



RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN TIARET
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUES
Département de Mathématiques



MÉMOIRE MASTER

Présenter en vue de l'obtention du diplôme de master

Spécialité :

« Mathématique »

Option :

« Analyse fonctionnelle et équation différentielle »

Présenté Par :

Boulefrad Khaldia et Elhadj Nebia

Sous L'intitulé :

Des méthodes numériques pour résoudre l'équation différentielle fractionnaire à retard

Soutenu publiquement le 12 / 06 / 2024
à Tiaret devant le jury composé de :

Mr SOUID Med Said

Prof Université de Tiaret

Président

Mr BOUAZZA Zoubida

MCA Université de Tiaret

Examineur

Mr SABIT Souhila

MCA Université de Tiaret

Encadreur

Année universitaire : 2023/2024

Table des matières

Table des matières	1
1 Préliminaires	5
1.1 Espace de Banach	5
1.2 Espace vectoriel	5
1.3 Sous-espace vectoriel	6
1.4 Espace affine	6
1.5 Les Espaces $L^p(\Omega)$	7
1.6 Inégalité de Hölder	7
1.7 Lemme de Gronwall	9
1.8 Convergence uniforme	10
1.9 Fonction Gamma	10
1.10 Intégrale Fractionnaire	14
1.11 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann Liouville	15
1.12 Équations fractionnaires de Riemann-Liouville à retard	15
1.12.1 L'existence de la solution	17
1.12.2 L'unicité de la solution	21
2 Les méthodes numériques	24
2.1 Ondelette Hermite	24
2.2 Approximations des fonctions	25
2.3 Analyse de convergence	26
2.4 Procédure de mise en œuvre du Schéma proposé	27
2.4.1 Méthode des étapes	27
2.4.2 Méthode d'ondelette Hermite	27
2.5 Méthode de décomposition d'Adomian	29
2.5.1 Application de la méthode	30
3 Applications Numériques	32
3.1 Application de la méthode d'Ondelette Hermite	32
3.2 Application de la méthode de décomposition d'Adomian	41
Table des figures	53

Introduction

Le calcul fractionnaire est une extension des notions classiques de primitive et dérivation d'ordre entier non nul à tout ordre réel. Les concepts de dérivation et d'intégration fractionnaire sont associés aux noms de Riemann et Liouville. En effet, à la fin du 17^{me} siècle, la théorie du calcul fractionnaire est motionnée par G.W.Leibniz où il a fait quelques remarques sur la signification et la possibilité de la dérivée fractionnaire de l'ordre. En 1832-1837, le mathématicien français Joseph Liouville à commencé à enquêter et rechercher. Il a publié une série d'articles où il a définit le premier opérateur d'intégration fractionnaire. Des recherches et des développements ultérieurs entre lui et le mathématicien allemand Bernard Riemann conduisirent à la construction de l'opérateur intégral fractionnaire de Riemann-Liouville. Aujourd'hui, il existe des nombreuses formes d'opérateurs intégraux fractionnaires mais l'opérateur de Riemann-Liouville est toujours le plus utilisé lorsque l'intégration fractionnaire est effectuée.

Dans ce travail, on s'intéresse à l'équation différentielle fractionnaire de Riemann-Liouville à retard. On présente quelques méthodes numériques pour résoudre cette équation.

Ce travail est divisé en trois chapitres.

Dans le premier chapitre, on définit quelques notions de base comme : la fonction gamma et ses propriétés, et l'espaces L^p , ensuite on présente les définitions sur les intégrales, la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre ??, et nous examinons à la fois l'existence et l'unicité de solutions au problème des équation différentielles fractionnaire de Riemann-Liouville à retard.

Dans le deuxième chapitre, on présente la méthode des ondelettes Hermite qui est mise en oeuvre pour trouver la solution numérique des problèmes des valeurs limites et comparer les solutions obtenues avec la solution exacte. Cette méthode est définie par le polynôme d'Hermite qui sont les fonctions de base. Dans notre travail, on établit une technique en combinant à la fois la méthode des étapes et les ondelette Hermite pour résoudre une équation différentielle à retard fractionnaire. d'autre part, on présente la méthode de

décomposition d'Adomian qui est une méthode semi-analytique de résolution d'équation différentielle, est développée par le mathématicien américain George A' domian durant la seconde partie du 20^{me} siècle. Dans le dernier chapitre, on présente des exemples numériques, et on compare ces méthodes. Enfin, une conclusion est donnée.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Espace de Banach

Définition 1.1.

Une application $\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une norme si elle vérifie les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0, & \forall x \in E. \\ \| \lambda \cdot x \| = |\lambda| \| x \|, & \forall \lambda \in \mathbb{R}, x \in E. \\ \| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|, & \forall x, y \in E. \end{cases} \quad (1.1)$$

Le couple $(E, \|\cdot\|)$ est alors appelé un espace vectoriel normé.

Définition 1.2. Une suite $(x_k)_k$ d'éléments d'un espace normé E est dite suite de Cauchy si :

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N \geq 1)k, l \geq N \implies \| x_k - x_l \| \leq \epsilon$$

.

Toute suite convergente est de Cauchy.

Définition 1.3. On dit qu'un espace normé est complet si toute suite de Cauchy est convergente. On appelle **espace de Banach** tout espace normé complet.

1.2 Espace vectoriel

Définition 1.4.

On appelle K -espace vectoriel ou espace vectoriel sur K un triplet $(E, +, \cdot)$ tel que :

1. $(E, +)$ est un groupe commutatif, c'est à dire :
 - (a) $\forall (x, y, z) \in E^3, (x + y) + z = x + (y + z)$ (associativité)

- (b) $\forall(x, y) \in E^2, x + y = y + x$ (commutativité)
- (c) $\exists e \in E, \forall x \in E, x + e = x$ (élément neutre)
- (d) $\forall x \in E, \exists x' \in E, x + x' = e$ (symétrique)

2. est une loi de composition externe sur E de base K vérifiant, pour tous $x, y \in E$ et $\alpha, \beta \in K$:

- (a) $1.x = x$;
- (b) $(\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x$;
- (c) $\alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$;
- (d) $\alpha.(\beta.x) = (\alpha\beta).x$.

1.3 Sous-espace vectoriel

Définition 1.5.

Soient E un espace vectoriel sur K et F une partie de E . On dit que F est un sous-espace vectoriel de E , si

1. $F \neq 0$;
2. pour tout $(x, y) \in F \times F, x + y \in F$ (i.e. F est stable pour la loi +);
3. pour tout $\lambda \in K$ et tout $x \in F, \lambda x \in F$.

1.4 Espace affine

\vec{E} désigne un espace vectoriel sur un corps K commutatif de caractéristique différente de 2 (dans la plupart des cas $K = R$) et de dimension finie n .

Définition 1.6. Soit E un ensemble non vide. On dit que E est un espace affine sur \vec{E} lorsqu'il existe une loi de composition externe (notée +) de $E \times \vec{E}$ vers E qui vérifie

- (i) $\forall A \in E, A + \vec{O} = A$;
- (ii) $\forall A \in E, \forall \vec{u}, \vec{v} \in \vec{E}, on a (A + \vec{u}) + \vec{v} = A + (\vec{u} + \vec{v})$;
- (iii) $\forall A \in E, l'application \vec{u} \mapsto A + \vec{u}$ est une bijection de \vec{E} sur E .

Les éléments de E sont en général appelés des points, les éléments de \vec{E} sont des vecteurs. On dit que \vec{E} est l'espace vectoriel associé à E , ou encore la direction de E .

1.5 Les Espaces $L^p(\Omega)$

1. $p = 1$

$$L^1(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, f \text{ mesurable}, \int_{\Omega} |f(x)| dx < \infty\}$$

$$\|f\|_{L^1(\Omega)} = \int_{\Omega} |f(x)| dx$$

2. $\forall p \in]1, +\infty[$

$$L^p(\Omega) = \{f : (\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^n, f \text{ mesurable, tq } |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

3. $p = +\infty$

$$L^\infty(\Omega) = \{f : (\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^n, f \text{ mesurable, } \exists c > 0 \text{ tq } |f| < c. \text{ p.p dans } \Omega\}$$

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup\{c \mid |f| < c, \text{ p.p}\}$$

1.6 Inégalité de Hölder

Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ alors

$$f.g \in L^1 \text{ et } \|f.g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$ on fixe $y \in \mathbb{R}^+$
et on étudie la fonction f

$$f(x) = \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q - xy, x \in \mathbb{R}^+$$

Si $y = 0, f(x) \geq 0$

$$f'(x) = x^{p-1} - y, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = y^{\frac{1}{p-1}}$$

$$\begin{aligned} f(y^{\frac{1}{p-1}}) &= \frac{1}{p}y^{\frac{1}{p-1}p} + \frac{1}{q}y^q - y^{1+\frac{1}{p-1}} \\ &= \frac{1}{p}y^q + \frac{1}{q}y^q - y^q \\ &= \frac{1}{p}y^q - \left(\frac{-1}{p} + 1\right)y^q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{p}y^q - \frac{p-1}{p}y^q \\
&= 0
\end{aligned}$$

donc $f(x) \geq 0$ donc

$$x.y \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q \quad (1.2)$$

Dans (1.2), on pose à la place de $x \rightarrow \lambda |f(x)|$ et $y \rightarrow \frac{1}{\lambda} |g(x)|$ on obtient : $|f(x)g(x)| \leq \frac{\lambda^p}{p} |f(x)|^p + \frac{\lambda^{-q}}{q} |g(x)|^q$. Supposons que

$(\int f^p)^{\frac{1}{p}} \neq 0$ et $(\int g^q) \neq 0$ choisissons λ pour avoir $\lambda^p \int f^p = \lambda^{-q} \int g^q$

$$\lambda^{p+q} = \frac{\int g^q}{\int f^p} \Rightarrow \lambda = \left(\frac{\int g^q}{\int f^p} \right)^{\frac{1}{p+q}}$$

$$\int_a^b |f(x)g(x)| \leq \frac{1}{p} \left(\frac{\int_a^b g^q}{\int_a^b f^p} \right)^{\frac{p}{p+1}} \int_a^b |f(x)|^p + \frac{1}{q} \left(\frac{\int_a^b g^q}{\int_a^b f^p} \right)^{\frac{-q}{p+1}} \int_a^b |g(x)|^q$$

On a $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Leftrightarrow pq = p + q$, alors $\frac{p}{p+q} = \frac{p}{pq} = \frac{1}{q}$ et $\frac{-q}{p+q} = \frac{-q}{pq} = \frac{-1}{p}$
alors

$$\int_a^b |f(x)g(x)| \leq \frac{1}{p} \left(\int_a^b g^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^b f^p \right)^{1-\frac{p}{p+q}} + \frac{1}{q} \left(\int_a^b g^q \right)^{1-\frac{q}{p+q}} \left(\int_a^b f^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

On a $1 - \frac{p}{p+q} = 1 - \frac{p}{pq} = \frac{1}{p}$ et $1 - \frac{q}{p+q} = 1 - \frac{q}{pq} = \frac{1}{q}$ donc

$$\begin{aligned}
\int_a^b |f(x)g(x)| &\leq \frac{1}{p} \left(\int_a^b g^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^b f^p \right)^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{q} \left(\int_a^b g^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^b f^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
\int_a^b |f(x)g(x)| &\leq \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) \left(\int_a^b g^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^b f^p \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

On a $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, donc

$$\int_a^b |f(x)g(x)| \leq \left(\int_a^b g^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^b f^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

□

1.7 Lemme de Gronwall

Lemme 1. [4] Soient $K \geq 0$, I un intervalle, u et φ deux fonctions continues sur l'intervalle I à valeurs positives, $a \in I$. Si l'on a :

$$\forall x \in I \quad u(x) \leq K + \left| \int_a^x u(t)\varphi(t)dt \right| \quad (1.3)$$

alors on a :

$$\forall x \in I \quad u(x) \leq K \exp \left| \int_a^x \varphi(t)dt \right| \quad (1.4)$$

Démonstration.

□

La continuité sur I de la fonction $u\varphi$ implique que $F : x \mapsto \int_a^x u(t)\varphi(t)dt$ est de classe C^1 sur I et que $F'(x) = u(x)\varphi(x)$ pour tout $x \in I$. Soit $x \in I$ tel que $x \geq a$. Pour tout $t \in [a, x]$, on a $u(t) \leq K + F(t)$, d'où l'on déduit en multipliant par $\varphi(t) \geq 0$ que $F'(t) \leq (K + F(t))\varphi(t)$. on a $K > 0$, alors $K + F(t) > 0$ pour tout $t \in [a, x]$ (car $u(t)\varphi(t) \geq 0$ donc $F(t) \geq 0$). On en déduit :

$$\int_a^x \frac{F'(t)}{K + F(t)} dt \leq \int_a^x \varphi(t) dt.$$

On a donc $\ln(K + F(x)) - \ln K \leq \int_a^x \varphi(t) dt$, i.e. $K + F(x) \leq K \exp\left(\int_a^x \varphi(t) dt\right)$.

Cela donne (1.4) pour $x \geq a$ puisque $u(x) \leq K + F(x)$.

Si $K = 0$, alors l'inégalité (1.3) est a fortiori vraie pour tout $K > 0$. On fait tendre K vers 0 dans cet encadrement (x est fixé) et on obtient $u(x) = 0$, i.e. (1.4) pour $K = 0$.

Soit $x \in I$ tel que $x \leq a$. On a par hypothèse

$$u(x) \leq K + \int_x^a u(t)\varphi(t)dt = K + \int_{-a}^{-x} u(-s)\varphi(-s)dt$$

Les fonctions $\check{u} : s \mapsto u(-s)$ et $\check{\varphi} : s \mapsto \varphi(-s)$ sont continues et positives sur l'intervalle $J = \{s \in \mathbb{R}; -s \in I\}$ et l'on a :

$$\check{u}(-x) \leq K + \int_{-a}^{-x} \check{u}(s)\check{\varphi}(s)ds \text{ avec } -x \in J \text{ et } -x \geq -a$$

D'après la cas précédent appliqué à \check{u} sur J en $-x$, on a

$$\check{u}(-x) \leq K \exp\left(\int_{-a}^{-x} \check{\varphi}(s)ds\right)$$

Autrement dit, $u(x) \leq K \exp\left(\int_a^x \varphi(t)dt\right)$, i.e. on a encore (1.4).

1.8 Convergence uniforme

Définition 1.7. *On dit que la suite (f_k) converge uniformément dans Ω vers une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}(\text{ou } \mathbb{C})$*

Si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) : \forall k \geq N(\varepsilon), \forall x \in \Omega \implies |f_k(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

($N(\varepsilon)$ ne dépend que de ε), c'est-à-dire, si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in \Omega} |f_k(x) - f(x)| \right) = 0.$$

Autrement dit, s'il existe une suite numérique a_k ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0 : |f_k(x) - f(x)| \leq a_k,$$

pour tout $x \in \Omega$.

1.9 Fonction Gamma

Définition 1.8. [1] *La fonction Gamma est généralement définie par l'intégrale suivante :*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \exp(-t)dt, \quad \forall x \in]0, +\infty[$$

Théorème 1.1.

Pour tout réel $x > 0$, la fonction Gamma est bien définie.

Démonstration 1.1. *On peut écrire la fonction Gamma comme suit :*

$$\Gamma(x) = I_1 + I_2,$$

où

$$I_1 = \int_0^1 t^{x-1} \exp(-t) dt$$

et

$$I_2 = \int_1^{+\infty} t^{x-1} \exp(-t) dt.$$

Puisque la fonction $\exp(-t)$ est décroissante sur $[0,1]$, on a

$$\int_0^1 t^{x-1} \exp(-t) dt < \int_0^1 t^{x-1} dt = \frac{1}{x}, x \in]0, +\infty[.$$

Donc I_1 est convergé pour réel $x > 0$. D'autre part, on a

$$1 \leq t \implies t^{x-1} \exp(-t) \leq \exp\left(\frac{-t}{2}\right) \iff t^{x-1} \leq \exp\left(\frac{t}{2}\right).$$

Donc

$$\int_1^{+\infty} t^{x-1} \exp(-t) dt \leq \int_1^{+\infty} \exp\left(\frac{-t}{2}\right) dt = 2 \exp\left(\frac{-1}{2}\right).$$

Par conséquent I_2 est convergé pour $x > 0$. D'où, la fonction Gamma est convergente pour tout $x \in]0, +\infty[$.

Proposition 1.1.

1. **Relation fonctionnelle** : une propriété importante de la fonction Gamma est la relation de récurrence suivante, pour tout nombre réelle, strictement positive x on a :

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

2. **Lien avec la fonction factorielle** : la fonction Gamma prolonge (généralise) la notion de la factorielle car on a :

$$\Gamma(n+1) = n!, \forall n \in \mathbb{N}.$$

3. $\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi}$ et pour $n = 0$ on obtient $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

4. La fonction Gamma est continue sur $]0, +\infty[$.

5. La fonction Gamma est strictement convexe sur $]0, +\infty[$.

6. La fonction Gamma est de class C^∞ sur $]0, +\infty[$ et on a

$$\forall x \in]0, +\infty[\quad , \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1} \exp(-t) dt.$$

7. $\exists x_0 \in]1, 2[$ où, la fonction Gamma est strictement décroissante sur $]0, x_0]$ et strictement croissante sur $[x_0, +\infty[$.

8. lorsque $z \rightarrow \infty$.

$$\frac{\Gamma(z + \alpha)}{\Gamma(z + \beta)} \sim z^{\alpha - \beta}.$$

Démonstration 1.2.

