RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN TIARET
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUES
Département de Mathématiques

MÉMOIRE MASTER

Présenter en vue de l'obtention du diplôme de master

Spécialité :
« Mathématique »

Option :
« AFED»

Présenté Par :

Boutekhili aicha et Naib maroua

Sous L'intitulé :

Étude une classe des systèmes couplés d'équations différentielles fractionnaires impliquant des dérivées ψ-Hilfer

Soutenu publiquement le 24 / 06 / 2024 à Tiaret devant le jury composé de :

Mr BEN HABI Mohamed	MAA	Université de Tiaret	Président
Mr ZITOUNI Ismail	MAA	Université de Tiaret	Examinateur
Mr ZENTAR Oualid	MAA	Université de Tiaret	Encadreur

Année universitaire : 2023/2024

الإهـــــــــــــــداء

وأخر دعواهم أن الحمد لله رب العالمين

بسم الله خالقي وميسر أموري وعصمة أمري لك الحمد والامتنان.

أهدي هذا النجاح إلى ملاكي وقرة عيني غاليتي وجنة قلبي وإن غاب ظلك عن عيني فروحك تنير خطاي إلى جدتي **بوتخيلي الحاجة** رحمها الله وأنار قبرها.

إلى من كلله الله بالهيبة والوقار إلى من علمني العطاء من أحمل إسمه بكل إفتخار أبي الغالي **بو تخيلي بن داود** كنت ولا زلت سندا و عزا لي.

إلى غاليتي وجنتي من ساندتني في ضعفي وقوتي من كان دعاؤها سر نجاحي إلى قدوتي ومعلمتي ورفيقة دربي أمي الغاليه .

إلى ضلعي الثابت الذي لا يميل من رزقت بهم سندا وشددت بهم عضدي إلى صفوة أيامي قرة عيني إخوتي **بوزيد ونبيل** وأخواتي كل بإسمها ومقامها.

إلى كل اهلي وأحبتي وإلى الروح الطيبة الخلوقة من أتممت معها بحثي ومشواري **نايب مروى** راجية من المولى عز وجل أن ينفعنا بما علمنا وأن يعلمنا ما نجهل ويجعله **حجة** لنا لا علينا.

بوتخيلي عائشة

الإهـــــــــــــــــداء

ما سلكنا البدايات إلا بتسييره وما بلغنا النهايات إلا بتوفيقه وماحققنا الغايات إلا بفضله فالحمد لله الذى وفقنا لتثمين هذه الخطوة في مسيرتنا الدراسية .

أهدى تخرجي و فرحتي إلى صاحب السيرة العطرة و الفكر المستنير إلى من أحمل اسمه بكل فخر إلى من دعمني بلا حدود وأعطاني بلا مقابل إلى **أبي الغالي** .

إلى التي ساندتني وسهلت لي الشدائد بدعائها إلى السراج الذى أنار لى الطريق إلى القلب المعطاء **أمى الغالية** حفظها الله .

إلى من عشت معهم و ترعرت بينهم إلى شموع دربي إخوتي عادل و بشرى إلى جميع أفراد عائلتي ولكل من كان عونا و سندأ في هذا الطريق، للأصدقاء الأوفياء و رفقاء السنين، و لكل من أمدوني بالقوة و التوجيه.

إلى رفيقتي في العمل الزميلة **بوتخيلي عائشة** ولله الشكر كله أن وفقنا لهذه اللحظة.

فالحمد لله رب العالمين.

نايب مروى

الشـــــــــــــــــــــكر

أذكر الله رب العالمين الذي خلق وهدى وسدد الخطى فاكتمل هذا العمل بعونه وتوفيقه فنحمده حمدا كثيرا في المبتدى والمتهى.

نتقدم بالشكر الجزيل والعرفان بالجميل لكل من مد يد العون والمساعدة في مقدمتهم أستاذنا الفاضل **زنتار وليد** الذي تشرفنا بإشرافه على بحثنا بخلق طيب وتوجيه سديد ومعاملة كريمة فله عظيم الشكر والتقدير لوصول بحثنا لهذه الصورة فجزاه الله خير الجزاء.

كما نتقدم بالشكر والتقدير إلى عضوى لجنة المناقشة الأستاذ **بن حابي محمد** الذى شرفنا بموافقته على رئاسة لجنة التحكيم، و الأستاذ **زيتوني اسماعيل** بصفته أستاذ مناقش الذي خصص وقته الثمين لدراسة العمل حفظهما الله.

كما نتقدم بالشكر إلى منارة العلم و العلماء إلى الصرح الشامخ جامعة ابن خلدون و بالأخص كلية الرياضيات و الإعلام الآلي **قسم الرياضيات** وإلى الذين حملوا أقدس رسالة في الحياة إلى الذين مهدوا لنا طريق العلم والمعرفة جميع أساتذتنا الافاضل.

Table des matières

Introduction générale

Le calcul fractionnaire est devenu au fil du temps un outil important pour le développement de nouveaux concepts mathématiques au sens théorique et au sens pratique. Au cours des dernières années, diverses notions ont été proposées sur les 'opérateurs fractionnaires. Ici, nous signalons les types les plus célèbres, y compris les dérivés de Liouville, Caputo, Hadamard, Caputo-Fabrizio, etc. En conséquence, cela a conduit à différentes structures d'équations différentielles d'ordre arbitraire formulées par plusieurs opérateurs fractionnaires. Cependant, il a été compris que la procédure la plus efficace pour discuter d'une telle variété d'opérateurs fractionnaires est de s'adapter aux structures généralisées d'opérateurs fractionnaires qui impliquent de nombreux autres opérateurs.

Ici, nous avons choisi l'opérateur fractionnaire ψ-Hilfer, outre le fait qu'il s'agit d'un opérateur global, et qu'il en généralise plus de vingt, la liberté de choix de l'opérateur de différenciation classique et le choix de la fonction ψ, c'est-à-dire parmi le choix de la fonction ψ, l'opérateur de différenciation classique, peut agir sur l'opérateur d'intégration fractionnaire ou bien l'opérateur d'intégration fractionnaire peut agir sur l'opérateur de différenciation classique. Cela permet d'unifier et d'obtenir les propriétés des opérateurs fractionnaires.

De nombreux phénomènes physiques ne peuvent pas être modélisés sous la forme d'une seule ED. Pour surmonter cette difficulté, ce type de phénomènes peut être présenté à l'aide de systèmes couplés de FDE. Récemment, les systèmes couplés avec des FDE ont été étudiés selon différentes approches.

En 1940, Ulam a posé une question importante sur la stabilité des équations fonctionnelles [23], à laquelle Hyers a répondu dans le cas des espaces de Banach. Depuis lors, ce type de stabilité est connu sous le nom de stabilité de Hyers-Ulam (HUS). En 1978, Rassias a généralisé HUS à un concept plus général et le concept généralisé a été appelé stabilité de Hyers-Ulam-Rassias (HUR). Obloza a été le premier mathématicien à étudier la stabilité HU pour les DE. Li et Zada ont établi un lien entre la stabilité HUS et la stabilité exponentielle uniforme des familles d'évolution discrète d'opérateurs linéaires limités sur des espaces de Banach .

Dans ce qui suit, nous donnons un aperçu de l'organisation de notre mémoire, qui se compose de trois chapitres définissant le travail contribué.

Chapitre 1 : Ce chapitre fournit la notation et les résultats préliminaires, les descriptions, les théorèmes et autres résultats auxiliaires qui seront nécessaires pour cette étude.

Chapitre 2 : Dans cette chapitre, nous présentons la définition de l'intégrale fractionnaire d'une fonction f par rapport à une autre fonction ψ et la définition de la dérivée fractionnaire ψ-Hilfer. Aussi bien que nous discutons quelques propriétés de l'opérateur fractionnaire : l'identité, est limité, et la relation avec l'opérateur intégral fractionnaire. Enfin, nous présentons une large classe d'intégrales et de dérivées fractionnaires, au moyen de l'intégrale fractionnaire par rapport à une autre fonction.

Chapitre 3 : Dans ce chapitre, nous établissons les résultats de l'existence, l'unicité ainsi que les stabilités Hyers–Ulam et Hyers–Ulam–Rassias des solutions du système proposé impliquant une dérivée fractionnaire ψ-Hilfer de la forme :

$$\begin{cases} {}^{H}D_{a^+}^{\alpha,\beta,\psi}u(t) = f(t, u(t), {}^{H}D_{a^+}^{\alpha,\beta,\psi}v(t)), \qquad t \in \mathcal{J} = (a, b], 0 < \alpha < 1, 0 < \beta \leqslant 1, \\ {}^{H}D_{a^+}^{\alpha,\beta,\psi}v(t) = g(t, {}^{H}D_{a^+}^{\alpha,\beta,\psi}u(t), v(t)), \qquad \gamma = \alpha + \beta - \alpha\beta, \\ I_{a^+}^{1-\gamma,\psi}u(t)|_{t=a} = u_a, \qquad I_{a^+}^{1-\gamma,\psi}v(t)|_{t=a} = v_a. \end{cases}$$

On notée $\mathcal{X} = C(\mathcal{J}, \mathbb{R})$, ou $f, g : \mathcal{J} \times \mathcal{X} \times \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ sont des fonctions continues et non linaires sur un espace de Banach $\mathcal{X}$. La fonction linaire $\psi : \mathcal{J} \longrightarrow \mathbb{R}$ satis fies $\psi'(t) \neq 0 \qquad \forall t \in \mathcal{J}$.

CHAPITRE 1

Rappels et quelques outils de base

Dans ce chapitre, nous discutons des outils mathématiques nécessaires, des notations et des concepts dont nous avons besoin dans les chapitres suivants. Nous examinons quelques propriétés essentielles des opérateurs différentiels fractionnaires. Nous passons également en revue certains des théorèmes du point fixe qui sont cruciaux dans nos résultats concernant les équations différentielles fractionnaires.

1.1 Sur les fonctions

Définition 1.1. (Espace de Banach)

Toute espace vectoriel normé complet est appelé espace de Banach.

Exemple 1.1. *Les espaces $L^1(J,\mathbb{R})$ et $C(J,\mathbb{R})$ munis respectivement des normes suivantes :*

$$\|x\|_{L^1} = \int_0^1 |x(t)|dt, \quad \|x\|_C = \sup_{t\in J} |x(t)|$$

sont des espaces de Banach sur $\mathbb{R}$.

Définition 1.2. Fonction absolument continue

Une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite absolument continue sur $[a,b]$, si $\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0$ tel que pour toute famille finie d'intervalles ouverts deux à deux disjoints, $]a_k, b_k[_{k=1,2,\ldots,n}$, nous avons :

$$\sum_{k=1}^{n} |b_k - a_k| < \delta \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \epsilon$$

Définition 1.3. Fonction de Lipschitz généralisée

Soit $f : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

f est dite lipschitzienne-généralisée s'il existe une fonction $l \in L^1(J,\mathbb{R})$, telle que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \qquad \|f(t,x) - f(t,y)\| \leq l(t)\,\|x-y\|\,, \text{ pour presque tout } \ t \in J,$$

La fonction l est appelée la fonction de Lipschitz correspondante à f.

- Si $l(t) = k$ (où $k > 0$ est une constante positive), f est dite lipschitzienne de constante de Lipschitz k.

- Si $0 < k < 1$, f est dite une contraction.

Exemple 1.2. .
La fonction $x \mapsto \dfrac{x + \sin x}{3}$ est une k-contraction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, avec $k = \dfrac{2}{3}$.

Définition 1.4

Pour $z > 0$, la fonction gamma $\Gamma(\cdot)$ est définie par

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty s^{z-1}e^{-s}ds.$$

Définition 1.5

Soit $z, w > 0$. Alors, la fonction bêta $B(z, w)$ est définie par

$$B(z, w) = \int_0^1 s^{z-1}(1-s)^{w-1} ds.$$

De plus, la fonction bêta et la fonction gamma ont la relation suivante

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}.$$

Définition 1.6

La fonction de Mittag-Leffler à un paramètre $\mathbb{E}_\alpha(\cdot)$ est définie par

$$\mathbb{E}_\alpha(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha+1)}.$$

1.2 Sur les opérateurs

Définition 1.7. Opérateur borné

Soit A un opérateur linéaire défini d'un espace de Banach X dans lui même. A est dit borné s'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\forall x \in X, \quad \|Ax\| \leq c\,\|x\| \ .$$

Définition 1.8. Opérateur continu

Un opérateur A défini d'un espace de Banach X dans lui même est dit continu si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans X qui converge vers $x \in X$, la suite $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers Ax.

Soit $C(J, X)$ l'espace des fonctions continues d'un intervalle compact J de $\mathbb{R}$ dans l'espace de Banach X et soit M un sous ensemble de $C(J, X)$.

Définition 1.9. Ensemble équicontinu

M est dit équicontinu si :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \ \exists \delta > 0, \ \ \forall t_1, t_2 \in J : \ \Big(\|t_1 - t_2\| \leq \delta\Big) \Rightarrow \Big(\forall f \in M, \ \ \|f(t_1) - f(t_2)\| \leq \varepsilon\Big).$$

Définition 1.10. Ensemble uniformément borné

M est dit uniformément borné si :

$$\exists \ c > 0 : \|f(t)\| \leq c \quad \forall t \in J, \text{ et } \forall f \in M.$$

Définition 1.11. Ensemble relativement compact

M est dit relativement compact si $\overline{M}$ (adhérence de M) est compact.

Théorème 1.1. Ascoli Arzela

M est relativement compact si et seulement si :

1. M est uniformément borné.
2. M est équicontinu.

Soit A un opérateur défini d'un espace de Banach X dans lui- même.

Définition 1.12. Opérateur compact

L'opérateur A est dit compact si l'ensemble $A(X)$ est relativement compact.

Définition 1.13. Opérateur totalement borné

L'opérateur A est dit totalement borné si pour tout ensemble borné B de l'espace X, l'ensemble $A(B)$ est relativement compact.

Définition 1.14. Opérateur complètement continu

L'opérateur A est dit complètement continu s'il est continu et totalement borné.

1.3 Sur les point fixe

Dans cette section, nous énonçons les théorèmes de point fixe qui serons utilisés dans les chapitres suivants.

Théorème 1.2. [7]

Soit $\Omega \neq \phi$ un sous ensemble convexe et ferme d'un espace de Banach E. Soit $\Phi : \Omega \longrightarrow \Omega$ un opérateur continue tel que $\Phi(\Omega)$ est un sous ensemble relativement compact de E. Alors l'opérateur Φ a au moins un point fixe dans Ω.

Théorème 1.3. [11]

Soit E un espace de Banach et $\mathcal{S}_r$ un espace fermé non vide sous-ensemble de E, Alors tout opérateur de contraction $\mathit{\Pi} : \mathcal{S}_r \to \mathcal{S}_r$ a un point fixe unique.

Les résultats que nous étudions dans cet article ne concerneront que $0 < \alpha < 1$ $n = 1$.

CHAPITRE 2

Éléments de la théorie du calcul fractionnaire.

On introduit dans ce chapitre les éléments de bases théoriques sur les opérateurs d'ordre fractionnaire nécessaires pour le développement des chapitres qui vont suivre.

2.1 L'intégrale fractionnaire de ψ-Riemann-Liouville

Définition 2.1. [4]

Soit (a,b), $(0 \leq a < b \leq +\infty)$ un intervalle finie ou infinie de la droite réelle $\mathbb{R}$ et $\psi(x)$ une fonction monotone croissante et positive sur (a,b), ayant une dérivée continue $\psi'(x)$ sur (a,b). L'intégrale fractionnaire d'une fonction f par rapport la fonction ψ sur $[a,b]$ sont définie par :

$$I_{a^+}^{\alpha,\psi} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \psi'(x)(\psi(x) - \psi(t))^{\alpha-1} f(t)dt. \tag{2.1}$$

Remarque 2.1

1. Si l'on considère $\psi(t) = t$ dans Eq.(2.1), on a
$$I_{a+}^{\alpha;t} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds = {}^{RL}I_{a+}^{\alpha} f(t),$$
l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville.
2. Si l'on considère $\psi(t) = t$ et $a = -\infty$ dans Eq.(2.1), on a
$$I_{a+}^{\alpha;t} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds = {}^{L}I_{0+}^{\alpha} f(t),$$
l'intégrale fractionnaire de Liouville.
3. Si l'on considère $\psi(t) = t$ et $a = 0$ dans Eq. (2.1), on a
$$I_{a+}^{\alpha;x} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds = {}^{R}I_{0+}^{\alpha} f(t),$$
l'intégrale fractionnaire de Riemann.
4. En choisissant $\psi(t) = \ln t$ et en remplaçant dans Eq.(2.1), on a
$$\begin{aligned} I_{a+}^{\alpha;\ln t} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{1}{s}(\ln t - \ln s)^{\alpha-1} f(s)ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} f(s)\frac{ds}{s} \\ &= {}^{H}I_{a+}^{\alpha} f(s), \end{aligned}$$
l'intégrale fractionnaire de Hadamard.

