RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN TIARET
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUES
Département de Mathématiques

MÉMOIRE MASTER

Présenter en vue de l'obtention du diplôme de master

Spécialité :
« Mathématiques »

Option :
« Analyse Fonctionnel et Équations Différentielles »

Présenté Par :
ZERROUKI Widad et DJILLALI Rania Nardjess

Sous L'intitulé :

Existence de solutions pour quelques problèmes d'équations différentielles non linéaires d'ordre arbitraire

Soutenu publiquement le 13/ 06 / 2024
à Tiaret devant le jury composé de :

Mr TAYEB MAHROUZ	MCA	Université de Tiaret	Président
Mr HAMMOU BENMEHIDI	MCB	Université de Tiaret	Encadreur
Mr MOHAMED DELLAL	MCA	Université de Tiaret	Examinateur

Année universitaire :2023/2024

Remerciement

On remercie dieu le tout puissant de nous avoir donné la santé et la volonté d'entamer et de terminer ce mémoire

Tout d'abord,ce travail ne serait pas aussi riche et n'aurait pas pu avoir le jour sans l'aide et l'encadrement de Mr.Hammou Benmehidi,on le remercie pour la qualité

De son encadrement exceptionnel ,pour sa patience ,sa rigueur et sa disponibilité durant notre préparation de ce mémoire.

Nous tenons également à remercier les membres de jury pour l'intérét qu'ils ont porté à notre recherche en acceptant d'examiner notre travail et de l'enrichir par leurs remarques.

Et finallement nos remerciement s'adresse à Mr.Mohamed Ziane et tout nos professeurs pour leur générosités et la grande patience dont ils ont su faire preuve malgré leurs charges académiques et professionnelles

Dédicace

Ce modeste travail est dédié spécialement

à ma chère maman et mon cher papa ,je dis merci d'avoir fait de moi celui que je suis aujourd'hui,aucune dédicace ne pourra exprimer mes respects ,mes considérations et ma grande admiration pour vous .Puisse ce travail vous témoigne mon affection et mon profond amour .

à mes chères sœursMounia et Ritedj, et à mes chers frèresDjamel et F arouk .Mes princesses et mes princes je souhaite une ville pleine de bonheur,joie et e réussite.

A mes amis spécialement Nourhane et Sarah pour leurs supports et encouragements dans les moments difficile

Pour finir,a ma chère binome Wided pour sa soutien moral,sa compréhension tout au long de ce travail.

Sans oublier tous ceux qui m'aiment,je dédie ce mémoire.

Rania

Dédicace

قال الله تعالى:

بسم الله الرحمان الرحيم

"يرفع الله الذين امنوا منكم و الذين اوتوا العلم درجات"

الحمد لله الذي ما تم جهد ولا ختم سعي الا بفضله.وما تخطى العبد من عقبات وصعوبات الا بتوفيقه و معونته

Je déduie ce modeste travail à mes chères parent :

Aucune dédicace ne saurait exprimer mon respect ,mon amour éternel et ma considération pour le sacrifiers que vous avez consenti pour mon instruction et mon bien ètre

Ma mère,a ce qui travaille beaucoup pour moi

Mon père je vous remercié pour tout le soutien et l'amour que vous me portez de puis mon enfance ,et jéspère que votre bénédiction m'accompagne toujours.

A mes adorables frères et souers

الى من قيل فيهم :سنشد عضدك باخيك

Ali,Abdelkader,Fatima et ses enfants Iyad et Moncef,Aicha et Nedjma

A mes mielleure amis

A tout ce que je connais,surtout

Ms.Zinelabidine,Hadil,Soumia,Racha,

Zahra,Rania,Amina a leur présence et leur

Encouragements

Enfin,j'offre mes bénédictions à tout ce qui m'ont soutenu dans l'accomplissement de ce travail.

Abstract

In this work, we focus on studying the results of the existence and uniqueness of solutions for two distinct nonlinear fractional-order differential problems. The first problem pertains to hybrid differential equations with the Caputo derivative, while the second problem involves a coupled system of sequential fractional differential equations with the Caputo Hadamard derivative. We employ various fixed-point theorems to demonstrate both existence and uniqueness. At the end of each chapter, a practical example is provided to illustrate the application of the obtained theoretical results.

Keywords: Fractional differential equations, existence, uniqueness, fixed point.

Résumé

Dans ce travail, nous nous intéressons à étudier les résultats de l'existence et de l'unicité des solutions pour deux problèmes différentiels non linéaires d'ordre fractionnaire distinct. Le premier problème concerne les équations différentielles hybrides avec la dérivée de Cauto, et le deuxième problème est le système couplé d'équations différentielles fractionnaires séquentielles avec la dérivée de Cauto Hadamard. Nous utilisons quelques théorèmes du point fixe pour démontrer l'existence et l'unicité. À la fin de chaque chapitre, nous présentons un exemple concret pour appliquer les résultats théoriques obtenus.

Mots-clés : équations différentielles fractionnaires, existence, unicité, point fixe.

ملخص

في هذا العمل، نهتم بدراسة نتائج وجود وفرادة الحلول لمسألتين تفاضليتين غير خطيتين ذات مشتقات كسرية. المسألة الأولى تتعلق بمعادلات تفاضلية الهجينة مع المشتقة من نوع كابوتو، والمسألة الثانية هي النظام المقرون لمعادلات تفاضلية كسرية تتابعية مع المشتقة المزدوجة من نوع كابوتو هادامارد. نستخدم بعض نظريات النقطة الثابتة للبرهان على وجود ووحدانية الحلول. في نهاية كل فصل، نقدم مثالاً عملياً لتطبيق النتائج النظرية المتحصل عليها.

كلمات مفتاحية: معادلات تفاضلية كسرية، وجود، وحيد، نقطة ثابتة

Introduction Générale

Le calcul fractionnaire représente un domaine de recherche et de développement très actif qui englobe la théorie des intégrales et des dérivées d'ordre arbitraire. Cette théorie vise à unifier et généraliser les concepts de différentiation d'ordre entier et d'intégration répétée. Son champ d'application est vaste, s'étendant à des domaines variés tels que l'ingénierie, la physique, la chimie et la biologie. Malgré son caractère à la fois ancien et moderne, le calcul fractionnaire a connu un développement progressif au fil du temps. Son origine remonte à des réflexions anciennes sur la possibilité d'étendre l'ordre des dérivées et des intégrales pour inclure des valeurs numériques irrationnelles, fractionnaires ou complexes. Cette idée a été initialement formulée par Gottfried Leibniz en 1695, qui a introduit le symbole de dérivation d'ordre n entier positif sous la forme $\dfrac{d^n y}{dx^n}$. Cette question a ensuite inspiré Guillaume de l'Hôpital à se demander ce qui se passe lorsque $n = \frac{1}{2}$. Cette étincelle intellectuelle a suscité l'intérêt et la curiosité de nombreux mathématiciens, physiciens et ingénieurs, les incitant à explorer et à développer le concept du calcul fractionnaire, à la fois sur le plan théorique et pratique. Des figures éminentes telles que Laplace, Fourier, Euler, Lagrange (au 17ème siècle), Liouville (1832-1837), Riemann (1847), Gronwall (1867) et Letnikov (1868) ont contribué à enrichir et à promouvoir ce domaine, en apportant à la fois des avancées théoriques et des applications pratiques.

Le but de ce travail est de présenter les résultats concernant l'existence et l'unicité de certaines équations différentielles non linéaires d'ordre fractionnaire. Ce mémoire est organisé en trois chapitres distincts. Dans le premier chapitre, intitulé "Préliminaires", nous commençons par rassembler quelques définitions, notations et outils de base liés au calcul fractionnaire, en mettant l'accent sur les fonctions spéciales telles que la Fonction Gamma d'Euler et la Fonction Bêta. Nous examinons également différentes approches des opérateurs fractionnaires pour l'intégration et la dérivation. Dans la fin de ce chapitre, nous avons présenté quelques définitions, notions d'analyse fonctionnelle et certains théorèmes de point fixe que nous avons utilisés dans notre travail.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de l'existence de solutions de l'équation différentielle hybrides d'ordre fractionnaire au sens de Caputo de la forme :

$$\begin{cases} {}^{c}D^{\alpha}\left(\dfrac{x(t)-z(t,x(t))}{g(t,x(t))}\right)=f(t,x(t)),\ t\in I:=[a,b]\,,\ b>a>0, \\ x(a)=z(a,x(a)), \quad x(b)-z(b,x(b))=\theta\in\mathbb{R}, \end{cases}$$

où ${}^{c}D^{\alpha}$ est la dérivée de Caputo d'ordre $1<\alpha<2$, $g\in C(I\times\mathbb{R},\mathbb{R}\setminus\{0\})$, $f,z\in C(I\times\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Dans le troisième chapitre, nous étudions l'existence et l'unicité de la solution d'un système couplé d'équations fractionnaires séquentielles de la forme :

$$\begin{cases} {}^{C}_{H}D^{\alpha}({}^{C}_{H}D^{\beta}+\mu_1)x(t)=f(t,x(t),y(t)),\ t\in[1,T],\ T>1 \\ {}^{C}_{H}D^{\gamma}({}^{C}_{H}D^{\lambda}+\mu_2)y(t)=g(t,x(t),y(t)), \\ \ x(1)=\theta_1,\ x(T)=\vartheta_1,\ y(1)=\theta_2,\ y(T)=\vartheta_2, \end{cases}$$

où ${}^{C}_{H}D^{\varepsilon},\varepsilon\in\{\alpha,\beta,\gamma,\lambda\}$ sont les dérivées de Caputo-Hadamard d'ordre $0<\varepsilon<1$, f,g : $[1,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ deux fonctions continues, $\mu_i,\theta_i,\vartheta_i,i=1,2$ sont des constantes réels.

Table des matières

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre rappelle les notions et concepts fondamentaux nécessaires pour la suite de ce mémoire. Les concepts clés sont présentés sous forme de définitions, théorèmes, corollaires et lemmes. Des références à la littérature seront régulièrement fournies pour plus de détails. [1, 16, 30, 33]

1.1 Notations et définitions de base

Nous présentons ci-dessous quelques espaces fonctionnels utilisés en analyse fonctionnelle ainsi que dans d'autres domaines des mathématiques, ces espaces offrent un cadre pour l'étude des propriétés des fonctions et des opérateurs.

Soit Ω un intervalle fini de la forme $[a, b]$, où $0 \leq a < b < \infty$.

1.1.1 Quelques espaces fonctionnels

Définition 1.1.1 *L'espace des fonctions continues $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est note $C(\Omega)$ et*

$$\|f\|_{C(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|$$

Définition 1.1.2 *Soit $k \in \mathbb{Z}_+$, on note $C^k(\Omega)$ l'espace des fonctions k-fois continument* *différentiables sur* Ω*, et*

$$\|f\|_{C^k(\Omega)} = \sum_{\alpha=0}^{k} \left\|f^{(k)}\right\|_{C(\Omega)}.$$

Définition 1.1.3 *Soit* $p \in [1, +\infty]$*, on définit* $L^p(\Omega)$ *l'ensemble des classes de fonctions* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *measurable tel que*

$$\begin{aligned} \|f\|_p &= \left(\int_\Omega |f|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}, p < +\infty \\ \|f\|_\infty &= ess \sup_{x \in \Omega} |f(x)|. \end{aligned}$$

Définition 1.1.4 *On note par* $AC(\Omega)$ *l'espace des fonctions absoluments continues sur* Ω*, noté* $AC(\Omega)$ *est l'espace des fonctions primitives de fonctions Lebesgue-sommables c'est a-dire*

$$f \in AC(\Omega) \Leftrightarrow \exists \varphi \in L^1(\Omega) \text{ telle que } f(x) = c + \int_a^x \varphi(t)dt.$$

Théorème 1.1 *L'espace* $AC(\Omega)$ *coïncide avec l'espace des primitives de fonctions sommable de Lebesgue c'est a-dire.*

$$f \in AC(\Omega) \Leftrightarrow f(x) = c + \int_a^x \varphi(t)dt, \quad \left(\varphi \in L^1(\Omega)\right)$$

Définition 1.1.5 *Soit* $n \in \mathbb{N}$*. On note* $AC^n(\Omega)$*, l'espace des fonctions* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ $(n-1)$*−fois continument derivable sur* Ω *tel que* $f^{(n-1)} \in AC(\Omega)$*, i.e. :*

$$AC^n(\Omega) = \left\{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}, f^{(k)} \in C(\Omega), k \in \{0, 1, .., n-1\} \text{ et } f^{(n-1)} \in AC(\Omega)\right\}.$$

En particulier $AC^1(\Omega) = AC(\Omega)$.

Définition 1.1.6 *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $\delta = t\dfrac{d}{dt}$*. L'espace des fonctions* f *qui ont* δ^{n-1}*-dérivées absolument continues, noté* $AC_\delta^n(\Omega)$ *est défini comme suit :*

$$AC_\delta^n(\Omega) = \left\{f : [a, b] \longmapsto \mathbb{R} : \delta^{n-1} f \in AC(\Omega)\right\}.$$

Clairement $AC_\delta^1(\Omega) \equiv AC(\Omega)$.

