RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN TIARET
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUES
Département de Mathématiques

MÉMOIRE MASTER

Présenter en vue de l'obtention du diplôme de master

Spécialité :
«Mathématiques »

Option :
« Analyse fonctionnelle et application»
« Analyse fonctionnelle et équations différentielles »

Présenté Par :
Merad Saada et **Baghdadi Ikram**

Sous L'intitulé :

Explorer l'existence, l'unicité et la stabilité des solutions d'un problème aux limites à dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre variable.

Soutenu publiquement le 25 / 06 / 2024
à Tiaret devant le jury composé de :

Mme Sabit Souhila	MCA	Université de Tiaret	Président
Mme Cheriet Nour el Imane Khadidja	MCB	Université de Tiaret	Examinateur
Mme Bouazza Zoubida	MCA	Université de Tiaret	Encadreur

Année universitaire : 2023/2024

REMERCIEMENTS

*Louange à **Dieu** tout-puissant,*

par sa grâce les bonnes actions sont accomplies et grâce à lui, les bénédictions perdurent.

Nous remercions Dieu le tout-puissant de nous avoir donné la santé et la volonté dentamer ce mémoire.

Nous profitons de l'occasion pour remercier du cur toute personne qui a contribué de près ou de loin.

*Remerciements et gratitude au superviseur **Dr. Bouazza-Zoubida** pour le soutien et la participation à ce mémoire.*

*Nous tenons également à remercier vivement **les membres du jury**.*

*Un message de remerciement et d'appréciation **à tous les professeurs** et au personnel administratif de l'institut de **mathématique et d'informatique.***

*Nous remercions également **nos parents** pour leur soutien moral et matériel durant la période de préparation.*

Un grand merci à tous ceux qui ont contribué à la réalisation de ce travail, même avec un mot d'encouragement.

***Merci à tous et que Dieu vous bénisse**.*

DÉDICACES

Avec les sentiments d'amour et de gratitude, je dédie ce modeste travail :
À ***mon père*** *et* ***ma mère****, pour leurs patiences, leurs amours, leurs soutiens et leurs encouragements, leur confance.*
À ***mes frères*** *et* ***mes chères soeurs*** *pour leurs grands amours, et leurs soutiens moraux et leurs conseils précieux tout au long de mes études.*
À toute ***ma famille*** *et à tous* ***mes proches.***
À tous ***mes professeurs*** *et à* ***mon binôme.***
À tous ***mes amis*** *et* ***mes collègues.***
M. Saada

Je dédie ce travail après de longues années d'études et de travail :
À ***mes chers parents****, que Dieu les bénisse et les protège pour leur soutien spirituel et financier, ainsi que pour leur encouragement et leurs sacrifices.*
À ***mes frères****,* ***surs*** *et* ***ma chère grand-mère****, ainsi qu'à* ***tous les membres de ma grande famille****, et à* ***mes enseignants*** *qui nous ont guidés et aidés.*
Je le dédie à toutes ***mes amies*** *, y compris celles du collège, du lycée et celles de mon enfance, et à* ***camarades*** *d'études et je remercie* ***ma collègue de mémoire****.*
À ***mes proches*** *et à tous ceux qui me connaissent.*
B. Ikram

RÉSUMÉ

Dans cette recherche, nous nous concentrons sur l'étude des équations différentielles fractionnaires de Riemann-Liouville avec un ordre variable et des conditions aux limites fractionnaires, dans le but de déterminer les conditions d'existence, d'unicité et de stabilité de leurs solutions. Nous utilisons les concepts d'intervalles généralisés et des fonctions en escalier constantes pour transformer le problème en équations différentielles d'ordre constant. Ensuite, nous appliquons deux théorèmes du point fixe(le théorème de Schaefer et le théorème de Banach) pour garantir l'existence et l'unicité des solutions. De plus, nous étudions la stabilité des solutions selon le sens d'Ulam-Hyers-Rassias (UHR). Enfin, des exemples illustratifs sont présentés.

Mots clés : Équation différentielle fractionnaire d'ordre variable ; théorème du point fixe ; problème aux limites ; l'intégrale et la Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville ; stabilité au sens d'Ulam-Hyers-Rassias.

Table des matières

Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$\Gamma(.)$	La fonction Gamma.
$\beta(.,.)$	La fonction Bêta.
$G(.,.)$	La fonction de Green.
$\|\|.\|\|$	La norme.
E	Espace de Banach.
I_a^u	Intégrale fractionnaire d'ordre u.
D_a^u	Dérivée fractionnaire d'ordre u au sens de Riemann-Liouville.
$\frac{d^n}{dt^n}$	La dérivée partielle d'ordre n par rapport à la variable t.
$n!$	Fonction de factorielle.
$Re(z)$	Partie réelle de z.
$C([a,b],\mathbb{R})$	Espace des fonctions continues de $[a,b]$ à valeur dans $\mathbb{R}$.
$C^n([a,b],\mathbb{R})$	Espace des fonctions n fois continument différentiables.
(H)	Homogène.
(NH)	Non-Homogène.
R-L	Riemann-Liouville
VORLFDE	Equation différentielle fractionnaire de Rimmen-Liouville d'ordre variable.
$L^1([a,b],\mathbb{R})$	L'espace des fonctions mesurables de lebesgue sur $[a,b]$

Introduction

Le calcul fractionnaire connaît à l'heure actuelle une grande popularité parmi les chercheurs en sciences fondamentales et appliquées. En fait, il étend les opérations de dérivation et d'intégration aux ordres non entiers. Au début c'était presque un jeu d'esprit pour certains mathématiciens de renommée, qui voulaient généraliser la notion de différentiation d'ordres entiers à des ordres fractionnaires, permettant le calcul de la dérivée d'ordre α réel ou complexe d'une fonction différentiable.

Bien que le concept de la dérivation d'ordre fractionnaire ne soit pas nouveau, ses origines remontaient à la fin du $17^{\text{ième}}$ siècle, partant de la réponse de G.W. Leibniz concernant la question de l'Hôpital, posée sur la signification de $\dfrac{d^n f}{dt^n}$ si $n = \dfrac{1}{2}$. Son intérêt n'est reconnu que durant les deux dernières décennies du $20^{\text{ième}}$ siècle où de nombreuses applications ont été développées utilisant ce concept. Un exposé historique détaillé est donné en introduction de [9] ; de plus, cet ouvrage est sans doute l'un des premiers à rassembler des résultats épars.

Le calcul fractionnaire d'ordre variable est une généralisation de l'ordre constant, où l'idée du calcul fractionnaire d'ordre variable est de considérer l'ordre des opérateurs différentiels et intégraux d'ordre constant comme une fonction.

Alors que de nombreux chercheurs ont étudié l'existence de solutions pour les problèmes fractionnaires d'ordre constant, l'existence de solutions pour les problèmes d'ordre variable est rarement mentionnée dans la littérature et il y a eu très peu d'études sur la stabilité des solutions ; nous nous référons à [2, 14]. Par conséquent, l'exploration de ce sujet de recherche intéressant rend tous les résultats de ce livre nouveaux et précieux.

La théorie de la stabilité des équations fonctionnelles s'est développée très rapidement au cours des dernières décennies.

Dans cette recherche, nous examinerons l'existence, l'unicité et la stabilité des solutions d'un problème aux limites pour des équations différentielles fractionnaires de Riemann-Liouville. Nous l'avons divisée en trois chapitres comme suit :

Dans **le premier chapitre :** nous présentons quelques définitions concernant le calcul fractionnaire qui sont utilisées dans les autres chapitres. La stabilité d'Ulam-Hyers-Rassias. Ainsi, quelques théorèmes du point fixe qui représentent un outil indispensable dans ce mémoire.

Dans **le deuxième chapitre :** on traite l'existence et l'unicité de solution du problème aux limites pour des équations différentielles fractionnaires d'ordre variable suivante :

$$\begin{cases} \mathcal{D}^{w(t)}y(t) = g(t, y(t)), & t \in \mathcal{J}, \\ \\ \mathcal{D}^{w(t)-2}y(0) = \alpha_0 \mathcal{D}^{w(t)-2}y(a), & \mathcal{D}^{w(t)-1}y(0) = \alpha_1 \mathcal{D}^{w(t)-1}y(a). \end{cases} \tag{1}$$

où $\mathcal{J} := [0, a]$. $0 < a < \infty$. $\mathcal{D}^{w(t)}$ est la dérivée fractionnaire de R-L d'ordre variable $w(t)$, telle que $w(t) : \mathcal{J} \rightarrow]1, 2]$, $g : \mathcal{J} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, α_0, α_1 sont des constantes données.

Dans **le troisième chapitre :** nous étudierons la stabilité d'Ulam-Hyers-Rassias pour notre problème traité et donnerons des exemples pour illustrer nos résultats.

Chapitre 1

Préliminaire

Dans ce chapitre, nous présentons des définitions et quelques propriétés pour trois fonctions spéciales (la fonction Gamma et Bêta, Green). Ainsi, les définitions d'integrale et la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville et les types de stabilités.

1.1 Fonctions spéciales

Dans cette section,nous présontons certaines théories qui concernent des fonctions spésciales.

1.1.1 La Fonction Gamma $\Gamma(z)$

La fonction Gamma d'Euler est l'une des outils de base du calcul fractionnaire qui a été introduite par le mathématicien suisse leonhar d'Euler (1707,1783) , elle est appelée aussi fonction factorielle généralisée.

Définition 1.1. *([9]) La fonction Gamma* $\Gamma(z)$ *est définie par :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt \quad (\textit{pour } z \in \mathbb{C}, Re(z) > 0).$$

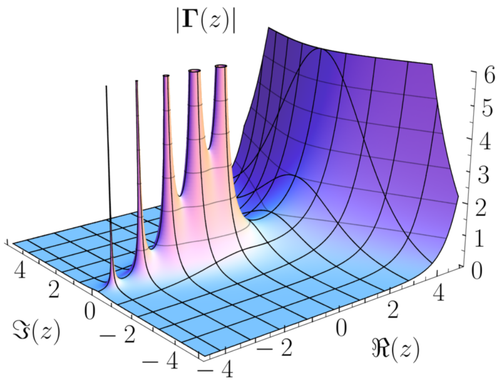

FIGURE 1.1 – Graphique de la fonction Gamma-3D-

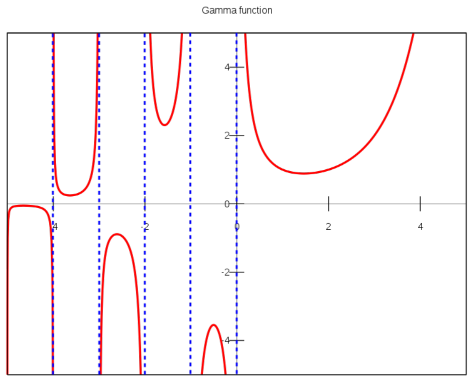

FIGURE 1.2 – Courbe représentative de la fonction Gamma.

Propriétés de la fonction Gamma :

Proposition 1.1. *Pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $Re(z) > 0$ *et* $n \in \mathbb{N}$, *on a les propriétés suivantes :*

1. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

2. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

3. $\Gamma(n) = (n-1)!$

Preuve.