Lemme 2.1. [9]

Soit $\alpha > 0$ et $0 < \gamma \leq 1$. Alors $I_{a^+}^{\alpha,\psi} : C_{1-\gamma,\psi}[a,b] \longrightarrow C_{1-\gamma,\psi}[a,b]$ est bornée.

Lemme 2.2. [9]

Soit $\alpha, \beta > 0$ et $f(t) = (\psi(t) - \psi(a))^{\beta-1}$. Alors

$$I_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi} f(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(\psi(t) - \psi(a))^{\alpha+\beta-1}. \tag{2.2}$$

Démonstration. On a par définition 2.1

$$\begin{aligned}
&I_{a+}^{\alpha,\beta,\psi}(\psi(t) - \psi(a))^{\beta-1}\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (\psi(s) - \psi(a))^{\beta-1}(\psi(t) - \psi(a))^{\alpha-1}\psi'(s)ds\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \psi'(s)(\psi(s) - \psi(a))^{\beta-1}\left((\psi(t) - \psi(a))^{\alpha-1}\left(1 - \frac{(\psi(s) - \psi(a))}{(\psi(t) - \psi(a))}^{\alpha-1}\right)\right)ds.
\end{aligned}$$

On prend : $\mu = \dfrac{(\psi(s) - \psi(a))}{(\psi(t) - \psi(a))}$. alors

$$\begin{aligned}
&I_{a+}^{\alpha,\beta,\psi}(\psi(t) - \psi(a))^{\beta-1}\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \psi'(s)(\psi(s) - \psi(a))^{\beta-1}(\psi(s) - \psi(a))^{\alpha-1}\left(1 - \frac{(\psi(s) - \psi(a))}{(\psi(t) - \psi(a))}\right)^{\alpha-1} ds\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \left(1 - \frac{(\psi(s) - \psi(a))}{(\psi(t) - \psi(a))}\right)^{\alpha-1}\left(\frac{(\psi(s) - \psi(a))}{(\psi(t) - \psi(a))}\right)^{\beta-1}\frac{(\psi(t) - \psi(a))^{\beta-1}}{(\psi(t) - \psi(a))^{1-\alpha}}\psi'(s)ds\\
&= \frac{(\psi(t) - \psi(a))^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \left(1 - \frac{(\psi(s) - \psi(a))}{(\psi(t) - \psi(a))}\right)^{\alpha-1}\left(\frac{(\psi(s) - \psi(a))}{(\psi(t) - \psi(a))}\right)^{\beta-1}\frac{\psi'(s)}{(\psi(t) - \psi(a))}ds\\
&= \frac{(\psi(t) - \psi(a))^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^1 (1-\mu)^{\alpha-1}\mu^{\beta-1}d\mu.
\end{aligned}$$

D'après la fonction Bêta :

$$\frac{(\psi(t) - \psi(a))^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)}\beta(\alpha,\beta) = (\psi(t) - \psi(a))^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Il suit ça

$$I_{a+}^{\alpha,\beta,\psi}(\psi(t) - \psi(a))^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(\psi(t) - \psi(a))^{\alpha+\beta-1}. \tag{2.3}$$

□

Lemme 2.3. [9]

Soit $\beta, \alpha > 0$ alors on a la propriété de semi groupe suivante :

$$I_{a^+}^{\alpha,\psi} I_{a^+}^{\beta,\psi} f(t) = I_{a^+}^{\alpha+\beta,\psi} f(t). \tag{2.4}$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
I_{a+}^{\alpha,\psi} I_{a+}^{\beta,\psi} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \psi'(s)(\psi(t) - \psi(s))^{\alpha-1}\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^s \psi'(\tau)\left(\psi(s) - \psi(\tau)^{\beta-1}\right)f(\tau)d\tau\right)ds\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t\int_a^s \psi'(s)\psi'(\tau)(\psi(t) - \psi(s))^{\alpha-1}(\psi(s) - \psi(\tau))^{\beta-1}f(\tau)d\tau ds.
\end{aligned}$$

D'après la formule de Dirichlet :

$$I_{a+}^{\alpha,\psi} I_{a+}^{\beta,\psi} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(\tau)\psi'(\tau) \left(\int_\tau^s \psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha-1}(\psi(s)-\psi(\tau))^{\beta-1} ds \right) d\tau.$$

D'après le lemme 2.1, on obtient

$$\begin{aligned} I_{a+}^{\alpha,\psi} I_{a+}^{\beta,\psi} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(\tau)\psi'(\tau)\Big((\psi(t)-\psi(a))^{\alpha+\beta-1}\Big) \frac{(\Gamma(\alpha))(\Gamma(\beta))}{\Gamma(\alpha+\beta)} d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^t \psi'(\tau)\Big((\psi(t)-\psi(a))^{\alpha+\beta-1}\Big) f(\tau) d\tau \\ &= I_{a+}^{\alpha+\beta,\psi} f(t). \end{aligned}$$

□

Lemme 2.4. [9]

Soit $\alpha, \beta \geqslant 0$ et $f \in C_{1-\beta,\psi}([a,b],\mathbb{R})$. Alors

$$I_{a^+}^{\alpha,\psi} f(a) = \lim_{t\to a^+} I_{a^+}^{\alpha,\psi} f(t) = 0. \tag{2.5}$$

Démonstration. Puisque $f \in C_{1-\beta,\psi}([a,b],\mathbb{R})$. Alors $(\psi(t)-\psi(a))^{1-\beta} f(t)$ est continue sur $[a,b]$, donc il existe un constant positive M tel que :

$$|(\psi(t)-\psi(a))^{1-\beta} f(t)| \leq M.$$

Ainsi

$$|f(t)| \leq M|(\psi(t)-\psi(a))^{\beta-1}|, \quad t \in [a,b]. \tag{2.6}$$

On applique l'opérateur $I_{a+}^{\alpha,\psi}(\cdot)$ des deux cotés de l'équation (2.6) et d'après le lemme 2.1

$$\begin{aligned} |I_{a+}^{\alpha,\psi} f(x)| &\leq M|I_{a+}^{\alpha,\psi}(\psi(x)-\psi(a))^{\beta-1}| \\ &\leq M\frac{\Gamma(n-\gamma)}{\Gamma(\alpha+n-\gamma)}(\psi(x)-\psi(a))^{\alpha+\beta-1}. \end{aligned}$$

D'où

$$\lim_{x\longmapsto a+} I_{a+}^{\alpha,\psi}|f(x)| = 0.$$

□

2.2 Les ψ dérivées fractionnaire :

Nous passons en revue quelques définitions, notations et résultats de la dérivée fractionnaire ψ-Hilfer.

Soit $[a,b], (0 < a < b < \infty)$ est un intervalle fini de $\mathbb{R}$ et $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction croissante avec $\psi'(t) \neq 0$, pour tous $t \in [a,b]$.

2.2.1 La Dérivée fractionnaire au sens de ψ-Riemann-Liouville

Définition 2.2. [9]

Soient $n-1<\alpha\leq n\in\mathbb{N}$, $\psi\in C^n([a,b],\mathbb{R})$ et $f\in C([a,b],\mathbb{R})$. la dérivée fractionnaire ψ Riemann-Liouville de la fonction f d'ordre α est définie par :

$$\begin{aligned}
{}^{RL}D_{a+}^{\alpha,\psi}f(t) &= \left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^n I_{a+}^{n-\alpha,\psi}f(t)\\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t (\psi(t)-\psi(s))^{n-\alpha-1}\psi'(s)f(s)ds.
\end{aligned}$$

Remarque 2.2

En utilisant l'opérateur de dérivée fractionnaire ψ-Riemann-Liouville Eq. (2.7), nous présentons une quelques des dérivées fractionnaires en choisissant ψ.

1. Considérez le $\psi(t)=t$ et le remplacement dans Eq. (2.7), on a

$$\begin{aligned}
{}^{RL}D_{a+}^{\alpha,t}f(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n I_{a+}^{n-\alpha,t}f(t)\\
&= \left(\frac{d}{dt}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}f(s)ds \qquad (2.7)\\
&= {}^{RL}D_{a+}^{\alpha}f(t),
\end{aligned}$$

la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville.

2. Considérez le $\psi(t)=\ln t$ et en remplaçant dans Eq. (2.7), on a

$$\begin{aligned}
{}^{RL}D_{a^+}^{\gamma:\ln t}f(t) &= \left(t\frac{d}{dt}\right)^n I_{a+}^{n-\gamma\cdot\ln t}f(t)\\
&= \left(t\frac{d}{dt}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\gamma)}\int_a^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{n-\gamma-1} f(s)\frac{ds}{s} \qquad (2.8)\\
&= {}^{H}D_{a+}^{\gamma}f(t),
\end{aligned}$$

la dérivée fractionnaire d'Hadamard.

3. Considérez le $\psi(t)=t^\rho$ et en remplaçant dans Eq. (2.7), on a

$$\begin{aligned}
{}^{RL}D_{a^+}^{\alpha:t^\rho}f(t) &= \left(\frac{1}{\rho t^{\rho-1}}\frac{d}{dt}\right)^n I_{a+}^{n-\alpha:t^\rho}f(t)\\
&= \rho^{1-n}\left(\frac{1}{t^{\rho-1}}\frac{d}{dt}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t^\rho-s^\rho)^{n-\alpha-1}\, s^{\rho-1}f(s)ds \qquad (2.9)\\
&= \frac{1}{\rho^\alpha}\ {}^{\rho}D_{a+}^{\alpha}f(t),
\end{aligned}$$

la dérivée fractionnaire de Katugampola.

Lemme 2.5

Soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Si $f(t) = (\psi(t) - \psi(a))^{\beta-1}$, alors

$$^{RL}D_{a^+}^{\alpha,\psi} f(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(\psi(t) - \psi(a))^{\beta-\alpha-1}. \quad (2.10)$$

Démonstration. Par la définition 2.2.1 et le lemme 2.1

$$\begin{aligned}
^{RL}D_{a^+}^{\alpha,\psi}(\psi(t) - \psi(a))^{\beta-1} &= \left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^n (I_{a^+}^{n-\alpha,\psi}(\psi(t) - \psi(a))^{\beta-1})(t) \\
&= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n+\beta-\alpha)}\left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)(\psi(t) - \psi(a))^{n+\beta-\alpha-1} \\
&= \frac{\Gamma(\beta)(n+\beta-\alpha-1)}{\Gamma(n+\beta-\alpha)}\left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^{n-1}(\psi(t) - \psi(a))^{n+\beta-\alpha-2}.
\end{aligned}$$

et comme

$$\Gamma(n+\beta-\alpha) = (n+\beta-\alpha-1)\Gamma(n+\beta-\alpha-1).$$

Alors en répétant le processus de la dérivée $\left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)$ a la $n-1$ ieme étape, on obtient :

$$\begin{aligned}
^{RL}D_{a^+}^{\alpha,\psi}(\psi(t) - \psi(a))^{\beta-1} &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n+\beta-\alpha-1)}\left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^{n-1}(\psi(t) - \psi(a))^{n+\beta-\alpha-2} \\
&= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(\psi(t) - \psi(a))^{\beta-\alpha-1}.
\end{aligned}$$

□

2.2.2 La Dérivée fractionnaire ψ-Hilfer

Définition 2.3

Soient $n-1 \leq \alpha < n$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $f, \psi \in C^n([a,b],\mathbb{R})$ deux fonctions. La dérivée fractionnaire ψ-Hilfer $^{H}D_{a^+}^{\alpha,\beta,\psi}(\cdot)$ de la fonction f d'ordre α et de type $0 \leq \beta \leq 1$, est définie par :

$$^{H}D_{a^+}^{\alpha,\beta,\psi} f(t) = I_{a^+}^{\beta(n-\alpha),\psi}\left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^n (I_{a^+}^{(1-\beta)(n-\alpha),\psi} f)(t). \quad (2.11)$$

On peut l'écrire comme suite :

$$^{H}D_{a^+}^{\alpha,\beta,\psi} f(t) = I_{a^+}^{\gamma-\alpha,\psi}\, {}^{RL}D_{a^+}^{\gamma,\psi} f(t). \quad (2.12)$$

avec $\gamma = \alpha + \beta(n-\alpha)$.

Remarque 2.3

En utilisant l'opérateur de dérivée fractionnaire ψ-Hilfer Eq. (2.11), nous présentons une large classe de dérivées fractionnaires en choisissant ψ, a et en prenant la limite des paramètres α et β.

1. En prenant la limite $\beta \to 1$ des deux côtés de Eq. (2.11), on a
$$ {}^{H}D^{\alpha,1;\psi}_{a+}f(t) = I^{n-\alpha;\psi}_{a+}\left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^{n} f(t) \quad = {}^{c}D^{\alpha;\psi}_{a+}f(t), \tag{2.13}$$
la dérivée fractionnaire ψ-Caputo.

2. En prenant la limite $\beta \to 0$ des deux côtés de Eq. (2.11), on a
$$ {}^{H}D^{\alpha,0;\psi}_{a+}f(t) = \left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^{n} I^{(n-\alpha);\psi}_{a+} f(t) \quad = {}^{RL}D^{\alpha;\psi}_{a+}f(t), \tag{2.14}$$
la dérivée fractionnaire ψ-Riemann-Liouville.

3. Considérons le $\psi(t) = t$ et en prenant la limite $\beta \to 1$ des deux côtés de Eq. (2.11), on a
$$\begin{aligned} {}^{H}D^{\alpha,1;t}_{a+}f(t) &= I^{n-\alpha;t}_{a+}\left(\frac{d}{dt}\right)^{n} f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}\left(\frac{d}{dt}\right)^{n} f(s)ds = {}^{c}D^{\alpha}_{a+}f(t), \end{aligned} \tag{2.15}$$
la dérivée fractionnaire de Caputo.

4. Considérons le $\psi(t) = t^{\rho}$ et en prenant la limite $\beta \to 0$ des deux côtés de Eq. (2.11), on a
$$ \rho^{\alpha H}\ D^{\alpha,0;t^{\rho}}_{a+}f(t) = \rho^{\alpha}\left(\frac{1}{\rho t^{\rho-1}}\frac{d}{dt}\right)^{n} I^{n-\alpha;t^{\rho}}_{a+} f(t) \quad = {}^{\rho}D^{\alpha}_{a+}f(t), \tag{2.16}$$
la dérivée fractionnaire de Katugampola .

5. Pour $\psi(t) = t$ et en prenant la limite $\beta \to 0$ des deux côtés de Eq. (2.11), on obtient
$$ {}^{H}D^{\alpha,0;x}_{a+}f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^{n} I^{n-\alpha;x}_{a+} f(t) \quad = {}^{RL}D^{\alpha}_{a+}f(t), \tag{2.17}$$
la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville.

6. Pour $\psi(t) = \ln t$ et en prenant la limite $\beta \to 0$ des deux côtés de Eq. (2.11), on obtient
$$ {}^{H}D^{\alpha,0;\ln t}_{a+}f(t) = \left(t\frac{d}{dt}\right)^{n} I^{n-\alpha;\ln t}_{a+} f(t) \quad = {}^{H}D^{\alpha}_{a+}f(t), \tag{2.18}$$
la dérivée fractionnaire de Hadamard.

7. Pour $\psi(t) = \ln t$ et en prenant la limite $\beta \to 1$ des deux côtés de Eq. (2.11), on obtient
$$\begin{aligned} {}^{H}D^{\alpha,1;\ln t}_{a+}f(t) &= I^{n-\alpha;\ln t}_{a+}\left(t\frac{d}{dt}\right)^{n} f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{n-\alpha-1}\left(s\frac{d}{ds}\right)^{n} f(s)\frac{ds}{s} \\ &= {}^{CH}D^{\alpha}_{a+}f(t), \end{aligned} \tag{2.19}$$
la dérivée fractionnaire de Caputo-Hadamard.

8. Considérons le $\psi(t) = t^\rho$ et en prenant la limite $\beta \to 1$ des deux côtés de Eq. (2.11), on obtient

$$\begin{aligned} \rho^{\alpha H} D_{a+}^{\alpha,1:t^\rho} f(t) &= \rho^\alpha I_{a+}^{n-\alpha:t^\rho} \left(\frac{1}{\rho t^{\rho-1}} \frac{d}{dt}\right)^n f(t) \\ &= \frac{\rho^{\alpha-n+1}}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t^\rho - s^\rho)^{n-\alpha-1} \left(\frac{1}{s^{\rho-1}} \frac{d}{ds}\right)^n s^{\rho-1} f(s) ds \\ &= {}^{CK} D_{a+}^{\alpha,\rho} f(t), \end{aligned} \tag{2.20}$$

la dérivée fractionnaire de Caputo-Katugampola (de type Caputo).

