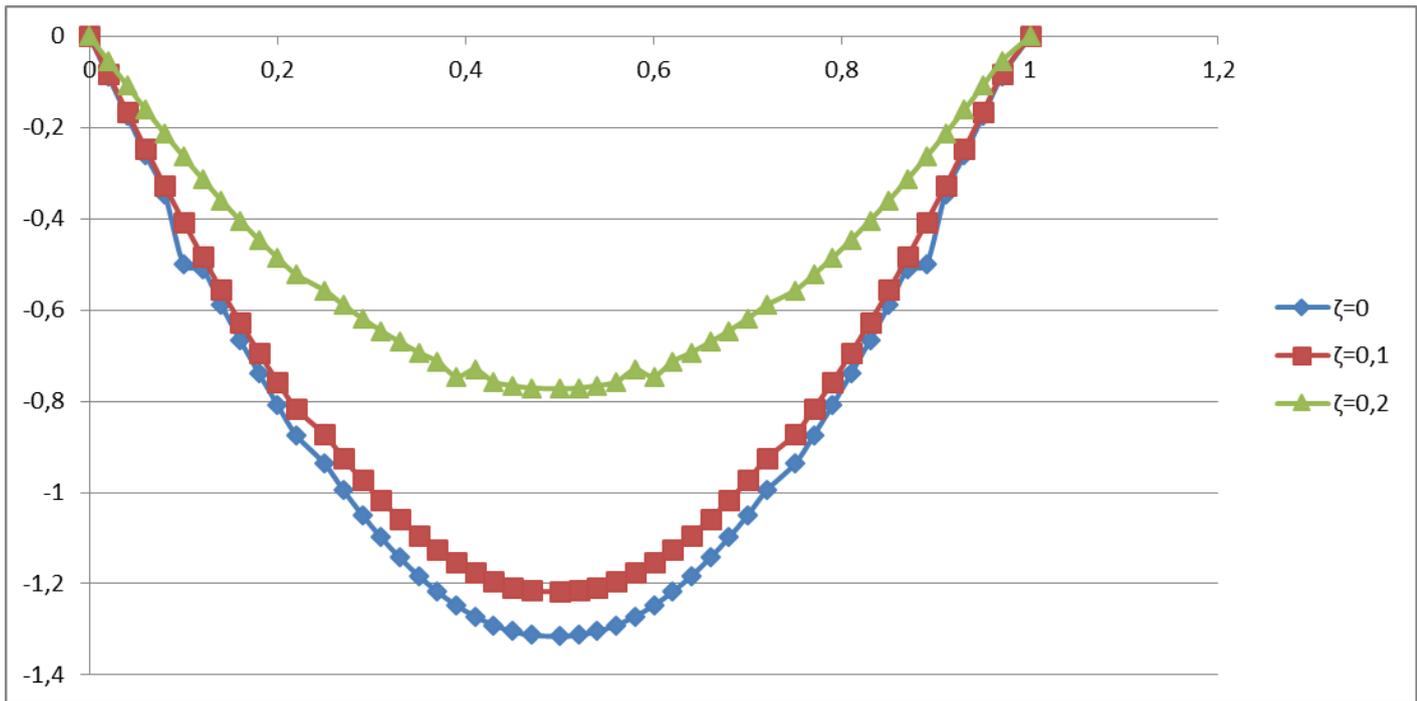


Figure III.5 la variation des déplacements le long d'une poutre uniformément chargée et reposant sur fondation élastique pour différents raideurs avec $L/h = 20$.