1. Par une intégration par partie, on obtient

$$\begin{aligned} \Gamma(x + 1) &= \int_0^{+\infty} t^x \exp(-t) dt \\ &= \left[-t^x \exp(-t) \right]_{t=0}^{t=+\infty} + x \int_0^{+\infty} t^{x-1} \exp(-t) dt \\ &= x\Gamma(x). \end{aligned}$$

2. De où $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$ et puisque $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} \exp(-t) dt = 1$, on déduit,

$$\begin{aligned} \Gamma(2) &= 1.\Gamma(1) = 1!. \\ \Gamma(3) &= 2.\Gamma(2) = 2.1! = 2!. \\ \Gamma(4) &= 3.\Gamma(3) = 3.2! = 3!. \end{aligned}$$

Alors, par récurrence on obtient

$$\Gamma(n + 1) = n.\Gamma(n) = n!.$$

3. On a : $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \left(n - \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{2n-1}{2} \times \frac{2n-3}{2} \times \dots \times \frac{1}{2} \times \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{(2n)(2n-1)\dots 3 \times 2}{2^n(2n)(2n-2)\dots 3 \times 2} \sqrt{\pi} \\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n}n!} \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

Donc, pour $n = 0$. On trouve

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

4. On démontre l'approximation asymptotique suivante :

$$\frac{\Gamma(z + \alpha)}{\Gamma(z + \beta)} \sim z^{\alpha - \beta}$$

lorsque $z \rightarrow \infty$.

Nous utiliserons la formule de Stirling, qui donne une approximation pour la fonction Gamma pour des valeurs grandes de son argument. La formule de Stirling est :

$$\Gamma(z) \sim \sqrt{2\pi} z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z}$$

Appliquons cette formule aux arguments $z + \alpha$ et $z + \beta$:

$$\begin{aligned}\Gamma(z + \alpha) &\sim \sqrt{2\pi} (z + \alpha)^{z+\alpha-\frac{1}{2}} e^{-(z+\alpha)} \\ \Gamma(z + \beta) &\sim \sqrt{2\pi} (z + \beta)^{z+\beta-\frac{1}{2}} e^{-(z+\beta)}\end{aligned}$$

Nous voulons examiner le quotient de ces deux expressions :

$$\frac{\Gamma(z + \alpha)}{\Gamma(z + \beta)} \sim \frac{\sqrt{2\pi} (z + \alpha)^{z+\alpha-\frac{1}{2}} e^{-(z+\alpha)}}{\sqrt{2\pi} (z + \beta)^{z+\beta-\frac{1}{2}} e^{-(z+\beta)}}$$

Les facteurs $\sqrt{2\pi}$ se simplifient :

$$\frac{\Gamma(z + \alpha)}{\Gamma(z + \beta)} \sim \frac{(z + \alpha)^{z+\alpha-\frac{1}{2}} e^{-(z+\alpha)}}{(z + \beta)^{z+\beta-\frac{1}{2}} e^{-(z+\beta)}}$$

Nous pouvons réarranger l'expression en séparant les parties qui dépendent de z :

$$\frac{\Gamma(z + \alpha)}{\Gamma(z + \beta)} \sim \frac{(z + \alpha)^{z+\alpha}}{(z + \beta)^{z+\beta}} \cdot \frac{e^{-(z+\alpha)}}{e^{-(z+\beta)}} \cdot \frac{(z + \alpha)^{-\frac{1}{2}}}{(z + \beta)^{-\frac{1}{2}}}$$

Les exponentielles se simplifient également :

$$\frac{e^{-(z+\alpha)}}{e^{-(z+\beta)}} = e^{-(z+\alpha)+(z+\beta)} = e^{\beta-\alpha}$$

Nous obtenons alors :

$$\frac{\Gamma(z + \alpha)}{\Gamma(z + \beta)} \sim e^{\beta-\alpha} \cdot \frac{(z + \alpha)^{z+\alpha}}{(z + \beta)^{z+\beta}} \cdot \frac{(z + \alpha)^{-\frac{1}{2}}}{(z + \beta)^{-\frac{1}{2}}}$$

Pour les grands z , $z + \alpha$ et $z + \beta$ peuvent être approximés par z , donc :

$$\begin{aligned}(z + \alpha)^{z+\alpha} &\sim z^{z+\alpha} \\ (z + \beta)^{z+\beta} &\sim z^{z+\beta}\end{aligned}$$

Ainsi, nous avons :

$$\frac{(z + \alpha)^{z+\alpha}}{(z + \beta)^{z+\beta}} \sim \frac{z^{z+\alpha}}{z^{z+\beta}} = z^{\alpha-\beta}$$

Et :

$$\frac{(z + \alpha)^{-\frac{1}{2}}}{(z + \beta)^{-\frac{1}{2}}} \sim \left(\frac{z + \alpha}{z + \beta} \right)^{-\frac{1}{2}} \sim 1$$

Parce que $\frac{z+\alpha}{z+\beta} \sim 1$ pour z très grand.

En combinant tout cela, nous obtenons :

$$\frac{\Gamma(z + \alpha)}{\Gamma(z + \beta)} \sim e^{\beta-\alpha} \cdot z^{\alpha-\beta} \cdot 1 = z^{\alpha-\beta}$$

5. Pour la démonstration d'autres points voir [15].

1.10 Intégrale Fractionnaire

Définition 1.9. [2] On appelle intégrale fractionnaire d'ordre α de f et on note $I_a^\alpha f$ la fonction définie par :

$$I_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - s)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad t > a$$

où Γ est la fonction Gamma d'Euler

Remarque 1.

$$I_a^0 f(x) = f(x).$$

Proposition 1.2. Si f est continue sur $[a, b]$ alors

$$[I_a^{1-\beta} f(t)]_{t=a} = \lim_{t \rightarrow a} I_a^{1-\beta} f(t) = 0, \quad 0 \leq \beta \leq 1$$

Démonstration 1.3. On a

$$I_a^{1-\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_a^t (t-x)^{-\beta} f(x) dx$$

donc

$$\begin{aligned}
|I_a^{1-\beta} f(t)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_a^t (t-x)^{-\beta} f(x) dx \right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_a^t (t-x)^{-\beta} |f(x)| dx \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(1-\beta)} \int_a^t (t-x)^{-\beta} dx \quad \text{car } f \text{ est continue} \\
&\leq \frac{M}{(1-\beta)\Gamma(1-\beta)} [-(t-x)^{-\beta+1}]_a^t \\
&= \frac{M}{\Gamma(2-\beta)} (t-a)^{1-\beta}
\end{aligned}$$

et de là

$$\lim_{t \rightarrow a} |I_a^{1-\beta} f(t)| \leq \lim_{t \rightarrow a} \frac{M}{\Gamma(2-\beta)} (t-a)^{1-\beta} \leq 0$$

c'est-à-dire

$$\lim_{t \rightarrow a} |I_a^{1-\beta} f(t)| = 0.$$

1.11 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann Liouville

Définition 1.10. [2] On appelle dérivée fractionnaire au sens de Riemann Liouville de f d'ordre α et on note D_a^α la fonction définie par

$$D_a^\alpha f(t) = \left(\frac{d}{dt} \right)^n I_a^{n-\alpha} f(t),$$

avec n un entier naturel supérieure strictement à α

1.12 Équations fractionnaires de Riemann-Liouville à retard

On considère le système à valeur initiale suivant :

$$\begin{cases} D^\alpha y(t) = Ay(t) + By(t-r) + f(t), & t > 0 \\ y(t) = \psi(t), & t \in [-r, 0] \end{cases} \quad (1.5)$$

où dans cette section D^α est la dérivée de Riemann-Liouville d'ordre α , ψ est une fonction continue dans $[-r, 0]$, A et B sont des matrices carrées constantes de dimension finie et $r > 0$ est une constante. Le système est définie sur l'intervalle $J = [0, T]$, f est une fonction continue dans $[0, T]$.

On note par $C([a, b])$ l'espace des fonctions continues réelles qui sont définies sur $[a, b]$ et par $C([a, b], \mathbb{R}^n)$ l'espace de Banach des fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$ dans \mathbb{R}^n avec la topologie de convergence uniforme. Soit $C = C([a, b], \mathbb{R}^n)$ et ψ un élément dans C . On désigne la norme de ψ par :

$$\|\psi\| = \sup_{-r \leq t \leq 0} |\psi(t)|.$$

Soit

$$y_\psi = \{y \in C([-r, T], \mathbb{R}^n) / y(t) = \psi(t) \quad \text{si} \quad t \in [-r, 0]\}.$$

Alors y_ψ est un espace affine car

$$y_\psi = \{h + \tilde{\psi}, h \in F\}$$

où $\tilde{\psi}$ est un prolongement continue de ψ sur $[-r, T]$ et

$$F = \{y \in C([-r, T], \mathbb{R}^n), y(t) = 0 \quad \text{si} \quad t \in [-r, 0]\}$$

Il est clair que F est un sous-espace vectoriel de $E = C([-r, T], \mathbb{R}^n)$. Montrons que F est un fermé. On prend une suite (f_n) dans F telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) = f,$$

et on montre que $f \in F$. On a $f_n \rightrightarrows f$ quand $n \rightarrow +\infty$ c'est-à-dire que f_n converge uniformément vers f . On sait que la convergence uniforme conserve la continuité, alors puisque les f_n sont continues alors f est continue. Pour $t \in [-r, 0]$, comme la convergence uniforme implique la convergence simple donc

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) = 0$$

car $f_n(t) = 0$ dans $[-r, 0]$. Donc on conclut que $f \in F$ ce qui implique que F est un fermé.

Soient $x_1, x_2 \in y_\psi \Rightarrow$

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + \tilde{\psi} \\ x_2 = y_2 + \tilde{\psi} \end{cases}$$

On définit une distance d sur l'espace y_ψ par

$$d(y_1, y_2) = \|y_1 - y_2\| = \sup_{0 \leq t \leq T} |y_1 - y_2|$$

Il faut remarquer que les solutions continues du problème (1.5) seront déterminées dans l'espace affine y_ψ . De ce fait, les majorations devraient être établies à l'aide de la distance d définie plus haut. Comme elle ne dépend que de la distance uniforme entre les représentants y_1 et y_2 dans l'espace vectoriel F , alors on ne fera usage que de la norme de la convergence uniforme sachant bien qu'il s'agit de la distance d .

Pour les matrices A et B , on définit les nombres

$$\mu_0 = \sup_{\|u\| \neq 0} \frac{Au}{u} = \|A\|$$

et

$$\mu_1 = \sup_{\|u\| \neq 0} \frac{Bu}{u} = \|B\|.$$

1.12.1 L'existence de la solution

Théorème 1.2. *Soit $\psi \in C$ une fonction continue donnée. On fixe $T > 0$ et on suppose que $f \in C([0, T], \mathbb{R}^n)$, alors il existe une solution unique $y(\psi, f)$ continue définie sur $[0, T]$ et qui coïncide avec ψ sur $[-r, 0]$ du problème à valeur initial (1.5).*

Démonstration. On montre d'abord l'équivalence entre le système (1.5) et le système suivant :

$$y(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} A^{k-1} B I^{k\alpha} y(t-r) + \sum_{k=1}^{+\infty} A^{k-1} I^{k\alpha} f(t)$$

On prouve maintenant que si on a $D^\alpha y(t) = Ay(t) + By(t-r) + f(t)$ alors

$$y(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} A^{k-1} B I^{k\alpha} y(t-r) + \sum_{k=1}^{+\infty} A^{k-1} I^{k\alpha} f(t).$$

On a

$$D^\alpha y(t) = Ay(t) + By(t-r) + f(t),$$

alors

$$y(t) = I^\alpha Ay(t) + I^\alpha By(t-r) + I^\alpha f(t),$$

car d'une part à l'aide de l'équation suivant :

$$I_a^\alpha (D_a^\alpha h)(t) = h(t) - \frac{(t-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} [(I^{1-\alpha} h)(t)]_{t=a},$$

on a

$$I^\alpha (D^\alpha y)(t) = y(t) - \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} [(I^{1-\alpha} y)(t)]_{t=0},$$

et d'autre part grâce à (1.2) $[(I^{1-\alpha}y)(t)]_{t=0} = 0$ puisque y est supposée continue. Après une itération on aura

$$\begin{aligned} y(t) &= AI^\alpha [I^\alpha Ay(t) + I^\alpha By(t-r) + I^\alpha f(t)] + I^\alpha By(t-r) + I^\alpha f(t) \\ &= A^2 I^{2\alpha} y(t) + ABI^{2\alpha} y(t-r) + AI^{2\alpha} f(t) + I^\alpha By(t-r) + I^\alpha f(t), \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} y(t) &= A^2 I^{2\alpha} [I^\alpha Ay(t) + I^\alpha By(t-r) + I^\alpha f(t)] + ABI^{2\alpha} y(t-r) \\ &\quad + AI^{2\alpha} f(t) + I^\alpha B(t-r) + I^\alpha f(t) \\ &= A^3 I^{3\alpha} y(t) + A^2 BI^{3\alpha} y(t-r) + A^2 I^{3\alpha} f(t) + ABI^{2\alpha} y(t-r) \\ &\quad + AI^{2\alpha} f(t) + I^\alpha By(t-r) + I^\alpha f(t) \\ &= A^3 I^{3\alpha} y(t) + [BI^\alpha + ABI^{2\alpha} + A^2 BI^{3\alpha}] y(t-r) \\ &\quad + (I^\alpha + AI^{2\alpha} + A^2 I^{3\alpha}) f(t) \\ &\dots \\ &\dots \\ &= A^n I^{n\alpha} y(t) + \sum_{k=1}^n A^{k-1} BI^{k\alpha} y(t-r) + \sum_{k=1}^n A^{k-1} I^{k\alpha} f(t). \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n A^{k-1} BI^{k\alpha} y(t-r) \right| &\leq \mu_1 \sum_{k=1}^n \mu_0^{k-1} |I^{k\alpha} y(t-r)| \\ &= \mu_1 \sum_{k=1}^n \mu_0^{k-1} \frac{1}{\Gamma(k\alpha)} \left| \int_0^t (t-\tau)^{k\alpha-1} y(\tau-r) d\tau \right| \\ &\leq \mu_1 \sum_{k=1}^n \mu_0^{k-1} \frac{1}{\Gamma(k\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{k\alpha-1} |y(\tau-r)| d\tau \\ &\leq \mu_1 \sum_{k=1}^n \mu_0^{k-1} \frac{\|y\|}{\Gamma(k\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{k\alpha-1} d\tau \\ &\leq \mu_1 \sum_{k=1}^n \mu_0^{k-1} \frac{\|y\|}{\Gamma(k\alpha+1)} [-(t-\tau)^{k\alpha}]_0^t \\ &\leq \mu_1 \sum_{k=1}^n \mu_0^{k-1} \frac{\|y\| t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} \\ &\leq \mu_1 \sum_{k=1}^n \mu_0^{k-1} \frac{\|y\| T^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)}. \end{aligned}$$

On a la série $\mu_1 \sum_{k=1}^n \mu_0^{k-1} \frac{\|y\| T^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)}$ est convergente car :

On pose

$$c_k = \mu_0^{k-1} \frac{\|y\| T^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)},$$

alors

$$\begin{aligned} \frac{c_{k+1}}{c_k} &= \mu_0^k \frac{\|y\| T^{(k+1)\alpha}}{\Gamma((k+1)\alpha + 1)} \frac{\Gamma(k\alpha + 1)}{\mu_0^{k-1} \|y\| T^{k\alpha}} \\ &= \mu_0 T \frac{\Gamma(k\alpha + 1)}{\Gamma((k+1)\alpha + 1)}. \end{aligned}$$

On sait que

$$\frac{\Gamma(z + a)}{\Gamma(z + b)} \sim z^{a-b} \text{ quand } z \rightarrow +\infty,$$

donc

$$\frac{c_{k+1}}{c_k} \sim (\alpha k)^{-\alpha} \text{ quand } k \rightarrow +\infty,$$

donc

$$\frac{c_{k+1}}{c_k} \rightarrow 0 \text{ quand } k \rightarrow +\infty.$$

On fait le même raisonnement pour la série $\sum_{k=1}^{+\infty} A^{k-1} I^{k\alpha} f(t)$.

D'autre part $A^n I^{n\alpha} y(t)$ est le terme générale de la série $\sum_{k=1}^{+\infty} A^{k-1} I^{k\alpha} y(t)$ donc

$$A^n I^{n\alpha} y(t) \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

Alors on conclut que

$$y(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} A^{k-1} B I^{k\alpha} y(t-r) + \sum_{k=1}^{+\infty} A^{k-1} I^{k\alpha} f(t),$$

alors $D^\alpha y(t) = Ay(t) + By(t-r) + f(t)$. On a :

$$\begin{aligned}
y(t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} A^{k-1} B I^{k\alpha} y(t-r) + \sum_{k=1}^{+\infty} A^{k-1} I^{k\alpha} f(t) \\
\Rightarrow D^\alpha y(t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} A^{k-1} B I^{(k-1)\alpha} y(t-r) + \sum_{k=1}^{+\infty} A^{k-1} I^{(k-1)\alpha} f(t) \\
\Rightarrow D^\alpha y(t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} A^{k-1} B I^{k\alpha} y(t-r) + \sum_{k=1}^{+\infty} A^k I^{k\alpha} f(t) \\
\Rightarrow D^\alpha y(t) &= By(t-r) + f(t) + \sum_{k=1}^{+\infty} A^k B I^{k\alpha} y(t-r) + \sum_{k=1}^{+\infty} A^k I^{k\alpha} f(t) \\
\Rightarrow D^\alpha y(t) &= By(t-r) + f(t) + A \left(\sum_{k=1}^{+\infty} A^{k-1} B I^{k\alpha} y(t-r) + \sum_{k=1}^{+\infty} A^{k-1} I^{k\alpha} f(t) \right) \\
\Rightarrow D^\alpha y(t) &= Ay(t) + By(t-r) + f(t).
\end{aligned}$$

Donc les deux systèmes sont équivalents. On montre maintenant par la méthode des pas l'existence de la solution du problème 1.5.

