RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN TIARET
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUES
Département de Mathématiques

MÉMOIRE MASTER

Présenter en vue de l'obtention du diplôme de master

Spécialité :
« Mathématiques »

Option :
« Analyse fonctionnelle & équations différentielles »

Présenté Par :
Bochra BOUZIANE

Sous L'intitulé :

Existence de solution positive d'une équation elliptique

Soutenu publiquement le 27 / 06 / 2024
à Tiaret devant le jury composé de :

Mr SEBIH Mohammed Elamine	MCB	Université de Mascara	Président
Mr BENKHALED Abdelkader	MCA	Université de Mascara	Examinateur
Mr BEKIRI Mohamed	MCA	Université de Mascara	Encadreur

Année universitaire : 2023/2024

Remerciements :

Je remercie tout d'abord et avant tout le tout puissant ALLAH.

Je tiens à adresser mes remerciements les plus particuliers à Monsieur Mohamed BEKIRI maître de conférences à l'Université Mustapha Stambouli de Mascara, qui a accepté de diriger ce mémoire, pour son aide et ces précieux conseils qui m'ont orienté tout au long de ce travail.

Je remercie chaleureusement Monsieur Mohammed Elamine SEBIH maître de conférences à l'Université Mustapha Stambouli de Mascara de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ce mémoire.

Je remercie également Monsieur Abdelkader BENKHALED maître de conférences à l'Université Mustapha Stambouli de Mascara de m'avoir fait l'honneur d'examiner ce mémoire.

Dédicace :

Je dédie ce modeste travail :

- *À mes chers parents pour leurs soutiens constant durant toutes mes études. Ils occupent une place particulière au fond de moi.*
- *À mes chers frères pour leurs appuis et leurs encouragements,*
- *À tous mes chers amis,*
- *À toutes les personnes qui de près ou de loin m'ont apporté leurs aides.*

Bochra BOUZIANE.

Table des matières

Introduction

Ce mémoire est consacré à l'étude d'une équation aux dérivées partielles semi-linéaire de type Dirichlet sur un domaine borné régulier, qui est à structure variationnelle et qui présente un défaut de compacité. Plus précisément, on s'intéresse à l'existence de solutions positives du problème elliptique suivant

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + u^{2^\star - 1} & \text{dans} \quad \Omega, \\ u > 0 & \text{dans} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_λ}$$

où Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$, $2^\star = \dfrac{2n}{n-2}$ est l'exposant critique de Sobolev, λ un paramètre positif et $\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u)$.
L'équation (P_λ) a été introduit par Brézis-Nirenberg en 1983 dans [4]. Historiquement, le point de départ est le problème de Yamabe en géométrie différentielle qui a été énoncé en [10] comme suit :
Pour toute variété Riemannienne compacte (M, g) de dimension $n \geq 3$, il existe une métrique conforme à g qui est à courbure scalaire $R(x)$ constante.
Ce problème se réduit en terme d'analyse à la recherche d'une fonction strictement positive u solution de l'équation

$$-\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta u = u^{2^\star - 1} - Ru \quad \text{dans} \quad M.$$

Pour plus de détails sur le problème de Yamabe, on pourra se référer aux travaux [2], [7] et [10].

La présence de l'exposant critique de Sobolev $2^\star$ dans l'équation (P_λ) implique que les techniques variationnelles standards ne sont pas applicables car l'injection $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^\star}(\Omega)$ n'est pas compacte.
En se basant sur le travail de Aubin [2], il est possible de récupérer la compacité pour un certain niveau d'énergie en faisant intervenir la meilleure constante de Sobolev.

Ce mémoire se présente comme suit :

- Dans un premier temps, nous rappellons les principaux outlis d'analyse utilisés dans ce mémoire.
- Dans le deuxième chapitre, nous utilisons la méthode variationnelle et les techniques adoptées dans [2, 4] pour montrer l'existence de solutions positives de l'équation elliptique (P_λ), dont l'existence est assurée sous certaine condition sur l'optimum de la fonctionnelle d'énergie.
- Le troisième chapitre est consacré aux fonctions tests.
- On termine ce mémoire par une conclusion générale.

Chapitre 1

Notions préliminaires

Dans ce chapitre, nous introduisons les notions de base et des résultats de l'analyse fonctionnelle en relation que nous utiliserons dans ce mémoire. Pour plus de détails on pourra se référer aux ouvrages [1] et [3].

1.1 Espaces de Lebesgue

Définition 1.1.1 (L'espace L^p)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et p un nombre réel supérieur ou égal à 1. On définit l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ par :*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \quad \textit{mesurable,} \ \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, \mathrm{d}x \right) < \infty \right\}.$$

On note

$$\|f\|_{L^p} = \|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}, p \geq 1.$$

On peut vérifier facilement que $\|\cdot\|_{L^p}$ définit une norme sur l'espace vectoriel $L^p(\Omega)$ ce qui montre que $L^p(\Omega)$ est un espace normé.
Quand $p = 2$, cette norme provient d'un produit scalaire :

$$(f, g)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x) g(x) \, \mathrm{d}x.$$

Définition 1.1.2 (L'espace L^∞)**.** *On définit l'espace $L^\infty(\Omega)$ par :*

$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R};$ *mesurable*$, \exists C > 0$ *, telle que* $|f(x)| \leq C$ *presque partout sur* $\Omega\}$

$L^\infty(\Omega)$ *est une espace normé quand on le muni par la norme :*

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf \{C, |f(x)| \leq C \quad \textit{p. p. sur}\ \Omega.\}.$$

Théorème 1.1.1. *L'espace $L^p(\Omega)$ est*

- *un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$,*
- *un espace séparable pour $1 \leq p < \infty$,*
- *réflexif pour $1 < p < \infty$.*

Théorème 1.1.2 (Théorème de convergence dominée de Lebesgue)**.** *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $L^p(\Omega)$. On suppose que $(f_n)_n$ converge p.p sur Ω vers une fonction f et qu'il existe une fonction $g \in L^p(\Omega)$ telle que pour chaque n*

$$|f_n(x)| \leq |g(x)| \quad \textit{p.p.sur}\ \Omega. \textit{ Alors, } f \in L^p(\Omega) \textit{ et } \lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_p = 0.$$

Théorème 1.1.3 (Inégalité de Hölder)**.** *Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$ (où p' est l'exposant conjugué de p, i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$) avec $1 \leq p \leq \infty$. Alors $fg \in L^1(\Omega)$ et*

$$\int |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

1.2 Espaces de Hölder

Définition 1.2.1. *Soit $\alpha \in (0, 1)$.*

1. *L'espace de Hölder $C^{0,\alpha}(\Omega)$ est l'espace des fonctions continues, muni de la norme*

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} := \sup_{x\in\Omega} |u(x)| + \sup_{x\neq y\in\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha}$$

2. *L'espace de Hölder $C^{2,\alpha}(\Omega)$ est l'espace des fonctions de classe C^2, dont Du et D^2u appartiennent à $C^{0,\alpha}(\Omega)$. On munit $C^{2,\alpha}(\Omega)$ de la norme définie par*

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} := \|u\|_{C^2(\Omega)} + \sup_{x\neq y\in\Omega} \frac{\left|D^2u(x) - D^2u(y)\right|}{|x-y|^\alpha},$$

où Du, D^2u désignent respectivement la dérivée d'ordre 1 et la dérivée d'ordre 2 de u.

1.3 Espace de Sobolev

1.3.1 Quelques rappels

Définition 1.3.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, α un multi-indice de longueur $|\alpha|$.*

1. *On appelle espace des fonctions test sur Ω, noté $\mathcal{D}(\Omega) := C_c^\infty(\Omega)$, l'ensemble des fonctions de classe C^∞ à support compact sur Ω.*
2. *On dit qu'une fonction $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, localement intégrable sur Ω, est α-ième dérivable au sens de distributions, si pour toute fonction $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$,*
$$\int_\Omega (D^\alpha u)\phi \, \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u(D^\alpha \phi) \, \mathrm{d}x.$$
On note alors $v_\alpha = D^\alpha u$, la α-ième dérivée au sens des distributions de u.

Définition 1.3.2. *Soient $p \geq 1$, $m \in \mathbb{N}$. On définit l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ par*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega), D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}, |\alpha| \leq m\}.$$

Proposition 1.3.1. *L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach, muni de la norme suivante :*

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

De plus, $W^{m,p}(\Omega)$ est réflexif si $1 \leq p \leq \infty$.

Remarque 1.3.1. *:*

- *Pour $m = 0$, $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$*
- *Pour $m = 1$, l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \middle/ \begin{array}{c} \exists g_1, g_2, \cdots, g_n \in L^p(\Omega) \\ \displaystyle\int_{\Omega)} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, \mathrm{d}x = -\int_\Omega g_i \varphi \, \mathrm{d}x, \ \textit{pour toute} \\ \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \ \textit{et tout} \ i = 1, \cdots, n \end{array} \right\}.$$

- *Pour $p = 2$, l'espace $W^{m,2}(\Omega)$ est particulièrement noté par $H^m(\Omega)$, on l'appelle parfois espace de Sobolev d'ordre m.*

Proposition 1.3.2. *Pour tout entier n, et tout réel* $p > 1$, $W^{m,p}(\Omega)$ *est réflexif.*

Proposition 1.3.3. *L'espace* $H^m(\Omega)$ *est un espace de Hilbert muni du produit scalaire*

$$\langle u, v\rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v\rangle_{L^2(\Omega)},$$

et de la norme induite

$$||u||_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} ||D^\alpha u||^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Remarque 1.3.2. *: L'espace* $H^1(\Omega)$ *est muni du produit scalaire*

$$\langle u, v\rangle_{H^1(\Omega)} = \langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \nabla u, \nabla v\rangle_{L^2(\Omega)},$$

et de la norme induite

$$||u||^2_{H^1} = ||u||^2_{L^2} + ||\nabla u||^2_{L^2}.$$

Définition 1.3.3. *L'espace* $W^{m,p}_0(\Omega)$ *désigne la fermeture de* $C^\infty_c(\Omega)$ *dans* $W^{m,p}(\Omega)$. *On note* $H^1_0(\Omega) = W^{1,2}_0(\Omega)$.