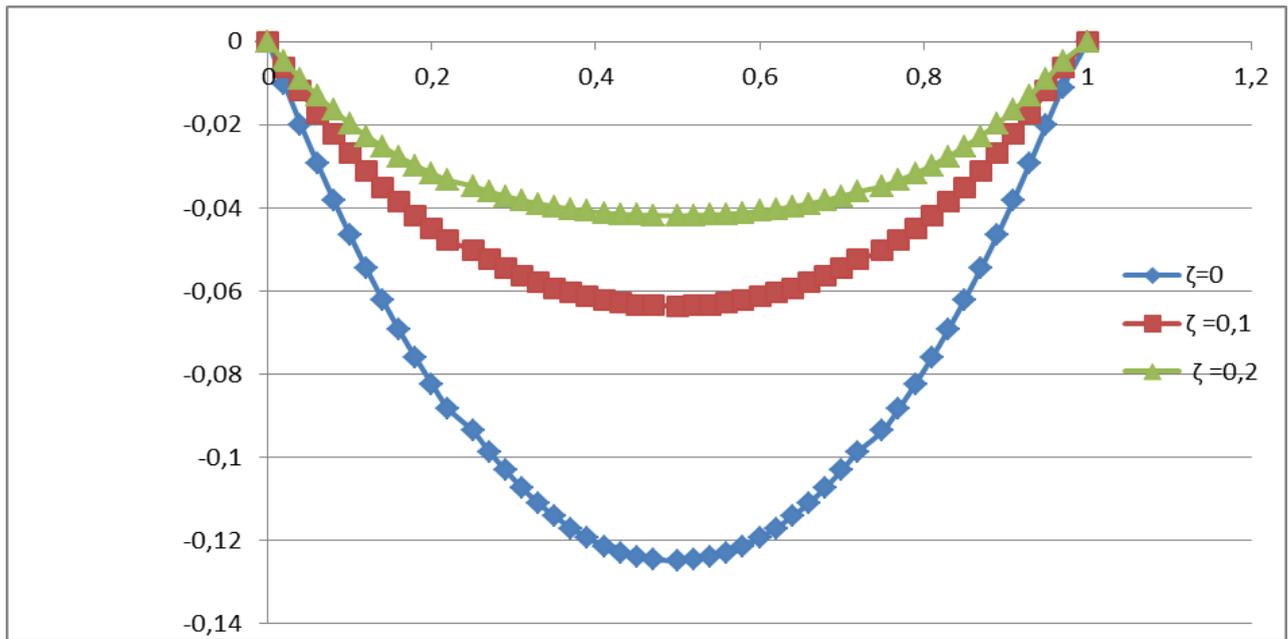


Figure III.6 la variation des moments le long d'une poutre uniformément chargée et reposant sur fondation élastique pour différents raideurs avec $L/h = 20$.

Les figures III.5 et III.6 montrent la variation des déplacements et les moments respectivement dans la poutre reposant sur fondation élastique pour différents raideurs $\zeta = 0, 0.1$ et 0.2 . On constate bien que plus on augmente la raideur les déplacements et les moments diminuent et cela est relatif à l'augmentation de la rigidité

III. 5.2.2 Exemples 02:

Dans cet exemple, nous avons traité le cas de la même poutre mais cette fois reposant sur deux appuis élastiques en $x=L/3$ et $2L/3$ comme il est indiqué en figure III.7.

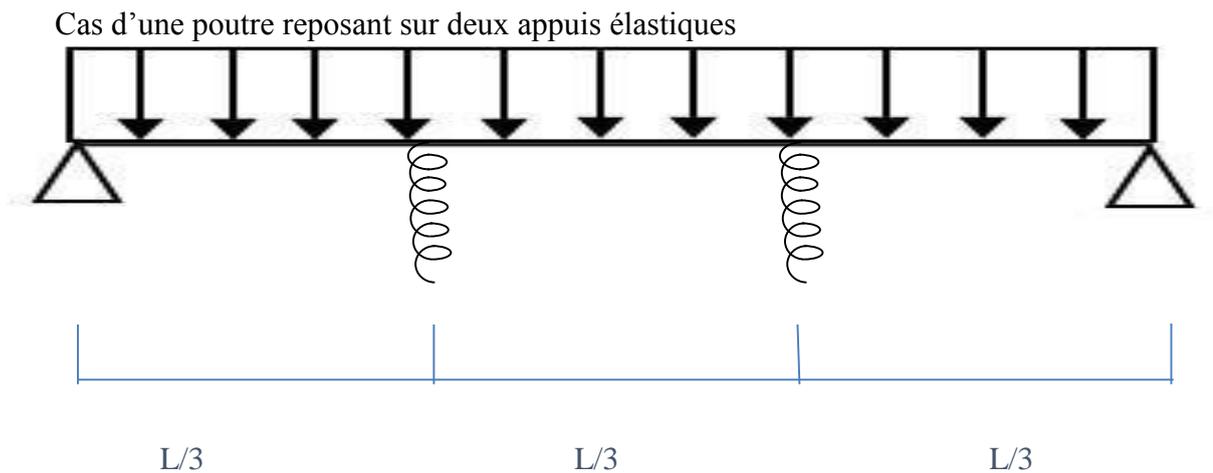


Figure III.7 géométrie et chargement dans une poutre reposant sur deux appuis élastiques.

