RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN TIARET
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUES
Département de Mathématiques

MÉMOIRE MASTER

Présenter en vue de l'obtention du diplôme de master

Spécialité : « Mathématiques »

Option : « AFED»

Présenté Par :

SAIBI Affaf Alaa Imane
et
LOUKRIF Siham

Sous L'intitulé :

Inégalités de type Hölder et Minkowski liées aux calcul fractionnaire

Soutenu publiquement le 24 /06/ 2024
à Tiaret devant le jury composé de :

Mr SOUID Mohammed	Prof	Université Ibn Khaldoun, Tiaret	Président
Mr SOFRANI Mohamed	MCA	Université Ibn Khaldoun, Tiaret	Examinateur
Mr AZZOUZ Noureddine	MCA	C. Universitaire Nour Bachir, El Bayadh	Encadreur

Année universitaire : 2023/2024

Remerciement

X Nous remercions ALLAH d'abord et avant tout de nous donner la force et la volonté d'accomplir cette œuvre.

Nous tenons à remercier sincèrement **Dr AZZOUZ Noureddine** pour avoir accepté de nous encadrer et aussi nous faire profiter de ses connaissances mais aussi pour sa patience et pour la totale confiance qu'il nous a accordée.

Nous tenons à remercier chaleureusement P**r SOUID Mohammed** pour l'honneur qu'il nous fait en tant que président de ce jury.

Nous tenons également à remercier **Dr SOFRANI Mohammed** pour l'honneur d'avoir accepté l'examination du présent document.

Enfin, nous remercions tous ceux qui ont participé par leurs orientations ou leurs encouragements à la réalisation de ce travail : nos familles, nos amis, nos enseignants.

Table des matières

Introductionet préliminaire

0.1 Introduction

Les inégalités en mathématiques ont une histoire riche et ont été développées pour répondre à divers besoins mathématiques, tout en ayant des applications importantes en science et en technologie.

Dans notre mémoire nous nous intéressons aux inégalités de Hölder et de Minkowski directes et inverses, pour les opérateurs d'intégrations classique (de Riemann) et fractionnaires (de Riemann-Liouville).

L'inégalité de Hölder, attribuée au mathématicien allemand Otto Hölder au début du XXe siècle, établit une relation entre les normes de deux fonctions dans le contexte de l'analyse fonctionnelle et de l'intégration : sous des conditions adequates on a

$$\| fg \|_{L^1} \leq \| f \|_{L^p} \| g \|_{L^q} .$$

Cette inégalité trouve des applications étendues en mathématiques appliquées, notamment en analyse numérique, en traitement du signal, en traitement d'images et en statistiques.

L'inégalité de Minkowski, nommée d'après le mathématicien allemand Hermann Minkowski au début du XXe siècle, établit une relation entre les normes de la somme de deux vecteurs dans un espace vectoriel normé. Formellement elle s'écrit

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p} .$$

Cette inégalité est utilisée dans de nombreux domaines, y compris la géométrie, l'analyse fonctionnelle, la théorie de l'information et la théorie des probabilités. Elle permet de prouver des résultats importants sur la convergence des séries, la stabilité des solutions d'équations différentielles et d'autres applications mathématiques et physiques.

Ces inégalités, parmi d'autres, ont été développées au fil du temps pour répondre à divers besoins mathématiques et ont trouvé des applications contemporaines étendues en science et en technologie.

Notre mémoire est organisé comme suit :
- Une section de préliminaires va suivre où nous présentons quelques notions utiles dans les chapitres suivants.

– Dans un premier chapitre nous présenterons les inégalités classiques de Hölder et de Minkowski, dans les cas discret et continue.

– Le deuxième chapitre est consacré au calculs fractionnaires utiles pour le chapitre suivant.

– Le dernier chapitre présentera les inégalités de Hölder et de Minkowski, via les intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville.