9. Considérons le $\psi(t) = \ln t$, par (2.11) et (2.8), on a

$$^H D_{a+}^{\alpha,\beta;\ln t} f(t) = I_{a+}^{\gamma-\alpha}\ {}^H D_{a+}^{\gamma} f(t) \quad = {}^H D_{a+}^{\alpha,\beta} f(t) \tag{2.21}$$

la dérivée fractionnaire de Hilfer-Hadamard.

10. Considérons le $\psi(t) = t^\rho$, par (2.11) et (2.9), on a

$$^H D_{a+}^{\alpha,\beta;t^\rho} f(t) = {}^\rho I_{a+}^{\gamma-\alpha}\ {}^\rho D_{a+}^{\gamma} f(t) \quad = {}^\rho D_{a+}^{\alpha,\beta} f(t) \tag{2.22}$$

la dérivée fractionnaire de Hilfer–Katugampola.

11. Pour $\psi(t) = t, a = 0$ et en prenant la limite $\beta \to 0$ de part et d'autre de Eq. (2.11), on obtient

$$^H D_{0+}^{\alpha,0;\psi} f(t) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n I_{0+}^{n-\alpha;\psi} f(t) \quad = {}^R D_{a+}^{\alpha} f(t), \tag{2.23}$$

la dérivée fractionnaire de Riemann.

12. Pour $\psi(t) = t$, $a = c$ et en prenant la limite $\beta \to 0$ de part et d'autre de Eq. (2.11), on obtient

$$\begin{aligned} ^H D_{c+}^{\alpha,0;\psi} f(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n I_{c+}^{n-\alpha;\psi} f(t) \\ &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_c^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds \\ &= D_c^\alpha f(t), \end{aligned} \tag{2.24}$$

la dérivée fractionnaire de Chen.

13. Considérons les $\psi(t) = t$, $a = 0$, $g(t) = f(t) - f(0)$ et en prenant la limite $\beta \to 0$ des deux côtés de Eq. (2.11), on a

$$\begin{aligned} ^H D_{0+}^{\alpha,0;\psi} g(t) &= {}^H \mathbb{D}_{0+}^{\alpha,0;\psi} (f(t) - f(0)) \\ &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n I_0^{n-\alpha;\psi} (f(t) - f(0)) \\ &= D_t^\alpha f(t), \end{aligned} \tag{2.25}$$

la dérivée fractionnaire de Jumarie.

Lemme 2.6. [8]

Soit $\beta \in \mathbb{R}$ et considérer la fonction $f(t) = (\psi(t) - \psi(a))^{\beta-1}$, $\beta > n$. Alors pour $n - 1 <$

$\alpha < n$ et $0 \leq \beta \leq 1$, on a :

$$ {}^{H}D_{a^+}^{\alpha,\beta,\psi} f(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (\psi(t) - \psi(a))^{\beta-\alpha-1}. \tag{2.26} $$

Démonstration. Par la définition 2.2.2

$$ {}^{H}D_{a^+}^{\alpha,\beta,\psi} f(t) = I_{a^+}^{\gamma-\alpha,\psi} \left(\frac{1}{\psi'(t)} \frac{d}{dt} \right)^n I_{a^+}^{n-\gamma,\psi} f(t). $$

D'après le Lemme 2.2.1, et le Lemme 2.1, on a :

$$ \begin{aligned} {}^{H}D_{a^+}^{\alpha,\beta,\psi} f(t) &= I_{a^+}^{\gamma-\alpha,\psi} {}^{RL}D_{a^+}^{\gamma,\psi} f(t) \\ &= I_{a^+}^{\gamma-\alpha,\psi} {}^{RL}D_{a^+}^{\gamma,\psi} (\psi(t) - \psi(a))^{\beta-1} \\ &= I_{a^+}^{\gamma-\alpha,\psi} \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\gamma)} (\psi(t) - \psi(a))^{\beta-\gamma-1} \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\gamma)} I_{a^+}^{\gamma-\alpha,\psi} (\psi(t) - \psi(a))^{\beta-\gamma-1} \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (\psi(t) - \psi(a))^{\beta-\alpha-1}. \end{aligned} $$

□

Lemme 2.7. [8]

Soient $\lambda > 0$, $n-1 < \alpha < n$ et $0 \leq \beta \leq 1$. Considérez la fonction $f(t) = \mathbb{E}_\alpha(\lambda(\psi(t) - \psi(a))^\alpha)$. Alors

$$ {}^{H}D_{a^+}^{\alpha,\beta,\psi} f(t) = \lambda f(t). $$

Démonstration. D'après la fonction de Mittage-Liffler

$$ f(t) = E_\lambda(\lambda(\psi(t) - \psi(a))^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k (\psi(t) - \psi(a))^{\alpha k+1}}{\Gamma(k\alpha+1)}. $$

On utilise le Lemme 2.2.2, on obtient :

$$ \begin{aligned} {}^{H}D_{a^+}^{\alpha,\beta,\psi} f(t) &= {}^{H}D_{a^+}^{\alpha,\beta,\psi} \Big(E_\alpha(\lambda(\psi(t) - \psi(a))^\alpha) \Big) \\ &= {}^{H}D_{a^+}^{\alpha,\beta,\psi} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k (\psi(t) - \psi(a))^{\alpha k}}{\Gamma(k\alpha+1)} \right) \\ &= {}^{H}D_{a^+}^{\alpha,\beta,\psi} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k (\psi(t) - \psi(a))^{\alpha k}}{\Gamma(k\alpha+1)} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(k\alpha+1)} {}^{H}D_{a^+}^{\alpha,\beta,\psi} (\psi(t) - \psi(a))^{k\alpha+1-1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(k\alpha+1)} \frac{\Gamma(k\alpha+1)}{\Gamma(k\alpha+1-\alpha)} (\psi(t) - \psi(a))^{\alpha k-\alpha} \\ &= \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{\Gamma(\alpha(k-1)+1)} (\psi(t) - \psi(a))^{\alpha(k-1)}. \end{aligned} $$

Remplacer $k-1$ par p, on obtient :

$$^{H}D_{a^+}^{\alpha,\beta,\psi}f(t)=\lambda\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\lambda^{p}(\psi(t)-\psi(a))^{\alpha p}}{\Gamma(p\alpha+1)}.$$

Alors

$$^{H}D_{a^+}^{\alpha,\beta,\psi}f(t)=\lambda f(t).$$

□

Lemme 2.8. [2]

Soit $\gamma=\alpha+\beta(1-\alpha)$, avec $0<\alpha<1, 0\leq\beta\leq 1$ et $f\in C_{1-\gamma;\psi}^{\gamma}([a,b],\mathbb{R})$, alors

$$I_{a^+}^{\gamma;\psi}D_{a^+}^{\gamma;\psi}f(t)=I_{a^+}^{\alpha;\psi}D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi}f(t),$$

et

$$D_{a^+}^{\gamma;\psi}I_{a^+}^{\alpha;\psi}f(t)=D_{a^+}^{\beta(1-\alpha);\psi}f(t).$$

Démonstration. En utilisant le Lemme 2.1 et la définition 2.2.2, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
I_{a^+}^{\gamma;\psi}D_{a^+}^{\gamma;\psi}f(t) &= I_{a^+}^{\gamma;\psi}\left(I_{a^+}^{\beta(1-\alpha);\psi}D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi}f(t)\right)\\
&= I_{a^+}^{\alpha+\beta(1-\alpha);\psi}I_{a^+}^{-\beta(1-\alpha);\psi}D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi}f(t)\\
&= I_{a^+}^{\alpha;\psi}D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi}f(t).
\end{aligned}$$

En utilisant le Lemme 2.1 et la définition 2.2.2, nous obtenons

$$\begin{aligned}
D_{a^+}^{\gamma;\psi}I_{a^+}^{\alpha;\psi}f(t) &= D^{1,\psi}I_{a^+}^{1-\gamma;\psi}I_{a^+}^{\alpha;\psi}f(t)\\
&= D^{1,\psi}I_{a^+}^{1-\beta(1-\alpha);\psi}f(t)\\
&= D^{\beta(1-\alpha);\psi}f(t).
\end{aligned}$$

□

Lemme 2.9

Soit $\alpha>0$, $\beta\in 0,1$, et $0\leqslant\gamma\leqslant 1$ avec $\gamma=\alpha+\beta(1-\alpha)$ et $f\in C_{1-\gamma,\psi}([a,b],\mathbb{R})$, alors :

$$D_{a^+}^{\alpha,\psi}I_{a^+}^{\alpha,\psi}f(t)=f(t).$$

Démonstration. Par definition 2.2.1 et Lemme 2.1, ona :

$$\begin{aligned} D_{a^+}^{\alpha,\psi} I_{a^+}^{\alpha,\psi} f(t) &= D_{a^+}^{1,\psi} I_{a^+}^{1-\alpha,\psi} I_{a^+}^{\alpha,\psi} f(t) \\ &= D_{a^+}^{1,\psi} I_{a^+}^{1,\psi} f(t) \\ &= \left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)\left(\frac{1}{\Gamma(1)}\int_a^t \psi'(t) f(t) dt\right) \\ &= \frac{1}{\psi'(t)}\left(\frac{d}{dt}\frac{1}{\Gamma(1)}\int_a^t \psi'(t) f(t) dt\right) \\ &= \frac{1}{\psi'(t)}\psi'(t) f(t) \\ &= f(t). \end{aligned}$$

□

Lemme 2.10

Soit $t > a, \alpha > 0, 0 \leq \beta \leq 1$, avec pour $0 < \gamma < 1, \gamma = \beta(1-\alpha)+\alpha$, on a :

$$({}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta,\psi}(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-1})(t) = 0.$$

Démonstration. On a par définition 2.2.2 et 2.1,

$$\begin{aligned} &I_{a^+}^{(1-\beta)(1-\alpha),\psi}(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-1} \\ &= \frac{1}{\Gamma(X)}\int_a^t \psi'(s)(\psi(t)-\psi(a))^{X-1})(\psi(s)-\psi(a))^{\gamma-1})ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(X)}\int_a^t \psi'(s)(\psi(s)-\psi(a))^{\gamma-1}[\psi(t)-\psi(s)+\psi(a)-\psi(a)]^{x-1}ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(X)}\int_a^t \psi'(s)(\psi(s)-\psi(a))^{\gamma-1}[(\psi(t)-\psi(a))^{X-1}[(\psi(s)-\psi(a))^{X-1}]ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(X)}\int_a^t \psi'(s)(\psi(s)-\psi(a))^{\gamma-1}(\psi(t)-\psi(a))^{X-1}\left(1-\left(\frac{\psi(s)-\psi(a)}{\psi(t)-\psi(a)}\right)^{X-1}\right)ds \\ &= \frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma+X-2})}{\Gamma(X)}\int_a^t \psi'(s)\left(\frac{\psi(s)-\psi(a)}{\psi(t)-\psi(a)}\right)^{\gamma-1}\left(1-\left(\frac{\psi(s)-\psi(a)}{\psi(t)-\psi(a)}\right)^{X-1}\right)ds \\ &= \frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma+X-1})}{\Gamma(X)}\int_a^t \frac{\psi'(s)}{\psi(t)-\psi(a)}\left(\frac{\psi(s)-\psi(a)}{\psi(t)-\psi(a)}\right)^{\gamma-1}\left(1-\left(\frac{\psi(s)-\psi(a)}{\psi(t)-\psi(a)}\right)^{X-1}\right)ds. \end{aligned}$$

Où $X = (1-\beta)(1-\alpha)$.

On prend $\mu = \dfrac{\psi(s)-\psi(a)}{\psi(t)-\psi(a)}$, et $d\mu = \dfrac{\psi'(s)}{\psi(t)-\psi(a)}ds$. Alors,

$$I_{a^+}^{(1-\beta)(1-\alpha),\psi}(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-1} = \frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma+X-1}}{\Gamma(X)}\int_0^1 \mu^{\gamma-1}(1-\mu)^{X-1}d\mu.$$

D'après la fonction Bêta

$$I_{a^+}^{(1-\beta)(1-\alpha),\psi}(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-1} = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(X+\gamma)}(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma+X-1}.$$

Ou

$$\Gamma(X+\gamma)=\Gamma(1)=1.$$

Donc

$$I_{a^+}^{(1-\beta)(1-\alpha),\psi}(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-1}=\Gamma(\gamma)$$

Alors :

$$\left(\frac{1}{\psi'(s)}\frac{d}{dt}\right)I_{a^+}^{(1-\beta)(1-\alpha),\psi}(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-1}=0.$$

□

Théorème 2.1. [8]

Si $f\in C^n([a,b],\mathbb{R})$, $n-1<\alpha<n$ et $0\leq\beta\leq 1$, alors :

$$I_{a^+}^{\alpha,\psi\,H}D_{a^+}^{\alpha,\beta,\psi}f(t)=f(t)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-k}}{\Gamma(\gamma-k+1)}\left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^{n-k}I_{a^+}^{(1-\beta)(n-\alpha),\psi}f(a).\quad(2.27)$$

Démonstration. En utilisant le Lemme 2.1 et la définition de la dérivée fractionnaire ψ-Hilffer on obtient :

$$\begin{aligned}I_{a^+}^{\alpha,\psi\,H}D_{a^+}^{\alpha,\beta,\psi}f(t)&=I_{a^+}^{\alpha,\psi}(I_{a^+}^{(\gamma-\alpha)\,RL}D_{a^+}^{\gamma,\psi}f(t))\\&=I_{a^+}^{\alpha,\psi\,RL}D_{a^+}^{\gamma,\psi}f(t))\\&=\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_a^t(\psi(t)-\psi(s))^{\gamma-1}\psi'(s)^{RL}D_{a^+}^{\gamma,\psi}f(s)ds.\end{aligned}$$

D'après la définition de ${}^{RL}D_{a^+}^{\gamma,\psi}$, on a :

$$I_{a^+}^{\alpha,\psi\,H}D_{a^+}^{\alpha,\beta,\psi}=\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_a^t(\psi(t)-\psi(s))^{\gamma-1}\psi'(s)\left(\frac{1}{\psi'(s)}\frac{d}{ds}\right)^n(I_{a^+}^{n-\gamma,\psi}f)(s)ds.$$

En utilisant la formule d'intégration par partie

$$(\psi(t)-\psi(s))^{\gamma-1}\psi'(s)\left(\frac{1}{\psi'(s)}\frac{d}{ds}\right)^n(I_{a^+}^{n-\gamma,\psi}f)(s)=v(s)\times\frac{d}{ds}u(s).$$

Où

$$\begin{cases}v(s)=(\psi(t)-\psi(s))^{\gamma-1},\\ \dfrac{d}{ds}u(s)=\left(\dfrac{1}{\psi'(s)}\dfrac{d}{ds}\right)^n(I_{a^+}^{n-\gamma,\psi}f)(s).\end{cases}$$

et

$$\begin{cases}\dfrac{d}{ds}v(s)=-(\gamma-1)\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\gamma-2},\\ u(s)=\left(\dfrac{1}{\psi'(s)}\dfrac{d}{ds}\right)^{n-1}I_{a^+}^{n-\gamma,\psi}f)(s).\end{cases}$$

et la formule d'intégration par parties, indique

$$\begin{aligned}I_{a^+}^{\alpha,\psi\,H}D_{a^+}^{\alpha,\beta,\psi}f(t)&=\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\left[(\psi(t)-\psi(s))^{\gamma-1})\left(\frac{1}{\psi'(s)}\frac{d}{ds}\right)^{n-1}(I_{a^+}^{n-\gamma,\psi}f)(s)\right]_a^t\\&\quad+\frac{\gamma-1}{\Gamma(\gamma)}\int_a^t\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\gamma-2}\left(\frac{1}{\psi'(s)}\frac{d}{ds}\right)^{n-1}(I_{a^+}^{n-\gamma,\psi}f)(s)\\&=-\frac{1}{\Gamma(\gamma)}(\psi(t)-\psi(s))^{\gamma-1})\left(\frac{1}{\psi'(s)}\frac{d}{ds}\right)^{n-1}(I_{a^+}^{n-\gamma,\psi}f)(a)\\&\quad+\frac{1}{\Gamma(\gamma-1)}\int_a^t(\psi(t)-\psi(s))^{\gamma-2}\left(\frac{1}{\psi'(s)}\frac{d}{ds}\right)^{n-1}(I_{a^+}^{n-\gamma,\psi}f)(s).\end{aligned}$$

