RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN TIARET
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUES
Département de Mathématiques

MÉMOIRE MASTER

Présenter en vue de l'obtention du diplôme de master

Spécialité :
« Mathématiques »

Option :
« Analyse fonctionnelle et équations différentielles »

Présenté Par :

BENABDESSELAM Yasmine et BENDJAMAA Fatima Zahra

Sous L'intitulé :

Contractions non linéaires dans les espaces b-métriques avec applications aux équations différentielles fractionnaires

Soutenu publiquement le 24 /06/2024
À Tiaret devant le jury composé de :

Mr BENALI Halim	MCA	Université de Tiaret	Président
Mme KHELIFA Hizia	MCB	Université de Tiaret	Examinatrice
Mr BAGHDAD Said	MCA	Université de Tiaret	Encadrant

Année universitaire : 2023/2024

Remercîment

Nous exprimons notre profonde gratitude envers le Tout-Puissant, Allah, pour nous avoir donné la force, le courage et les ressources nécessaires pour mener à bien cette tâche.

Nous exprimons nos sincères remerciements et notre profonde gratitude envers **Mr.Baghdad Said**, qui a généreusement accepté de nous encadrer et de diriger ce travail, apportant une aide inestimable.

Nous tenons à exprimer notre reconnaissance envers **Mr. BENALI Halim** d'avoir accepté de présider le jury de ce mémoire, nous sommes honorés par sa participation.

Nous exprimons également notre sincère gratitude envers **Mme. KHELIFA Hizia** d'avoir accepté d'examiner attentivement notre travail, ses contributions ont été précieuses.

Nous souhaitons également rendre hommage à tous nos enseignants de l'université Ibn Khaldoun qui, tout au long de notre cursus, ont partagé leur savoir et nous ont guidés dans les méandres de nos études.

Nous souhaitons également exprimer notre reconnaissance envers toutes personnes participant de près ou de loin, directement ou indirectement, à la réussite de ce travail.

Dédicace

Je dédie humblement ce modeste travail en guise de remercîment

À mon très chère père, je souhaite exprimer ma gratitude infinie pour ton soutien constant dans toutes les étapes de ma vie*, ta bienveillance et ton soutien inconditionnel. Ce sont ces éléments essentiels qui m'ont permis de persévérer dans les moments les plus difficiles. Tu m'as toujours encouragé à donner le meilleur de moi-même. Du fond du cœur, je te remercie pour tout ce que tu as fait et continue de faire pour moi. Je suis fière d'être ton enfant et reconnaissante de l'amour et du soutien que tu m'as apporté tout au long de ma vie. Que Dieu te protège et te bénisse.*

À ma chère mère, qui a été là à chaque étape de mon parcours. Ta force, ton soutien constant et ton affection ont été des sources de réconfort inestimables. Je te remercie du fond du cœur pour tout ce que tu as fait et continues de faire pour moi. Je suis vraiment fière d'être ton enfant et reconnaissante de l'amour et du soutien que tu m'as apporté tout au long de ma vie. Que Dieu te protège et te bénisse.

À ma chère *grand mère,* Tu as toujours été présente pour moi, veillant sur moi avec amour. Ton soutien inconditionnel et tes encouragements ont été des phares dans les moments sombres et des sources de motivation dans les moments de doute. Je te suis infiniment reconnaissante pour tout ce que tu as fait. Merci d'avoir été toujours là.

À ma chère sœur, tu as toujours été là pour moi, avec ton soutien inébranlable et ton écoute attentive. À travers les hauts et les bas, ta présence a été un réconfort constant. Merci pour ton soutien sans faille et pour avoir été une épaule sur laquelle je pouvais toujours m'appuyer. *Ta présence et ton soutien ont été une source de réconfort* inestimable.

À mes trois frères, qui ont toujours été présents pour moi, je vous suis infiniment reconnaissante. Votre présence constante dans ma vie a été une bénédiction inestimable. Je vous suis profondément reconnaissante. Merci d'avoir toujours été là.

À *toute ma famille, en particulier à ceux qui ont toujours été là lorsque j'en avais besoin dont mes cousines, je vous adresse ma sincère gratitude. Votre présence et votre soutien ont été une sourcede réconfort.*

À mes amis et camarades, je souhaite vous remercier pour tous les merveilleux moments de joie, de plaisir et surtout de fous rires que nous avons partagés au cours de ces dernières années d'études. Votre présence et votre amitié ont rendu cette expérience mémorable.

Enfin, j'aimerais adresser une reconnaissance spéciale à mon binôme Fatima. Je te remercie pour ta patience, ta compréhension et surtout ton soutien moral. Grâce à notre équipe solide, nous avons pu accomplir ce travail avec succès.

Que Dieu vous protège et vous bénisse tous.

Dédicace

Je dédie humblement ce modeste travail en guise de remercîment

À ma très chère mère, qui me donne toujours l'espoir de vivre et qui n'a jamais cessé de prier pour moi : mon adorable mère "Aicha".

À mon très cher père, pour ses encouragements, son soutien, surtout pour son amour et son sacrifice afin que rien n'entrave le déroulement de mes études, et tout mon respect : mon père "Mokhtar« .

À mes frères Mohamed et Abdellah, et à mes sœurs Souad et karima.

A ma nièce Iline.

À ma cousine "Assia".

À mes meilleurs amis :"Yamina et Hanane".

À tous c eux qui m'ont aidé et compulse ce modeste travail.

Enfin,j e remercie ma binôme,"Yasmine" qui a contribué à la réalisation de ce modeste travail.

*Avec tout ma reconnaissance, [**Fatima**]*

Résumé

Dans ce travail, on présente le principe de contraction dans les espaces b-métriques qui sont une généralisation des espaces métriques. On va donner également quelques applications de théorème du point fixe de type **Geraghty pour étudier l'existence des solutions de certaines classes d'équations non linéaires.**

Notations

Symboles mathématiques	Signification
α	Alpha
$\aleph$	Aleph
β	Beta
ε	Epsilon
γ	Gamma
λ	Lambda
μ	Mu
ω	Omega
ϕ	Phi
Ψ	Psi
ρ	Rho
σ	Sigma
ϑ	Vartheta
Θ	Theta
ξ	Xi

Table des matières

Introduction

Dans la vie, l'exemple le plus simple qui nous permet de voir un point fixe se trouve dans le thermomètre lorsque cet outil est utilisé pour mesurer la température, les point d'ébullition et de congélation de l'eau sont des points fixes car ils sont facilement réalisables. En mathématique, un point fixe est un point qui reste statique par une application ou une transformation.

Qu'elle est l'importance de la théorie du point fixe ?

La théorie du point fixe est considéré comme la base de l'analyse non linéaire, il est à noté que cette théorie est l'une des outils les plus utiles et importantes dans l'étude de plusieurs problèmes nonlinéaires (les équations différentielles non linéaires et intégrales, les inégalités variationnelles...ect.) qui modélisent des phénomènes en physique, chimie, biologie, économie..ect. et plus de problèmes d'optimisation générale.

Soit X un ensemble et $T : X \to X$ une application. Une solution d'une équation $Tx = x$ est appelée un point fixe de T. L'original de la théorie du point fixe une branche importante de l'analyse fonctionnelle non linéaire, qui remonte à la dernière partie du XIXe siècle, le reste dans l'utilisation d'approximation successives de l'existence et l'unicité de la solution. Cette méthode est associée aux noms de mathématiciens célèbres tels que Cauchy, Liouville, Lipschitz, Peano, Picard. En fait, les précurseurs de la théorie du point fixe approché sont explicites dans les travaux de Picard. Toutefois, c'est le mathématicien polonais Stefan Banach, qui est crédité sur le placement d'une idée abstraite.

Vers 1922, Banach reconnu le rôle fondamentale de la complétude métrique : une propriété partagée par l'ensemble de l'espace couramment exploitées dans l'analyse. Pendant de nombreuses années, l'activité dans la théorie du point fixe a été limitée à miroir extensions de principe de contraction de Banach et ses applications multiples. La théorie acquise impute en grande partie à de nouveaux résultat d'un travail de pionnier de Brouwer dans le milieu des années soixante.

La qualité ainsi que le montant de la recherche de la théorie des points fixes dans l'espace métrique a grandement augmenté dans les années 1970. Les descriptions des évolutions importantes dans cette période prouvée l'existence des théorèmes du point fixe en utilisant des applications contractive plus généralisée que les applications contractive précédentes.

Parmi les nombreuses généralisations du principe de contraction de Banach qui ont été données dans différents types d'espaces métriques, nous rappelons l'espace métrique généralisé donné par Perov en 1964. C'était le point tournant de l'arène des points fixes et donnait une nouvelle dimension. L'idée de l'espace b-métrique a été initiée à partir du travail de Bakhtin en 1989. Après, Czerwik a donné un axiome qui était plus faible que l'inégalité triangulaire et formellement défini un espace b-métrique en vue de généraliser le théorème de la contraction de Banach. La théorie du point fixe dans l'espace b-métrique est un domaine très dynamique dans la recherche mathématique. Par la suite, de nombreux chercheurs ont prouvé que la notion d'applications contractives définie précédemment dans l'espace métrique ordinaire, peut s'étendre à des espaces b-métriques.

Dans ce travail, nous présentons les faits historiques, des définitions bien connues dans l'espace métrique et les applications contractantes, les théorèmes importants qui sont des théorèmes du point fixe dans l'espace métrique et on a définit l'intégrale et la dérivée d'ordre fractionnaire .

Nous parlons sur l'espace b-métrique généralisé dans le deuxième chapitre qui contient : des définitions, des propriétés et les applications contractantes ((α, β)-Geraghty).

Dans le troisième chapitre, nous allons présenter des applications des théorèmes de point fixe pour des équations non linéaires dans des espaces b-métriques arbitraires.

Chapitre 1

Généralités

1.1 Topologie des espaces métriques

Dans ce chapitre, on rappelle quelques notions de base nécessaire concernant les espaces métriques.

1.1.1 Espaces métriques

Définition 1.1.1. *[1] Soit X un ensemble, on appelle distance sur X toute application d de $X \times X \to \mathbb{R}^+$ telle que :*

i) $\forall x,\ y \in X,\ d(x,y) = 0 \Leftrightarrow (x = y)$;

ii) $\forall x,\ y \in X,\ d(x,y) = d(y,x)$ *(symétrie) ;*

ii) $\forall x,\ y,\ z \in X,\ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ *(inégalité triangulaire).*

Le couple (X, d) est appelé un espace métrique.

Exemple 1.1.1. *[1]*

1) La distance discrète : X un ensemble quelconque, $d(x,y) = 0$ si $x = y$, $d(x,y) = 1$ si $x \neq y$.

2) La distance dans $\mathbb{R}$: La distance usuelle est définie par $d(x,y) = |x - y|$.

3) La distance dans $\overline{\mathbb{R}}$: $d(x,y) = |arctan\ x - arctan\ y|$.

Définition 1.1.2. *[1] Soit (X, d) un espace métrique, pour tout $x \in X$ et $r > 0$. On appelle boule ouverte de centre x et de rayon r l'ensemble donné par :*

$$B(x,r) = \{y \in X,\ d(x,y) < r\}\cdot$$

On appelle boule fermée d'un ensemble (X,d) l'ensemble donné par :

$$\overline{B}(x,r) = \{y \in X,\ d(x,y) \leq r\}\cdot$$

On définit aussi la sphère comme $S(x,r)$:

$$S(x,r) = \{y \in X,\ d(x,y) = r\}\cdot$$

Définition 1.1.3. *[7] Soit (X,d) un espace métrique, on dit qu'une partie A de X est bornée s'il existe une boule fermée $B_f(x_0,r)$ telle que $A \subset B_f(x_0,r)$ i.e*

$$\forall x \in A,\ d(x_0,x) \leq r.$$

Définition 1.1.4. *[1] Soit (X,d) un espace métrique et A une partie de X et $x \in X$. On appelle distance d'un point x à un ensemble A, la quantité*

$$d(x,A) := \inf_{y \in A} d(x,y)\cdot$$

Définition 1.1.5. *[1] On considère (X,d) un espace métrique, un ensemble V est un voisinage de x lorsqu'il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset V$.*

Définition 1.1.6. *[8] On considère (X,d) un espace métrique, un ensemble U est ouvert lorsqu'il est un voisinage de chacun de ses points, c'est-a-dire pour tout $x \in U$, il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset U$. Un ensemble F est fermé si et seulement si $F^c = X \ \backslash F$ est ouvert.*

Proposition 1.1.1. *[8] Dans un espace métrique :*

1) *Toute boule ouverte est un ouvert .*
2) *Toute boule fermée est un fermé .*

Corollaire 1.1.1. *[8] On a les propriétés suivantes :*

- *$X, \emptyset$ sont des ouvertes :*
- *Une union quelconque d'ouverts est un ouvert .*
- *Une intersection finie d'ouvertes est un ouvert.*
- *$X, \emptyset$ sont des fermés :*
- *Une intersection quelconque de fermée est un fermé .*
- *Une union finie de fermés est un fermé.*

Remarque 1.1.1. *Une intersection dénombrable d'ouverts n'est pas forcément un ouvert .*

Définition 1.1.7. *[9] On définit A° l'intérieur d'un ensemble A par*

$$A^\circ = \bigcup_{O \text{ ouvert}, \quad o \subset A} O.$$

Proposition 1.1.2. *[9] L'ensemble A° est un ouvert et c'est "Le plus grand ouvert contenu dans A" En outre, l'ensemble A° est caractérisé par*

$$A^\circ = \{x \in A, \ A \text{ voisinage de } x\}.$$

Définition 1.1.8. *[9] On définit $\overline{A}$ l'adhérence d'un ensemble A par*

$$\overline{A} = \bigcap_{F \textbf{fermé}, \quad A \subset F} F.$$

Proposition 1.1.3. *[9] L'ensemble $\overline{A}$ est toujours un fermé. En outre on a :*
i) Si F est fermé est $A \subset F$ alors $\overline{A} \subset F$.
ii) $A = \overline{A}$ si et seulement si A est fermé .