0.2 Préliminaire

0.2.1 Espaces de Lebesgue

Définition 0.1. *Soit $p \in I\!R$ avec $1 \leq p \leq \infty$. On note par $L^p([a,b])$ l'espace des classes d'équivalence des fonctions de puissance p intégrables sur $[a,b]$:*

$$L^p([a,b]) = \left\{ f : [a,b] \longrightarrow I\!R, f \, est \ mesurable \ et \ \int_a^b |f(x)|^p \ dx < \infty \right\} \ , \ 1 \leq p < \infty \ ,$$

et

$$L^\infty([a,b]) = \{ f : [a,b] \longrightarrow I\!R, \ f \ est \ mesurable \ et : \exists M \geq 0 : |f(x)| \leq M \quad p.p \ sur [a,b] \} \ ,$$

on dit que f est mesurable et essentiellement bornée sur $[a,b]$.

Remarque 1.

1. *Pour $p > 1$ et q son conjugué $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$, $L^p([a,b])$ et $L^q([a,b])$ sont duaux (réflexif) .*
2. *Si $p = 2$, $L^2([a,b])$ est dual de lui même : c'est un espace de Hilbert .*

Théorème 0.1. *Soit (a,b) un intervalle fini ou infni de $I\!R$.*

1. *pour $1 \leq p < \infty$, l'espace $L^p(a,b)$ est un espace de Banach muni de la norme :*

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_a^b |f(x)|^p \ dx \right)^{\frac{1}{p}} \ .$$

2. *L'espace $L^\infty(a,b)$ est un espace de Banach muni de la norme :*

$$\|f\|_\infty = inf \{ M \geq 0 : |f(x)| \leq M \quad p.p \ sur \ (a,b) \}$$

0.2.2 L'inégalité Young

Théorème 0.2. *Soient $a, b \geq 0$ et $1 < p < \infty$, q son conjugué $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$, alors*

$$ab \leq \frac{1}{p} \ a^p + \frac{1}{q} \ b^q \ . \tag{1}$$

0.2.3 Théorème de Fubini

Théorème 0.3. *Soit $f(x,y)$ une fonction intégrable sur $\Omega = (a,b) \times (c,d) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, alors pour p.p. $x \in (a,b)$ $f(x,y)$ est intégrable sur (c,d) et p.p. $y \in (c,d)$ $f(x,y)$ est intégrable sur (a,b) et on a*

$$\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) dy \right)\,dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right)\,dy$$

La Formule de Dirichlet est un cas particulier de théorème de Fubini, on a l'égalité suivante avec comme hypothèse la convergence absolue au moins de l'une des deux intégrales :

$$\int_a^b \int_a^x f(x,y)\,dy\,dx = \int_a^b \int_y^b f(x,y)\,dx\,dy\ .$$

Chapitre 1

Inégalités classiques

1.1 Inégalité de Hölder

Théorème 1.1. *Soient $1 < p < \infty$, q son conjugué et $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$. Si $f \in L^p(a, b)$ et $g \in L^q(a, b)$ alors :*

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} . \tag{1.1}$$

Preuve 1.1. *Pour $1 < p < \infty$*
on prend $a = \dfrac{|f(t)|}{\| f \|_{L^p_{(a,b)}}}$ et $b = \dfrac{|g(t)|}{\| g \|_{L^p_{(a,b)}}}$, d'après l'inégalité de Young (1) :

$$\frac{|f(t)g(t)|}{\| f \|_{L^p_{(a,b)}} \| g \|_{L^p_{(a,b)}}} \leq \frac{|f(t)|^p}{p \| f \|^p_{L^p_{(a,b)}}} + \frac{|f(t)|^q}{q \| g \|^q_{L^q_{(a,b)}}} ,$$

en intégrant par rapport à $t \in [a, b]$, on obtient

$$\frac{1}{\| f \|_{L^p_{(a,b)}} \| g \|_{L^p_{(a,b)}}} \int_a^b |f(t)g(t)| \; dt \leq \int_a^b \frac{|f(t)|^p}{p \| f \|^p_{L^p_{(a,b)}}} \; dt + \int_a^b \frac{|g(t)|^q}{q \| g \|^q_{L^q_{(a,b)}}} \; dt$$