1. Pour $t \in [0, r]$ alors $t-r \in [-r, 0]$, on a

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} A^{k-1} B I^{k\alpha} y(t-r) + \sum_{k=1}^{+\infty} A^{k-1} I^{k\alpha} f(t) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} A^{k-1} B \frac{1}{\Gamma(k\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{k\alpha-1} \psi(\tau-r) d\tau + \sum_{k=1}^{+\infty} A^{k-1} I^{k\alpha} f(t).
\end{aligned}$$

2. Pour $t \in [r, 2r]$, on a :

$$\begin{aligned}
y_2(t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} A^{k-1} B \frac{1}{\Gamma(k\alpha)} \int_0^r (t-\tau)^{k\alpha-1} \psi(\tau-r) d\tau \\
&+ \sum_{k=1}^{+\infty} A^{k-1} B \frac{1}{\Gamma(k\alpha)} \int_r^t (t-\tau)^{k\alpha-1} y_1(\tau-r) d\tau + \sum_{k=1}^{+\infty} A^{k-1} I^{k\alpha} f(t).
\end{aligned}$$

3. Alors pour $t \in [(n-1)r, nr]$, on a

$$\begin{aligned}
y_n(t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} A^{k-1} B \frac{1}{\Gamma(k\alpha)} \int_0^r (t-\tau)^{k\alpha-1} \psi(\tau-r) d\tau \\
&+ \sum_{k=1}^{+\infty} A^{k-1} B \frac{1}{\Gamma(k\alpha)} \int_r^{2r} (t-\tau)^{k\alpha-1} y_1(\tau-r) d\tau + \dots \\
&+ \sum_{k=1}^{+\infty} A^{k-1} B \frac{1}{\Gamma(k\alpha)} \int_{(n-1)r}^t (t-\tau)^{k\alpha-1} y_{n-1}(\tau-r) d\tau \\
&+ \sum_{k=1}^{+\infty} A^{k-1} I^{k\alpha} f(t).
\end{aligned}$$

Donc la solution existe. □

1.12.2 L'unicité de la solution

Maintenant on montre l'unicité de la solution. On prend deux solutions $y_1(t)$ et $y_2(t)$ avec deux conditions initiales $\psi_1(t)$ et $\psi_2(t)$ respectivement, on a

$$\begin{aligned}
|y_1(t) - y_2(t)| &= |I^\alpha A(y_1(t) - y_2(t)) + I^\alpha B(y_1(t-r) - y_2(t-r))| \\
&\leq |I^\alpha A(y_1(t) - y_2(t))| \\
&+ |I^\alpha B(y_1(t-r) - y_2(t-r))| \\
&\leq \frac{\mu_0}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} |(y_1 - y_2)(\tau)| d\tau \\
&+ \frac{\mu_1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} |(y_1 - y_2)(\tau-r)| d\tau.
\end{aligned}$$

Si $t \in [0, r]$:

$$\begin{aligned}
|y_1(t) - y_2(t)| &= \frac{\mu_0}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} |(y_1 - y_2)(\tau)| d\tau \\
&+ \frac{\mu_1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} |(\psi_1 - \psi_2)(\tau-r)| d\tau \\
&\leq \frac{\mu_1 t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|\psi_1 - \psi_2\| + \frac{\mu_0}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} |(y_1 - y_2)(\tau)| d\tau.
\end{aligned}$$

On utilise l'inégalité de Hôlder avec $1 < p < \frac{1}{1-\alpha}$ et q telle que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on obtient :

$$\begin{aligned}
|y_1(t) - y_2(t)| &\leq \frac{\mu_1 t^\alpha \|\psi_1 - \psi_2\|}{\Gamma(\alpha + 1)} \\
&+ \frac{\mu_0}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^t (t - \tau)^{(\alpha-1)p} d\tau \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_0^t |(y_1 - y_2)(\tau)|^q d\tau \right]^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \frac{\mu_1 t^\alpha \|\psi_1 - \psi_2\|}{\Gamma(\alpha + 1)} \\
&+ \frac{\mu_0 t^{(\alpha-1) + \frac{1}{p}}}{\Gamma(\alpha)((\alpha-1)p + 1)^{\frac{1}{p}}} \left[\int_0^t |(y_1 - y_2)(\tau)|^q d\tau \right]^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Ceci implique que

$$\begin{aligned}
|y_1(t) - y_2(t)|^q &\leq \frac{2^{q-1} \mu_1^q t^{\alpha q} \|\psi_1 - \psi_2\|^q}{\Gamma(\alpha + 1)^q} \\
&+ \frac{2^{q-1} \mu_0^q t^{(\alpha-1)q + \frac{q}{p}}}{\Gamma(\alpha)^q ((\alpha-1)p + 1)^{\frac{q}{p}}} \int_0^t |(y_1 - y_2)(\tau)|^q d\tau.
\end{aligned}$$

D'après le lemme de Gronwall :

$$|y_1(t) - y_2(t)|^q \leq \frac{2^{q-1} \mu_1^q t^{\alpha q} \|\psi_1 - \psi_2\|^q}{\Gamma(\alpha + 1)^q} \exp \left(\frac{2^{q-1} \mu_0^q t^{(\alpha-1)q + \frac{q}{p} + 1}}{\Gamma(\alpha)^q ((\alpha-1)p + 1)^{\frac{q}{p}}} \right).$$

Alors on conclut que si $\psi_1(t) = \psi_2(t)$ alors $y_1(t) = y_2(t)$ sur $[0, r]$. Maintenant si $t > r$:

$$\begin{aligned}
|y_1(t) - y_2(t)| &\leq \frac{\mu_0}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} |(y_1 - y_2)(\tau)| d\tau \\
&+ \frac{\mu_1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^r (t - \tau)^{\alpha-1} |(\psi_1 - \psi_2)(\tau - r)| d\tau \\
&+ \frac{\mu_1}{\Gamma(\alpha)} \int_r^t (t - \tau)^{\alpha-1} |(y_1 - y_2)(\tau - r)| d\tau \\
&\leq \frac{\mu_0}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} |(y_1 - y_2)(\tau)| d\tau \\
&+ \frac{\mu_1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^r (t - \tau)^{\alpha-1} |(\psi_1 - \psi_2)(\tau - r)| d\tau \\
&+ \frac{\mu_1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t-r} (t - r - \tau)^{\alpha-1} |(y_1 - y_2)(\tau)| d\tau
\end{aligned}$$

On utilise l'inégalité de Hôlder, on trouve

$$\begin{aligned}
|y_1(t) - y_2(t)| &\leq \frac{\mu_1 \|\psi_1 - \psi_2\| t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \\
&+ \frac{\mu_0}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^t (t - \tau)^{(\alpha-1)p} d\tau \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_0^t |(y_1 - y_2)(\tau)|^q d\tau \right]^{\frac{1}{q}} \\
&+ \frac{\mu_1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^{t-r} (t - r - \tau)^{(\alpha-1)p} d\tau \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_0^{t-r} |(y_1 - y_2)(\tau)|^q d\tau \right]^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \frac{\mu_1 \|\psi_1 - \psi_2\| t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \\
&+ \left(\frac{(\mu_0 + \mu_1) T^{(\alpha-1)\frac{1}{p}}}{\Gamma(\alpha)((\alpha-1)p + 1)^{\frac{1}{p}}} \right) \left[\int_0^t |(y_1 - y_2)(\tau)|^q d\tau \right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

Ceci implique que

$$\begin{aligned}
|y_1(t) - y_2(t)|^q &\leq \frac{2^{q-1} \mu_1^q \|\psi_1 - \psi_2\|^q t^{\alpha q}}{\Gamma(\alpha + 1)^q} \\
&+ \left(\frac{2^{q-1} (\mu_0 + \mu_1)^q T^{(\alpha-1)q + \frac{q}{p}}}{\Gamma(\alpha)^q ((\alpha-1)p + 1)^{\frac{q}{p}}} \right) \int_0^t |(y_1 - y_2)(\tau)|^q d\tau
\end{aligned}$$

D'après le lemme de Gronwall on obtient

$$|y_1(t) - y_2(t)|^q \leq \frac{2^{q-1} \mu_1^q \|\psi_1 - \psi_2\|^q t^{\alpha q}}{\Gamma(\alpha + 1)^q} \exp \left(\frac{2^{q-1} (\mu_0 + \mu_1)^q T^{(\alpha-1)q + \frac{q}{p} + 1}}{\Gamma(\alpha)^q ((\alpha-1)p + 1)^p} \right)$$

Alors on conclut que si $\psi_1(t) = \psi_2(t)$ alors

$$\forall t \in [0, T], y_1(t) = y_2(t)$$

Ce qui nous donne l'unicité de la solution.

Chapitre 2

Les méthodes numériques

2.1 Ondelette Hermite

Les polynômes d'Hermite $H_m(x)$, d'ordre m , sont définie sur l'intervalle $[-\infty, \infty]$ et donnée par les formules de récurrence suivants :

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x,$$
$$H_{m+1}(x) = 2xH_m(x) - 2mH_{m-1}(x), \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Les polynômes $H_m(x)$ sont orthogonaux par rapport au fonction de poids e^{-x^2} : c'est-à-dire :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \sqrt{\pi} 2^n n!, & m = n \end{cases}$$

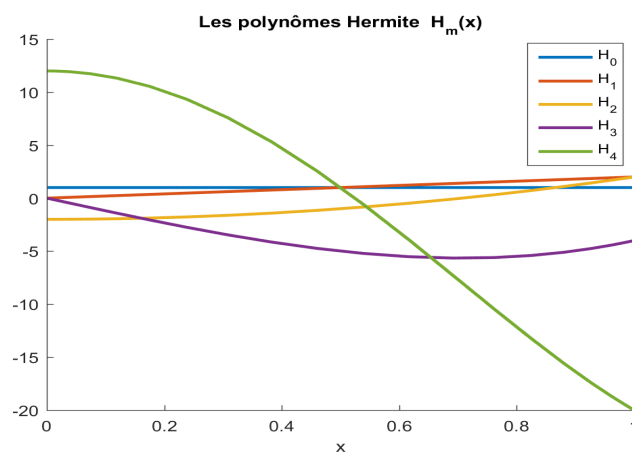


FIGURE 2.1 – Les polynômes de Hermite H_m

La transformée en ondelettes discrètes est définie comme :

$$\phi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \phi(2^j x - k)$$

L'ensemble $\phi_{j,k}$ forme une base orthogonale de $L^2(\mathbb{R})$, c'est-à-dire :

$$\langle \phi_{j,k}(x), \phi_{l,m}(x) \rangle = \delta_{j,l} \delta_{k,m}$$

L'ondelette Hermite sont définies sur l'intervalle $[0, 1)$ avec :

$$\phi_{n,m}(x) = \begin{cases} 2^{\frac{k}{2}} \sqrt{\frac{1}{n! 2^n \sqrt{\pi}}} H_m(2^k x - \hat{n}), & \frac{\hat{n} - 1}{2^k} \leq x \leq \frac{\hat{n} + 1}{2^k} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

où $k = 1, 2, 3, \dots$ est le niveau de résolution. $n = 1, 2, 3, \dots, 2^{k-1}$, $\hat{n} = 2n - 1$ est le paramètre de traduction. $m = 1, 2, \dots, M - 1$ est l'ordre des polynômes Hermite.

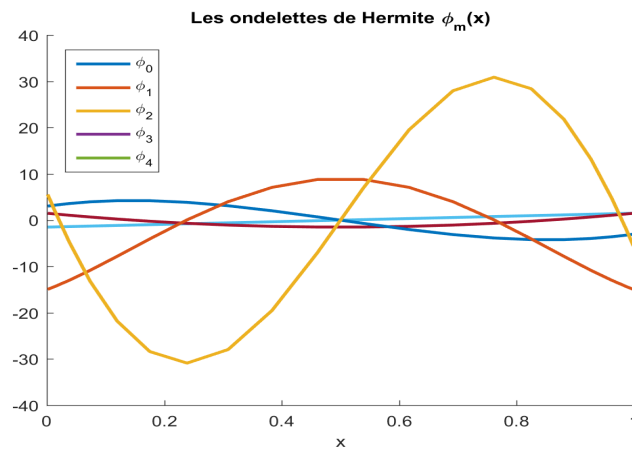


FIGURE 2.2 – Les ondelettes de Hermite ϕ_m

2.2 Approximations des fonctions

On peut prendre n'importe quelle fonction $y(x) \in L^2[0, 1)$ en séries d'ondelette Hermite tronquées comme :

$$y(x) \approx \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \sum_{m=0}^{M-1} a_{nm} \phi_{n,m}(x) = \mathbf{a}^T \phi(x)$$

où \mathbf{a} et ϕ sont $\hat{m} \times 1$ ($\hat{m} = 2^{k-1} M$) matrices, données par :

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1M-1} \\ a_{20} & a_{21} & \dots & a_{2M-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2^{k-1}0} & a_{2^{k-1}1} & \dots & a_{2^{k-1}M-1} \end{bmatrix}$$

$$\phi = \begin{bmatrix} \phi_{10} & \phi_{11} & \dots & \phi_{1M-1} \\ \phi_{20} & \phi_{21} & \dots & \phi_{2M-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_{2^{k-1}0} & \phi_{2^{k-1}1} & \dots & \phi_{2^{k-1}M-1} \end{bmatrix}$$

2.3 Analyse de convergence

Soit $L^2([0, 1])$ un espace de Hilbert pour lequel $\phi_{n,m}(x)$ forment un séquence orthonormée dans $L^2([0, 1])$.

Soit $y(x) \in L^2([0, 1])$, nous avons :

$$y(x) \approx \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \sum_{m=0}^{M-1} a_{nm} \phi_{n,m}(x) \quad (2.1)$$

où $a_{nm} = \langle y(x), \phi_{n,m}(x) \rangle$ est un produit scalaire de $y(x)$ et $\phi_{n,m}(x)$. L'équation (2.1) peut s'écrire sous la forme :

$$y(x) \approx \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \sum_{m=0}^{M-1} \langle y(x), \phi_{n,m}(x) \rangle \phi_{n,m}(x). \quad (2.2)$$

Pour simplifier, soit $j = M(n - 1) + m + 1$; on peut écrire (2.2) comme :

$$y(x) \approx \sum_{j=1}^{\hat{m}} \langle y(x), \phi_j(x) \rangle \phi_j(x) = \sum_{j=1}^{\hat{m}} a_j \phi_j(x) = \mathbf{a} \phi^T(x).$$

où $a_j = a_{n,m}$, $\phi_j(x) = \phi_{n,m}(x)$, $\hat{m} = 2^{k-1}M$, et $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_{\hat{m}}]^T$, $\phi(x) = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{\hat{m}}]^T$. En suivant la procédure de [8], nous avons obtenu la convergence de toutes les méthodes d'ondelette orthogonales pour toutes les

niveaux des résolution k , c'est-à-dire $\sum_{j=1}^{\hat{m}} a_j \phi_j(x)$ converge vers $y(x)$ comme

$\hat{m} \rightarrow \infty$. Depuis $\hat{m} = 2^{k-1}M$ et la méthode converge si $\hat{m} \rightarrow \infty$, c'est-à-dire que lorsque nous utilisons des polynôme Hermite d'ordre supérieur à $M - 1$ ou utilisons un niveau de résolution k plus élevé ou utilisons à la fois M et k plus élevés. Nous obtenons des résultats plus précis.

2.4 Procédure de mise en œuvre du Schéma proposé

On considère l'équation différentielle fractionnaire à retard discret suivant :

$$D^\alpha y(x) = g(x) + f(y(x), y'(x), y(qx - \tau), y'(qx - \tau)), \quad (2.3)$$

$$\text{for } a \leq x \leq b, 1 < \alpha \leq 2$$

$$y(x) = \psi(x), -b \leq x \leq a \quad (2.4)$$

où $g(x)$ est une fonction source et $f(x)$ est une fonction linéaire continue ou fonction non linéaire. De plus q est constant, τ est le retard, et $qx - \tau$ est appelé l'argument de retard. Le retard $\tau(x, y(x))$ est appelé constant délai, délai dépendant de temps, et délai dépendant de l'état si le retard $\tau(x, y(x))$ est constant, fonction de temps x et fonction du temps x et $y(x)$, respectivement. La méthode proposée comprend deux méthodes, la méthode des étapes et la méthode des ondelettes Hermite. Nous mettons d'abord en oeuvre la méthode des étapes de l'équation différentielle fractionnaire du retard (2.3) à l'équation différentielle fractionnaire sans retard, en utilisant d'abord la fonction $\psi(x)$, puis nous utilisons la méthode d'ondelette Hermite pour résoudre l'équation différentielle fractionnaire sans retard obtenu.

2.4.1 Méthode des étapes

Dans l'équation différentielle fractionnaire à retard la solution $y(x)$ est connu sur $[-b, a]$, disons $\psi(x)$, et appelons cette solution $y_0(x)$, c'est-à-dire : $y_0(qx - \tau) = \psi(qx - \tau)$, ce qui est connu. Maintenant, l'équation différentielle fractionnaire du retard sur $[a, b]$ prend la forme :

$$D^\alpha y(x) = g(x) + f(y(x), y'(x), y_0(qx - \tau), y_0'(qx - \tau)), \quad a \leq x \leq b, \quad 1 \leq \alpha < 2 \quad (2.5)$$

Sous réserve des conditions initiales : $y(a) = \psi(a)$ et $y'(a) = \psi'(a)$. Il s'agit d'une équation différentielle fractionnaire sans retard car $y_0(qx - \tau)$ et $y_0'(qx - \tau)$ sont connus.