1.2 Applications continues

Pour la continuité d'une application entre deux espaces métriques, on commence par la définition simple suivante :

Définition 1.2.1. *Soient (E, d_E) et (F, d_F). Une application $f : E \to F$ est dite continue en a si $x \to a \Rightarrow f(x) \to f(a)$.*

Exemple 1.2.1. *Soit $a \in E$ et (X, d) un espace métrique. L'application $f : X \to d(a, x)$ est continue de E dans $[0, +\infty[$.*

Théorème 1.2.1. *Soit $f : E \to F$ et soit $b = f(a)$. $f$est continue en a si et seulement si pour tout $V \in v_b$, on a $f^{-1}(V) \in v_a$.*

Définition 1.2.2. *L'application $f : X \to Y$ entre les espaces métriques X et Y est dite uniformément continue pour tous x et y dans X si*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \ \sigma > 0 \text{ tel que } d(x, y) < \sigma \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

1.2.1 Applications lipschitziennes

Définition 1.2.3. *Soit $(X, \ d_X)$ et $(Y, \ d_Y)$ deux espaces métrique. Une fonction $f : X \to Y$ est dite lipschitzienne s'il existe une constante $C > 0$ telle que, $\forall \ (x, y) \in X$,* *l'inégalité suivante est satisfaite :*

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq C d_X(x, y).$$

Toute application lipschitzienne est continue et uniformément continue en ce sens que pourtout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ telque $\forall x,\ y \in E,\ d_X(x,y) < \eta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Remarque 1.2.1.

1) *Lorsque la constante C peut être choisie inférieur à 1 et que $X = Y$, On dit que f est une application contractante .*
2) *Notons que contraction $\Rightarrow$ Lipschitzienne, et que toute ces applications sont uniformément continues.*

1.2.2 Applications contractantes

Définition 1.2.4. *Soit (X, d) un espace métrique et l'application $T : X \to X$ est dite contractante s'il existe $k \in [0, 1[$ et*

$$d(T_x, T_y) \leq k d(x, y), \quad \forall x,\ y \in X.$$

1.3 Espaces complets

Définition 1.3.1. *Soient (X, d) un espace métrique et $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans X. On dit que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon,$$

on note alors

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x.$$

On en déduit alors les propriétés suivantes :

Proposition 1.3.1.

i- La limite d'une suite convergente est unique .

ii- Toute sous-suite d'une suite convergente converge vers la même limite.

Définition 1.3.2. *[17] Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dés que*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad \forall p, q \geq n_\varepsilon \Rightarrow d(x_p, x_q) \leq \varepsilon.$$

On a les propriétés suivantes :

Proposition 1.3.2. *[17] Soit (X, d) un espace métrique, on a alors :*

i- Toute suite convergente est de Cauchy .

ii- Toute suite de Cauchy est bornée .

iii- Une suite de Cauchy qui possède une sous-suite convergente est convergente .

Exemple 1.3.1. *Soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ définie par :*

$$U_n = \frac{1}{n}$$

Soit $n, m \in \mathbb{N},\ n > m$

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &= \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \\ &= \left|\frac{n-m}{nm}\right| \\ &\leq \left|\frac{n}{nm}\right| \\ &= \left|\frac{1}{m}\right| \\ &\leq \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} = 0. \end{aligned}$$

Donc $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

Définition 1.3.3. *Soit (X, d) un espace métrique. On dit qu'une suite $(x_n) \subset X$ est une suite de Cauchy pour la distance d si les termes de la suite finissent par être arbitrairement proches, autrement dit si la propriété suivante est vérifiée :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p, q \geq N, \quad d(x_p, x_q) < \varepsilon.$$

L'espace métrique (X, d) est dit complet si toute suite de Cauchy de (X, d) est convergente.

Exemple 1.3.2. $\mathbb{R}, \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *sont complets pour la distance usuelle.*

Exemple 1.3.3. $\mathbb{Q}$ *n'est pas complet pour la distance usuelle.*

Proposition 1.3.3. *Soit (x, d) un espace métrique, et soit A une partie de x.*

i- Si A est complet pour d, alors A est fermée dans X.

ii- Si (X, d) est supposé complet, alors A est complet pour d si et seulement si A est une partie fermée de X.

Théorème du point fixe de Banach

Le théorème de point fixe de Banach est aussi connu sous le nom de principe de contraction de Banach, ou le théorème du point fixe de Picard, est apparu dans le cadre de résoudre de la résolution d'une équation intégrale. À cause de sa simplicité et de son utilité, ce théorème est largement utilisé dans plusieurs branches de l'analyse mathématique, en particulier, dans la branche des équations différentielles. Ce théorème du point fixe a connu de diverses généralisations dans différents espaces.

Théorème 1.3.1. *Soit (X, d) un espace métrique complet et $T : X \to X$ une application contractante de constante de contraction k tel que, $\forall x, y \in X$:*

$$d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y).$$

Alors T possède un point fixe unique dans X.

Démonstration.

1) Existence :

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} x_0 \in X \\ x_{n+1} = Tx_n, \ n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{1.1}$$

Montrons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Soient $m, \ n \in \mathbb{N}$ avec $m \leq n$:

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_n) \\ &\leq d(x_m, x_{m+1}) + +d(x_{m+1}, x_{m+2}) + ... + d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq k^m d(x_0, x_1) + k^{m+1} d(x_0, x_1) + ... + k^{n-1} d(x_0, x_1) \\ &\leq (k^m + k^{m+1} + ... + k^{n-1}) d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Mais

$$k^m + k^{m+1} + ... + k^{n-1} = k^m \left(\frac{1 - k^{n-m}}{1 - k} \right) = \frac{k^m}{1 - k}(1 - k^{n-m}).$$

D'où

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{k^m}{1 - k}(1 - k^{n-m}) d(x_0, x_1).$$

On a

$$1 - k^{n-m} < 1;$$

donc
$$d(x_m, x_n) \leq \frac{k^m}{1-k} d(x_0, x_1).$$
Supposons que $d(x_0, x_1) \neq 0$, pour que $d(x_m, x_n) < \varepsilon$, il suffit que :
$$\frac{k^m}{1-k} d(x_0, x_1) < \varepsilon.$$

Alors $(x_n)_n$ est de Cauchy dans X et comme (X, d) est complet, donc la suite $(x_n)_n$ est convergente dans X.

Soit $\alpha = \lim_{n \to +\infty} x_n,\ \alpha \in X$. Montrons que α est un point fixe de T.

D'après la continuité de T, on a :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = Tx_n;$$
$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} x_{n+1} = Tx_n;$$
$$\Rightarrow \alpha = T(\lim_{n \to +\infty} x_n) = T(\alpha).$$
Donc $\alpha = T\alpha$, d'où α est un point fixe de T.

2) L'unicité :

Supposons qu'il existe $\alpha_1,\ \alpha_2 \in X$ tel que $\alpha_1 \neq \alpha_2$, avec $\alpha_1 = T\alpha_1$ et $\alpha_2 = T\alpha_2$. On a :
$$d(T\alpha_1, T\alpha_2) \leq kd(\alpha_1, \alpha_2);$$
$$d(\alpha_1, \alpha_2) \leq kd(\alpha_1, \alpha_2).$$
Par conséquent, $d(\alpha_1, \alpha_2) = 0$ ce qui entraîne $\alpha_1 = \alpha_2$. □

1.3.1 Quelques types de contractions

1) **Contraction de Boyd-Wong**

Théorème 1.3.2. *[11] Soit (X, d) un espace métrique complet. Et $T : X \to X$ une application supposons qu'il existe une fonction $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ semi-continue supérieurement telle que $\phi(t) < t$ pour tout $t > 0$ et vérifiant :*
$$d(Tx, Ty) \leq \phi(d(x, y)).$$
Pour tout $x, y \in X$. Alors T admet un point fixe unique x^*. En outre, pour tout $x \in X$, on a $\lim_{n \to \infty} (T^n x) = x^*$. Dans ce cas, T est dite ϕ -contraction ou contractive non linéaire.

2) **Contraction de Meir-Keeler**

Théorème 1.3.3. *[12] Soit (X, d) un espace métrique complet, et $T : X \to X$ une application satisfaisant pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\gamma > 0$ tel que pour tout $x, y \in X$:*

$$\varepsilon \leq d(x, y) < \gamma \Rightarrow d(Tx, Ty) < \varepsilon.$$

Alors T a un point fixe unique dans X. De plus, pour tout $x \in X$, on a $\lim_{n\to\infty} (T^n x) = x^*$.

3) **Contraction de Geraghty**

Définition 1.3.4. *[14] Soit (X, d) un espace métrique. L'application $T : X \to X$ est dite contraction de Geraghty si et seulement si il existe une fonction $\beta : \mathbb{R}^+ \to [0, 1)$ satisfaisant $\beta(t_n) \to 1$ implique $t_n \to 0$ et pour tout $x, y \in X$ on a :*

$$d(Tx, Ty) \leq \beta(d(x, y)).$$

Théorème 1.3.4. *[14] Toute contraction de Geraghty d'un espace métrique complet dans lui même admet un point fixe unique.*

4) **Contraction de Matkowski**

Définition 1.3.5. *[15] Une application $T : X \to X$ d'un espace métrique (X, d) est dite contraction de Matkwoski (ou ϕ-contraction) si et seulement si il existe une fonction $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ strictement croissante vérifiant :*

$$\lim_{n\to\infty} \phi^n(t) = 0, \; \textit{pourtout } t \in \mathbb{R}_+,$$

et

$$d(Tx, Ty) \leq \phi(d(x, y)).$$

Théorème 1.3.5. *[15] Toute $\phi -$ contraction T d'un espace métrique complet (X, d) dans lui même admet un point fixe unique x^*. De plus, pour tout $x_0 \in X$, on a :*

$$\lim_{n\to\infty} (T^n x) = x^*.$$

5) **Contraction de Caristi**

Théorème 1.3.6. *[16] Soit (X, d) un espace métrique complet, et $T : X \to X$ une application satisfaisant la condition suivante : il existe une fonction $\phi : X \to \mathbb{R}^+$ semi-continue inférieurement telle que :*

$$d(x, Tx) \leq \phi(x) - \phi(Tx),$$

pour tout $x \in X$. Alors T admet un point fixe.

6) **contraction de Branciari**

Théorème 1.3.7. *[12] Soit T une application d'un espace métrique (X,d) dans lui même satisfaisant :*

$$\int_0^{d(Tx,Ty)} \phi(t)dt \leq k \int_0^{d(x,y)} \phi(t)dt,$$

pour tout $x,\ y \in X$, ou $0 \leq k \leq 1$ et $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction intégrable au sens de Lebesgue vérifiant :

$$\int_0^{\varepsilon} \phi(t)dt > 0,\ \textit{pour tout } \varepsilon > 0.$$

Alors T a un point fixe unique x^*. De plus, pour tout $x_0 \in X$, on a : $\lim_{n\to\infty} T^n x_0 = x^*$.

1.4 Intégrale et dérivée d'ordre fractionnaire

1.4.1 Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

Définition 1.4.1. *On appelle intégrale fractionnaire de f d'ordre α, et on la note $I_a^{(\alpha)}$ la fonction définie par*

$$I_a^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_\alpha^x (x-t)^{\alpha-t} f(t)dt, \tag{1.2}$$

où $\Gamma(\alpha)$ est la fonction Gamma d'Euler définie par

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt.$$

Remarque 1.4.1. *On peut écrire $I_a^{(\alpha)}$ sous la forme suivante*

$$I_a^{(\alpha)} = \int_0^{x-a} t^{\alpha-1} f(x-t)dt.$$

1.4.2 Dérivée fractionnaire de Riemann -Liouville

Définition 1.4.2. *On appelle dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de f d'ordre α, et on la note $\mathcal{D}_a^{(\alpha)}$ la fonction définie par*

$$\mathcal{D}_a^{(\alpha)} f(x) = \mathcal{D}^{(n)} I_a^{(n-\alpha)} f(x) = \frac{d^n}{dx^n} I_a^{(n-\alpha)} f(x),$$

avec n un entier naturel supérieure strictement à α.

1.4.3 Dérivée fractionnaire de Caputo

Définition 1.4.3. *La dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre* $\alpha \in \mathbb{R}_+$ *d'une fonction* f *de classe* $C^n([a,b])$ *est définie par*

$$^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+} = I^{n-\alpha}_{a^+} f^{(n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{\alpha}^{t} (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds, \ t > a,$$

avec $n-1 < \alpha < n$.

Chapitre 2

Espaces b-métriques

2.1 Espaces b-métriques

La notion d'espace b-métrique a été introduite par Bakhtin ou il a généralisé la notion d'espace métrique. Par la suite, cette notion a été utilisé par Czerwik ou il a donné une caractérisation du célèbre théorème du point fixe de Banach dans le contexte d'espace b-métrique complet. Après Czerwik plusieurs auteurs sont intéressés a l'existence et l'unicité du point fixe dans le cadre d'espace b-métrique.