$$= \frac{1}{p \| f \|^p_{L^p_{(a,b)}}} \int_a^b |f(t)|^p \; dt + \frac{1}{q \| g \|^q_{L^q_{(a,b)}}} \int_a^b |g(t)|^q \; dt$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \;=\; 1 ,$$

d'où

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} .$$

Exemple 1. *Soit $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$ sur l'intervalle $[0, 1]$ avec $p = 2$*

calcule de $\|f\|_2$ *:*

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |x|^2 \ dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

calcule de $\|g\|_2$ *:*

$$\|g\|_2 = \left(\int_0^1 |x^2|^2 \ dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^1 x^4 \ dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

calcule de $\|f+g\|_2$ *:*

$$\|f+g\|_2 = \left(\int_0^1 |x+x^2|^2 \ dx\right)^{\frac{1}{2}} \ .$$

En utilisant l'inégalité de Minkowski :

$$\|f+g\|_2 \leqslant \|f\|_2 + \|g\|_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} \ .$$

Donc, $\|f+g\|_2$ *est bornée par la somme des normes* L^2 *de* f *et* g
Ce simple exemple illustre comment l'inégalité de Minkowski est utilisée pour comparer les normes de la somme de fonctions dans l'espace L^P*. Elle garantit que la norme* L^p *d'une somme est au plus égale à la somme des normes individuelles, ce qui est essentiel pour démontrer des propriétés de convergence et d'approximation dans divers contextes mathématiques et scientifiques.*

1.2 Inégalité de Minkowski

Théorème 1.2. *Soient* $1 \le p < \infty$ *et* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$*. Si* $f, g \in L^p(a,b)$ *alors :*

$$\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_a^b |f(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \ . \tag{1.2}$$

Preuve 1.2.

$$\begin{aligned} \|f+g\|_{L_p}^p &= \int_a^b |f(x)+g(x)|^p \ dx \\ &= \int_a^b |f(x)+g(x)||f(x)+g(x)|^{p-1} \ dx \\ &\le \int_a^b (|f(x)|+|g(x)|)|f(x)+g(x)|^{p-1} \ dx \ , \end{aligned}$$

donc

$$\|f+g\|_{L_p}^p \le \int_a^b |f(x)| \ |f(x)+g(x)|^{p-1} \ dx + \int_a^b |g(x)| \ |f(x)+g(x)|^{p-1} \ dx \ .$$

On applique l'inégalité de Hölder aux deux intégrales à droite

$$\begin{aligned} \|f+g\|_{L_p}^p \le & \left(\int_a^b |f(x)|^p \ dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^{(p-1)q} \ dx\right)^{\frac{1}{q}} \\ & + \left(\int_a^b |g(x)|^p \ dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^{(p-1)q} \ dx\right)^{\frac{1}{q}} \ , \end{aligned}$$

d'où

$$\|f+g\|_{L_p}^p \leq \left[\left(\int_a^b |f(x)|^p\ dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p\ dx\right)^{\frac{1}{p}}\right]\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^{(p-1)q}\ dx\right)^{\frac{1}{q}},$$

puisque $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1 \Longrightarrow q=\dfrac{p}{p-1} \Longrightarrow p=q(p-1)$, *on déduit*

$$\|f+g\|_{L_p}^p \leq \left(\left(\int_a^b |f(x)|^p\ dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p\ dx\right)^{\frac{1}{p}}\right)\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^{p}\ dx\right)^{\frac{1}{q}},$$

donc

$$\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\ dx\right)^{1-\frac{1}{q}} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\ dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p\ dx\right)^{\frac{1}{p}}\ ,$$

ce qui aboutit au résultat désiré

$$\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\ dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\ dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p\ dx\right)^{\frac{1}{p}}\ .$$

Exemple 2. *Considérons deux fonctions* $f(x)=\sqrt{x}$ *et* $g(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ *définies sur l'intervalle* $[0,1]$ *avec* $p=\frac{1}{2}$.