On rappelle maintenant le théorème de Banach qui consiste à caractériser la réflexivité des espaces de Sobolev.

Définition 1.3.4 (Convergence faible)**.** *Soit* $(E, ||.||)$ *un espace de Banach. On dit qu'une suite* (u_n) *de E est faiblement convergente vers u si pour toute forme linéaire* Φ *continue sur E,* $\Phi(u_n)$ *converge vers* $\Phi(u)$ *dans* $\mathbb{R}$. *La limite u est unique et on a nécessairement que*

$$||u|| \leq \lim_n \inf ||u_n||.$$

Théorème 1.3.1 (Théorème de Banach)**.** *L'espace de Banach* $(E, ||.||)$ *est réflexif si est seulement si sa boule unité fermée centrée en* 0 *est faiblement compacte. Autrement dit, l'espace* $(E, ||.||)$ *est réflexif si est seulement si toute suite bornée de E possède une sous-suite qui converge faiblement.*

1.3.2 Inclusions de Sobolev

Nous rappelons des résultats très importants sur les espaces de Sobolev. Il s'agit des inclusions continues et compactes de Sobolev.

Définition 1.3.5. *Soient* $(E, \|\cdot\|)$, $(F, \|\cdot\|)$ *deux espaces vectoriels normés, avec E un sous-espace vectoriel de F. On dira que l'inclusion de E dans F* $(E \subset F)$ *est continue s'il existe un réel* $C > 0$ *tel que, pour tout* $x \in E$, $\|x\|_F < C\,\|x\|_E$.

Définition 1.3.6. *Soient* $(E, \|\cdot\|)$, $(F, \|\cdot\|)$ *deux espaces vectoriels normés, avec E un sous-espace vectoriel de F. On dira que l'inclusion de E dans F est compacte si les sous-ensembles bornés de* $(E, \|\cdot\|)$ *sont d'adhérence compacte dans* $(F, \|\cdot\|)$. *Cela revient à dire que toute suite bornée dans* $(E, \|\cdot\|)$ *possède une sous-suite convergente dans* $(F, \|\cdot\|)$.

Définition 1.3.7. *Pour tout* $1 \leq p \leq n \leq \infty$, *on définit l'exposant critique de Sobolev par*

$$p^\star = \frac{np}{n-p}.$$

Nous énonçons le premier résultat concernant les inclusions continues de Sobolev.

Théorème 1.3.2 (Théorème d'inclusion de Sobolev)**.** *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un domaine borné régulier, alors*

- *L'espace* $W^{1,p}(\Omega)$ *s'injecte d'une manière continue dans l'espace* $L^q(\Omega)$ *pour tout* $1 < q \leq p^\star$ *avec* $p^\star = \dfrac{np}{n-p}$.
- *En particulier, l'inclusion* $H^1(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ *est continue pour tout* $q \in]1,\ 2^\star]$.

On donne maintenant un résultat très important concernant les injections compactes.

Théorème 1.3.3 (Théorème de Rellich Kondrakov)**.** *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un domaine borné régulier, alors*

- *L'espace* $W^{1,p}(\Omega)$ *s'injecte d'une manière compacte dans l'espace* $L^q(\Omega)$ *pour tout* $1 < q < p^\star$ *avec* $p^\star = \dfrac{np}{n-p}$.
- *En particulier, l'inclusion* $H^1(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ *est compacte pour tout* $q \in]1,\ 2^\star[$.

1.3.3 Meilleure constante de Sobolev pour $H^1(\mathbb{R}^n) \subset L^{2^\star}(\mathbb{R}^n)$

Définition 1.3.8. *On définit $K_0 > 0$ par*

$$S_0 = \frac{1}{K_0} := \inf_{u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)-\{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{2^\star} \, \mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{2^\star}}}$$

la meilleure constante dans l'inégalité $||u||^2_{2^\star} \leq K||\nabla u||^2_2$ de l'inclusion de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^n) \subset L^{2^\star}(\mathbb{R}^n)$ où $2^\star = \dfrac{2n}{n-2}$ est l'exposant critique de Sobolev. La valeur de cette constante a été calculée par Talenti [9]. Il a montré que

$$S_0 = \frac{1}{K_0} = \frac{n(n-2)\omega_n^{\frac{2}{n}}}{4}, \tag{1.1}$$

où ω_n est le volume de la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Nous énonçons l'inégalité de Sobolev qui contient la meilleure constante K_0.

Lemme 1.3.1. *([9]) Soit (Ω) un domaine borné de $\mathbb{R}^n$. Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe $B_\epsilon \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $u \in H^1\,(\Omega)$ on a*

$$||u||^2_{2^\star} \leq (K_0 + \epsilon)\, ||\nabla u||^2_2 + B_\epsilon\, ||u||^2_2\,, \tag{1.2}$$

où S_0 est la meilleure constante Euclidienne et $2^\star = \dfrac{2n}{n-2}$.

1.3.4 Inégalité de poincaré

Théorème 1.3.4. *[1, 3] Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Alors, il existe une constante $c(\Omega) > 0$, telle que*

$$||u||_{L^2(\Omega)} \leq c||\nabla u||_{L^2(\Omega)} \; \forall u \in H^1_0(\Omega). \tag{1.3}$$

1.4 Rappels sur les EDP

Nous rappelons quelques définitions et propriétés des équations aux dérivées partielles (EDPs) du second ordre notamment la notion de solutions faibles,

les résultats de régularités et le principe de maximum associé a un opérateur elliptique du second ordre. On terminera avec le théorème des multiplicateurs de Lagrange. Pour plus de détails on pourra se référer à l'ouvrage de Gilbard-Trudinger [5]

1.4.1 Opérateur linéaire du second ordre

Définition 1.4.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$.*

- *On appelle opérateur linéaire du second ordre tout opérateur qui s'écrit sous la forme*

$$L(u) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)D_{ij}u + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)D_iu + c(x)u, \tag{1.4}$$

  où les coefficients a_{ij}, b_i sont des fonctions réelles de classe C^∞ sur Ω.
- *On dira que l'opérateur L est elliptique (coercive) s'il existe $\alpha > 0$, tel que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ et pour tout x on a*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_j\xi_i \geq \alpha|\xi|^2. \tag{1.5}$$

1.4.2 Principe du maximum

Définition 1.4.2. *On dira que l'opérateur L vérifie le principe du maximum si*

$$\forall u \in C^\infty(\Omega), L(u) \geq 0 \Rightarrow u > 0 \text{ ou } u = 0. \tag{1.6}$$

Théorème 1.4.1. *Soient Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ et $u \in C^\infty(\Omega)$ une fonction positive ou nulle. On suppose qu'en tout point x de Ω*

$$(-\Delta u)(x) \geq u(x)f(x, u(x)),$$

où $f : \Omega\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue. Alors u est soit partout strictement positive, soit identiquement nulle.

Remarque 1.4.1. *L'opérateur linéaire du second ordre L défini par la formule* (1.4) *vérifie le principe de maximum si et seulement si il est elliptique.*

1.4.3 Solutions faibles et régularité

Définition 1.4.3. *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et L un opérateur linéaire du second ordre qui s'écrit sous la forme* (1.4). *Étant donnée $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, on dira que u est une solution faible de l'équation $L(u) = f$ si pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$*

$$\langle Lu, \phi \rangle = \langle f, \phi \rangle . \tag{1.7}$$

Autrement dit

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} a_{ij}(D_i\phi)(D_j u)\, \mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} b_i(D_i u)\phi\, \mathrm{d}x + \int_{\Omega} cu\phi\, \mathrm{d}x = \int_{\Omega} f\phi\, \mathrm{d}x. \tag{1.8}$$

Remarque 1.4.2. *Les solutions faibles d'un problème elliptique du second ordre ne sont pas régulières (classiques). Pour cela nous avons besoin des résulats de régularité. Pour plus de détails sur ce sujet on pourra se référer au livre de Gilbarg-Trudinger [5].*

Théorème 1.4.2. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et L un opérateur linéaire elliptique du second ordre à coefficients de classe C^∞ qui s'écrit sous la forme* (1.4). *Soient de plus $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ et u une solution faible de l'équation $L(u) = f$.*

- *(i) Si $f \in C^k_\alpha(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in]0, 1[$, alors $u \in C^{k+2}_\alpha(\Omega)$. En particulier si $f \in C^\infty(\Omega)$, alors $u \in C^\infty(\Omega)$.*
- *(i) Si $f \in W^{m,p}_{loc}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, $p > 1$, alors $u \in W^{m+2,p}_{loc}(\Omega)$.*

1.4.4 Point critique

On rappelle maintenant les notions de point critique et de valeur critique que nous utiliserons dans la suite.