2.4.2 Méthode d'ondelette Hermite

Nous résolvons l'équation différentielle fractionnaire sans retard obtenu (2.5) sur $[a, b]$ en utilisant la méthode d'ondelette Hermite. La procédure de mise en oeuvre de la méthode d'ondelette Hermite pour l'équation différentielle fractionnaire est la suivante suit.

– Étape 1

On approche la fonction inconnue $y(x)$ de (2.5) par la méthode des

ondelettes Hermite comme :

$$y(x) \approx \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \sum_{m=0}^{M-1} a_{nm} \phi_{n,m}(x) \quad (2.6)$$

– **Étape 2**

Nous remplaçons (2.6) dans (2.5) pour obtenir le résidu :

$$\sum_{n=1}^{2^{k-1}} \sum_{m=0}^{M-1} a_{nm}^c D^\alpha \phi_{n,m}(x) = g(x) + f \left(\sum_{n=1}^{2^{k-1}} \sum_{m=0}^{M-1} a_{nm} \phi_{n,m}(x), \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \sum_{m=0}^{M-1} a_{nm} \phi'_{n,m}(x), y_0(qx - \tau), y'_0(qx - \tau) \right). \quad (2.7)$$

– **Étape 3**

Nous réglons le résidu (2.7) pour qu'il soit égal à 0 à l'ensemble des Nœuds Chebyshev, $x_i = ((b-a)/2) \cos(\frac{(2i+1)\pi}{2^k M}) + \frac{(a+b)}{2}$, $i = 0, 1, 2, \dots, M-1$, sur l'intervalle $[a, b]$.

On considère :

$$\sum_{n=1}^{2^{k-1}} \sum_{m=0}^{M-1} a_{nm} D^\alpha \phi_{n,m}(x_i) - g(x_i) - f \left(\sum_{n=1}^{2^{k-1}} \sum_{m=0}^{M-1} a_{nm} \phi_{n,m}(x_i), \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \sum_{m=0}^{M-1} a_{nm} \phi'_{n,m}(x_i), y_0(qx - \tau), y'_0(qx - \tau) \right) = 0 \quad (2.8)$$

Nous obtenons $2^{k-1}M - p$ équation, où p est le nombre des conditions de l'équation du retard. D'après (2.3), deux conditions sont données, $p = 2$, donc nous obtenons $2^{k-1}M - 2$ équation à partir de (2.8) en utilisant les nœuds Chebychev x_i . Deux autres équations sont obtenus à partir des conditions de (2.3), c'est :

$$y(a) = \psi(a) \Rightarrow \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \sum_{m=0}^{M-1} a_{nm} \phi_{n,m}(a) = \psi(a)$$

$$y'(a) = \psi'(a) \Rightarrow \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \sum_{m=0}^{M-1} a_{nm} \phi'_{n,m}(a) = \psi'(a).$$

Nous avons obtenu $2^{k-1}M$ équation linéaire ou non linéaire avec $2^{k-1}M$ coefficients inconnus a_{nm} , qui est résolu par la méthode itérative de Newton

pour obtenir les a_{nm} et utiliser dans (2.6) pour obtenir la solution approximative. Désignons la solution obtenue par $y_1(x)$, qui est défini sur $[a, b]$. En continuant la procédure pour l'intervalle suivant ; l'équation différentielle à retard sur $[b, 2b]$ devient

$$D^\alpha y(x) = h(x) + f\left(y(x), y'(x), y_1(qx - \tau), y_1'(qx - \tau)\right), \quad (2.9)$$

$$b \leq x \leq 2b, \quad 1 \leq \alpha \leq 2$$

sous réserve des conditions initiales $y(b) = y_1(b)$, $y'(b) = y_1'(b)$, qui est encore une fois une équation différentielle fractionnaire sans retard et en la résolvant par la méthode des ondelettes Hermite pour obtenir $y_2(x)$ sur $[b, 2b]$. Cette procédure peut être poursuivie pour des intervalles ultérieurs.

2.5 Méthode de décomposition d'Adomian

On considère l'équation différentielle à retard suivant :

$$Ly(x) = f(x, y(x), y(g(x))), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2.10)$$

$$y^i(0) = y_0^i, \quad i = 0, 1, \dots, N - 1,$$

$$y(x) = \psi(x), \quad x \leq 0$$

où l'opérateur différentiel L est donnée par :

$$L(\cdot) = \frac{d^N(\cdot)}{dx^N}$$

L'opérateur inverse L^{-1} est donc considéré comme un opérateur intégral N fois défini par :

$$L^{-1}(\cdot) = \int_0^x (\cdot)_{N \text{ times}} dx$$

Opérant avec L^{-1} sur l'équation (2.10) on obtient :

$$y(x) = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\alpha_j}{j!} x^j + L^{-1}(f(x, y(x), y(g(x)))) \quad (2.11)$$

où α_j sont des constantes décrivant les conditions aux limites. La méthode de décomposition d'Adomian suppose que la fonction inconnue peut exprimer par infinités séries de la forme

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) \quad (2.12)$$

Afin que les composants $y_n(x)$ soient déterminés de manière récursive. En plus, la méthode définit le terme non linéaire $f(x, y(x), y(g(x)))$ par le polynôme d'Adomian :

$$f(x, y(x), y(g(x))) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (2.13)$$

où A_n est le polynôme d'Adomian qui peut être généré pour toutes les formes de non-linéarité comme :

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[f(x, \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j y_j(x), \sum_{j=0}^n \lambda^j y_j(g(x))) \right] \Big|_{\lambda=0}$$

Remplaçant (2.12) et (2.13) dans (2.11), on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\alpha_j}{j!} x^j + L^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n \right) \quad (2.14)$$

Pour déterminer les composants $y_n(x)$, $n \geq 0$. Premièrement, nous identifions le composant $y_0(x)$ par tout les termes qui surgir des conditions aux limites en $x = 0$ et d'intégrer le terme source s'il existe. Deuxièmement, les composants restantes de $y(x)$ peut être déterminé de telle manière que chaque composant est déterminé en utilisant les composants précédents. Autrement dit, la méthode introduit la relation récursive :

$$y_0 = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\alpha_j}{j!} x^j, y_{n+1}(x) = L^{-1}(A_n), \quad n \geq 0 \quad (2.15)$$

Pour la détermination des composants $y_n(x)$, $n \geq 0$ de $y(x)$, la solution en série de $y(x)$ suit immédiatement avec les constantes α_j , $j = 0, 1, \dots, N-1$ sont encore indéterminée. L'analyse ci-dessus donne le théorème suivant.

Théorème 2.1. *La solution de l'équation différentielle à retard de la forme (2.10) peut déterminer par la série (2.12) avec l'itération (2.15).*

2.5.1 Application de la méthode

Dans cette section, nous allons approximer la solution de l'équation différentielle fractionnaire à retard suivant :

$$\begin{aligned} D^\alpha y(t) &= N(t, y(t), y(\psi(t))) \\ y(t) &= \phi(t), \quad -\tau \leq t \leq 0 \\ y^i(0) &= y_0^i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (2.16)$$

où $n - 1 < \alpha \leq n$. Opérant I_t^α des deux côtés de l'équation(2.16), nous avons :

$$y(t) = I_t^\alpha N(t, y(t), y(\psi(t))) + \sum_{k=0}^{n-1} y(0^+) \frac{t^k}{k!} \quad (2.17)$$

La méthode d'Adomian définit la solution $y(t)$ par la série :

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(t) \quad (2.18)$$

Ainsi les composants y_n seront déterminée de manière récursive. De plus, la méthode définit le non-linéaire terme $N(t, y(t), y(\psi(t)))$ par les polynômes d'Adomian :

$$N(t, y(t), y(\psi(t))) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (2.19)$$

où A_n sont des polynôme d'Adomian qui peuvent être générés pour toutes les formes de non-linéarité comme :

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[N \left(t, \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j y_j(t), \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j y_j(\psi(t)) \right) \right]_{\lambda=0}$$

En remplaçant les équations (2.18) et (2.19) dans l'équation (2.17) donne :

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} y^k(0^+) \frac{t^k}{k!} + I_t^\alpha \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n \right)$$

Pour déterminer les composants $y_n(x), n \geq 0$. Nous identifions d'abord la composant nulle $y_0(x)$ selon les termes $\sum_{k=0}^{n-1} y^k(0^+)$ et $\phi(t)$ et $I_t^\alpha f(t)$ où $f(t)$ représente le terme non homogène de $N(t, y(t), y(\psi(t)))$. Deuxièmement, les composants restantes de $y(x)$ peuvent être déterminées de telle manière que chaque composant est déterminé en utilisant les composants précédents. En d'autre terme, la méthode introduit la relation récursive :

$$y_0(t) = \phi(t) + \sum_{k=0}^{n-1} y(0^+) \frac{t^k}{k!} + I_t^\alpha f(t) \quad (2.20)$$

$$y_{n+1} = I_t^\alpha A_n, \quad n \geq 0 \quad (2.21)$$

Chapitre 3

Applications Numériques

3.1 Application de la méthode d'Ondelette Hermite

Exemple 1.

On considère l'équation différentielle fractionnaire à retard :

$$D^\alpha y(x) + y(x) + y(x - \tau) = \frac{2}{\Gamma(3 - \alpha)} x^{2-\alpha} - \frac{1}{\Gamma(2 - \alpha)} x^{1-\alpha} + 2\tau x - \tau^2 - \tau,$$

$$x > 0, \quad 0 < \alpha < 1,$$

$$y(x) = 0, \quad -\tau \leq x \leq 0$$

La solution exacte, lorsque $\alpha = 1$, est $y(x) = x^2 - x$.

Dans les images (3.1) et (3.2), on trace les ondelettes de Hermite $\phi_{1,n}, \phi_{2,n}$ ($k = 1, k = 2$).

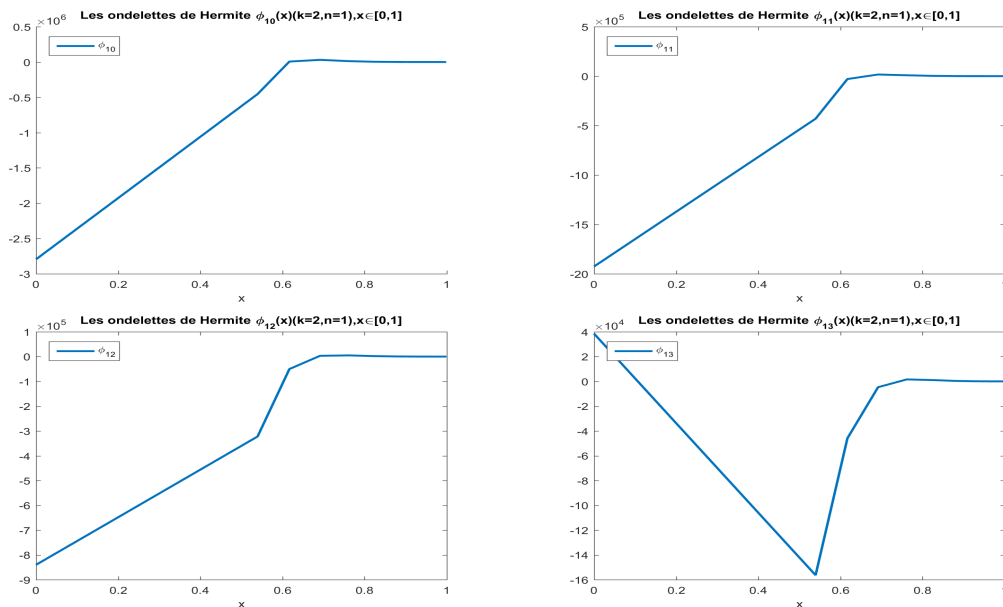


FIGURE 3.1 – Les ondelettes de Hermite $\phi_{1,n}$ dans $[0, 1]$.

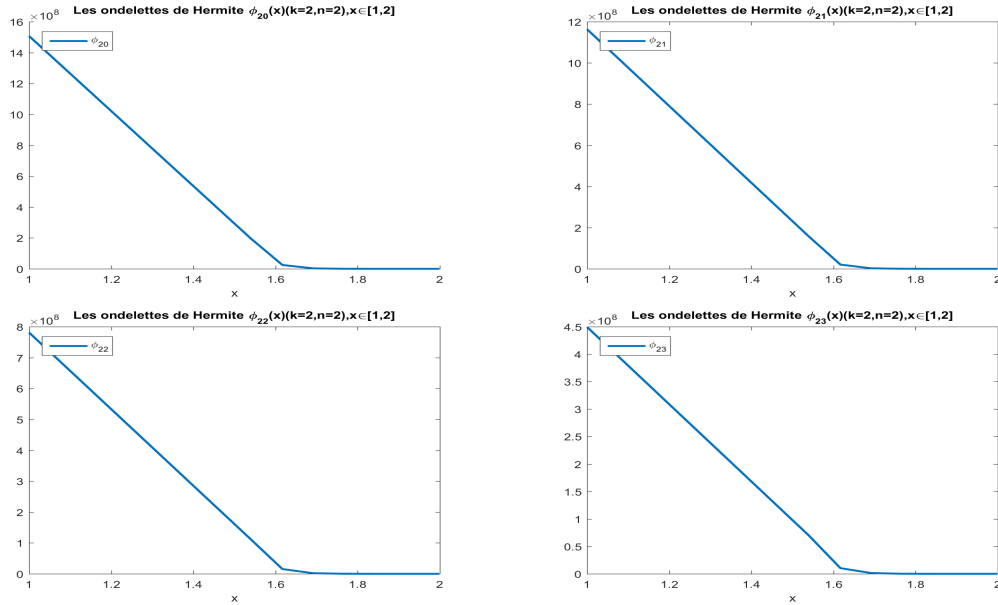


FIGURE 3.2 – Les ondelettes de Hermite $\phi_{2,n}$ dans $[1, 2]$.

On prend différent $\alpha \in [0, 1]$, $k = 1$, $M \in \{3, 10, 20\}$. Dans les images (3.3), (3.4) et (3.5), on trace notre solution y_M ($M = 3, 10, 20$) avec cette méthode et la solution exacte.

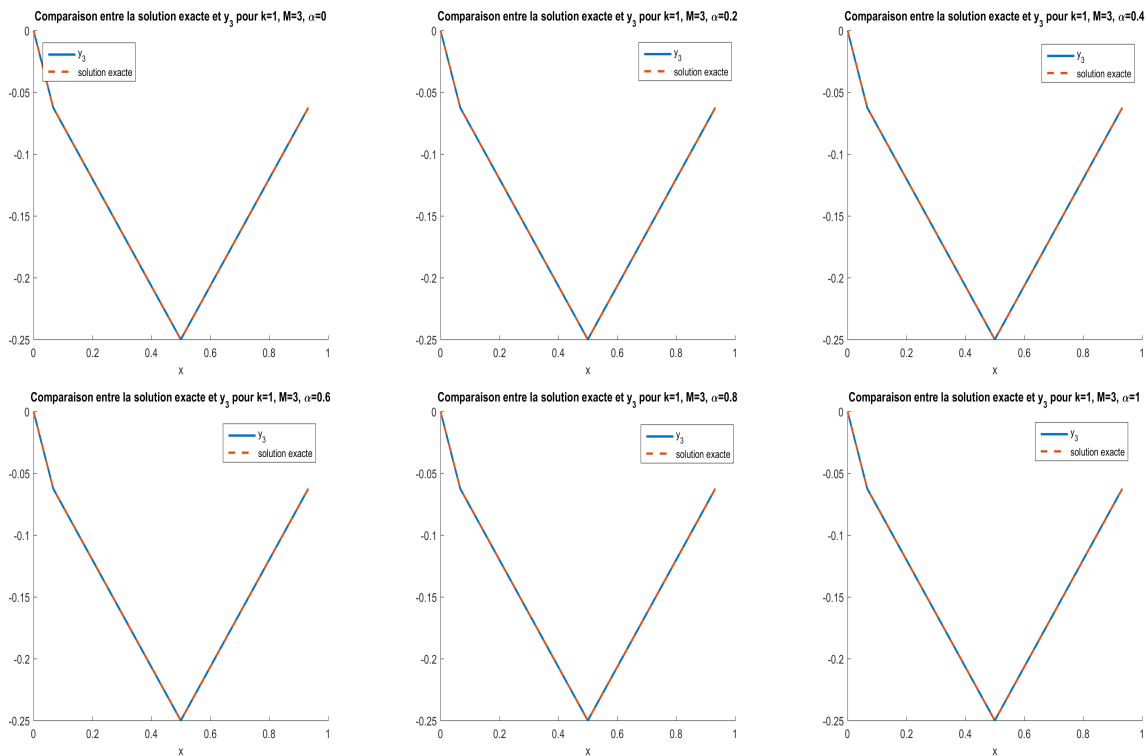


FIGURE 3.3 – La solution y_3 et la solution exactes pour $\alpha \in [0, 1]$, $M = 3$, $k = 1$.