Pour $f(x)=\sqrt{x}$ *:*

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 \left(\sqrt{x}\right)^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^1 x\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ .$$

Pour $g(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ *:*

$$\|g\|_2 = \left(\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^1 \frac{1}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}} = (ln(2))^{\frac{1}{2}}\ .$$

L'inégalité de Hölder nous dit que pour p *et* q *tels que* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ *(c'est-à-dire* $p=2$ *et* $q=2$*), nous avons :*

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_2\|g\|_2\ .$$

Calculons $\|fg\|_1$ *:*

$$\|fg\|_1 = \int_0^1 \sqrt{x}.\frac{1}{\sqrt{1+x}}\ dx$$

En utilisant l'inégalité de Hölder :

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_2\|g\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.(ln(2))^{\frac{1}{2}}\ .$$

Donc, l'inégalité de Hölder permet de démontrer que la norme L^1 *du produit* $f\ g$ *est bornée par le produit des normes* L^2 *de* f *et* g .
Cet exemple illustre comment l'inégalité de Hölder est utilisée pour contrôler les intégrales de produits de fonctions dans le cadre des espaces L^p*, offrant ainsi des résultats importants en analyse et en intégration.*

1.3 Inégalité inverse de Hölder

Théorème 1.3. *Voir [2] Soient* $p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *et deux fonctions* $f, g > 0$ *intégrables sur* $[a,b]$. *Si*

$$0 < m \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq M \quad \textit{pour tout} \quad x \in [a,b]\,, \tag{1.3}$$

alors

$$\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b g(x)\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{pq}}\int_a^b f^{\frac{1}{p}}(x)\,g^{\frac{1}{q}}(x)dx\,. \tag{1.4}$$

Preuve 1.3. *On inverse* (1.3)

$$\frac{1}{m} \geq \frac{g(x)}{f(x)} \geq \frac{1}{M}\,,$$

on élève à le puissance $\dfrac{1}{q}$ *où* $q \in \mathbb{R}_+^*$

$$\frac{1}{m^{\frac{1}{q}}} \geq \frac{g^{\frac{1}{q}}(x)}{f^{\frac{1}{q}}(x)} \geq \frac{1}{M^{\frac{1}{q}}}\,,$$

multipliant par $f(x)$ *l'inégalité précédente,on obtient*

$$\frac{1}{m^{\frac{1}{q}}}\,f(x) \geq f^{1-\frac{1}{q}}(x)\,g^{\frac{1}{q}}(x) \geq \frac{1}{M^{\frac{1}{q}}}\,f(x)\,,$$

d'où

$$\frac{1}{m^{\frac{1}{q}}}\,f(x) \geq f^{\frac{1}{p}}(x)\,g^{\frac{1}{q}}(x) \geq \frac{1}{M^{\frac{1}{q}}}\,f(x)\,. \tag{1.5}$$

On consédere la deuxième inégalité de (1.5)

$$f(x) \leq M^{\frac{1}{q}}\,f^{\frac{1}{p}}(x)\,g^{\frac{1}{q}}(x)\,, \tag{1.6}$$

en intégrant sur $[a,b]$, *il résulte*

$$\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq M^{\frac{1}{pq}}\left(\int_a^b f^{\frac{1}{p}}(x)g^{\frac{1}{q}}(x)\,dx\right)^{\frac{1}{P}}\,. \tag{1.7}$$