1. En utilisant l'intégration par parties :

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^z dt \\ &= [-e^{-t}t^z]_0^{+\infty} + z\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt \\ &= z\Gamma(z).\end{aligned}$$

2. Montrer que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{1/2-1}dx,$$

Posons

$$x = z^2 \Rightarrow x^{1/2} = z, \; et \;\; dz = 1/2x^{-1/2}dx.$$

donc

$$\Gamma(1/2) = 2\int_0^{+\infty} e^{-z^2}dz,$$

Pour calculer cet intégrale, posons

$$M = \int_0^{+\infty} e^{-z^2}dz$$

On peut écrire que

$$M = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$$

D'où

$$M^2 = \int_0^{+\infty} e^{-z^2}dz \int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$$

Le facteur $e^{-z^2}dz$ est une constante qu'on peut inclue dans l'intégrale

$$M^2 = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(t^2+z^2)}dtdz,$$

En utilisant les coordonnées polaires où $r = \sqrt{t^2+z^2}$ et l'élément de surface est égale à rdr dθ, on obtient :

$$M^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{+\infty} e^{-r^2}rdr = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{-\infty} e^u du$$

où

$$u = -r^2,\ du = -2rdr.$$

$$M^2 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta [e^u]_0^{-\infty} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{4},$$

$$M = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \Gamma(\frac{1}{2}) = 2M = \sqrt{\pi}.$$

Par définition on a :

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^x dt,$$

on applique une intégration par partie, on trouve :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}t^x dt = \left[-t^x e^{-t}\right]_0^{+\infty} + x\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt = x\Gamma(x). \tag{1.2}$$

3. Nous allons montrer la formule $\Gamma(n+1) = n!$ par récurrence sur n.
   — Si $n = 0$, alors $\Gamma(0+1) = \Gamma(1) = 1 = 0!$.
   — Supposons la formule vérifiée pour $(n-1)$ et considérons le cas n, cest-à-dire que nous supposons que $\Gamma((n-1)+1) = \Gamma(n) = (n-1)!$ est vérifiée, alors $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!$.

Par conséquent, la propriété (3) est démontrée.

Exemple :

✔ $\Gamma(4) = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$.

✔ $\dfrac{\Gamma(6)}{2\Gamma(3)} = \dfrac{5!}{2 \times 2!} = \dfrac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 2 \times 1} = 30$.

✔ $\dfrac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(1/2)} = \dfrac{\Gamma(1+(1/2))}{\Gamma(1/2)} = \dfrac{\frac{1}{2}\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/2)} = \dfrac{1}{2}$.

1.1.2 La Fonction Bêta $\beta(x, y)$

L'autre fonction importante dans le calcul fractionnaire est la fonction Bêta d'Euler.

Définition 1.2. *([5]) La fonction Bêta $\beta(x, y)$ est définie pour $x, y \in \mathbb{C}$ par :*

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt; \quad avec \quad Re(x), Re(y) > 0.$$

Remarque 1.1. ❖ *la fonction Bêta est symétrique $\beta(x, y) = \beta(y, x)$.*

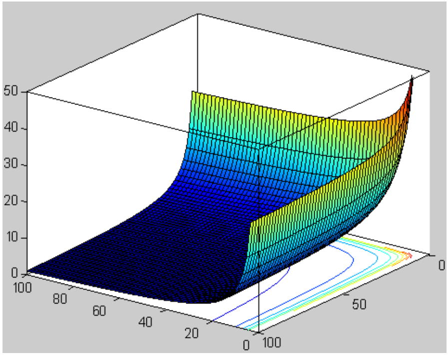

FIGURE 1.3 – Variations de la fonction Bêta pour les valeurs positives de x et y.

Autre expression de la fonction bêta :

$$\beta(x,y) = 2\int_0^{\pi/2} (sin\theta)^{2x-1}(cos\theta)^{2y-1}d\theta = \int_0^{\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}dt.$$

La relation entre les fonctions $\Gamma(z)$ et $\beta(x,y)$

❏ La relation bêta est liée à la fonction gamma par la formule :

$$\beta(x,y) = 2\int_0^{\pi/2} sin^{2x-1}\theta cos^{2y-1}d\theta = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}; \quad Re(x), Re(y) > 0.$$

Propriétés de la fonction bêta :

Proposition 1.2. *Pour tout $(x,y) \in \mathbb{C}^2$ tel que $Re(x) > 0$ et $Re(y) > 0$, on a les propriétés suivantes :*

1. $\beta(x,y) = \beta(y,x)$.
2. $\beta(x,y+1) = \dfrac{y}{x}\beta(x+1,y) = \dfrac{y}{x+y}\beta(x,y)$.
3. $\beta(x,y) = \beta(x+1,y) + \beta(x,y+1)$.

Preuve.

1. $\beta(x,y) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = \int_0^{\infty} (1-T)^{x-1}t^{y-1}dt = \beta(y,x)$.

2.
$$\begin{aligned}
\beta(x,y+1) &= \frac{\Gamma(x)\Gamma(y+1)}{\Gamma(x+y+1)} \\
&= \frac{y\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y+1)} \\
&= \frac{y}{x}\frac{x\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y+1)} \\
&= \frac{y}{x}\frac{\Gamma(x+1)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y-1)} \\
&= \frac{y}{x}\beta(x+1,y) \\
\beta(x,y+1) &= \frac{y}{x+y}\beta(x,y).
\end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned}
\beta(x,y) &= \frac{x}{y}\beta(x,y+1)+\beta(x,y+1) \\
&= \frac{x\Gamma(x)\Gamma(y+1)}{y\Gamma(x+y+1)}+\beta(x,y+1) \\
&= \frac{\Gamma(x+1)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y+1)}+\beta(x,y+1),
\end{aligned}$$

Donc
$$\beta(x,y)=\beta(x+1,y)+\beta(x,y+1).$$

Exemple :

✔ $\beta(2,3)=\dfrac{\Gamma(2)\Gamma(3)}{\Gamma(2+3)}=\dfrac{1!2!}{4!}=\dfrac{1\times 2\times 1}{4\times 3\times 2\times 1}=\dfrac{1}{12}.$

1.1.3 La Fonction de Green $G(x,y)$

Soient $p, q, f \in C([a,b]),\mathbb{R}$ où $p \in C^1([a,b],\mathbb{R}),\,(a<b)$ et $(\alpha_i,\beta_i)\in\mathbb{R}^2$ tels que pour tout $i=1,2$: $|\alpha_1|+|\alpha_2|\neq 0$ et $|\beta_1|+|\beta_2|\neq 0$. On considère les équations différentielles ordinaires :

$$(H) \qquad (py')'+qy=0,$$

$$(NH) \qquad (py')'+qy=f,$$

Ainsi que les conditions aux bords associées :

$$(CB)_h \begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \end{cases}$$
$$(CB)_{nh} \begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \zeta, \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = \delta, \end{cases}$$

Définition 1.3. *On appelle fonction de Green associé au problème homogène* $(H)-(CB)_h$ *une fonction* $G : [a,b]\times[a,b] \to \mathbb{R}$ *vérifiant les propriétés suivantes :*
(a) G *est continue sur* $[a,b]\times[a,b]$.
(b) G *est symétrique :* $G(t,s) = G(s,t), \forall (t,s) \in [a,b]^2$.
(c) $\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)$ *est continue pour tout* $t \neq s$.
(d) La fonction partielle $t \to G(t,s)$ *est solution de l'équation* (H) *pour tout* $t \neq s$.
(e) La fonction partielle $t \to G(t,s)$ *vérifie les conditions* $(CB)_h$ *pour tout* $s \in [a,b]$.

Théorème 1.1 (Existence et unicité de la fonction de Green). *([6])*
Si le problème homogène $(H)-(CB)_h$ *n'admet pas de solution non-triviale. Alors, il existe une (et une seule) fonction* G *ne dépendant pas de* f*, dite fonction de Green, telle que, pour toute fonction* f*, la solution* y *du problème non-homogène* $(NH)-(CB)_{nh}$ *s'écrit de manière unique sous la forme :*

$$y(x) = \int_a^b G(x,s)f(s)ds.$$

Exemple 1.1.1. *On calcule la fonction de Green pour le problème aux limites suivant :*

$$\begin{cases} y'' + y = 0, & \text{dans } 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

La solution générale de l'équation $y'' + y = 0$ *s'écrit sous la forme :*

$$y = a\cos x + b\sin x$$
$$y(0) = 0 \Rightarrow a = 0$$
$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \mathrm{b} = 0$$

Donc il existe une (et seulement une) fonction de Green associée au problème (1.1) il est clair que : $\{\cos x, \sin x\}$ *est un système de solutions fondamentales, alors on calcule le wronskien :*

$$W = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1.$$

Et on obtient :

$$G(x,y) = \begin{cases} \cos y \sin x & si \quad 0 < y \leq x, \\ \sin y \cos x & si \quad x \leq y < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

1.2 L'intégrale et la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

Dans cette section, nous citons quelques définitions et résultats du calcul fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.

1.2.1 L'intégrale et la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre constant

Définition 1.4. *([9]) L'intégrale fractionnaire d'ordre* $\alpha \in \mathbb{R}_+$ *de la fonction* $h \in \mathrm{L}^1([\mathrm{a},\mathrm{b}], \mathbb{R}_+)$ *est défini par :*

$$I_{a^+}^{(\alpha)} h(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds, \quad t > a.v \tag{1.2}$$

où $\Gamma(.\ )$ *est la fonction Gamma.*

Exemple 1.2.1. *Considérons la fonction* $f(x) = (x-a)^{\beta}$, *alors :*

$$I_{a^+}^{\alpha} (x-a)^{\beta} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^{\beta} dt$$

Pour évaluer cette intégrale, on utilise la définition de la fonction Bêta et on pose le changement de variable $t = a + (x-a)k$, d'où :

$$\begin{aligned} I_k^{\alpha}(x-a)^{\beta} &= \frac{1}{\Gamma(a)} \int_a^1 [(x-a)(1-k)]^{a-1}[(x-a)k]^{\beta}(x-a)dk \\ &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-k)^{\alpha-1}k^{\beta}dk \\ &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta+1)} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(x-a)^{\alpha+\beta}, \end{aligned}$$

Pour : $a = 0$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 1$, on obtient :

$$\begin{aligned} I_0^{0.5}(x) &= \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2.5)}x^{1.5} \\ &= \frac{\sqrt{x^3}}{\Gamma(2.5)}. \end{aligned}$$

Pour : $\alpha = 1$, on obtient :

$$\begin{aligned} I_{a^+}^1(x-a)^{\beta} &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+2)}(x-a)^{\beta+1} \\ &= \frac{\beta!}{(\beta+1)!}(x-a)^{\beta+1} \\ &= \frac{1}{\beta+1}(x-a)^{\beta+1}. \end{aligned}$$

Définition 1.5. *([9]) La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ de la fonction $h \in \mathrm{L}^1([a,b], \mathbb{R}_+)$, est donnée par :*

$$\left(D_{a+}^{\alpha}h\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}h(s)ds. \tag{1.3}$$

Où $n = [\alpha] + 1$ et $[\alpha]$ désigne la partie entière de α.