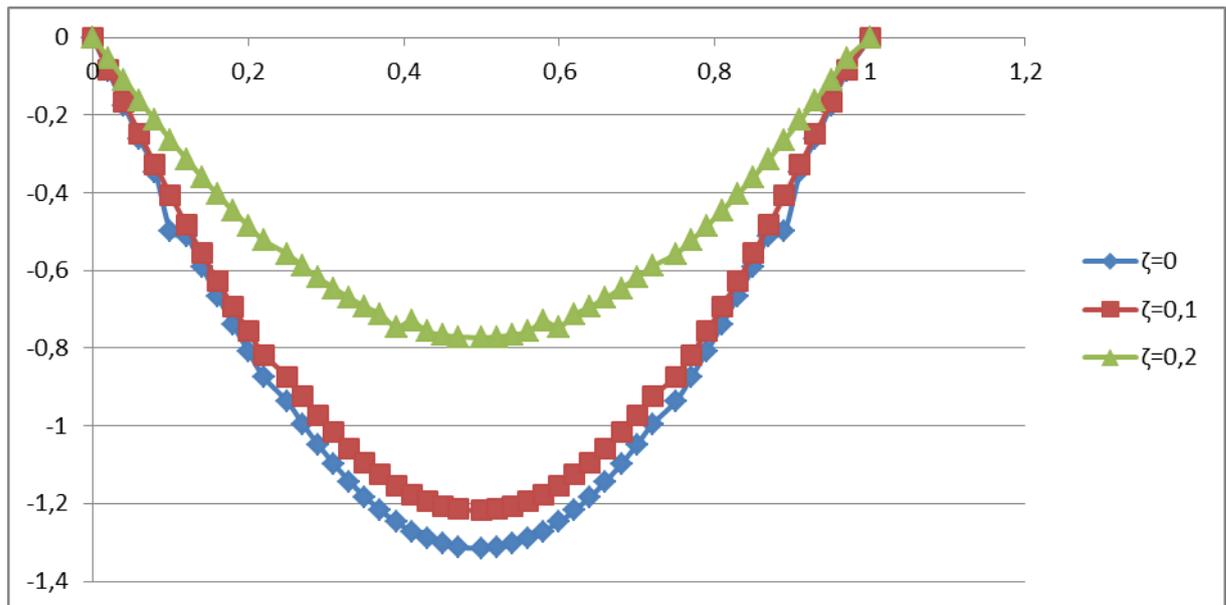


Figure III.8 la variation des déplacements le long d'une poutre uniformément chargée et reposant sur deux appuis élastiques pour différents raideurs avec $L/h = 20$.

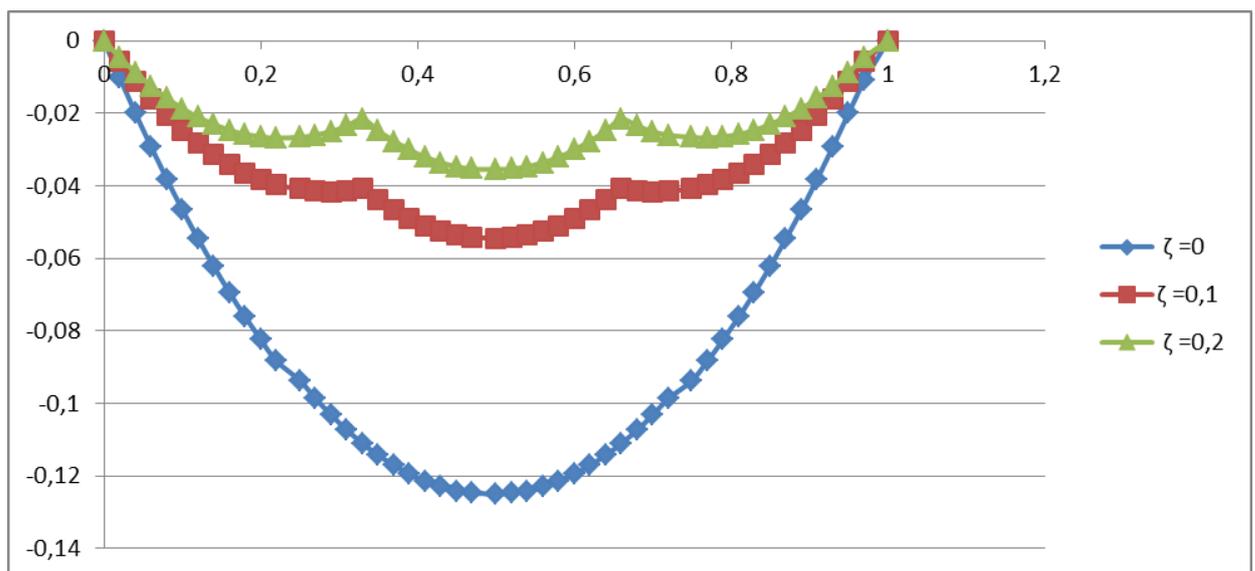


Figure III.9 la variation des moments le long d'une poutre uniformément chargée et reposant sur deux appuis élastiques pour différents raideurs avec $L/h = 20$.

Les figures III.8 et III.9 représentent la variation des déplacements et les moments respectivement dans la poutre reposant sur deux appuis élastiques pour différents raideurs $\zeta = 0, 0.1$ et 0.2 . Il est remarquable que la diminution des déplacements et les moments est relative à l'augmentation des raideurs surtout au niveau des appuis élastiques.