Maintenant, suite à l'hypothèse (1.3), *on a*

$$m^{\frac{1}{p}} \leq f^{\frac{1}{p}}(x)\,g^{-\frac{1}{p}}(x) \leq M^{\frac{1}{p}}\,,$$

on multiplie par $g(x)$ *l'inégalité précédente, il en résulte que*

$$m^{\frac{1}{p}}\,g(x) \leq f^{\frac{1}{p}}(x)\,g^{1-\frac{1}{p}}(x) \leq M^{\frac{1}{p}}\,g(x)\,, \tag{1.8}$$

on consédere la première inégalité de (1.8)

$$g(x) \leq \left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{p}} f^{\frac{1}{p}}(x)\,g^{\frac{1}{q}}(x)\,,$$

d'où par intégration

$$\left(\int_a^b g(x)\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{pq}} \left(\int_a^b f^{\frac{1}{p}}(x)\, g^{\frac{1}{q}}(x)\,dx\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.9}$$

En multipliant les inégalités (1.7) *et* (1.9), *on obtient*

$$\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b g(x)\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{pq}} \left(\int_a^b f^{\frac{1}{p}}(x)\, g^{\frac{1}{q}}(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}},$$

d'où le résultat (1.4) *requis.*

Corollaire 1.1. *voir [2] Soient $p > 1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ et deux fonctions $f, g > 0$ intégrables sur $[a, b]$. Si*

$$0 < m \leq \frac{f^{p-1}(x)}{g(x)} \leq M\,, \tag{1.10}$$

alors

$$\left(\int_a^b f^p(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b g^q(x)\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{p}} \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\,. \tag{1.11}$$

Preuve 1.4. *Puisque* $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q} = 1$, *alors* $p-1 = \dfrac{p}{q}$, *donc* (1.10) *devient*

$$m \leq \frac{f(x)^{\frac{p}{q}}}{g(x)} \leq M\,, \tag{1.12}$$

d'où

$$m^q \leq \frac{f(x)^p}{g(x)^q} \leq M^q\,,$$

on applique alors le théorème (1.3) *avec $m^q = m'$ et $M^q = M'$*

$$\left(\int_a^b f^p(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b g^q(x)\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\frac{M'}{m'}\right)^{\frac{1}{pq}} \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\,,$$

en remarquant que $\left(\frac{M'}{m'}\right)^{\frac{1}{pq}} = \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{p}}$, *on obtient le résultat désiré* (1.11).

Corollaire 1.2. *voir [2] Soient $p > 1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ et deux fonctions $f, g > 0$ intégrables sur $[a, b]$. Si*

$$0 < m \leq \frac{f(x)}{g^{q-1}(x)} \leq M\,, \tag{1.13}$$

alors

$$\left(\int_a^b f^p(x)\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^b g^q(x)\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{q}} \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\,. \tag{1.14}$$

Preuve 1.5. *Puisque* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, *alors* $q-1=\frac{q}{p}$, *donc* (1.13) *devient*

$$m \leq \frac{f(x)}{g^{\frac{q}{p}}(x)} \leq M\,, \tag{1.15}$$

d'où

$$m^p \leq \frac{f^p(x)}{g^q(x)} \leq M^p\,,$$

on applique alors le théorème (1.3) *avec* $m^p = m'$ *et* $M^p = M'$

$$\left(\int_a^b f^p(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b g^q(x)\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\frac{M'}{m'}\right)^{\frac{1}{pq}}\int_a^b f(x)\,g(x)dx\,,$$

en remarquant que $\left(\frac{M'}{m'}\right)^{\frac{1}{pq}} = \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{q}}$ *on obtient le résultat désiré* (1.14).

1.4 Inégalité inverse de Minkowski

Théorème 1.4. *voir [4] Soient* $p>1$ *et deux fonctions* $f,g>0$ *intégrables sur* $[a,b]$, *satisfaisants*

$$\forall x\in[a,b]\ :\quad 0<m\leq \frac{f(x)}{g(x)}\leq M\ , \tag{1.16}$$

alors

$$\left(\int_a^b f^p(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b g^p(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq c\left(\int_a^b (f(x)+g(x))^p\ dx\right)^{\frac{1}{p}}\ , \tag{1.17}$$

Avec $c=\dfrac{M(m+1)+M+1}{(m+1)(M+1)}$.