1.2 Fonctions spéciales

Dans cette partie, deux fonctions spéciales utilisées dans la suite du mémoire sont présentées brièvement. Des détails supplémentaires sur ces fonctions peuvent être trouvés dans

1.2.1 La fonction Gamma

Nous commençons par considérer la fonction Gamma, ou intégrale d'Euler d'ordre deux, notée $\Gamma(\cdot)$. Pour plus de détails voir par exemple les références [11], [25], [27].

Définition 1.2.1 *Pour $p > 0$ réel, la fonction Gamma, notée Γ, est définie par :*

$$\Gamma(p) := \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{p-1} dx. \tag{1.1}$$

Proposition 1.2.1 *La fonction $\Gamma(p)$ est convergente pour $p > 0$.*

Démonstration. L'intégrale (1.1) peut être écrite comme suit :

$$\Gamma(p) = \int_0^1 e^{-x} x^{p-1}\, dx + \int_1^{\infty} e^{-x} x^{p-1}\, dx = I_1 + I_2,$$

où $I_1 = \displaystyle\int_0^1 e^{-x} x^{p-1}\, dx$ est convergente.
Puisque e^{-x} décroît sur l'intervalle $[0, 1]$, nous avons :

$$\int_0^1 e^{-x} x^{p-1}\, dx < \int_0^1 x^{p-1}\, dx = \frac{1}{p}.$$

De plus, $I_2 = \int_1^{\infty} e^{-x} x^{p-1}\, dx$ est également convergente. Nous obtenons :

$$1 \leq x \Rightarrow x^{p-1} e^{-x} \leq e^{-x/2} \Leftrightarrow x^{p-1} \leq e^{x/2} \Leftrightarrow \frac{x^{p-1}}{e^{x/2}} \leq 1.$$

Comme $\lim_{x\to\infty} \frac{x^{p-1}}{e^{x/2}} = 0$, nous avons :

$$\int_1^{\infty} e^{-x} x^{p-1}\, dx \leq \int_1^{\infty} e^{-x/2}\, dx = 2e^{-1/2}.$$

Alors, l'intégrale (1.1) is convergente pour $p > 0$.

Proposition 1.2.2 *Soit $p > 0$. La fonction Γ vérifie la propriété :*

$$\Gamma(p + 1) = p\Gamma(p). \tag{1.2}$$

Démonstration.

$$\Gamma(p+1) = \int_0^\infty e^{-x}x^p\,dx = -\left. e^{-x}x^p\right|_0^\infty + p\int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}\,dx = p\Gamma(p).$$

Les relations suivantes sont également valides :

$$\Gamma(p+n) = (p+n-1)\dots(p+1)p\Gamma(p),$$

$$\Gamma(1) = 1,$$

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

1.2.2 Quelques valeurs de la fonction gamma

Nous avons la relation de récurrence pour la fonction Gamma :

$$\Gamma\left(z+1\right) = z\Gamma\left(z\right).$$

Nous calculons $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$. On a

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}dt &= \int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt \qquad t = x^2 \quad \text{donc} \quad dt = 2xdx \\ &= 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx.\end{aligned}$$

On calcul l'intégrale $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$.
En conséquence, nous effectuons les manipulations suivantes :

$$\begin{aligned}I^2 &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}du\right)^2 \\ &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}du\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx\right) \\ &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}du\right) \\ &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}dy\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy.\end{aligned}$$

Pour calculer la dernière intégrale, on utilise le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad r \geq 0.$$

Alors

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} e^{-r^2} rdrd\theta \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-r^2} rdr \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \int_0^{+\infty} e^{-r^2} rdr \quad r^2 = w \quad \text{donc} \quad rdr = \frac{1}{2}dw \\ &= \pi \int_0^{+\infty} e^{-w} dw = \pi \end{aligned}$$

D'où

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Ainsi, nous avons démontré que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

1.2.3 La Fonction Beta

Une fonction spéciale, qui est directement liée à la fonction gamma d'Euler, est donnée par la fonction Beta, définie comme suit :

Définition 1.2.2 *La fonction Betta, notée $B(.,.)$ est definie par*

$$B(p,q) := \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt, \tag{1.3}$$

où $p, q > 0$

Par la suite, nous présentons quelques propriétés fondamentales de la fonction Beta.

Proposition 1.2.3 *La fonction Beta vérifiée les propriétés suivantes :*

1. *Pour tout $p > 0$ et $q > 0$, nous avons*

$$B(p,q) = B(q,p). \tag{1.4}$$

2. Pour tout $p > 0$ et $q > 1$, la fonction Beta satisfait la propriété

$$B(p,q) = \frac{q-1}{p+q-1} B(p,q-1). \tag{1.5}$$

3. Pour tout $p > 0$ et $q > 0$, l'identité suivante est valide

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Démonstration.

1. Soient $p, q > 0$

$$\begin{aligned}
B(p,q) &= \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} \, dt \quad x = 1-t \quad donc \quad dt = -dx \\
&= \int_1^0 (1-x)^{p-1} u^{q-1} (-dx) \\
&= \int_0^1 u^{q-1} (1-x)^{p-1} \, du \\
&= B(q,p).
\end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned}
B(p,q) &= \int_0^1 (1-x)^{q-1} \frac{dx}{x^p} \\
&= \left. \frac{x(1-x)^{q-1}}{p} \right|_0^1 + \frac{q-1}{p} \int_0^1 x(1-x)^{q-2} \, dx \\
&= \frac{q-1}{p} \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-2} \, dx - \frac{q-1}{p} \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} \, dx \\
&= \frac{q-1}{p} B(p,q-1) - \frac{q-1}{p} B(p,q).
\end{aligned}$$

3. Le produit $\Gamma(p)\Gamma(q)$ peut être écrit comme suit :

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^\infty e^{-t} t^{p-1} \, dt \int_0^\infty e^{-s} s^{q-1} \, ds = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(t+s)} t^{p-1} s^{q-1} \, dt \, ds,$$

et

$$\Gamma(p+q) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(t+s)} t^{p-1} s^{q-1}\, dt\, ds.$$

Nous utilisons la notation $t + s = x$, pour $0 < t < \infty$ et $0 < s < \infty$. Le Jacobien est

$$\frac{D[t,s]}{D[x,y]} = \frac{y}{x(1-y-x)} = -x,$$

d'où

$$dt\, ds = \left| \frac{D[t,s]}{D[x,y]} \right| dx\, dy = x\, dx\, dy,$$

ainsi,

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^1 \int_0^1 e^{-x} x^{p+q-1} y^{p-1} (1-y)^{q-1}\, dx\, dy = \int_0^\infty e^{-x} x^{p+q-1}\, dx \int_0^1 y^{p-1}(1-y)^{q-1}\, dy,$$

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \Gamma(p+q) B(p,q).$$

1.3 Calcul fractionnaire

Le calcul fractionnaire est une généralisation du calcul différentiel et intégral classique qui permet d'étendre les concepts de dérivées et d'intégrales à des ordres non entiers. Ce domaine mathématique, dont les origines remontent aux travaux de Leibniz, Euler, Liouville, Riemann et d'autres grands mathématiciens, a gagné en popularité au cours des dernières décennies en raison de ses applications variées dans de nombreux domaines scientifiques et ingénierie. Il existe plusieurs approches pour définir les dérivées et intégrales fractionnaires, chacune ayant ses propres propriétés, ainsi que des domaines d'application spécifiques, pour plus de détailles, voir par exemple [24, 25, 27, 28].

1.4 Intégrales fractionnaires

L'intégration fractionnaire constitue une extension naturelle de l'intégration traditionnelle, permettant ainsi de généraliser les concepts d'intégrales à des ordres non entiers. Dans cette section, nous explorerons différentes approches de ce concept. Les outils mathématiques utilisés pour aborder l'intégration fractionnaire incluent les intégrales de Riemann-Liouville et de Caputo, qui jouent un rôle essentiel dans notre travail. Pour plus de détails sur ces approches, vous pouvez consulter, par exemple, les références [25, 27, 29, 31, 32].

1.4.1 Intégrale de Riemann-Liouville

Définition 1.4.1 *L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ d'une fonction $f\colon [a, \infty[\to \mathbb{R}$,$a > 0$ est définie par*

$$\left({}^{RL}I_a^{\alpha} f\right)(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)\, ds,\ t > a. \tag{1.6}$$

Remarque 1.4.1 *Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$, I_a^{α} coïncide avec l'intégrale répétée n-fois de la forme :*

$$(I_a^{\alpha} f)(x) = \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \cdots \int_a^{t_{n-1}} f(t_n)\, dt_n$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)\, dt$$

Exemple 1.4.1 *Considérons la fonction $f(x) = (x-a)^{\beta}$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $\beta > -1$. En appliquant la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$, on obtient*

$$I_a^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-\zeta)^{\alpha-1} (\zeta-a)^{\beta} d\zeta. \tag{1.7}$$

Pour calculer l'intégrale (1.7)*, on utilise un changement de variable et la définition* (1.3)*. On pose*

$$\zeta - a = s(x-a), \quad d\zeta = (x-a)ds, \quad 0 \leq s \leq 1.$$

Alors

$$I_a^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 \big(x-a-s(x-a)\big)^{\alpha-1} s^{\beta} (x-a)^{\beta+1}\ ds$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\alpha+\beta} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{\beta}\ ds$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\beta)} (x-a)^{\alpha+\beta} B(\alpha, \beta+1)$$

En utilisant les propriétés de la fonction Gamma, on obtient

$$I_a^{a} (x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (x-a)^{\alpha+\beta}.$$

Remarque 1.4.2 *Pour $a = 0$, on trouve*

$$^{RL}I_0^{\alpha}\left(x^{\beta}\right) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}x^{\alpha+\beta}.$$

Proposition 1.4.1 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ Tel que $\alpha > 0$, alors l'opérateur $^{RL}I_a^{\alpha}$ est bien définie.*

Démonstration. Soit $f \in L^1(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ $(\alpha > 0)$. D'aprés le théorème de Fubini , on a

$$\begin{aligned}
\int_a^t \left|I_a^{\alpha} f(t)\right| dt &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} \left|f(s)\right| ds dt \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \left|f(s)\right| \left(\int_s^b (t-s)^{\alpha-1} dt\right) ds \\
&\leq \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} \int_a^b \left|f(s)\right| (b-s)^{\alpha} ds \\
&\leq \frac{b^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^b \left|f(s)\right| ds < \infty.
\end{aligned}$$

Proposition 1.4.2 *Soit $f, g \in L^1(\Omega)$. Alors pour tout $\alpha \geq 0$, on a*

$$^{RL}I_a^{\alpha}\left(c_1 f(t) + c_2 g(t)\right) = c_1^{RL} I_a^{\alpha} f(t) + c_2^{RL} I_a^{\alpha} g(t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
^{RL}I_a^{\alpha}\left(c_1 f(t) + c_2 g(t)\right) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} \left[c_1 f(t) + c_2 g(t)\right] ds \\
&= c_1 \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds + c_2 \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} g(s) ds \\
&= c_1^{RL} I_a^{\alpha} f(t) + c_2^{RL} I_a^{\alpha} g(t).
\end{aligned}$$

Proposition 1.4.3 *Soit $f \in L^1(\Omega)$. Alors.*

$$^{RL}I_a^{\alpha}\left(I_a^{\beta} f(x)\right) =^{RL} I_a^{\alpha+\beta} f(t), \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ \ (\alpha, \beta > 0).$$

Démonstration. En utilisant la formule de Dirichlet , on a

$$\begin{aligned}
^{RL}I_a^{\alpha} I_a^{\beta} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-u)^{\alpha-1} du \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^u (u-t)^{\beta-1} f(t) dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^x f(t) dt \int_t^x (x-u)^{\alpha-1} (u-t)^{\beta-1} du.
\end{aligned}$$

On pose $y = \dfrac{u-t}{x-t}$, donc on a

$$\begin{aligned} {}^{RL}I_a^{\alpha} I_a^{\beta} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^x f(t)\, dt\, (x-t)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-y)^{\alpha-1} y^{\beta-1} dy \\ &= \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-t)^{\alpha+\beta-1} f(t)\, dt = {}^{RL} I_a^{\alpha+\beta} f(t). \end{aligned}$$

1.4.2 Intégrale de Hadamard

Dans cette section, nous présentons la définition ainsi que certaines caractéristiques essentielles, telles que les propriétés du semi-groupe associées à l'opérateur d'intégration fractionnaire de type Hadamard. Pour plus de détailles sur ces opérateurs, veuillez vous référer à [12, 24, 23].

Définition 1.4.2 *L'intégrale fractionnaire de type Hadamard d'ordre* $\alpha \geq 0$, *pour une fonction continue* f *sur* Ω *est définie par*

$$\mathcal{J}_a^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left(\log \frac{t}{\tau} \right)^{\alpha-1} f(\tau) \frac{d\tau}{\tau}, \ \ \alpha > 0, \ \ a \leq t \leq b \tag{1.8}$$

En particulier, si $\alpha = 0$, *on a* $\mathcal{J}_a^0 f(t) = f(t)$.

Exemple 1.4.2 *Considérons la fonction* $f(t) = \ln(t)$ *et calculons son intégrale de Hadamard d'ordre* $\alpha = 1$.