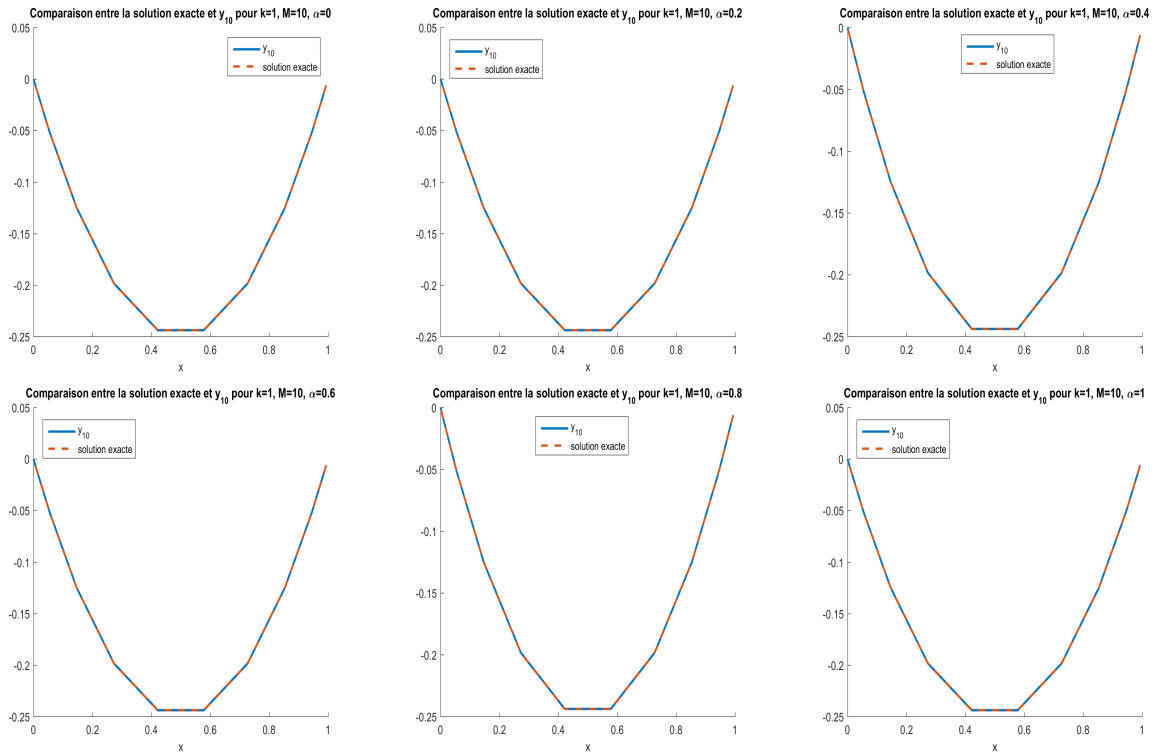


FIGURE 3.4 – La solution y_{10} et la solution exactes pour $\alpha \in [0, 1]$, $M = 10$, $k = 1$.

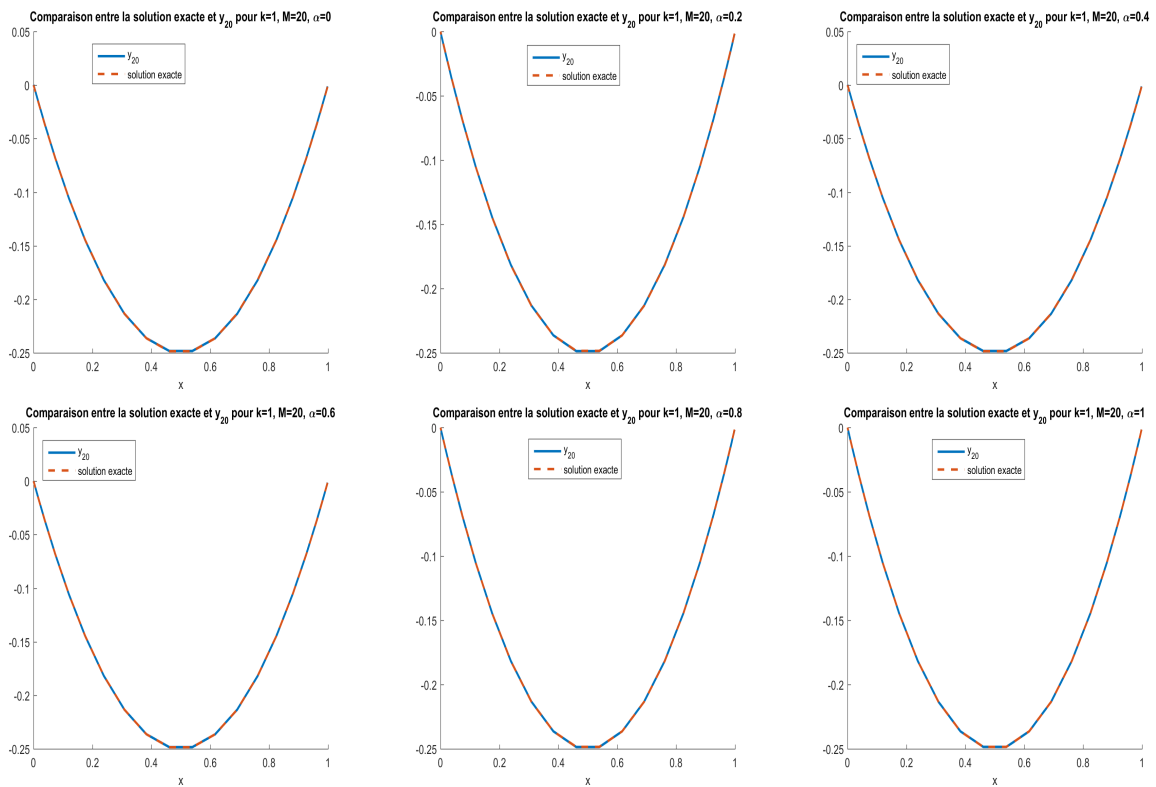


FIGURE 3.5 – La solution y_{20} et la solution exactes pour $\alpha \in [0, 1]$, $M = 20$, $k = 1$.

On prend $k = 2, M \in \{3, 10\}$. Dans les images (3.6) et (3.7), on trace notre solution $y_M(M = 3, 10)$ avec cette méthode et la solution exacte.

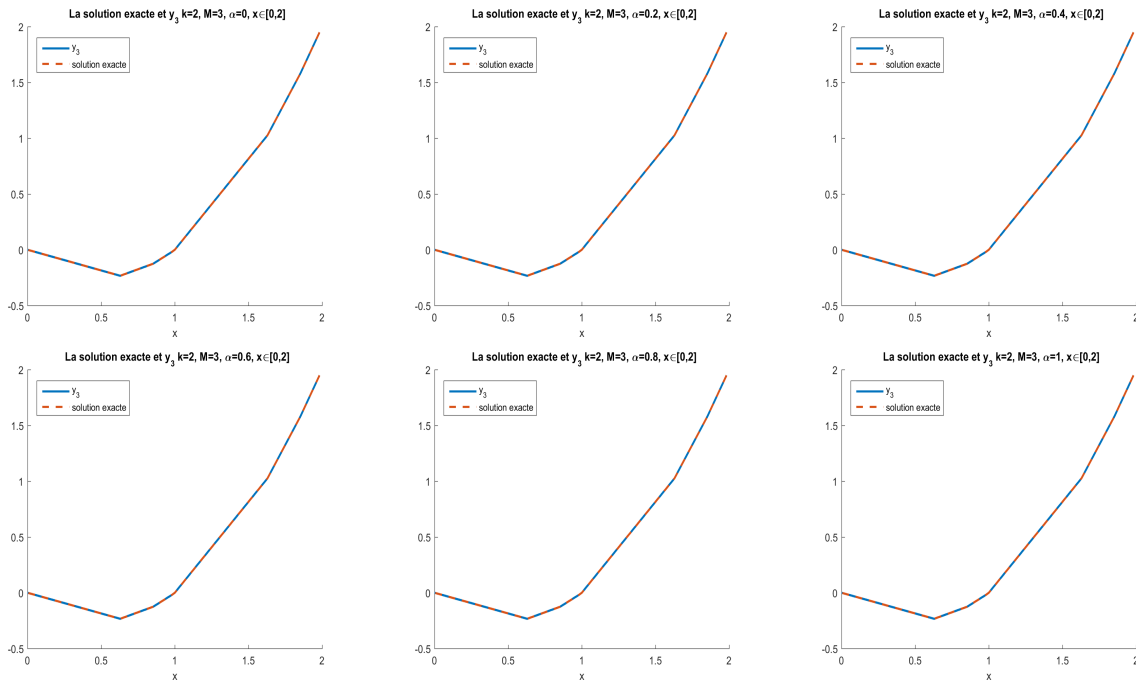


FIGURE 3.6 – La solution y_3 et la solution exactes pour $\alpha \in [0, 1], M = 3, k = 2$

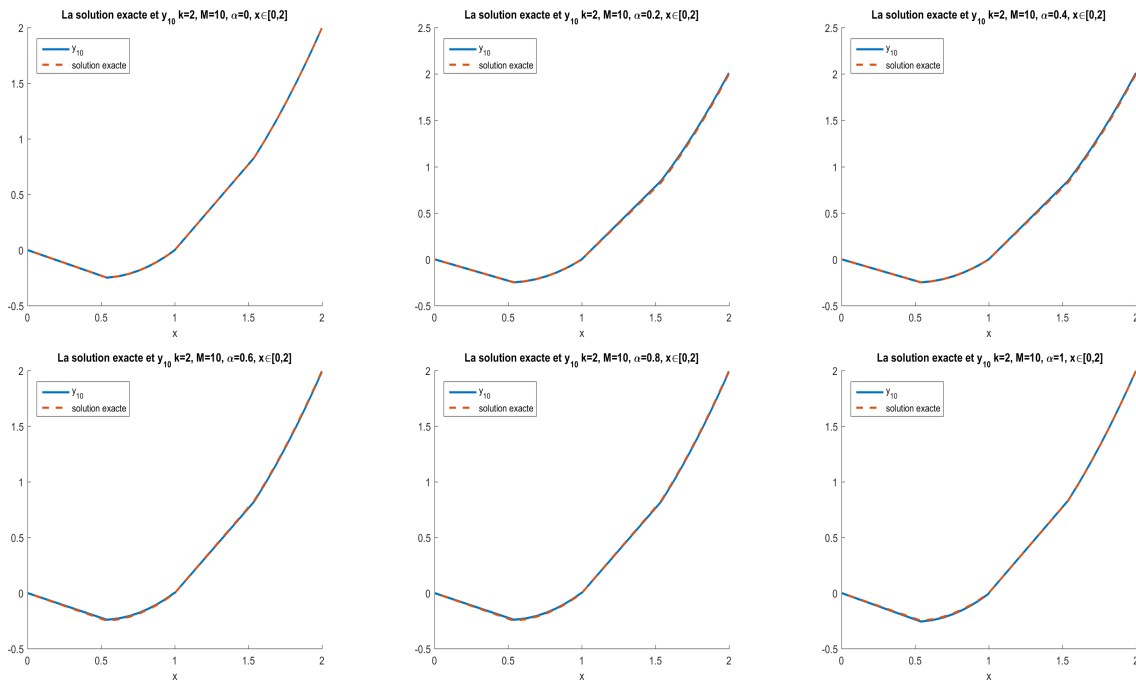


FIGURE 3.7 – La solution y_{10} et la solution exactes pour $\alpha \in [0, 1], M = 10, k = 2$

On calcule l'erreur entre notre solution $y_M(M = 3, 10, 20)$ et la solution exacte y , définie par :

$$erreur = \sup_{x \in [0,1]} |y_M(x) - y(x)| \text{ pour } k = 1$$

$$\text{et } erreur = \sup_{x \in [0,2]} |y_M(x) - y(x)| \text{ pour } k = 2$$

Dans ce tableau on présente cette erreur pour $\alpha \in [0, 1]$ et différent M et k

	$\alpha \in [0, 1[$			
	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.4$	$\alpha = 0.6$
erreur avec $k = 1, M = 3$	1.638×10^{-9}	1.638×10^{-9}	2.163×10^{-9}	2.163×10^{-8}
erreur avec $k = 1, M = 10$	5.031×10^{-8}	7.917×10^{-8}	3.787×10^{-8}	4.031×10^{-8}
erreur avec $k = 1, M = 20$	3.943×10^{-4}	3.663×10^{-4}	3.279×10^{-4}	1.461×10^{-4}
erreur avec $k = 2, M = 3$	1.276×10^{-6}	1.276×10^{-6}	1.948×10^{-6}	1.259×10^{-6}
erreur avec $k = 2, M = 10$	7.854×10^{-6}	1.774×10^{-2}	1.774×10^{-2}	8.297×10^{-3}

	erreur avec $k = 1$ $M = 3$	erreur avec $k = 1$ $M = 10$	erreur avec $k = 1$ $M = 20$	erreur avec $k = 2$ $M = 3$	erreur avec $k = 3$ $M = 10$
$\alpha = 0.8$	1.63×10^{-9}	7.917×10^{-8}	1.74×10^{-4}	1.94×10^{-6}	8.29×10^{-3}
$\alpha = 1$	4.83×10^{-8}	6.88×10^{-8}	5.21×10^{-5}	2.94×10^{-6}	7.69×10^{-6}

Remarque 3.1.

On remarque que l'erreur est petite quand on fait plusieurs ondelette d'Hermite i.e on augment système de résolution et quand notre α est proche de 0.

Exemple 2. On considère l'équation différentielle à retard fractionnaire suivante :

$$D^\alpha y(x) = -y(x) - y(x - 0.3) + e^{-x+0.3}$$

$$, 0 \leq x \leq 1, 2 < \alpha \leq 3,$$

sous réserve des conditions initiales $y(0) = 1, y'(0) = -1$, et $y''(0) = 1$. La solution exacte, lorsque $\alpha = 1$, est $y(x) = e^{-x}$.

On prend différent $\alpha \in [2, 3], k = 1, M \in \{3, 10, 20\}$. Dans les images (3.8), (3.9) et (3.10), on trace notre solution $y_M(M = 3, 10, 20)$ avec cette méthode et la solution exacte.

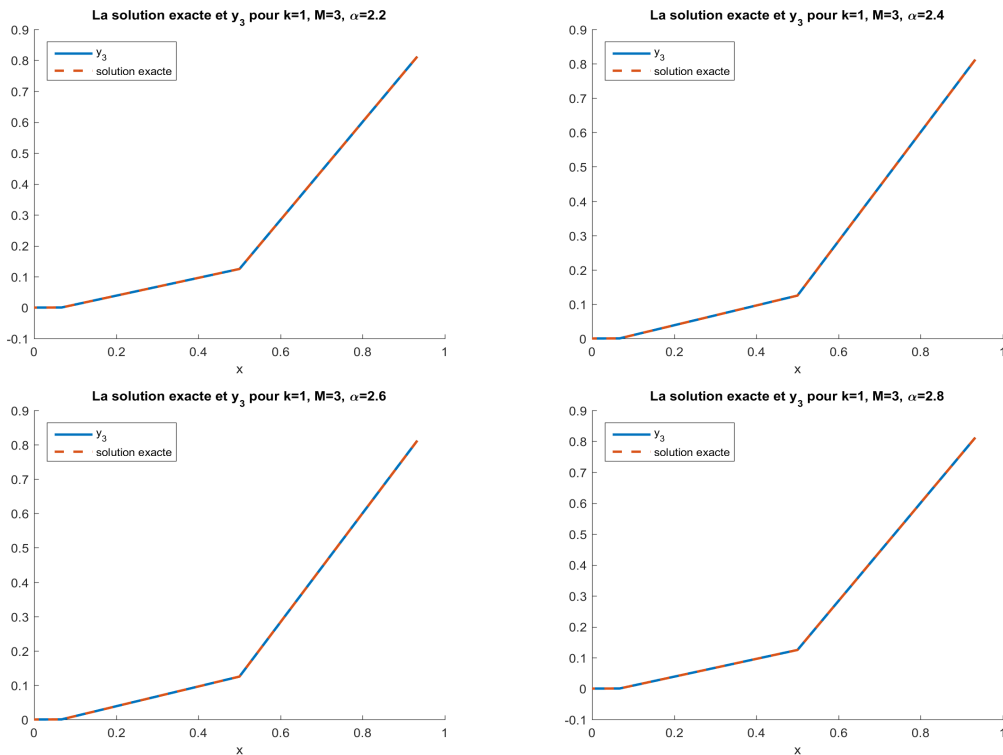


FIGURE 3.8 – La solution y_3 et la solution exactes pour $\alpha \in [2, 3], M = 3, k = 1$.

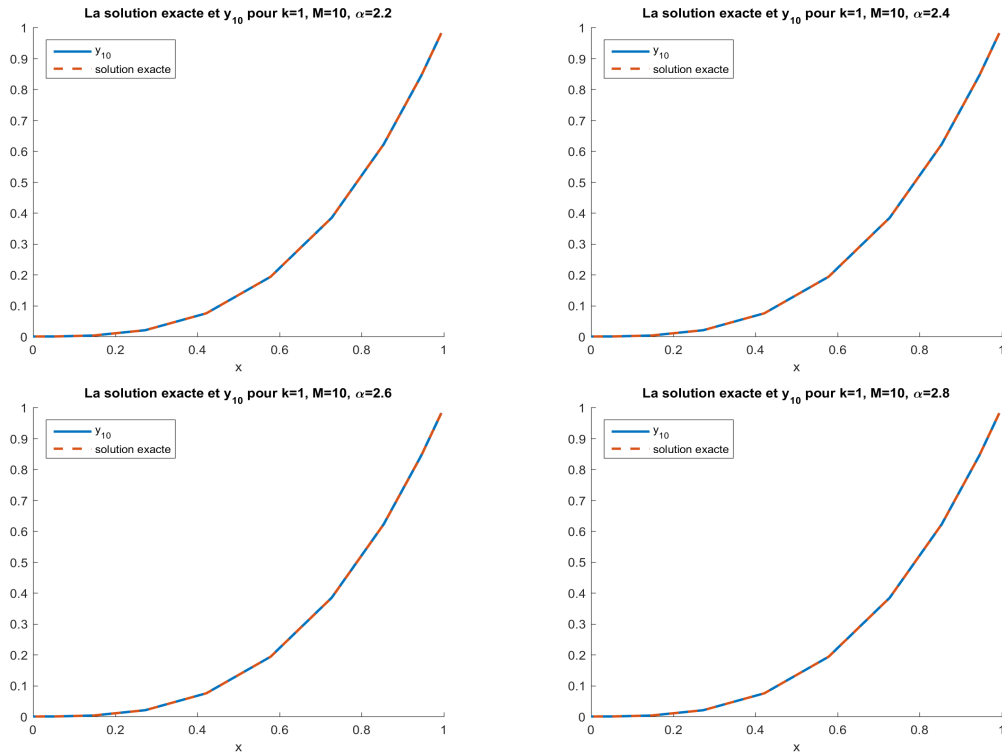


FIGURE 3.9 – La solution y_{10} et la solution exactes pour $\alpha \in [2, 3]$, $M = 10$, $k = 1$.