Preuve 1.6. *De* (1.16) *on déduit* $f(x)\leq M\,g(x)$ *d'où*

$$f(x)+M\,f(x)\leq M\,g(x)+M\,f(x)\ ,$$

en élevant à la puissance p

$$(M+1)^p\,f^p(x)\leq M^p\,(f+g)^p(x)\ ,$$

en intégrant sur $[a,b]$, *on obtient*

$$\int_a^b f^p(x)\,dx \leq \frac{M^p}{(M+1)^p}\int_a^b (f+g)^p(x)\,dx\ ,$$

d'où

$$\left(\int_a^b f^p(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{M}{M+1}\left(\int_a^b (f+g)^p(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\ . \tag{1.18}$$

D'autre part, de (1.16) on a $g(x) \leq \frac{1}{m} f(x)$ *d'où*

$$g(x) + \frac{1}{m} g(x) \leq \frac{1}{m} f(x) + \frac{1}{m} g(x) \ ,$$

donc

$$g^p(x) \left(1 + \frac{1}{m}\right)^p \leq \left(\frac{1}{m}\right)^p (f+g)^p (x) \ ,$$

en intégrant sur $[a, b]$, *on obtient*

$$\left(\frac{m+1}{m}\right)^p \int_a^b g^p(x)dx \leq \left(\frac{1}{m}\right)^p \int_a^b (f+g)^p(x)\, dx \ ,$$

d'où

$$\left(\int_a^b g^p(x)\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{m+1} \left(\int_a^b (f+g)^p(x)\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \ . \tag{1.19}$$

En additionnant (1.18) et (1.19), on obtient (1.17) avec

$$c = \frac{M}{M+1} + \frac{1}{m+1} = \frac{Mm + M + M + 1}{(M+1)(m+1)} = \frac{M(m+1) + (M+1)}{(M+1)(m+1)} \ .$$

Corollaire 1.3. *voir [6] Soient* $p > 1$ *et deux fonctions* $f, g > 0$ *intégrables sur* $[a, b]$, *satisfaisants*

$$0 < a \leq f(x) \leq A \ , \tag{1.20}$$

et

$$0 < b \leq g(x) \leq B \ , \tag{1.21}$$

alors

$$\left(\int_a^b f^p(x)\, dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b g^p(x)\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq c \left(\int_a^b (f+g)^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \ , \tag{1.22}$$

avec $c = \dfrac{A(a+B) + B(A+b)}{(A+b)(a+B)}$.

Preuve 1.7. *On inverse (1.21)*

$$\frac{1}{B} \leq \frac{1}{g(x)} \leq \frac{1}{b} \ , \tag{1.23}$$

on multiplie (1.23) avec (1.20)

$$\frac{a}{B} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq \frac{A}{b} \ . \tag{1.24}$$

On applique maintenant le théorème (1.4) avec $m = \dfrac{a}{B}$ *et* $M = \dfrac{A}{b}$

$$\left(\int_a^b f^p(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b g^p(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq c\,\left(\int_a^b (f+g)^p(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\ , \qquad (1.25)$$

avec

$$\begin{aligned} c = \frac{M(m+1)+M+1}{(m+1)(M+1)} &= \frac{\dfrac{A}{b}\Big(\dfrac{a}{B}+1\Big)+\dfrac{A}{b}}{\Big(\dfrac{A}{b}+1\Big)\Big(\dfrac{a}{B}+1\Big)} = \frac{\dfrac{A}{b}+\dfrac{(a+B)}{B}+\dfrac{B(A+b)}{bB}}{\dfrac{(A+b)}{b}+\dfrac{(a+B)}{B}} \\ &= \frac{A(a+B)+B(A+b)}{(A+b)+(a+B)}\ . \end{aligned}$$