L'intégrale fractionnaire de Hadamard d'une fonction f *est donnée par :*

$$\mathcal{J}_a^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\ln \frac{x}{t} \right)^{\alpha-1} \frac{f(t)}{t}\, dt.$$

Pour $f(t) = \ln(t)$ *et* $\alpha = 1$, *l'intégrale devient :*

$$\mathcal{J}_a^1 \ln(t) = \frac{1}{\Gamma(1)} \int_a^x \left(\ln \frac{x}{t} \right)^{1-1} \frac{\ln(t)}{t}\, dt = \int_a^x \frac{\ln(t)}{t}\, dt.$$

Cette intégrale peut être calculée en utilisant l'intégration par parties :

$$\int \frac{\ln(t)}{t}\, dt = \frac{\ln^2(t)}{2} + C.$$

Ainsi, pour les bornes a et x, nous avons :

$$\mathcal{J}_a^1 \ln(t) = \left[\frac{\ln^2(t)}{2}\right]_a^x = \frac{\ln^2(x)}{2} - \frac{\ln^2(a)}{2} = \frac{1}{2}(\ln^2(x) - \ln^2(a)).$$

Donc

$$\mathcal{J}_a^1 \ln(t) = \frac{1}{2}(\ln^2(x) - \ln^2(a)).$$

Proposition 1.4.4 *L'opérateur $\mathcal{J}_a^\alpha$ est linéaire.*

Démonstration. La linéarité est une conséquence de la linéarité de l'intégrale.

Proposition 1.4.5 *Soit $f \in L^1(\Omega)$. Alors $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $(\alpha, \beta > 0)$, on a*

$$\mathcal{J}_a^\alpha \left(\mathcal{J}_a^\beta f(x)\right) = \mathcal{J}_a^{\alpha+\beta} f(t) = \mathcal{J}_a^\beta \left(\mathcal{J}_a^\alpha f(x)\right)$$

Démonstration.
En utilisant la relation (1.8) et la formule de Dirichlet, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_a^\alpha \left(\mathcal{J}_a^\beta f(x)\right) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\frac{\log x}{t}\right)^{\alpha-1} \mathcal{J}_a^\beta f(t) \frac{dt}{t} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^t \left(\log \frac{t}{\xi}\right)^{\beta-1} f(\xi) \frac{d\xi}{\xi}\right) \frac{dt}{t} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^x \frac{1}{\xi} f(\xi) \left[\int_\xi^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \left(\log \frac{t}{\xi}\right)^{\beta-1} \frac{dt}{t}\right] d\xi \qquad (1.9)
\end{aligned}$$

En utilisant le changement de variables $z = \dfrac{\log t - \log \xi}{\log x - \log \xi}$, on a

$$\begin{aligned}
\int_\xi^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \left(\log \frac{t}{\xi}\right)^{\beta-1} \frac{dt}{t} &= \left(\log \frac{x}{\xi}\right)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-z)^{\alpha-1} z^{\beta-1} dz \\
&= \left(\log \frac{x}{\xi}\right)^{\alpha+\beta-1} B(\alpha, \beta). \qquad (1.10)
\end{aligned}$$

En utilisant (1.9) et (1.10) et la définition de la fonction beta, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_a^\alpha \left(\mathcal{J}_a^\beta f(x)\right) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x \left(\log \frac{x}{\xi}\right)^{\alpha+\beta-1} f(\xi) \frac{d\xi}{\xi} \\
&= \mathcal{J}_a^{\alpha+\beta} f(x).
\end{aligned}$$

1.5 Dérivations fractionnaires

Plusieurs approximations de dérivations fractionnaires sont disponibles en analyse mathématique. Cette section est consacrée à quelques approches majeures, à savoir les méthodes de Riemann-Liouville, de Caputo et de Hadamard, reconnues pour leur pertinence et leur utilité dans de nombreux travaux de recherche. Ces techniques jouent un rôle crucial dans notre étude. Pour plus de détails sur ces approches, nous recommandons la consultation de [12, 24, 27, 31].

1.5.1 Dérivée de Riemann-Liouville

Définition 1.5.1 *Soient $f \in L^1(\Omega)$ et $n-1 \leq \alpha < n, n \in \mathbb{N}^*$. La dérivée fractionnaire Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}^+$ est donnée par*

$$\begin{aligned} \left({}^{RL}D_a^{\alpha} f\right)(t) &:= \left(\frac{d}{dt}\right)^n \left(I_a^{n-\alpha} f\right)(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s)\, ds,\ t > a. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Remarque 1.5.1 *En particulier,*

1. *Pour $\alpha = 0$, on a :*
$$D_a^0 f(x) = \left(\frac{d}{dt}\right)\left(I_a^1 f\right)(t) = f(x).$$
2. *Pour $\alpha = n \in \mathbb{N}$, ona*
$$D_a^n f(x) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n \left(I_a^0 f\right)(t) = f^n(x),$$
ou $f^{(n)}$ est la dérivée usuel d'ordre n de la fonction f.

Exemple 1.5.1 *Considérons la fonction $f(t) = t^2$ et calculons sa dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha = \frac{1}{2}$.*
La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une fonction f d'ordre α est définie par :

$$\left({}^{RL}D_a^{\alpha} f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s)\, ds.$$

Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, $n = 1$, *nous avons :*

$$D_0^{1/2} t^2 = \frac{1}{\Gamma(1/2)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{t^2}{(x-t)^{1/2}}\, dt$$

La fonction gamma de $\frac{1}{2}$ *est :*

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Ainsi, l'expression devient :

$$D_0^{1/2} t^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \underbrace{\int_0^x \frac{t^2}{(x-t)^{1/2}}\, dt}_{I}.$$

Pour calculer l'intégrale I*, nous utilisons un changement de variable* $u = x - t$*. Ainsi, l'intégrale devient :*

$$I = \int_0^x \frac{t^2}{(x-t)^{1/2}}\, dt = \int_x^0 \frac{(x-u)^2}{u^{1/2}}(-du) = \int_0^x \frac{(x-u)^2}{u^{1/2}}\, du$$

Calculons cette intégrale :

$$\int_0^x \frac{(x-u)^2}{u^{1/2}}\, du = \int_0^x \frac{x^2 - 2xu + u^2}{u^{1/2}}\, du$$

$$= x^2 \int_0^x u^{-1/2}\, du - 2x \int_0^x u^{1/2}\, du + \int_0^x u^{3/2}\, du = \frac{16}{15} x^{5/2}.$$

Maintenant, dérivons cette expression par rapport à x *:*

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{16}{15} x^{5/2}\right) = \frac{16}{15} \cdot \frac{5}{2} x^{3/2} = \frac{8}{3} x^{3/2}.$$

Finalement, la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha = \dfrac{1}{2}$ *de la fonction* $f(t) = t^2$ *est donnée par :*

$$D_0^{1/2} t^2 = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} x^{3/2}.$$

Remarque 1.5.2 *La dérivée fractionnaire d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville n'est pas nul.*

Proposition 1.5.1 *Soit* $\alpha, \beta > 0$ *tels que* $n - 1 < \alpha \leq n$ *et* $m - 1 < \beta \leq m$ *avec* $n, m \in \mathbb{N}^*$.

Si $\alpha > \beta > 0$, *alors pour* $f \in L^1(\Omega)$, *on a*

$$\left({}^{RL}D^{\beta} I_a^{\alpha} f\right)(t) = I_a^{\alpha-\beta} f(t)$$

Démonstration. Pour $\alpha > \beta > 0$, on a

$$D^{\beta}\left(I^{\alpha} f(t)\right) = D^{n} I^{n-\beta}\left(I^{\alpha} f(t)\right)$$

On utilise la propriété du semi-groupe, on trouve

$$\begin{aligned} D^{\beta}\left(I^{\alpha} f(t)\right) &= D^{n}\left(I^{n-\beta+\alpha} f(t)\right) \\ &= D^{n} I^{n}\left(I^{\alpha-\beta} f(t)\right) \\ &= I^{\alpha-\beta} f(t). \end{aligned}$$

Proposition 1.5.2 *Soit* $\alpha > 0$ *tels que* $n-1 < \alpha \leq n, n \in \mathbb{N}^*$. *Pour* $f \in L^1(\Omega)$, *on a*

$$\left({}^{RL}D^{\alpha} I_a^{\alpha} f\right)(t) = f(t)$$

Démonstration. En utilisant la définition de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville, on obtient

$$\left(D^{\alpha} I^{\alpha} f\right)(t) = \left(D^{n} I^{n-\alpha} I^{\alpha} f\right)(t).$$

Puisque l'opérateur I^{α} vérifier la propriété du semi-groupe, alors

$$\left(D^{\alpha} I^{\alpha} f\right)(t) = \left(D^{n} I^{n-\alpha+\alpha} f\right)(t) = D^{n} I^{n} f(t) = f(t).$$

Proposition 1.5.3 *Soient* $\alpha > 0, m \in \mathbb{N}^*$ *et* $f \in L^1(\Omega)$. *Si les dérivées fractionnaires* $\left({}^{RL}D^{\alpha} f\right)(t)$ *et* $\left(D^{\alpha+m} f\right)(t)$ *existe, alors*

$$\left(D^{m} D^{\alpha} f\right)(t) = \left(D^{\alpha+m} f\right)(t)$$

Démonstration. Par définition de l'opérateur ${}^{RL}D^{\alpha}$, on obtient

$$D^{m}\left(D^{\alpha} f(x)\right) = D^{m}\left(D^{n} I^{n-\alpha} f(x)\right).$$

On utilise la propriété du semi-groupe de l'opérateur D^n, on obtient

$$\begin{aligned} D^m\left(D^\alpha f\left(x\right)\right) &= D^{m+n}\left(I^{n-\alpha}f(x)\right) \\ &= D^{m+n}\left(I^{n-\alpha+m-m}f(x)\right) \\ &= D^{m+n}\left(I^{m+n-(\alpha+m)}f(x)\right) \\ &= D^{m+\alpha}f(x). \end{aligned}$$

1.5.2 Dérivée de Caputo

Dans cette section, nous exposons la définition et quelques propriétés de l'opérateur de dérivation fractionnaire de type Caputo, tout en mettant en lumière son lien avec l'opérateur différentiel fractionnaire de Riemann-Liouville. Pour des détailles plus approfondies, veuillez consulter [24, 25, 28, 30].

Définition 1.5.2 *Soit $f \in C^n\left(\Omega\right)$. La dérivée fractionnaire de type Caputo d'order $\alpha > 0$ de la fonction f est donner par*

$$^{c}D_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma\left(n-\alpha\right)}\int_a^t \left(t-s\right)^{n-\alpha-1} f^{(n)}\left(s\right)ds,\ \ n \in \mathbb{N}^*, n-1 < \alpha < n, t > a.$$

Remarque 1.5.3 *Si f est une fonction constante, alors on a*

$$^{c}D_a^\alpha f(t) = 0$$

Exemple 1.5.2 *Considérons la fonction $f(t) = t^2$ et calculons sa dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $\alpha = \frac{1}{2}$.*

On a :

$$^{C}D_0^{\frac{1}{2}}f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{2})}\int_0^t (t-\tau)^{\frac{1}{2}}f'(\tau)\,d\tau.$$

Pour la fonction $f(t) = t^2$, nous avons $f'(\tau) = 2\tau$.

Ainsi, l'intégrale devient :

$$^{C}D_0^{\frac{1}{2}}t^2 = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2\tau\,d\tau.$$

Ainsi, nous avons :

$$^{C}D_0^{\frac{1}{2}}t^2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}}\tau\,d\tau$$

Pour évaluer cette intégrale, utilisons une substitution. Posons $\tau = ut$, alors $d\tau = t\,du$:

$$
\begin{aligned}
{}^{C}D_{0}^{\frac{1}{2}} t^2 &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 (t(1-u))^{-\frac{1}{2}} \cdot tu \cdot t\,du \\
&= \frac{2t^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 (1-u)^{-\frac{1}{2}} u\,du
\end{aligned}
$$

L'intégrale de $\int_0^1 (1-u)^{-\frac{1}{2}} u\,du$ est connue et égale à $\frac{\sqrt{\pi}}{4}$. Donc :

$$
{}^{C}D_{0}^{\frac{1}{2}} t^2 = \frac{2t^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{4} = \frac{2}{4} t^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} t^{\frac{3}{2}}.
$$

Proposition 1.5.4 *Soient f et g deux fonctions tels que ${}^{c}D^{\alpha} f(t), {}^{c}D^{\alpha} g(t)$ existes. Alors la dérivation fractionnaire de Caputo est un opérateur linéaire :*

$$
{}^{c}D_{a}^{\alpha} (\lambda f + \gamma g)(t) = \lambda {}^{c}D_{a}^{\alpha} f(t) + \gamma {}^{c}D_{a}^{\alpha} g(t),\ \lambda, \gamma \in \mathbb{R}.
$$

Démonstration. Cette propriété de linéarité de l'opérateur différentiel fractionnaire est une conséquence immédiate de la définition de ${}^{C}D_{a}^{\alpha}$.