CHAPITRE III Modélisation des poutres reposant sur fondations élastiques

III.6 Conclusion :

Dans ce chapitre on a représenté la formulation des problèmes des poutres en flexion reposant sur des fondations élastiques par la méthode des éléments finis ensuite on a tiré que ce présent modèle est validé par l'exécution d'un programme en Maple par rapport aux solutions CBT et à la fin des exemples sont présenté pour le calcul des déplacements et des moments dans une poutre reposant sur appuis élastiques.

CONCLUSION GENERALE

CONCLUSION GENERALE

Conclusion générale :

Dans le domaine de la géotechnique, la méthode des éléments finis est appliquée en génie civil lorsqu'il est nécessaire d'analyser les déformations structurelles et les chargements sur des structures complexes.

Cette méthode est utilisée pour calculer les contraintes et les déformations dans les matériaux et les structures et pour effectuer des tests basés sur les forces et les déformations afin de garantir que la structure se comportera correctement sous charge.

Dans notre travail un programme en Maple est élaboré pour modéliser et analyser les poutres reposante sur appuis élastiquée en éléments finis après avoir vérifié les résultats numériques avec ceux de la méthode classique des poutres et effectivement sont satisfaisants

Cette recherche peut être étendue dans le futur pour effectuer :

- Une étude du comportement des poutres reposante sur appuis élastique avec diverses conditions aux bords.
- Une application de la méthode actuelle au calcul dynamique des poutres. reposante sur fondation élastique

REFERENCES
BIBLIOGRAPHIQUE

REFERENCE BIBLIOGRAPHIQUE

Référence :

- (1) la méthode des éléments finis : de la physique à l'ingénierie, de S.Malki, P. Villon, P. La deveze aux éditions Dunod.
- (2) Vincent Manet. Methode des Element finis : vulgarisation des aspects mathématiques et illustration de la methode. DEA Elements finis pour l'ingénieur. ViM2, lion, France. 2018.
- (3) ray w. CLOUGH et Edward L. WILSON. Early Finit Element Research at Berkley ..URL :http://www.Ce.Memphis.edu/7111/notes/class_notes/papers/fehistry. Pdf (cf.page128).
- (4) K.K GUPTA et J.L. MEEK.«A bried history of the beginning of the Finit Element Method». In : Int. J. Num Meth in Ehg.39(1996), page3761-3774. URL : http://people.sc.fsu.edu/~jpeterson/history_fem.pdf(cf.page128).
- (5) "The finiteElementMethode : Its Basis and Fundamentals" par O.C. Zienkiewicz et R.L. Taylor.
- (6) G. Dahtt, G. Touzot, Une présentation de la méthode des éléments finis, ISBN27637-6912-8,Les presses de l'université de Laval, Québec.
- (7) Patrick Ciarlet, EricL une ville, La méthode des éléments finis, Ensta, février 2009.
- (8) <http://www.CoursMEF–Chapitre2:Présentationdela Méthode>. A. Seghir2005-2014.
- (9) .Yves Debard «Modélisation Numérique et Réalité Virtuelle »,mémoireMaster Université du Maine.

REFERENCE BIBLIOGRAPHIQUE

- (10) .BATOZJ.L.ETDHATTG, «Modélisation des structures par éléments finis. Poutres et Plaques ». Vol. 2 : élastiques, Eds Hermès, Paris, 1990.
- (11) .FREF.ETJIROUSKJ,« Analyse des structures et milieux continus, Méthode des éléments finis » .Vol.6 Eds P.P.U.R., 1èreEdition,Lausane, 2001.
- (12) ZIENKIEWCZO.CETTAYLORR.L, «The Finite element Method», Mc Graw Hill, London 1991.
- (13) mos 1987]: Zimmos P. Mourwlatos AND Michael G. Parsons (1987), A finite element analysis of beams on elastic foundation including shear and axial effects Computer and Structures Vol. 27. No. 3. pp. 323-331
- (14) Selvadurai A.P.S. (1979), Elastic analysis of soil-foundation interaction, Developments in Geotech Eng., vol. 17, Elsevier scientific publishing comp
- (15) Iancu- Bogdan Teodoru. EBBEF2p (2009.a), A Computer Code for Analysing Beams on Elastic Foundations, Intersections/Intersect II, Vol.6, No.1
- (16) Chandra S., Madhira R. Madhav ,N.G.R.Iyengar, (1987), a new model for non linear subgrades. India MM8-HH.
- (17) Iancu-Bogdan Teodoru (2014), Analysis of beams on elastic foundation:
the finite defference sapproch, Gheorghe Asachi Technica lUniversity of Iasi 1-9.
- (18) Emile Youssef (1994), Etude théorique et expérimentale du flambement des pieux, Matériaux, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées
- (19) Dobromir Dinev (2012), Analytical solution of beam on elastic foundation by singularity functions, Engineering MECHANICS, Vol. 19, No. 6, p. 381–392.