Chapitre 2

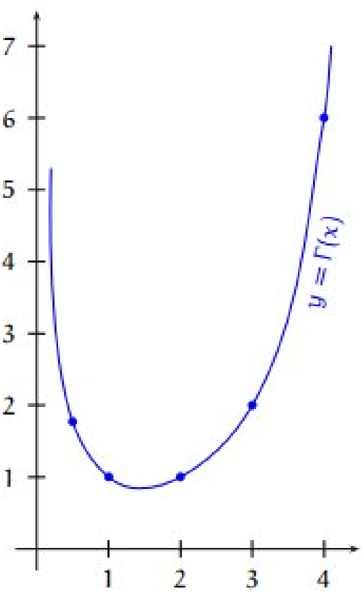
Calcul Fractionnaire

2.1 les fonctions spéciales

2.1.1 Fonction Gamma

Définition 2.1. *[5] Soit $x > 0$, la fonction Gamma d'Euler est définie par l'intégrale suivante :*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{x-1}\, dt\,. \tag{2.1}$$



Exemple 3. *Voici les images de la fonction Gamma pour quelques valeurs réelles particulières*

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{1-1} dx = 1\ , \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Proposition 2.1. *[5] Pour tout $x > 0$, et pour tout $n \in I\!N^*$ on a :*

$$\Gamma(x+1) \;=\; x\,\Gamma(x)\,. \tag{2.2}$$

Preuve 2.1. 1. *Par une intégration par partie , on obtient*

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\,dt \\ &= \Big[-t^x\,e^{-t}\Big]_{t=0}^{t=+\infty} + x\int_0^{+\infty} e^{-t}\,t^{x-1}\,dt \\ &= x\,\Gamma(x)\,.\end{aligned}$$

Proposition 2.2. *[5]*

$$\Gamma(n) = (n-1)! \tag{2.3}$$

Preuve 2.2. *L'identité (2.2) appliquée à $\Gamma(1) = 1$, on déduit*

$$\Gamma(2) = 1\;\Gamma(1) = 1 = 1!\,,$$

$$\Gamma(3) = 2\;\Gamma(2) = 2 \times 1! \;=\; 2!\,,$$

$$\Gamma(4) = 3\;\Gamma(3) = 32! = 3!\,,$$

Par récurrence on obtient visiblement

$$\Gamma(n) = (n-1)!\,.$$

2.1.2 Fonction Bêta

Définition 2.2. *voir [5] Soient $x, y > 0$, la fonction Bêta est définie par :*

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt\,.$$

Les fonctions Gamma et Bêta sont reliées par la relation suivante.

Proposition 2.3. *[5] Pour tout $x, y > 0$ on a*

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\,. \tag{2.4}$$

Preuve : Soient $x, y > 0$, alors

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} t_1^{x-1}e^{-t_1}t_2^{y-1}e^{-t_2}dt_1dt_2 = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} t_2^{y-1}e^{-(t_1+t_2)}dt_2\right)t_1^{x-1}\,dt_1\,,$$

avec le changement de variable

$$s = t_1 + t_2,$$

on aura
$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^{+\infty} \left(\int_{t_1}^{+\infty} (s - t_1)^{y-1} \, e^{-s} ds \right) \; t_1^{x-1} \, dt_1$$
$$= \int_0^{+\infty} e^{-s} ds \int_0^{t_1} (s - t_1)^{y-1} \, t_1^{x-1} dt_1 \, .$$
Posons $z = \dfrac{t_1}{s}$ alors
$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^{+\infty} e^{-s} ds \left(\int_0^1 (z\, s)^{x-1} \, (s - z\, s)^{y-1} \, sdr \right)$$
$$= \int_0^{+\infty} e^{-s} ds \left(s^{x-1+y-1+1} \int_0^1 (z\,)^{x-1} \, (1 - z\,)^{y-1} \, dz \right)$$
$$= \int_0^{+\infty} e^{-s} ds \left(s^{x+y-1} \; B(x,y) \right)$$
$$= B(x,y) \; \int_0^{+\infty} s^{(x+y)-1} e^{-s} \, ds$$
$$= B(x,y) \; \Gamma(x+y) \, ,$$
ce qui donne le résultat désiré
$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$
□