En répétant le processus d'intégration par parties a la $n-1$ ième étapes, on obtient :

$$\begin{aligned}
I_{a+}^{\alpha,\psi\,H}D_{a+}^{\alpha,\beta,\psi}f(t) &= -\frac{1}{\Gamma(\gamma)}(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-1}\left(\frac{1}{\psi'(s)}\frac{d}{ds}\right)^{n-1}(I_{a+}^{n-\gamma,\psi}f)(a) \\
&\quad -\frac{1}{\Gamma(\gamma-1)}(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-2}\left(\frac{1}{\psi'(s)}\frac{d}{ds}\right)^{n-2}(I_{a+}^{n-\gamma,\psi}f)(a) \\
&\quad +\frac{1}{\Gamma(\gamma-2)}(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-3}\left(\frac{1}{\psi'(s)}\frac{d}{ds}\right)^{n-3}(I_{a+}^{n-\gamma,\psi}f)(s)ds \\
&= \\
&\vdots \\
&= -\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\Gamma(\gamma-k+1)}(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-k}(\frac{1}{\psi'(s)}\frac{d}{ds}\Big)^{n-k}(I_{a+}^{n-\gamma}f)(a) \\
&\quad +\frac{1}{\Gamma(\gamma-n)}\int_a^t(\psi(t)-\psi(t))^{\gamma-n-1}(I_{a+}^{n-\gamma,\psi})f(s)ds \\
&= -\sum_{k=1}^{n}\frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-k}}{\Gamma(\gamma-k+1)}\left(\frac{1}{\psi'(s)}\frac{d}{ds}\right)^{n-k}I_{a+}^{n-\gamma,\psi}f(a)+I_{a+}^{n-\gamma,\psi}I_{a+}^{\gamma-n,\psi}f(s)ds.
\end{aligned}$$

En suite,

$$I_{a+}^{\alpha,\psi\,H}D_{a+}^{\alpha,\beta,\psi}f(t)=f(t)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-k}}{\Gamma(\gamma-k+1)}\left(\frac{1}{\psi'(s)}\frac{d}{ds}\right)^{n-k}I_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha),\psi}f(a).$$

□

Théorème 2.2. [8]

Soit $f\in C^1([a,b],\mathbb{R})$, $\alpha>0$ et $0\le\beta\le1$, alors

$$^{H}D_{a+}^{\alpha,\beta,\psi}I_{a+}^{\alpha,\psi}f(t)=f(t). \tag{2.28}$$

Démonstration. En effet, on a :

$$\begin{aligned}
^{H}D_{a+}^{\alpha,\beta,\psi}I_{a+}^{\alpha,\psi}f(t) &= I_{a+}^{\gamma-\alpha,\psi}\left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^{n}I_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha),\psi}I_{a+}^{\alpha,\psi}f(t) \\
&= I_{a+}^{\gamma-\alpha,\psi}\left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^{n}I_{a+}^{(n-(\beta n-\beta\alpha+\alpha-\alpha)),\psi}f(t) \\
&= I_{a+}^{\gamma-\alpha,\psi}\left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^{n}I_{a+}^{(n-\beta n+\beta\alpha),\psi}f(t) \\
&= I_{a+}^{\gamma-\alpha,\psi}\left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^{n}I_{a+}^{(n-(\gamma-\alpha)),\psi}f(t) \\
&= I_{a+}^{\gamma-\alpha,\psi\,RL}D_{a+}^{\gamma-\alpha,\psi}f(t).
\end{aligned}$$

En utilisant le theorem 2.2.2 et le lemme 2.1, on obtient :

$$^{H}D_{a+}^{\alpha,\beta,\psi}I_{a+}^{\alpha,\psi}f(t)=f(t).$$

□

CHAPITRE 3

Résultats d'existence et de stabilité d'un système couplé impliquant un opérateur fractionnaire ψ-Hilfer

L'objectif de cet chapitre est d'étudier l'existence, l'unicité ainsi que les stabilités Hyers–Ulam et Hyers–Ulam–Rassias des solutions du système proposé impliquant une dérivée fractionnaire ψ-Hilfer de la forme :

$$\begin{cases} {}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta,\psi} u(t) = f(t, u(t), {}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta,\psi} v(t)), & t \in \mathcal{J} = (a, b], 0 < \alpha < 1, 0 < \beta \leqslant 1, \\ {}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta,\psi} v(t) = g(t, {}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta,\psi} u(t), v(t)), & \gamma = \alpha + \beta - \alpha\beta, \\ I_{a^+}^{1-\gamma,\psi} u(t)|_{t=a} = u_a, \quad I_{a^+}^{1-\gamma,\psi} v(t)|_{t=a} = v_a. \end{cases} \tag{3.1}$$

On notée $\mathcal{X} = C(\mathcal{J}, \mathbb{R})$, ou $f, g : \mathcal{J} \times \mathcal{X} \times \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ sont des fonctions continues et non linaires sur un espace de Banach $\mathcal{X}$. La fonction linaire $\psi : \mathcal{J} \longrightarrow \mathbb{R}$ satis fies $\psi'(t) \neq 0 \quad \forall t \in \mathcal{J}$.

Nous définissons l'espace pondéré, noté $\mathcal{X}_{1-\gamma;\psi}$ de toutes les fonctions continues sur $\mathcal{J}$ comme

$$\mathcal{X}_{1-\gamma;\psi} = \left\{ x : \mathcal{J} \to \mathbb{R} | {}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi}(x) \in \mathcal{X} \right\}, \qquad 0 \leq \gamma < 1$$

Équipé de norme

$$\| x \|_{1-\gamma;\psi} = \| x(t)(\psi(t) - \psi(a))^{1-\gamma} \| = \max \left| x(t)(\psi(t) - \psi(a))^{1-\gamma} \right|, \qquad 0 \leq \gamma < 1,$$

Évidemment $\mathcal{X}_{1-\gamma;\psi}$ est un espace de Banach sous la norme donnée, et donc le produit $\mathcal{X}_{1-\gamma;\psi} \times \mathcal{X}_{1-\gamma;\psi}$ est aussi un espace de Banach sous la norme :

$$\| (x, y) \|_{1-\gamma;\psi} = \| x \|_{1-\gamma;\psi} + \| y \|_{1-\gamma;\psi} .$$

3.0.1 Résultats d'existence et d'unicité

Pour obtenir nos principaux résultats, nous considérons les hypothèses suivantes :

(H1) Les fonctions $f, g : \mathcal{J} \times \mathcal{X} \times \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ tell que pour tout $(u, v), (\bar{u}, \bar{v}) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ et $t \in \mathcal{J}$ et il existe $\mathcal{L}_f, \mathcal{L}_g, \mathcal{L}'_f, \mathcal{L}'_g > 0$ tell que :

$$|f(t, u(t), v(t)) - f(t, \bar{u}(t), \bar{v}(t))| \leq \mathcal{L}_f |u(t) - \bar{u}(t)| + \mathcal{L}'_f |v(t) - \bar{v}(t)|,$$
$$|g(t, u(t), v(t)) - g(t, \bar{u}(t), \bar{v}(t))| \leq \mathcal{L}_g |u(t) - \bar{u}(t)| + \mathcal{L}'_g |v(t) - \bar{v}(t)|.$$

(H2) Les fonctions $f, g : \mathcal{J} \times \mathcal{X} \times \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ complètement continus tels que $\forall u, v \in \mathcal{X}$ et $t \in \mathcal{J}$, il existe des fonctions linaire continues non décroissantes $\mu_f, \mu_g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ satisfaisant :

$$|f(t, u(t), v(t))| \leq \mu_f(t)|u(t)| + \mu'_f(t)|v(t)|,$$
$$|g(t, u(t), v(t))| \leq \mu_g(t)|u(t)| + \mu'_g|v(t)|.$$

(H3) Soit $\max\limits_{t \in \mathcal{J}} \{\eta_1, \eta_2\} = \eta < 1$, où

$$\eta_1 = \frac{\mathcal{L}_f(1 + \mathcal{L}_g)\Big(\psi(b) - \psi(a)\Big)^{\alpha}}{(1 - \mathcal{L}'_f \mathcal{L}_g)\Gamma(\alpha + 1)}.$$

et

$$\eta_2 = \frac{\mathcal{L}'_g(1 + \mathcal{L}'_f)\Big(\psi(b) - \psi(a)\Big)^{\alpha}}{(1 - \mathcal{L}'_f \mathcal{L}_g)\Gamma(\alpha + 1)}.$$

Théorème 3.1. [3]

Si $(u,v) \in \mathcal{X}_{1-\gamma;\psi} \times \mathcal{X}_{1-\gamma;\psi}$ satisfies :

$$\begin{cases} {}^{H}D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi} u(t) = y_1(t), & 0<\alpha<1, 0<\beta\leq 1, \\ {}^{H}D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi} v(t) = y_2(t), & \gamma = \alpha+\beta-\alpha\beta, \\ I_{a^+}^{1-\gamma} u(t) = u_a, \quad I_{a^+}^{1-\gamma} v(t) = v_a. \end{cases} \tag{3.2}$$

Alors :

$$\begin{cases} u(t) = \dfrac{(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-1} u_a}{\Gamma(\gamma)} + \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_a^t \psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha-1} y_1(s)ds, \\ v(t) = \dfrac{(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-1} v_a}{\Gamma(\gamma)} + \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_a^t \psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha-1} y_2(s)ds. \end{cases} \tag{3.3}$$

Démonstration. Soit

$$\begin{cases} {}^{H}D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi} u(t) = y_1(t), \quad 0<\alpha<1, 0<\beta\leq 1, t\in\mathcal{J} \\ I_{a^+}^{1-\gamma} u(a) = u_a. \end{cases}$$

Depuis

$${}^{H}D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi} u(t) = y_1(t), \qquad 0<\alpha<1, 0<\beta\leq 1, t\in\mathcal{J}. \tag{3.4}$$

En appliquant l'intégrale $I_{a^+}^{\alpha;\psi}$ des deux cote et en utilisant le théorème 2.2.2 nous avons :

$$I_{a^+}^{\alpha;\psi}\, {}^{H}D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi} u(t) = I_{a^+}^{\alpha;\psi} y_1(t).$$

Alors

$$u(t) - \frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} I_{a^+}^{(1-\beta)(1-\alpha),\psi} u(a) = I_{a^+}^{\alpha,\psi} y_1(t).$$

Par suit

$$u(t) = \frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} I_{a^+}^{(1-\beta)(1-\alpha),\psi} u(a) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha-1} y_1(s)ds.$$

Puisque

$$1-\gamma = (1-\beta)(1-\alpha),$$

alors :

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} I_{a^+}^{1-\gamma,\psi} u(a) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha-1} y_1(s)ds \\ &= \frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} u_a + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha-1} y_1(s)ds. \end{aligned}$$

Donc

$$u(t) = \frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} u_a + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha-1} y_1(s)ds. \tag{3.5}$$

De la même manière :

$$v(t) = \frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} v_a + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha-1} y_2(s)ds. \tag{3.6}$$

□

Maintenant, considérons une boule fermée :

$$\mathcal{B}_r = \left\{(u,v) \in \mathcal{X}_{1-\gamma,\psi} \times \mathcal{X}_{1-\gamma,\psi} : \parallel (u,v) \parallel_{1-\gamma,\psi} \leq r, \parallel u \parallel_{1-\gamma,\psi} \leq \frac{r}{2}, \parallel v \parallel_{1-\gamma,\psi} \leq \frac{r}{2}\right\},$$

avec

$$\frac{|u_a| + |v_a|}{\Gamma(\gamma)\,[1-\mathcal{Q}]} \leq r,$$

et

$$\mathcal{Q} = \frac{\mu_f(1+\mu_g) + \mu_g'(1+\mu_f')}{2(1-\mu_f'\mu_g)\Gamma(\alpha+1)}(\psi(b)-\psi(a))^{\alpha}.$$

Nous transformons le système (3.1) en problème de point fixe. Définir un opérateur $N = (N_1, N_2) \in \mathcal{B}_r$,avec :

$$\begin{cases} N_1(u(t),v(t)) &= \dfrac{(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}u_a \\ & + \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_a^t \psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha-1} f(s, u(s), {}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi} v(s))ds, \\ N_2(v(t),u(t)) &= \dfrac{(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}v_a \\ & + \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_a^t \psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha-1} g(s, {}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi} u(s), v(s))ds. \end{cases} \tag{3.7}$$

Théorème 3.2. [3]

Les hypothèses (H1) à (H3) sont valables. Alors (3.1) admet au moins une solution.

Démonstration. La preuve se décompose en plusieurs étapes.

Étape 1. montre que $N(\mathcal{B}_r) \subset \mathcal{B}_r$.

Pour tout $(u,v) \in \mathcal{B}_r$ on a :

$$\parallel N(u,v) \parallel_{1-\gamma;\psi} = \parallel N_1(u,v) \parallel_{1-\gamma;\psi} + \parallel N_2(u,v) \parallel_{1-\gamma;\psi}. \tag{3.8}$$

D'après (3.7), on a :

$$\begin{aligned} &|N_1(u(t),v(t))| \\ &= \left|\frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}u_a + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha-1} f(s,u(s),{}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta,\psi} v(s))ds\right| \\ &\leq \frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}\left|u_a\right| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha-1}\left|f(s,u(s),{}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta,\psi} v(s))\right|ds. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Soit

$$\left|f(s,u(s),{}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi} v(s))\right| \leq \mu_f(s)\left|u(s)\right| + \mu_f'(s)|{}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi} v(s)|. \tag{3.10}$$

et

$$\left|{}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi} v(s)\right| = \left|g(t, {}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi} u(s), v(s))\right| \leq \mu_g(s)\left|{}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi} u(s)\right| + \mu_g'(s)\left|v(s)\right|. \tag{3.11}$$

et

$$\left|{}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi} u(s)\right| = \left|f(t, u(s), {}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi} v(s))\right| \leq \mu_f(s)\left|u(s)\right| + \mu_f'(s)\left|{}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi} v(s)\right|. \tag{3.12}$$

De (3.11) et (3.12), on obtient :

$$\begin{aligned} \left|{}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi} v(s)\right| &\le \mu_g(s)\left|{}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi} u(s)\right| + \mu'_g(s)\left|v(s)\right| \\ &\le \mu_g(s)\left[\mu_f(s)|u(s)| + \mu'_f(s)|{}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi} v(s)|\right] + \mu'_g(s)|v(s)| \\ &= \mu_g(s)\mu_f(s)\left|u(s)\right| + \mu_g(s)\mu'_f(s)\left|{}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi} v(s)\right| + \mu'_g(s)\left|v(s)\right|. \end{aligned}$$

Alors

$$(1-\mu_g(s)\mu'_f(s))\left|{}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi} v(s)\right| \le \mu_g(s)\mu_f(s)\left|u(s)\right| + \mu'_g(s)\left|v(s)\right|.$$

D'où

$$\left|{}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi} v(s)\right| \le \frac{\mu_g(s)\mu_f(s)\left|u(s)\right| + \mu'_g(s)\left|v(s)\right|}{1-\mu_g(s)\mu'_f(s)}. \tag{3.13}$$

Remplacer (3.13) dans (3.10), on a :

$$\begin{aligned} &\left|f(s,u(s),{}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi} v(s))\right| \\ &\le \mu_f(s)\left|u(s)\right| + \mu'_f(s)\left[\frac{\mu_g(s)\mu_f(s)\left|u(s)\right| + \mu'_g(s)\left|v(s)\right|}{1-\mu_g(s)\mu'_f(s)}\right] \\ &= \frac{\mu_f(s)\left|u(s)\right|(1-\mu_g(s)\mu'_f(s)) + \mu'_f(s)\mu_g(s)\mu_f(s)\left|u(s)\right| + \mu'_f(s)\mu'_g(s)\left|v(s)\right|}{1-\mu_g(s)\mu'_f(s)}. \end{aligned}$$

Donc

$$\left|f(s,u(s),{}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi} v(s))\right| \le \frac{\mu_f(s)\left|u(s)\right| + \mu'_f(s)\mu'_g(s)\left|v(s)\right|}{1-\mu_g(s)\mu_f(s)}. \tag{3.14}$$