Définition 1.4.4. *Soient X un espace de Banach et $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ une fonctionnelle.*

- *On dit que $u \in X$ est un point critique de la fonctionnelle J si $J'(u) = 0$. De plus l'image du point critique u par la fonctionnelle J est appelée une valeur critique de J et on écrira $J(u) = C$.*
- *On dit que u est un point régulier de J si u n'est pas un point critique.*

Remarque 1.4.3. *Très souvent, lorsque X est un espace fonctionnel et l'équation $J'(u) = 0$ correspond à une équation aux dérivées partielles, on dit que $J'(u) = 0$ est l'équation d'Euler satisfaite par le point critique u.*

1.4.5 Théorème des multiplicateurs de Lagrange

Très souvent, trouver la solution d'une équation aux dérivées partielles revient à minimiser une fonctionnelle sur un ensemble de contraintes. On rappellera le théorème des multiplicateurs de Lagrange qui est un résultat très important que nous utiliserons par la suite pour montrer l'existence de solutions.

Théorème 1.4.3. *[6][Théorème des multiplicateurs de Lagrange] Soient X un espace de Banach, $F \in C^1(X, \mathbb{R})$, $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ et un ensemble de contraintes non vide*

$$\mathcal{H} := \{v \in X \;/\; F(v) = 0\}.$$

On suppose que pour tout $u \in \mathcal{H}$, on a $F'(u) \neq 0$. Si en un point u_0 de $\mathcal{H}$

$$J(u_0) = \min_{u \in \mathcal{H}} J(u), \tag{1.9}$$

alors il existe un réel λ tel que

$$J'(u_0) = \lambda F'(u_0).$$

Cette relation est appelée l'équation d'Euleur-Lagrange associée au problème de minimisation (1.9), le réel λ est appelé le multiplicateur de Lagrange.

Chapitre 2

Existence de solutions positives d'une équation elliptique

Position du problème

Dans ce chapitre nous cherchons les conditions pour lesquelles l'équation elliptique semi-linéaire suivante :

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + u^{2^\star -1} & \text{dans} \quad \Omega, \\ u > 0 & \text{dans} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_λ}$$

possède des solutions positives, où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ avec $n \geq 3$, $2^\star = \dfrac{2n}{n-2}$ est l'exposant critique de Sobolev, λ un paramètre positif et $\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u)$.

La présence de l'exposant critique de Sobolev dans cette équation pose un problème de compacité dans l'inclusion de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^{2^\star}(\Omega)$. Pour récupérer la compacité donnée par le théorème 1.3.3 de Rellich-Kondrakov, nous utilisons l'approche variationnelle employée par Aubin dans [2] et Brézis-Nirenberg dans [4], qui consiste à approcher l'équation critique (P_λ) par une famille d'équations sous-critiques de type

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + u^{q-1} & \text{dans} \quad \Omega, \\ u > 0 & \text{dans} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

où q est sous-critique, i.e. $q < 2^\star$.

2.0.1 Résultat principal

Le résultat principal de ce chapitre est énoncé dans le théorème suivant.

Théorème 2.0.1 (Théorème principal)**.** *Soit* Ω *un domaine borné de* $\mathbb{R}^n$ *avec* $n \geq 4$*. On suppose que* $\lambda \in]0, \lambda_1[$ *où* λ_1 *est la première valeur propre du Laplacien sur* Ω*. Sous la condition*

$$S_{2^\star} = \inf_{u \in H_0^1(\Omega) - \{0\}} \frac{\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \lambda u^2\right) \, \mathrm{d}x}{\left(\int_\Omega u^{2^\star} \, \mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{2^\star}}} < S_0, \tag{2.2}$$

où S_0 *est la meilleure constante de Sobolev donnée par la définition 1.3.8,* $2^\star = \dfrac{2n}{n-2}$ *désigne l'exposant critique de Sobolev, alors il existe une fonction strictement positive* $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ *qui est solution de l'équation*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + u^{2^\star - 1} & \textit{dans} \quad \Omega, \\ u > 0 & \textit{dans} \quad \Omega, \\ u = 0 & \textit{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

et qui minimise la fonctionnelle I *définie sur* $H_0^1(\Omega)$ *par :*

$$I_\lambda(u) = \|\nabla u\|_2 - \lambda \|u\|_2^2 = \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \lambda u^2\right) \, \mathrm{d}x,$$

sous la contrainte

$$\|u\|_2 = \int_\Omega u^{2^\star} \, \mathrm{d}x = 1.$$

Remarque 2.0.1. *L'équation* (P_λ) *ne possède pas une solution lorsque* $\lambda \geq \lambda_1$*, où* λ_1 *est la première valeur propre du Laplacien* $-\Delta$ *. En effet, soit* φ_1 *une fonction propre associée à* λ_1 *avec* $\varphi_1 > 0$*. Supposons que* u *est une solution de l'équation* (P_λ)*. On a*

$$\begin{aligned} -\int_\Omega (\Delta u)\varphi_1 &= \lambda_1 \int_\Omega u\varphi_1 \\ &= \lambda \int_\Omega u\varphi_1 + \underbrace{\int_\Omega u^{2^\star}\varphi_1}_{>0} \\ &> \lambda \int_\Omega u\varphi_1. \end{aligned}$$

Cela entraîne que

$$\lambda_1 > \lambda.$$

La suite de ce chapitre est organisé comme suit :

- ► Dans la première section, nous construisons par la méthode variationnelle, une suite de fonctions positives (u_q) solutions de la famille d'équations sous-critiques suivantes :

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + u^{q-1} & \text{dans} \quad \Omega, \\ u > 0 & \text{dans} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

  où q est l'exposant sous-critique tel que $2 < q < 2^\star = \dfrac{2n}{n-2}$.

- ► Dans la deuxième section, nous étudions le comportement de la suite (u_q) lorsque q tend vers $2^\star$. Autrement dit, nous montrons que la suite (u_q) converge vers une solution strictement positive ($u \neq 0$) de l'équation critique (P_λ) lorsque l'exposant sous-critique q tend vers l'exposant critique $2^\star$.

2.1 Équations avec exposants sous-critiques

Dans cette section, on s'intéresse à l'existence de solutions des équations sous-critiques suivantes :

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + u^{q-1} & \text{dans} \quad \Omega, \\ u > 0 & \text{dans} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.3}$$

avec $q < 2^\star$

Nous rappelons maintenant les notions suivantes :

1. I_λ est la fonctionnelle d'énergie associée à l'équation (2.3) définie sur l'espace $H_0^1(\Omega)$ par

$$I_\lambda(u) = \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \lambda u^2 \right) \mathrm{d}x = \|\nabla u\|_2^2 - \lambda \|u\|_2^2. \tag{2.4}$$

2. S_q est le minimum de la fonctionnelle I_λ

$$S_q := \inf_{u \in H_0^1(\Omega) - \{0\}} \frac{I_\lambda(u)}{\|u\|_q^2} = \inf_{u \in \mathcal{H}_q} I_\lambda(u)$$

où $\mathcal{H}_q$ est l'ensemble contraintes définie par :

$$\mathcal{H}_q = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) \ / \ \int_\Omega u^q \, \mathrm{d}x = 1 \right\}.$$

2.1.1 Résultat d'existence pour les équation sous-critiques

On donne maintenant le résultat d'existence pour la famille d'équations sous-critiques.

Théorème 2.1.1. *Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ avec $n \geq 3$. Pour tout réel $q \in]2, 2^\star[$, il existe une fonction strictement positive $u_q \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ qui est solution de l'équation*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + S_q u^{q-1} & \textit{dans} \quad \Omega, \\ u > 0 & \textit{dans} \quad \Omega, \\ u = 0 & \textit{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.5}$$

et qui vérifie $\int_\Omega u^q \, \mathrm{d}x = 1$, où $S_q = \inf_{u \in \mathcal{H}_q} I_\lambda(u) = I_\lambda(u_q)$.

Preuve: Pour montrer ce théorème, il nous suffit de démontrer les points suivants,

(a) Tout d'abord, on montre que S_q est fini.

(b) On montre ensuite que le minimum S_q de la fonctionnelle I_λ est atteint par une fonction positive ou nulle $u_q \in \mathcal{H}_q$.

(c) On montre enfin que u_q est régulière, strictement positive et solution de (2.3).

(a) : Pour montrer que le minimum S_q de la fonctionnelle I_λ est fini, il suffit de montrer que pour tout $u \in \mathcal{H}_q$, $I_\lambda(u)$ est minorée par une quantité finie.

En effet, soit $u \in \mathcal{H}_q$ i.e. $\displaystyle\int_\Omega |u|^q \,\mathrm{d}x = 1$. Avec l'inégalité de Hölder, on pourra écrire que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \lambda u^2 \,\mathrm{d}x &\leq \lambda_1 \int_\Omega u^2 \,\mathrm{d}x \\ &\leq \lambda_1 \left(\int_\Omega u^q \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{q}} V(\Omega)^{1-\frac{2}{q}} \\ &\leq \lambda_1 V(\Omega)^{1-\frac{2}{q}},\end{aligned} \tag{2.6}$$

où $V(\Omega) = \displaystyle\int_\Omega \mathrm{d}x$ désigne le volume de Ω et λ_1 est la première valeur propre du Laplacien.

Il est clair que pour tout $u \in \mathcal{H}_q$

$$\begin{aligned}I_\lambda(u) &= \int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x - \int_\Omega \lambda u^2 \,\mathrm{d}x \\ &\geq \int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x - \lambda_1 V(\Omega)^{1-\frac{2}{q}} \\ &\geq -\lambda_1 V(\Omega)^{1-\frac{2}{q}}.\end{aligned}$$

Par conséquent

$$S_q \geq -\lambda_1 V(\Omega)^{1-\frac{2}{q}}, \tag{2.7}$$

ce qui entraine que le minimum S_q est fini.