REFERENCE BIBLIOGRAPHIQUE

- (20) Celep Z., Demir F. (2007), Symmetrically loaded beam on a two-parameter tensionless foundation, *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 27, No. 5, 555-574
- (21) Madhav Madhira, Abhishek S.V. and Rajyalakshmi K. (2015) Modelling Ground–Foundation Interactions, *Innovations in Structural Engineering*, 1-17, Conference Paper.
- (22) Mémoire de fin d'étude en vue de l'obtention du diplôme de Master «Comportement statique des poutres poreuses en nano-composites reposant sur fondation élastique ».
- (23) <<waterloo, canada : Mar.9, 2023 : Maple soft today announced a new release 9 mars 2023.

Annexe

Annexe

Poutre simplement appuyée avec ou sans fondations élastiques

Les moments $\zeta=0$

element(1), () ..8.78576903451242 10⁻¹⁰ *q*, () ..
-0.0101996515350207 *q*

element(2), () ..-0.0101996497890794 *q*, () ..
-0.0199652744267208 *q*

element(3), () ..-0.0199652726938748 *q*, () ..
-0.0292968695573655 *q*

element(4), () ..-0.0292968678459787 *q*, () ..
-0.0381944369369959 *q*

element(5), () ..-0.0381944352551104 *q*, () ..
-0.0466579765752669 *q*

element(6), () ..-0.0466579749304087 *q*, () ..
-0.0546874884813488 *q*

element(7), () ..-0.0546874868808090 *q*, () ..
-0.0622829726638495 *q*

element(8), () ..-0.0622829711144853 *q*, () ..
-0.0694444291311131 *q*

element(9), () ..-0.0694444276394929 *q*, () ..
-0.0761718578909525 *q*

element(10), () ..-0.0761718564630641 *q*, () ..
-0.0824652589505950 *q*

element(11), () ..-0.0824652575921032 *q*, () ..
-0.0883246323169281 *q*

element(12), () ..-0.0883246310331110 *q*, () ..
-0.0937499779962414 *q*

element(13), () ..-0.0937499767921706 *q*, () ..
-0.0987412959946376 *q*

element(14), () ..-0.0987412948749199 *q*, () ..
-0.103298586317571 *q*

element(15), () ..-0.103298585286097 *q*, () ..-0.107421848969872 *q*

element(16), () ..-0.107421848030462 *q*, () ..-0.111111083956002 *q*

Annexe

element(17), () ..-0.111111083112600*q*, () ..-0.114366291280550*q*
element(18), () ..-0.114366290535652*q*, () ..-0.117187470946742*q*
element(19), () ..-0.117187470303236*q*, () ..-0.119574622957839*q*
element(20), () ..-0.119574622418812*q*, () ..-0.121527747317523*q*
element(21), () ..-0.121527746883500*q*, () ..-0.123046844026488*q*
element(22), () ..-0.123046843699625*q*, () ..-0.124131913087316*q*
element(23), () ..-0.124131912868460*q*, () ..-0.124782954500984*q*
element(24), () ..-0.124782954391760*q*, () ..-0.124999968269320*q*

Les déplacements $\zeta = 0$

fbar(1) := -3.80726120760962 10⁻¹⁵
fbar(2) := -0.0876066453664164
fbar(3) := -0.174769110351464
fbar(4) := -0.261059078161530
fbar(5) := -0.346067268308119
fbar(6) := -0.429403436607419
fbar(7) := -0.510696375179890
fbar(8) := -0.589593912449872
fbar(9) := -0.665762913145209
fbar(10) := -0.738889278296896
fbar(11) := -0.808677945238744
fbar(12) := -0.874852887607074
fbar(13) := -0.937157115340423
fbar(14) := -0.995352674679269
fbar(15) := -1.04922064816578
fbar(16) := -1.09856115464358
fbar(17) := -1.14319334925755
fbar(18) := -1.18295542345364
fbar(19) := -1.21770460497864
fbar(20) := -1.24731715788013
fbar(21) := -1.27168838250623
fbar(22) := -1.29073261550558
fbar(23) := -1.30438322982721
fbar(24) := -1.31259263472048
fbar(25) := -1.31533227573503