Proposition 1.5.5 *Si f est continue et $a \geq 0$, alors*

$$
D^{a} J_{a}^{a} f = f.
$$

Nous notons que ce théorème stipule que la dérivée de Caputo d'une fonction f n'est définie que si la dérivée de Riemann-Liouville de f existe et que de plus, f est $(n-1)$ fois différentiable au sens classique. La relation entre les deux opérateurs différentiels fractionnaires est donnée par le lemme suivant :

Théorème 1.2 *Soit $\alpha > 0$ avec $n - 1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}^*$, et soit f une fonction telle que ${}^{c}D_{a}^{\alpha} f(t)$ et ${}^{RL}D_{a}^{\alpha} f(t)$ existes, alors :*

$$
{}^{RL}D_{a}^{\alpha} f(t) = {}^{C}D_{a}^{\alpha} f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (t-a)^{k-\alpha}.
$$

Démonstration. Voir [1].

Remarque 1.5.4 *Si $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, 1, ..., n-1$, on obtient*

$$
{}^{RL}D_{a}^{\alpha} f(t) = {}^{C}D_{a}^{\alpha} f(t)
$$

1.5.3 Dérivée de Hadamard

Ces dernières décennies, les équations différentielles fractionnaires ont suscité de plus en plus d'intérêt, impliquant principalement le calcul fractionnaire de Riemann-Liouville ou de Caputo [6, 27]. Le calcul de Hadamard (différentiation et intégration) n'a pas été mentionné aussi souvent que d'autres types de dérivées fractionnaires, bien qu'il ait été présenté il y a de nombreuses années [2].

Dans ce qui suit, la définition de la dérivée de Hadamard est introduite [32].

Définition 1.5.3 *La dérivée d'Hadamard d'ordre* $\alpha \in [n-1, n[$, $n \in \mathbb{Z}^+$, *d'une fonction* $f(x)$ *est donnée comme suit :*

$$\begin{aligned} {}^{H}\mathcal{D}^{\alpha} f(t) &= \delta^{n}\left(\mathcal{H}_{a}^{n-\alpha} f(t)\right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(t\frac{d}{dt}\right)^{n} \int_{a}^{t}\left(\log\frac{t}{\tau}\right)^{n-\alpha-1} f(\tau)\,\frac{d\tau}{\tau} \end{aligned}$$

où $\delta = t\dfrac{d}{dt}, n-1 < \alpha < n, t > a.$

Exemple 1.5.3 *Soit* $f(x) = (\ln x)^{\beta-1}, \beta > 0$. *Alors*

$$\begin{aligned} {}^{H}D^{\alpha}(\ln x)^{\beta-1} &= x\frac{d}{dx}\cdot\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{1}^{x}(\ln x - \ln t)^{-\alpha}(\ln t)^{\beta-1}\frac{dt}{t} \\ &= x\frac{d}{dx}\cdot\frac{(\ln x)^{\beta-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{1}^{x}\left(1-\frac{\ln t}{\ln x}\right)^{-\alpha}\left(\frac{\ln t}{\ln x}\right)^{\beta-1}\frac{d\ln t}{\ln x} \\ &= x\frac{d}{dx}\cdot\frac{(\ln x)^{\beta-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{0}^{1}(1-u)^{-\alpha}u^{\beta-1}du \\ &= x\frac{d}{dx}\cdot\frac{(\ln x)^{\beta-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}B(1-\alpha,\beta) \\ &= x\frac{d}{dx}\cdot\frac{(\ln x)^{\beta-\alpha}\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}\cdot x\frac{d}{dx}(\ln x)^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(\ln x)^{\beta-\alpha-1}. \end{aligned}$$

Proposition 1.5.6 *Si $Re(\alpha) > 0$, $Re(\beta) > 0$ et $0 < a < b < \infty$, alors nous avons*

$$\left({}^{H}\mathcal{D}^{\alpha} \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\beta-1} \right)(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} \left(\log \frac{x}{a} \right)^{\beta-\alpha-1}.$$

Démonstration. Voir [24].

Proposition 1.5.7 *Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que $Re(\alpha) > Re(\beta) > 0$. Si $0 < a < b < \infty$ et $1 \leq p < \infty$, alors pour $\varphi \in L^{p}[a, b]$,*

$${}^{H}D_{a}^{\beta} \mathcal{J}_{a}^{\alpha} \varphi = \mathcal{J}_{a+}^{\alpha-\beta} \varphi.$$

Démonstration. Voir [24].

1.5.4 Dérivée de Caputo-Hadamard

Définition 1.5.4 *Soit $f \in C^{n}(\Omega), n \in \mathbb{N}$. La dérivée fractionnaire de Caputo-Hadamard d'ordre ρ de f est définie par :*

$${}_{H}^{C}D^{\rho} f(t) := \mathcal{J}_{a}^{n-\rho} \left(\delta^{n} f(t) \right) = \frac{1}{\Gamma(n-\rho)} \int_{a}^{t} \left(\log \frac{t}{s} \right)^{n-\rho-1} \delta^{n} \frac{f(s)}{s} \, ds, \tag{1.12}$$

où $n - 1 < \rho < n$, $n = [\rho] + 1$, $\delta = t\frac{d}{dt}$, $t > a$ et $\log(.) = \log_{e}(.)$.

Remarque 1.5.5 *En particulier,*

1. *Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$, ${}_{H}^{C}D^{\rho} f(t) = \delta^{n} f(t)$.*
2. *Si $\alpha = 0$, ${}_{H}^{C}D^{0} f(t) = f(t)$.*

Proposition 1.5.8 *Soit $Re(\alpha) > 0, n = [Re(\alpha)] + 1$ et $\varphi \in C[a, b]$. Si $Re(\alpha) \neq 0$ ou $\alpha \in \mathbb{N}$, alors*

$${}_{H}^{C}D_{a}^{\alpha} \left(\mathcal{J}_{a}^{\alpha} \varphi \right)(x) = \varphi(x)$$

Démonstration. Voir [21].

1.6 Lemmes Fondamentaux

Dans cette partie, nous allons présenté quelques lemmes sur les dérivées fractionnaires, qui seront d'une importance capitale dans notre travail. Pour plus de détaillées, vous pouvez consulter [1, 16, 24, 28]. Ces références offrent des explications approfondies qui viennent enrichir notre analyse et fournissent un contexte supplémentaire pour la compréhension des concepts abordés dans cette section.

Lemme 1.1 *Pour tout $\alpha > 0$, la solution générale de l'équation différentielle*

$$^{c}D_{a}^{\alpha} x\left(t\right) = 0$$

est donnée comme suit :

$$x\left(t\right) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \left(t-a\right)^i,$$

tel que $c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, .., n-1,\ n = [\alpha] + 1$.

Lemme 1.2 *Soit $\alpha > 0$. Alors, on obtient que*

$$^{RL}I^{\alpha} D^{\alpha} x\left(t\right) = x\left(t\right) + \sum_{i=0}^{n-1} c_i \left(t-a\right)^i,$$

pour $c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, ..., n-1,\ n = [\alpha] + 1$.

Lemme 1.3 *Soit $u \in C_{\delta}^{n}([a,b], \mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}^{+}$. Alors,*

$$^{H}I^{\alpha}\left({}_{H}^{C}D^{\alpha} u\right)(t) = u(t) - \sum_{i=0}^{n-1} c_i (\log\frac{t}{a})^i, \quad c_i \in \mathbb{R} \tag{4}$$

où $C_{\delta}^{n}([a,b], \mathbb{R}) = \{h : [a,b] \to \mathbb{R} : \delta^{n-1} h \in C([a,b], \mathbb{R})\}$.

1.7 Théorèmes de point fixe

Dans cette partie, quelques théorèmes et définitions concernant le point fixe sont présentés. Ces principes sont employés dans notre étude pour prouver l'existence et l'unicité des solutions des problèmes différentiels considérés. Pour plus de détaillées sur ces théorèmes, veuillez-vous référer aux [16, 30, 32]

Dans ce qui suit, X désigne un espace de Banach .

Définition 1.7.1 *Un opérateur $\mathcal{T} : X \longrightarrow X$ est dite contraction s'il existe une constante $k \in \left]0, 1\right[$, tels que,pour tout $x, y \in X$, on a*

$$\left\|\mathcal{T}\left(x\right) - \mathcal{T}\left(y\right)\right\| \leq k\left\|x - y\right\|.$$

Définition 1.7.2 *L'opérateur $\mathcal{T} : X \longrightarrow X$ est totalement continue s'il transforme tout borné de X en une partie relativement compacte.*

Définition 1.7.3 *Soit $\mathcal{T} : X \longrightarrow X$. On a appelle point fixe de $\mathcal{T}$ tout point $x \in X$ tel que*

$$\mathcal{T}(x) = x.$$

Théorème 1.3 (*Théorème de point fixe de Banach*) *soit $\mathcal{T} : X \longrightarrow X$ un opérateur de contraction . Alors, T admet un unique point fixe dans X.*

Théorème 1.4 (*Théorème d'Arzela-Ascoli*) *Soit Ω un ensemble de X. alors Ω est relativement compact dans X si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :*

$i)$ Ω est uniformément bornée.
$ii)$ Ω est équicontinue.

Théorème 1.5 (*Théorème de point fixe de Schauder*) *soit $\mathcal{T} : X \longrightarrow X$ un opérateur complètement continue. Si l'ensemble*

$$\Omega = \{x \in X : x = \lambda x, 0 < \lambda < 1\}.$$

est borné, alors T a au moins un point fixe .

Théorème 1.6 *Soit S un sous-ensemble non vide, fermé, convexe et borné d'une algèbre de Banach E et soit $A, C : E \to E$ et $B : S \to E$ trois opérateurs tels que :*

(a) : *A et C sont Lipschitziens avec des constantes de Lipschitz respectives δ et γ ;*

(b) : *B est compact et continu ;*

(c) : *$x = AxBy + Cx \Rightarrow x \in S$ pour tout $y \in S$;*

(d) : *$\delta M + \gamma < 1$, où $M = \|B(S)\|$.*

Alors l'équation d'opérateur $x = AxBx + Cx$ admet une solution.

Chapitre 2

Problème aux limites hybride pour l'équation différentielle fractionnaire de type Caputo

Introduction

Les équations différentielles fractionnaires occupent une place essentielle dans la modélisation mathématique des systèmes et des processus présents dans divers domaines de l'ingénierie et des sciences. Elles sont largement utilisées dans des disciplines telles que la physique, la chimie, l'aérodynamique, l'électrodynamique des milieux complexes, la rhéologie des polymères, l'économie, la théorie du contrôle, le traitement du signal et de l'image, la biophysique, ainsi que dans l'étude des phénomènes de circulation sanguine, pour plus de détails, voir par exemple [24, 28, 30, 31]. Ces équations permettent de décrire avec précision des phénomènes complexes et non linéaires qui se produisent dans ces domaines. Les progrès récents dans ce domaine sont abondamment documentés dans la littérature spécialisée, avec une multitude de travaux de recherche et de références qui offrent un aperçu des développements les plus récents et des tendances émergentes. En parallèle, les équations différentielles fractionnaires hybrides ont également suscité un intérêt croissant parmi les chercheurs. Ce type d'équations combine la dérivée fractionnaire d'une fonction inconnue avec une non-linéarité dépendante de cette fonction. Les études récentes dans ce domaine ont conduit à de nouvelles avancées théoriques et méthodologiques, ainsi qu'à des applications pratiques dans divers domaines de la science et de l'ingénierie. Des recherches approfondies sont menées pour explorer les propriétés et les comportements de ces équations hybrides, ce qui contribue à enrichir notre compréhension des phénomènes complexes observés dans la nature et dans les systèmes artificiels.

Dans ce chapitre, nous discutons l'existence de solutions pour un problème aux limites hybride d'équations différentielles fractionnaires de type Caputo, donné sous la forme :

$$\begin{cases} {}^cD^{\alpha}\left(\dfrac{x(t)-z(t,x(t))}{g(t,x(t))}\right)=f(t,x(t)),\ t\in I:=[a,b]\,,b>a>0 \\ x(a)=z(a), \quad x(b)-z(b)=\theta\in\mathbb{R}, \end{cases} \tag{2.1}$$

où ${}^cD^{\alpha}$ est la dérivée de Caputo d'ordre $1<\alpha<2$, $g\in C(I\times\mathbb{R},\mathbb{R}\setminus\{0\})$, $f,z\in C(I\times\mathbb{R},\mathbb{R})$.

2.1 Existence de Solutions

Dans le lemme suivant, nous présentons la solution intégrale du problème linéaire associée au problème (2.1).