Remplacer (3.14) dans (3.9), on obtient :

$$\begin{aligned} \left|N_1(u(t),v(t))\right| &= \frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}\left|u_a\right| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha-1}\times \\ &\quad \frac{\mu_f(s)\left|u(s)\right| + \mu'_f(s)\mu'_g(s)\left|v(s)\right|}{1-\mu_g(s)\mu_f(s)}ds \\ &\le \frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}\left|u_a\right| + \frac{\mu_f\left|u(s)\right| + \mu'_f\mu'_g\left|v(s)\right|}{1-\mu_g\mu_f}\times \\ &\quad \int_a^t \psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha-1}(1)ds \\ &\le \frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}\left|u_a\right| + \frac{\mu_f\left|u(s)\right| + \mu'_f\mu'_g\left|v(s)\right|}{(1-\mu_g\mu_f)\Gamma(\alpha+1)}(\psi(t)-\psi(a))^{\alpha}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \parallel N_1(u(t),v(t)) \parallel &\le \frac{\left|u_a\right|}{\Gamma(\gamma)} + \frac{\mu_f \parallel u(s) \parallel + \mu'_f\mu'_g \parallel v(s) \parallel}{(2-\mu_g\mu_f)\Gamma(\alpha+1)}(\psi(t)-\psi(a))^{\alpha} \\ &\le \frac{\left|u_a\right|}{\Gamma(\gamma)} + \frac{(\mu_f+\mu'_f\mu'_g)r}{2(1-\mu_g\mu_f(s))\Gamma(\alpha+1)}(\psi(b)-\psi(a))^{\alpha}. \end{aligned}$$

Donc

$$\parallel N_1(u(t),v(t)) \parallel \le \frac{\left|u_a\right|}{\Gamma(\gamma)} + \frac{(\mu_f+\mu'_f\mu'_g)r}{2(1-\mu_g\mu_f(s))\Gamma(\alpha+1)}(\psi(b)-\psi(a))^{\alpha}. \tag{3.15}$$

De même manière on a :

$$\| N_2(u(t),v(t)) \| \leq \frac{\left|v_a\right|}{\Gamma(\gamma)} + \frac{(\mu'_g + \mu_f\mu_g)r}{2(1-\mu_g\mu_f(s))\Gamma(\alpha+1)}(\psi(b)-\psi(a))^{\alpha}. \tag{3.16}$$

Les inégalités (3.15) et (3.16) associées a (3.8) donnant :

$$\begin{aligned}
\| N(u,v) \|_{1-\gamma;\psi} &= \| N_1(u,v) \|_{1-\gamma,\psi} + \| N_2(u,v) \|_{1-\gamma;\psi} \\
&\leq \frac{\left|u_a\right| + \left|v_a\right|}{\Gamma(\gamma)} + \frac{(\mu_f + \mu'_f\mu'_g + \mu'_g + \mu_f\mu_g)r}{2(1-\mu_g\mu_f(s))\Gamma(\alpha+1)}(\psi(b)-\psi(a))^{\alpha} \\
&\leq \frac{\left|u_a\right| + \left|v_a\right|}{\Gamma(\gamma)} + \mathcal{Q}_r \\
&\leq r.
\end{aligned}$$

Alors

$$\frac{\left|u_a\right| + \left|v_a\right|}{\Gamma(\gamma)} \leq (1-\mathcal{Q})r.$$

Donc

$$\| N(u,v) \|_{1-\gamma;\psi} \leq \frac{\left|u_a\right| + \left|v_a\right|}{\Gamma(\gamma)} \leq r.$$

Ce qui implique $N(\mathcal{B}_r) \subset \mathcal{B}_r$.

Étape 2. Nous devons montrer que l'opérateur N est continu et compact.

Considérons une suite $\theta_n = (u_n, v_n)$ dans $\mathcal{B}_r$ telle que $(u_n, v_n) \longrightarrow (u,v)$ dans $\mathcal{B}_r$. Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned}
\| N(u_n,v_n)(t) - N(u,v)(t) \|_{1-\gamma;\psi} &\leq \| N_1(u_n,v_n)(t) - N_1(u,v)(t) \|_{1-\gamma;\psi} \\
&\quad + \| N_2(u_n,v_n)(t) - N_2(u,v)(t) \|_{1-\gamma;\psi}
\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
\| N(u_n,v_n)(t) - N(u,v)(t) \|_{1-\gamma;\psi} &\leq \frac{(\psi(t)-\psi(a))^{1-\gamma}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \psi'(s)(\psi(t)-\psi(a))^{\alpha-1} \\
&\quad \left| f(s,u_n(s), {}^{H}D^{\alpha,\beta;\psi}v_n(s)) - f(s,u(s), {}^{H}D^{\alpha,\beta;\psi}v(s)) \right| ds \\
&\quad + \frac{(\psi(t)-\psi(a))^{1-\gamma}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \psi'(s)(\psi(t)-\psi(a))^{\alpha-1} \\
&\quad \left| g(s, {}^{H}D^{\alpha,\beta;\psi}u_n(s), v_n(s)) - g(s, {}^{H}D^{\alpha,\beta;\psi}u(s), v(s)) \right| ds.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

D'après :

$$\begin{aligned}
&\left| f(s,u_n(s), {}^{H}D^{\alpha,\beta;\psi}v_n(s)) - f(s,u(s), {}^{H}D^{\alpha,\beta;\psi}v(s)) \right| \\
&\leq \mathcal{L}_f \left| u_n(s) - u(s) \right| + \mathcal{L}'_f \left| D^{\alpha,\beta;\psi}v_n(s) - D^{\alpha,\beta;\psi}v(s) \right|.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
|D^{\alpha,\beta;\psi}v_n(s) - D^{\alpha,\beta;\psi}v(s)| &= |g(s, {}^{H}D^{\alpha,\beta;\psi}u_n(s), v_n(s)) - g(s, {}^{H}D^{\alpha,\beta;\psi}u(s), v(s))| \\
&\leq \mathcal{L}_g |{}^{H}D^{\alpha,\beta;\psi}u_n(s) - {}^{H}D^{\alpha,\beta;\psi}u(s)| + \mathcal{L}'_g |v_n(s) - v(s)|.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Par suit

$$\begin{aligned}|{}^{H}D^{\alpha,\beta;\psi}u_n(s)-{}^{H}D^{\alpha,\beta;\psi}u(s)| &= |f(s,u_n(s),{}^{H}D^{\alpha,\beta;\psi}v_n(s))-f(s,u(s),{}^{H}D^{\alpha,\beta;\psi}v(s))| \\ &\leq \mathcal{L}_f|u_n(s)-u(s)|+\mathcal{L'}_f|{}^{H}D^{\alpha,\beta;\psi}v_n(s)-{}^{H}D^{\alpha,\beta;\psi}v(s)|.\end{aligned} \tag{3.20}$$

Remplacer (3.20) dans (3.19), on obtient :

$$\begin{aligned}&|D^{\alpha,\beta;\psi}v_n(s)-D^{\alpha,\beta;\psi}v(s)| \\ &\leq \mathcal{L}_g\left(\mathcal{L}_f|u_n(s)-u(s)|+\mathcal{L'}_f|{}^{H}D^{\alpha,\beta;\psi}v_n(s)-{}^{H}D^{\alpha,\beta;\psi}v(s)|\right)+\mathcal{L'}_g|v_n(s)-v(s)| \\ &\leq \mathcal{L}_g\mathcal{L}_f|u_n(s)-u(s)|+\mathcal{L}_g\mathcal{L'}_f|{}^{H}D^{\alpha,\beta;\psi}v_n(s)-{}^{H}D^{\alpha,\beta;\psi}v(s)|+\mathcal{L'}_g|v_n(s)-v(s)|.\end{aligned}$$

D'où

$$|D^{\alpha,\beta;\psi}v_n(s)-D^{\alpha,\beta;\psi}v(s)|\leq\frac{\mathcal{L}_g\mathcal{L}_f|u_n(s)-u(s)|+\mathcal{L'}_g|v_n(s)-v(s)|}{(1-\mathcal{L}_g\mathcal{L'}_f)}. \tag{3.21}$$

Remplacer (3.21) dans (3.18), on obtient :

$$\begin{aligned}&|f(s,u_n(s),{}^{H}D^{\alpha,\beta;\psi}v_n(s))-f(s,u(s),{}^{H}D^{\alpha,\beta;\psi}v(s))| \\ &\leq \mathcal{L}_f|u_n(s)-u(s)|+\mathcal{L'}_f\left(\frac{\mathcal{L}_g\mathcal{L}_f|u_n(s)-u(s)|+\mathcal{L'}_g|v_n(s)-v(s)|}{(1-\mathcal{L}_g\mathcal{L'}_f)}\right) \\ &\leq \mathcal{L}_f|u_n(s)-u(s)|+\frac{\mathcal{L'}_f\mathcal{L}_g\mathcal{L}_f|u_n(s)-u(s)|+\mathcal{L'}_f\mathcal{L'}_g|v_n(s)-v(s)|}{(1-\mathcal{L}_g\mathcal{L'}_f)} \\ &\leq \frac{\mathcal{L}_f|u_n(s)-u(s)|+\mathcal{L'}_f\mathcal{L'}_g|v_n(s)-v(s)|}{(1-\mathcal{L}_g\mathcal{L'}_f)}.\end{aligned}$$

Donc

$$|f(s,u_n(s),{}^{H}D^{\alpha,\beta;\psi}v_n(s))-f(s,u(s),{}^{H}D^{\alpha,\beta;\psi}v(s))|\leq\frac{\mathcal{L}_f|u_n(s)-u(s)|+\mathcal{L'}_f\mathcal{L'}_g|v_n(s)-v(s)|}{(1-\mathcal{L}_g\mathcal{L'}_f)}. \tag{3.22}$$

De même manière :

$$\begin{aligned}&|g(s,{}^{H}D^{\alpha,\beta;\psi}u_n(s),v_n(s))-g(s,{}^{H}D^{\alpha,\beta;\psi}u(s),v(s))| \\ &\leq \mathcal{L}_g|{}^{H}D^{\alpha,\beta;\psi}u_n(s)-{}^{H}D^{\alpha,\beta;\psi}u(s)|+\mathcal{L'}_g|v_n(s)-v(s)| \\ &\leq \frac{\mathcal{L}_g\mathcal{L}_f|u_n(s)-u(s)|+\mathcal{L'}_g|v_n(s)-v(s)|}{(1-\mathcal{L}_g\mathcal{L'}_f)}.\end{aligned} \tag{3.23}$$

Remplacer (3.22) et (3.23) dans (3.17) :

$$\begin{aligned}
&\parallel N(u_n,v_n)(t)-N(u,v)(t)\parallel_{1-\gamma;\psi}\\
&\leq \frac{(\psi(t)-\psi(a))^{1-\gamma}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \psi'(s)(\psi(t)-\psi(a))^{\alpha-1}\times\\
&\quad\left|\frac{\mathcal{L}_f|u_n(s)-u(s)|+\mathcal{L}'_g\mathcal{L}'_f|v_n(s)-v(s)|}{(1-\mathcal{L}_g\mathcal{L}'_f)}\right|ds\\
&\quad+\frac{(\psi(t)-\psi(a))^{1-\gamma}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \psi'(s)(\psi(t)-\psi(a))^{\alpha-1}\times\\
&\quad\left|\frac{\mathcal{L}_g\mathcal{L}_f|u_n(s)-u(s)|+\mathcal{L}'_g|v_n(s)-v(s)|}{(1-\mathcal{L}_g\mathcal{L}'_f)}\right|ds\\
&\leq \frac{\mathcal{L}_f\parallel u_n(s)-u(s)\parallel+\mathcal{L}'_f\mathcal{L}'_g\parallel v_n(s)-v(s)\parallel}{(1-\mathcal{L}_g\mathcal{L}'_f)\Gamma(\alpha+1)}(\psi(t)-\psi(a))^{\alpha}\\
&\quad+\frac{\mathcal{L}_g\mathcal{L}_f\parallel u_n(s)-u(s)\parallel+\mathcal{L}'_g\parallel v_n(s)-v(s)\parallel}{(1-\mathcal{L}_g\mathcal{L}'_f)\Gamma(\alpha+1)}(\psi(t)-\psi(a))^{\alpha}\\
&\leq \Bigg[\frac{\mathcal{L}_g\mathcal{L}_f\parallel u_n(s)-u(s)\parallel+\mathcal{L}'_g\parallel v_n(s)-v(s)\parallel}{(1-\mathcal{L}_g\mathcal{L}'_f)\Gamma(\alpha+1)}\\
&\quad+\frac{\mathcal{L}_g\mathcal{L}_f\parallel u_n(s)-u(s)\parallel+\mathcal{L}'_g\parallel v_n(s)-v(s)\parallel}{(1-\mathcal{L}_g\mathcal{L}'_f)\Gamma(\alpha+1)}\Bigg](\psi(b)-\psi(a))^{\alpha}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
&\parallel N(u_n,v_n)(t)-N(u,v)(t)\parallel_{1-\gamma;\psi}\\
&\leq \Bigg[\frac{\mathcal{L}_g\mathcal{L}_f\parallel u_n(s)-u(s)\parallel+\mathcal{L}'_g\parallel v_n(s)-v(s)\parallel}{(1-\mathcal{L}_g\mathcal{L}'_f)\Gamma(\alpha+1)}\\
&\quad+\frac{\mathcal{L}_g\mathcal{L}_f\parallel u_n(s)-u(s)\parallel+\mathcal{L}'_g\parallel v_n(s)-v(s)\parallel}{(1-\mathcal{L}_g\mathcal{L}'_f)\Gamma(\alpha+1)}\Bigg](\psi(b)-\psi(a))^{\alpha}.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Cela implique que

$$\parallel N(u_n,v_n)(t)-N(u,v)(t)\parallel_{1-\gamma;\psi}\to 0 \quad \text{lorsque} \quad n\to 0.$$

Donc N est continue.

Étape 3. La famille $(\mathcal{B}_r)$ est équicontinue.

Soit $v_1, v_2 \in \mathcal{J}$ avec $v_1 < v_2$ et pour tout $(u,v)\in\mathcal{B}_r$, ou $\mathcal{B}_r$ et clairement borné, on obtient :

$$\begin{aligned}
\|N(u,v)(v_1)-N(u,v)(v_2)\|_{1-\gamma;\psi} &\leq \|N_1(u,v)(v_1)-N_1(u,v)(v_2)\|_{1-\gamma;\psi}\\
&\quad+\|N_2(u,v)(v_1)-N_2(u,v)(v_2)\|_{1-\gamma;\psi}.
\end{aligned}$$

On a :

$$
\begin{aligned}
&\Big\|N_1(u,v)(v_1)-N_1(u,v)(v_2)\Big\|\\
&\leq \Big\|\frac{u_a}{\Gamma(\gamma)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{v_1}\psi'(s)\Big(\psi(v_1)-\psi(s)\Big)^{\alpha-1}f\Big(s,u(s),{}^HD_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi}v(s)\Big)ds\\
&\quad-\frac{u_a}{\Gamma(\gamma)}-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{v_2}\psi'(s)\Big(\psi(v_2)-\psi(s)\Big)^{\alpha-1}f\Big(s,u(s),{}^HD_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi}v(s)\Big)ds\Big\|\\
&\leq \Big\|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{v_2}^{v_1}\psi'(s)\Big(\psi(v_1)-\psi(s)\Big)^{\alpha-1}f\Big(s,u(s),{}^HD_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi}v(s)\Big)ds\Big\|\\
&\quad+\Big\|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{v_2}\psi'(s)\Big(\psi(v_1)-\psi(s)\Big)^{\alpha-1}f\Big(s,u(s),{}^HD_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi}v(s)\Big)ds\\
&\quad-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{v_2}\psi'(s)\Big(\psi(v_2)-\psi(s)\Big)^{\alpha-1}f\Big(s,u(s),{}^HD_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi}v(s)\Big)ds\Big\|\\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{v_2}^{v_1}\psi'(s)|\Big(\psi(v_1)-\psi(s)\Big)^{\alpha-1}|\Big\|f\Big(s,u(s),{}^HD_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi}v(s)\Big)\Big\|ds\\
&\quad+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{v_2}\psi'(s)|\Big(\psi(v_1)-\psi(s)\Big)^{\alpha-1}-\Big(\psi(v_2)-\psi(s)\Big)^{\alpha-1}|\Big\|f\Big(s,u(s),{}^HD_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi}v(s)\Big)\Big\|ds\\
&\leq \frac{\Big\|f\Big(s,u(s),{}^HD_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi}v(s)\Big)\Big\|}{\Gamma(\alpha)}\int_{v_2}^{v_1}\psi'(s)|\Big(\psi(v_1)-\psi(s)\Big)^{\alpha-1}|ds\\
&\quad+\frac{\|\ f\Big(s,u(s),{}^HD_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi}v(s)\Big)\ \|}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{v_2}\psi'(s)|\Big(\psi(v_1)-\psi(s)\Big)^{\alpha-1}-\Big(\psi(v_2)-\psi(s)\Big)^{\alpha-1}|ds.
\end{aligned}
$$