Définition 2.1.1. *[10] Soit X un ensemble non vide et $c \geq 1$ un nombre réel donné. L'application $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ est appelée b-métrique si les conditions suivantes sont vérifiées :*

i) $\forall x,\ y \in X$: $d(x,\ y) = 0 \Leftrightarrow (x = y)$;

ii) $\forall x,\ y \in X$: $d(x,\ y) = d(y,\ x)$ *(symétrie)* ;

iii) $\forall x,\ y,\ z \in X$: $d(x,\ z) \leq c[d(x,\ y) + d(y,\ z)]$.

Le couple (X, d) est dit un espace b-métrique.

Notant que l'espace métrique standard est évidement un espace b-métrique. Cependant, Czerwik montre qu'une b-métrique sur X n'est pas nécessairement une métrique sur X. Les exemples suivants montrent qu'une b-métrique sur X n'est pas nécessairement une métrique sur X.

Exemple 2.1.1. *[1] Soit $X = (x_1,\ x_2,\ x_3)$ et $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ tel que :*

$$d(x_1,\ x_2) = a \geq 2;$$

$$d(x_1,\ x_3) = d(x_2,\ x_3) = 1;$$

$$d(x_n,\ x_n) = 0;$$

et

$$d(x_n,\ x_k) = d(x_k,\ x_n), \qquad pour\ n,\ k = 1,\ 2,\ 3.$$

Alors :

$$d(x_n,\ x_k) \leq \frac{a}{2}[d(x_n,\ x_i) + d(x_i,\ x_k)], \qquad pour\ n,\ k,\ i = 1,\ 2,\ 3.$$

Donc (X, d) *est un espace b-métrique. Si* $a > 2$ *l'inégalité triangulaire n'est pas vérifiée, alors* (X, d) *n'est pas un espace métrique.*

Exemple 2.1.2. *[1] Soit* (X, d) *un espace métrique et* $\rho(x, y) = [d(x, y)]^p$*, où* $p > 1$ *est un nombre réel. Nous montrons que* ρ *est une b-métrique avec* $c = 2^{p-1}$*.*

Évidemment, les conditions ***(i)****et* ***(ii)*** *de la définition*(2.1.1) *sont satisfaites.*
Si $1 < p < \infty$ *alors la convexité de la fonction* $f(x) = x^p (x > 0)$ *implique que :*

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^p \leq \frac{1}{2}(a^p + b^p),$$

c'est à dire que $(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$ *est vérifiée.*
Ainsi, pour chaque $x,\ y,\ z \in X$*, on a :*

$$\begin{aligned}
\rho(x, y) &= (d(x, y))^p \\
&\leq (d(x, z) + d(z, y))^p \\
&\leq 2^{p-1}((d(x, z))^p + (d(z, y))^p) \\
&= 2^{p-1}(\rho(x, z) + \rho(z, y)).
\end{aligned}$$

D'où la troisième condition de la définition (2.1.1) *est vérifiée et* ρ *est une b-métrique. Notant que* (X, ρ) *n'est pas nécessairement un espace métrique .*

Par exemple, si $X = R$ *est l'ensemble des nombres réels et* $d(x, y) = |x - y|$ *une distance usuelle, alors* $\rho(x, y) = (x-y)^2$ *est une b-métrique sur* $\mathbb{R}$ *avec* $c = 2$*, mais n'est pas une métrique sur* $\mathbb{R}$*, car l'inégalité triangulaire d'une métrique n'est pas vérifiée.*

Définition 2.1.2. *[1] Soit* (X, d) *un espace b-métrique alors la suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dans* X *est convergente si et seulement il existe* $x \in X$ *tel que* $d(x_n, x) \to 0$*, quand* $n \to +\infty$*. Dans ce cas, on écrit*

$$\lim_{x\to+\infty} x_n = x.$$

Définition 2.1.3. *[1] Soit une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dans un espace b-métrique* (X, d)*est dite de Cauchy si et seulement si* $d(x_n, x_m) \to 0$*, quand* $n, m \to +\infty$*.*

Proposition 2.1.1. *[1] Dans un espace b-métrique (X, d), les propriétés suivantes sont vérifiées :*

i- Une suite convergente a une limite unique ;

ii- Chaque suite convergente est de Cauchy.

Définition 2.1.4. *[1] Soit (X, d) un espace b-métrique. Si Y est un sous ensemble non vide de X, alors la fermeture $\overline{Y}$ de Y est l'ensemble des limites de toutes les suites convergentes dans Y, c'est-à-dire :*

$$\overline{Y} = \{x \in X : \text{ il existe une suite } x_n \text{ dans } Y \text{ telque } \lim_{x \to +\infty} x_n = x\}.$$

Définition 2.1.5. *[1] Soit (X, d) un espace b-métrique. Alors un sous ensemble $Y \subset X$ est appelé compact si et seulement si toute suite de Y admet une sous suite convergente dans Y.*

Définition 2.1.6. *[1] Soit (X, d) un espace b-métrique et Y une partie de X. On dit que Y est fermé si et seulement si toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Y converge vers un élément de Y.*

Définition 2.1.7. *[1] L'espace b-métrique (X, d) est complet si chaque suite de Cauchy dans X converge.*

2.2 Applications contractantes dans les espaces b-métriques

Définition 2.2.1. *[2] Soit $T : X \to X$ une application et soit $\alpha : X \times X \to [0, \infty)$. L'application T est dite α-admissible si pour tout $x, y \in X$*

$$\alpha(x, y) \geq 1 \Rightarrow \alpha(Tx, Ty) \geq 1.$$

Définition 2.2.2. *[2] Soit $T : X \to X$ est appelé α-admissible triangulaire si les conditions suivantes sont satisfaites :*

T_1) T est α-admissible ;

T_2) $\alpha(x, z) \geq 1, \alpha(z, y) \geq 1 \Rightarrow \alpha(x, y) \geq 1, \quad \forall x, y, z \in X$.

Popescu a récemment apporté des améliorations à la notion d'une application α-admissible triangulaire.

Définition 2.2.3. *[2] Soit $T : X \to X$ une application et soit $\alpha : X \times X \to [0, \infty)$ une fonction. Alors T est dite α-admissible orbitale si l'implication suivante est vérifiée :*

$T_3)$ $\alpha(x,Tx) \geq 1 \Rightarrow \alpha(Tx,T^2x) \geq 1$.

Définition 2.2.4. *[2] Soit $T : X \to X$ une application et soit $\alpha : X \times X \to [0,\infty)$ une fonction. Alors T est dit être α-admissible orbitale triangulaire si T est α-admissible orbitale et si l'implication suivante est vérifiée :*

$T_4)$ $\alpha(x,y) \geq 1$ *et* $\alpha(y,Ty) \geq 1 \Rightarrow \alpha(x,Ty) \geq 1$.

Chaque application α-admissible est une application α-admissible orbitale, et chaque application triangulaire α-admissible est une application triangulaire α-admissible orbitale. La réciproque est fausse.

Définition 2.2.5. *[2] Soit (X,d) un espace b-métrique et soit $\alpha : X \times X \to X$ une fonction. X est dit être α-régulier si pour chaque suite (x_n) dans X telle que $\alpha(x_n,x_{n+1}) \geq 1$ pour tout $n, x_n \to x \in X$ lorsque $n \to \infty$, il existe une sous-suite $(x_{n(k)})$ de (x_n) avec $\alpha(x_{n(k)},x) \geq 1$ pour tout k.*

Lemme 2.2.1. *[2] Soit $T : X \to X$ une application triangulaire α-admissible orbitale. Supposons qu'il existe $x_0 \in X$ tel que $\alpha(x_0,Tx_0) \geq 1$. Définissons une suite (x_n) par $x_{n+1} = T(x_n)$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$. Alors nous avons $\alpha(x_n,x_m) \geq 1$ pour tout $m,n \in \mathbb{N}$, avec $n < m$.*

Maintenant, nous sommes prêts à énoncer et à prouver nos résultats principaux. Soit ψ l'ensemble de toutes les fonctions croissantes et continues $\psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$, avec $\psi^{-1}(\{0\}) = \{0\}$. Soit $\mathcal{F}$ la famille de toutes les fonctions non décroissantes $\beta : [0,\infty) \to [0,\frac{1}{c})$ qui satisfont à la condition

$$\lim_{n\to+\infty} \beta(t_n) = \frac{1}{c} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} t_n = 0 \text{ pour certains } c \geq 1.$$

Définition 2.2.6. *[2] Soit (X,d) un espace b-métrique et soit $T : X \to X$ une application. Nous disons que T est une application contractante généralisée α-ψ-Geraghty chaque fois qu'il existe $\alpha : X \times X \to [0,\infty)$ et un certain $L \geq 0$ tels que, pour*

$$M(x,y) = max\left\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty), \frac{d(x,Ty)+d(y,Tx)}{2}\right\};$$

$$N(x,y) = min\{d(x,Tx), d(y,Tx)\};$$

On a :

$$\alpha(x,y)\psi(c^3d(Tx,Ty)) \leq \beta(\psi(M(x,y)))\psi(M(x,y)) + L\phi(N(x,y)). \tag{2.1}$$

Pour tout $x,y \in X$ où $\beta \in \mathcal{F}$ et $\psi,\phi \in \Psi$.

Remarque 2.2.1. *[2] Étant donné que les fonctions appartenant à $\mathcal{F}$ sont strictement inférieures à $\frac{1}{c}$, l'expression $\beta(\psi(M(x,y))) < \frac{1}{c}$ dans l'équation* (2.1) *peut être estimée comme suit :*

$$\beta(\psi(M(x,y))) < \frac{1}{c} \quad \text{pour tout } x, y \in X, \quad \text{avec } x \neq y.$$

Théorème 2.2.1. *[2] Soit (X,d) un espace b-métrique complet et soit $T : X \to X$ une application contractante généralisée α-ψ-Geraghty avec les propriétés suivantes :*

i) T est une application α-admissible orbitale triangulaire ;

ii) Il existe $x_0 \in X$ tel que $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$;

iii) T est continue.

Alors T possède un point fixe.

Preuve 1. *[2] Soit $x_0 \in X$ tel que $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$. Nous construisons une suite itérative (x_n) telle que*

$$x_{n+1} = Tx_n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

S'il existe n_0 tel que $T(x_{n_0}) = x_{n_0}$ pour certain n_0, alors x_{n_0} est un point fixe de T, ce qui achève la preuve. Ainsi, sans perte de généralité, nous supposons que

$$x_n \neq x_{n+1}, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.2}$$

Puisque l'application T est α-admissible orbitale triangulaire, d'après le Lemme (2.2.1), *nous avons*

$$\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.3}$$

En prenant $x = x_{n-1}$ et $y = x_n$ dans l'inégalité (2.1) *en utilisant l'inégalité* (2.3) *et en rappelant que ψ est une fonction croissante, nous obtenons*

$$\begin{aligned}\psi(d(x_n, x_{n+1})) &= \psi(d(Tx_{n-1}, Tx_n)) \\ &\leq \alpha(x_{n-1}, x_n)\psi(c^3 d(Tx_{n-1}, Tx_n)) \\ &\leq \beta(\psi(M(x_{n-1}, x_n)))\psi(M(x_{n-1}, x_n)) + L\phi(N(x_{n-1}, x_n)).\end{aligned} \tag{2.4}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ *on a*

$$\begin{aligned} M(x_{n-1}, x_n) &= max\left\{d(x_{n-1}, x_n), d(x_{n-1}, Tx_{n-1}), d(x_n, Tx_n), \frac{d(x_{n-1}, Tx_n) + d(x_n, Tx_{n-1})}{2c}\right\} \\ &= max\left\{d(x_{n-1}, x_n), d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1}), \frac{d(x_{n-1}, x_{n+1}) + d(x_n, x_n)}{2c}\right\} \\ &= max\left\{d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1}), \frac{d(x_{n-1}, x_{n+1})}{2c}\right\}. \end{aligned}$$

Et

$$N(x_{n-1}, x_n) = min\{d(x_{n-1}, Tx_{n-1}), d(x_n, T(x_{n-1})\} = min\{d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_n)\} = 0. \tag{2.5}$$

Puisque

$$\frac{d(x_{n-1}, x_{n+1})}{2c} \leq \frac{s[d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})]}{2c} \leq max\{d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1})\},$$

Nous obtenons

$$M(x_{n-1}, x_n) \leq max\{d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1})\}. \tag{2.6}$$

En tenant compte de (2.5) *et* (2.6) *dans* (2.4)

$$\begin{aligned} \psi(d(x_n, x_{n+1})) &\leq \psi(c^3 d(x_n, x_{n+1})) \\ &\leq \alpha(x_{n-1}, x_n)\psi(c^3 d(x_n, x_{n+1})) \\ &\leq \beta(\psi(M(x_{n-1}, x_n)))\psi(max\{d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1})\}). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Si pour un certain $n \in \mathbb{N}$*, nous avons* $max\{d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1})\} = d(x_n, x_{n+1})$*, alors d'après* (2.7) *et la remarque* (2.2.1) *nous obtenons*

$$\psi(d(x_n, x_{n+1})) \leq \beta(\psi(M(x_{n-1}, x_n))\psi(d(x_n, x_{n+1})) < \frac{1}{c}\psi(d(x_n, x_{n+1})) < \psi(d(x_n, x_{n+1})),$$

ce qui est une contradiction. Ainsi, d'après (2.7)*, nous concluons que*

$$\psi(d(x_n, x_{n+1})) \leq \beta(\psi(M(x_{n-1}, x_n)))\psi(d(x_{n-1}, x_n)) < \frac{1}{c}\psi(d(x_{n-1}, x_n)) < \psi(d(x_{n-1}, x_n)), \tag{2.8}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$*. Ainsi,* $\{\psi(d(x_n, x_{n+1}))\}$ *est une suite décroissante non-négative. Puisque* ψ *est croissante, la suite* $\{ d(x_n, x_{n+1})\}$ *est décroissante. Par conséquent, il existe* $\gamma \geq 0$ *tel que* $\lim_{n \to +\infty} d(x_n, x_{n+1}) = \gamma$ *.*