(b) : On montre maintenant qu'il existe une fonction $u_q \in \mathcal{H}_q$, positive ou nulle presque partout qui réalise $I_\lambda(u_q) = S_q$. Pour ce faire, soit (v_i) une suite minimisante supposée positive ou nulle de la fonctionnelle I_λ sur $\mathcal{H}_q$ i.e.

$$\lim_{q\to 2^\star} I_\lambda(v_i) = S_q.$$

Tout d'abord, on montre que la suite (v_i) est bornée dans l'espace $H_0^1(\Omega)$. En effet, pour i suffisamment grand on peut écrire

$$I_\lambda(v_i) \leq S_q + 1$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} \|\nabla v_i\|_2^2 &= \int_\Omega |\nabla v_i|^2 \, \mathrm{d}x \\ &= I_\lambda(v_i) - \int_\Omega \lambda v_i^2 \, \mathrm{d}x \\ &\leq S_q + 1 - \int_\Omega \lambda v_i^2 \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Par ailleurs, en combinant cette dernière inégalité et l'inégalité (2.7) on obtient alors pour tout i que

$$\|\nabla v_i\|_2^2 \leq S_q + 1 + \lambda_1 V(\Omega)^{1-\frac{2}{q}}. \tag{2.8}$$

D'autre part de l'inégalité de Hölder on peut écrire

$$\|v_i\|_2^2 = \int_\Omega v_i^2 \, \mathrm{d}x \leq \left(\int_\Omega v_i^q \, \mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{q}} \left(\int_\Omega \mathrm{d}x\right)^{1-\frac{2}{q}}.$$

Or comme $v_i \in \mathcal{H}_q$ i.e. $\int_\Omega |v_i|^q \, \mathrm{d}x = 1$,on déduit que

$$\|v_i\|_2^2 \leq V(\Omega)^{1-\frac{2}{q}} \tag{2.9}$$

Par ailleurs, en combinant l'inégalité (2.8) et (2.9), on obtient alors pour tout i que

$$\begin{aligned} \|v_i\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &:= \|\nabla v_i\|_2^2 + \|v_i\|_2^2 \\ &\leq S_q + 1 + \lambda_1 V(\Omega)^{1-\frac{2}{q}} + V(\Omega)^{1-\frac{2}{q}}. \end{aligned}$$

Ce qui montre que la suite v_i est bornée dans l'espace $H_0^1(\Omega)$ qui est un espace réflexif alors d'après le théorème de Banach (voir le théorème 1.3.1), il existe une sous-suite de (v_i) encore notée (v_i) et une fonction $u_q \in H_0^1(\Omega)$ telle que

(*i*) (v_i) converge faiblement vers u_q dans $H_0^1(\Omega)$,

(ii) (v_i) converge fortement vers u_q dans $L^q(\Omega)$ avec $q < 2^\star$.

Le point (ii) résulte du théorème de Rellich Kondrakov (voir le théorème 1.3.3) puisque l'espace $H_0^1(\Omega)$ s'injecte d'une manière compacte dans l'espace $L^q(\Omega)$.

Du point (ii) on peut déduire que la suite (v_i) converge fortement dans $L^2(\Omega)$ et presque partout sur Ω vers u_q

Il résulte du point (i) et de la définition 1.3.4 de la convergence faible que

$$\left\|u_q\right\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \lim_{i\to+\infty} \inf \|v_i\|^2_{H_0^1(\Omega)},$$

i.e.

$$\left\|\nabla u_q\right\|_2^2 + \left\|u_q\right\|_2^2 \leq \lim_{i\to+\infty} \inf \left\{\|\nabla v_i\|_2^2 + \|v_i\|_2^2\right\}.$$

Puisque v_i converge fortement vers u_q dans $L^2(\Omega)$, il suit que

$$\left\|\nabla u_q\right\|_2^2 \leq \lim_{i\to+\infty} \inf \|\nabla v_i\|_2^2.$$

De cette dernière inégalité et de la convergence forte de v_i vers u_q dans $L^2(\Omega)$, on récupère que

$$\begin{aligned} I_\lambda(u_q) &= \int_\Omega \left(|\nabla u_q|^2 - \lambda u_q^2\right) \mathrm{d}x \\ &= \left\|\nabla u_q\right\|_2^2 - \int_\Omega \lambda u_q^2 \,\mathrm{d}x \\ &\leq \lim_{i\to+\infty} \inf \left\{\|\nabla v_i\|_2^2 - \int_\Omega \lambda v_i^2 \,\mathrm{d}x\right\} \\ &= \lim_{i\to+\infty} \inf I_\lambda(v_i) := S_q. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$I_\lambda(u_q) \leq S_q. \tag{2.10}$$

Comme la suite (v_i) converge fortement vers u_q dans $L^q(\Omega)$ et du fait que

$$\int_\Omega |v_i|^q \,\mathrm{d}x = 1,$$

il résulte que

$$\int_\Omega |u_q|^q \,\mathrm{d}x = \lim_{i\to+\infty} \int_\Omega |v_i|^q \,\mathrm{d}x = 1.$$

D'où $u_q \in \mathcal{H}_q$, et comme S_q est le minimum de I_λ sur $\mathcal{H}_q$, on déduit que

$$I_\lambda(u_q) \geq S_q. \tag{2.11}$$

De (2.10) et (2.11), on déduit que

$$I_\lambda(u_q) = S_q.$$

D'où le minimum de la fonctionnelle I_λ est atteint par une fonction u_q. En vertu du théorème des multiplicateurs de Lagrange (voir le théorème 1.4.3), il existe un coefficient (qu'on appelle multiplicateur de Lagrange) $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour toute $\phi \in H_0^1(\Omega)$

$$\langle I'_\lambda(u_q), \phi \rangle = \alpha \langle F'(u_q), \phi \rangle,$$

où

$$F(u_q) = \int_\Omega |u_q|^q \, \mathrm{d}x.$$

Par conséquent

$$2 \int_\Omega \left(\nabla u_q \nabla \phi - \lambda u_q \phi \right) \, \mathrm{d}x = q\alpha \int_\Omega u_q^{q-1} \phi \, \mathrm{d}x.$$

Pour $\phi = u_q$, la dernière relation devient

$$I_\lambda(u_q) = \frac{q}{2} \alpha \underbrace{\int_\Omega u_q^q \, \mathrm{d}x}_{=1} = \frac{q}{2} \alpha = S_q,$$

et par suite, la fonction u_q vérifie pout toute $\phi \in H_0^1(\Omega)$ la relation

$$\int_\Omega \left(\nabla u_q \nabla \phi - \lambda u_q \phi \right) \, \mathrm{d}x = S_q \int_\Omega u_q^{q-1} \phi \, \mathrm{d}x.$$

D'après la définition de la solution faible (voir la définition 1.4.3), il résulte que u_q est une solution faible de l'équation

$$-\Delta u = \lambda u + S_q u^{q-1}.$$

<u>**(c)**</u> : Pour montrer que la solution u_q est de classe $C^{2,\alpha}(\Omega)$ pour un certain $\alpha \in \,]0, 1[$, il suffit d'appliquer le théorème de régularité (voir le théorème

1.4.2). De plus le principe du maximum énoncé au théorème 1.4.1, montre que u_q est soit partout strictement positive ou soit partout nulle, comme

$$u_q \in \mathcal{H}_q \text{ i.e } \int_\Omega |u_q|^q \, \mathrm{d}x = 1,$$

alors la fonction u_q est non identiquement nulle.
Par conséquent, la fonction u_q est strictement positive. ■

Remarque 2.1.1. *Il est clair que si la fonction u_q est une solution de l'équation* (2.5)*, alors la fonction $v_q = S_q^{\frac{1}{q-2}} u_q$ est une solution de l'équation* (2.1).

2.2 Équation avec exposant critique

2.2.1 Comportement de solutions des équations sous-critiques

Soit Ω un domaine bornée de $\mathbb{R}^n$, avec $n \geq 3$, sur lequel on considère l'équation critique (P_λ),

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + u^{2^\star - 1} & \text{dans} \quad \Omega, \\ u > 0 & \text{dans} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.12}$$

Dans cette section, on étudie le comportement de la suite $(u_q)_q$ construite dans le Théorème 2.1.1, lorsque l'exposant sous-critique q tend vers l'exposant critique $2^\star = \dfrac{2n}{n-2}$. Plus précisément, on montre que $(u_q)_q$ converge vers une solution non triviale de l'équation (P_λ), lorsque q tend vers $2^\star$.
Tout d'abord, on considère les notations suivantes :

* On note
$$I_\lambda(u) = \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \lambda u^2 \right) \, \mathrm{d}x,$$
la fonctionnelle associée à l'équation (P_λ)
* Le minimum $S_{2^\star}$ de la fonctionnelle I_λ est défini par :
$$S_{2^\star} := \inf_{u \in H_0^1(\Omega)/\{0\}} \frac{I_\lambda(u)}{\|u\|_{2^\star}^2} = \inf_{u \in \mathcal{H}_{2^\star}} I_\lambda(u),$$
où $\mathcal{H}_{2^\star}$ est l'ensemble de contraintes définie par
$$\mathcal{H}_{2^\star} := \left\{ u \in H_0^1(\Omega) \; / \; \int_\Omega u^{2^\star} \, \mathrm{d}x = 1 \right\}.$$

Le premier résultat que l'on veut démontrer assure la convergence de la suite $(S_q)_q$ lorsque q tend vers $2^\star = \dfrac{2n}{n-2}$.