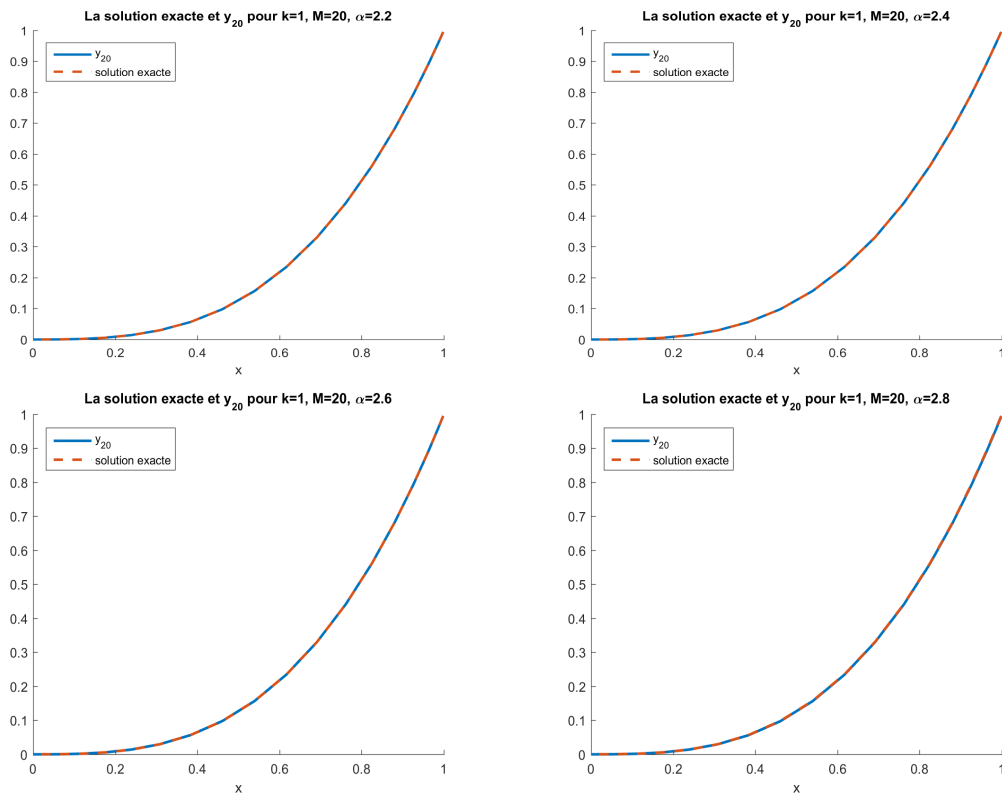


FIGURE 3.10 – La solution y_{20} et la solution exactes pour $\alpha \in [2, 3]$, $M = 20$, $k = 1$

On calcule l'erreur entre notre solution $y_M(M = 3, 10, 20)$ et la solution exacte y , définie par :

$$erreur = \sup_{x \in [1,2]} |y_M(x) - y(x)| \text{ pour } k = 1$$

Dans ce tableau on présente cette erreur pour $\alpha \in [2, 3]$ et defferer M et k

	$\alpha \in [2, 3[$			
nombre des points	$\alpha = 2.2$	$\alpha = 2.4$	$\alpha = 2.6$	$\alpha = 2.8$
erreur avec $k = 1, M = 3$	7.969×10^{-6}	4.40×10^{-6}	1.319×10^{-5}	7.103×10^{-6}
erreur avec $k = 1, M = 10$	5.524×10^{-4}	4.315×10^{-5}	2.584×10^{-4}	1.494×10^{-6}
erreur avec $k = 1, M = 20$	4.714×10^{-4}	1.554×10^{-4}	4.111×10^{-4}	2.265×10^{-3}

Remarque 3.2.

On remarque que l'erreur est petite quand on fait plusieurs ondellete d'Hermite i.e on augment système de résolution et quand notre α est proche de 2.

3.2 Application de la méthode de décomposition d'Adomian

Exemple 3. On considère l'équation différentielle à retard fractionnaire :

$$D^\alpha y(x) + y(x) + y(x - \tau) = \frac{2}{\Gamma(3 - \alpha)} x^{2-\alpha} - \frac{1}{\Gamma(2 - \alpha)} x^{1-\alpha} + 2\tau x - \tau^2 - \tau,$$

$$x > 0, \quad 0 < \alpha < 1,$$

$$y(x) = 0, \quad x \leq 0$$

On a :

$$I^\alpha f(x) = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} x^{\alpha+\beta} f(x) = x^\beta \quad \beta \in \mathbb{R}$$

Alors

$$\begin{aligned} y_0 &= I^\alpha \left(\frac{2}{\Gamma(3 - \alpha)} x^{2-\alpha} - \frac{1}{\Gamma(2 - \alpha)} x^{1-\alpha} + x^2 - x \right) \\ &= \frac{2}{\Gamma(3 - \alpha)} I^\alpha(x^{2-\alpha}) - \frac{1}{\Gamma(2 - \alpha)} I^\alpha(x^{1-\alpha}) + I^\alpha(x^2) - I^\alpha(x) \\ &= \frac{2}{\Gamma(3 - \alpha)} \frac{\Gamma(2 - \alpha + 1)}{\alpha + 2 - \alpha + 1} x^{\alpha+2-\alpha} - \frac{1}{\Gamma(2 - \alpha)} \frac{1 - \alpha + 1}{\Gamma(\alpha + 1 - \alpha + 1)} x^{\alpha+1-\alpha} \\ &\quad + \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\alpha + 3)} x^{\alpha+2} - \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\alpha + 2)} x^{\alpha+1} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{2}{\Gamma(3 - \alpha)} \frac{\Gamma(3 - \alpha)}{\Gamma(3)} x^2 - \frac{1}{\Gamma(2 - \alpha)} \frac{\Gamma(2 - \alpha)}{\Gamma(2)} x \\ &\quad + \frac{2}{\Gamma(\alpha - 3)} x^{\alpha+2} - \frac{1}{\Gamma(\alpha + 2)} x^{\alpha+1} \\ y_{n+1} &= -I^\alpha(y_n) \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} y_1 &= -I^\alpha(y_0) = -I^\alpha \left(x^2 - x + \frac{2}{\Gamma(\alpha + 3)} x^{\alpha+2} \frac{1}{\Gamma(\alpha + 2)} x^{\alpha+1} \right) \\ &= -\frac{2}{\Gamma(\alpha + 3)} x^{\alpha+2} + \frac{1}{\Gamma(\alpha + 2)} x^{\alpha+1} - \frac{2}{\Gamma(\alpha + 3)} I^\alpha(x^{\alpha+2}) \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha + 2)} I^\alpha(x^\alpha + 1) \\ &= -\frac{2}{\Gamma(\alpha + 3)} x^{\alpha+2} + \frac{1}{\Gamma(\alpha + 2)} x^{\alpha+1} - \frac{2}{\Gamma(\alpha + 3)} \frac{\Gamma(\alpha + 3)}{\Gamma(2\alpha + 3)} x^{2\alpha+2} \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha + 2)} \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{\Gamma(2\alpha + 2)} x^{2\alpha+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_2 &= -\frac{2}{\Gamma(\alpha+3)}x^{\alpha+2} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+2)}x^{\alpha+1} - \frac{2}{\Gamma(2\alpha+3)}x^{2\alpha+2} + \frac{1}{\Gamma(2\alpha+2)}x^{2\alpha+1} \\
y_3 &= -\frac{2x^{3\alpha+2}}{\Gamma(3\alpha+3)} + \frac{x^{3\alpha+1}}{\Gamma(3\alpha+2)} - \frac{2x^{4\alpha+2}}{\Gamma(4\alpha+3)} + \frac{2x^{4\alpha+1}}{\Gamma(4\alpha+2)} \\
y_4 &= \frac{2x^{5\alpha+2}}{\Gamma(4\alpha+3)} - \frac{x^{5\alpha+1}}{\Gamma(4\alpha+2)} + \frac{2x^{6\alpha+2}}{\Gamma(5\alpha+3)} - \frac{x^{6\alpha+1}}{\Gamma(5\alpha+2)} \\
y_5 &= -\frac{2x^{6\alpha+2}}{\Gamma(5\alpha+3)} + \frac{x^{6\alpha+1}}{\Gamma(5\alpha+2)} - \frac{2x^{7\alpha+2}}{\Gamma(6\alpha+3)} + \frac{x^{7\alpha+1}}{\Gamma(6\alpha+2)} \\
y_6 &= \frac{2x^{7\alpha+2}}{\Gamma(6\alpha+3)} - \frac{x^{7\alpha+1}}{\Gamma(6\alpha+2)} + \frac{2x^{8\alpha+2}}{\Gamma(7\alpha+3)} - \frac{x^{8\alpha+1}}{\Gamma(7\alpha+2)}
\end{aligned}$$

On prend différent $\alpha \in [0, 1]$, $n = 5, 10, 15, 20$. Dans les images (3.11), (3.12), (3.13), (3.14), (3.15) et (3.16), on trace notre solution y_n ($n = 5, 10, 15, 20$) avec cette méthode et la solution exacte.

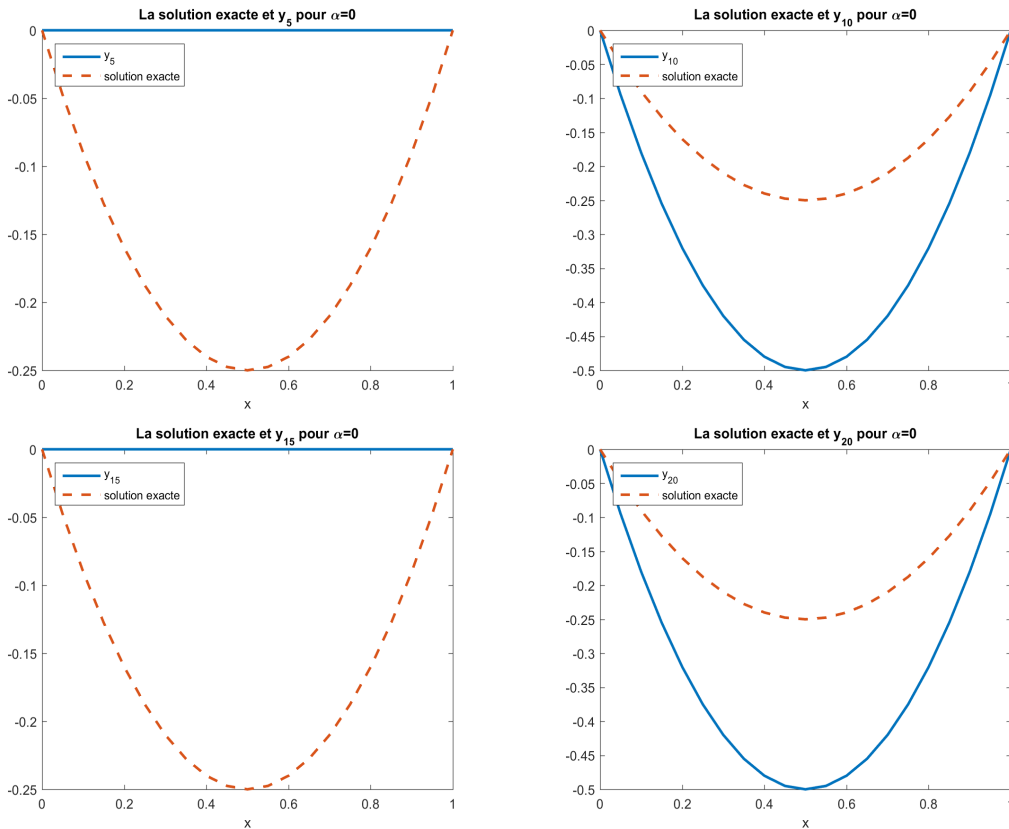


FIGURE 3.11 – La solution y_n et la solution exactes pour $\alpha = 0$.