Annexe

Les moments pour $\zeta = 0.1$

element(1), () ..4.64778840795137 10⁻¹⁰ *q*, () ..
-0.00617400518149444 *q*

element(2), () ..-0.00617400425515118 *q*, () ..
-0.0119316436783152 *q*

element(3), () ..-0.0119316427597818 *q*, () ..
-0.0172904758267409 *q*

element(4), () ..-0.0172904749209047 *q*, () ..
-0.0222678638539873 *q*

element(5), () ..-0.0222678629653846 *q*, () ..
-0.0268808830292098 *q*

element(6), () ..-0.0268808821620186 *q*, () ..
-0.0311462387051951 *q*

element(7), () ..-0.0311462378633735 *q*, () ..
-0.0350801894304689 *q*

element(8), () ..-0.0350801886176070 *q*, () ..
-0.0386984758539269 *q*

element(9), () ..-0.0386984750732826 *q*, () ..
-0.0420162551511097 *q*

element(10), () ..-0.0420162544058088 *q*, () ..
-0.0450480407106190 *q*

element(11), () ..-0.0450480400033600 *q*, () ..
-0.0478076468276844 *q*

element(12), () ..-0.0478076461609746 *q*, () ..
-0.0503081381638002 *q*

element(13), () ..-0.0503081375401359 *q*, () ..
-0.0525617837424630 *q*

element(14), () ..-0.0525617831639922 *q*, () ..
-0.0545800152630023 *q*

element(15), () ..-0.0545800147310193 *q*, () ..
-0.0563733895277656 *q*

element(16), () ..-0.0563733890445787 *q*, () ..
-0.0579515547962109 *q*

Annexe

element (17), () ..-0.0579515543629717 *q*, () ..
-0.0593232208827465 *q*

element(18), () ..-0.0593232205010630 *q*, () ..
-0.0604961328457193 *q*

element(19), () ..-0.0604961325166490 *q*, () ..
-0.0614770481164045 *q*

element(20), () ..-0.0614770478404053 *q*, () ..
-0.0622717169423852 *q*

element(21), () ..-0.0622717167208395 *q*, () ..
-0.0628848660335331 *q*

element(22), () ..-0.0628848658671105 *q*, () ..
-0.0633201853098008 *q*

element(23), () ..-0.0633201851985791 *q*, () ..
-0.0635803176780353 *q*

element(24), () ..-0.0635803176220330 *q*, () ..
-0.0636668517731414 *q*

Les déplacements pour $\zeta=0.1$

Annexe

$fbar(19) := -1.39403495854712$
 $fbar(20) := -1.42715486691223$
 $fbar(21) := -1.45437946211826$
 $fbar(22) := -1.47563242568297$
 $fbar(23) := -1.49085487124760$
 $fbar(24) := -1.50000499071846$
 $fbar(25) := -1.50305780081459$
 $fbar(1) := -5.10977556618760 \cdot 10^{-15}$
 $fbar(2) := -0.101725898272643$
 $fbar(3) := -0.202866102022026$
 $fbar(4) := -0.302867925447723$
 $fbar(5) := -0.401216948579974$
 $fbar(6) := -0.497435352924010$
 $fbar(7) := -0.591080284534363$
 $fbar(8) := -0.681742252482989$
 $fbar(9) := -0.769043570102496$
 $fbar(10) := -0.852636845829920$
 $fbar(11) := -0.932203529946549$
 $fbar(12) := -1.00745252300453$
 $fbar(13) := -1.07811885125036$
 $fbar(14) := -1.14396241389794$
 $fbar(15) := -1.20476680666845$
 $fbar(16) := -1.26033822559989$
 $fbar(17) := -1.31050445473393$
 $fbar(18) := -1.35511394091134$

Les moments pour $\zeta = 0.2$

Annexe

$element(1), () ..3.20674260613902 \cdot 10^{-10} q, () ..$
 $-0.00473741262896604 q$