Lemme 2.1 *Soit $h,z\in C\,(I,\mathbb{R})$ et $g\in C(I\times\mathbb{R},\mathbb{R}\setminus\{0\})$. Alors la solution unique du problème*

$$\begin{cases} {}^cD^{\alpha}\left(\dfrac{x(t)-z(t,x(t))}{g(t,x(t))}\right)=h(t), \quad t\in I \\ x(a)=z(a), \quad x(b)-z(b)=\theta\in\mathbb{R}, \end{cases} \tag{2.2}$$

est donnée par

$$\begin{aligned} x(t)=&z(t,x(t))+g(t,x(t))\left[\int_a^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h(s)\mathrm{d}s\right. \qquad (2.3)\\ &\left.+\frac{1}{b-a}\left(\frac{\theta}{g(b,x(b))}-\int_a^b\frac{(b-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h(s)\mathrm{d}s\right)(t-a)\right],t\in I. \end{aligned}$$

Démonstration. On a

$${}^cD^{\alpha}\left(\frac{x(t)-z(t,x(t))}{g(t,x(t))}\right)=h(t). \tag{2.4}$$

Par l'application de l'opérateur I_0^{α} aux deux membres de (2.4), on obtient

$$I^{\alpha}\left({}^cD^{\alpha}\left(\frac{x(t)-z(t,x(t))}{g(t,x(t))}\right)\right)=I^{\alpha}h(t).$$

En appliquant le lemme (1.2), on trouve

$$
\begin{aligned}
\frac{x(t)-z(t,x(t))}{g(t,x(t))} &= I_a^{\alpha}h(t)+c_0+c_1(t-a)\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}\,h(s)ds+c_0+c_1(t-a),
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

avec c_0 et c_1 sont deux constantes réelles.
On utilise la condition $x(a)=z(a,x(a))$, on trouve $c_0=0$. D'où l'équation (2.5) devient sous la forme

$$
\frac{x(t)-z(t,x(t))}{g(t,x(t))} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}\,h(s)ds+c_1(t-a)
\tag{2.6}
$$

En utilisant la condition $x(b)-z(b,x(b))=\theta$, on obtient

$$
\frac{\theta}{g(b,x(b))} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b (b-s)^{\alpha-1}\,h(s)ds+c_1(b-a)
$$

D'où

$$
c_1=\frac{1}{b-a}\left(\frac{\theta}{g(b,x(b))}-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b (b-s)^{\alpha-1}\,h(s)ds\right)
$$

En substituant les valeurs de c_0 et c_1 dans (2.5), nous obtenons la formule (2.13) , L'inverse suit par direct calcul.

Nous désignons par $E=C(I,\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues à valeurs réelles définies sur $I=[a,b]$. Définissons une norme $\|\cdot\|$ et une multiplication dans E par

$$
\|x\|=\sup_{t\in I}|x(t)| \quad \text{et} \quad (xy)(t)=x(t)y(t),\ \forall t\in I.
$$

Il est clair que E est une algèbre de Banach par rapport à la norme de suprémum ci-dessus et à la multiplication définie.

Nous introduisons les hypothèses suivantes :

(H_1) : les fonctions $g\in C(I\times\mathbb{R},\mathbb{R}\setminus\{0\})$ et $z\in C(I\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ sont continues et il existe deux fonctions positives ϕ, ψ bornées telle que :

$$|g(t,x) - g(t,y)| \leq \phi(t)|x-y| \tag{2.7}$$

et

$$|z(t,x) - z(t,y)| \leq \psi(t)|x-y| \tag{2.8}$$

(H_2) : Il existe une fonction $p \in C(I, \mathbb{R})$ et une fonction continue croissante $\psi, \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$:

$$|f(t,x)| \leq p(t)\omega(|x|) \ , \quad (t,x) \in I \times \mathbb{R}. \tag{2.9}$$

(H_3) : Il existe une constante M_0 telle que :

$$|z(t)| \leq M_0 \ , \ \forall t \in I$$

(H_4) : Il existe une constante M_1 telle que :

$$\Big|\frac{\theta}{g(b, x(b))}\Big| \leq M_1. \tag{2.10}$$

(H_5) : Il existe une constante r telle que :

$$r \geq \frac{G_0\Big[\frac{2||p||\omega(r)((b-a)^\alpha - (a-b)^\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)} + M_1\Big] + K_0}{1 - ||\phi||\Big[\frac{2||p||\omega(r)((b-a)^\alpha - (a-b)^\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)} + M_1\Big] - M_0} \tag{2.11}$$

où $G_0 = \sup_{t\in I} |g(t,0)|$, $K_0 = \sup_{t \in I} |z(t,0)|$ et

$$||\phi||\Big[\frac{2||p||\omega(r)((b-a)^\alpha - (a-b)^\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)} + M_1\Big] - M_0 < 1. \tag{2.12}$$

Le théorème de point fixe hybride suivant dans une algèbre de Banach E dû à Dhage [14] sera utilisé pour prouver le résultat d'existence pour le problème (2.1).

Théorème 2.1 *On suppose que les hypothèses* $(H_i), i = \overline{1,5}$ *sont vérifiées. Alors, il existe au moins une solution au problème* (2.1).

Démonstration. On considère un sous-ensemble S de E donné par :

$$S = \{x \in E \ : \ ||x|| \leq r\}$$

Clairement S est un sous-ensemble fermé, convexe et borné de lespace de Banach E.
Définissons l'opérateur $\mathcal{N} : E \longrightarrow E$ telle que :

$$\begin{aligned}\mathcal{N}x(t) =& z(t, x(t)) + g(t, x(t))\Bigg[\int_a^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s, x(s))\mathrm{d}s \\ &+ \frac{1}{b-a}\left(\frac{\theta}{g(b, x(b))} - \int_a^b \frac{(b-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s, x(s))\mathrm{d}s\right)(t-a)\Bigg], t \in I.\end{aligned} \tag{2.13}$$

On transforme le problème (2.1) à un problème de point fixe $\mathcal{N}(x) = x$ où $\mathcal{N}$ est lopérateur défini dans (2.13).
Nous décomposons $\mathcal{N}$ en une somme de trois opérateurs. $A : E \longrightarrow E$, $B : S \longrightarrow E$, et $C : E \longrightarrow E$ comme suit :

$$Ax(t) = g(t, x(t)) \ , \ t \in I. \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}Bx(t) =& \int_a^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s, x(s))\mathrm{d}s \\ &+ \frac{1}{b-a}\left(\frac{\theta}{g(b, x(b))} - \int_a^b \frac{(b-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s, x(s))\mathrm{d}s\right)(t-a), \ t \in I\end{aligned} \tag{2.15}$$

et

$$Cx(t) = z(t, x(t)) \tag{2.16}$$

Nous avons donc

$$Nx(t) = Ax(t)Bx(t) + Cx(t)$$

Nous montrons maintenant que les opérateurs A, B et C satisfont toutes les conditions du théorème 2.1.

Etape 1 : Montrons que A et C sont lipschitziennes sur E
Soit $x, y \in E$. Alors par (H_1), pour $t \in I$ on a :

$$|Ax(t) - Ay(t)| = |g(t, x(t)) - g(t, y(t))| \leq \phi(t)|x(t) - y(t)| \leq \| \phi \| \| x - y \| .$$

D'ou

$$\| Ax(t) - Ay(t) \| \leq \| \phi \| \| x - y \|, \forall x, y \in E.$$

Alors A est lipschitzien sur E.
De même façons, pour tout $x, y \in E$, nous avons

$$\begin{aligned}
|\mathcal{C}x(t) - \mathcal{C}y(t)| &= |z(t, x(t)) - z(t, y(t))| \\
&\leq \psi(t)|x(t) - y(t)| \\
&\leq \| \psi \| \| x - y \| .
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{C}$ est une application lipschitzienne sur E.
Etape 2 : Montrons que l'opérateur $\mathcal{B}$ est complètement continu sur S.

Nous montrons d'abord que l'opérateur $\mathcal{B}$ est continu sur E. Soit $\{x_n\}$ une suite dans S qui converge vers un point $x \in S$. Alors, par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, pour tout $t \in I$, on obtient

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} Bx_n(t) = \lim_{n\to\infty} &\left\{ \int_a^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s, x_n(s))\mathrm{d}s \right. \\
&\left. + \frac{1}{b-a}\left(\frac{\theta}{g(b, x_n(b))} - \int_a^b \frac{(b-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s, x_n(s))\mathrm{d}s \right)(t-a) \right\} \\
&= \left\{ \int_a^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \lim_{n\to\infty} f(s, x_n(s))\mathrm{d}s \right. \\
&\left. + \frac{1}{b-a}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\theta}{g(b, x_n(b))} - \int_a^b \frac{(b-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \lim_{n\to\infty} f(s, x_n(s))\mathrm{d}s \right)(t-a) \right\} \\
&= \left\{ \int_a^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s, x(s))\mathrm{d}s \right. \\
&\left. + \frac{1}{b-a}\left(\frac{\theta}{g(b, x(b))} - \int_a^b \frac{(b-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s, x(s))\mathrm{d}s \right)(t-a) \right\} \\
&= Bx(t).
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\mathcal{B}x_n \to \mathcal{B}x$ sur I. De plus, $\{Bx_n\}$ est une suite de fonctions équicontinues. Ainsi, $\mathcal{B}x_n \to \mathcal{B}x$ uniformément et l'opérateur $\mathcal{B}$ est continu sur S.

Montrons que l'ensemble $\mathcal{B}(S)$ est uniformément borné dans S. Pour tout $x \in S$, nous avons

$$
\begin{aligned}
|Bx(t)| \leq & \int_a^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |f(s,x(s))| \mathrm{d}s \\
& + \frac{1}{b-a} \left(\frac{|\theta|}{|g(b,x(b))|} + \int_a^b \frac{(b-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |f(s,x(s))| \mathrm{d}s \right) |(t-a)| \\
& \leq \int_a^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |f(s,x(s))| \mathrm{d}s \\
& + \frac{1}{|b-a|} \left(\frac{|\theta|}{|g(b,x(b))|} + \int_a^b \frac{(b-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |f(s,x(s))| \mathrm{d}s \right) |b-a| \\
& \leq \int_a^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} p(t)\omega(r) \mathrm{d}s \\
& + \left(M_1 + \int_a^b \frac{(b-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} p(t)\omega(r) \mathrm{d}s \right) \\
& \leq 2 \int_a^b \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} p(t)\omega(r) + M_1 \\
& \leq \frac{2||p||\omega(r)((b-a)^{\alpha} - (a-b)^{\alpha})}{\Gamma(\alpha+1)} + M_1 \\
& := K_1.
\end{aligned}
$$

Donc $\| B \| \leq K_1$ ce qui montre que B est uniformément borné sur S pour tout $t \in I$.

Maintenant, nous allons montrer que $B(S)$ est un ensemble équicontinu dans E.

Soient $\tau_1, \tau_2 \in I$ avec $\tau_1 < \tau_2$ et $x \in S$. Alors on a

$$\begin{aligned}
|Bx(\tau_2) - Bx(\tau_1)| \leq & \left| \int_0^{\tau_2} \frac{(\tau_2 - s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s, x(s))ds - \int_0^{\tau_1} \frac{(\tau_1 - s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s, x(s))ds \right| \\
& + |\tau_2 - \tau_1| \left(\int_a^b \frac{(b - s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s, x(s))ds\mathrm{d}s \right) + |\tau_2 - \tau_1| M_1 \\
& \leq \int_0^{\tau_1} \left| \frac{(\tau_2 - s)^{\alpha-1} - (\tau_1 - s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right| |f(s, x(s))ds| + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{(\tau_2 - s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |f(s, x(s))ds| \\
& + |\tau_2 - \tau_1| \left(\int_a^b \frac{(b - s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s, x(s))ds\mathrm{d}s \right) + |\tau_2 - \tau_1| M_1 \\
& \leq \int_0^{\tau_1} \left| \frac{(\tau_2 - s)^{\alpha-1} - (\tau_1 - s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right| \parallel p \parallel \omega(r)ds + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{(\tau_2 - s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \parallel p \parallel \omega(r)ds \\
& + |\tau_2 - \tau_1| \left(\int_a^b \frac{(b - s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} p \parallel \omega(r)ds \right) + |\tau_2 - \tau_1| M_1
\end{aligned}$$

Lorsque $\tau_2 - \tau_1 \to 0$, le membre de droite de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro indépendamment de $x \in S$. Par conséquent, par le théorème d'Arzelà-Ascoli, l'opérateur $\mathcal{B}$ est complètement continu sur S.

Etape 3 : Montrons que l'hypothèse (c) du théorème 1.6 est satisfaite.

Soit $x \in E$ et $y \in S$ tels que $x = AxBy + Cx$. Alors, on a

$$\begin{aligned}
|x(t)| & \leq |Ax(t)||By(t)| + |Cx(t)| \\
& \leq |g(t, x(t))| \left\{ \int_a^t \frac{(t - s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |f(s, x(s))|\mathrm{d}s \right. \\
& \left. + M_1 + \int_a^b \frac{(b - s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |f(s, x(s))|\mathrm{d}s \right\} + |z(s, x(s))| \\
& \leq (|g(t, x(t)) - g(t, 0)| + |g(t, 0)|) \left\{ \int_a^t \frac{(t - s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} p(t)\omega(r)\mathrm{d}s \right. \\
& \left. + M_1 + \int_a^b \frac{(b - s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} p(t)\omega(r)\mathrm{d}s \right\} + M_0 \\
& \leq |r \parallel \psi \parallel + G_0| \left(\frac{2||p||\omega(r)((b - a)^\alpha - (a - b)^\alpha)}{\Gamma(\alpha + 1)} + M_1 \right) + M_0
\end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned}\| x \| &\leq |r \| \psi \| + G_0| \left(\frac{2||p||\omega(r)((b-a)^\alpha - (a-b)^\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)} + M_1 \right) + M_0 \\ &\leq r \ , \ \forall x \in S.\end{aligned}$$

Etape 4 : vérifions que l'hypothèse (d) du théorème (1.6) est satisfaite, c'est-à-dire montrons que $\theta M + \eta < 1$. Puisque

$$M = \| B(S) \| = \sup_{x \in S} \left\{ \sup_{t \in I} |B(x(t))| \right\} \leq \frac{2||p||\omega(r)((b-a)^\alpha - (a-b)^\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)} + M_1,$$

par conséquent, on a

$$\| \phi \| M + \| \psi \| < 1$$

où $\delta = \| \phi \|$ et $\gamma = \| \psi \|$

Donc, toutes les conditions du théorème 1.6 sont satisfaites et par conséquent l'équation $x = \mathcal{A}x\mathcal{B}y + \mathcal{C}x$ a une solution dans S. En conséquence, le problème (2.1) a une solution définie sur I.