Exemple 1.2.2. - *Reprenons l'exemple de la fonction h(t) telle que :* $h(t) = (t-a)^{\beta}$.

$$\begin{aligned} D_{a^+}^{\alpha} h(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} (t-a)^{n+\beta-\alpha} \int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1} s^{\beta} ds \\ &= \frac{\Gamma(n+\beta-\alpha+1) B(n-\alpha, \beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(n+\beta-\alpha+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-\alpha+1)\Gamma(n+\beta-\alpha+1)} (t-\alpha)^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha}. \end{aligned}$$

Pour $\alpha = 1/2, \beta = 1/2$ *et* $a = 0$, *on aura :*

$$D^{1/2} t^{1/2} = \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(1)} = \Gamma(3/2) = \Gamma(1+1/2) = 1/2\Gamma(1/2) = 1/2\sqrt{\pi}.$$

1.2.2 L'intégrale et la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre variable

Définition 1.6. *([15]-[19]) Soit* $-\infty < a < b < +\infty$ *et* $u(t) : [a,b] \mapsto [0, +\infty[$, *l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre variable* $u(t)$ *de la fonction* $h(t)$ *est définie par :*

$$I_{a^+}^{u(t)} h(t) = \int_a^t \frac{(t-s)^{u(t)-1}}{\Gamma(u(t))} h(t) dt, \quad t > a. \tag{1.4}$$

Définition 1.7. *([15]-[19]) Soit* $-\infty < a < b < +\infty, n \in \mathbb{N}, u(t) : [a,b] \mapsto (n-1, n)$, *la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre variable* $u(t)$ *de la fonction* $h(t)$ *est définie par :*

$$D_{a^+}^{u(t)} h(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n I_{a^+}^{n-u(t)} h(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t \frac{(t-s)^{n-u(s)-1}}{\Gamma(n-u(s))} h(s) ds, \quad t > a. \tag{1.5}$$

1.2.3 Quelques propriétés de l'intégrale et la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Si h est continue pour $t > a$, alors l'intégration fractionnaire d'ordre réel arbitraire possède la propriété suivante :

$$I_{a+}^{\alpha}(I_{\alpha+}^{\beta}h(t)) = I_{a+}^{\alpha+\beta}h(t), \ (\alpha > 0, \beta > 0),$$

évidemment, on peut changer α et β en forme :

$$I_{a+}^{\alpha}(I_{a+}^{\beta}h(t)) = I_{a+}^{\beta}(I_{a+}^{\alpha}h)(t) = I_{a+}^{\alpha+\beta}h(t), \ (\alpha > 0, \beta > 0).$$

La propriété la plus importante de la dérivée fractionnaire au sens de R-L, pour $\alpha > 0$ et t>a est :

$$D_{a+}^{\alpha}I_{a+}^{\alpha}h(t) = h(t),$$

$$D_{a+}^{\beta}I_{a+}^{\alpha}h(t) = I_{a+}^{\alpha-\beta}h(t)$$

presque partout sur $[a, b]$, où
$L^p[a, b] = \{$h: $[a, b] \to \mathbb{R}$; h est mesurable dans $[a, b]$ et $\displaystyle\int_a^b |h(t)|^p dt < \infty\}$.
En particulier, si $\beta = k \in \mathbb{N}$ et $\alpha > k$, alors :

$$D_{a+}^{k}I_{a+}^{\alpha}h(t) = I_{a+}^{\alpha-k}h(t),$$

Soient $\alpha \geqslant 0$, $m \in \mathbb{N}$, on a :

$$D_{a+}^{m}D_{a+}^{\alpha}h(t) = D_{a+}^{\alpha+m}h(t).$$

Remarque 1.2. *([20])* ***La propriété de semi-Group*** *est satisfaite pour les intégrales fractionnaires de Riemann-liouville avec les ordres constantes, mais pas* *pour celles avec des ordres variables. En d'autres termes :*

$$I_{a^+}^{u(t)} I_{a^+}^{v(t)} y(t) \neq I_{a^+}^{u(t)+v(t)} y(t).$$

Exemples :

Exemple 1.2.3. *Soient*

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,1], \\ 1, & t \in]1,2], \end{cases}$$
$$v(t) = \begin{cases} 2, & t \in [0,1], \\ 3, & t \in]1,2], \end{cases}$$

et $f(t) = \dfrac{t}{3}, \quad t \in [0,2]$, *alors*

$$\begin{aligned}
I_{0+}^{u(t)} I_{0^+}^{v(t)} f(t) &= \int_0^1 \frac{(t-s)^{u(t)-1}}{\Gamma(u(t))} \int_0^s \frac{(s-\tau)^{v(s)-1}}{\Gamma(v(s))} f(\tau) d\tau ds \\
&+ \int_1^t \frac{(t-s)^{u(t)-1}}{\Gamma(u(t))} \int_0^s \frac{(s-\tau)^{v(s)-1}}{\Gamma(v(s))} f(\tau) d\tau ds \\
&= \int_0^1 \frac{(t-s)^0}{\Gamma(1)} \int_0^s \frac{(s-\tau)^1 \tau}{\Gamma(2)} \frac{\tau}{3} d\tau ds \\
&+ \int_1^t \frac{(t-s)^0}{\Gamma(1)} \left[\int_0^1 \frac{(s-\tau)^1}{\Gamma(2)} \frac{\tau}{3} d\tau + \int_1^s \frac{(s-\tau)^2}{\Gamma(3)} \frac{\tau}{3} d\tau \right] ds \\
&= \frac{1}{3} \int_0^1 \left(\frac{s^3}{2} - \frac{s^3}{3} \right) ds + \int_1^t \left[\frac{1}{3} \left(\frac{s^3}{2} - \frac{s^3}{3} \right) + \frac{1}{6} \left(\frac{s^4}{12} - \frac{s^2}{2} + \frac{2}{3} s - \frac{1}{4} \right) \right] ds,
\end{aligned}$$

On sait que,

$$\begin{aligned}
I_{0^+}^{u(t)} I_{0^+}^{v(t)} f(t) \Big|_{t=2} &= \frac{1}{72} + \frac{1}{3} \int_1^2 \left(\frac{s^4}{24} + \frac{s^3}{6} - \frac{s^2}{4} + \frac{s}{3} - \frac{1}{24} \right) ds, \\
&= \frac{96}{360}. \\
I_{0^+}^{u(t)+v(t)} f(t) \Big|_{t=2} &= \int_0^1 \frac{(2-s)^{1+2-1}}{\Gamma(1+2)} \frac{s}{3} ds + \int_1^2 \frac{(2-s)^{1+3-1}}{\Gamma(1+3)} \frac{s}{3} ds, \\
&= \frac{11}{72} + \frac{3}{180} = \frac{61}{360}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient

$$I_{0^+}^{u(t)} I_{0^+}^{v(t)} f(t)\Big|_{t=2} \neq I_{0^+}^{u(t)+v(t)} f(t)\Big|_{t=2}.$$

Exemple 1.2.4. *Soit*

$$u(t) = \begin{cases} 2, & t \in [0,1], \\ 1, & t \in]1,3], \end{cases}$$
$$v(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,1], \\ 2, & t \in]1,3], \end{cases}$$

et $h(t) = t,\ t \in [0,3]$.

$$\begin{aligned} I_{0^+}^{u(t)} I_{0^+}^{v(t)} h(t) &= \int_0^1 \frac{(t-s)^{u(s)-1}}{\Gamma(u(s))} \int_0^s \frac{(s-\tau)^{v(\tau)-1}}{\Gamma(v(\tau))} h(\tau) d\tau ds \\ &+ \int_1^t \frac{(t-s)^{u(s)-1}}{\Gamma(u(s))} \int_0^s \frac{(s-\tau)^{v(\tau)-1}}{\Gamma(v(\tau))} h(\tau) d\tau ds \\ &= \int_0^1 \frac{(t-s)^1}{\Gamma(2)} \int_0^s \frac{(s-\tau)^0}{\Gamma(1)} \tau d\tau ds \\ &+ \int_1^t \frac{(t-s)^0}{\Gamma(1)} \left[\int_0^1 \frac{(s-\tau)^0}{\Gamma(1)} \tau d\tau + \int_1^s \frac{(s-\tau)^1}{\Gamma(2)} \tau d\tau \right] ds \\ &= \int_0^1 \frac{(t-s)s^2}{2\Gamma(2)} ds + \int_1^t \left(\frac{s^3}{6} - \frac{s}{2} \right) ds \end{aligned}$$

et

$$I_{0^+}^{u(t)+v(t)} h(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{u(s)+v(s)-1}}{\Gamma(u(s)+v(s))} h(s) ds,$$

on sait que,

$$\begin{aligned} I_{0^+}^{u(t)} I_{a^+}^{v(t)} h(t)\Big|_{t=2} &= \int_0^1 \frac{(2-s)s^2}{2\Gamma(2)} ds + \int_1^2 \left(\frac{s^3}{6} - \frac{s}{2} + \frac{5}{6} \right) ds, \\ &= \frac{5}{24} + \frac{17}{24} = \frac{22}{24}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{0^+}^{u(t)+v(t)} h(t)\Big|_{t=2} &= \int_0^1 \frac{(2-s)^{2+1-1}}{\Gamma(2+1)} s ds + \int_1^2 \frac{(2-s)^{1+2-1}}{\Gamma(1+2)} s ds, \\ &= \frac{11}{24} + \frac{5}{24} = \frac{16}{24}. \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient

$$I_{0^+}^{u(t)} I_{0^+}^{v(t)} h(t)\Big|_{t=2} \neq I_{0^+}^{u(t)+v(t)} h(t)\Big|_{t=2}.$$

1.3 Fonction constante par morceaux

Définition 1.8 (**L'intervalle généralisé**). *([2]) : Un intervalle généralisé, noté I, est un sous-ensemble de l'ensemble des nombres réels* $\mathbb{R}$*, cet ensemble peut prendre trois formes :*

- Un intervalle, représenté sous forme : $[\alpha_1, \alpha_2]\,,]\alpha_1, \alpha_2[\,, [\alpha_1, \alpha_2[\,,]\alpha_1, \alpha_2]\,.$

- Un point unique $\{a\}$*.*

- L'ensemble vide ϕ*.*

Définition 1.9 (**La partition**). *([2]) : Soit I un intervalle généralisé, une partition de I est un ensemble fini P d'intervalles généralisés contenus dans I, tels que pour tout x appartenant à I se trouve exactement dans l'un des intervalles généralisés E dans P.*

Exemple 1.3.1. *L'ensemble* $P = \{[2,5]\,, \{5\}\,, \{6\}\,, [6,9]\}$ *d'intervalles généralisés, c'est une partition de* $[2,9]\,.$

Définition 1.10 (**La fonction constante par morceau**). *([2]) : Soit I un intervalle généralisé, soit* $g : I \to \mathbb{R}$ *une fonction, et soit P une partition de I. g est dite constante par morceaux par rapport à P si pour tout* $E \in P$*, g est constant sur E .*

Exemple 1.3.2. *Considérons la fonction* $h : [1,4] \to \mathbb{R}$ *définie par :*

$$h(x) = \begin{cases} -1, & si \quad 1 \leqslant x < 2, \\ 0, & si \quad 2 \leqslant x < 3, \\ 2, & si \quad x = 3, \\ 3, & si \quad 3 \leqslant x \leqslant 4. \end{cases}$$

Cette fonction est constante par morceaux par rapport à la partition $\{[1,2[, [2,3[,\{3\},[3,4]\}$ *de l'intervalle* $[1,4]$.

Exemple 1.3.3. *Soit la fonction I :* $[0,5] \to \mathbb{R}$ *définie par :*

$$I(x)= \begin{cases} 3, & si \quad 0 \leqslant x < 1, \\ 8, & si \quad x = 1, \\ 1, & si \quad 1 < x < 3, \\ 7, & si \quad x = 3, \\ 5, & si \quad 3 < x \leqslant 5. \end{cases}$$

La fonction I est constante par morceaux par rapport à la partition $\{[0,1[,\{1\}$ $,]1,3[,\ \{3\},]3,5]\}$ *de* $[0,5]$.

1.4 Quelques théorèmes du point fixe

Les théorèmes de point fixe sont les outils mathématiques de base qui aident à établir l'existence de solutions de divers genres d'équations. La méthode du point fixe consiste à transformer un problème donné en un problème de point fixe. Les points fixes du problème transformé sont ainsi les solutions du problème donné. Dans cette section, nous présenterons les théorèmes que nous utiliserons plus tard, où le théorème de Schaefer prouve l'existence de le point fixe, tandis que le théorème de Banach prouve l'existence d'un point fixe unique.