Lemme 2.2.1. *Pour $q \in \,]2, 2^\star[$, la suite $(S_q)_q$ converge vers le minimum $S_{2^\star}$ lorsque q tend vers $2^\star$, i.e. $\lim_{q \to 2^\star} S_q = S_{2^\star}$.*

Preuve: Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $u \in \mathcal{H}_{2^\star}$ telle que

$$I_\lambda(u) \leq S_{2^\star} + \varepsilon.$$

Comme

$$\lim_{q\to 2^\star} \int_\Omega u_q^q \,\mathrm{d}x = \int_\Omega u^{2^\star} \,\mathrm{d}x,$$

on obtient alors

$$\lim_{q\to 2^\star} I_\lambda(u_{q)} \leq S_{2^\star} + \varepsilon.$$

par suite

$$\lim_{q\to 2^\star} S_q \leq I_\lambda(u) \leq S_{2^\star} + \varepsilon$$

Or ε est quelconque, ceci entraîne que

$$\lim_{q\to 2^\star} S_q \leq S_{2^\star}. \tag{2.13}$$

D'autre part, suite à l'inégalité de Hölder, on aura

$$\begin{aligned}\lim_{q\to 2^\star} \left(\int_\Omega u_q^{2^\star} \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{q}{2^\star}} V^{1-\frac{q}{2^\star}}(\Omega) &= \lim_{q\to 2^\star} \inf \int_\Omega u_q^{2^\star} \,\mathrm{d}x \\ &\geq 1.\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} S_{2^\star} \leq \frac{I_\lambda(u_q)}{\left(\int_\Omega u_q^{2^\star} \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{2^\star}}} &\leq I_\lambda(u_q) \\ &= S_q, \end{aligned}$$

et ainsi

$$\lim_{q\to 2^\star} S_q \geq S_{2^\star}. \tag{2.14}$$

On déduit des relations (2.13) et (2.14) que

$$\lim_{q\to 2^\star} S_q = S_{2^\star}.$$

D'où le résultat demandé. ∎

Le deuxième résultat que l'on veut démontré assure la convergence de la suite $(u_q)_q$ vers une solution faible de l'équation critique (P_λ) lorsque q tend vers $2^\star = \dfrac{2n}{n-2}$.

Lemme 2.2.2. *La suite de fonctions* $(u_q)_q$ *donnée par le Théorème 2.1.1 converge faiblement vers une fonction positive ou nulle* $u \in H_0^1(\Omega) \cap C^{2,\alpha}(\Omega)$ *solution faible de l'équation critique*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + S_{2^\star} u^{2^\star - 1} & \text{dans} \quad \Omega, \\ u > 0 & \text{dans} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

où $S_{2^\star}$ *est le minimum de* I_λ *sous la contrainte* $\mathcal{H}_{2^\star}$*.*

Preuve: On commence par montrer que la suite de fonctions $(u_q)_q$ donnée par le théorème 2.1.1 reste bornée dans l'espace $H_0^1(\Omega)$. Autrement dit, on constate que la norme $||u_q||_{H_0^1(\Omega)}$ est majorée par une constante C indépendamment de q.

En effet, avec l'inégalité de Hölder on pourra écrire que

$$\int_\Omega u_q^2 \, \mathrm{d}x \leq \left(\underbrace{\int_\Omega (u_q^2)^{\frac{q}{2}} \, \mathrm{d}x}_{=1} \right)^{\frac{2}{q}} V(\Omega)^{1-\frac{2}{q}} = V(\Omega)^{1-\frac{2}{q}}, \tag{2.15}$$

où $V(\Omega) = \displaystyle\int_\Omega dv$ est le volume du domaine Ω.

Il est clair que $V(\Omega)^{\frac{-1}{q}} \in \mathcal{H}_q$, puisque

$$\int_\Omega \left(V(\Omega)^{\frac{-1}{q}} \right)^q \, \mathrm{d}x = \frac{1}{V(\Omega)} \int_\Omega \mathrm{d}x = 1.$$

Par conséquent,

$$S_q = I_\lambda(u_q) \leq I_\lambda \left(V(\Omega)^{\frac{-1}{q}} \right).$$

Or

$$\begin{aligned} I_\lambda \left(V(\Omega)^{\frac{-1}{q}} \right) &:= \underbrace{\int_\Omega \left| \nabla (V(\Omega)^{\frac{-1}{q}}) \right|^2 \, \mathrm{d}x}_{=0} - \int_\Omega \lambda \left(V(\Omega)^{\frac{-1}{q}} \right)^2 \, \mathrm{d}x \\ &= -V(\Omega)^{\frac{-2}{q}} \int_\Omega \lambda \, \mathrm{d}x \\ &= -V(\Omega)^{\frac{-2}{q}} \int_\Omega \lambda \, \mathrm{d}x \\ &= -\lambda V(\Omega)^{1-\frac{2}{q}}. \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$S_q \leq -\lambda V(\Omega)^{1-\frac{2}{q}}.$$

Ainsi

$$S_q \leq \lambda_1 V(\Omega)^{1-\frac{2}{q}}, \tag{2.16}$$

où λ_1 est la première valeur propre du Laplacien.
En combinant (2.15) et (2.16) on obtient immédiatement que

$$\begin{aligned}
\|u_q\|_{H_0^1(\Omega)} &= \int_\Omega |\nabla u_q|^2 \,\mathrm{d}x + \int_\Omega u_q^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \underbrace{\int_\Omega |\nabla u_q|^2 \,\mathrm{d}x - \int_\Omega \lambda u_q^2 \,\mathrm{d}x}_{=S_q} + \int_\Omega u_q^2 \,\mathrm{d}x + \int_\Omega \lambda u_q^2 \,\mathrm{d}x \\
&= S_q + \int_\Omega (1+\lambda)\, u_q^2 \,\mathrm{d}x \\
&\leq \lambda_1 V(\Omega)^{1-\frac{2}{q}} + (1+\lambda_1) V(\Omega)^{1-\frac{2}{q}} \\
&\leq (1+2\lambda_1) V(\Omega)^{1-\frac{2}{q}}.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

D'autre part, la fonction $\left(1 + \dfrac{1}{V(\Omega)}\right)^{\alpha}$ est croissante en α, et comme

$$\frac{2}{q} < 1, \quad \text{puisque } q \in \,]2, 2^{\star}[\,,$$

on pourra écrire que

$$\begin{aligned}
V(\Omega)^{1-\frac{2}{q}} &= V(\Omega)\left(\frac{1}{V(\Omega)}\right)^{\frac{2}{q}} \\
&\leq V(\Omega)\left(1 + \frac{1}{V(\Omega)}\right)^{\frac{2}{q}} \\
&\leq V(\Omega)\left(1 + \frac{1}{V(\Omega)}\right)^{1} \\
&\leq V(\Omega) + 1.
\end{aligned}$$

Par conséquent, l'inégalité (2.17) devient

$$\|u_q\|_{H_0^1(\Omega)} \leq (V(\Omega)+1)\,(1+2\lambda_1)\,. \tag{2.18}$$

Ce qui montre que la suite $(u_q)_q$ est bornée dans l'espace réflexif $H_0^1(\Omega)$. D'après le théorème de Banach (voir le théorème 1.3.1), il existe une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ et une sous-suite de $(u_q)_q$ encore notée $(u_q)_q$, telle que, lorsque $q \to 2^\star$, on a :

(a) $(u_q)_q$ converge faiblement vers u dans $H_0^1(\Omega)$,

(b) $(u_q)_q$ converge fortement vers u dans $L^q(\Omega)$ où $q < 2^\star$, en particulier dans $L^2(\Omega)$,

(c) (u_q^{q-1}) converge faiblement vers $u^{2^\star-1}$ dans $L^{\frac{2^\star}{2^\star-1}}(\Omega)$.

Le point (b) résulte du Théorème de Rellich Kondrakov (voir le théorème 1.3.3) puisque l'espace $H_0^1(\Omega)$ s'injecte d'une manière compacte dans l'espace $L^q(\Omega)$.
Le point (c) résulte du Théorème de Banach (voir le théorème 1.3.1) . En effet on a la suite $(u_q)_q$ est bornée dans l'espace $L^{2^\star}(\Omega)$, il est clair que (u_q^{q-1}) est bornée dans $L^{\frac{2^\star}{q-1}}(\Omega) \subset L^{\frac{2^\star}{2^\star-1}}(\Omega)$ (car $\dfrac{2^\star}{2^\star-1} < \dfrac{2^\star}{q-1}$) par suite $(u_q)_q$ est bornée dans $L^{\frac{2^\star}{2^\star-1}}(\Omega)$.
Du point (b) on peut déduire que la suite $(u_q)_q$ converge fortement dans $L^2(\Omega)$ et presque partout sur Ω vers u.
Comme la suite $(u_q)_q$ converge faiblement vers u dans $H_0^1(\Omega)$, par ailleurs on pourra utiliser la définition 1.3.4 de la convergence faible pour dire que pour tout $\phi \in H_0^1(\Omega)$

$$\lim_{q\to 2^\star} \int_\Omega \nabla u_q \nabla \phi \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \nabla u \nabla \phi \, \mathrm{d}x. \tag{2.19}$$

De la même façon et comme la suite (u_q^{q-1}) converge faiblement vers $u^{2^\star-1}$ dans $L^{\frac{2^\star}{2^\star-1}}(\Omega)$, par ailleurs on pourra utiliser la définition 1.3.4 de la convergence faible pour dire que pour tout $\phi \in H_0^1(\Omega) \subset L^{2^\star}(\Omega)$

$$\lim_{q\to 2^\star} \int_\Omega u_q^{q-1} \phi \, \mathrm{d}x = \int_\Omega u^{2^\star-1} \phi \, \mathrm{d}x. \tag{2.20}$$