Nous affirmons que $\gamma = 0$. *Supposons plutôt*

$$\lim_{n\to+\infty} d(x_n, x_{n+1}) = \gamma \ > 0.$$

Puisque $c \geq 1$, *l'inégalité* (2.8) *peut être estimée comme*

$$\frac{1}{c}\psi(d(x_n, x_{n+1})) \leq \psi(d(x_n, x_{n+1})) \leq \beta(\psi(M(x_{n-1}, x_n)))\psi(d(x_{n-1}, x_n)). \qquad (2.9)$$

En ce qui concerne (2.2), *l'inégalité* (2.9) *implique que*

$$\frac{1}{c}\frac{\psi(d(x_n, x_{n+1}))}{\psi(d(x_{n-1}, x_n))} \leq \beta(\psi(M(x_{n-1}, x_n))) < \frac{1}{c}.$$

Cela donne $\lim_{n\to\infty} \beta(\psi(M(x_{n-1}, x_n))) = \frac{1}{c}$. *Puisque* $\beta \in \mathcal{F}$, *Nous avons* $\lim_{n\to\infty} \psi(M(x_{n-1}, x_n)) = 0$. *Nous en déduisons que*

$$\lim_{n\to\infty} \psi(d(x_n, x_{n+1})) = 0.$$

Ainsi, en tenant compte du fait que $d(x_{n,x_{n+1}}) \to \gamma$ *et de la continuité de* ϕ, *nous obtenons nous* $\phi(\gamma\ ) = 0$. *Puisque* $\phi^{-1}(0) = 0$, *nous obtenons* $\gamma \ = 0$, *ce qui est une contradiction. Par conséquent, nous avons*

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0. \qquad (2.10)$$

Maintenant, nous revendiquons que

$$\lim_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) = 0.$$

Supposons, au contraire, qu'il existe $\varepsilon > 0$ *et des sous-suites* $\{x_{m_i}\}$, $\{x_{n_i}\}$ *de* $\{x_n\}$, *avec* $n_i > m_i \geq i$, *telles que*

$$d(x_{m_i}, x_n) \geq \varepsilon. \qquad (2.11)$$

De plus, pour chaque m_i, *nous pouvons choisir* n_i *de telle sorte que ce soit le plus petit entier satisfaisant* (2.11) *et* $n_i > m_i \geq i$. *Alors, nous avons*

$$d(x_{m_i}, x_{n_i-1}) < \varepsilon. \qquad (2.12)$$

D'après (2.11) *et l'inégalité triangulaire, nous obtenons*

$$\begin{aligned}\varepsilon \leq d(x_{n_i}, x_{m_i}) &\leq cd(x_{n_i}, x_{n_{i+1}}) + cd(x_{n_{i+1}}, x_{m_i}) \\ &\leq cd(x_{n_i}, x_{n_{i+1}}) + c^2 d(x_{n_{i+1}}, x_{m_i}) + +c^2 d(x_{m_{i+1}}, x_{m_i}). \end{aligned} \tag{2.13}$$

En laissant $i \to \infty$ *et en tenant compte de* (2.10), *l'inégalité* (2.13) *donne*

$$\frac{\varepsilon}{c^2} \leq \lim_{i\to\infty} sup\, d(x_{n_{i+1}}, x_{m_{i+1}}). \tag{2.14}$$

Par le lemme (2.2.1), *rappelons que* $\alpha(x_{m_i}, x_{n_i}) \geq 1$. *Par conséquent, d'après* (2.1), *nous avons*

$$\begin{aligned}\psi(d(x_{n_{i+1}}, x_{m_{i+1}})) &= \psi(d(Tx_{n_i}, Tx_{m_i})) \\ &\leq \psi(c^3 d(Tx_{n_i}, Tx_{m_i})) \\ &\leq \alpha(x_{m_i}, x_{n_i})\psi(c^3 d(Tx_{n_i}, Tx_{m_i})) \\ &\leq \beta(\psi(M(x_{n_i}, x_{m_i})))\psi(M(x_{n_i}, x_{m_i})) + L\phi(d(x_{m_i}, Tx_{n_i})). \end{aligned} \tag{2.15}$$

où

$$\begin{aligned}M(x_{n_i}, x_{m_i}) &= \max\left\{d(x_{n_i}, x_{m_i}), d(x_{n_i}, Tx_{n_i}), d(x_{m_i}, Tx_{m_i}), \frac{d(x_{n_i}, Tx_{m_i}) + d(x_{m_i}, Tx_{n_i})}{2c}\right\} \\ &= \max\left\{d(x_{n_i}, x_{m_i}), d(x_{n_i}, x_{n_{i+1}}), d(x_{m_i}, x_{m_{i+1}}), \frac{d(x_{n_i}, x_{m_{i+1}}) + d(x_{m_i}, x_{n_{i+1}})}{2c}\right\}\end{aligned}$$

et

$$N(x_{n_i}, x_{m_i}) = min\{d(x_{n_i}, Tx_{n_i}), d(x_{m_i}, Tx_{n_i})\} = min\{d(x_{n_i}, x_{n_i+1}), d(x_{m_i}, x_{m_i+1})\}.$$

Remarquons que

$$\frac{d(x_{n_i}, x_{m_{i+1}}) + d(x_{m_i}, x_{n_{i+1}})}{2c} \leq \frac{s[d(x_{n_i}, x_{m_i}) + d(x_{m_i}, x_{m_{i+1}})] + s[d(x_{m_i}, x_{n_i}) + d(x_{n_i}, x_{n_{i+1}})]}{2c} \tag{2.16}$$

et

$$d(x_{n_i}, x_{m_i}) \leq c[d(x_{n_i}, x_{n_i-1}) + d(x_{n_i-1}, x_{m_i})] < cd(x_{n_i}, x_{n_i-1}) + c\varepsilon. \tag{2.17}$$

En tenant compte de (2.12), (2.16) *et* (2.17), *nous trouvons que*

$$\limsup_{i\to\infty} M(x_{n_i}, x_{m_i}) \leq c\varepsilon, \tag{2.18}$$

$$\lim_{i\to\infty} N(x_{n_i}, x_{m_i}) = 0. \tag{2.19}$$

En prenant la limite supérieure lorsque $i \to \infty$ *et en utilisant la condition* (2.2.4) *ainsi que les expressions* (2.14), (2.18), (2.19) *ainsi que les expressions* (2.15) *devient*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c}\psi(c\varepsilon) \leq \psi(c\varepsilon) &\leq \limsup_{i\to\infty} \psi(c^3 d(x_{n_{i+1}}, x_{m_{i+1}})) \\
&\leq \limsup_{i\to\infty} \alpha(x_{m_i}, x_{n_i})\psi(c^3 d(x_{n_{i+1}}, x_{m_{i+1}})) \\
&= \limsup_{i\to\infty} \alpha(x_{m_i}, x_{n_i})\psi(c^3 d(Tx_{n_i}, Tx_{m_i})) \\
&\leq \limsup_{i\to\infty} [\beta(\psi(M(x_{n_i}, x_{m_i})))\psi(M(x_{n_i}, x_{m_i})) + L\phi(N(d(x_{n_i}, x_{m_i})))] \\
&\leq \psi(c\varepsilon) \limsup_{i\to\infty} \beta(\psi(M(x_{n_i}, x_{m_i}))) \\
&\leq \frac{1}{s}\psi(c\varepsilon).
\end{aligned}$$

Alors, $\limsup_{i\to\infty} \beta(\psi(M(x_{n_i}, x_{m_i}))) = \frac{1}{c}$. *Étant donné que* $\beta \in F$, *nous avons*

$$\limsup_{i\to\infty} \psi(M(x_{n_i}, x_{m_i})) = 0.$$

Ainsi, nous concluons que

$$\lim_{i\to\infty} \psi(d(x_{n_i, x_{m_i}})) = 0.$$

Par conséquent, grâce à la continuité de ψ *et au fait que* $\psi^{-1}(\{0\}) = \{0\}$, *nous avons*

$$\lim_{i\to\infty} \psi(d(x_{n_i, x_{m_i}})) = 0,$$

ce qui contredit (2.11). *Nous déduisons donc que* (x_n) *est une suite de Cauchy dans* (X, d). *Puisque* (X, d) *est un espace b-métrique complet, il existe* $x^* \in X$ *tel que* $\lim_{i\to\infty} x_n = x^*$. *L'application* T *est continue et il est évident que* $Tx^* = x^*$.
Nous remplaçons la continuité de l'application T *dans le théorème ci-dessus par une condition appropriée sur* X.

Théorème 2.2.2. *[2] Soit* (X, d) *un espace b-métrique complet et soit* $T : X \to X$ *une application contractante généralisée* α-ψ-*Geraghty avec les propriétés suivantes :*

i) T *est une application* α-*admissible orbitale triangulaire,* *ii) Il existe* $x_0 \in X$ *tel que* $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$,

iii) X *est* α*-régulier.*

Alors T *posséde un point fixe.*

Preuve 2. *[2] Suivant les lignes de la démonstration du Théorème* (2.2.1)*, nous concluons que* $\lim\limits_{i\to\infty} x_n = x^*$. *Si* X *est* α*-régulier, alors, puisque* $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ *il existe une sous-suite* (x_{n_k}) *de* x_n *telle que*

$$F(x_{n_k}, x^*) \geq 1 \qquad \textit{pour tout } k. \tag{2.20}$$

Par l'inégalité triangulaire, nous avons

$$d(x^*, Tx^*) \leq cd(x^*, x_{n_k+1}) + cd(x_{n_k+1}, Tx^*) = cd(x^*, x_{n_k+1}) + cd(TX_{n_k}, Tx^*).$$

En laissant k *tendre vers l'infini, nous obtenons*

$$d(x^*, Tx^*) \leq \liminf_{k\to\infty} cd(Tx_{n_k}, Tx^*). \tag{2.21}$$

En utilisant le fait que $\psi \in \Psi$, (2.20) *et* (2.21)*, nous obtenons*

$$\begin{aligned}
\psi(c^2 d(x^*, Tx^*)) &\leq \lim_{k\to\infty} \psi(c^3 d(Tx_{n_k}, Tx^*)) \\
&\leq \lim_{k\to\infty} F(x_{n_{k+1}}, x^*)\psi(c^3 d(Tx_{n_k}, Tx^*)) \\
&\leq [\beta(\psi(M(x_{n_k}, x^*)))\psi(M(x_{n_k}, x^*)) + L\phi(N(x_{n_k}, x^*))].
\end{aligned} \tag{2.22}$$

On a

$$\begin{aligned}
M(x_{n_k}, x^*) &= max\left\{d(x_{n_k}, x^*), d(x_{n_k}, Tx_{n_k}), d(x^*, Tx^*), \frac{d(x_{n_k}, Tx^*) + d(x^*, Tx_{n_k})}{2c}\right\} \\
&= max\left\{d(x_{n_k}, x^*), d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}), d(x^*, Tx^*), \frac{d(x_{n_k}, Tx^*) + d(x^*, Tx_{n_{k+1}})}{2c}\right\}
\end{aligned}$$

et

$$N(x_{n_k}, x^*) = min\{d(x_{n_k}, Tx_{n_k}), d(x^*, Tx_{n_k})\} = min\{d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}), d(x^*, x_{n_{k+1}})\}.$$

Rappelons que

$$\frac{d(x_{n_k}, Tx^*) + d(x^*, x_{n_{k+1}})}{2c} \leq \frac{cd(x_{n_k}, x^*) + cd(x^*, Tx^*) + d(x^*, x_{n_{k+1}})}{2c}.$$

Ensuite, par (2.10), *nous obtenons*

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{d(x_{n_k}, Tx^*) + d(x^*, x_{n_{k+1}})}{2c} \leq \frac{d(x^*, Tx^*)}{2}.$$

Lorsque k tend vers l'infinie, nous en déduisons

$$\lim_{k\to\infty} M(x_{n_k}, x^*) = d(x^*, Tx^*)$$

et

$$\lim_{k\to\infty} N(x_{n_k}, x^*) = 0.$$

Puisque $\beta(\psi(M(x_{n_k}, x^*))) \leq \frac{1}{c}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, d'après (2.22), *nous obtenons*

$$\psi(c^2 d(x^*, Tx^*) \leq \frac{1}{c}\psi(d(x^*, Tx^*)) \leq \psi(d(x^*, Tx_*)).$$

Puisque $\psi \in \Psi$, ce qui précède est vrai sauf si $d(x^*, Tx^*) = 0$, c'est-à-dire, $Tx^* = x^*$ et x^* est un point fixe de T.
Pour l'unicité d'un point fixe d'une application α-ψ contractante généralisée, nous considérerons l'hypothèse suivante :
(H)Pour tous $x, y \in Fix(T)$, soit $\alpha(x, y) \geq 1$ ou $\alpha(x, y) \geq 1$.
Avec, $Fix(T)$ désigne l'ensemble des points fixes de T.