1.4.1 Concepts essentiels

Définition 1.11 (**Espace fonctionnel**)**.** *. Soit* $\mathcal{J} := [0,a]$, $a > 0$. *Notons* $C(\mathcal{J},\mathbb{R})$ *l'espace de Banach des fonctions continues définies de* $\mathcal{J}$ *dans* $\mathbb{R}$*, muni de la norme*

$$\|y\|_\infty = \sup\{\|y(t)\| : t \in \mathcal{J}\},$$

où $\|\cdot\|$ *est une norme sur* $\mathbb{R}$*.*

Définition 1.12 (**Ensemble convexe**)**.** *. Soit E un espace vectoriel sur un corps* $K(\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C})$ *et* $K \subset E$*, on dit que K est convexe si :*

$$\forall (x,y) \in K^2, \forall \lambda \in [0,1], \lambda x + (1-\lambda)y \in K.$$

Définition 1.13 (**Le point fixe**). *Un point fixe est une valeur dans un certain domaine qui reste inchangée sous l'application d'une fonction donnée. En d'autres termes, si $f(x) = x$, alors x est un point fixe de la fonction f.*

Définition 1.14 (**La continuité**). *Soient E et F deux espaces de Banach, un opérateur $T : E \to F$ est dit continu si pour toute suite $(x_n)_{n\in N}$ dans E telle que $(x_n)_{n\in N}$ converge vers x dans E, la suite $(Tx_n)_{n\in N}$ converge vers Tx dans F.*

Définition 1.15 (**La compacité**). *Soient E et F deux espaces de Banach, un opérateur $T : E \to F$ est dit compact si pour tout ensemble borné B dans E, l'image de B (cest-à-dire T(B)) est un ensemble relativement compact dans F. Cela signifie que la fermeture de T(B) est compacte .*

Définition 1.16 (**Complètement continu**). *Soient E, F deux espaces de Banach, soit $T : E \longrightarrow F$, on dit que :*
T est un opérateur complètement continu si T est continu et s'il transforme tout ensemble borné de E en un ensemble relativement compact de F.

Théorème 1.2. *(**Théorème d'Arzèla-Ascoli**).[11] Soit A un sous-ensemble de $C(\mathcal{J}, E)$. A est relativement compact dans $C(\mathcal{J}, E)$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :*
i) *L'ensemble A est **uniformément borné** : cest-à-dire, il existe une constante $k > 0$, telle que :*

$$\|f(x)\|_E \leq k,$$

pour tout $x \in \mathcal{J}$ et tout $f \in A$.
ii) *L'ensemble A est **equicontinu** : cest-à-dire, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que :*

$$\|t_1 - t_2\| < \delta \Rightarrow \|f(t_1) - f(t_2)\| \leq \varepsilon,$$

pour tout $t_1, t_2 \in \mathcal{J}$ et tout $f \in A$.

1.4.2 Théorème de contraction de Banach

Théorème 1.3. *[7, 8] Dans un espace de Banach E, un opérateur $F : E \to E$ est considéré comme* ***une contraction****, s'il existe un $k \in \mathbb{R}^+$ tel que $k < 1$ et*

$$\|F(x) - F(y)\|_E \leqslant k\|x - y\|_E.$$

Selon la théorie de la contraction. Si f est une contraction dans E, alors il admet un point fixe unique (cest-à-dire : un point x tel que $F(x) = x$).

1.4.3 Théorème du point fixe de Schauder

Théorème 1.4. *Soit E un espace de Banach, Q est un sous-ensemble non-vide, convexe et fermé de E, et soit $F : Q \to Q$ un opérateur complètement continu, alors F possède au moins un point fixe dans Q, en d'autres termes, il existe au moins un élément $x \in Q$ tel que $f(x) = x$.*

1.4.4 Théorème du point fixe de Schaefer

Théorème 1.5. *Soit E un espace de Banach. Si $A : E \to E$ est un opérateur complètement continu et si l'ensemble*

$$\varepsilon = \{x \in X : \lambda Ax = x \text{ pour certains } \lambda \in]0, 1[\},$$

est borné, alors A possède au moins un point fixe.

1.5 Type de stabilité

1.5.1 Stabilité au sens d'Ulam-Hyers

Définition 1.17. *([13]) L'équation (1) est stable au sens d'Ulam-Hyers s'il existe un nombre réel $C_f > 0$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour chaque solution $x \in C^1(\mathcal{J}, \mathbb{R})$ de l'inégalité :*

$$| D^u x(t) - f(t, x(t)) | \leq \varepsilon, \ t \in \mathcal{J},$$

il existe une solution $y \in C^1(\mathcal{J}, \mathbb{R})$ de l'équation (1) vérifiant :

$$| x(t) - y(t) | \leq C_f, \ t \in \mathcal{J},$$

1.5.2 Stabilité au sens d'Ulam-Hyers généralisée

Définition 1.18. *([13]) L'équation (1) est stable au sens d'Ulam-Hyers généralisée, s'il existe une fonction $\psi_f \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, $\psi_f(0) = 0$, telle que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour chaque solution $x \in C^1(\mathcal{J}, \mathbb{R})$ de l'inégalité :*

$$| D^u x(t) - f(t, x(t)) | \leq \varepsilon, \ t \in \mathcal{J},$$

il existe une solution $y \in C^1(\mathcal{J}, \mathbb{R})$ de l'équation (1) vérifiant :

$$| x(t) - y(t) | \leq \psi_f(\varepsilon), \ t \in \mathcal{J}.$$

1.5.3 Stabilité au sens d'Ulam-Hyers-Rassias

Définition 1.19. *([14]) L'équation (1) est stable au sens d'Ulam-Hyers-Rassias par rapport à $\varphi \in C(\mathcal{J}, \mathbb{R}_+)$, s'il existe un nombre réel $C_f > 0$, tel que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour chaque solution $x \in C^1(\mathcal{J}, \mathbb{R})$ de l'inégalité :*

$$| D^u x(t) - f(t, x(t)) | \leq \varepsilon\varphi, \ t \in \mathcal{J}, \tag{1.6}$$

il existe une solution $y \in C^1(\mathcal{J}, \mathbb{R})$ de l'équation (1) vérifiant :

$$| x(t) - y(t) | \leq C_f \varepsilon \varphi(t), \ t \in \mathcal{J}.$$

Chapitre 2

Etude de l'existence et l'unicité d'un problème aux limites pour des équations différentielles fractionnaires

Ce chapitre a été consacré à l'étude de l'existence et l'unicité d'un problème aux limites pour des équations différentielles fractionnaires au sens de Riemann-Liouville d'ordre variable avec des conditions aux limites fractionnaires. Nos résultats sont basés sur l'application de deux théorèmes du point fixe(théorème de Banach et théorème de Schaefer).

2.1 Présentation du problème

On considère le problème aux limites fractionnaires suivantes :

$$\begin{cases} \mathcal{D}^{w(t)}y(t) = g(t, y(t)), & t \in \mathcal{J}, \\ \\ \mathcal{D}^{w(t)-2}y(0) = \alpha_0 \mathcal{D}^{w(t)-2}y(a), & \mathcal{D}^{w(t)-1}y(0) = \alpha_1 \mathcal{D}^{w(t)-1}y(a). \end{cases} \tag{2.1}$$

où $\mathcal{J} := [0, a]$. $0 < a < \infty$. $\mathcal{D}^{w(t)}$ est la dérivée fractionnaire de R-L d'ordre variable $w(t)$, telle que $w(t) : \mathcal{J} \to]1, 2]$, $g : \mathcal{J} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, α_0, α_1 sont des constantes données.

2.2 L'existence de la solution

Supposons l'hypothèse suivante :

(H1) Supposons que $\{a_k\}_{k=0}^{n}$ est la suite finie de points telle que $0 = a_0 < a_k < a_n = a, k = 1, \ldots, n-1$ où $n \in \mathbb{N}$.
Soit $\mathcal{J}_k := (a_{k-1}, a_k], k = 1, 2, \ldots, n$. Alors $\mathcal{P} = \cup_{k=1}^{n} \mathcal{J}_k$ est une partition de l'intervalle $\mathcal{J}$.
Soit $w(t) : \mathcal{J} \to (1, 2]$ une fonction constante par morceau par rapport à $\mathcal{P}$, c'est-à-dire

$$w(t) = \sum_{m=0}^{n} w_m I_m(t) = \begin{cases} w_0, & si\ t \in \mathcal{J}_0, \\ w_1, & si\ t \in \mathcal{J}_1, \\ . & \\ . & \\ . & \\ w_n, & si\ t \in \mathcal{J}_n, \end{cases}$$

où $1 < w_m \leq 2$ sont des constantes, et I_m représente l'indicateur de l'intervalle $\mathcal{J}_m, m = 1, 2, \ldots, n$, c'est-à-dire,

$$I_m(t) = \begin{cases} 1, & t \in \mathcal{J}_m, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note par $E_m \in C(\mathcal{J}_m, \mathbb{R})$, lespace de Banach des fonctions continues $\mathcal{J}_m$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $||y||_{E_m} = \sup |y(t)|$, $t \in \mathcal{J}_m$ où $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$

Pour tout $t \in \mathcal{J}_m, m = 1, \ldots, n$, on peut représenter la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville dordre variable $w(t)$ de la fonction $y(t) \in C(J, \mathbb{R})$, définie par (1.5), comme la somme des dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville à gauche dordres entiers $w_k, k = 1, \ldots, m$:

$$\begin{aligned} D_{0^+}^{w(t)} y(t) &= \frac{1}{\Gamma(2-w(t))} \frac{d^2}{dt^2} \int_0^t (t-s)^{1-w(t)} y(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(2-w(t))} \Big(\sum_{k=1}^{m-1} \frac{d^2}{dt^2} \int_{a_{k-1}}^{a_k} (t-s)^{1-w_k} y(s) ds \\ &\quad + \frac{d^2}{dt^2} \int_{a_{m-1}}^{t} (t-s)^{1-w_m} y(s) ds \Big). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Par conséquent, le problème VORLFDE (2.1) peut être exprimé sur $\mathcal{J}_m$ pour chaque $m = 1, \ldots, n$ de la manière suivante :

$$\frac{1}{\Gamma(2-w(t))} \left(\sum_{k=1}^{m-1} \frac{d^2}{dt^2} \int_{a_{k-1}}^{a_k} (t-s)^{1-w_k} y(s) ds + \frac{d^2}{dt^2} \int_{a_{m-1}}^{t} (t-s)^{1-w_m} y(s) ds \right) = g(t, y(t)) \tag{2.3}$$

Soit la fonction $\tilde{y} \in C(\mathcal{J}_m, \mathbb{R})$ telle que $\tilde{y}(t) \equiv 0$ sur $[0, a_{m-1}]$ et elle résout l'équation intégrale (2.3). Alors, (2.3) s'écrit comme suit :

$$D_{a_{m-1}^+}^{w_m} \tilde{y}(t) = g(t, \tilde{y}(t)), \quad t \in \mathcal{J}_m.$$

Considérons le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} D_{a_{m-1}^+}^{w_m} y(t) = g(t, y(t)), & t \in \mathcal{J}_m, \\ D_{a_{m-1}^+}^{w_m-2} y(a_{m-1}) = \alpha_0 D_{a_{m-1}^+}^{w_m-2} y(a_m), & D_{a_{m-1}^+}^{w_m-1} y(a_{m-1}) = \alpha_1 D_{a_{m-1}^+}^{w_m-1} y(a_m). \end{cases} \tag{2.4}$$

Pour l'existence de solutions du problème (2.4) nous avons besoin des lemmes auxiliaires suivants :

Lemme 2.1. *Pour tout $\alpha > 0$ et une fonction f définie sur l'intervalle $[0, b]$, la* *solution générale de l'équation différentielle fractionnaire* $D^\alpha f(x) = 0$ *est de la forme :*

$$f(x) = w_0 t^{\alpha-n} + w_1 t^{\alpha-n-1} + ... + w_{n-2} t^{\alpha-2} + w_{n-1} t^{\alpha-1}$$

où $w_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., n-1$, *et* $n = [\alpha] + 1$, *avec* $[\alpha]$ *désignant la partie entière de* α.