On obtient facilement avec (b) que pour tout $\phi \in H_0^1(\Omega)$,

$$\lim_{q\to 2^\star} \int_\Omega \lambda u_q \phi \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \lambda u \phi \, \mathrm{d}x. \tag{2.21}$$

Or la suite $(u_q)_q$ est une solution faible de l'équation sous-critique (2.1) (Voir le théorème 2.1.1) c-à-d elle vérifie l'équation suivante pour tout $\phi \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_\Omega \nabla u_q \nabla\phi \, \mathrm{d}x - \int_\Omega \lambda u_q \phi \, \mathrm{d}x = S_q \int_\Omega u_q^{q-1}\phi \, \mathrm{d}x. \tag{2.22}$$

En passant à la limite ($q \to 2^\star$) dans l'équation (2.22) et en tenant compte de (2.19), (2.20), (2.21) et $\lim\limits_{i\to+\infty} S_q = S_{2^\star}$ (voir le Lemme 2.2.1), il s'ensuit que pour tout $\phi \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \nabla u \nabla\phi \, \mathrm{d}x - \int_\Omega \lambda u \phi \, \mathrm{d}x = S_{2^\star} \int_\Omega u^{2^\star-1}\phi \, \mathrm{d}x.$$

Cela signifie que u est une solution faible de l'équation

$$-\Delta u - \lambda u = S_{2^\star} u^{2^\star-1}. \tag{2.23}$$

On obtient alors avec le résultat de régularité énoncé dans le Théorème 1.4.2 que la solution u de l'équation (2.23) est régulière i.e. $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ où $\alpha \in (0,1)$.
On peut déduire immédiatement par le principe du maximum énoncé au théorème 1.4.1 que u est soit identiquement nulle soit partout strictement positive, i.e. ($u \geq 0$). D'où le résultat demandé. ■

2.2.2 Condition de convergence forte des solutions sous-critiques

A ce moment on a démontré que notre équation critique (P_λ) possède une solution u soit identiquement nulle soit partout strictement positive. Toute la difficulté consiste maintenant à trouver une condition qui va nous permettre d'éviter la solution triviale ($u \equiv 0$). C'est l'objet du lemme suivant.

Lemme 2.2.3. *Sous la condition*

$$S_{2^\star} < S_0, \tag{2.24}$$

où S_0 est la meilleure constante de Sobolev énoncé dans la définition 1.3.8 et $S_{2^\star}$ est le minimum de la fonctionnelle I_λ, alors la fonction u obtenue par le lemme 2.2.2 est une solution non triviale ($u \not\equiv 0$) de l'équation critique (2.23).

Preuve: On raisonne par l'absurde en supposant que $u \equiv 0$. Reprenons les notation du lemme 2.2.2, il est clair que la suite $(u_q)_q$ converge faiblement vers 0 dans l'espace $H_0^1(\Omega)$ et fortement vers 0 dans $L^2(\Omega)$ i.e.

$$\lim_{q \to 2^\star} \int_\Omega u_q^2 \, \mathrm{d}x = 0.$$

On a $u_q \in \mathcal{H}_q$, i.e.

$$\int_\Omega |u_q|^q \, \mathrm{d}x = 1.$$

De l'inégalité de Hölder, on pourra écrire que pour tout q

$$\begin{aligned} 1 &= \left(\int_\Omega |u_q|^q \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{2}{q}} \\ &\leq \left(\left(\int_\Omega (|u_q|^q)^{\frac{2^\star}{q}} \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{q}{2^\star}} V(\Omega)^{1-\frac{q}{2^\star}} \right)^{\frac{2}{q}} \\ &\leq \left(\int_\Omega |u_q|^{2^\star} \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{2}{2^\star}} V(\Omega)^{\frac{2}{q}-\frac{2}{2^\star}}, \end{aligned} \tag{2.25}$$

où $V(\Omega)$ est le volume de Ω.
D'après l'inégalité de la meilleure constante de Sobolev énoncé au lemme 1.3.1, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $B_\varepsilon \in \mathbb{R}$ tel que

$$\left(\int_\Omega |u_q|^{2^\star} \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{2}{2^\star}} \leq (K_0 + \varepsilon) \int_\Omega |\nabla u_q|^2 \, \mathrm{d}x + B_\varepsilon \int_\Omega u_q^2 \, \mathrm{d}x,$$

Par suite, l'inégalité (2.25) devient

$$\begin{aligned} 1 &= \left(\int_\Omega |u_q|^q \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{2}{q}} \\ &\leq \left(\int_\Omega |u_q|^{2^\star} \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{2}{2^\star}} V(\Omega)^{\frac{2}{q}-\frac{2}{2^\star}} \\ &\leq V(\Omega)^{\frac{2}{q}-\frac{2}{2^\star}} \left((K_0 + \varepsilon) \int_\Omega |\nabla u_q|^2 \, \mathrm{d}x + B_\varepsilon \int_\Omega u_q^2 \, \mathrm{d}x \right). \end{aligned}$$

Or on a

$$\int_\Omega |\nabla u_q|^2 \, \mathrm{d}x = S_q + \int_\Omega \lambda u_q^2 \, \mathrm{d}x.$$

alors la dernière inégalité devient

$$\begin{aligned}
1 &\leq V(\Omega)^{\frac{2}{q}-\frac{2}{2^\star}} \left\{(K_0+\varepsilon)\left(S_q + \int_\Omega \lambda u_q^2 \, \mathrm{d}x\right) + B_\varepsilon \int_\Omega u_q^2 \, \mathrm{d}x\right\} \\
&\leq V(\Omega)^{\frac{2}{q}-\frac{2}{2^\star}} \left\{(K_0+\varepsilon)S_q + \left((K_0+\varepsilon)\max_{x\in\Omega}|\lambda| + B_\varepsilon\right)\int_\Omega u_q^2 \, \mathrm{d}x\right\}.
\end{aligned}$$

En passant à la limite quand $q \to 2^\star$, dans la dernière inégalité et en utilisant le fait que

$$\lim_{q\to 2^\star} \int_\Omega u_q^2 \, \mathrm{d}x = 0, \ \lim_{q\to 2^\star} S_q = S_{2^\star} \text{ et } \lim_{q\to 2^\star} V(\Omega)^{\frac{2}{q}-\frac{2}{2^\star}} = V(\Omega)^{\frac{2}{2^\star}-\frac{2}{2^\star}} = 1,$$

on obtient alors

$$1 \leq (K_0+\varepsilon)S_{2^\star}.$$

Par conséquent, pour ε suffisamment petit on aura

$$1 \leq K_0 S_{2^\star},$$

ce qui donne

$$S_{2^\star} \geq \frac{1}{K_0} = S_0,$$

ce qui contredit la condition $S_{2^\star} < S_0$ du lemme 2.2.3 . D'où $u \not\equiv 0$. ■

Remarque 2.2.1. *La condition* (2.24) *du lemme* (2.2.3) *est adoptée pour assurer la convergence forte de la suite* (u_q) *lorsque* $q \to 2^\star$ *vers une solution non triviale de l'équation* (2.23).

Lemme 2.2.4. *Sous la condition*

$$S_{2^\star} < S_0 = \frac{n(n-2)\omega_n^{\frac{2}{n}}}{4},$$

la fonction u *donnée par le lemme 2.2.2 minimise la fonctionnelle*

$$I_\lambda(u) = \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + \lambda u^2\right) \, \mathrm{d}x,$$

sous la contrainte

$$\mathcal{H}_{2^\star} := \left\{u \in H_0^1(\Omega) \ / \ \int_\Omega |u|^{2^\star} \, \mathrm{d}x = 1\right\}.$$

C'est-à-dire, la fonction u *satisfait les deux conditions*

$$\int_\Omega u^{2^\star} \, \mathrm{d}x = 1, \text{ et } S_{2^\star} = I_\lambda(u).$$

Preuve: Nous reprenons les notations du lemme 2.2.2. Comme la suite (u_q^{q-1}) converge faiblement vers $u^{2^\star-1}$, on pourra alors écrire que pour tout $\phi \in H_0^1(\Omega)$ on a

$$\lim_{q\to 2^\star} \int_\Omega u_q^{q-1}\phi \, \mathrm{d}x = \int_\Omega u^{2^\star-1}\phi \, \mathrm{d}x.$$

En particulier pour $\phi = u$, on a

$$\lim_{q\to 2^\star} \int_\Omega u_q^{q-1} u \, \mathrm{d}x = \int_\Omega u^{2^\star} \, \mathrm{d}x.$$

On déduit avec l'inégalité de Hölder que

$$\begin{aligned}\int_\Omega u^{2^\star} \, \mathrm{d}x &= \lim_{q\to 2^\star} \int_\Omega u_q^{q-1} u \, \mathrm{d}x \\ &\leq \lim_{q\to 2^\star} \left(\underbrace{\int_\Omega u_q^q \, \mathrm{d}x}_{=1} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_\Omega u^q \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

Pour $q \to 2^\star$, on déduit que

$$\int_\Omega u^{2^\star} \, \mathrm{d}x \leq \left(\int_\Omega u^{2^\star} \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2^\star}},$$

ce qui signifie que

$$\int_\Omega u^{2^\star} \, \mathrm{d}x \leq 1. \tag{2.26}$$

Par ailleurs, u est solution de

$$-\Delta u = \lambda u + S_{2^\star} u^{2^\star-1}. \tag{2.27}$$

En multipliant cette équation par u, puis en intégrant sur Ω, on obtient alors

$$I_\lambda(u) = S_{2^\star} \int_\Omega u^{2^\star} \, \mathrm{d}x. \tag{2.28}$$