2.2 Example

Considérons le problème de valeur aux limites hybride suivant :

$$\begin{cases} {}^cD^{\frac{5}{3}} \left(\dfrac{x(t) - z(t,x(t))}{g(t,x(t))} \right) = [x(t)]^2 \cos t, \ I = [2,5] \\ x(2) = z(2), \quad x(5) - z(5) = \dfrac{3}{7}, \end{cases} \tag{2.17}$$

où $z(t,x(t)) = \dfrac{|x(t)|}{(6+t^2)(3+|x(t)|)}$ et $g(t,x(t)) = \dfrac{x(t)}{(20+t)(100+x(t))} + \dfrac{t}{7}$.
Ici, $\alpha = \dfrac{5}{4}, \theta = \dfrac{3}{7}$. Il est claire que

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq \left| \frac{t}{20+t} \right| |x-y| \quad \text{et} \quad |z(t,x) - z(t,y)| \leq \left| \frac{1}{6+t^2} \right| |x-y|, \ \forall x,y \in \mathbb{R},$$

On pose $\phi(t) = \dfrac{t}{20+t}$ et $\psi(t) = \dfrac{1}{6+t^2}$, on trouve $\|\phi\| = \dfrac{1}{22}$ et $\|\psi\| = \dfrac{1}{10}$,

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une fonction constante $p(t) = 1$ et une fonction continue croissante $\zeta(x) = x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ telle que $|f(t,x)| \leq p(t) \cdot \|x\| = \|x\|^2$, et donc (H_2) est satisfaite. De plus, $M_0 = \dfrac{1}{10}$, $M_1 = \dfrac{3}{175}$, $\|p\| = 1$, $G_0 = \sup_{t\in I} |g(t,0)| = \dfrac{5}{7}$, $K_0 = \sup_{t\in I} |z(t,0)| = 0$. En utilisant ces données , on trouve que les relations (2.11) et (2.12) sont vérifies.
Ainsi, toutes les conditions du Théorème 2.1 sont satisfaites. Par conséquent, le problème (2.17) a au moins une solution sur $[2,5]$.

Chapitre 3

Système d'équations différentielles avec des dérivées fractionnaires séquentielles

Introduction

Les équations différentielles fractionnaires apparaissent dans la modélisation mathématique de nombreux phénomènes réels se produisant dans les disciplines de l'ingénierie et des sciences. Les modèles mathématiques basés sur des opérateurs intégrales et différentielles d'ordre fractionnaire offrent une meilleure compréhension des caractéristiques des phénomènes associés, car ces opérateurs sont de nature non locale, contrairement aux opérateurs classiques. En particulier, les systèmes couplés d'équations différentielles d'ordre fractionnaire ont reçu une grande attention en raison de leur grande utilité dans le traitement et la compréhension des problèmes pratiques tels que la mécanique, l'électromagnétisme, la biologie mathématique et la théorie du contrôle. Pour plus de détailles et d'applications, voir [15, 20, 22]

Dans ce chapitre, nous étudions l'existence et l'unicité des solutions d'un système d'équations fractionnaires séquentielles de la forme :

$$\begin{cases} {}_H^C D^{\alpha}({}_H^C D^{\beta} + \mu_1)x(t) = f(t, x(t), y(t)), \ t \in [1, T], T > 1 \\ {}_H^C D^{\gamma}({}_H^C D^{\lambda} + \mu_2)y(t) = g(t, x(t), y(t)), \\ x(1) = \theta_1, \ x(T) = \vartheta_1, \ y(1) = \theta_2, \ y(T) = \vartheta_2, \end{cases} \tag{3.1}$$

où ${}_H^C D^{\varepsilon}, \varepsilon \in \{\alpha, \beta, \gamma, \lambda\}$ sont les dérivées de Caputo-Hadamard d'ordre $0 < \varepsilon < 1$, f, g :

$[1,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ deux fonctions continues, $\mu_i,\theta_i,\vartheta_i, i=1,2$ sont des constantes réels.

3.1 Résultats d'existence et d'unicité

Premièrement, nous démontrons le lemme clé suivant.

Lemme 3.1

Soient $h_i\in C([1,T],\mathbb{R}), i=1,2$ et considérons le problème fractionnaire

$$\begin{cases} {}^C_HD^{\alpha}({}^C_HD^{\beta}+\mu_1)x(t)=h_1(t),\ t\in[1,T],\\ {}^C_HD^{\gamma}({}^C_HD^{\lambda}+\mu_2)y(t)=h_2(t),\\ \ x(1)=\theta_1,\ x(T)=\vartheta_1,\ y(1)=\theta_2,\ y(T)=\vartheta_2. \end{cases} \tag{3.2}$$

Alors, la solution du problème (3.2) est donnée par

$$\begin{aligned} x(t)=&\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^t\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha+\beta-1}h_1(s)\frac{ds}{s}-\frac{\mu_1}{\Gamma(\beta)}\int_1^t\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\beta-1}x(s)ds \\ &-\frac{(\log t)^{\beta}}{(\log T)^{\beta}}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^T\left(\log\frac{T}{s}\right)^{\alpha+\beta-1}h_1(s)\frac{ds}{s}\right. \\ &\left.-\frac{\mu_1}{\Gamma(\beta)}\int_1^T\left(\log\frac{T}{s}\right)^{\alpha+\beta-1}x(s)ds-\vartheta_1+\theta_1\right)+\theta_1, \end{aligned} \tag{3.3}$$

et

$$\begin{aligned} y(t)=&\frac{1}{\Gamma(\gamma+\lambda)}\int_1^t\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\gamma+\lambda-1}h_2(s)\frac{ds}{s}-\frac{\mu_2}{\Gamma(\lambda)}\int_1^t\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\lambda-1}y(s)ds \\ &-\frac{(\log t)^{\lambda}}{(\log T)^{\lambda}}\left(\frac{1}{\Gamma(\gamma+\lambda)}\int_1^T\left(\log\frac{T}{s}\right)^{\gamma+\lambda-1}h_2(s)\frac{ds}{s}\right. \\ &\left.-\frac{\mu_2}{\Gamma(\lambda)}\int_1^T\left(\log\frac{T}{s}\right)^{\gamma+\lambda-1}y(s)ds-\vartheta_2+\theta_2\right)+\theta_2. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Démonstration. En utilisant le Lemme (1.3), nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} x(t) =& \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} h_1(s) \frac{ds}{s} \\ &- \frac{\mu_1}{\Gamma(\beta)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\beta-1} x(s)ds + \frac{c_0}{\Gamma(\beta+1)} (\log t)^{\beta} + c_1. \end{aligned} \tag{3.5}$$

où $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} y(t) =& \frac{1}{\Gamma(\gamma+\lambda)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\gamma+\lambda-1} h_2(s) \frac{ds}{s} \\ &- \frac{\mu_2}{\Gamma(\lambda)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\lambda-1} x(s)ds + \frac{c_2}{\Gamma(\lambda+1)} (\log t)^{\lambda} + c_3. \end{aligned} \tag{3.6}$$

où $c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.
En utilisant les conditions de (3.2) , on obtient :

$$\begin{aligned} c_1 =& \theta_1, \\ c_0 =& \frac{\Gamma(\beta+1)}{(\log T)^{\beta}} \left(\vartheta_1 - \theta_1 - \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^T \left(\log \frac{T}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} h_1(s) \frac{ds}{s} \right. \\ & \left. + \frac{\mu_1}{\Gamma(\beta)} \int_1^T \left(\log \frac{T}{s}\right)^{\beta-1} x(s)ds \right), \\ c_2 =& \frac{\Gamma(\lambda+1)}{(\log T)^{\lambda}} \left(\vartheta_2 - \theta_2 - \frac{1}{\Gamma(\gamma+\lambda)} \int_1^T \left(\log \frac{T}{s}\right)^{\gamma+\lambda-1} h_2(s) \frac{ds}{s} \right. \\ & \left. + \frac{\mu_2}{\Gamma(\lambda)} \int_1^T \left(\log \frac{T}{s}\right)^{\lambda-1} x(s)ds \right), \\ c_3 =& \theta_2. \end{aligned}$$

En remplaçant c_0, c_1, c_2, c_3 dans (3.5) et (3.6), on trouve les formules (3.3) et (3.4).

3.2 Résultats d'existence et d'unicité

On désigne par $\mathcal{C}([1,T], \mathbb{R})$ l'espace de Banach de toutes les fonctions continues de $[1,T]$ dans $\mathbb{R}$.

L'espace $E=\{x(t) : x(t)\in \mathcal{C}\left([1,T],\mathbb{R}\right)\}$ muni de la norme $\|x\|=\sup\{|x(t)|, t\in[1,T]\}$ est un espace de Banach.
De plus, soit $F=\{y(t) : y(t)\in \mathcal{C}\left([1,T],\mathbb{R}\right)\}$ muni de la norme $\|y\|=\sup\{|y(t)|, t\in[1,T]\}$.
Il est évident que l'espace produit $(E\times F, \|(x,y)\|)$ est un espace de Banach muni de la norme définie par :

$$\|(x,y)\|=\|x\|+\|y\|.$$

Le premier résultat dans ce chapitre est basé sur le principe de contraction de Banach.

Théorème 3.1 *On suppose que $f,g:[1,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sont deux fonctions continues. De plus, nous supposons que :*

(H1) : Il existe des constantes k_i, $i=1,2$, telles que pour tout $t\in[1,T]$ et $u_i,v_i\in\mathbb{R}$, $i=1,2$,

$$|f(t,u_1,v_1)-f(t,u_2,v_2)|\leq k_1\left(|u_1-u_2|+|v_1-v_2|\right),$$

et

$$|g(t,u_1,v_1)-g(t,u_2,v_2)|\leq k_2\left(|u_1-u_2|+|v_1-v_2|\right).$$

Alors, le Système (2) a une solution unique sur $[1,T]$, si

$$\left(\frac{4k_1}{\Gamma(\alpha+\beta)}(\log T)^{\alpha+\beta}+\frac{2|\mu_1|}{\Gamma(\beta+1)}(\log T)^{\beta}\right)+\left(\frac{4k_2}{\Gamma(\gamma+\lambda)}(\log T)^{\gamma+\lambda}+\frac{2|\mu_2|}{\Gamma(\lambda+1)}(\log T)^{\lambda}\right)<1$$

Démonstration : On définie l'opérateur $\mathcal{T}:E\times F\longmapsto E\times F$ comme suit :

$$\mathcal{T}(x,y)(t)=\left(\mathcal{T}_1(x,y)(t),\mathcal{T}_2(x,y)(t)\right),$$

tel que :

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_1(x,y)(t)=&\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^t\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha+\beta-1}\left(f(s,x(s),y(s))\right)\frac{ds}{s}-\frac{\mu_1}{\Gamma(\beta)}\int_1^t\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\beta-1}x(s)ds\\&-\frac{(\log t)^{\beta}}{(\log T)^{\beta}}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^T\left(\log\frac{T}{s}\right)^{\alpha+\beta-1}\left(f(s,x(s),y(s))\right)\frac{ds}{s}\right.\\&\left.-\frac{\mu_1}{\Gamma(\beta)}\int_1^T\left(\log\frac{T}{s}\right)^{\alpha+\beta-1}x(s)ds-\vartheta_1+\theta_1\right)+\theta_1,\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}_2(x,y)(t) =& \frac{1}{\Gamma(\gamma+\lambda)}\int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\gamma+\lambda-1} g(s,x(s),y(s))\frac{ds}{s} - \frac{\mu_2}{\Gamma(\lambda)}\int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\lambda-1} y(s)ds\\
&-\frac{(\log t)^{\lambda}}{(\log T)^{\lambda}}\left(\frac{1}{\Gamma(\gamma+\lambda)}\int_1^T \left(\log\frac{T}{s}\right)^{\gamma+\lambda-1} g(s,x(s),y(s))\frac{ds}{s}\right.\\
&\left.-\frac{\mu_2}{\Gamma(\lambda)}\int_1^T \left(\log\frac{T}{s}\right)^{\gamma+\lambda-1} y(s)ds - \vartheta_2+\theta_2\right)+\theta_2.
\end{aligned}
$$