Lemme 2.2. *Pour tout* $\alpha > 0$ *et une fonction* f *définie sur l'intervalle* $[0, b]$, *l'intégrale fractionnaire de la dérivée fractionnaire est :*

$$I^\alpha D^\alpha f(x) = f(x) + w_0 t^{\alpha-n} + w_1 t^{\alpha-n-1} + ... + w_{n-2} t^{\alpha-2} + w_{n-1} t^{\alpha-1}$$

où $w_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., n-1$, *et* $n = [\alpha] + 1$.

Lemme 2.3. *Soient* $\alpha_0, \alpha_1 \neq 1$, $g \in C(\mathcal{J}_m \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ *pour* $m = 1, \ldots, n$, *et* $\gamma \in (0, 1)$ *un nombre tel que* $t^\gamma g \in C(\mathcal{J}_m \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Si x *est la solution de l'équation intégrale :*

$$x(t) = \frac{1}{\Gamma(w_m)} \int_{a_{m-1}}^{t} (t-s)^{w_m-1} g(s, x(s)) ds \quad + \frac{\alpha_1 t^{w_m-1}}{(1-\alpha_1)\Gamma(w_m)} \int_{a_{m-1}}^{a_m} g(s, x(s)) ds$$

$$+ \frac{t^{w_m-2}}{(1-\alpha_0)(1-\alpha_1)\Gamma(w_m-1)} \int_{a_{m-1}}^{a_m} [(\alpha_0 a_m - \alpha_1 a_{m-1} - \alpha_0(1-\alpha_1)s] g(s, x(s)) ds. \quad (2.5)$$

Alors, la fonction $x \in E_m$ *est une solution du problème (2.4).*

Preuve :

Soit $x \in E_m$ une solution du problème (2.4). Maintenant, en appliquant l'opérateur $I^{w_m}_{a^+_{m-1}}$ aux deux côtés de l'équation du problème (2.4), on trouve :

$$x(t) = \lambda_1 t^{w_{m-1}} + \lambda_0 t^{w_{m-2}} + I^{w_m}_{a^+_{m-1}} g(t, x(t)), \quad (2.6)$$

où λ_0, λ_1 sont des constantes.

En utilisant (2.6), on trouve :

$$D^{w_m-1}x(t) = \lambda_1\Gamma\left(w_m\right) + I^1 g(t, x(t)).$$

En vue des hypothèses sur la fonction g et de la condition aux limites,

$$D^{w_m-1}_{a^+_{m-1}} x\left(a_{m-1}\right) = \alpha_1 D^{w_m-1}_{a^+_{m-1}} x\left(a_m\right),$$

on obtient

$$\lambda_1 = \frac{\alpha_1}{\left(1-\alpha_1\right)\Gamma\left(w_m\right)} \int_{a_{m-1}}^{a_m} g(s, x(s))ds,$$

puisque $I^{2-w_m}\left(t^{w_m-1}\right) = \Gamma\left(w_m\right)t$ et $I^{2-w_m}\left(t^{w_m-2}\right) = \Gamma\left(w_m-1\right)$, á partir de la condition aux limites,

$$D^{w_m-2}_{a^+_{m-1}} x\left(a_{m-1}\right) = \alpha_0 D^{w_m-2}_{a^+_{m-1}} x\left(a_m\right),$$

on obtient

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \frac{\alpha_1(\alpha_0\theta_{u_m} - \alpha_{u_m} - 1)}{(1-\alpha_1)(1-\alpha_0)\Gamma(u_m-1)} \int_{u_{m-1}}^{\infty} g(s, x(s))ds \\ &\quad + \frac{\alpha_0}{(1-\alpha_0)\Gamma(u_m-1)} \int_{u_{m-1}}^{\infty} (u_m - s) g(s, x(s))ds \end{aligned} \tag{2.7}$$

Alors la solution du problème (2.4) est donneé par :

$$x(t) = \int_{a_{m-1}}^{a_m} G_m(t, s) g(s, x(s))ds,$$

où $G_m(t, s)$ est la fonction de Green définie par :

$$G_m(t,s)=\begin{cases}\dfrac{\alpha_1 t^{w_m-1}}{(1-\alpha_1)\,\Gamma(w_m)}+\dfrac{t^{w_m-2}\left[\alpha_0 a_m-\alpha_1 a_{m-1}-\alpha_0(1-\alpha_1)s\right]}{(1-\alpha_0)(1-\alpha_1)\,\Gamma(w_m-1)}+\dfrac{1}{\Gamma(w_m)}(t-s)^{w_m-1}, & \\ \hfill a_{m-1}\leq s\leq t\leq a_m, & \\ \dfrac{\alpha_1 t^{w_m-1}}{(1-\alpha_1)\,\Gamma(w_m)}+\dfrac{t^{w_m-2}\left[\alpha_0 a_m-\alpha_1 a_{m-1}-\alpha_0(1-\alpha_1)s\right]}{(1-\alpha_0)(1-\alpha_1)\,\Gamma(w_m-1)}, & \\ \hfill a_{m-1}\leq t\leq s\leq a_m, & \end{cases}$$

où $m=1,2,\ldots,n$.

Le premier résultat d'existence est basé sur le théorème du point fixe de Schaefer.

Théorème 2.1. *Supposons que les conditions du Lemme (2.3) sont satisfaites et qu'il existe une constante $N>0$ telle que*

$$t^{\gamma}|g(t,y)|\leq N,\quad \forall t\in\mathcal{J}_m, y\in\mathbb{R},$$

avec $\gamma=2-w$. Alors, le problème aux limites (2.4) admet au moins une solution dans $C_\gamma\left[a_{m-1},a_m\right]$.

Preuve :

Transformons le problème (2.4) en un problème de point fixe. Considérons l'opérateur S défini par :

$$\begin{aligned} Sy(t) = & \frac{1}{\Gamma(w_m)} \int_{a_{m-1}}^{t} (t-s)^{w_m-1} g(s,y(s))ds + \frac{\alpha_1 t^{w_m-1}}{(1-\alpha_1)\Gamma(w_m)} \int_{a_{m-1}}^{a_m} g(s,y(s))ds \\ & + \frac{t^{w_m-2}}{(1-\alpha_0)(1-\alpha_1)\Gamma(w_m-1)} \int_{a_{m-1}}^{a_m} \left[(\alpha_0 a_m - \alpha_1 a_{m-1} - \alpha_0(1-\alpha_1)s\right] g(s,y(s))ds. \end{aligned} \tag{2.8}$$

On déduie, à partir des propriétés des intégrales fractionnaires et la continuité de la fonction $t^{\gamma}g$ que l'opérateur $S : C_{\gamma}[a_{m-1}, a_m] \to C_{\gamma}[a_{m-1}, a_m]$ défini par (2.8) est bien défini.
Soit

$$\begin{aligned} R_m \geq & \frac{N\left(a_m^{1-\gamma} - a_{m-1}^{1-\gamma}\right)}{(1-\gamma)\Gamma(w_m)} \left[a_m^{\gamma}(a_m - a_{m-1})^{w_m-1} + \left|\frac{\alpha_1 a_m}{1-\alpha_1}\right| + \left|\frac{(\alpha_0 a_m - \alpha_1 a_{m-1})(w_m-1)}{(1-\alpha_0)(1-\alpha_1)}\right| \right. \\ & \left. + \left|\frac{\alpha_0(1-\alpha_1)(w_m-1)(1-\gamma)(a_m^{2-\gamma} - a_{m-1})^{2-\gamma}}{(1-\alpha_0)(1-\alpha_1)(2-\gamma)\left(a_m^{1-\gamma} - a_{m-1}\right)^{1-\gamma}}\right|\right]. \end{aligned}$$

On considère l'ensemble

$$B_{R_m} = \left\{y \in C_{\gamma}([a_{m-1}, a_m]), \|y\|_{\gamma} \leq R_m\right\}.$$

Pour tout $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$, il est clair que B_{R_m} est un sous-ensemble convexe, fermé et non vide.

Maintenant, on démontre que S vérifie les hypothèses du théorème du point fixe de Schaefer. La preuve sera donneé en trois étapes.

Étape 1 : $S(B_{R_m})$ est uniformément borné.
Soit B_{R_m} un ensemble borné dans $C_{\gamma}([a_{m-1}, a_m])$. Alors il existe une constante N

tel que $t^{\gamma}|g(t,y(t))| \leq N, \forall y \in B_{R_m}, t \in [a_{m-1}, a_m]$. Ainsi,

$$
\begin{aligned}
& t^{\gamma}|(Sy)(t)| \\
\leq\ & \frac{Nt^{\gamma}}{\Gamma(w_m)} \int_{a_{m-1}}^{t} s^{-\gamma}(t-s)^{w_m-1} ds + \left|\frac{\alpha_1 N t}{(1-\alpha_1)\Gamma(w_m)}\right| \int_{a_{m-1}}^{a_m} s^{-\gamma} ds \\
& + \left|\frac{N}{(1-\alpha_0)(1-\alpha_1)\Gamma(w_m-1)}\right| \int_{a_{m-1}}^{a_m} |\alpha_0 a_m - \alpha_1 a_{m-1} - \alpha_0(1-\alpha_1)s| s^{-\gamma} ds \\
\leq & \frac{N\left(a_m^{1-\gamma} - a_{m-1}^{1-\gamma}\right)}{(1-\gamma)\Gamma(w_m)} \left[a_m^{\gamma}(a_m - a_{m-1})^{w_m-1} + \left|\frac{\alpha_1 a_m}{1-\alpha_1}\right| + \left|\frac{(\alpha_0 a_m - \alpha_1 a_{m-1})(w_m-1)}{(1-\alpha_0)(1-\alpha_1)}\right|\right. \\
& \left. + \left|\frac{\alpha_0(1-\alpha_1)(w_m-1)(1-\gamma)\left(a_m^{2-\gamma} - a_{m-1}\right)^{2-\gamma}}{(1-\alpha_0)(1-\alpha_1)(2-\gamma)\left(a_m^{1-\gamma} - a_{m-1}\right)^{1-\gamma}}\right|\right],
\end{aligned}
$$

ce qui implique que

$$
\begin{aligned}
\|(Sy)\|_{\gamma} \leq\ & \frac{N(a_m^{1-\gamma} - a_{m-1}^{1-\gamma})}{(1-\gamma)\Gamma(w_m)} \left[a_m^{\gamma}(a_m - a_{m-1})^{w_m-1}\right. \\
& + \left|\frac{\alpha_1 a_m}{1-\alpha_1}\right| + \left|\frac{(\alpha_0 a_m - \alpha_1 a_{m-1})(w_m-1)}{(1-\alpha_0)(1-\alpha_1)}\right| \\
& \left. + \left|\frac{\alpha_0(1-\alpha_1)(w_m-1)(1-\gamma)(a_m^{2-\gamma} - a_{m-1})^{2-\gamma}}{(1-\alpha_0)(1-\alpha_1)(2-\gamma)(a_m^{1-\gamma} - a_{m-1})^{1-\gamma}}\right|\right]
\end{aligned}
$$

Alors, $S(B_{R_m})$ est uniformément borné.