On sait que u est une solution non nulle de l'équation (2.27) i.e. $u \not\equiv 0$ et comme $S_{2^\star}$ est un mimimum, on pourra alors écrire que

$$\frac{I_\lambda(u)}{\left(\int_\Omega u^{2^\star} \, \mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{2^\star}}} \geq S_{2^\star}. \tag{2.29}$$

En combinant entre les inégalités (2.28) et (2.29), on déduit que

$$\frac{S_{2^\star}\int_\Omega u^{2^\star}\ \mathrm{d}x}{\left(\int_\Omega u^{2^\star}\ \mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{2^\star}}} \geq S_{2^\star},$$

ce qui implique que

$$S_{2^\star}\left(\left(\int_\Omega u^{2^\star}\ \mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{n}} - 1\right) \geq 0,$$

d'où

$$\int_\Omega u^{2^\star}\ \mathrm{d}x \geq 1. \tag{2.30}$$

On tire alors des inégalités (2.26), (2.28) et (2.30) que

$$\int_\Omega u^{2^\star}\ \mathrm{d}x = 1 \text{ et } I_\lambda(u) = S_{2^\star}.$$

D'où le résultat demandé. ■

2.2.3 Démonstration du théorème principal 2.0.1

En conclusion, la démonstration du théorème principal 2.0.1 est une application directe de tout ce qui a été réalisé jusqu'à maintenant. Il suffit de voir les démarches suivantes :

- Le Théorème 2.1.1 montre l'existence d'une suite $(u_q)_q$ strictement positives, solutions de la famille d'équations sous-critiques (2.3). De plus cette suite minimise la fonctionnelle d'énergie

$$I_\lambda(u) = \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \lambda u^2\right)\ \mathrm{d}x = \|\nabla u\|_2^2 - \lambda \|u\|_2^2. \tag{E}$$

  sous la contrainte :

$$\mathcal{H}_q := \left\{ u \in H_0^1(\Omega) \ / \ \int_\Omega u^q\ \mathrm{d}x = 1 \right\},$$

  i.e.

$$S_q := \inf_{\mathcal{H}_q} I_\lambda(u) = I_\lambda(u_q).$$

- Le Lemme 2.2.1 montre que le minimum S_q converge vers le minimum $S_{2^\star}$ lorsque q tend vers $2^\star$, i.e. $\lim_{q\to 2^\star} S_q = S_{2^\star}$.

- Le Lemme 2.2.2 montre que lorsque ($q \to 2^\star$), la suite $(u_q)_q$ obtenue par le Théorème 2.1.1 converge faiblement vers une fonction positive ou nulle $u \in H_0^1(\Omega) \cap C^{2,\alpha}(\Omega)$ qui vérifie faiblement l'équation critique

$$-\Delta u = \lambda u + S_{2^\star} u^{2^\star - 1}. \tag{$\star$}$$

- Le Lemme 2.2.3 montre que sous l'hypothèse

$$S_{2^\star} < S_0, \tag{$\mathcal{H}$}$$

la suite $(u_q)_q$ converge fortement vers une solution non triviale ($u \not\equiv 0$) de l'équation critique ($\star$).

- Le Lemme 2.2.4 montre que sous l'hypothèse ($\mathcal{H}$) la solution u minimise la fonctionnelle d'énergie (E) sous la contrainte

$$\mathcal{H}_{2^\star} := \left\{ u \in H_0^1(\Omega) \ / \ \int_\Omega u^{2^\star} \,\mathrm{d}x = 1 \right\},$$

i.e.

$$S_{2^\star} := \inf_{\mathcal{H}_{2^\star}} I_\lambda = I_\lambda(u).$$

Chapitre 3

Application fonctions tests

3.1 Estimation de $Q(u_\varepsilon)$

L'objectif de ce chapitre est d'évaluer le quotient

$$Q(u) = \frac{\|\nabla u\|_2^2 - \lambda \|u\|_2^2}{\|u\|_{2^\star}^2} = \frac{\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \lambda u^2 \right) \, \mathrm{d}x}{\left(\int_\Omega u^2 \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{2}{2^\star}}}, \tag{3.1}$$

par les fonctions introduites dans [4] et qui nous servira à montrer que la condition (2.24) dans le lemme 2.2.3 aura lieu. Pour fixer les idées, nous supposons que $0 \in \Omega$. Soit $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ une fonction positive telle que $\phi(x) \equiv 1$ sur un voisinage de 0. Nous considérons les fonction tests suivantes :

$$u_\varepsilon(x) = \frac{\phi(x)}{(\varepsilon + |x|^2)^{\frac{n-2}{2}}}. \tag{3.2}$$

Dans un premier temps, nous allons estimer les différents termes du quotient

$$Q(u) = \frac{\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \lambda u^2 \right) \, \mathrm{d}x}{\left(\int_\Omega u^2 \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{2}{2^\star}}}.$$

3.1.1 Estimation de $\displaystyle\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2 \, \mathrm{d}x$

Pour estimer le premier terme du quotient (3.1), lorsque $\varepsilon \to 0$, on pourra écrire

$$\nabla u_\varepsilon(x) = \frac{\nabla \phi(x)}{(\varepsilon + |x|^2)^{\frac{n-2}{2}}} - (n-2) \frac{\phi(x) x}{(\varepsilon + |x|^2)^{\frac{n}{2}}}.$$

Comme $\phi \equiv 1$ au voisinage de 0, il s'en suit que

$$\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2 \, \mathrm{d}x = (n-2)^2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|x|^2}{(\varepsilon + |x|^2)^n} \, \mathrm{d}x + O(1). \tag{3.3}$$

En faisant le changement de variable $y = \dfrac{x}{\sqrt{\varepsilon}}$, l'intégrale (3.3) devient

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2 \, \mathrm{d}x &= (n-2)^2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varepsilon |y|^2}{\varepsilon^n (1 + |y|^2)^n} \, (\sqrt{\varepsilon})^n \mathrm{d}y + O(1) \\ &= \frac{(n-2)^2}{\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|y|^2}{(1 + |y|^2)^n} \, \mathrm{d}y + O(1),\end{aligned}$$

ainsi

$$\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2 \, \mathrm{d}x = \frac{K_1}{\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}} + O(1), \quad \text{pour } n \geq 4, \tag{3.4}$$

où

$$K_1 = (n-2)^2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|y|^2}{(1 + |y|^2)^n} \, \mathrm{d}y.$$

3.1.2 Estimation de $\int_\Omega u_\varepsilon^2 \, \mathrm{d}x$

Nous allons maintenant estimer le deuxième terme du numérateur du quotient (3.1). Lorsque $\varepsilon \to 0$, on pourra écrire

$$\begin{aligned}\int_\Omega u^2 \, \mathrm{d}x &= \int_\Omega \frac{\varphi^2(x)}{(\varepsilon + |x|^2)^{n-2}} \, \mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega \frac{\left[\varphi^2(x) - 1\right]}{(\varepsilon + |x|^2)^{n-2}} \, \mathrm{d}x + \int_\Omega \frac{1}{(\varepsilon + |x|^2)^{n-2}} \, \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Puisque $\varphi^2 - 1 \equiv 0$ au voisinage de 0, on obtient

$$\int_\Omega u^2 \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \frac{1}{(\varepsilon + |x|^2)^{n-2}} \, \mathrm{d}x + O(1).$$

La convergence de cette dernière intégrale dépend de la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{r^{n-1}}{r^{2(n-2)}} \, \mathrm{d}x.$$

On distingue deux cas : $n > 4$ et $n = 4$.

Pour $n > 4$: on a

$$\int_\Omega u^2 \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(\varepsilon + |x|^2)^{n-2}} \,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n - \Omega} \frac{1}{(\varepsilon + |x|^2)^{n-2}} \,\mathrm{d}x + O(1).$$

Comme $0 \notin \mathbb{R}^n - \Omega$, on a

$$\int_\Omega u^2 \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(\varepsilon + |x|^2)^{n-2}} \,\mathrm{d}x + O(1).$$

On pose $y = \dfrac{x}{\sqrt{\varepsilon}}$, on aura

$$\int_\Omega u^2 \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(\sqrt{\varepsilon})^n}{\varepsilon^{n-2} (1 + |y|^2)^{n-2}} \,\mathrm{d}y + O(1).$$

Ainsi

$$\int_\Omega u^2 \,\mathrm{d}x = \frac{K_2}{\varepsilon^{\frac{n-4}{2}}} + O(1) \quad \text{pour } n > 4, \tag{3.5}$$

où

$$K_2 = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + |y|^2)^{n-2}} \,\mathrm{d}y.$$

Pour $n = 4$: on a

$$\int_\Omega u^2 \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \frac{1}{(\varepsilon + |x|^2)^2} \,\mathrm{d}x + O(1).$$

Puisque Ω est un ouvert borné contenant 0, il s'en suit qu'il existe deux constantes $0 < \delta_1 < \delta_2$ telles que

$$B_0(\delta_1) \subset \Omega \subset B_0(\delta_2),$$

ce qui donne

$$\int_{B_0(\delta_1)} \frac{1}{(\varepsilon + |x|^2)^2} \,\mathrm{d}x \leq \int_\Omega \frac{1}{(\varepsilon + |x|^2)^2} \,\mathrm{d}x \leq \int_{B_0(\delta_2)} \frac{1}{(\varepsilon + |x|^2)^2} \,\mathrm{d}x.$$