$element(2), () ..-0.00473741199386277 q, () ..$
 $-0.00906502565949227 q$

$element(3), () ..-0.00906502503032035 q, () ..$
 $-0.0130069123538993 q$

$element(4), () ..-0.0130069117342925 q, () ..$
 $-0.0165868457976388 q$

$element(5), () ..-0.0165868451908965 q, () ..$
 $-0.0198281677594502 q$

$element(6), () ..-0.0198281671685701 q, () ..$
 $-0.0227536692961266 q$

$element(7), () ..-0.0227536687238351 q, () ..$
 $-0.0253854826412189 q$

$element(8), () ..-0.0253854820898401 q, () ..$
 $-0.0277449836186353 q$

$element(9), () ..-0.0277449830905785 q, () ..$
 $-0.0298527038455216 q$

$element(10), () ..-0.0298527033426503 q, () ..$
 $-0.0317282520107703 q$

$element(11), () ..-0.0317282515348017 q, () ..$
 $-0.0333902435476346 q$

$element(12), () ..-0.0333902431000700 q, () ..$
 $-0.0348562380462610 q$

Annexe

$element(13), () .. -0.0348562376287029 q, () ..$
 $-0.0361426837873012 q$

$element(14), () .. -0.0361426834007682 q, () ..$
 $-0.0372648688101042 q$

$element(15), () .. -0.0372648684555705 q, () ..$
 $-0.0382368779703598 q$

$element(16), () .. -0.0382368776491176 q, () ..$
 $-0.0390715554767723 q$

$element(17), () .. -0.0390715551893207 q, () ..$
 $-0.0397804724356125 q$

$element(18), () .. -0.0397804721825659 q, () ..$
 $-0.0403738989808086 q$

$element(19), () .. -0.0403738987632107 q, () ..$
 $-0.0408607805988230 q$

$element(20), () .. -0.0408607804163148 q, () ..$
 $-0.0412487183077085 q$

$element(21), () .. -0.0412487181613552 q, () ..$
 $-0.0415439523969948 q$

$element(22), () .. -0.0415439522868618 q, () ..$
 $-0.0417513494663858 q$

$element(23), () .. -0.0417513493928213 q, () ..$
 $-0.0418743925644850 q$

$element(24), () .. -0.0418743925275715 q, () ..$
 $-0.0419151742591474 q$

Les déplacements pour $\zeta=0.2$

$fbar(1) := -3.96118200005581 \cdot 10^{-15}$

$fbar(2) := -0.0697748699381656$

$fbar(3) := -0.139101771304487$

$fbar(4) := -0.207565115059486$

$fbar(5) := -0.274786324693502$

$fbar(6) := -0.340421557468044$

$fbar(7) := -0.404159466846087$

$fbar(8) := -0.465719017578875$

$fbar(9) := -0.524847363833904$

Annexe

$fbar(10) := -0.581317799738543$
 $fbar(11) := -0.634927790774266$
 $fbar(12) := -0.685497093585141$
 $fbar(13) := -0.732865970958458$
 $fbar(14) := -0.776893507992216$
 $fbar(15) := -0.817456034780484$
 $fbar(16) := -0.854445660319989$
 $fbar(17) := -0.887768921766101$
 $fbar(18) := -0.917345552640146$
 $fbar(19) := -0.943107373108623$
 $fbar(20) := -0.964997305014479$
 $fbar(21) := -0.982968513937455$
 $fbar(22) := -0.996983680189718$
 $fbar(23) := -1.00701440031115$
 $fbar(24) := -1.01304072031094$
 $fbar(25) := -1.01505080160433$

Les moments pour une poutre reposant sur deux appuis

$(\zeta=0.1)$

$element(1), () ..3.81766322419395 \cdot 10^{-10} q, () ..$
 $-0.00579295579113507 q$

$element(2), () ..-0.00579295503141491 q, () ..$
 $-0.0111518834275647 q$

$element(3), () ..-0.0111518826751417 q, () ..$
 $-0.0160767832955084 q$

$element(4), () ..-0.0160767825548993 q, () ..$
 $-0.0205676554003768 q$

$element(5), () ..-0.0205676546757030 q, () ..$
 $-0.0246244997471495 q$

$element(6), () ..-0.0246244990421322 q, () ..$
 $-0.0282473163402564 q$

$element(7), () ..-0.0282473156583066 q, () ..$
 $-0.0314361051837559 q$

Annexe

$element(8), () .. -0.0314361045278367 q, () ..$
 $-0.0341908662812160 q$

$element(9), () .. -0.0341908656539865 q, () ..$
 $-0.0365115996357765 q$

$element(10), () .. -0.0365115990394312 q, () ..$
 $-0.0383983052500851 q$

$element(11), () .. -0.0383983046864331 q, () ..$
 $-0.0398509831263156 q$

$element(12), () .. -0.0398509825967584 q, () ..$
 $-0.0408696332661121 q$

$element(13), () .. -0.0408696327718639 q, () ..$
 $-0.0414542556708487 q$

$element(14), () .. -0.0414542552125870 q, () ..$
 $-0.0416048503413092 q$

$element(15), () .. -0.0416048499193268 q, () ..$
 $-0.0413214172778410 q$

$element(16), () .. -0.0413214168920259 q, () ..$
 $-0.0406039564802390 q$

$element(17), () .. -0.0406039561308539 q, () ..$
 $-0.0438591643954502 q$

$element(18), () .. -0.0438591640837266 q, () ..$
 $-0.0466803445784398 q$

$element(19), () .. -0.0466803443063917 q, () ..$
 $-0.0490674970318269 q$

$element(20), () .. -0.0490674968015392 q, () ..$
 $-0.0510206217581399 q$

$element(21), () .. -0.0510206215716933 q, () ..$
 $-0.0525397187597890 q$

$element(22), () .. -0.0525397186186683 q, () ..$
 $-0.0536247880385238 q$

$element(23), () .. -0.0536247879437824 q, () ..$
 $-0.0542758295956293 q$

$element(24), () .. -0.0542758295479020 q, () ..$
 $-0.0544928434318460 q$

Annexe

Les déplacements pour une poutre reposant sur deux appuis ($\zeta=0.1$)