Théorème 2.2.3. *[2] En ajoutant la condition (H)aux hypothèses du Théorème* (2.2.1) *(respectivement, du Théorème* (2.2.2)*)nous obtenons l'unicité du point fixe de T.*

Preuve 3. *[2] Supposons que x^* et y^* soient deux points fixes de T. Il est évident que $M(x^*, y^*) = d(x^*, y^*)$ et $N(x^*, y^*) = 0$. Par conséquent,*

$$\begin{aligned}
\psi(d(x^*, y^*)) &\leq \psi(c^3 d(Tx^*, Ty^*)) \\
&\leq \alpha(x^*, y^*)\psi(c^3 d(Tx^*, Ty^*)) \\
&\leq \beta(\psi(M(x^*, y^*)))\psi(M(x^*, y^*)) + L\phi(N(x^*, y^*)) \\
&< \frac{1}{c}\psi(d(x^*, y^*)) \\
&\leq \psi(d(x^*, y^*)),
\end{aligned}$$

ce qui est une contradiction.

Définition 2.2.7. *[2] Soit (X, d) un espace b-métrique et $T : X \to X$ une application. Nous disons que T est une application contractante généralisée de type (B) de Geraghty* *avec* α *et* ψ *lorsqu'il existe* $\alpha : X \times X \to [0, \infty)$ *telle que*

$$M(x,y) = max\left\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty), \frac{d(x,Ty)+d(y,Tx)}{2c}\right\},$$

on a

$$\alpha(x,y)\psi(c^3 d(Tx,Ty)) \leq \beta(\psi(M(x,y)))\psi(M(x,y))$$

pour tous $x, y \in X$ *où* $\beta \in \mathcal{F}$ *et* $\psi \in \Psi$.
À partir des démonstrations des Théorèmes (2.2.1), (2.2.2) *et* (2.2.3), *nous obtenons les résultats suivants.*

Théorème 2.2.4. *[2] Soit* (X, d) *un espace b-métrique complet et* $T : X \to X$ *une application contractante généralisée de type* (B) *de Geraghty avec les propriétés suivantes :*

i) T *est admissible orbitale triangulaire* α *;*

ii) Il existe $x_0 \in X$ *tel que* $F(x_0, Tx_O) \geq 1$ *;*

iii) Soit T *est continue ou soit* X *est* α*- régulier.*

Alors T *a un point fixe.*

Théorème 2.2.5. *[2] En ajoutant la condition (H) aux hypothèses du Théorème* (2.2.4), *nous obtenons l'unicité du point fixe de* T.

Exemple 2.2.1. *[2] Soit* X *l'ensemble des fonctions mesurables de Lebesgue sur* $[0, 1]$ *telles que*

$$\int_0^1 |x(t)|\, dt < 1\cdot$$

Définissons $d : X \times X \to [0, \infty)$ *par*

$$d(x,y) = \left(\int_0^1 |x(t) - y(t)|\, dt\right)^2\cdot$$

Alors d *est une b-métrique sur* X *avec* $s = 2$.
L'opérateur $T : X \to X$ *est défini par*

$$Tx(t) = \frac{1}{4}\ln(1 + |x(t)|)\cdot$$

Considérons les applications $\alpha : X \times X \to [0, \infty)$, $\beta : [0, \infty) \to [0, \frac{1}{2})$ *et* $\psi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ *définies par*

$$\alpha(x,y) = \begin{cases} 1 & si\ x(t) \geq y(t)\ pour\ tout\ t \in [0,1], \\ 0 & sinon. \end{cases} \quad \beta(t) = \frac{(\ln(1+\sqrt{t}))^2}{2t} \quad et \quad \psi(t) = t.$$

Manifestement, $\psi \in \Psi$ et $\beta \in \mathcal{F}$. De plus, T satisfait les conditions d'être une application triangulaire α-orbitalement admissible et $\alpha(1, T1) \geq 1\cdot$

Maintenant, nous allons prouver que T est une application contractante généralisée de α-ψ-Geraghty. En effet, pour tout $t \in [0, \infty]$, nous avons

$$\begin{aligned}
\sqrt{\alpha\left(x(t), y(t), \psi(c^3 d(Tx(t), Ty(t))\right)} &\leq \sqrt{2^3 \left(\int_0^1 |Tx(t) - Ty(t)|\, dt\right)^2} \\
&\leq 2\sqrt{2} \int_0^1 \left| \frac{1}{4} \ln(1 + |x(t)|) - \frac{1}{4} \ln(1 + |y(t)|) \right| dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \left| \ln\left(\frac{1 + |x(t)|}{1 + |y(t)|}\right) \right| dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \left| \ln\left(1 + \frac{|x(t)| - |y(t)|}{1 + |y(t)|}\right) \right| dt \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 |\ln(1 + |x(t)| - |y(t)|)|\, dt\cdot
\end{aligned}$$

Par le Lemme (2.2.1)*, nous obtenons*

$$\int_0^1 |\ln\left(1 + |x(t)| - |y(t)|\right)|\, dt \leq \ln\left(\int_0^1 (1 + |x(t) - y(t)|) dt\right) = \ln\left(1 + \int_0^1 |x(t) - y(t)|\, dt\right)\cdot$$

Par conséquent,

$$\sqrt{\alpha(x(t), y(t))\psi(c^3 d(Tx(t), Ty(t)))} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left(\int_0^1 |x(t) - y(t)|\, dt\right) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left(1 + \sqrt{d(x, y)}\right)\cdot$$

Ainsi, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\alpha(x(t), y(t))\psi(c^3 d(Tx(t), T(y))) &\leq \frac{1}{2}\left(ln(1 + \sqrt{d(x, y)})\right)^2 \\
&\leq \frac{1}{2}\left(ln(1 + \sqrt{M(x, y)})\right)^2 \\
&= \frac{\left(ln(1 + \sqrt{M(x, y)})\right)^2}{2M(x, y)} M(x, y) \\
&= \beta(\psi(M(x, y)))\psi(M(x, y))\cdot
\end{aligned}$$

D'après le Théorème (2.2.5)*, nous constatons que T a un point fixe.*

En conséquence dans cette section, nous démontrons que plusieurs résultats existants dans la littérature peuvent être facilement déduits du Théorème (2.2.4)$\cdot$

Théorème du point fixe dans l'espace b-métrique

En prenant $\alpha(x,y) = 1$ dans le Théorème (2.2.3), pour tous $x, y \in X$, nous obtenons immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire 2.2.1. *[2] Soit (X,d) un espace b-métrique complet avec $s \geq 1$ et soit $T : X \to X$ une application sur X. S'il existe $L \geq 0$ tel que pour tous $x, y \in X$,*

$$\psi(c^3 d(Tx, Ty)) \leq \beta(\psi(M(x,y)))\psi(M(x,y)) + L\phi(N(x,y)),$$

où $\beta \in \mathcal{F}, \psi, \phi \in \Psi$ et

$$M(x,y) = max\left\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty), \frac{d(x,Ty) + d(y,Tx)}{2c}\right\},$$
$$N(x,y) = min\left\{d(x,Tx), d(y,Tx)\right\},$$

alors T a un point fixe unique.

Preuve 4. *En prenant $\alpha(x,y) = 1$ dans le Théorème* (2.2.5)*, pour tous $x, y \in X$, nous obtenons immédiatement le résultat de point fixe suivant.*

Corollaire 2.2.2. *[2] Soit (X,d) un espace b-métrique complet avec $s \geq 1$ et soit $T : X \to X$ une application sur X telle que pour tous $x, y \in X$,*

$$\psi(c^3 d(Tx, Ty)) \leq \beta(\psi(M(x,y)))\psi(M(x,y)),$$

où $\beta \in \mathcal{F}, \psi \in \Psi$ et

$$M(x,y) = max\left\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty), \frac{d(x,Ty) + d(y,Tx)}{2c}\right\}.$$

Alors T admet un point fixe unique .

Preuve 5. *Si nous prenons $F(x,y) = 1$ pour tout $x, y \in X, L = 0$ et $\psi(t) = t$ dans le Théorème* (2.2.3)*, nous pouvons énoncer le résultat suivant.*

Corollaire 2.2.3. *[2] Soit (X,d) un espace b-métrique complet avec $s \geq 1$ et soit $T : X \to X$ une application sur X telle que pour tous $x, y \in X$,*

$$c^3 d(Tx, Ty) \leq \beta(M(x,y))M(x,y),$$

où $\beta \in \mathcal{F}$ *et*

$$M(x,y) = max\left\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty), \frac{d(x,Ty)+d(y,Tx)}{2c}\right\}.$$

Alors T *admet un point fixe unique .*

Preuve 6. *Si nous avons* $c = 1$ *et* $\beta = \frac{1}{t+1}$ *pour* $t > 0$ *dans ce corollaire, nous déduisons le résultat*

Corollaire 2.2.4. *[2] Soit* (X,d) *un espace b-métrique complet avec* $c \geq 1$ *et soit* $T : X \to X$ *une application sur* X *telle que pour tous* $x, y \in X$*,*

$$d(Tx,Ty) \leq \frac{M(x,y)}{1+M(x,y)}.$$

Alors T *admet un point fixe unique .*

Chapitre 3

Applications

3.1 Équation intégrale non linéaires de type Fredholm de deuxième espèce

En tant application, nous considérons l'équation intégrale suivante [2]

$$x(t) = h(t) + \int_0^1 k(t,\lambda) f(\lambda, x(\lambda)) d\lambda \quad \textit{Pour tout } t \in [0,1]. \tag{3.1}$$

Soit Ω désignant la classe des fonctions croissantes $\omega : [0,\infty) \to [0,\infty)$ satisfaisant

$$(\omega(t))^r \leq t^r \omega(t^r) \quad \textit{pour tout } r \geq 1 \textit{ et tout } t \geq 0\cdot$$

Nous analyserons l'équation (3.1) en vertu des hypothèses suivantes :

$H_1)$ $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

$H_2)$ $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, $f(t,x) \geq 0$, et il existe $\omega \in \Omega$ el que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq \omega(|x-y|),$$

avec $\omega(t_n) \to \frac{1}{2^{r-1}}$ lorsque $n \to \infty$, ce qui implique $\lim_{n\to\infty} t_n = 0\cdot$

$H_3)$ $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ est continue en $t \in [0,1]$ pour chaque $\lambda \in [0,1]$ et est mesurable en $\lambda \in [0,1]$ pour tout $t \in [0,1]$tel que $k(t,x) \geq 0$ et

$$\int_0^1 k(t,\lambda) d\lambda \leq \frac{1}{2^{3-\frac{3}{r}}}.$$

Considérons l'espace des fonctions continues $X = C([0,1])$, avec la métrique standard donnée par

$$\rho(x,y) = \sup_{t\in[0,1]} |x(t) - y(t)| \quad \textit{pour tout } x, y \in C([0,1]),$$

Maintenant, pour $r \geq 1$, nous définissons

$$d(x,y) = (\rho(x,y))^r = \left(\sup_{t\in[0,1]} |x(t) - y(t)|\right)^r = \sup_{t\in[0,1]} |x(t) - y(t)|^r \quad \textit{Pour tout } x, y \in (C[0,1])\cdot$$

Remarquons que (X, d) est un espace b-métrique complet avec $c = 2^{r-1}$ $\cdot$

Théorème 3.1.1. *[2] Sous les hypothèses (H_1)-(H_2)* (3.1)*admet une solution unique dans* $(C[0,1])\cdot$

Preuve 7. *Nous considérons l'opérateur $T : X \to X$ définie par*

$$T(x)(t) = h(t) + \int_0^1 k(t,\lambda) f(\lambda, x(\lambda)) d\lambda, \quad t \in [0,1]\cdot$$

En vertu de nos hypothèses, T est bien définie (ce qui signifie que si $x \in X$, alors $Tx \in X$. De plus, pour $x, y \in X$, nous avons

$$\begin{aligned} |T(x)(t) - T(y)(t)| &= \left| h(t) + \int_0^1 k(t,\lambda) f(\lambda, x(\lambda)) d\lambda - h(t) - \int_0^1 k(t,\lambda) f(\lambda, x(\lambda)) d\lambda \right| \\ &\leq \int_0^1 k(t,\lambda) \left| f(\lambda, x(\lambda)) - f(\lambda, y(\lambda)) \right| d\lambda \\ &\leq \int_0^1 k(t,\lambda) \omega(|x(\lambda) - y(\lambda)|) d\lambda\cdot \end{aligned}$$

Puisque la fonction ω est croissante, nous obtenons

$$\omega(|x(\lambda) - y(\lambda)|) \leq \omega\left(\sup_{t\in[0,1]} |x(\lambda) - y(\lambda)|\right) = \omega(\rho(x,y))\cdot$$

Par conséquent,

$$|T(x)(t) - T(y)(t)| \leq \frac{1}{2^{3-\frac{3}{r}}} \omega(\rho(x,y))\cdot$$

Maintenant, nous avons

$$\begin{aligned} d(Tx, Ty) = \sup_{t\in[0,1]} |T(x)(t) - T(y)(t)|^r &\leq \left[\frac{1}{2^{3-\frac{3}{r}}}\omega(\rho(x,y))\right]^r \\ &\leq \frac{1}{2^{3r-3}} d(x,y)\omega(d(x,y)) \leq \frac{1}{2^{3r-3}}\omega(M(x,y))M(x,y), \end{aligned}$$

c'est-à-dire,

$$c^3 d(Tx, Ty) \leq \beta(M(x,y))M(x,y),$$

où $c = 2^{r-1}$ *et* $\beta(t) = \omega(t)$. *Remarquez que si* $\omega \in \mathcal{F}$, *alors* $\beta \in \mathcal{F}$. *Par le Corollaire* (2.2.3), *l'équation* (3.1) *a une solution unique dans* $C[0,1]$ *et la preuve est terminée.*