Définissons $L_1 := \sup_{t\in[1,T]}|f(t,0,0)| < \infty$ et $L_2 := \sup_{t\in[1,T]}|g(t,0,0)| < \infty$.
En posant

$$
r \geq \frac{\frac{2L_1}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(\log T)^{\alpha+\beta}+2|\theta_1|+|\vartheta_1|+\frac{2L_2}{\Gamma(\gamma+\lambda+1)}(\log T)^{\gamma+\lambda}+2|\theta_2|+|\vartheta_2|}{1-\left(\frac{4k}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(\log T)^{\alpha+\beta}+\frac{2|\mu_1|}{\Gamma(\beta+1)}(\log T)^{\beta}+\frac{4k}{\Gamma(\gamma+\lambda+1)}(\log T)^{\gamma+\lambda}+\frac{2|\mu_2|}{\Gamma(\lambda+1)}(\log T)^{\lambda}\right)}. \tag{3.7}
$$

Montrons que $\mathcal{T}B_r \subset B_r$, où $B_r = \{(x,y)\in E\times F : \|(x,y)\| \leq r\}$.
On a

$$
\begin{aligned}
|f(t,x(t),x(\delta_1 t))| &\leq |f(t,x(t),y(\delta_1 t)) - f(t,0,0)| + |f(t,0,0)|\\
&\leq 2k_1\|x\| + L_1 \leq 2k_1 r + L_1,
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

$$
\begin{aligned}
|g(t,x(t),y(\delta_2 t))| &\leq |g(t,x(t),y(\delta_2 t)) - g(t,0,0)| + |g(t,0,0)|\\
&\leq 2k_2\|y\| + L_2 \leq 2k_2 r + L_2,
\end{aligned} \tag{3.9}
$$

$\forall (x,y)\in B_r$, nous avons

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{T}_1(x,y)(t)\| \leq& \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} |f(s,x(s),y(s))|\frac{ds}{s} + \frac{|\mu_1|}{\Gamma(\beta)}\int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\beta-1} |x(s)|ds\\
&+\frac{(\log t)^{\beta}}{(\log T)^{\beta}}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^T \left(\log\frac{T}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} |f(s,x(s),y(s))|\frac{ds}{s}\right.\\
&\left.+\frac{|\mu_1|}{\Gamma(\beta)}\int_1^T \left(\log\frac{T}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} |x(s)|ds - |\vartheta_1|+|\theta_1|\right)+|\theta_1|\\
\leq& \frac{2(\log T)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(2k_1 r + L_1) + \frac{2|\mu_1|(\log T)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} r + 2|\theta_2| + |\vartheta_1|.
\end{aligned}
$$

Donc

$$\begin{aligned}\|\mathcal{T}_1(x,y)(t)\| \leq &\left(\frac{4k}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(\log T)^{\alpha+\beta}+\frac{2|\mu_1|}{\Gamma(\beta+1)}(\log T)^{\beta}\right) r\\ &+\frac{2L_1}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(\log T)^{\alpha+\beta}+2|\theta_1|+|\vartheta_1|\end{aligned}$$

Par calcul direct, on obtient :

$$\begin{aligned}\|\mathcal{T}_2(x,y)(t)\| \leq &\left(\frac{4k}{\Gamma(\gamma+\lambda+1)}(\log T)^{\gamma+\lambda}+\frac{2|\mu_2|}{\Gamma(\lambda+1)}(\log T)^{\lambda}\right) r\\ &+\frac{2L_2}{\Gamma(\gamma+\lambda+1)}(\log b)^{\gamma+\lambda}+2|\theta_2|+|\vartheta_2|\end{aligned}$$

Par conséquent, il résulte que

$$\begin{aligned}\|\mathcal{T}(x,y)(t)\| \leq &\left(\frac{4k}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(\log T)^{\alpha+\beta}+\frac{2|\mu_1|}{\Gamma(\beta+1)}(\log T)^{\beta}\right.\\ &\left.+\frac{4k}{\Gamma(\gamma+\lambda+1)}(\log T)^{\gamma+\lambda}+\frac{2|\mu_2|}{\Gamma(\lambda+1)}(\log T)^{\lambda}\right) r\\ &+\frac{2L_1}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(\log T)^{\alpha+\beta}+2|\theta_1|+|\vartheta_1|\\ &+\frac{2L_2}{\Gamma(\gamma+\lambda+1)}(\log b)^{\gamma+\lambda}+2|\theta_2|+|\vartheta_2|\end{aligned}$$

ce qui implique $\mathcal{T}B_r \subset B_r$.

Ensuite, nous montrons que l'opérateur $\mathcal{T}$ est contractant. Pour tout $(x,y),(x',y') \in E\times F$ et $t\in[1,T]$, on obtient

$$\begin{aligned}|\mathcal{T}_1(x,y)(t)-\mathcal{T}_1(x',y')(t)| \leq &\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^t\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha+\beta-1}|f(s,x(s),y(s))-f(s,x'(s),y'(s))|\frac{ds}{s}\\ &+\frac{|\mu_1|}{\Gamma(\beta)}\int_1^t\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\beta-1}|x(s)-x'(s)|ds+\frac{(\log t)^{\beta}}{(\log T)^{\beta}}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^T\left(\log\frac{T}{s}\right)^{\alpha+\beta-1}\right.\\ &\times|f(s,x(s),y(\delta_1 s))-f(s,x'(s),y'(s))|\frac{ds}{s}\\ &\left.+\frac{|\mu_1|}{\Gamma(\beta)}\int_1^T\left(\log\frac{T}{s}\right)^{\alpha+\beta-1}|x(s)-x'(s)|ds\right).\end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient l'inégalité suivante :

$$\|\mathcal{T}_1(x,y)(t) - \mathcal{T}_1(x',y')\| \leq \left(\frac{4k_1}{\Gamma(\alpha+\beta)}(\log T)^{\alpha+\beta} + \frac{2|\mu_1|}{\Gamma(\beta+1)}(\log T)^{\beta}\right)\|x - x'\|.$$

De plus, on obtient

$$\|\mathcal{T}_2(x,y)(t) - \mathcal{T}_2(x',y')\| \leq \left(\frac{4k_2}{\Gamma(\gamma+\lambda)}(\log T)^{\gamma+\lambda} + \frac{2|\mu_2|}{\Gamma(\lambda+1)}(\log T)^{\lambda}\right)\|y - y'\|.$$

Comme $\left(\frac{4k_1}{\Gamma(\alpha+\beta)}(\log T)^{\alpha+\beta} + \frac{2|\mu_1|}{\Gamma(\beta+1)}(\log T)^{\beta}\right) + \left(\frac{4k_2}{\Gamma(\gamma+\lambda)}(\log T)^{\gamma+\lambda} + \frac{2|\mu_2|}{\Gamma(\lambda+1)}(\log T)^{\lambda}\right) < 1$, par conséquent, $\mathcal{T}$ est un opérateur contractant. En appliquant le théorème du point fixe de Banach, l'opérateur $\mathcal{T}$ a un point fixe unique. Ainsi, il existe une solution unique au problème (3.1) sur $[1,T]$.

Maintenant, nous montrons le deuxième résultat d'existence via l'alternative de Leray-Schauder.

Théorème 3.2 *(H2) : Supposons qu'il existe des constantes réelles $\psi_i, \phi_i \geq 0$ pour $i = 1,2$ et $\psi_0, \phi_0 > 0$, telles que pour tout $x_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1,2)$, nous avons*

$$|f(t,x_1,x_2)| \leq \psi_0 + \psi_1|x_1| + \psi_2|x_2|,$$

$$|g(t,x_1,x_2)| \leq \phi_0 + \phi_1|x_1| + \phi_2|x_2|.$$

Si $\frac{4(\log T)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\psi_1 + \frac{2|\mu_1|(\log T)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} < 1$ et $\frac{4(\log T)^{\gamma+\lambda}}{\Gamma(\gamma+\lambda+1)}\phi_1 + \frac{2|\mu_2|(\log T)^{\lambda}}{\Gamma(\lambda+1)} < 1$, alors le problème (3.1) a au moins une solution sur $[1,T]$.

Démonstration : Par la continuité des fonctions f et g sur $[1,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, l'opérateur $\mathcal{T}$ est continu. Maintenant, nous montrons que l'opérateur $\mathcal{T} : E \times F \to E \times F$ est complètement continu. Soit $\omega \subset E \times F$ borné. Alors, il existe deux constantes positives, M_1 et M_2, telles que

$$\|f(t,x(t),x(t))\| \leq M_1, \quad \|g(t,y(t),y(t))\| \leq M_2, \quad \forall (x,y) \in \omega.$$

Alors, pour tout $(x,y)\in\omega$, nous avons

$$\begin{aligned}\|\mathcal{T}_1(x,y)\| \leq & \frac{M_1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^t\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha+\beta-1}\frac{ds}{s}+\frac{\mu_1 r_1}{\Gamma(\beta)}\int_1^t\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\beta-1}ds\\ &+\frac{(\log t)^\beta}{(\log T)^\beta}\left(\frac{M_1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^T\left(\log\frac{T}{s}\right)^{\alpha+\beta-1}\frac{ds}{s}\right.\\ &\left.+\frac{\mu_1 r_1}{\Gamma(\beta)}\int_1^T\left(\log\frac{T}{s}\right)^{\alpha+\beta-1}ds+|\vartheta_1|+|\theta_1|\right)+|\theta_1|.\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\|\mathcal{T}_1(x,y)\| \leq \frac{2M_1(\log T)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}+\frac{2\delta_1(\log T)^\beta}{\Gamma(\beta+1)}+|\vartheta_1|+2|\theta_1|.$$

De plus, on obtient

$$\|\mathcal{T}_2(x,y)\| \leq \frac{2M_2(\log T)^{\gamma+\lambda}}{\Gamma(\gamma+\lambda+1)}+\frac{2\delta_2(\log T)^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}+|\vartheta_2|+2|\theta_2|.$$

Par conséquent, à partir des inégalités ci-dessus, nous obtenons que l'ensemble $\mathcal{T}\omega$ est uniformément borné.
Ensuite, montrons que l'ensemble $\mathcal{T}\omega$ est équicontinu. Pour tout $(x,y)\in\omega$, et $t_1,t_2\in[1,T]$ tels que $t_1<t_2$, nous avons

$$\begin{aligned}&|(\mathcal{T}_1(x,y)(t_1),\mathcal{T}_1(x,y)(t_2))|\\ \leq & \frac{M_1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^{t_1}\left[\left(\log\frac{t_2}{s}\right)^{\alpha+\beta-1}-\left(\log\frac{t_1}{s}\right)^{\alpha+\beta-1}\right]\frac{ds}{s}+\frac{M_1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_{t_1}^{t_2}\left(\log\frac{t_2}{s}\right)^{\alpha+\beta-1}\\ &+\frac{\mu_1 r_1}{\Gamma(\beta)}\int_1^{t_1}\left[\left(\log\frac{t_1}{s}\right)^{\beta-1}-\left(\log\frac{t_2}{s}\right)^{\beta-1}\right]\frac{ds}{s}+\frac{\mu_1 r_1}{\Gamma(\beta)}\int_{t_1}^{t_2}\left(\log\frac{t_2}{s}\right)^{\beta-1}\frac{ds}{s}\\ &+\frac{(\log t_1)^\beta-(\log t_2)^\beta}{(\log T)^\beta}\left(\frac{M_1(\log T)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}+\frac{\mu_1 r_1(\log T)^\beta}{\Gamma(\beta+1)}+|\vartheta_1|+|\theta_1|\right)\\ \leq & \frac{M_1}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\left[(\log t_2)^{\alpha+\beta}-(\log t_1)^{\alpha+\beta}\right]\\ &+\frac{\mu_1 r_1}{\Gamma(\beta+1)}\left[(\log t_1)^\beta-(\log t_2)^\beta+2\left(\log\frac{t_2}{t_1}\right)^\beta\right]\\ &+\frac{(\log t_1)^\beta-(\log t_2)^\beta}{(\log T)^\beta}\left(\frac{M_1(\log T)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}+\frac{\mu_1 r_1(\log T)^\beta}{\Gamma(\beta+1)}+|\vartheta_1|+|\theta_1|\right).\end{aligned}$$

Par conséquent, nous obtenons $|\mathcal{T}_1(x,y)(t_2) - \mathcal{T}_1(x,y)(t_1)| \to 0$, lorsque $t_1 \to t_2$. De manière analogue, nous pouvons obtenir l'inégalité suivante : $|\mathcal{T}_2(x,y)(t_2) - \mathcal{T}_2(x,y)(t_1)| \to 0$, lorsque $t_1 \to t_2$. Par conséquent, l'ensemble $\mathcal{T}\omega$ est équicontinu. En appliquant le théorème d'Arzelà-Ascoli, l'ensemble $\mathcal{T}\omega$ est relativement compact, ce qui implique que l'opérateur $\mathcal{T}$ est complètement continu.