Étape 2 : $S(B_{R_m})$ est équicontinu.

Soient $t_1, t_2 \in \mathcal{J}_m,\ t_1 < t_2$ et $y \in B_{R_m}$, on a :

$$\begin{aligned}
&\Big| \quad t_1^{\gamma}(Sy)(t_1) - t_2^{\gamma}(Sy)(t_2)\Big| \\
= &\ \Big|\frac{1}{\Gamma(w_m)}\int_{a_{m-1}}^{t_1}\Big[t_1^{\gamma}(t_1-s)^{w_m-1} - t_2^{\gamma}(t_2-s)^{w_m-1}\Big]g(s,y(s))ds \\
- &\ \frac{1}{\Gamma(w_m)}\int_{t_1}^{t_2} t_2^{\gamma}(t_2-s)^{w_m-1}g(s,u(s))ds + \frac{\alpha_1(t_1-t_2)}{(1-\alpha_1)\Gamma(w_m-1)}\int_{a_{m-1}}^{a_m} g(s,y(s))ds\Big| \\
\leq &\ N\Big(\Big|\frac{1}{\Gamma(w_m)}\int_{a_{m-1}}^{t_1}\Big[t_1^{\gamma}(t_1-s)^{w_m-1} - t_2^{\gamma}(t_2-s)^{w_m-1}\Big]ds \\
- &\ \frac{1}{\Gamma(w_m)}\int_{t_1}^{t_2} t_2^{\gamma}(t_2-s)^{w_m-1}ds\Big| + \Big|\frac{\alpha_1(t_1-t_2)}{(1-\alpha_1)\Gamma(w_m-1)}\int_{a_{m-1}}^{a_m} ds\Big|\Big).
\end{aligned}$$

Ainsi, $\Big|t_1^{\gamma}(Sy)(t_1) - t_2^{\gamma}(Sy)(t_2)\Big| \to 0$ quand $|t_1 - t_2| \to 0$. Cela implique, $t^{\gamma}S(B_{R_m})$ est équicontinu.
Par conséquent, d'après les étapes 1 et 2, et d'après théorème d'Ascoli-Arzela, $S(B_{R_m})$ est relativement compact, alors S est un opérateur compact.

Étape3 : Ω est borné.
Considérons l'ensemble

$$\Omega = \{y \in \mathbb{R} \setminus y = \eta Sy, 0 < \eta < 1\},$$

et on montre que l'ensemble Ω est borné. Soit $y \in \Omega$, alors $y = \eta Sy$, $0 < \eta < 1$.
Pour tout $t \in [a_m - 1, a_m]$, on a :

$$\begin{aligned}
|y(t)| \leq \eta\Big[&\frac{1}{\Gamma(w_m)}\int_{a_{m-1}}^{t}(t-s)^{w_m-1}|g(s,y(s))|ds + \Big|\frac{\alpha_1 t^{w_m-1}}{(1-\alpha_1)\Gamma(w_m)}\Big|\int_{a_{m-1}}^{a_m}|g(s,y(s))|ds \\
&+\Big|\frac{t^{w_m-2}}{(1-\alpha_0)(1-\alpha_1)\Gamma(w_m-1)}\Big|\int_{a_{m-1}}^{a_m}\Big|\alpha_0 a_m - \alpha_1 a_{m-1} - \alpha_0(1-\alpha_1)s\Big|ds\Big].
\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}\|(Sy)\|_\gamma \leq \ & \frac{N(a_m^{1-\gamma}-a_{m-1}^{1-\gamma})}{(1-\gamma)\Gamma(w_m)}\Big[a_m^{\gamma}(a_m-a_{m-1})^{w_m-1}+\Big|\frac{\alpha_1 a_m}{1-\alpha_1}\Big| \\ & +\Big|\frac{(\alpha_0 a_m-\alpha_1 a_{m-1})(w_m-1)}{(1-\alpha_0)(1-\alpha_1)}\Big| \\ & +\Big|\frac{\alpha_0(1-\alpha_1)(w_m-1)(1-\gamma)(a_m^{2-\gamma}-a_{m-1})^{2-\gamma}}{(1-\alpha_0)(1-\alpha_1)(2-\gamma)(a_m^{1-\gamma}-a_{m-1})^{1-\gamma}}\Big|\Big].\end{aligned}$$

Cela implique que l'ensemble Ω est borné indépendamment de $\eta \in (0,1)$. En conséquence du théorème (2.1), on trouve que l'opérateur S admet au moins un point fixe, ce qui implique que le problème (2.4) admet au moins une solution .

2.3 L'unicité de la solution

Considérons l'hypothèse suivante :

(H2) Soit $g \in C(\mathcal{J} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ et il existe une constante $K > 0$ telle que

$$t^{\gamma}|g(t,u)-g(t,v)| \leq K|u-v|,$$

pour tout $u,\ v \in \mathbb{R}$, $t \in \mathcal{J}$ et $\gamma = 2-w$.

Théorème 2.2. *Supposons que les conditions (H1) et (H2) sont satisfaites. Alors, le problème (2.4) admet une solution unique dans* $C_\gamma([a_{m-1}, a_m])$*, si*

$$K < \frac{1}{\rho} \tag{2.9}$$

où

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{(a_m^{1-2\gamma}-a_{m-1}^{1-2\gamma})}{(1-2\gamma)\Gamma(w_m)}\Big[a_m^{\gamma}(a_m-a_{m-1})^{w_m-1}+\Big|\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}\Big|a_m \\ &\quad+\Big|\frac{(\alpha_0 a_m-\alpha_1 a_{m-1})(w_m-1)}{(1-\alpha_0)(1-\alpha_1)}\Big| \\ &\quad+\Big|\frac{\alpha_0(1-\alpha_1)(w_m-1)}{(1-\alpha_0)(1-\alpha_1)}\Big|\Big(\frac{(1-2\gamma)(a_m^{2-2\gamma}-a_{m-1}^{2-2\gamma})}{(2-2\gamma)(a_m^{1-2\gamma}-a_{m-1}^{1-2\gamma})}\Big)\Big].\end{aligned}$$

Preuve :

Par l'hypothèse (H2), pour tout $t\in[a_{m-1},a_m]$, on obtient que :

$$\begin{aligned}&t^{\gamma}\ \mid\ (Su)(t)-(Sv)(t)| \\ &\le \frac{t^{\gamma}}{\Gamma(w_m)}\int_{a_{m-1}}^{t}(t-s)^{w_m-1}|g(s,u(s))-g(s,v(s))|ds \\ &+\Big|\frac{\alpha_1 t}{(1-\alpha_1)\Gamma(w_m)}\Big|\int_{a_{m-1}}^{a_m}|g(s,u(s))-g(s,v(s))|ds \\ &+\Big|\frac{1}{(1-\alpha_0)(1-\alpha_1)\Gamma(w_m-1)}\Big|\int_{a_{m-1}}^{a_m}\Big|\alpha_0 a_m-\alpha_1 a_{m-1}-\alpha_0(1-\alpha_1)s\Big||g(s,u(s))-g(s,v(s))|ds, \\ &\le K\Big[\frac{t^{\gamma}}{\Gamma(w_m)}\int_{a_{m-1}}^{t}s^{-\gamma}(t-s)^{w_m-1}|u(s)-v(s)|ds+\Big|\frac{\alpha_1 t}{(1-\alpha_1)\Gamma(w_m)}\Big|\int_{a_{m-1}}^{a_m}s^{-\gamma}|u(s)-v(s)|ds \\ &+\Big|\frac{1}{(1-\alpha_0)(1-\alpha_1)\Gamma(w_m-1)}\Big|\int_{a_{m-1}}^{a_m}s^{-\gamma}\Big|\alpha_0 a_m-\alpha_1 a_{m-1}-\alpha_0(1-\alpha_1)s\Big||u(s)-v(s)|ds\Big].\end{aligned}$$

Par la définition de $\|.\|_{\gamma}$, on obtient

$$\begin{aligned}&\|\ (Su)(t)-(Sv)(t)\|_{\gamma} \\ &\le K\Big[\frac{t^{\gamma}}{\Gamma(w_m)}\int_{a_{m-1}}^{t}s^{-2\gamma}(t-s)^{w_m-1}ds+\Big|\frac{\alpha_1 t}{(1-\alpha_1)\Gamma(w_m)}\Big|\int_{a_{m-1}}^{a_m}s^{-2\gamma}ds \\ &+\Big|\frac{1}{(1-\alpha_0)(1-\alpha_1)\Gamma(w_m-1)}\Big|\int_{a_{m-1}}^{a_m}s^{-2\gamma}\Big|\alpha_0 a_m-\alpha_1 a_{m-1}-\alpha_0(1-\alpha_1)s\Big|ds\Big]\|u-v\|_{\gamma} \\ &\le \frac{K(a_m^{1-2\gamma}-a_{m-1}^{1-2\gamma})}{(1-2\gamma)\Gamma(w_m)}\Big[a_m^{\gamma}(a_m-a_{m-1})^{w_m-1}+\Big|\tfrac{\alpha_1}{1-\alpha_1}\Big|a_m+\Big|\tfrac{(\alpha_0 a_m-\alpha_1 a_{m-1})(w_m-1)}{(1-\alpha_0)(1-\alpha_1)}\Big| \\ &+\Big|\frac{\alpha_0(1-\alpha_1)(w_m-1)}{(1-\alpha_0)(1-\alpha_1)}\Big|\Big(\frac{(1-2\gamma)(a_m^{2-2\gamma}-a_{m-1}^{2-2\gamma})}{(2-2\gamma)(a_m^{1-2\gamma}-a_{m-1}^{1-2\gamma})}\Big)\Big]\|u-v\|_{\gamma}.\end{aligned}$$

Par conséquent, selon (2.9), l'opérateur S est une contraction. Alors d'après le principe de Banach, nous pouvons déduire que S possède un point fixe unique, qui est une solution unique du problème (2.4).

Théorème 2.3. *Supposons que les hypothèses (H1), (H2) et l'inégalité (2.9) sont satisfaites pour tous $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$.*
Alors, le problème (2.1) admet une solution unique dans $C_\gamma([0, a])$.

Preuve :

Pour tout $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$, d'après le théorème (2.2), le problème aux limites (2.4) possède une solution unique $\widetilde{y}_m \in C_\gamma[a_{m-1}, a_m]$.
Nous définissons la fonction

$$y_m = \begin{cases} 0, & t \in [0, a_{m-1}], \\ \widetilde{y}_m, & t \in \mathcal{J}_m. \end{cases} \tag{2.10}$$

Ainsi, la fonction $y_m \in C_\gamma[a_{m-1}, a_m]$ satisfait l'équation intégrale (2.3) sur $\mathcal{J}_m$, ce qui implique que $y_m(0) = 0,\ y_m(a_m) = \widetilde{y}_m(a_m) = 0$ et résout (2.3) pour $t \in \mathcal{J}_m, \quad m \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Alors, la fonction

$$y(t) = \begin{cases} y_1(t), t \in \mathcal{J}_1, \\ y_2(t) = \begin{cases} 0, & t \in \mathcal{J}_1, \\ \widetilde{y}_2, & t \in \mathcal{J}_2, \end{cases} \\ \vdots \\ y_n(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, a_{n-1}], \\ \widetilde{y}_n, & t \in \mathcal{J}_n. \end{cases} \end{cases}$$

est une solution de problème VORLFDE (2.1) dans $C_\gamma[0, a]$.