3.2 Équation différentielle implicite tempérée d'ordre fractionnaire de Caputo

En s'inspirant de ce qui précède, nous étudions l'existence et l'unicité des solutions pour le problème implicite avec une équation différentielle fractionnaire non linéaire impliquant la dérivée fractionnaire tempérée de Caputo :

$$\left({}_{0}^{C}\mathcal{D}_t^{\vartheta,\ell}x\right)(t) = \aleph\left(t, xt, \left({}_{0}^{C}\mathcal{D}_t^{\vartheta,\ell}x\right)(t)\right); \quad t \in \Omega := [0,k], \tag{3.2}$$

$$x(t) = \mu(t), \quad t \in (-\infty, 0], \tag{3.3}$$

où $0 < \vartheta < \ell$, $\ell \geq 0$, ${}_{0}^{C}\mathcal{D}_t^{\vartheta,\ell}$ est la dérivée fractionnaire tempérée de Caputo, $\aleph : \Omega \times \mathbb{Q} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\mu : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions données où $\mu(0) = x_0$. Pour tout $t \in \Omega$, nous définissons $xt \in \mathbb{Q}$ avec

$$xt(\sigma) = x(t+\sigma); \quad \textit{pour } \sigma \in (-\infty, 0]\cdot$$

À notre connaissance, il n'existe pas de publications dans la littérature qui traitent des problèmes implicites de dérivées fractionnaires tempérées de Caputo avec retard infini. Le nombre limité de travaux publiés sur le calcul fractionnaire tempéré souligne la nécessité d'une exploration et d'un développement plus approfondis. Par conséquent, notre objectif est de faire progresser le domaine en explorant divers problèmes avec des conditions nouvelles qui n'ont pas été étudiées auparavant. De plus, notre étude a l'intention d'incorporer différentes techniques telles que la méthode de α-contraction, ce qui la distingue des recherches antérieures .

L'étude des équations différentielles implicites utilisant la dérivée fractionnaire tempérée de Caputo dans les espaces b-métriques est initiée dans ce travail .

Tout d'abord, nous donnons les définitions et les notations que nous utiliserons tout au long de cette partie. On note $C(\Omega, R)$ l'espace de Banach de toutes les fonctions continues de Ω dans $\mathbb{R}$ avec la norme suivante

$$||\aleph||_\infty = \sup_{t\in\Omega} ||\aleph(t)||\cdot$$

Comme d'habitude, $AC(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions absolument continues de Ω dans $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $AC^n(\Omega)$ l'espace défini par

$$AC^n(\Omega) := \left\{\aleph : \Omega \to \mathbb{R} : \frac{d^n}{dt^n}\aleph(t) \in AC(\Omega)\right\}\cdot$$

Considérons l'espace $X_b^p(k_1, k_2)$, $(b \in \mathbb{R},\ 1 \le p \le \infty)$ de ces fonctions mesurables de Lebesgue à valeurs complexes $f \in [k_1, k_2]$ lesquelles $||\aleph||_{X_b^p} < \infty$, où la norme est définie par :

$$||\aleph||_{X_b^p} = \left(\int_{k_1}^{k_2} |t^b\aleph(t)|^p \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}}, \quad (1 \le p < \infty,\ b \in \mathbb{R})\cdot$$

Définition 3.2.1. *([3], [5], [6])* ***(L'intégrale fractionnaire tempérée de Riemann-Liouville)*** *Supposons que la fonction f est continue par morceaux sur $[k_1, k_2]$ et $f \in X_b^p(k_1, k_2)$, $\ell > 0$. Ensuite, l'intégrale fractionnaire tempérée de Riemann-Liouville d'ordre ϑ est définie par :*

$$_{k_1}I_t^{\vartheta,\ell}\aleph(t) = e^{-\ell t}{}_{K_1}I_t^{\vartheta}(e^{\ell t}\aleph(t)) = \frac{1}{\Gamma(\vartheta)}\int_{K_1}^{t} \frac{e^{-\ell(t-\rho)}\aleph(\rho)}{(t-\rho)^{1-\vartheta}}d\rho, \tag{3.4}$$

où $_{K_1}I_t^{\vartheta}$ désigne d'intégration fractionnaire de Riemann-Liouville. évidemment, l'intégrale fractionnaire tempérée (3.4)*se réduit à l'intégrale fractionnaire de Riemann -Liouville* (1.2) *si $\ell = 0$.*

Définition 3.2.2. *([3], [5])* ***(La dérivée fractionnaire tempérée de Riemann-Liouville)***$\cdot$ *Pour $n-1 < \vartheta < n$; $n \in \mathbb{N}$, $\ell \ge 0$. La dérivée fractionnaire tempérée de Riemann-Liouville définie par :*

$$_{k_1}\mathcal{D}_t^{\vartheta,\ell}\aleph(t) = e^{-\ell t}\ {}_{k_1}\mathcal{D}_t^{\vartheta}(e^{\ell t}\aleph(t)) = \frac{e^{-\ell t}}{\Gamma(n-\vartheta)}\frac{d^n}{dt^n}\int_{k_1}^{t}\frac{e^{\ell\rho}f(\rho)}{(t-\rho)^{\vartheta-n+1}}dt,$$

Où $_{k_1}D_t^{\vartheta}$ désigne la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville.

Définition 3.2.3. *([3], [6])* ***(La dérivée fractionnaire tempérée de Caputo)***$\cdot$

Pour $n-1<\vartheta<n$; $n\in\mathbb{N}^+$, $\ell\geq 0$. La dérivée fractionnaire tempérée de Caputo est définie comme :

$$
{}_{k_1}^{C}\mathcal{D}_t^{\vartheta,\ell}\aleph(t)=e^{-\ell t}\,{}_{k_1}^{C}\mathcal{D}_t^{\vartheta}(e^{\ell t}\aleph(t))=\frac{e^{-\ell t}}{\Gamma(n-\vartheta)}\int_{k_1}^{t}\frac{1}{(t-\rho)^{\vartheta-n+1}}\frac{d^n(e^{\ell\rho}\aleph(\rho))}{d\rho^n}d\rho,
$$

où ${}_{k_1}^{C}\mathcal{D}_t^{\vartheta,\ell}$ désigne la dérivée fractionnaire de Caputo .

Lemme 3.2.1. *[3] Pour une constante C,*

$$
{}_{k_1}\mathcal{D}_t^{\vartheta,\ell}C=Ce^{-\ell t}\,{}_{k_1}\mathcal{D}_t^{\vartheta}e^{\ell t},\ {}_{k_1}^{C}\mathcal{D}_t^{\vartheta,\ell}C=Ce^{-\ell t}\,{}_{k_1}^{C}\mathcal{D}_t^{\vartheta}e^{\ell t}.
$$

Évidemment, ${}_{k_1}\mathcal{D}_t^{\vartheta,\ell}(C)\neq{}_{k_1}^{C}\mathcal{D}_t^{\vartheta,\ell}(C)$. Et ${}_{k_1}^{C}\mathcal{D}_t^{\vartheta,\ell}(C)$ est différent de zéro, étant différent de ${}_{k_1}^{C}\mathcal{D}_t^{\vartheta}(C)=0$.

Lemme 3.2.2. *([3], [6]) Soit $f(t)\in AC^n[k_1,k_2]$, $l\geq 0$ et $n-1<\vartheta<n$. Alors la dérivée fractionnaire tempérée de Caputo et l'intégrale fractionnaire tempérée de Riemann-Liouville ont les propriétés composites suivantes :*

$$
{}_{k_1}I_t^{\vartheta,\ell}\left[{}_{k_1}^{c}\mathcal{D}_t^{\vartheta,\ell}f(t)\right]=f(t)-\sum_{j=0}^{n-1}e^{-lt}\frac{(t-k_1)^j}{j!}\left[\left.\frac{d^j(e^{lt}f(t)}{dt^j}\right|_{t=k_1}\right],
$$

et

$$
{}_{k_1}^{C}\mathcal{D}_t^{\vartheta,\ell}[{}_aI_t^{\vartheta,\ell}f(t)]=f(t),\quad pour\quad \vartheta\in(0,1).
$$

Lemme 3.2.3. *Soit $\bar{\aleph}\in L^1(\Omega)$ et $0<\vartheta\leq 1$. Alors le problème de la valeur initiale*

$$
\begin{cases}\left({}_{0}^{C}\mathcal{D}_t^{\vartheta,\ell}x\right)(t)=\bar{\aleph}(t);\quad t\in\Omega:=[0,k],\\ x(0)=x_0,\end{cases}\tag{3.5}
$$

possède une solution unique définie par

$$
x(t)=x_0e^{-\ell t}+\frac{1}{\Gamma(\vartheta)}\int_0^t e^{-\ell(t-\rho)}(t-\rho)^{(\vartheta-1)}\bar{\aleph}(\rho)d\rho\cdot\tag{3.6}
$$

Démonstration. En appliquant l'intégrale fractionnaire tempérée de Riemann-Liouville d'ordre ϑ à

$$
\left({}_{0}^{C}\mathcal{D}_t^{\vartheta,\ell}x\right)(t)=\bar{\aleph}(t),
$$

et en employant le lemme (3.2.2) et si $t\in\Omega$, on obtient

$$
x(t)-x(0)e^{-\ell t}=\frac{1}{\Gamma(\vartheta)}\int_0^t e^{-\ell(t-\rho)}(t-\rho)^{(\vartheta-1)}\bar{\aleph}(\rho)d\rho\cdot
$$

A partir des conditions initiales, on obtient

$$x(t) = x_0 e^{-\ell t} + \frac{1}{\Gamma(\vartheta)} \int_0^t e^{-\ell(t-\rho)} (t-\rho)^{(\vartheta-1)} \bar{\aleph}(\rho) d\rho\cdot$$

Inversement, d'après le lemme (3.2.1) et le lemme (3.2.2), on en déduit que si x vérifie l'équation (3.6), alors il satisfait le problème (3.5).
En conséquence du lemme (3.2.3), nous donnons le résultat suivant.

□

Lemme 3.2.4. *La fonction x est une solution du problème* (3.2)-(3.3) *si et seulement si x satisfait ce qui suit :*

$$x(t) = \begin{cases} x_0 e^{-\ell t} + \frac{1}{\Gamma(\vartheta)} \int_0^t e^{-\ell(t-\rho)} (t-\rho)^{(\vartheta-1)} \bar{\aleph}(\rho)\, d\rho, & si\ t \in \Omega, \\ \mu(t), & si\ t \in (-\infty, 0], \end{cases} \tag{3.7}$$

où $\bar{\aleph} \in C(\Omega)$ tel que $\bar{\aleph}(t) = \aleph(t, xt, \bar{\aleph}(t))\cdot$

Définition 3.2.4. *[4] L'application $T : X \to X$ est dite une α-contraction non linéaire généralisée s'il existe des fonctions $F : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ et $\psi : (0, \infty) \to (0, \infty)$ telles que pour tout $x, \Phi \in X$ tel que $Tx \neq T\Phi$,*

$$\psi(M(x, \Phi)) + F(\bar{\alpha} M(Fx, F\phi))p \leq F(AsM(x, \Phi)),$$

où $\bar{\alpha} > 1$, et

$$A^{sM}(x, \Phi) = \max\left(M(x, \Phi), M(Xx, Tx), M(\Phi, T\Phi), \frac{\beta}{2s}[M(\Phi, TX) + M(X, T\Phi)]\right),\ \ \beta \in [0, 1].$$

Théorème 3.2.1. *[3] Soit (x, M) un espace b-métrique complet et $T : X \to X$ une application α-ψ-Geraghty généralisée où*

i) T est α-admissible ;

ii) Il existe $x_0 \in X$ où $\alpha(x_0, T(x_0)) \geq 1$;

iii) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ avec $x_n \to x$ et $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$, alors $\alpha(x_n, x) \geq 1$.

Alors T a un point fixe. De plus, si

iv) Pour tout point fixe $x, x^{'}$ de T, soit

$$\alpha(x, x^{'}) \geq 1 \quad ou \quad \alpha(x^{'}, x) \geq 1,$$

alors T possède un unique point fixe.

Théorème 3.2.2. *[4] Soit (X, M) un espace b-métrique complet. Une contraction F non linéaire généralisée T a un point fixe si les affirmations suivantes sont vraies :*

i) F est strictement croissante, c'est-à-dire que si $a < b$, alors $F(a) < F(b)$, pour tout $a, b \in (0, \infty)$;

ii) $\beta < 1$;

iii) $\frac{s}{\vartheta} < 1$;

iv) $\liminf_{x \to t^+} \psi(x) > 0$, pour tout $t \geq 0$.