Finalement, nous montrons que l'ensemble

$$\Sigma = \{(x,y) \in E \times F : (x,y) = \lambda\mathcal{T}(x,y),\ 0 \le \lambda \le 1\}$$

est borné. Soit $(x,y) \in \Sigma$, alors nous obtenons $(x,y) = \lambda\mathcal{T}(x,y)$, ce qui donne, pour tout $t \in [1,T]$,

$$x(t) = \lambda\mathcal{T}_1(x,y)(t), \quad y(t) = \lambda\mathcal{T}_2(x,y)(t).$$

Alors, nous avons

$$\begin{aligned} x(t) \le \lambda \Bigg(& \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} |f(s,x(s),y(s))| \frac{ds}{s} + \frac{|\mu_1|}{\Gamma(\beta)} \int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\beta-1} |x(s)| ds \\ & + \frac{(\log t)^\beta}{(\log T)^\beta} \Bigg(\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^T \left(\log\frac{T}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} |f(s,x(s),y(s))| \frac{ds}{s} \\ & + \frac{|\mu_1|}{\Gamma(\beta)} \int_1^T \left(\log\frac{T}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} x(s) ds + |\vartheta_1| + |\theta_1| \Bigg) + |\theta_1| \Bigg), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y(t) \le \sigma_2 \Bigg(& \frac{1}{\Gamma(\gamma+\lambda)} \int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\gamma+\lambda-1} |g(s,x(s),y(s))| \frac{ds}{s} + \frac{|\mu_2|}{\Gamma(\lambda)} \int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\lambda-1} |y(s)| ds \\ & + \frac{(\log t)^\lambda}{(\log T)^\lambda} \Bigg(\frac{1}{\Gamma(\gamma+\lambda)} \int_1^T \left(\log\frac{T}{s}\right)^{\gamma+\lambda-1} |g(s,x(s),y(s))| \frac{ds}{s} \\ & + \frac{|\mu_2|}{\Gamma(\lambda)} \int_1^T \left(\log\frac{T}{s}\right)^{\gamma+\lambda-1} y(s) ds + |\vartheta_2| + |\theta_2| \Bigg) + |\theta_2| \Bigg), \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\|x\| \le \left(\frac{4(\log T)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \psi_1 + \frac{2\mu_1(\log T)^\beta}{\Gamma(\beta+1)} \right) \|x\| + \frac{2(\log T)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \psi_0 + 2|\theta_1| + |\vartheta_1|,$$

$$\|y\| \le \left(\frac{4(\log T)^{\gamma+\lambda}}{\Gamma(\gamma+\lambda+1)} \phi_1 + \frac{2\mu_2(\log T)^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)} \right) \|y\| + \frac{2(\log T)^{\gamma+\lambda}}{\Gamma(\gamma+\lambda+1)} \phi_0 + 2|\theta_2| + |\vartheta_2|.$$

Ainsi, on obtient l'inégalité

$$\|x\|+\|y\| \leq \frac{2(\log T)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\psi_0+2|\theta_1|+|\vartheta_1|+\frac{2(\log T)^{\gamma+\lambda}}{\Gamma(\gamma+\lambda+1)}\phi_0+2|\theta_2|+|\vartheta_2|$$
$$+\left(\frac{4(\log T)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\psi_1+\frac{2\mu_1(\log T)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}\right)\|x\|+\left(\frac{4(\log T)^{\gamma+\lambda}}{\Gamma(\gamma+\lambda+1)}\phi_1+\frac{2\mu_2(\log T)^{\lambda}}{\Gamma(\lambda+1)}\right)\|y\| \tag{3.10}$$

Il en résulte que

$$\|\mathcal{T}(x,y)\| \leq \frac{\frac{2(\log T)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\psi_0+2|\theta_1|+|\vartheta_1|+\frac{2(\log T)^{\gamma+\lambda}}{\Gamma(\gamma+\lambda+1)}\phi_0+2|\theta_2|+|\vartheta_2|}{\mathcal{M}^*}$$

où

$$\mathcal{M}^* = \min\{1-\left(\frac{4(\log T)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\psi_1+\frac{2\mu_1(\log T)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}\right), 1-\left(\frac{4(\log T)^{\gamma+\lambda}}{\Gamma(\gamma+\lambda+1)}\phi_1+\frac{2\mu_2(\log T)^{\lambda}}{\Gamma(\lambda+1)}\right),$$

ce qui montre que l'ensemble Σ est borné. D'où, l'opérateur $\mathcal{T}$ a au moins un point fixe dans ω. Par conséquent, nous déduisons que le problème (3.1) a au moins une solution sur $[1,T]$.

3.3 Exemple

Considérons le système d'équations différentielles fractionnaires séquentielles de type Caputo-Hadamard suivant :

$$\begin{cases} {}^C_H D^{\frac{1}{2}}\left({}^C_H D^{\frac{1}{7}}+\frac{3}{8}\right)x(t)=f(t,x(t),y(t)),\ t\in[1,5], \\ {}^C_H D^{\frac{5}{7}}\left({}^C_H D^{\frac{2}{9}}+\frac{4}{7}\right)y(t)=g(t,x(t),y(t)), \\ x(1)=\dfrac{7}{9},\ x(5)=\dfrac{5}{6},\ y(1)=\sqrt{2},\ y(5)=\dfrac{7}{8}, \end{cases} \tag{3.11}$$

Dans cet exemple, on a

$$\alpha=\frac{1}{2},\ \beta=\frac{1}{7},\ \gamma=\frac{5}{7},\ \lambda=\frac{2}{9},\ \mu_1=\frac{2}{91},\ \mu_2=\frac{2}{101},\ \theta_1=\frac{7}{9},\ \vartheta_1=\frac{5}{6},\ \theta_2=\sqrt{2},\ \vartheta_2=\frac{7}{8},\ T=5.$$

1. Considérons deux fonctions non linéaires $f,g:[1,5]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définies par

$$f(t,x,y)=\frac{t^2}{(14+t)^2}\left(x^2+2|x|\right)+\frac{|y|}{5(20t+25)}+\frac{1}{5},$$

$$g(t,x,y) = \frac{\sin(|x|)}{10t+71} + \frac{\tan^{-1}(y)}{75t+6} + \frac{3}{8}.$$

Puisque

$$|f(t,x_1,y_1) - f(t,x_2,y_2)| \leq \frac{1}{225}\Big(|x_1-x_2| + |y_1-y_2|\Big)$$

et

$$|g(t,x_1,y_1) - g(t,x_2,y_2)| \leq \frac{1}{81}\Big(|x_1-x_2| + e^{98}|y_1-y_2|\Big).$$

On obtient

$$\frac{4}{125\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{7}\right)}\log(5)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{7}} + \frac{2\times 3}{91\Gamma\left(1+\frac{1}{7}\right)}\log(5)^{\frac{1}{7}} + \frac{4\log(5)^{\frac{5}{7}+\frac{2}{9}}}{81\Gamma\left(\frac{5}{7}+\frac{2}{9}\right)} + \frac{2\times 4}{101\Gamma\left(\frac{2}{9}+1\right)}\log(5)^{\frac{2}{9}} < 1.$$

En conclusion du Théorème 3.1, le problème (3.1) a une solution unique sur $[1,5]$.

2. Considérons les fonctions $f,\, g : [1,5]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(t,x,y) = \frac{1}{11} + \frac{x^4\sin^2 t}{33(1+|x|^3)} + \frac{|y|^5\cos^2 t}{33(1+y^4)},$$

$$g(t,x,y) = \frac{2}{t+2} + \frac{\sin x}{25(t+6)} + \frac{e^{-t^2}\tan^{-1} y}{90+25t^2}.$$

Il est facile de vérifier que

$$|f(t,x,y)| \leq \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{33}|x| + \tfrac{1}{33}|y|,$$

et

$$|g(t,x,y)| \leq \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{200}|x| + \tfrac{1}{190}|y|.$$

Comme

$$\left(\frac{4\log(5)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{7}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+1\right)} \times \frac{1}{33}\right) + \frac{4}{91\cdot\Gamma\left(\frac{1}{7}+1\right)}\log(5)^{\frac{1}{7}} = 0.23338 < 1,$$

et

$$\left(\frac{4\log(5)^{\frac{5}{7}+\frac{2}{9}}}{\Gamma\left(\frac{5}{7}+\frac{2}{9}+1\right)} \cdot \frac{1}{200}\right) + \frac{8}{101\cdot\Gamma\left(\frac{2}{9}+1\right)}\log(5)^{\frac{2}{9}} = 0.12851 < 1,$$

en appliquant le Théorème 3.2, nous obtenons que le système (3.11) a au moins une solution sur $[2,5]$.

Bibliographie

[1] S. B. Abbas, M. Benchohra, and G. NGuérékata. Topics in fractional differential equations, 2012.

[2] B. Ahmad, A. Alsaedi, S. K. Ntouyas, and J. Tariboon. *Hadamard-type fractional differential equations, inclusions and inequalities*. Springer, 2017.

[3] B. Ahmad and J. J. Nieto. Sequential fractional differential equations with three-point boundary conditions. *Computers & Mathematics with Applications*, 64(10) :3046–3052, 2012.

[4] B. Ahmad and J. J. Nieto. Boundary value problems for a class of sequential integrodifferential equations of fractional order. *Journal of Function Spaces*, 2013 :1–12, 2013.

[5] B. Ahmad, K. Ntouyas, and A. Alsaedi. Existence theory for nonlocal boundary value problems involving mixed fractional derivatives. *Nonlinear Analysis : Modelling and Control*, 24(6) :937–957, 2019.

[6] A. Alsaedi, S. K. Ntouyas, R. P. Agarwal, and B. Ahmad. On caputo type sequential fractional differential equations with nonlocal integral boundary conditions. *Advances in Difference Equations*, 2015 :1–12, 2015.

[7] M. H. Aqlan, A. Alsaedi, B. Ahmad, and J. J. Nieto. Existence theory for sequential fractional differential equations with anti-periodic type boundary conditions. *Open Mathematics*, 14(1) :723–735, 2016.

[8] S. Asawasamrit, S. K. Ntouyas, J. Tariboon, and W. Nithiarayaphaks. Coupled systems of sequential caputo and hadamard fractional differential equations with coupled separated boundary conditions. *Symmetry*, 10(12) :701, 2018.

[9] M. Awadalla and N. I. Mahmudov. On system of mixed fractional hybrid differential equations. *Journal of Function Spaces*, 2022 :1–15, 2022.

[10] R. L. Bagley and P. Torvik. A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity. *Journal of Rheology*, 27(3) :201–210, 1983.

[11] M. Benchohra, S. Hamani, and S. K. Ntouyas. Boundary value problems for differential equations with fractional order. *Surveys in Mathematics and its Applications*, 3 :1–12, 2008.

[12] P. L. Butzer, A. A. Kilbas, and J. J. Trujillo. Compositions of hadamard-type fractional integration operators and the semigroup property. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 269(2) :387–400, 2002.

[13] D. Delbosco and L. Rodino. Existence and uniqueness for a nonlinear fractional differential equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 204(2) :609–625, 1996.

[14] B. Dhage. A fixed point theorem in banach algebras involving three operators with applications. *Kyungpook Mathematical Journal*, 44(1) :145–150, 2004.

[15] E. Elsayed, S. Harikrishnan, and K. Kanagarajan. Analysis of nonlinear neutral pantograph differential equations with hilfer fractional derivative. *MathLAB*, 1(2) :231–240, 2018.

[16] A. Granas and J. Dugundji. *Fixed point theory*, volume 14. Springer, 2003.

[17] G. H. Hardy and J. E. Littlewood. Some properties of fractional integrals. i. *Mathematische Zeitschrift*, 27(1) :565–606, 1928.

[18] K. Hilal and A. Kajouni. Boundary value problems for hybrid differential equations with fractional order. *Advances in Difference Equations*, 2015(1) :1–19, 2015.

[19] R. Hilfer. *Applications of fractional calculus in physics.* World Scientific, 2000.

[20] A. Iserles. Exact and discretized stability of the pantograph equation. *Applied Numerical Mathematics*, 24(2) :295–308, 1997.

[21] F. Jarad, T. Abdeljawad, and D. Baleanu. Caputo-type modification of the hadamard fractional derivatives. *Advances in Difference Equations*, 2012 :1–8, 2012.

[22] E. Karimov, B. Lopez, and K. Sadarangani. About the existence of solutions for a hybrid nonlinear generalized fractional pantograph equation. *arXiv preprint arXiv :1605.08972*, 2016.

[23] A. A. Kilbas. Hadamard-type fractional calculus. *Journal of the Korean Mathematical Society*, 38(6) :1191–1204, 2001.

[24] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. J. Trujillo. *Theory and applications of fractional differential equations*, volume 204. Elsevier, 2006.

[25] A. A. Kilbas and J. J. Trujillo. Differential equations of fractional order : methods, results, and problemsi. *Applicable Analysis*, 78(1-2) :153–192, 2001.

[26] F. Mainardi. *Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity : an introduction to mathematical models*. World Scientific, 2022.

[27] K. S. Miller and B. Ross. *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*. Wiley, 1993.

[28] I. Podlubny. *Fractional differential equations : an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*. Elsevier, 1998.

[29] L. G. Romero, L. L. Luque, G. A. Dorrego, and R. A. Cerutti. On the k-riemann-liouville fractional derivative. *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, 8(1) :41–51, 2013.

[30] B. Ross. *Fractional calculus and its applications : proceedings of the international conference held at the University of New Haven, June 1974*, volume 457. Springer, 2006.

[31] J. Sabatier, O. P. Agrawal, and J. T. Machado. *Advances in fractional calculus*, volume 4. Springer, 2007.

[32] S. G. Samko. Fractional integrals and derivatives. *Theory and Applications*, 1993.

[33] Y. Zhao, S. Sun, Z. Han, and Q. Li. Theory of fractional hybrid differential equations. *Computers & Mathematics with Applications*, 62(3) :1312–1324, 2011.