Stabilité d'Ulam-Hyers-Rassias du VORLFDE

Dans ce chapitre, nous intéressons à la notion stabilité d'Ulam-Hyers-Rassias du VORLFDE.

3.1 Stabilité Ulam-Hyers-Rassias du VORLFDE

Théorème 3.1. *Considérons les hypothèses (H1), (H2), (2.9) et*

(H3) *la fonction* $\kappa \in C(\mathcal{J}, \mathbb{R}_+)$ *est croissante et il existe* $\lambda_\kappa > 0$ *tel que*

$$I_{a_{m-1}^+}^{w_m} \kappa(t) \leq \lambda_\kappa \ \kappa(t), \quad \textit{pour} \ \ t \in \mathcal{J}_m, \quad m = 1, 2, \ldots, n.$$

Alors, le problème VORLFDE (2.1) est ***Ulam-Hyers-Rassias*** *stable par rapport à* κ*.*

Preuve : Soit $\epsilon > 0$ un nombre arbitraire et la fonction $y(t) \in C(J, \mathbb{R})$ vérifiant linégalité (1.6).

Pour tout $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on définit les fonctions $y_1(t) \equiv y(t)$, $t \in [0, a_1]$ et pour $m = 2, 3, \ldots, n$:

$$y_m(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, a_{m-1}], \\ y(t), & t \in \mathcal{J}_m. \end{cases}$$

Pour tout $m \in \{1, 2, \dots, n\}$, d'après l'égalité (2.1) pour $t \in \mathcal{J}_m$, on obtient :

$$\mathcal{D}_{0^+}^{w(t)} y_m(t) = \frac{1}{\Gamma(2 - w(t))} \frac{d^2}{dt^2} \int_{a_{m-1}}^{t} (t-s)^{1-w_m} \frac{y(s)}{s} ds. \tag{3.1}$$

On prend l'integral $I_{a_{m-1}^+}^{w_m}$ des deux côtés de linégalité (1.3), on applique (H3) et on obtient :

$$\begin{aligned}\Bigg| y_m(t) & - \frac{1}{\Gamma(w_m)} \int_{a_{m-1}}^{t} (t-s)^{w_m - 1} g(s, y_m(s)) ds - \frac{\alpha_1 t^{w_m - 1}}{(1-\alpha_1)\Gamma(w_m)} \int_{a_{m-1}}^{a_m} g(s, y_m(s)) ds \\ & - \frac{t^{w_m - 2}}{(1-\alpha_0)(1-\alpha_1)\Gamma(w_m - 1)} \int_{a_{m-1}}^{a_m} [(\alpha_0 a_m - \alpha_1 a_{m-1} - \alpha_0(1-\alpha_1)s] g(s, y_m(s)) ds \Bigg|, \\ & \leq \epsilon \, I_{a_{m-1}^+}^{w_m} \kappa(t) \\ & \leq \epsilon \, \lambda_\kappa \, \kappa(t).\end{aligned}$$

D'après le théorème (2.3), le problème VORLFDE (2.1) a une solution $y \in C(\mathcal{J}, \mathbb{R})$ définie par $x(t) = x_m(t)$, pour $t \in \mathcal{J}_m, \ m = 1, 2, \dots, n$, alors :

$$x_m = \begin{cases} 0, & t \in [0, a_{m-1}], \\ \widetilde{x}_m, & t \in \mathcal{J}_m. \end{cases} \tag{3.2}$$

et $\widetilde{x}_m \in E_m$ est une solution de (2.4).
D'après le lemme (2.3) l'équation intégrale

$$\begin{aligned}\widetilde{x}_m(t) \;\; = \;\; & \frac{1}{\Gamma(w_m)} \int_{a_{m-1}}^{t} (t-s)^{w_m - 1} g(s, \widetilde{x}_m(s)) ds + \frac{\alpha_1 t^{w_m - 1}}{(1-\alpha_1)\Gamma(w_m)} \int_{a_{m-1}}^{a_m} g(s, \widetilde{x}_m(s)) ds \\ & + \frac{t^{w_m - 2}}{(1-\alpha_0)(1-\alpha_1)\Gamma(w_m - 1)} \int_{a_{m-1}}^{a_m} [(\alpha_0 a_m - \alpha_1 a_{m-1} - \alpha_0(1-\alpha_1)s] g(s, \widetilde{x}_m(s) ds.\end{aligned}$$

est vérifié.
Soit $t \in \mathcal{J}_m$ où $m \in \{1, 2, \dots, n\}$. Alors, on obtient :

$$
\begin{aligned}
&|y(t)-x(t)| = |y(t)-x_m(t)| \\
= \; & |y_m(t)-\widetilde{x}_m(t)| \\
\leq \; & \Bigg| y_m(t) - \frac{1}{\Gamma(w_m)}\int_{a_{m-1}}^{t}(t-s)^{w_m-1}g(s,y_m(s))ds - \frac{\alpha_1 t^{w_m-1}}{(1-\alpha_1)\Gamma(w_m)}\int_{a_{m-1}}^{a_m} g(s,y_m(s))ds \\
- \; & \frac{t^{w_m-2}}{(1-\alpha_0)(1-\alpha_1)\Gamma(w_m-1)}\int_{a_{m-1}}^{a_m}[(\alpha_0 a_m - \alpha_1 a_{m-1} - \alpha_0(1-\alpha_1)s]g(s,y_m(s))ds\Bigg|, \\
+ \; & \frac{1}{\Gamma(w_m)}\int_{a_{m-1}}^{t}(t-s)^{w_m-1}\Big|g(s,y_m(s))-g(s,\widetilde{x}_m(s))\Big|ds \\
+ \; & \frac{\alpha_1 t^{w_m-1}}{(1-\alpha_1)\Gamma(w_m)}\int_{a_{m-1}}^{a_m}\Big|g(s,y_m(s))-g(s,\widetilde{x}_m(s))\Big|ds \\
+ \; & \frac{t^{w_m-2}}{(1-\alpha_0)(1-\alpha_1)\Gamma(w_m-1)}\int_{a_{m-1}}^{a_m}[(\alpha_0 a_m - \alpha_1 a_{m-1} - \alpha_0(1-\alpha_1)s]\Big|g(s,y_m(s))-g(s,\widetilde{x}_m(s))\Big|ds \\
\leq \; & \lambda_\kappa\,\epsilon\,\kappa(t) + \frac{1}{\Gamma(w_m)}\int_{a_{m-1}}^{t} s^{-\gamma}(t-s)^{w_m-1}(K|y_m(s)-\widetilde{x}_m(s)|)ds \\
+ \; & \frac{\alpha_1 t^{w_m-1}}{(1-\alpha_1)\Gamma(w_m)}\int_{a_{m-1}}^{a_m} s^{-\gamma}(K|y_m(s)-\widetilde{x}_m(s)|)ds \\
+ \; & \frac{t^{w_m-2}}{(1-\alpha_0)(1-\alpha_1)\Gamma(w_m-1)}\int_{a_{m-1}}^{a_m}[(\alpha_0 a_m - \alpha_1 a_{m-1} - \alpha_0(1-\alpha_1)s]s^{-\gamma}(K|y_m(s)-\widetilde{x}_m(s)|)ds, \\
\leq \; & \lambda_\kappa\,\epsilon\,\kappa(t) + \frac{(t-a_{m-1})^{w_m-1}(t^{1-\gamma}-{a_{m-1}}^{1-\gamma})}{(1-\gamma)\Gamma(w_m)}(K\|y_m-\widetilde{x}_m\|_{E_m}) \\
+ \; & \frac{\alpha_1 t^{w_m-1}(a_m^{1-\gamma}-{a_{m-1}}^{1-\gamma})}{(1-\gamma)(1-\alpha_1)\Gamma(w_m)}(K\|y_m-\widetilde{x}_m\|_{E_m}) \\
+ \; & \frac{t^{w_m-2}a_{m-1}^{-\gamma}(a_m-a_{m-1})}{2(1-\alpha_0)(1-\alpha_1)\Gamma(w_m-1)}[2(\alpha_0 a_m - \alpha_1 a_{m-1}) - \alpha_0(1-\alpha_1)(a_m-a_{m-1})](K\|y_m-\widetilde{x}_m\|_{E_m}), \\
\leq \; & \lambda_\kappa\,\epsilon\,\kappa(t) + \eta\|y-x\|_{\mathcal{J}}.
\end{aligned}
$$

Alors,

$$\|y-x\|_{\mathcal{J}}\Big(1-\eta\Big) \quad \leq \quad \lambda_{\kappa}\ \epsilon\ \kappa(t),$$

Alors, pour tout $t \in \mathcal{J}$.

$$|y(t)-x(t) \leq \|y-x\|_{\mathcal{J}} \leq \frac{\lambda_{\kappa}}{1-\eta}\epsilon\kappa(t).$$

Par conséquent, le problème VORLFDE (2.1) est stable (UHR) par rapport à κ.

3.2 Exemples

Exemple 1 : Considérons le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} D_{0^+}^{w(t)}x(t) = \dfrac{\sin x(t) + 2\cos(t)}{t^2}, \qquad t \in \mathcal{J} := [0,4], \\ D_{0^+}^{w(t)-2}x(0) = \alpha_0 D_{0^+}^{w(t)-2}x(4), \;\; D_{0^+}^{w(t)-1}x(0) = \alpha_1 \mathcal{D}_{0^+}^{w(t)-2}x(4). \end{cases} \tag{3.3}$$

Soit

$$f(t,x) = \frac{\sin x + 2\cos(t)}{t^2}, \;\; (t,x) \in [0,4] \times \mathbb{R}.$$

et

$$w(t) = \begin{cases} \frac{3}{2}, & t \in \mathcal{J}_1 := [0,2], \\ \frac{10}{9}, & t \in \mathcal{J}_2 :=]2,4]. \end{cases} \tag{3.4}$$

Par (3.4), l'équation du problème (3.3) est décomposée en deux expressions comme suite :

$$\begin{cases} \mathcal{D}_{0^+}^{\frac{3}{2}}x(t) = \dfrac{\sin x(t) + 2\cos(t)}{t^2}, \qquad t \in \mathcal{J}_1, \\ D_{0^+}^{-\frac{1}{2}}x(0) = \alpha_0 D_{0^+}^{-\frac{1}{2}}x(2), \;\; D_{0^+}^{\frac{1}{2}}x(0) = \alpha_1 D_{0^+}^{\frac{1}{2}}x(2), \end{cases} \tag{3.5}$$

et

$$\begin{cases} D_{2^+}^{\frac{10}{9}}x(t) = \dfrac{\sin x(t) + 2\cos(t)}{t^2}, \qquad t \in \mathcal{J}_2, \\ D_{2^+}^{-\frac{8}{9}}x(2) = \alpha_0 D_{2^+}^{-\frac{8}{9}}x(4), \;\; D_{2^+}^{\frac{1}{9}}x(2) = \alpha_1 D_{2^+}^{\frac{1}{9}}x(4). \end{cases} \tag{3.6}$$

Pour $t \in \mathcal{J}_1$, nous vérifions que la condition suivante est satisfaite

$$t^{\gamma}\Big|f(t,x)\Big| \quad \leq \quad t^{\frac{1}{2}}\Big|\frac{\sin x(t)+2\cos(t)}{t^2}\Big| \leq \frac{3}{2\sqrt{2}} = N. \tag{3.7}$$