En utilisant les coordonnées polaires pour calculer l'intégrale

$$\begin{aligned}
\int_{B_0(\delta)} \frac{1}{(\varepsilon+|x|^2)^2}\,\mathrm{d}x &= \omega_3 \int_0^\delta \frac{r^3}{(\varepsilon+r^2)^2}\,\mathrm{d}r \\
&= \omega_3\left[\frac{1}{4}\int_0^\delta \frac{4r^3+4\varepsilon r}{r^4+2\varepsilon r^2+\varepsilon^2}\,\mathrm{d}r - \int_0^\delta \frac{\varepsilon r}{(\varepsilon+|x|^2)^2}\,\mathrm{d}r\right] \\
&= \omega_3\left[\left[\frac{1}{4}\log(\varepsilon+r^2)^2\right]_0^\delta + \frac{\varepsilon}{2}\left[\frac{1}{\varepsilon+r^2}\right]_0^\delta\right] \\
&= \omega_3\left[\frac{1}{4}\Big(\log(\varepsilon+\delta^2)-\log(\varepsilon^2)\Big) + \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{\varepsilon+\delta^2} - \frac{1}{2}\right] \\
&= \frac{\omega_3}{4}\log(\frac{1}{\varepsilon^2}) + O(1) \\
&= \frac{\omega_3}{2}|\log\varepsilon| + O(1),
\end{aligned}$$

où ω_3 désigne le volume de la sphère unité $\mathbb{S}^3$ de $\mathbb{R}^4$.
Alors

$$\int_\Omega u^2\,\mathrm{d}x = K_2|\log\varepsilon| + O(1) \text{ pour } n = 4, \tag{3.6}$$

où

$$K_2 = \frac{\omega_3}{2}.$$

Des égalités (3.5) et (3.6), on obtient que

$$\int_\Omega u^2\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{K_2}{\varepsilon^{\frac{n-4}{2}}} + O(1) & \text{si} \quad n > 4, \\ K_2|\log\varepsilon| + O(1) & \text{si} \quad n = 4. \end{cases}$$

3.1.3 Estimation de $\int_\Omega u_\varepsilon^{2^\star}\,\mathrm{d}x$

Nous allons maintenant estimer le dénominateur du quotient (3.1). Lorsque $\varepsilon \to 0$, on pourra écrire

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u^{2^\star}\,\mathrm{d}x &= \int_\Omega \frac{\varphi^{2^\star}(x)}{(\varepsilon+|x|^2)^n}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega \frac{\left[\varphi^2(x)-1\right]}{(\varepsilon+|x|^2)^n}\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \frac{1}{(\varepsilon+|x|^2)^n}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Puisque $\varphi^2 - 1 \equiv 0$ au voisinage de 0, on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega u^{2^\star}\,\mathrm{d}x &= \int_\Omega \frac{1}{(\varepsilon+|x|^2)^n}\,\mathrm{d}x + O(1)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(\varepsilon+|x|^2)^n}\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n-\Omega} \frac{1}{(\varepsilon+|x|^2)^n}\,\mathrm{d}x + O(1).\end{aligned}$$

Puisque $0 \notin \Omega$, alors

$$\int_\Omega u^{2^\star}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(\varepsilon+|x|^2)^n}\,\mathrm{d}x + O(1).$$

En posant $y = \dfrac{x}{\sqrt{\varepsilon}}$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega u^{2^\star}\,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varepsilon^{\frac{n}{2}}}{\varepsilon^n\,(1+|y|^2)^n}\,\mathrm{d}y + O(1)\\ &= \frac{K_3'}{\varepsilon^{\frac{n}{2}}} + O(1),\end{aligned}$$

où

$$K_3' = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|y|^2)^n}\,\mathrm{d}y.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\left(\int_\Omega u^{2^\star}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{2^\star}} &= \left(\frac{K_3'}{\varepsilon^{\frac{n}{2}}} + O(1)\right)^{\frac{2}{2^\star}}\\ &= \frac{(K_3')^{\frac{2}{2^\star}}}{\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}} + O(1).\end{aligned}$$

D'où

$$\left(\int_\Omega u^{2^\star}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{2^\star}} = \frac{K_3}{\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}} + O(1), \tag{3.7}$$

où

$$K_3 = (K_3')^{\frac{2}{2^\star}},$$

et $K_1,\ K_2$ et K_3 sont des constantes qui dépendent seulement de n, tel que

$$\frac{K_1}{K_3} = S_0.$$

Nous portons (3.4), (3.5), (3.6) et (3.7) dans (3.1), on obtient facilement que

$$Q(u_\varepsilon) = \begin{cases} \dfrac{K_1 - \lambda K_2 \varepsilon |\log \varepsilon| + O(\varepsilon)}{K_3 + O(\varepsilon)} & \text{si} \quad n = 4, \\[2ex] \dfrac{K_1 - \lambda K_2 \varepsilon + O(\varepsilon^{\frac{n-2}{2}})}{K_3 + O(\varepsilon^{\frac{n}{2}})} & \text{si} \quad n > 4. \end{cases}$$

Par le théorème des accroissements finis, on peut écrire

$$\frac{1}{x+y} = \frac{1}{x} + yC,$$

ce qui entraîne

$$Q(u_\varepsilon) = \begin{cases} \dfrac{K_1}{K_2} - \lambda \dfrac{K_2}{K_3} \varepsilon |\log \varepsilon| + O(\varepsilon) & \text{si} \quad n = 4, \\[2ex] \dfrac{K_1}{K_2} - \lambda \dfrac{K_2}{K_3} \varepsilon + O(\varepsilon^{\frac{n}{2}}) & \text{si} \quad n > 4. \end{cases}$$

Finalement, l'estimation du quotient $Q(u_\varepsilon)$ est donnée par la relation suivante :

$$Q(u_\varepsilon) = \begin{cases} S_0 - \lambda \dfrac{K_2}{K_3} \varepsilon |\log \varepsilon| + O(\varepsilon) & \text{si} \quad n = 4, \\[2ex] S_0 - \lambda \dfrac{K_2}{K_3} \varepsilon + O(\varepsilon^{\frac{n}{2}}) & \text{si} \quad n > 4, \end{cases}$$

où S_0 est la meilleure constante de Sobolev définie par (1.3.8), Il est clair que si $n \geq 4$, pour ε assez petit et lorsque le paramètre λ est strictement positive, on a

$$Q(u_\varepsilon) < S_0,$$

ce qui montre que la condition d'existence (2.24) aura lieu. Autrement dit, l'optimum de la fonctionnelle d'énergie du problème (P_λ) est plus petit que la meilleure constante de Sobolev.

Conclusion

• Dans ce mémoire, nous avons montré un résultat d'existence de solutions positives d'un problème elliptique contenant l'exposant critique de Sobolev. il s'agit de l'équation semi-linéaire

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + u^{2^\star - 1} & \text{dans} \quad \Omega, \\ u > 0 & \text{dans} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{$\mathcal{P}_\lambda$}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$, $2^\star = \dfrac{2n}{n-2}$ est l'exposant critique de Sobolev, λ un paramètre positif et $\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u)$.

• Dans le premier chapitre, nous avons rappelé quelques outils d'analyse fonctionnelle quand on a utilisé dans ce mémoire.

• Dans le deuxième chapitre, en se basant sur le papier de Brézis-Nirenberg [4] et le travail de Aubin [2], pour montrer l'existence de solutions positives de l'équation ($\mathcal{P}_\lambda$) dont l'existence est assuré sous la condition

$$\inf_{H_O^1(\Omega)} Q(u) = \inf_{H_O^1(\Omega)} \frac{\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \lambda u^2 \right) \, \mathrm{d}x}{\left(\int_\Omega u^2 \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{2}{2^\star}}} < S_0, \tag{$\mathcal{H}$}$$

où S_0 est la meilleure constante de Sobolev énoncé dans la Définition 1.3.8

• Le dernier chapitre de ce mémoire est consacré à l'évaluation de la condition ($\mathcal{H}$) par les fonctions tests suivantes

$$u_\varepsilon(x) = \frac{\phi(x)}{(\varepsilon + |x|^2)^{\frac{n-2}{2}}},$$

où $r = |x|$, avec $0 \in \Omega$ et $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ est une fonction positive telle que $\phi(x) \equiv 1$ sur un voisinage de 0

Les calculs montrent que le minimum de la fonctionnelle d'énergie $S_{2^\star}$ est plus petit que la meilleure constante de Sobolev pour $n \geq 4$ et λ est strictement positif.

Bibliographie

[1] R. A. Adams ; Sobolev Spaces, *Academic press, New York, 1975.*

[2] T. Aubin ; Équations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire, *J. Math. Pures Appl. 55 (1976) 269-296.*

[3] H. Brezis ; Analyse fonctionnelle, *Théorie et applications 1983.*

[4] H. Brezis and L. Nirenberg ; Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical sobolev exponents, *Communs pure. appl. math, 36(4) (1983) 437-477.*

[5] D. Gilbard, N. Trudinger ; Elliptical partial difierential equations of second order, *Springer Verlag 1983.*

[6] O. Kavian ; Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques, mathématiques et applications *Springer-Verlag, 1989.*

[7] R. Schoen. Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature. *J. Differential Geom, 20, (1984), 479-495.*

[8] M. Struwe ; Variational méthods, *Springer, Berlin etc. 1990.*

[9] G. Talenti ; Best constant in Sobolev inequality, *Ann. di Matem. Pura ed Appl. 110 (1976), 353-372.*

[10] H. Yamabe. On the deformation of Riemannian structures on compact manifolds, *Osaka Math. J. 12 (1960), 21-37.*