Dans cette partie, nous établissons quelques résultats d'existence pour les problèmes (3.2)-(3.3)
Soit $(C(\Omega), M)$ l'espace b-métrique complet avec $s = 2$, tel que $M : C(\Omega) \times C(\Omega) \to (0, \infty)$, est donné par :

$$M(x, \Phi) = \| (X - \Phi)^2 \|_\infty := \sup_{t \in \Omega} |x(t) - \Phi(t)|^2.$$

Soit l'espace $(Q, \| \cdot \|_Q)$ un espace linéaire semi-normé de fonctions mappant $(-\infty, 0]$ dans $\mathbb{R}$, et vérifiant les axiomes suivants qui sont dérivés des originaux de Hale et kato :

1) Si $x : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$, et $x_0 \in Q$, alors il existe des constantes $\xi_1, \xi_2, \xi_3 > 0$, telles que pour chaque $t \in \Omega$, on a :
   (i) x_t est dans Q ;
   (ii) $\|x_t\|_Q \leq \xi_1 \|x_1\|_Q + \xi_2 \sup_{t \in [0,t]} |x(\sigma)|$;
   (iii) $|x(t)| \leq \xi_3 \|x_t\|_Q$.
2) Pour la fonction $x(\cdot)$ dans **(1)**, y_t est une fonction continue à valeur Q^- sur Ω.
3) L'espace Q est complet.

$$X = \{x : (-\infty, k] \to \mathbb{R},\, x|_{(-\infty,0]} \in Q,\, x|_\Omega \in C([0, k], \mathbb{R})\}.$$

Les hypothèses :

H_1) Il existe des fonctions continues $\bar{p} : \Omega \to (0, \infty)$ et $\bar{q} : \Omega \to (0, 1)$ telles que pour chaque $x, x_1 \in Q$, $\Phi, \Phi_1 \in \mathbb{R}$ et $t \in \Omega$

$$|\aleph(t, x, \Phi) - \aleph(t, x_1, \Phi_1| \leq \bar{p}(t) \|x - x_1\|_Q + \bar{q}(t) |\Phi - \Phi_1$$

avec

$$\left\| \frac{1}{\Gamma(\vartheta)} \int_0^t e^{-\ell(t-\rho)} (t - \rho)^{(\vartheta - 1)} \frac{\bar{p}(\rho)}{1 - \bar{q}^*} d\rho \right\|_\infty^2 \leq \psi \left(||(x - x_1)^2\|_\infty \right).$$

$H_2)$ Il existe $\psi \in \Lambda$ et $\bar{\ell}_0(t) \in C(\Omega)$ et une fonction $\xi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, telle que

$$\xi\left(\bar{\ell}_0(t), \frac{1}{\Gamma(\vartheta)} \int_0^t e^{-\ell(t-\rho)}(t-\rho)^{(\vartheta-1)}\bar{\aleph}(\rho)\, d\rho\right) \geq 0.$$

Où $\bar{\aleph} \in C(\Omega)$ tel que $\bar{\aleph}(t) = \aleph(t, \bar{\ell}_0(t), \bar{\aleph}(t))$.

$H_3)$ Pour chaque $t \in \Omega$, et $x, \Phi \in C(\Omega)$, on a

$$\xi(x(t), \Phi(t)) \geq 0.$$

Implique

$$\xi\left(\frac{1}{\Gamma(\vartheta)} \int_0^t e^{-\ell(t-\rho)}(t-\rho)^{\vartheta-1}\bar{\aleph}(\rho)\, d\rho, \frac{1}{\Gamma(\vartheta)} \int_0^t e^{-\ell(t-\rho)}(t-\rho)^{(\vartheta-1)}\bar{\aleph}'(\rho)\, d\rho\right) \geq 0$$

où $\bar{\aleph}, \bar{\aleph}' \in C(\Omega)$tels que

$$\bar{\aleph}(t) = \aleph(t, x_t, \bar{\aleph}(t))$$

et

$$\bar{\aleph}'(t) = \aleph(t, \Phi t, \bar{\aleph}'(t)).$$

$H_4)$ Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C(\Omega)$ avec $x_n \to x$ et $\xi(x_n(t), x_{n+1}(t)) \geq 1$, alors

$$\xi(x_n(t), x(t)) \geq 1.$$

$H_5)$ Pour toutes solutions fixes x, x' du problème (3.2)-(3.3) soit

$$\xi(x(t), x'(t)) \geq 0,$$

où

$$\xi(x'(t), x(t)) \geq 0.$$

remièrement, nous prouvons les résultats d'existence et d'unicité en utilisant la contraction de type α-ψ-Geraghty et la théorie du point fixe.

Théorème 3.2.3. *Les hypothèses (H_1) à (H_4) tant satisfaites, le problème* (3.2)-(3.3)*possède au moins une solution définie sur Ω. De plus, si l'hypothèse(H_5)est également vérifiée, alors nous obtenons une solution unique.*

Démonstration. Considérez l'opérateur $T : X \to X$ défini par :

$$(Tx)(t) = \begin{cases} \mu(0)e^{-\ell t} + \frac{1}{\Gamma\vartheta}\displaystyle\int_0^t e^{-\ell(t-\rho)}(t-\rho)^{(\vartheta-1)}\bar{\aleph}(\rho)d\rho, & t \in \Omega, \\ \mu(t), & t \in (-\infty, 0], \end{cases} \tag{3.8}$$

où $\bar{\aleph} \in C(\Omega)$ telle que $\bar{\aleph}(t) = \aleph(t, xt, \bar{\aleph(t)})$. soit $\alpha : (-\infty, k] \to \mathbb{R}$ une fonction donnée par :

$$\alpha(t) = \begin{cases} \mu(t); & t \in (-\infty, 0], \\ \mu(0)e^{-\ell t} & t \in \Omega. \end{cases}$$

Alors $\alpha_0 = \mu$ pour tout $z \in C(\Omega)$, avec $z(0) = 0$, nous désignons par $\bar{z}$ la fonction définie par

$$\bar{z} = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty, 0], \\ z(t), & t \in \Omega. \end{cases}$$

si $x(\cdot)$ satisfait l'équation intégrale

$$x(t) = \mu(0)e^{-\ell t} + \frac{1}{\Gamma(\vartheta)}\int_0^t e^{-\ell(t-\rho)}(t-\rho)^{\vartheta-1}\bar{\aleph}(\rho)d\rho,$$

Nous pouvons décomposer $x(\cdot)$ comme $x(t) = \bar{z(t)} + \alpha(t)$ pour $t \in \Omega$, ce qui implique que $x_t = z_t + \alpha(t)$ pour tout $t \in \Omega$ et la fonction $z(\cdot)$ satisfait

$$z(t) = \frac{1}{\Gamma(\vartheta)}\int_0^t e^{-\ell(t-\rho)}(t-\rho)^{\vartheta-1}\bar{\aleph}(\rho)d\rho,$$

où

$$\bar{\aleph}(t) = \aleph(t, \bar{z}_t + \alpha_t, \bar{\aleph}(t));\ t \in \Omega.$$

Ce qui donne

$$\mathcal{D}_0 = [z \in C(\Omega);\ z_0 = 0],$$

et soit $||\cdot||_k$soit la norme dans $\mathcal{D}_0$ définie par

$$||z||_k = ||z_0||_Q + \sup_{t\in\Omega}|z(t)| = \sup_{t\in\Omega}|z(t)|;\ z \in \mathcal{D},$$

où $\mathcal{D}_0$ est un espace de Banach avec la norme $||\cdot||_k$. Définissons l'opérateur $\mathcal{W} : \mathcal{D}_0 \to \mathcal{D}_0$ par

$$(\mathcal{W}z)(t) = \frac{1}{\Gamma(\vartheta)}\int_0^t e^{-\ell(t-\rho)}(t-\rho)^{\vartheta-1}\bar{\aleph}(\rho)d\rho, \tag{3.9}$$

où

$$\bar{\aleph}(t) = \aleph(t, \bar{z}_t + \alpha_t, \bar{\aleph}(t)); \ t \in \Omega.$$

La fonction $\alpha : C(\Omega) \times \Omega \to (0, \infty)$est donné par :

$$\begin{cases} \alpha(z, y) = 1; & \text{si } \ \xi(z(t), y(t)) \geq 0, \text{ pour } t \in \Omega, \\ \alpha(z, y) = 0; & sinon. \end{cases}$$

Tout d'abord, nous prouvons que $\mathcal{W}$ est un opérateur de α-ψ-Geraghty généralisé : Soit $z, y \in \mathcal{D}_0$. Alors, pour tout $t \in \Omega$, on a

$$|(\mathcal{W}z)(t) - (\mathcal{W}y)(t)| \leq \frac{1}{\Gamma(\vartheta)} \int_0^t e^{-\ell(t-\rho)} (t-\rho)^{(\vartheta-1)} |\bar{\aleph}(\sigma) - \bar{\aleph}'(\sigma)| d\rho,$$

où $\bar{\aleph}, \bar{\aleph}' \in C(\Omega)$telle que

$$\bar{\aleph}(t) = \aleph(t, \bar{z}_t + \alpha_t, \bar{\aleph}'(t)) \ et \ \bar{\aleph}'(t) = \aleph(t, \bar{y}_t + \alpha_t, \bar{\aleph}'(t)).$$

De (H_1) on a

$$||\bar{\aleph} - \bar{\aleph}'||_\infty \leq \frac{\bar{p}(t)}{1 - \bar{q}^*} ||(z-y)^2||_\infty^{\frac{1}{2}},$$

où $\overline{q}^* = \sup_{t \in \Omega} |\bar{q}(t)|$. Ensuite, nous avons

$$|(\mathcal{W}z)(t) - (\mathcal{W}y)(t)| \leq \frac{1}{\Gamma(\vartheta)} \int_0^t e^{-l(t-\rho)} (t-\rho)^{\vartheta-1} \frac{\bar{p}(\rho)}{1 - \bar{q}^*} \|(z-y)^2\|_\infty^{\frac{1}{2}} d\rho.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \alpha(z, y)|(\mathcal{W}z)(t) - (\mathcal{W}y)(t)|^2 &\leq ||(z-y)^2||_\infty \alpha(z-y) \left\| \frac{1}{\Gamma(\vartheta)} \int_0^t e^{-\ell(t-\rho)(t-\rho)^{\vartheta-1}} \frac{\bar{p}(\rho)}{1 - \bar{q}^*} d\rho \right\|_\infty^2 \\ &\leq ||(z-y)^2||_\infty \psi(||(z-y)^2||_\infty). \end{aligned}$$

Donc,

$$\alpha(z, y)\psi(2^3 d(\mathcal{W}(z), \mathcal{W}(y))) \leq \eta(\psi(M(z, y))\psi(M(z, y))),$$

L'opérateur $\mathcal{W}$ est un opérateur généralisé α-ψ-de Geraghty, où $\eta \in X$, $\psi \in \Lambda$, avec $\eta(t) = \dfrac{1}{8}t$, et $\psi(t) = t$.

Soit $z, y \in C(\Omega)$ tels que

$$\alpha(z, y) \geq 1.$$

Ainsi, pour chaque $t \in \Omega$ nous avons

$$\xi(x_{2t}, x_{2t}^{'}) \geq 0.$$

Cela implique à partir de (H_3)que

$$\xi(\mathcal{W}z(t), \mathcal{W}y(t)) \geq 0,$$

ce qui donne

$$\alpha(\mathcal{W}(z), \mathcal{W}(y)) \geq 1.$$

Ainsi, $\mathcal{W}$ est un opérateur α-admissible.
Maintenant, selon (H_2), il existe $\bar{\ell_0} \in C(\Omega)$ tel que

$$\alpha(\bar{\ell_0}, \mathcal{W}(\bar{\ell_0})) \geq 1.$$

Ainsi, d'après (H_4), $(\bar{\ell}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Phi$ avec $\bar{\ell}_n \to \bar{\ell}$ et $\alpha(\bar{\ell}_n, \bar{\ell}_{n+1}) \geq 1$, alors

$$\alpha(\bar{\ell}_n, \bar{\ell}) \geq 1$$

D'après l'application du Théorème (3.2.1), nous en déduisons que $\mathcal{W}$ possède un point fixe. Par conséquent, T possède un point fixe qui est la solution du problème.
De plus, (H_5) implique que si $z\ et\ y$ sont des points fixes de $\mathcal{W}$, alors

$$\xi(z, y) \geq 0 \ ou \ \xi(y, z) \geq 0.$$

Cela implique que soit

$$\alpha(z, y) \geq 1 \ ou \ \alpha(y, z) \geq 1.$$

Ainsi, le problème (3.2) a une solution unique. □

Maintenant, nous prouvons un résultat d'existence et d'unicité en utilisant le théorème du point fixe de F contraction.

Théorème 3.2.4. *Supposons qu'il existe des constantes $\lambda, \hat{\lambda} > 0$ où $\bar{\lambda} = \lambda(1-\lambda) > \sqrt{2}$ telles que pour chaque $xt, \widehat{xt} \in Q$, $\Phi, \widehat{\Phi} \in \mathbb{R}$ et $t \in \Omega$*

$$|\aleph(t, xt, \Phi) - \aleph(t, \widehat{xt}, \widehat{\Phi})| \leq \frac{\Gamma(\vartheta)}{2\lambda k^{(\vartheta-1)}\left[1 + \sup_{t\in\Omega}|x(t)| + \sup_{t\in\Omega}|\hat{x}(t)|\right]}|x(t) - \hat{x}(t)| + \hat{\lambda}|\Phi - \hat{\Phi}|. \tag{3.10}$$

Alors le problème(3.2)-(3.3) a une solution unique définie sur Ω.