D'où

$$
\begin{aligned}
&\|\ N_1(u,v)(v_1)-N_1(u,v)(v_2)\ \|_{1-\gamma;\psi}\\
&\leq \frac{\|\ f\Big(s,u(s),{}^HD_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi}v(s)\Big)\ \|_{1-\gamma;\psi}}{\Gamma(\alpha)}\int_{v_2}^{v_1}\psi'(s)|\Big(\psi(v_1)-\psi(s)\Big)^{\alpha-1}|ds\\
&\quad+\frac{\|\ f\Big(s,u(s),{}^HD_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi}v(s)\Big)\ \|_{1-\gamma;\psi}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{v_2}\psi'(s)|\Big(\psi(v_2)-\psi(s)\Big)^{\alpha-1}-\Big(\psi(v_1)-\psi(s)\Big)^{\alpha-1}|ds\\
&\leq \frac{\|\ f\Big(s,u(s),{}^HD_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi}v(s)\Big)\ \|_{1-\gamma;\psi}}{\Gamma(\alpha+1)}\Big[\Big(\psi(v_2)-\psi(a)\Big)^{\alpha}+2\Big(\psi(v_1)-\psi(v_2)\Big)^{\alpha}-\Big(\psi(v_1)-\psi(a)\Big)^{\alpha}\Big].
\end{aligned}
$$

D'après (3.15), on obtient :

$$
\begin{aligned}
&\|\ N_1(u,v)(v_1)-N_1(u,v)(v_2)\ \|_{1-\gamma;\psi}\\
&\leq \frac{r(\mu_f+\mu_f'\mu_g')}{2(1-\mu_g\mu_f')\Gamma(\alpha+1)}\Big[\Big(\psi(v_2)-\psi(a)\Big)^{\alpha}+2\Big(\psi(v_1)-\psi(v_2)\Big)^{\alpha}-\Big(\psi(v_1)-\psi(a)\Big)^{\alpha}\Big].
\end{aligned}
$$

De même manière

$$
\begin{aligned}
&\|\ N_2(u,v)(v_1)-N_2(u,v)(v_2)\ \|_{1-\gamma;\psi}\\
&\leq \frac{r(\mu_f\mu_g+\mu_g')}{2(1-\mu_g\mu_f')\Gamma(\alpha+1)}\Big[\Big(\psi(v_2)-\psi(a)\Big)^{\alpha}+2\Big(\psi(v_1)-\psi(v_2)\Big)^{\alpha}-\Big(\psi(v_1)-\psi(a)\Big)^{\alpha}\Big].
\end{aligned}
$$

Cela implique $\|N(u,v)(v_1) - N(u,v)(v_2)\|_{1-\gamma;\psi} \to 0$, comme $v_1 \to v_2$.

Donc N est relativement compact sur $\mathcal{B}_r$. D'après théorème Ascolli-Arzelà N est un opérateur compact et donc complètement continu. Ainsi, d'après le théorème du point fixe de Schauder, le système (3.1) admet au moins une solution. $\square$

Théorème 3.3. [3]

Si les hypothèse (H1),(H2) et (H3) sont vraies, alors le système (3.1) admet une solution unique.

Démonstration. Pour prouver le résultat requis, nous montrons que N est une application de contraction. Pour tout $t \in \mathcal{J}$ et $(u,v), (\bar{u},\bar{v}) \in \mathcal{B}_r$, on a :

$$
\begin{aligned}
&\| N(u,v) - N(\bar{u},\bar{v}) \|_{1-\gamma;\psi} \\
&\le \| N_1(u,v) - N_1(\bar{u},\bar{v}) \|_{1-\gamma;\psi} + \| N_2(u,v) - N_2(\bar{u},\bar{v}) \|_{1-\gamma;\psi} \\
&\le \max_{t\in\mathcal{J}} \mid \frac{\Big(\psi(t)-\psi(a)\Big)^{1-\gamma;\psi}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \psi'(s)\Big(\psi(t)-\psi(s)\Big)^{\alpha-1} \times \\
&\quad f\Big(s, u(s), {}^H D_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} v(s)\Big) - f\Big(s, \bar{u}(s), {}^H D_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} \bar{v}(s)\Big) ds \mid \\
&\quad + \max_{t\in\mathcal{J}} \mid \frac{\Big(\psi(t)-\psi(a)\Big)^{1-\gamma;\psi}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \psi'(s)\Big(\psi(t)-\psi(s)\Big)^{\alpha-1} \times \\
&\quad g\Big(s, {}^H D_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} u(s), v(s)\Big) - g\Big(s, {}^H D_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} \bar{u}(s), \bar{v}(s)\Big) ds \mid \\
&\le \Big[\frac{\mathcal{L}_f \| u-\bar{u} \|_{1-\gamma;\psi} + \mathcal{L}'_f \mathcal{L}'_g \| v-\bar{v} \|_{1-\gamma;\psi}}{(1-\mathcal{L}'_f\mathcal{L}_g)\Gamma(\alpha+1)} \\
&\quad + \frac{\mathcal{L}_f\mathcal{L}_g \| u-\bar{u} \|_{1-\gamma;\psi} + \mathcal{L}'_g \| v-\bar{v} \|_{1-\gamma;\psi}}{(1-\mathcal{L}'_f\mathcal{L}_g)\Gamma(\alpha+1)} \Big] \Big(\psi(b)-\psi(a)\Big)^{\alpha} \\
&\le \Big[\frac{\mathcal{L}_f(1+\mathcal{L}_g) \| u-\bar{u} \|_{1-\gamma;\psi}}{(1-\mathcal{L}'_f\mathcal{L}_g)\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\mathcal{L}'_g(1+\mathcal{L}'_f) \| v-\bar{v} \|_{1-\gamma;\psi}}{(1-\mathcal{L}'_f\mathcal{L}_g)\Gamma(\alpha+1)} \Big] \Big(\psi(b)-\psi(a)\Big)^{\alpha} \\
&\le \eta_1 \| u-\bar{u} \|_{1-\gamma;\psi} + \eta_2 \| v-\bar{v} \|_{1-\gamma;\psi} \\
&\le \eta \| (u,v) - (\bar{u},\bar{v}) \| .
\end{aligned}
$$

sous l'hypothèse (H3) l'opérateur N est une application de contraction, donc par principe de contraction de Banach l'opérateur N a un point fixe unique qui est l'unique solution du système couplé (3.1). $\square$

3.1 Analyse de stabilité

Dans cette section, nous analysons les stabilités Ulam-Hyers et Ulam-Hyers-Rassias de le système proposé.

Définition 3.1. [5]

Le système couple (3.1) est dit Ulam-Hyers stable s'il existe une constante $\mathcal{K}_{1,2} = \max\{\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2\} > 0$ tel que pour chaque $\epsilon = \max\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ ou $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ et toute solution $(u, v) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ de l'inégalité :

$$\begin{cases} |{}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi} u(t) - f(t, u(t), {}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi} v(t))| \leq \epsilon_1, & t \in \mathcal{J} \\ |{}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi} v(t) - g(t, {}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi} u(t), v(t))| \leq \epsilon_2, & t \in \mathcal{J} \end{cases} \tag{3.25}$$

qu'il existe une solution $(\bar{u}, \bar{v}) \in \mathcal{X}_{1-\psi,\gamma} \times \mathcal{X}_{1-\psi,\gamma}$ de (3.1) satisfier :

$$\| (\bar{u}, \bar{v}) - (u, v) \|_{1-\gamma,\psi} \leq \mathcal{K}_{1,2}\epsilon. \tag{3.26}$$

Définition 3.2. [5]

Le système couple (3.1) est dit Ulam-Hyers-Rassias stable s'il existe une constante $\mathcal{K}_{1,2} = \max\{\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2\} > 0$ et une fonction non décroissante $\lambda_\Phi = \max\limits_{t\in\mathcal{J}}\{\lambda_{\Phi_1}, \lambda_{\Phi_2}\}$ tel que pour chaque $\epsilon = \max\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ ou $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ et toute solution $(u, v) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ de l'inégalité :

$$\begin{cases} |{}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi} u(t) - f(t, u(t), {}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi} v(t))| \leq \lambda_{\Phi_1}(t)\epsilon_1, & t \in \mathcal{J} \\ |{}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi} v(t) - g(t, {}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi} u(t), v(t))| \leq \lambda_{\Phi_2}(t)\epsilon_2, & t \in \mathcal{J} \end{cases} \tag{3.27}$$

une solution (u, v) de (3.1) satisfaisent

$$\| (\bar{u}, \bar{v}) - (u, v) \|_{1-\gamma;\psi} \leq \mathcal{K}_{1,2}\lambda_\Phi(t)\epsilon. \tag{3.28}$$

Remarque 3.1

$(u, v) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ satisfait l'inégalité (3.25) si et seulement s'il existe des fonctions θ_1 ,$\theta_2 \in \mathcal{X}$ tell que :

1. $|\theta_1(t)| \leq \epsilon_1, \quad |\theta_2(t)| \leq \epsilon_2, \quad t \in \mathcal{J}$
2. et

$$\begin{cases} {}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi} u(t) = f(t, u(t), {}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi} v(t)) + \theta_1(t), & t \in \mathcal{J} \\ {}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi} v(t) = g(t, {}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi} u(t), v(t)) + \theta_2(t), & t \in \mathcal{J} \\ I_{a^+}^{1-\gamma;\psi} u(t)|_{t=a} = u_a, \qquad I_{a^+}^{1-\gamma,\psi} v(t)|_{t=a} = v_a. \end{cases} \tag{3.29}$$

Lemme 3.1. [3]

Si $(u,v)\in\mathcal{X}\times\mathcal{X}$ satisfait l'inégalité de(3.25). Alors (u,v) est la solution des inégalités

$$\begin{cases}\left|u(t)-\dfrac{u_a\Big(\psi(t)-\psi(a)\Big)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}-\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_a^t\psi'(s)\Big(\psi(t)-\psi(s)\Big)^{\alpha_1}f\Big(s,u(s),{}^HD_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi}v(s)\Big)ds\right|\\ \qquad\leq\dfrac{\epsilon_1\Big(\psi(b)-\psi(a)\Big)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)},\\ \left|v(t)-\dfrac{v_a\Big(\psi(t)-\psi(a)\Big)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}-\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_a^t\psi'(s)\Big(\psi(t)-\psi(s)\Big)^{\alpha_1}g\Big(s,{}^HD_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi}u(s),v(s)\Big)ds\right|\\ \qquad\leq\dfrac{\epsilon_2\Big(\psi(b)-\psi(a)\Big)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}.\end{cases}\tag{3.30}$$

Démonstration. Au vu du théorème 3.0.1 et remarque 3.1(ii) la solution de (3.29) équivaut à :

$$\begin{cases}u(t)=\dfrac{u_a\Big(\psi(t)-\psi(a)\Big)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}+\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_a^t\psi'(s)\Big(\psi(t)-\psi(s)\Big)^{\alpha_1}f\Big(s,u(s),{}^HD_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi}v(s)\Big)ds\\ +\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_a^t\psi'(s)\Big(\psi(t)-\psi(s)\Big)^{\alpha_1}\theta_1(s)ds,\\ v(t)=\dfrac{v_a\Big(\psi(t)-\psi(a)\Big)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}+\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_a^t\psi'(s)\Big(\psi(t)-\psi(s)\Big)^{\alpha_1}g\Big(s,{}^HD_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi}u(s),v(s)\Big)ds\\ +\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_a^t\psi'(s)\Big(\psi(t)-\psi(s)\Big)^{\alpha_1}\theta_2(s)ds.\end{cases}\tag{3.31}$$

Considérons d'abord

$$\begin{aligned}&\left|u(t)-\dfrac{u_a\Big(\psi(t)-\psi(a)\Big)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}-\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t\psi'(s)\Big(\psi(t)-\psi(s)\Big)^{\alpha_1}f\Big(s,u(s),{}^HD_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi}v(s)\Big)ds\right|\\ &=\left|\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t\psi'(s)\Big(\psi(t)-\psi(s)\Big)^{\alpha_1}\theta_1(s)ds\right|\\ &\leq\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t\psi'(s)\Big(\psi(t)-\psi(s)\Big)^{\alpha_1}\Big|\theta_1(s)\Big|ds\\ &\leq\dfrac{\epsilon_1}{\Gamma(\alpha+1)}\Big(\psi(t)-\psi(s)\Big)^{\alpha}\\ &\leq\dfrac{\epsilon_1}{\Gamma(\alpha+1)}\Big(\psi(b)-\psi(s)\Big)^{\alpha}\\ &=\mathcal{K}_1\epsilon_1.\end{aligned}\tag{3.32}$$

Avec $\mathcal{K}_1=\dfrac{\Big(\psi(b)-\psi(s)\Big)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}$.

En répétant à nouveau cette procédure, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\left|v(t)-\frac{v_a\Big(\psi(t)-\psi(a)\Big)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t\psi'(s)\Big(\psi(t)-\psi(s)\Big)^{\alpha_1}g\Big(s,{}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi}u(s),v(s)\Big)ds\right|\\
&=\left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t\psi'(s)\Big(\psi(t)-\psi(s)\Big)^{\alpha_1}\theta_2(s)ds\right|\\
&\leq\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t\psi'(s)\Big(\psi(t)-\psi(s)\Big)^{\alpha_1}\Big|\theta_2(s)\Big|ds\\
&\leq\frac{\epsilon_2}{\Gamma(\alpha+1)}\Big(\psi(t)-\psi(s)\Big)^{\alpha}\\
&\leq\frac{\epsilon_2}{\Gamma(\alpha+1)}\Big(\psi(b)-\psi(s)\Big)^{\alpha}\\
&=\mathcal{K}_2\epsilon_2,
\end{aligned}\tag{3.33}$$

avec $\mathcal{K}_2=\dfrac{\Big(\psi(b)-\psi(s)\Big)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}$. □

Lemme 3.2. [3]

Si $(u,v)\in\mathcal{X}\times\mathcal{X}$satisfait l'inégalité de (3.27). et supposons qu'il existe $\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2>0$ tel que

$$(\mathrm{H4})\ :\begin{cases} I_{a^+}^{\alpha;\psi}\lambda_{\phi_1}(t) & \leq\mathcal{M}_1\lambda_{\phi_1}(t)\Big(\psi(t)-\psi(a)\Big)^{\gamma-1},\\ I_{a^+}^{\alpha;\psi}\lambda_{\phi_2}(t) & \leq\mathcal{M}_2\lambda_{\phi_2}(t)\Big(\psi(t)-\psi(a)\Big)^{\gamma-1}.\end{cases}$$

Alors (u,v) est la solution des inégalités

$$\begin{cases}\left|u(t)-\dfrac{u_a\Big(\psi(t)-\psi(a)\Big)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}-\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_a^t\psi'(s)\Big(\psi(t)-\psi(s)\Big)^{\alpha_1}f\Big(s,u(s),{}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi}v(s)\Big)ds\right|\\
\quad\leq\epsilon_1\mathcal{M}_1\lambda_{\phi_1},\\
\left|v(t)-\dfrac{v_a\Big(\psi(t)-\psi(a)\Big)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}-\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_a^t\psi'(s)\Big(\psi(t)-\psi(s)\Big)^{\alpha_1}g\Big(s,{}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi}u(s),v(s)\Big)ds\right|\\
\quad\leq\epsilon_2\mathcal{M}_2\lambda_{\phi_2}.\end{cases}\tag{3.34}$$

Démonstration. Au vu du théorème 3.0.1 et remarque 3.1(ii) la solution de l'inégalité (3.27) sera équivalente à :

$$\begin{cases} u(t) &= \dfrac{u_a\Big(\psi(t)-\psi(a)\Big)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} + \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_a^t \psi'(s)\Big(\psi(t)-\psi(s)\Big)^{\alpha_1} f\Big(s,u(s),{}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi}v(s)\Big)ds \\ & +\dfrac{\epsilon_1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_a^t \psi'(s)\Big(\psi(t)-\psi(s)\Big)^{\alpha_1}\lambda_{\phi_1}(s)ds, \\ v(t) &= \dfrac{v_a\Big(\psi(t)-\psi(a)\Big)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} + \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_a^t \psi'(s)\Big(\psi(t)-\psi(s)\Big)^{\alpha_1} g\Big(s,{}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi}u(s),v(s)\Big)ds \\ & +\dfrac{\epsilon_2}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_a^t \psi'(s)\Big(\psi(t)-\psi(s)\Big)^{\alpha_1}\lambda_{\phi_1}(s)ds. \end{cases} \tag{3.35}$$

D'abord

$$\begin{aligned} &\left|u(t) - \frac{u_a\Big(\psi(t)-\psi(a)\Big)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \psi'(s)\Big(\psi(t)-\psi(s)\Big)^{\alpha_1} f\Big(s,u(s),{}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi}v(s)\Big)ds\right| \\ &= \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \psi'(s)\Big(\psi(t)-\psi(s)\Big)^{\alpha_1}\lambda_{\phi_1}(s)ds\right| \\ &\leq \frac{\epsilon_1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \psi'(s)\Big(\psi(t)-\psi(s)\Big)^{\alpha-1}\lambda_{\phi_1}(s)ds \\ &\leq \mathcal{M}_1\epsilon_1\lambda_{\phi_1}(t)\Big(\psi(t)-\psi(a)\Big)^{\gamma-1}. \end{aligned} \tag{3.36}$$

En répétant à nouveau cette procédure, nous obtenons

$$\begin{aligned} &\left|v(t) - \frac{v_a\Big(\psi(t)-\psi(a)\Big)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \psi'(s)\Big(\psi(t)-\psi(s)\Big)^{\alpha_1} g\Big(s,u(s),{}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi}v(s)\Big)ds\right| \\ &= \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \psi'(s)\Big(\psi(t)-\psi(s)\Big)^{\alpha_1}\lambda_{\phi_2}(s)ds\right| \\ &\leq \frac{\epsilon_2}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \psi'(s)\Big(\psi(t)-\psi(s)\Big)^{\alpha-1}\lambda_{\phi_2}(s)ds \\ &\leq \mathcal{M}_2\epsilon_2\lambda_{\phi_2}(t)\Big(\psi(t)-\psi(a)\Big)^{\gamma-1}. \end{aligned} \tag{3.37}$$

□

Théorème 3.4. [3]

Supposons que les hypothèses (H1)-(H3) soient valables selon la condition

$$\Lambda = (1-\mathcal{Q}_{1f})(1-\mathcal{Q}_{2g}) - \mathcal{Q}_{1g}\mathcal{Q}_{2f} \neq 0.$$

Alors la solution de (3.1) est HU stable.