$fbar(1) := -4.80512056052059 \cdot 10^{-15}$
 $fbar(2) := -0.0834753793550360$
 $fbar(3) := -0.166401905610800$
 $fbar(4) := -0.248265427266942$
 $fbar(5) := -0.328593434741453$
 $fbar(6) := -0.406955060370164$
 $fbar(7) := -0.482961078406296$
 $fbar(8) := -0.556263905020044$
 $fbar(9) := -0.626557598298210$
 $fbar(10) := -0.693577858243877$
 $fbar(11) := -0.757102026776129$
 $fbar(12) := -0.816949087729812$
 $fbar(13) := -0.872979666855354$
 $fbar(14) := -0.925096031818607$
 $fbar(15) := -0.973242092200746$
 $fbar(16) := -1.01740339949821$
 $fbar(17) := -1.05760714712269$
 $fbar(18) := -1.09385170513451$
 $fbar(19) := -1.12589522444270$
 $fbar(20) := -1.15346703260467$
 $fbar(21) := -1.17633809909254$
 $fbar(22) := -1.19432103529294$
 $fbar(23) := -1.20727009450676$
 $fbar(24) := -1.21508117194905$
 $fbar(25) := -1.21769180474889$

Les moments pour une poutre reposant sur deux appuis ($\zeta=0.2$)

$element(1), () ..2.49631568854572 \cdot 10^{-10} q, () ..$
 $-0.00461123319459137 q$
 $element(2), () ..-0.00461123269934593 q, () ..$
 $-0.00878843836659253 q$
 $element(3), () ..-0.00878843787708787 q, () ..$
 $-0.0125316157681299 q$

Annexe

element(4), () ..-0.0125316152878307 q, () ..
-0.0158407654033526 q

element(5), () ..-0.0158407649353688 q, () ..
-0.0187158872759529 q

element(6), () ..-0.0187158868229814 q, () ..
-0.0211569813891856 q

element(7), () ..-0.0211569809535564 q, () ..
-0.0231640477458125 q

element(8), () ..-0.0231640473294809 q, () ..
-0.0247370863481520 q

element(9), () ..-0.0247370859527216 q, () ..
-0.0258760971980684 q

element(10), () ..-0.0258760968247046 q, () ..
-0.0265810802969851 q

element(11), () ..-0.0265810799464708 q, () ..
-0.0268520356457842 q

element(12), () ..-0.0268520353185207 q, () ..
-0.0266889632449461 q

element(13), () ..-0.0266889629410817 q, () ..
-0.0260918630945262 q

element(14), () ..-0.0260918628136635 q, () ..
-0.0250607351940841 q

element(15), () ..-0.0250607349354417 q, () ..
-0.0235955795426205 q

element(16), () ..-0.0235955793051373 q, () ..
-0.0216963961388059 q

element(17), () ..-0.0216963959219948 q, () ..
-0.0249516042124248 q

element(18), () ..-0.0249516040168541 q, () ..
-0.0277727845340252 q

element(19), () ..-0.0277727843614160 q, () ..
-0.0301599371058523 q

element(20), () ..-0.0301599369586277 q, () ..
-0.0321130619307419 q

Annexe

$$\begin{aligned} \text{element}(21), () .. -0.0321130618105301 q, () .. \\ -0.0336321590107012 q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{element}(22), () .. -0.0336321589192725 q, () .. \\ -0.0347172283477804 q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{element}(23), () .. -0.0347172282860905 q, () .. \\ -0.0353682699431185 q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{element}(24), () .. -0.0353682699121060 q, () .. \\ -0.0355852837977819 q \end{aligned}$$

Les déplacements pour une poutre reposant sur deux appuis

$$(\zeta=0.2)$$

Annexe

$$fbar(1) := -3.86030382478423 \cdot 10^{-15}$$

$$fbar(2) := -0.0544695127740232$$

$$fbar(3) := -0.108503550426392$$

$$fbar(4) := -0.161701339434459$$

$$fbar(5) := -0.213703748194157$$

$$fbar(6) := -0.264193287019622$$

$$fbar(7) := -0.312894108142858$$

$$fbar(8) := -0.359572005713448$$

$$fbar(9) := -0.404034415798296$$

$$fbar(10) := -0.446130416381434$$

$$fbar(11) := -0.485750727363854$$

$$fbar(12) := -0.522827710563395$$

$$fbar(13) := -0.557335369714675$$

$$fbar(14) := -0.589289350469060$$

$$fbar(15) := -0.618746940394679$$

$$fbar(16) := -0.645807068976489$$

$$fbar(17) := -0.670610307616385$$

$$fbar(18) := -0.693249508031968$$

$$fbar(19) := -0.713501717452571$$

$$fbar(20) := -0.731096263423099$$

$$fbar(21) := -0.745804115405103$$

$$fbar(22) := -0.757437884776552$$

$$fbar(23) := -0.765851824831631$$

$$fbar(24) := -0.770941830780583$$

$$fbar(25) := -0.772645439749600$$