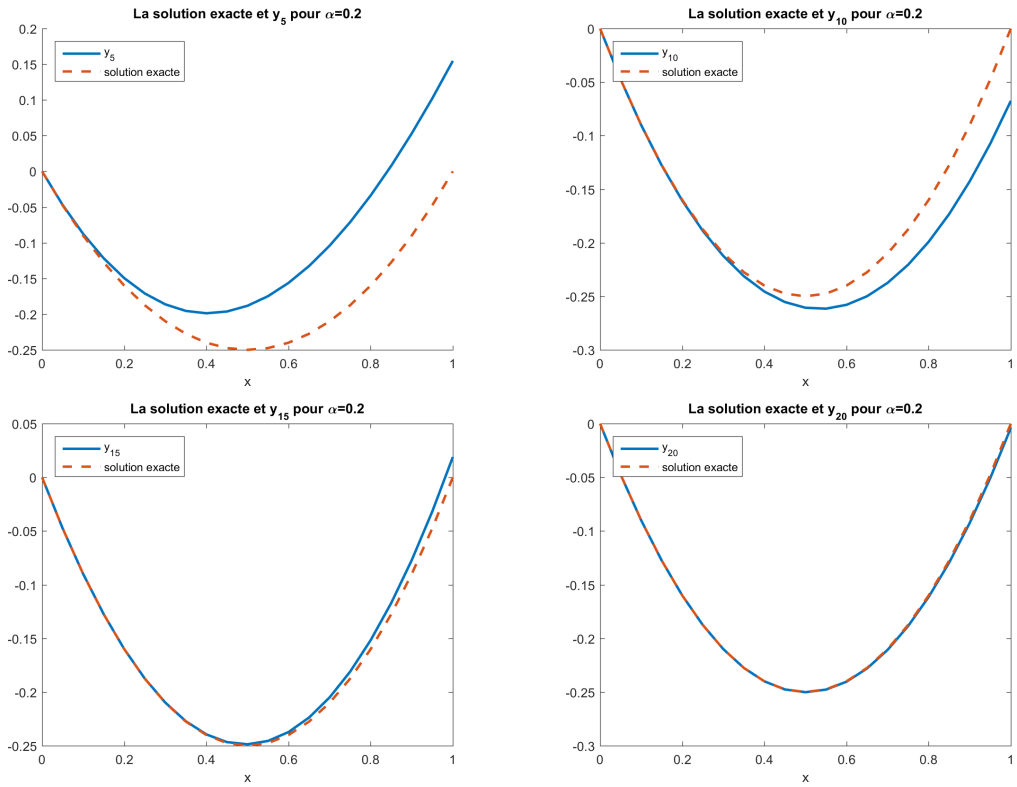


FIGURE 3.12 – La solution y_n et la solution exactes pour $\alpha = 0, 2$

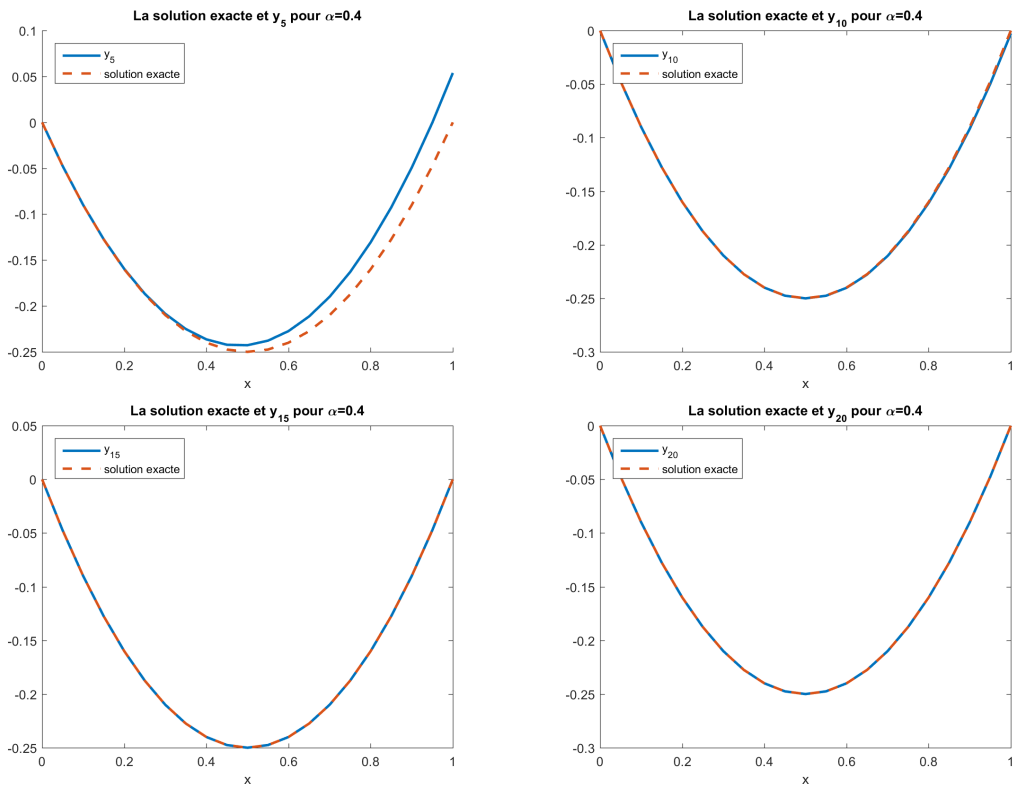


FIGURE 3.13 – La solution y_n et la solution exactes pour $\alpha = 0, 4$

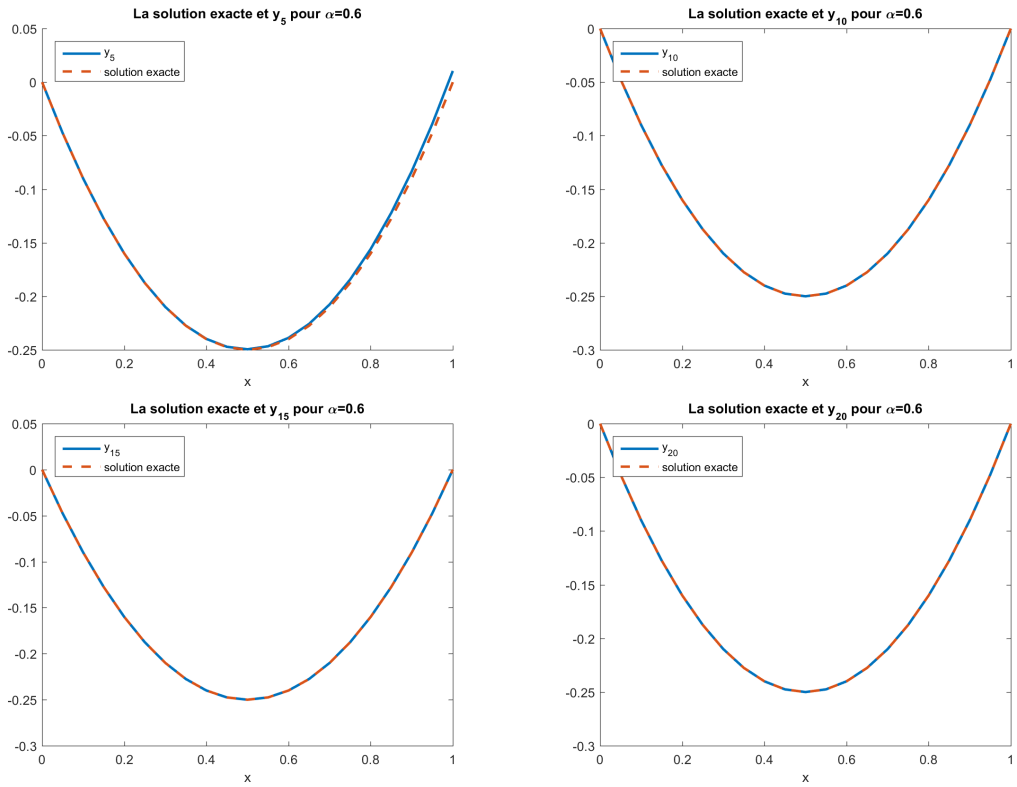


FIGURE 3.14 – La solution y_n et la solution exactes pour $\alpha = 0,6$

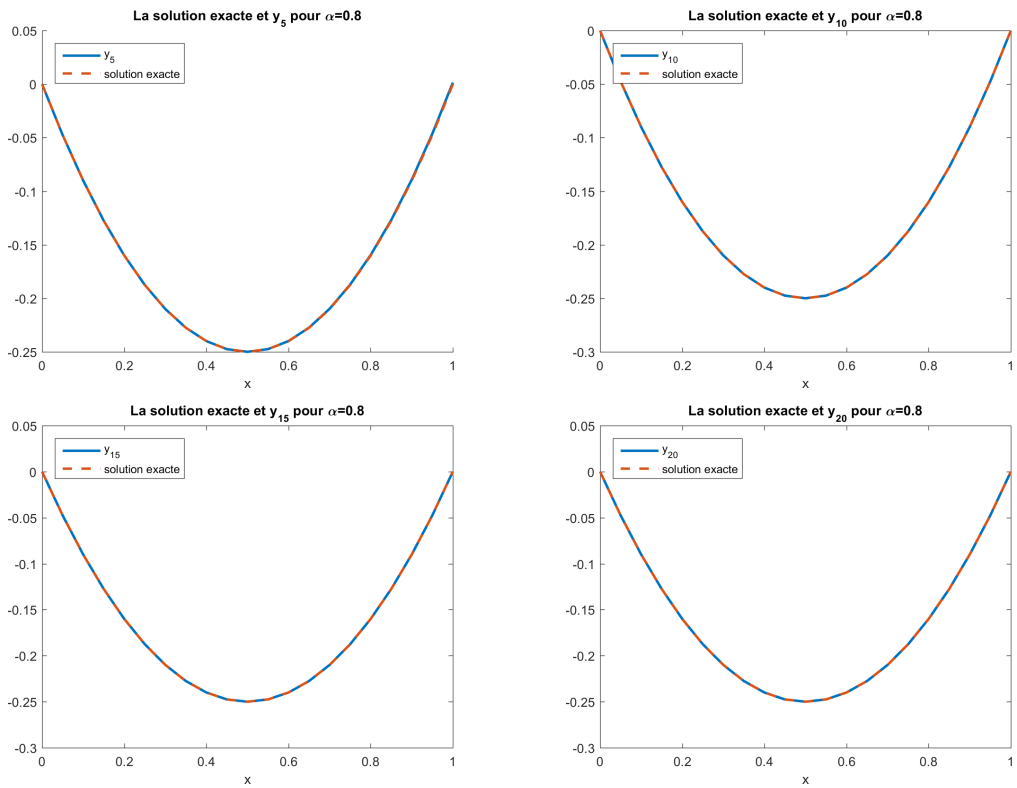


FIGURE 3.15 – La solution y_n et la solution exactes pour $\alpha = 0,8$

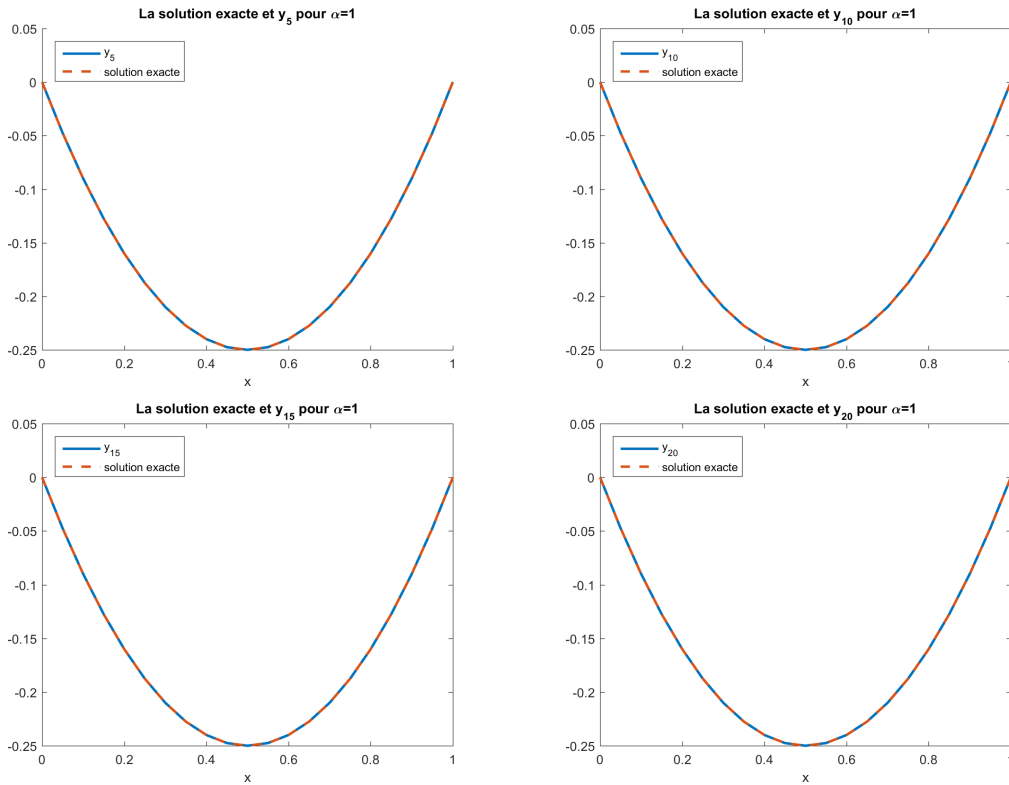


FIGURE 3.16 – la fonction y_n et la solution exactes pour $\alpha = 1$

On calcule l'erreur entre notre solution $y_n (n = 5, 10, 15, 20), \alpha \in [0, 1]$ et la solution exacte y , définie par :

$$\text{erreur} = \sup_{x \in [0,1]} |y_n(x) - y(x)| \text{ pour}$$

Dans ce tableau on présente cette erreur pour $\alpha \in [0, 1]$

	$\alpha \in [0, 1[$			
	$n = 5$	$n = 10$	$n = 15$	$n = 20$
$\alpha = 0$	2.5×10^{-1}	2.5×10^{-1}	2.5×10^{-1}	2.5×10^{-1}
$\alpha = 0, 2$	1.547×10^{-1}	6.753×10^{-2}	1.888×10^{-2}	3.998×10^{-3}
$\alpha = 0, 4$	5.381×10^{-2}	2.854×10^{-3}	6.675×10^{-5}	9.427×10^{-7}
$\alpha = 0, 6$	1.044×10^{-2}	4.443×10^{-5}	1.155×10^{-7}	1.073×10^{-7}
$\alpha = 0, 8$	1.421×10^{-3}	3.127×10^{-7}	9.300×10^{-8}	9.300×10^{-8}
$\alpha = 1$	1.488×10^{-4}	4.697×10^{-8}	4.697×10^{-8}	4.697×10^{-8}

Remarque 3.3.

On remarque que l'erreur est fixée et petite quand on fait plusieurs itérations i.e le nombre des éléments de la suite y_n est grand et quand notre α est proche de 0.

Exemple 4. On considère l'équation différentielle à retard fractionnaire suivante :

$$D^\alpha y(x) = -y(x) - y(x - 0.3) + e^{-x+0.3}$$
$$, 0 \leq x \leq 1, \quad 2 < \alpha \leq 3,$$

sous réserve des conditions initiales $y(0) = 1, y'(0) = -1, \text{ et } y''(0) = 1$. La solution exacte, lorsque $\alpha = 1$, est $y(x) = e^{-x}$.

On a

$$\begin{aligned} y_0 &= I^\alpha \left(x^3 + \frac{6}{\Gamma(4-\alpha)} x^{3-\alpha} \right) \\ &= I^\alpha(x^3) + \frac{6}{\Gamma(4-\alpha)} I^\alpha(x^{3-\alpha}) \\ &= \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(\alpha+4)} x^{\alpha+3} + \frac{6}{\Gamma(4-\alpha)} \frac{\Gamma(4-\alpha)}{\Gamma(\alpha+3-\alpha+4)} x^{\alpha+3-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(\alpha+4)} x^{\alpha+3} + \frac{6}{\Gamma(4)} x^3 \\ y_0 &= \frac{6}{\Gamma(\alpha+4)} x^{\alpha+3} + x^3 \\ &= -I^\alpha(y_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= -I^\alpha \left(x^3 + \frac{6}{\Gamma(\alpha+4)} x^{\alpha+3} \right) \\ &= - \left[\frac{6}{\Gamma(\alpha+4)} x^{\alpha+3} + \frac{6}{\Gamma(\alpha+4)} \frac{\Gamma(\alpha+4)}{\Gamma(2\alpha+4)} x^{2\alpha+3} \right] \\ &= - \frac{6}{\Gamma(\alpha+4)} x^{\alpha+3} - \frac{6}{\Gamma(2\alpha+4)} x^{2\alpha+3} \end{aligned}$$

$$y_2 = +\frac{6}{\Gamma(2\alpha + 4)}x^{2\alpha+3} + \frac{6}{\Gamma(3\alpha + 4)}x^{3\alpha+3}$$

$$y_3 = -\left[\frac{6}{\Gamma(3\alpha + 4)}x^{3\alpha+3} + \frac{6}{\Gamma(4\alpha + 4)}x^{4\alpha+3}\right]$$

$$y_4 = \frac{6}{\Gamma(4\alpha + 4)}x^{4\alpha+3} + \frac{6}{\Gamma(5\alpha + 4)}x^{5\alpha+3}$$

$$y_5 = -\frac{6}{\Gamma(5\alpha + 4)}x^{5\alpha+3} + \frac{6}{\Gamma(6\alpha + 4)}x^{6\alpha+3}$$

On prend différent $\alpha \in [2, 3], n = 5, 10, 15, 20$. Dans les images (3.17), (3.18), (3.19), (3.20), (3.21) et (3.22), on trace notre solution $y_n (n = 5, 10, 15, 20)$ avec cette méthode et la solution exacte.

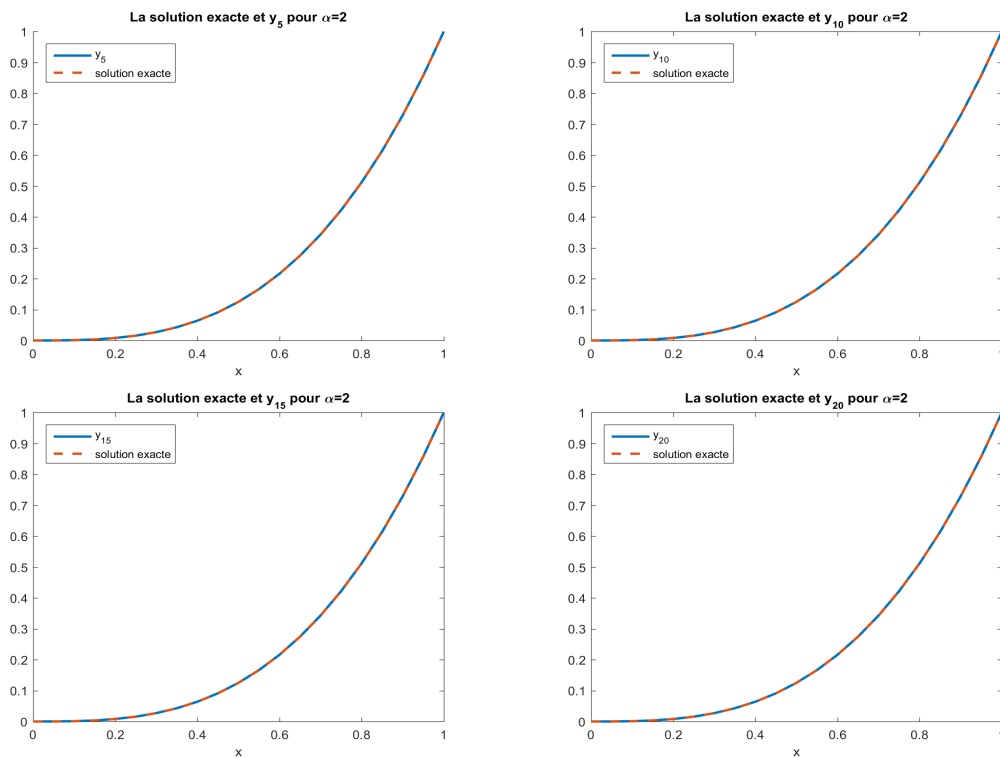


FIGURE 3.17 – La solution y_n et la solution exactes pour $\alpha = 2$.

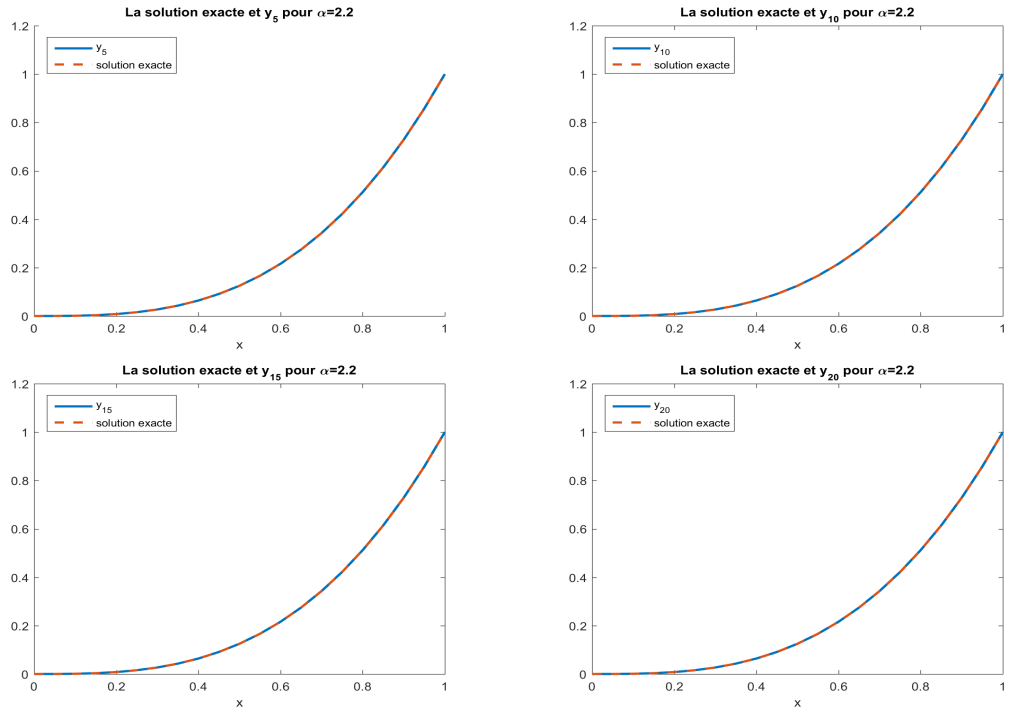


FIGURE 3.18 – La solution y_n et la solution exactes pour $\alpha = 2, 2$.