Démonstration. Soit $\mathcal{W} : \mathcal{D}_0 \to \mathcal{D}_0$ définie comme dans (3.9). Pour tout $z, y \in \mathcal{D}_0$, pour chaque $t \in \Omega$, nous avons

$$|(\mathcal{W}z)(t) - (\mathcal{W}y)(t)|^2 \leq \left\{ \frac{1}{\Gamma(\vartheta)} \int_0^t e^{-\ell(t-\rho)}(t-\rho)^{(\vartheta-1)} \left| \bar{\aleph}(\rho) - \bar{\aleph}'(\rho) \right| d\rho \right\}^2,$$

où $\bar{\aleph}, \bar{\aleph}' \in C(\Omega)$ tel que

$$\bar{\aleph}(t) = \aleph(t, \bar{z}t + \alpha t, \bar{\aleph}(t)) \ et \ \bar{\aleph}'(t) = \aleph(t, \bar{y}t + \alpha t, \bar{\aleph}'(t)).$$

Puisque, pour chaque $t \in \Omega$, on a

$$\|\bar{\aleph}(t) - \bar{\aleph}'(t)\| \leq \frac{\Gamma(\vartheta)}{2(1-\hat{\lambda})k^{(\vartheta-1)}\left[1 + \sup_{t\in\Omega}|z(t)| + \sup_{t\in\Omega}|y(t)|\right]} |z(t) - y(t)|.$$

Ensuite, nous obtenons

$$\begin{aligned}
|(\mathcal{W}z)(t) - (\mathcal{W}y)(t)|^2 &\leq \left\{ \frac{1}{\bar{\lambda}\left[2 + 2\sup_{t\in\Omega}|z(t)| + 2\sup_{t\in\Omega}|y(t)|\right]} |z(t) - y(t)| \right\}^2 \\
&\leq \frac{1}{\bar{\lambda}^2\left[2 + 2\sup_{t\in\Omega}|z(t)| + 2\sup_{t\in\Omega}|y(t)|\right]^2} \left\{ \sqrt{|z(t) - y(t)|^2} \right\}^2 \\
&\leq \frac{1}{\bar{\lambda}^2\left[2 + \sup_{t\in\Omega}|z(t)| + \sup_{t\in\Omega}|y(t)|\right]^2} \left\{ \sqrt{\sup_{t\in\Omega}|z(t) - y(t)|^2} \right\}^2 \\
&\leq \frac{1}{\bar{\lambda}^2\left[2 + \sup_{t\in\Omega}|z(t) - y(t)|^2\right]} \left\{ \sqrt{\sup_{t\in\Omega}|z(t) - y(t)|^2} \right\}^2.
\end{aligned}$$

Par conséquent, nous obtenons

$$\bar{\lambda}^2 M(\mathcal{W}z, \mathcal{W}y) \leq \frac{M(z,y)}{2 + M(z,y)}.$$

Maintenant, en appliquant le logarithme naturel à l'inégalité précédente, nous obtenons

$$\ln(2 + M(z,y)) + \ln(\bar{\lambda}^2 M(\mathcal{W}z, \mathcal{W}y)) \leq \ln(M(z,y)) \leq \ln(A^{sM}(z,y)),$$

où

$$A^{sM}(z,y) = \max\left\{ M(z,y), M(z,\mathcal{W}z), M(y,\mathcal{W}y), \frac{\beta}{2c}[M(y,\mathcal{W}z) + M(z,\mathcal{W}y)] \right\}, \beta < \frac{1}{2}.$$

Si on choisit $F(t) = \ln(t)$ et $\phi(t) = \ln(2+t)$, on voit que toutes les conditions du théorème (3.2.2) sont satisfaites, de sorte que $\mathcal{W}$ a un point fixe unique. Par conséquent, T possède un unique point fixe qui est la solution du problème. $\square$

Exemple 3.2.1. *Considérons le problème suivant qui est un exemple du problème (3.2)-(3.3) :*

$$\begin{cases} \left({}_0^C D_t^{1/2,\ell} x\right)(t) = \dfrac{\arctan(\|xt\|_\Psi)}{380(1+\|xt\|_\Psi)} + \dfrac{1}{380\left(1+\left|\left({}_0^C\mathcal{D}_t^{\frac{1}{2},\ell}x\right)(t)\right|\right)}; & t \in \Omega := [0,1], \\ x(t) = t+1; & t \in (-\infty, 0]. \end{cases} \tag{3.11}$$

Soit γ une constante réelle positive et

$$B_\gamma = \left\{ x \in C((-\infty,1],\mathbb{R}) : \lim_{\rho\to-\infty} e^{\gamma\rho}x(\rho) \in \mathbb{R} \right\}. \tag{3.12}$$

La norme de B_γ est donnée par

$$\|x\|_\gamma = \sup_{\rho\in(-\infty,1]} e^{\gamma\rho}|x(\rho)|.$$

Soit $x : (-\infty,0] \to \mathbb{R}$ tel que $x_0 \in B_\gamma$. Alors

$$\begin{aligned} \lim_{\rho\to-\infty} e^{\gamma\rho}xt(\rho) = \lim_{\rho\to-\infty} e^{\gamma\rho}x^{(t+\rho-1)} &= \lim_{\rho\to-\infty} e^{\gamma(\rho-t+1)}x(\rho) \\ &= e^{\gamma(-t+1)} \lim_{\rho\to-\infty} e^{\gamma(\rho)}x_1(\rho) < \infty. \end{aligned}$$

D'où $xt \in B_\gamma$. Enfin, nous prouvons que

$$\|xt\|_\gamma \leq \xi_1\|x_1\|_\gamma + \xi_2 \sup_{\sigma\in[0,t]} |x(\sigma)|,$$

où $\xi_1 = \xi_2 = 1$ et $\xi_3 = 1$. On a

$$|xt(\rho)| = |x(t+\rho)|.$$

Si $t+\rho \leq 1$, on obtient

$$|xt(\xi)| \leq \sup_{\sigma\in(-\infty,0]} |x(\sigma)|.$$

Pour $t+\rho \geq 0$, alors on a

$$|xt(\xi)| \leq \sup_{\sigma\in[0,t]} |x(\sigma)|.$$

Ainsi pour tout $t+\rho \in \Omega$, on obtient

$$|xt(\xi)| \leq \sup_{\sigma\in(-\infty,0]} |x(\sigma)| + \sup_{\sigma\in[0,t]} |x(\sigma)|.$$

Alors

$$\|x_t\|_\gamma \leq \|x_0\|_\gamma + \sup_{\sigma\in[0,t]} |x(\sigma)|.$$

Il est clair que $(B_\gamma, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach. On peut conclure que B_γ est un espace de phase.

Ensemble

$$\aleph(t,x,\Phi) = \frac{\arctan(\|x\|_\Psi)}{380(1+\|x\|_\Psi)} + \frac{1}{380(1+|\phi|)},$$

où $t \in \Omega$, $x \in \Psi$, $\Phi \in \mathbb{R}$. Soit $(C(\Omega), M, 2)$ l'espace b-métrique complet avec $s = 2$, tel que $M : C(\Omega) \times C(\Omega) \to (0,\infty)$, est donné par :

$$M(x,\Phi) = \|(x-\Phi)^2\|_\infty := \sup_{t\in\Omega} |x(t) - \Phi(t)|^2.$$

Pour tout $x, \Phi \in \Psi$, $\overline{x}, \overline{\Phi} \in \mathbb{R}$ et $t \in \Omega$, on a

$$|\aleph(t,x,\overline{x}) - \aleph(t,\Phi,\overline{\Phi})| \leq \frac{\|x-\Phi\|_\Psi}{380} + \frac{|\overline{x}-\overline{\Phi}|}{380}.$$

Ainsi, l'hypothèse (H$_1$) est satisfaite avec

$$p(t) = q(t) = \frac{1}{380}.$$

Définir les fonctions $\eta(t) = \frac{1}{8}t$, $\varphi(t) = t$, $\vartheta : C(\Omega) \times C(\Omega) \to \mathbb{R}_+^*$ avec

$$\vartheta(X,\Phi) = \begin{cases} 1 & si\ M(x(t),\Phi(t)) \geq 0, t \in \Omega, \\ 0 & sinon, \end{cases}$$

et $M : C(\Omega) \times C(\Omega) \to \mathbb{R}$ avec $M(x,\Phi) = \|x-\Phi\|_\infty$. L'hypothèse (H$_2$) est satisfaite avec $\ell_0(t) = x_0$. De plus, (H$_3$) découle de la définition de la fonction M. Des calculs simples montrent que toutes les conditions du théorème (3.2.3) sont satisfaites. On obtient donc l'existence et l'unicité des solutions au problème (3.11).

Exemple 3.2.2. *Considérons ensuite le problème suivant :*

$$\begin{cases} ({}_0D_\ell^{\frac{1}{2}}x)(t) = \dfrac{\Gamma(\frac{1}{2})}{4(1+\sup_{t\in\Omega}|x(t)|)} + \dfrac{1}{20\left(1+{}_0D_\ell^{\frac{1}{2}}x(t)\right)}, & t\in\Omega, \\ x(t) = 2t+4, & t\in(-\infty,0]. \end{cases} \tag{3.13}$$

Ensemble

$$\aleph(t,x_t,\Phi) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{4(1+\sup_{t\in\Omega}|x(t)|)} + \frac{1}{20(1+|\Phi|)'},$$

où $t\in\Omega$, $x\in C(\Omega)$, $\Phi\in\mathbb{R}$. *Soit* $(C(\Omega),M,2)$ *un espace b-métrique complet avec* $\vartheta=2$, *tel que* $M: C(\Omega)\times C(\Omega)\to(0,\infty)$, *est donné par :*

$$M(x,\Phi) = \|(x-\Phi)^2\|_\infty := \sup_{t\in\Omega}|x(t)-\Phi(t)|^2.$$

Pour tout $x,\Phi\in C(\Omega)$, $\overline{x},\overline{\Phi}\in\mathbb{R}$ *et* $t\in\Omega$, *on a*

$$|\aleph(t,x_t,\overline{x}) - \aleph(t,\Phi_t,\overline{\Phi})| \leq \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)|x(t)-\Phi(t)|}{4\left(1+\sup_{t\in\Omega}|x(t)|+\sup_{t\in\Omega}|\Phi(t)|\right)} + \frac{1}{20}|\overline{x}-\overline{\Phi}|.$$

Alors l'hypothèse est satisfaite par

$$\lambda = 2 \;\; b_\lambda = \frac{1}{20} \;\; et \;\; \lambda = \frac{19}{10} > \sqrt{2}.$$

Puisque toutes les exigences du Théorème (3.2.2) *sont vérifiées, nous concluons à l'existence et à l'unicité des solutions pour le problème* (3.13).

Conclusion

Dans ce travail, nous avons tenté de mettre en lumière sur les théorèmes du point fixe dans les espaces b-métriques concernant les applications contractantes. Comme des applications nous établissons l'existance et l'unicité de la solution des équations intégrales et des équations différentielles fractionnaires implicites tempérées de Caputo. L'intérêt de ce travail est la possibilité d'étudier plusieurs problèmes nonlinéaires dans des espaces abstraits intéréssants qui ne sont pas métriques ou normés.

Bibliographie

[1] B.Amira, Théorèmes du point fixe commun dans le espaces b-métriques, Mémoire de fin d'études de Master, Université de Tébessa, 16 juin 2019.

[2] H. Afshari, H. Aydi, et E. Karapınar, On generalized α-ψ-Geraghty contractions on b-metric spaces, Georgian Mathematical Journal, 2020, 9-21.

[3] C. Li, W. Deng and L. Zhao, Well-posedness and numerical algorithm for the tempered fractional differential equations, Disc. Contin. Dyn. Syst. Ser. B. vol.24, 2019, 1989-2015.

[4] B. Alqahtani, A. Fulga, F. Jarad, E. Karapınar, Nonlinear F-contractions on b-metric spaces and differential equations in the frame of fractional derivatives with Mittag-Leffler kernel, Chaos, Solitons & Fractals, vol. 128, pp. 349–354, 2019.

[5] F. Sabzikar, M. M. Meerschaert, J. Chen,Tempered fractional calculus, Journal of Computational Physics, vol. 293, pp. 14–28, 2015.

[6] B. Shiri, G. Wu, D. Baleanu, Collocation methods for terminal value problems of tempered fractional differential equations,Applied Numerical Mathematics, vol. 156, pp. 385–395, 2020.

[7] L. B. Ćirić, "Generalization contractions and fixed point theorems", Publ. Math. Beograd, vol. 12, pp. 19-26, 1971.

[8] L. B. Ćirić,"Generalization contractions and fixed point theorems", Publ. Math. Beograd, vol. 12, pp. 19-26, 1971.

[9] V. M. Sehgal,"On fixed and periodic points for a class of mappings", J. London Math. Soc., vol. 5, pp. 571-576, 1972.

[10] H. Aydi, M-F. Bota, E. Karapinar, S. Moradi, A common fixed point for weak-φ-contraction on b-metric spaces, Fixed Point Theory, vol. 13, no. 2, pp. 337-346, 2012.

[11] D. W. Boyd and S. W. Wong, On nonlinear contractions, Proc. Amer. Math. Soc., vol. 20, pp. 458-464, 1969.

[12] A. Meir and E. Keeler, A theorem on contraction mappings, J. Math. Anal. Appl., vol. 28, pp. 326-329, 1969.

[13]

[14] M. Geraghty, On contractive mappings, Proc. Amer. Math. Soc., vol. 40, pp. 604-608, 1973.

[15] J. A. Meszaros, A comparison of various definitions of contractive type mappings, Bull. Calcutta Math. Soc., vol. 84, no. 2, pp. 167-194, 1992.

[16] J. Caristi, Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 215, pp. 241-251, 1976.

[17] Y. Sonntag, Topologie et analyse fonctionnelle, Ellipses, 1998. (Cours de licence avec 240 exercices et 30 problèmes corrigés)