Démonstration. Soit$(\bar{u},\bar{v}) \in \mathcal{X}\times\mathcal{X}$est la solution approchée de inégalités dans (3.25) et $(u,v) \in \mathcal{X}\times\mathcal{X}$ être la solution unique du système couplé :

$$\begin{cases} {}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi}\bar{u}(t) &= f\Big(t,\bar{u}(t),{}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi}\bar{v}(t)\Big) + \theta_1(t), t\in\mathcal{J}=(a,b], 0<\alpha<1, 0<\beta<1 \\ {}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi}\bar{v}(t) &= g\Big(t,{}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi}\bar{u}(t),\bar{v}(t)\Big) + \theta_2(t), \\ I_{a^+}^{1-\gamma;\psi}\bar{u}(t) = u_a, & I_{a^+}^{1-\gamma;\psi}\bar{v}(t) = v_a. \end{cases} \tag{3.38}$$

Au vu du théorème (3.1), la solution de 3.29 sera équivalente à :

$$\begin{cases} \bar{u}(t) &= \dfrac{u_a\big(\psi(t)-\psi(a)\big)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} + \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_a^t \psi'(s)\big(\psi(t)-\psi(s)\big)^{\alpha_1} f\Big(s,\bar{u}(s),{}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi}\bar{v}(s)\Big)ds \\ & +\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_a^t \psi'(s)\big(\psi(t)-\psi(s)\big)^{\alpha_1}\theta_1(s)ds \quad t\in\mathcal{J}, \\ \bar{v}(t) &= \dfrac{v_a\big(\psi(t)-\psi(a)\big)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} + \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_a^t \psi'(s)\big(\psi(t)-\psi(s)\big)^{\alpha_1} g\Big(s,{}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi}\bar{u}(s),\bar{v}(s)\Big)ds \\ & +\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_a^t \psi'(s)\big(\psi(t)-\psi(s)\big)^{\alpha_1}\theta_2(s)ds \quad t\in\mathcal{J}. \end{cases} \tag{3.39}$$

Donc

$$\begin{aligned} &\Big|u(t)-\bar{u}(t)\Big| \\ &= \Bigg|u(t) - \frac{u_a\big(\psi(t)-\psi(a)\big)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \psi'(s)\big(\psi(t)-\psi(s)\big)^{\alpha_1} f\Big(s,u(s),{}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi}v(s)\Big)ds \\ &\quad + \frac{u_a\big(\psi(t)-\psi(a)\big)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \psi'(s)\big(\psi(t)-\psi(s)\big)^{\alpha_1} f\Big(s,u(s),{}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi}v(s)\Big)ds \\ &\quad - \frac{u_a\big(\psi(t)-\psi(a)\big)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \psi'(s)\big(\psi(t)-\psi(s)\big)^{\alpha_1} f\Big(s,\bar{u}(s),{}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi}\bar{v}(s)\Big)ds\Bigg| \\ &\le \Bigg|u(t) - \frac{u_a\big(\psi(t)-\psi(a)\big)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \psi'(s)\big(\psi(t)-\psi(s)\big)^{\alpha_1} f\Big(s,u(s),{}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi}v(s)\Big)ds\Bigg| \\ &\quad + \Bigg|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \psi'(s)\big(\psi(t)-\psi(s)\big)^{\alpha_1} f\Big(s,u(s),{}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi}v(s)\Big)ds \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \psi'(s)\big(\psi(t)-\psi(s)\big)^{\alpha_1} f\Big(s,\bar{u}(s),{}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi}\bar{v}(s)\Big)ds\Bigg| \\ &\le \frac{\epsilon_1}{\Gamma(\alpha+1)}\big(\psi(t)-\psi(s)\big)^{\alpha} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \psi'(s)\big(\psi(t)-\psi(s)\big)^{\alpha_1} \\ &\quad \Big|f\Big(s,u(s),{}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi}v(s)\Big) - f\Big(s,\bar{u}(s),{}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi}\bar{v}(s)\Big)\Big|ds \\ &\le \frac{\epsilon_1}{\Gamma(\alpha+1)}\big(\psi(b)-\psi(s)\big)^{\alpha} + \frac{\mathcal{L}_f|u(t)-\bar{u}(t)| + \mathcal{L}'_f\mathcal{L}'_g|v(t)-\bar{v}(t)|}{(1-\mathcal{L}'_f\mathcal{L}_g)\Gamma(\alpha+1)}\big(\psi(b)-\psi(s)\big)^{\alpha} \\ &= \mathcal{K}_1\epsilon_1 + \frac{\mathcal{L}_f|u(t)-\bar{u}(t)| + \mathcal{L}'_f\mathcal{L}'_g|v(t)-\bar{v}(t)|}{(1-\mathcal{L}'_f\mathcal{L}_g)\Gamma(\alpha+1)}\big(\psi(b)-\psi(s)\big)^{\alpha}. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
&\| u(t)-\bar{u}(t) \|_{1-\gamma;\psi} \\
&\leq \mathcal{K}_1\epsilon_1 + \frac{\mathcal{L}_f \| u(t)-\bar{u}(t) \|_{1-\gamma;\psi} + \mathcal{L'}_f\mathcal{L'}_g \| v(t)-\bar{v}(t) \|_{1-\gamma;\psi}}{(1-\mathcal{L'}_f\mathcal{L}_g)\Gamma(\alpha+1)}\Big(\psi(b)-\psi(s)\Big)^{\alpha} \\
&= \mathcal{K}_1\epsilon_1 + \frac{\mathcal{L}_f}{(1-\mathcal{L'}_f\mathcal{L}_g)\Gamma(\alpha+1)}\Big(\psi(b)-\psi(s)\Big)^{\alpha} \| u(t)-\bar{u}(t) \|_{1-\gamma;\psi} \qquad (3.41) \\
&+ \frac{\mathcal{L'}_f\mathcal{L'}_g}{(1-\mathcal{L'}_f\mathcal{L}_g)\Gamma(\alpha+1)}\Big(\psi(b)-\psi(s)\Big)^{\alpha} \| v(t)-\bar{v}(t) \|_{1-\gamma;\psi} \\
&= \mathcal{K}_1\epsilon_1 + \mathcal{Q}_{1f} \| u(t)-\bar{u}(t) \|_{1-\gamma;\psi} + \mathcal{Q}_{1g} \| v(t)-\bar{v}(t) \|_{1-\gamma;\psi} .
\end{aligned}$$

Ce implique que

$$(1-\mathcal{Q}_{1f}) \| u(t)-\bar{u}(t) \|_{1-\gamma;\psi} \leq \mathcal{K}_1\epsilon_1 + \mathcal{Q}_{1g} \| v(t)-\bar{v}(t) \|_{1-\gamma;\psi} . \qquad (3.42)$$

De la même manière

$$(1-\mathcal{Q}_{2g}) \| v(t)-\bar{v}(t) \|_{1-\gamma;\psi} \leq \mathcal{K}_2\epsilon_2 + \mathcal{Q}_{2f} \| u(t)-\bar{u}(t) \|_{1-\gamma;\psi} . \qquad (3.43)$$

où

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_{1f} &= \frac{\mathcal{L}_f}{(1-\mathcal{L'}_f\mathcal{L}_g)\Gamma(\alpha+1)}\Big(\psi(b)-\psi(s)\Big)^{\alpha}, \\
\mathcal{Q}_{1g} &= \frac{\mathcal{L'}_f\mathcal{L'}_g}{(1-\mathcal{L'}_f\mathcal{L}_g)\Gamma(\alpha+1)}\Big(\psi(b)-\psi(s)\Big)^{\alpha}, \\
\mathcal{Q}_{2g} &= \frac{\mathcal{L'}_g}{(1-\mathcal{L'}_f\mathcal{L}_g)\Gamma(\alpha+1)}\Big(\psi(b)-\psi(s)\Big)^{\alpha}, \\
\mathcal{Q}_{2f} &= \frac{\mathcal{L}_f\mathcal{L}_g}{(1-\mathcal{L'}_f\mathcal{L}_g)\Gamma(\alpha+1)}\Big(\psi(b)-\psi(s)\Big)^{\alpha}.
\end{aligned}$$

Les inégalités (3.42) et (3.43) peuvent être exprimées sous la forme formulaire :

$$\begin{cases} (1-\mathcal{Q}_{1f}) \| u(t)-\bar{u}(t) \|_{1-\gamma;\psi} - \mathcal{Q}_{1g} \| v(t)-\bar{v}(t) \|_{1-\gamma;\psi} & \leq \mathcal{K}_1\epsilon_1, \\ -\mathcal{Q}_{2f} \| u(t)-\bar{u}(t) \|_{1-\gamma;\psi} + (1-\mathcal{Q}_{2g}) \| v(t)-\bar{v}(t) \|_{1-\gamma;\psi} & \leq \mathcal{K}_2\epsilon_2. \end{cases} \qquad (3.44)$$

La forme matricielle de (3.44) est :

$$\begin{bmatrix} 1-\mathcal{Q}_{1f} & -\mathcal{Q}_{1g} \\ -\mathcal{Q}_{2f} & 1-\mathcal{Q}_{2g} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \| u(t)-\bar{u}(t) \|_{1-\gamma;\psi} \\ \| v(t)-\bar{v}(t) \|_{1-\gamma;\psi} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \mathcal{K}_1\epsilon_1 \\ \mathcal{K}_2\epsilon_2 \end{bmatrix}.$$

Ce qui après calculs simples donne :

$$\begin{bmatrix} \| u(t)-\bar{u}(t) \|_{1-\gamma;\psi} \\ \| v(t)-\bar{v}(t) \|_{1-\gamma;\psi} \end{bmatrix} \leq \frac{1}{\Lambda} \begin{bmatrix} 1-\mathcal{Q}_{2g} & \mathcal{Q}_{1g} \\ \mathcal{Q}_{2f} & 1-\mathcal{Q}_{1f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{K}_1\epsilon_1 \\ \mathcal{K}_2\epsilon_2 \end{bmatrix}.$$

où $\Lambda = (1-\mathcal{Q}_{1f})(1-\mathcal{Q}_{2g}) - \mathcal{Q}_{1g}\mathcal{Q}_{2f} \neq 0$ Ce qui en outre implique

$$\| u(t)-\bar{u}(t) \|_{1-\gamma;\psi} \leq \frac{(1-\mathcal{Q}_{2g})\mathcal{K}_1\epsilon_1}{\Lambda} + \frac{\mathcal{K}_2\epsilon_2\mathcal{Q}_{1g}}{\Lambda}. \qquad (3.45)$$

et

$$\| v(t)-\bar{v}(t) \|_{1-\gamma;\psi} \leq \frac{\mathcal{K}_1\epsilon_1\mathcal{Q}_{2f}}{\Lambda} + \frac{(1-\mathcal{Q}_{1f})\mathcal{K}_2\epsilon_2}{\Lambda}. \qquad (3.46)$$

A partir des inégalités (3.45) et (3.46), on a :

$$\begin{aligned}\parallel (u,v)-(\bar{u},\bar{v}) \parallel_{1-\gamma;\psi} &\leq \parallel u(t)-\bar{u}(t) \parallel_{1-\gamma;\psi} + \parallel v(t)-\bar{v}(t) \parallel_{1-\gamma;\psi} \\ &\leq \frac{(1-\mathcal{Q}_{2g})\mathcal{K}_1\epsilon_1}{\Lambda} + \frac{\mathcal{K}_2\epsilon_2\mathcal{Q}_{1g}}{\Lambda} + \frac{\mathcal{K}_1\epsilon_1\mathcal{Q}_{2f}}{\Lambda} + \frac{(1-\mathcal{Q}_{1f})\mathcal{K}_2\epsilon_2}{\Lambda} \\ &\leq \mathcal{Q}_{fg}\epsilon. \end{aligned} \tag{3.47}$$

où $\max\{\epsilon_1,\epsilon_2\}=\epsilon$,$\max\{\mathcal{K}_1,\mathcal{K}_2\}=\mathcal{K}$ et

$$\mathcal{Q}_{fg} = \frac{2-\mathcal{Q}_{2g}+\mathcal{Q}_{1g}+\mathcal{Q}_{2f}+\mathcal{Q}_{1f}}{\Lambda}\mathcal{K}_{1,2}.$$

Ainsi, à partir de l'inégalité (3.47) et de la définition 3.1, la solution du système couplé (3.1) est stable en HU. □

Théorème 3.5. [3]

Supposons que les hypothèse (H1)-(H4) Soient valables selon la condition

$$\Lambda = (1-\mathcal{Q}_{1f})(1-\mathcal{Q}_{2g}) - \mathcal{Q}_{1g}\mathcal{Q}_{2f} \neq 0.$$

Alors la solution de (3.1) est HUR stable.