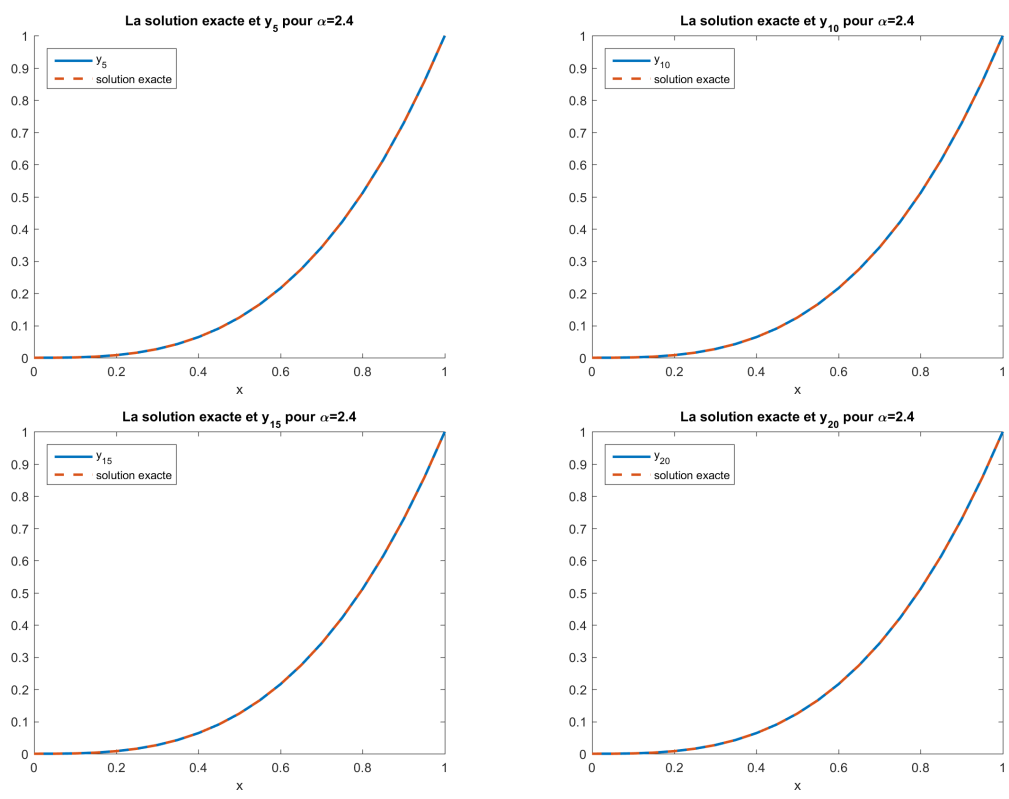


FIGURE 3.19 – la fonction y_n et la solution exactes pour $\alpha = 2, 4$.

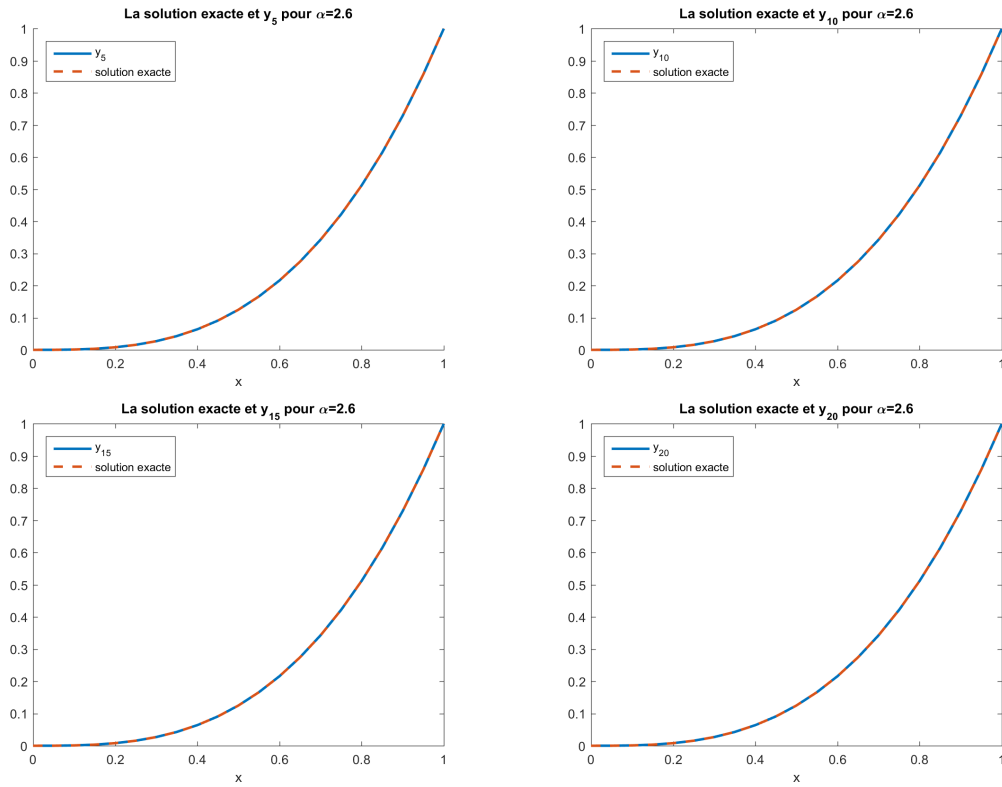


FIGURE 3.20 – La solution y_n et la solution exactes pour $\alpha = 2, 6$.

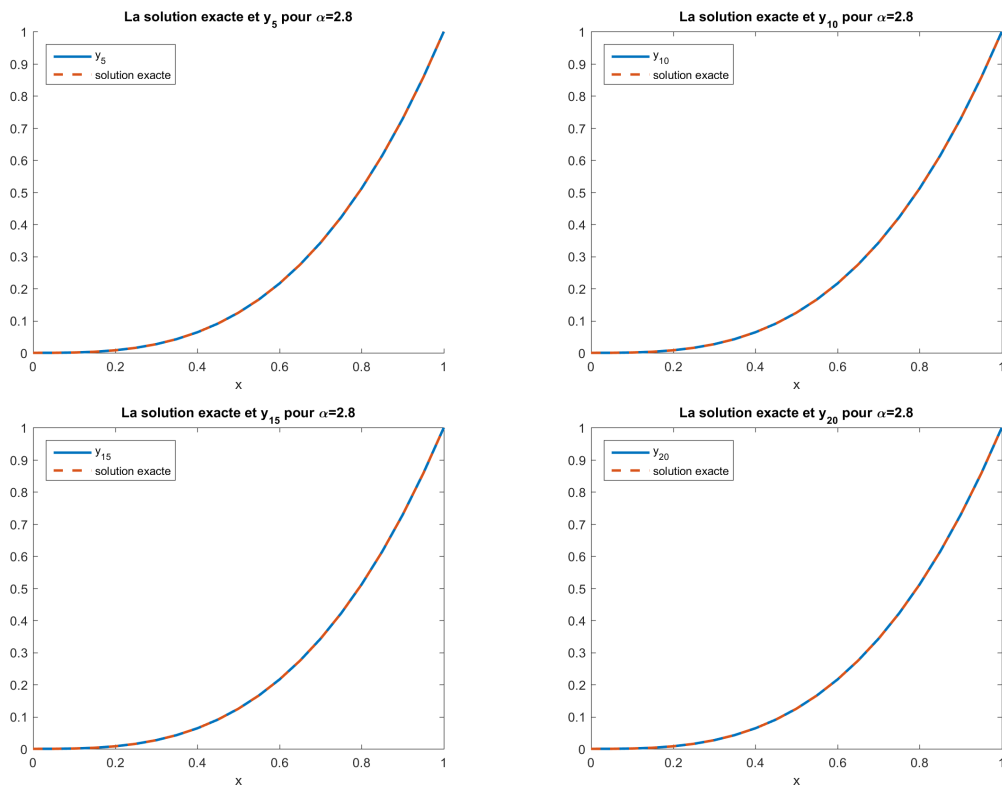


FIGURE 3.21 – La solution y_n et la solution exactes pour $\alpha = 2, 8$.

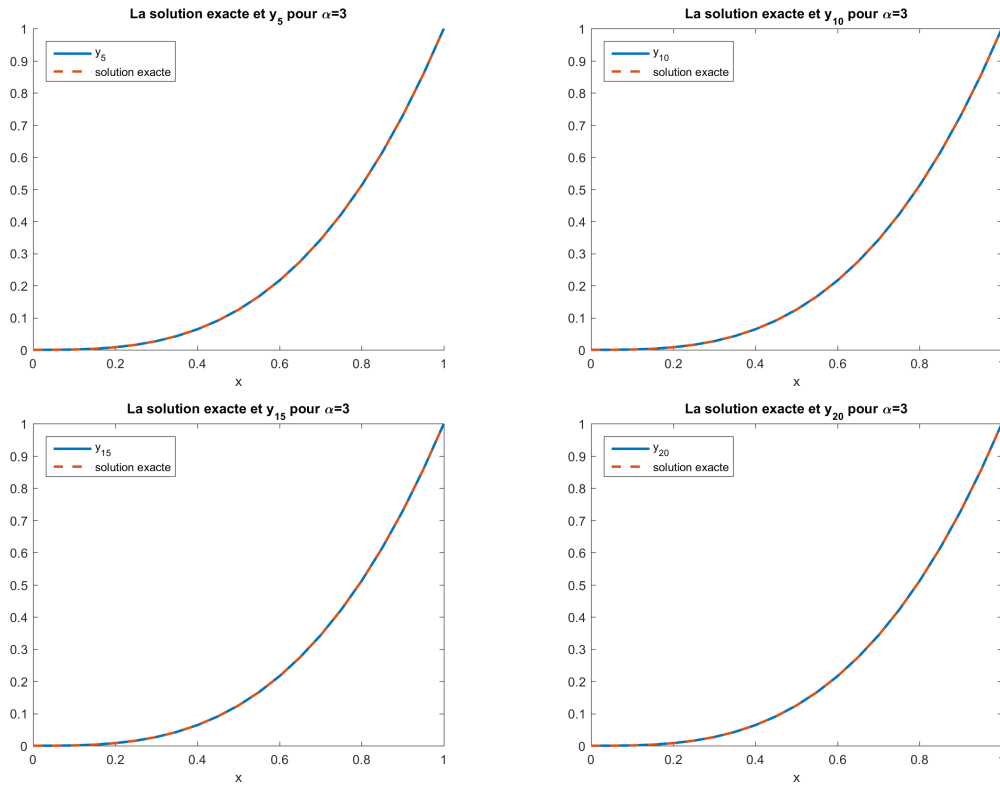


FIGURE 3.22 – la fonction y_n et la solution exactes pour $\alpha = 3$.

On calcule l'erreur entre notre solution $y_n (n = 5, 10, 15, 20), \alpha \in [2, 3]$ et la solution exacte y , définie par :

$$erreur = \sup_{x \in [2,3]} |y_n(x) - y(x)| \text{ pour}$$

Dans ce tableau on présente cette erreur pour $\alpha \in [2, 3]$

	$\alpha \in [2, 3]$			
nombre des points	$n = 5$	$n = 10$	$n = 15$	$n = 20$
$\alpha = 2$	4.685×10^{-8}	1.546×10^{-7}	1.546×10^{-7}	1.546×10^{-7}
$\alpha = 2, 2$	1.440×10^{-7}	1.233×10^{-7}	1.233×10^{-7}	1.233×10^{-7}
$\alpha = 2, 4$	4.494×10^{-7}	4.522×10^{-7}	4.522×10^{-7}	4.522×10^{-7}
$\alpha = 2, 6$	3.426×10^{-7}	3.429×10^{-7}	3.429×10^{-7}	3.429×10^{-7}
$\alpha = 2, 8$	4.709×10^{-7}	4.709×10^{-7}	4.709×10^{-7}	4.709×10^{-7}
$\alpha = 3$	3.336×10^{-7}	3.336×10^{-7}	3.336×10^{-7}	3.336×10^{-7}

Remarque 3.4.

On remarque que l'erreur est fixée et petite quand on fait plusieurs itérations i.e le nombre des éléments de la suite y_n est grand et quand notre α est proche de 3.

Conclusion

Dans ce mémoire, on a donné des définitions sur les intégrales fractionnaires, la dérivée fractionnaire de Riemann Liouville d'ordre variable.

On a présenté deux méthodes numériques qui sont la méthode d'ondelette Hermite et la méthode de décomposition d'Adomian, pour résoudre l'équation différentielle fractionnaire de Riemann Liouville à retard, en présentant des exemples numériques pour comparer, ces méthodes démontrent la précision et l'efficacité.

Nous avons observé que les deux méthodes sont équivalentes, et sont rapprochées à la solution exacte, d'autre part, la méthode de décomposition d'Adomian est la plus facile et leur erreur est fixée.

Table des figures

2.1	Les polynômes de Hermite H_m	24
2.2	Les ondelettes de Hermite ϕ_m	25
3.1	Les ondelettes de Hermite $\phi_{1,n}$ dans $[0, 1]$	32
3.2	Les ondelettes de Hermite $\phi_{2,n}$ dans $[1, 2]$	33
3.3	La solution y_3 et la solution exactes pour $\alpha \in [0, 1]$, $M = 3$, $k = 1$	33
3.4	La solution y_{10} et la solution exactes pour $\alpha \in [0, 1]$, $M = 10$, $k = 1$	34
3.5	La solution y_{20} et la solution exactes pour $\alpha \in [0, 1]$, $M = 20$, $k = 1$	34
3.6	La solution y_3 et la solution exactes pour $\alpha \in [0, 1]$, $M = 3$, $k = 2$	35
3.7	La solution y_{10} et la solution exactes pour $\alpha \in [0, 1]$, $M = 10$, $k = 2$	35
3.8	La solution y_3 et la solution exactes pour $\alpha \in [2, 3]$, $M = 3$, $k = 1$	38
3.9	La solution y_{10} et la solution exactes pour $\alpha \in [2, 3]$, $M = 10$, $k = 1$	39
3.10	La solution y_{20} et la solution exactes pour $\alpha \in [2, 3]$, $M = 20$, $k = 1$	39
3.11	La solution y_n et la solution exactes pour $\alpha = 0$	42
3.12	La solution y_n et la solution exactes pour $\alpha = 0, 2$	43
3.13	La solution y_n et la solution exactes pour $\alpha = 0, 4$	43
3.14	La solution y_n et la solution exactes pour $\alpha = 0, 6$	44
3.15	La solution y_n et la solution exactes pour $\alpha = 0, 8$	44
3.16	la fonction y_n et la solution exactes pour $\alpha = 1$	45
3.17	La solution y_n et la solution exactes pour $\alpha = 2$	47
3.18	La solution y_n et la solution exactes pour $\alpha = 2, 2$	48
3.19	la fonction y_n et la solution exactes pour $\alpha = 2, 4$	48
3.20	La solution y_n et la solution exactes pour $\alpha = 2, 6$	49

3.21	La solution y_n et la solution exactes pour $\alpha = 2, 8$	49
3.22	la fonction y_n et la solution exactes pour $\alpha = 3$	50

Bibliographie

- [1] Fedoul Dalila et Bensaid Haouaria. Equations Differentielles fractionnaires d'ordre Variable au sens de Riemann-Lioville avec conditions aux limites, Universite Ibn Khaldoun Tiaret, 2022-2023.
- [2] Aissaoui Moussa et Ben-Aissa Mohammed EL-amine. L'integrale et la dérivée fractionnaires au sens de Riemann-Lioville, Universite Abou Bekr Belkaid Tlemcen, 2012-2013.
- [3] Brezis, H. Analyse fonctionnelle : Théorie et Application (Masson, Paris), 1983
- [4] Patrice Struillou. Équation fonctionnelles, (Ellipses Édition Marketing S.A.) 2023.
- [5] Baya Djoubir. Sur Les Equations Fractionnaires Linéaires avec Retard, 18-25.
- [6] Umer Saeed and Mujeeb ur Rehman. Hermite Wavelet Method for Fractional Delay Differential Equations, (Copyright), 2014.
- [7] K.R Raslan and Al-Azhar University. The Adomian decomposition method for solving delay differential equation, (International Journal of Computer Mathematics), 2004.
- [8] S. G. Venkatesh, S. K. Ayyaswamy, and S.Raja Balachandar. The Legendre wavelet method for solving initial value problems of Bratu-type, (Computers Mathematics with Applications, vol. 63, no.8), 1287-1295, 2012.
- [9] Daniel Li. Cours d'analyse fonctionnelle, (Ellipses Édition Marketing S.A), 2013.
- [10] Jean-Jacques Colin et Jean-Marie Morvan. Espace Vectoriel, Applications Linéaires, (Cépaduès-Éditions), 2011.
- [11] Najib Mahdou. Introduction à l'algèbre linéaire, (Université Sidi Mohamed Ben Abdellah Faculté des sciences et techniques Fès), 2022.
- [12] Bruno Aebicher. Géométrie : Géométrie affine, géométrie euclidienne et introduction à la géométrie projective, (Vuibert), 2011.

-
- [13] A.Lesfari. Séries numériques, Suites et séries de Fonctions, 2017-2019.
- [14] Oasama H.Mohammed et Abbas I.Khalaif. Adomian Decomposition Method for Solving Delay Differential Equations of Fractional Order, (IOSR Journal of Mathematics), 2014.
- [15] Granas,A.Dugundji,J.FixedPointTheory,Springer-Verlag,New York,(2003).