Soit $\kappa(t) = t^{\frac{1}{2}}$. Alors, on obtient :

$$\begin{aligned} I_{0^+}^{w_1}\kappa(t) &= \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})}\int_0^t (t-s)^{\frac{1}{2}} s^{\frac{1}{2}} ds \\ &\leq \frac{\sqrt{2}}{\Gamma(\frac{3}{2})}\int_0^t (t-s)^{\frac{1}{2}} ds \\ &\leq \frac{2\sqrt{2}}{3\Gamma(\frac{3}{2})}\kappa(t) := \lambda_{\kappa(t)}\kappa(t). \end{aligned}$$

Alors, la condition (H3) est satisfaite par $\lambda_\kappa = \frac{2\sqrt{2}}{3\Gamma(\frac{3}{2})}$.
D'après le théorème (2.1), le problème (3.5) a une solution $\widetilde{x}_1 \in E_1$, et d'après le théorème (3.1) l'equation de (3.5) est Ulam-Hyers-Rassias stable.

$$t^{\gamma}\Big|f(t,x)\Big| \quad \leq \quad t^{\frac{8}{9}}\Big|\frac{\sin x(t)+2\cos(t)}{t^2}\Big| \leq 3.4^{\frac{-10}{9}} = N. \tag{3.8}$$

Soit $\kappa(t) = t^{\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned} I_{2^+}^{w_2}\kappa(t) &= \frac{1}{\Gamma(\frac{10}{9})}\int_2^t (t-s)^{\frac{1}{9}} s^{\frac{1}{2}} ds \\ &\leq \frac{2}{\Gamma(\frac{10}{9})}\int_2^t (t-s)^{\frac{1}{9}} ds \\ &\leq \frac{9}{5\Gamma(\frac{10}{9})}\kappa(t) := \lambda_{\kappa(t)}\kappa(t). \end{aligned}$$

Par conséquent, (H3) est satisfaite par $\lambda_\kappa = \frac{9}{5\Gamma(\frac{10}{9})}$.
D'après le théorème (2.1), le problème (3.6) possède a une solution $\widetilde{x}_2 \in E_2$.
En conséquence, par le théorème (2.3) le problème (3.3) admet une solution

$$x(t) = \begin{cases} \widetilde{x}_1(t), & t \in \mathcal{J}_1, \\ x_2(t), & t \in \mathcal{J}_2, \end{cases}$$

où

$$x_2(t) = \begin{cases} 0, & t \in \mathcal{J}_1, \\ \widetilde{x}_2(t), & t \in \mathcal{J}_2. \end{cases}$$

Par le théorème (3.1), le problème pour VORLFDE (3.3) est Ulam-Hyres-Rassias stable par rapport à κ.

Exemple 2 : Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} D_{0^+}^{u(t)} y(t) = \dfrac{siny(t) - (y(t)+2)cost}{5\sqrt{1+t}}, \qquad t \in \mathcal{J} := [0,2], \\ D_{0^+}^{u(t)-2} y(0) = \alpha_0 D_{0^+}^{u(t)-2} y(2), \;\; D_{0^+}^{u(t)-1} y(0) = \alpha_1 \mathcal{D}_{0^+}^{u(t)-2} y(2). \end{cases} \tag{3.9}$$

Soit

$$u(t) = \begin{cases} \frac{6}{5}, & t \in \mathcal{J}_1 := [0,1], \\ \frac{4}{3}, & t \in \mathcal{J}_2 :=]1,2], \end{cases} \tag{3.10}$$

et

$$g(t,y) = \frac{siny(t) - (y(t)+2)cost}{5\sqrt{1+t}}, \;\; (t,y) \in [0,2] \times \mathbb{R}.$$

Par (3.10), l'équation du problème (3.9) est divisée en deux expressions comme suit :

$$\begin{cases} \mathcal{D}_{0^+}^{\frac{6}{5}} y(t) = \dfrac{siny(t) - (y(t)+2)cost}{5\sqrt{1+t}}, \;\; t \in \mathcal{J}_1, \\ D_{0^+}^{-\frac{4}{5}} y(0) = \alpha_0 D_{0^+}^{-\frac{4}{5}} y(1), \quad D_{0^+}^{\frac{1}{5}} y(0) = \alpha_1 D_{0^+}^{\frac{1}{5}} y(1), \end{cases} \tag{3.11}$$

et

$$\begin{cases} D_{2^+}^{\frac{4}{3}} y(t) = \dfrac{siny(t) - (y(t)+2)cost}{5\sqrt{1+t}}, \;\; t \in \mathcal{J}_2, \\ D_{2^+}^{-\frac{2}{3}} y(1) = \alpha_0 D_{2^+}^{-\frac{2}{3}} y(2), \quad D_{2^+}^{\frac{1}{3}} y(1) = \alpha_1 D_{2^+}^{\frac{1}{3}} y(2). \end{cases} \tag{3.12}$$

Pour $m = 1$, on a :

$$t^{\gamma} \Big| g(t,y) \Big| \;\; \leq \;\; t^{\frac{4}{5}} \left| \frac{siny(t) - (y(t)+2)cost}{5\sqrt{1+t}} \right| \leq 1 = N. \tag{3.13}$$

Soit $\kappa(t) = t^{\frac{1}{2}}$. Alors, on obtient :

$$\begin{aligned}
I_{0^+}^{u_1}\kappa(t) &= \frac{1}{\Gamma(\frac{6}{5})}\int_0^t (t-s)^{\frac{1}{5}} s^{\frac{1}{2}} ds \\
&\leq \frac{\sqrt{2}}{\Gamma(\frac{6}{5})}\int_0^t (t-s)^{\frac{1}{5}} ds \\
&\leq \frac{5\sqrt{2}}{6\Gamma(\frac{6}{5})}\kappa(t) := \lambda_{\kappa(t)}\kappa(t).
\end{aligned}$$

Alors, la condition (H3) est satisfaite par $\lambda_\kappa = \frac{5\sqrt{2}}{6\Gamma(\frac{6}{5})}$.

D'après le théorème (2.1), le problème (3.11) a une solution $\widetilde{y}_1 \in E_1$.

pour $m = 2$. On a :

$$t^\gamma \Big|g(t,y)\Big| \quad \leq \quad t^{\frac{2}{3}} \left| \frac{siny(t) - (y(t)+2)cost}{5\sqrt{1+t}} \right| \leq 0.902 = N. \tag{3.14}$$

Soit $\kappa(t) = t^{\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned}
I_{2^+}^{u_2}\kappa(t) &= \frac{1}{\Gamma(\frac{4}{3})}\int_1^t (t-s)^{\frac{1}{3}} s^{\frac{1}{2}} ds \\
&\leq \frac{2}{\Gamma(\frac{4}{3})}\int_1^t (t-s)^{\frac{1}{3}} ds \\
&\leq \frac{3}{4\Gamma(\frac{4}{3})}\kappa(t) := \lambda_{\kappa(t)}\kappa(t).
\end{aligned}$$

Par conséquent, (H3) est satisfaite par $\lambda_\kappa = \frac{3}{4\Gamma(\frac{4}{3})}$.

D'après le théorème (2.1), le problème (3.12) possède une solution $\widetilde{y}_2 \in E_2$. En conséquence, par le théorème (2.3), le problème (3.9) a une solution

$$y(t) = \begin{cases} \widetilde{y}_1(t), & t \in \mathcal{J}_1, \\ y_2(t), & t \in \mathcal{J}_2, \end{cases}$$

où

$$y_2(t) = \begin{cases} 0, & t \in \mathcal{J}_1, \\ \widetilde{y}_2(t), & t \in \mathcal{J}_2. \end{cases}$$

Par le théorème (3.1), le problème pour VORLFDE (3.9) est Ulam-Hyers-Rassias stable par rapport à κ.

Conclusion

Dans ce mémoire, le problème aux limites a été étudié avec succès,via deux théorèmes de point fixe : Schaefer et principe de contraction de Banach pour montrer l'existence, l'unicité et la stabilité des solutions de notre problème.
D'après notre analyse, il est clair que les résultats obtenus sont une généralisation lorsque $w(t)$ est une fonction variable, c'est-à-dire nous avons converti le problème fractionnaire d'ordre variable en un problème équivalent d'ordre constant.
Un exemple est donné à la fin pour valider la potentialité de tous les résultats obtenus .

Bibliographie

[1] A. Abirami, P. Prakash, Y-K. Ma, *Variable-Order Fractional Diffusion Model-Based Medical Image Denoising*, Mathematical Problems In Engineering (2021), Article ID 8050017, 10 pages.

[2] A. Benkerrouche, M. S. Souid, S. Chandok, A. Hakem, *Existence and Stability of a Caputo Variable-Order Boundary Value Problem*, Journal of Mathematics, (2021) Article ID 7967880, 16 pages.

[3] A. Benkerrouche, M. S. Souid, K. Sitthithakerngkiet, A. Hakem, *Implicit Nonlinear Fractional Differential Equations of Variable Order*, Boundary Value Problems, (2021) 2021:64, 16 pages.

[4] Z. Bouazza, M. S. Souid, H. Günerhan, *Multiterm Boundary Value Problem of Caputo Fractional Differential Equations of Variable Order*, Advances in Difference Equations, (2021) 2021:400, 17 pages.

[5] C. F. M. Coimbra, *Mechanics with Variable-Order Differential Operators*, Annalen der Physik, 12(2003), 692703.

[6] S. Djebali, *Problèmes aux Limites Associés aux Équations Différentielles Ordinares du Second Ordre*, (2015), 17-19.

[7] S. Djebali, Degré topologique:*théorie et application aux EDO-EDP, Département de Mathématiques*, ENS-Kouba, Alger, (2006)

[8] J. Dugundji, A. Granas, *Fixed Point Theory*, VolI, Monografie Matematyzne, (PWN), Warsaw, 1982.

[9] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, North-Holland Mathematics Studies, Elsevier, Amsterdam, 2006.

[10] R. Lin, F. Liu, V. Anh, I. Turner, *Stability and Convergence of a New Explicit Finite-Difference Approximation for the Variable-Order Nonlinear Fractional Diffusion Equation*, Applied Mathematics and Computation, 2(2009), 435445.

[11] D. ORegan, Y. Je Cho, Yu-Qing Chen, *Topological Degree Theory and Applications*, Volume 10, by Taylor et Francis Group, LLC, 2006.

[12] A. Razminia, A. F. Dizaji, V. J. Majd, *Solution Existence for Nonautonomous Variable-Order Fractional Differential Equations*, Mathematical and Computer Modelling, 3(2012), 11061117.

[13] A. Refice, M. S. Souid, I. Stamova, *On the Boundary Value Problems of Hadamard Fractional Differential Equations of Variable Order via Kuratowski MNC Technique*, Mathematics, 9(2021), 1-16.

[14] I. A. Rus, *Ulam Stabilities of Ordinary Differential Equations in a Banach Space*, Carpathian Journal of Mathematics, 1(2010), 103-107.

[15] S. G. Samko, *Fractional Integration and Differentiation of Variable Order*, Analysis Mathematica, 21(1995), 213236.

[16] D. R. Smart, *Fixed Point Theorems*, Cambridge University Press, 1980.

[17] D. Tavares, R. Almeida, D. F. M. Torres, *Caputo Derivatives of Fractional Variable Order Numerical Approximations*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 35(2016), 6987.

[18] A. Yakar, H. Kutlay, *A Note on Comparison Results for Fractional Differential Equations*, AIP Conference Proceedings, (2015), 5 pages.

[19] D. Valerio, J. S. Costa, *Variable-Order Fractional Derivatives and Numerical Approximations*, Signal Processing, 3(2011), 470483.

[20] S. Zhang, *Existence of Solutions for Two Point Boundary Value Problems With Singular Differential Equations of Variable Order*, Electronic Journal of Differential Equations, 245(2013), 1-16.