Démonstration. Soit $(\bar{u},\bar{v}) \in \mathcal{X}\times\mathcal{X}$ est la solution approchée de inégalités dans (3.26) et $(u,v)\in\mathcal{X}\times\mathcal{X}$ être la solution unique du système couplé :

$$\begin{cases} {}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi}\bar{u}(t) &= f\Big(t,\bar{u}(t),{}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi}\bar{v}(t)\Big)+\theta_1(t), t\in\mathcal{J}=(a,b], 0<\alpha<1, 0<\beta<1 \\ {}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi}\bar{v}(t) &= g\Big(t,{}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi}\bar{u}(t),\bar{v}(t)\Big)+\theta_2(t), \gamma=\alpha+\beta-\alpha\beta, \\ I_{a^+}^{1-\gamma;\psi}\bar{u}(t) &= u_a, I_{a^+}^{1-\gamma;\psi}\bar{v}(t)=v_a. \end{cases} \tag{3.48}$$

Au vu du théorème 3.0.1 la solution de (3.48) sera équivalente à :

$$\begin{cases} \bar{u}(t) &= \dfrac{u_a\Big(\psi(t)-\psi(a)\Big)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} + \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_a^t \psi'(s)\Big(\psi(t)-\psi(s)\Big)^{\alpha_1} f\Big(s,\bar{u}(s),{}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi}\bar{v}(s)\Big)ds \\ &+\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_a^t \psi'(s)\Big(\psi(t)-\psi(s)\Big)^{\alpha_1}\theta_1(s)ds \quad t\in\mathcal{J}, \\ \bar{v}(t) &= \dfrac{v_a\Big(\psi(t)-\psi(a)\Big)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} + \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_a^t \psi'(s)\Big(\psi(t)-\psi(s)\Big)^{\alpha_1} g\Big(s,{}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi}\bar{u}(s),\bar{v}(s)\Big)ds \\ &+\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_a^t \psi'(s)\Big(\psi(t)-\psi(s)\Big)^{\alpha_1}\theta_2(s)ds \quad t\in\mathcal{J}. \end{cases} \tag{3.49}$$

Donc

$$
\begin{aligned}
&\Big|u(t)-\bar{u}(t)\Big| \\
&=\Big|u(t)-\frac{u_a\Big(\psi(t)-\psi(a)\Big)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \psi'(s)\Big(\psi(t)-\psi(s)\Big)^{\alpha_1} f\Big(s,u(s),{}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi}v(s)\Big)ds \\
&+\frac{u_a\Big(\psi(t)-\psi(a)\Big)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \psi'(s)\Big(\psi(t)-\psi(s)\Big)^{\alpha_1} f\Big(s,u(s),{}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi}v(s)\Big)ds \\
&-\frac{u_a\Big(\psi(t)-\psi(a)\Big)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \psi'(s)\Big(\psi(t)-\psi(s)\Big)^{\alpha_1} f\Big(s,\bar{u}(s),{}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi}\bar{v}(s)\Big)ds\Big| \\
&\le\Big|u(t)-\frac{u_a\Big(\psi(t)-\psi(a)\Big)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \psi'(s)\Big(\psi(t)-\psi(s)\Big)^{\alpha_1} f\Big(s,u(s),{}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi}v(s)\Big)ds\Big| \\
&+\Big|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \psi'(s)\Big(\psi(t)-\psi(s)\Big)^{\alpha_1} f\Big(s,u(s),{}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi}v(s)\Big)ds \\
&-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \psi'(s)\Big(\psi(t)-\psi(s)\Big)^{\alpha_1} f\Big(s,\bar{u}(s),{}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi}\bar{v}(s)\Big)ds\Big| \\
&\le \epsilon_1\mathcal{M}_1\lambda_{\phi_1}(t)\Big(\psi(t)-\psi(a)\Big)^{\gamma_1}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \psi'(s)\Big(\psi(t)-\psi(s)\Big)^{\alpha_1} \\
&\Big|f\Big(s,u(s),{}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi}v(s)\Big)-f\Big(s,\bar{u}(s),{}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi}\bar{v}(s)\Big)\Big|ds \\
&\le \epsilon_1\mathcal{M}_1\lambda_{\phi_1}(t)\Big(\psi(t)-\psi(a)\Big)^{\gamma_1}+\frac{\mathcal{L}_f\mid u(t)-\bar{u}(t)\mid+\mathcal{L}'_f\mathcal{L}'_g|v(t)-\bar{v}(t)|}{(1-\mathcal{L}'_f\mathcal{L}_g)\Gamma(\alpha+1)}\Big(\psi(b)-\psi(s)\Big)^{\alpha} \\
&= \epsilon_1\mathcal{M}_1\lambda_{\phi_1}(t)\Big(\psi(t)-\psi(a)\Big)^{\gamma_1}+\frac{\mathcal{L}_f|u(t)-\bar{u}(t)|+\mathcal{L}'_f\mathcal{L}'_g|v(t)-\bar{v}(t)|}{(1-\mathcal{L}'_f\mathcal{L}_g)\Gamma(\alpha+1)}\Big(\psi(b)-\psi(s)\Big)^{\alpha}.
\end{aligned}
\tag{3.50}
$$

Ainsi

$$
\begin{aligned}
&\parallel u(t)-\bar{u}(t)\parallel_{1-\gamma;\psi} \\
&\quad\le \epsilon_1\mathcal{M}_1\lambda_{\phi_1}(t)+\frac{\mathcal{L}_f\parallel u(t)-\bar{u}(t)\parallel_{1-\gamma;\psi}+\mathcal{L}'_f\mathcal{L}'_g\parallel v(t)-\bar{v}(t)\parallel_{1-\gamma;\psi}}{(1-\mathcal{L}'_f\mathcal{L}_g)\Gamma(\alpha+1)}\Big(\psi(b)-\psi(s)\Big)^{\alpha} \\
&\quad= \epsilon_1\mathcal{M}_1\lambda_{\phi_1}(t)+\frac{\mathcal{L}_f}{(1-\mathcal{L}'_f\mathcal{L}_g)\Gamma(\alpha+1)}\Big(\psi(b)-\psi(s)\Big)^{\alpha}\parallel u(t)-\bar{u}(t)\parallel_{1-\gamma;\psi} \\
&\qquad+\frac{\mathcal{L}'_f\mathcal{L}'_g}{(1-\mathcal{L}'_f\mathcal{L}_g)\Gamma(\alpha+1)}\Big(\psi(b)-\psi(s)\Big)^{\alpha}\parallel v(t)-\bar{v}(t)\parallel_{1-\gamma;\psi} \\
&\quad= \epsilon_1\mathcal{M}_1\lambda_{\phi_1}(t)+\mathcal{Q}_{1f}\parallel u(t)-\bar{u}(t)\parallel_{1-\gamma;\psi}+\mathcal{Q}_{1g}\parallel v(t)-\bar{v}(t)\parallel_{1-\gamma;\psi}.
\end{aligned}
\tag{3.51}
$$

Ce qui implique

$$
(1-\mathcal{Q}_{1f})\parallel u(t)-\bar{u}(t)\parallel_{1-\gamma;\psi}\le \epsilon_1\mathcal{M}_1\lambda_{\phi_1}(t)+\mathcal{Q}_{1g}\parallel v(t)-\bar{v}(t)\parallel_{1-\gamma;\psi}. \tag{3.52}
$$

De la même manière

$$
(1-\mathcal{Q}_{2g})\parallel v(t)-\bar{v}(t)\parallel_{1-\gamma;\psi}\le \epsilon_2\mathcal{M}_2\lambda_{\phi_2}(t)+\mathcal{Q}_{2f}\parallel u(t)-\bar{u}(t)\parallel_{1-\gamma;\psi}. \tag{3.53}
$$

où

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_{1f} &= \frac{\mathcal{L}_f}{(1-\mathcal{L'}_f\mathcal{L}_g)\Gamma(\alpha+1)}\big(\psi(b)-\psi(s)\big)^\alpha,\\ \mathcal{Q}_{1g} &= \frac{\mathcal{L'}_f\mathcal{L'}_g}{(1-\mathcal{L'}_f\mathcal{L}_g)\Gamma(\alpha+1)}\big(\psi(b)-\psi(s)\big)^\alpha,\\ \mathcal{Q}_{2g} &= \frac{\mathcal{L'}_g}{(1-\mathcal{L'}_f\mathcal{L}_g)\Gamma(\alpha+1)}\big(\psi(b)-\psi(s)\big)^\alpha,\\ \mathcal{Q}_{2f} &= \frac{\mathcal{L}_f\mathcal{L}_g}{(1-\mathcal{L'}_f\mathcal{L}_g)\Gamma(\alpha+1)}\big(\psi(b)-\psi(s)\big)^\alpha.\end{aligned}$$

Les inégalités (3.52) et (3.53) peuvent être exprimées sous la forme formulaire :

$$\begin{cases}(1-\mathcal{Q}_{1f})\parallel u(t)-\bar{u}(t)\parallel_{1-\gamma;\psi} -\mathcal{Q}_{1g}\parallel v(t)-\bar{v}(t)\parallel_{1-\gamma;\psi} & \leq \epsilon_1\mathcal{M}_1\lambda_{\phi_1}(t),\\ -\mathcal{Q}_{2f}\parallel u(t)-\bar{u}(t)\parallel_{1-\gamma;\psi} +(1-\mathcal{Q}_{2g})\parallel v(t)-\bar{v}(t)\parallel_{1-\gamma;\psi} & \leq \epsilon_2\mathcal{M}_2\lambda_{\phi_2}(t).\end{cases} \tag{3.54}$$

La forme matricielle de (3.54) est :

$$\begin{bmatrix}1-\mathcal{Q}_{1f} & -\mathcal{Q}_{1g}\\ -\mathcal{Q}_{2f} & 1-\mathcal{Q}_{2g}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\parallel u(t)-\bar{u}(t)\parallel_{1-\gamma;\psi}\\ \parallel v(t)-\bar{v}(t)\parallel_{1-\gamma;\psi}\end{bmatrix}\leq\begin{bmatrix}\mathcal{K}_1\epsilon_1\\ \mathcal{K}_2\epsilon_2\end{bmatrix}.$$

Ce qui après calculs simples donne :

$$\begin{bmatrix}\parallel u(t)-\bar{u}(t)\parallel_{1-\gamma;\psi}\\ \parallel v(t)-\bar{v}(t)\parallel_{1-\gamma;\psi}\end{bmatrix}\leq\frac{1}{\Lambda}\begin{bmatrix}1-\mathcal{Q}_{2g} & \mathcal{Q}_{1g}\\ \mathcal{Q}_{2f} & 1-\mathcal{Q}_{1f}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\epsilon_1\mathcal{M}_1\lambda_{\phi_1}(t)\\ \epsilon_2\mathcal{M}_2\lambda_{\phi_2}(t)\end{bmatrix}.$$

où $\Lambda=(1-\mathcal{Q}_{1f})(1-\mathcal{Q}_{2g})-\mathcal{Q}_{1g}\mathcal{Q}_{2f}\neq 0$ Ce qui en autre implique

$$\parallel u(t)-\bar{u}(t)\parallel_{1-\gamma;\psi}\leq\frac{(1-\mathcal{Q}_{2g})\epsilon_1\mathcal{M}_1\lambda_{\phi_1}(t)}{\Lambda}+\frac{\epsilon_2\mathcal{M}_2\lambda_{\phi_2}(t)\mathcal{Q}_{1g}}{\Lambda}. \tag{3.55}$$

et

$$\parallel v(t)-\bar{v}(t)\parallel_{1-\gamma;\psi}\leq\frac{\epsilon_1\mathcal{M}_1\lambda_{\phi_1}(t)\mathcal{Q}_{2f}}{\Lambda}+\frac{(1-\mathcal{Q}_{1f})\epsilon_1\mathcal{M}_1\lambda_{\phi_1}(t)}{\Lambda}. \tag{3.56}$$

A partir des inégalités (3.55) et (3.56) , on a :

$$\begin{aligned}&\parallel (u,v)-(\bar{u},\bar{v})\parallel_{1-\gamma;\psi}\\ &\quad\leq\parallel u(t)-\bar{u}(t)\parallel_{1-\gamma;\psi}+\parallel v(t)-\bar{v}(t)\parallel_{1-\gamma;\psi}\\ &\quad\leq\frac{(1-\mathcal{Q}_{2g})\epsilon_1\mathcal{M}_1\lambda_{\phi_1}(t)}{\Lambda}+\frac{\epsilon_2\mathcal{M}_2\lambda_{\phi_2}(t)\mathcal{Q}_{1g}}{\Lambda}+\frac{\epsilon_1\mathcal{M}_1\lambda_{\phi_1}(t)\mathcal{Q}_{2f}}{\Lambda}+\frac{(1-\mathcal{Q}_{1f})\epsilon_2\mathcal{M}_2\lambda_{\phi_2}(t)}{\Lambda}\\ &\quad\leq\mathcal{Q}_{fg}\epsilon\lambda_\phi(t).\end{aligned} \tag{3.57}$$

où $\max\{\epsilon_1,\epsilon_2\}=\epsilon$,$\max\{\lambda_{\phi_1}(t),\lambda_{\phi_2}(t)\}=\lambda_\phi(t)$,$\max\{\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2\}=\mathcal{M}$ et

$$\mathcal{Q}_{fg}=\frac{2-\mathcal{Q}_{2g}+\mathcal{Q}_{1g}+\mathcal{Q}_{2f}+\mathcal{Q}_{1f}}{\Lambda}\mathcal{M}.$$

Ainsi, à partir de l'inégalité (3.57) et de la définition 3.1, l'existence la solution du système couplé (3.1) sont HUR stable . □

3.2 Exemple

Nous présentons ici un exemple pour étayer nos résultats. Considérez le système suivant :

$$\begin{cases} {}^{H}D_{1^+}^{\alpha,\beta,\psi}u(t) = \dfrac{(\psi(t)-\psi(a))^{\alpha}(cos(t)|u(t)| + {}^{H}D^{\alpha,\beta,\psi}v(t))}{30}, \quad t \in \mathcal{J} = (1, e], \\ {}^{H}D_{1^+}^{\alpha,\beta,\psi}v(t) = \dfrac{(\psi(t)-\psi(a))^{\alpha}(sin(t)|v(t)| + {}^{H}D^{\alpha,\beta,\psi}u(t))}{20}, \\ I_{1^+}^{1-\gamma,\psi}u(1) = 1, \qquad I_{1^+}^{1-\gamma,\psi}v(t) = 1. \end{cases} \tag{3.58}$$

avec

$$f(t, u(t), {}^{H}D_{1^+}^{\alpha,\beta,\psi}v(t)) = \frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\alpha}(cos(t)|u(t)| + {}^{H}D^{\alpha,\beta,\psi}v(t))}{30},$$

et

$$g(t, {}^{H}D_{1^+}^{\alpha,\beta,\psi}u(t), v(t)) = \frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\alpha}(sin(t)|v(t)| + {}^{H}D^{\alpha,\beta,\psi}u(t))}{20}.$$

Maintenant pour tout $(u, v), (\bar{u}, \bar{v}) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$, ona :

$$|f(t, u(t), v(t)) - f(t, \bar{u}(t), \bar{v}(t))| \leqslant \frac{1}{30}|u(t) - \bar{u}(t)| + \frac{1}{30}|v(t) - \bar{v}(t)|. \tag{3.59}$$

$$|g(t, u(t), v(t)) - g(t, \bar{u}(t), \bar{v}(t))| \leqslant \frac{1}{20}|u(t) - \bar{u}(t)| + \frac{1}{20}|v(t) - \bar{v}(t)|. \tag{3.60}$$

En prenant

$$\psi(t) = \ln(t), \quad \alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2}, \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{3}{4}.$$

Partir des inégalités (3.59),(3.60) on a

$$\mathcal{L}_f = \mathcal{L}'_f = \frac{1}{30}, \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_g = \mathcal{L}'_g = \frac{1}{20}.$$

Après calculs, on obtient $\eta = 0,0292 < 1$, donc le système (3.58) admet une solution unique. De plus

$$\Lambda = (1 - 0,0337)(1 - 0,0283) - 0,0009 \times 0,0009 = 0,9389 \neq 0,$$

ce qui implique que le système couple (3.58) est stable par U-H.

Résumé

L'objective de cet travaille est étudions l'existence et l'unicité des solutions d'un système différentiel fractionnaire implicite de ψ-Hilfer couplé et commuté. Les résultats d'existence et d'unicité sont obtenus en utilisant des techniques de point fixe. En outre, nous étudions différents types de stabilité tels que la stabilité de Hyers-Ulam et la stabilité de Hyers-Ulam-Rassias. Enfin, un exemple est fourni pour illustrer les résultats obtenus.

Mots clés : Equation différentielle fractionnaire de ψ-Hilfer, Théorème du point fixe de Schauder, système couplé implicite, stabilité de Hyers-Ulam, stabilité de Hyers-Ulam-Rassias

Bibliographie

[1] M. Abdo, K. Shah, S. Panchal, & H. Wahash, Existance and Ulam stability results of a coupled system for terminal value problems involving ψ-Hilfer fractional operator.*Advances In Difference Equations*. **2020**pp.1-21(2020)

[2] M.S. Abdo, S.K. Panchal, Fractional integro-differential equations involving φ-Hilfer fractional derivative. Adv. Appl. Math. Mech. 11(2), 338–359 (2019)

[3] M. Ahmed, A.Zada & X.Wang, Existance, uniqueness and stability of implicit switched coupled fractional differential equations of ψ-Hilfer type.*International Gournal Of Nonlineare Sciences And Numerical Simulation.***21**,327-337(2020)

[4] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo. Theory and applications of fractional differential equations. North-Holland mathematics studies, vol. 207. Amsterdam : Elsevier ; 2006 .

[5] I. A. Rus, Ulam stabilities of ordinary differential equations in a Banach space, Carpath. J. Math. 26 (2010),103–107.

[6] S.G. Samko, A.A. Kilbas. Fractional integrals and derivatives. Theory and applications, vol. 1993. Yverdon : Gordon and Breach ; 1993

[7] D. R. Smart, Fixed Point Theorems, Cambridge University Press, Cambridge, 1980.

[8] J.Sousa, & E. De Oliveira, On the ψ-Hilfer fractional derivative.*Communications In Nonlinear Science And Numerical Simulation*. **60**PP.72-91(2018)

[9] J.V.D.C. Sousa, E.C. de Oliveira, A Gronwall inequality and the Cauchy-type problem by means of ψ-Hilfer operator. Differ. Equ. Appl. 11(1), 87–106 (2019)

[10] H. Srivastava, Ž. Tomovski, Fractional calculus with an integral operator containing a generalized Mittag–Leffler function in the kernel. Appl Math Comput 2009 ;211(1) :198–210

[11] Y. Zhou, : Basic Theory of Fractional Differential Equations, vol. 6. World Scientific, Singapore (2014)