Proposition 2.4. *[5]*
$$B(x,y) = B(y,x) \quad \textit{symétrie} \tag{2.5}$$
Preuve 2.3.
$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} \, dt$$
On utilise le changement de variable $Y = 1 - t$ d'où $t = 1 - Y$ et $dy = -dY$
$$B(x,y) = \int_1^0 (1-Y)^{x-1} Y^{y-1} \, (-dY)$$
$$= \int_0^1 Y^{y-1} (1-Y)^{x-1} \, dY \;\; = \;\; B(y,x)$$

2.2 Intégrales d'ordre entier

Premier opérateur J_{a^+} : Soit $f \in L^1([a,b])$, on considère l'intégrale

$$J^1_{a^+} f(x) = \int_a^x f(t)\, dt\,.$$

On peut integrer successivement $n-$fois, en appliquant le théorème de Fubini on a

$$J^2_{a^+} f(s) = \int_a^x J^1_{a^+} f(s) ds = \int_a^x \left(\int_a^s f(t)\, dt \right) ds$$

$$= \int_a^x \int_a^s f(t)\, dt\, ds = \int_a^x \int_t^x f(t)\, ds\, dt$$

$$= \int_a^x f(t) \left(\int_t^x ds \right) dt = \int_a^x (x-t) f(t)\, dt\,,$$

donc

$$J^2_{a^+} f(x) = \int_a^x (x-t) f(t)\, dt\,.$$

On intègre encore une fois :

$$\int_a^x J^2_{a^+} f(s)\, ds = \int_a^x \left(\int_a^s (s-t)\, f(t)\, dt \right) ds = \int_a^x \int_a^s (s-t) f(t)\, dt\, ds$$

$$= \int_a^x \int_t^x (s-t) f(t)\, ds\, dt = \int_a^x \left(\int_t^x (s-t) f(t)\, ds \right) dt$$

$$= \int_a^x f(t) \left(\int_t^x (s-t)\, ds \right) dt = \int_a^x f(t) \left(\left[\frac{1}{2}(s-t)^2 \right]_t^x \right) dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_a^x (x-t)^2 f(t)\, dt\,,$$

donc

$$J^3_{a^+} f(x) = \frac{1}{2} \int_a^x (x-t)^2 f(t)\, dt\,.$$

Encore une intégration, on obtient

$$\int_a^x J^3_{a^+}\, f(s)\, ds = \int_a^x \left(\frac{1}{2} \int_a^s (s-t)^2\, f(t)\, dt \right) ds = \frac{1}{2} \int_a^x \int_a^s (s-t)^2\, f(t)\, dt\, ds$$

$$= \frac{1}{2} \int_a^x \int_t^x (s-t)^2\, f(t)\, ds\, dt = \frac{1}{2} \int_a^x \left(\int_t^x (s-t)^2\, f(t)\, ds \right) dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_a^x f(t) \left(\int_t^x (s-t)^2\, ds \right) dt = \frac{1}{2} \int_a^x f(t) \left(\left[\frac{1}{3}(s-t)^3 \right]_t^x \right) dt\ ,$$

c'est-à-dire

$$J_{a^+}^4 f(x) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \int_a^x (x-t)^3 f(t) dt = \frac{1}{3!} \int_a^x (x-t)^3 f(t)\, dt\,.$$

Cela suggère plus généralement la n-ème intégral :

$$J_{a^+}^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)\, dt\,. \quad (n \in \mathbb{N}^*) \tag{2.6}$$

Preuve par récurrence : Supposons (2.6) vraie, montrons que

$$J_{a^+}^{n+1} f(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f(t)\, dt\,.$$

En intégrant dans (2.6) on aura

$$\int_a^x J_{a^+}^n f(s)\; ds = \int_a^x \left(\frac{1}{(n-1)!} \int_a^s (s-t)^{n-1} f(t)\; dt \right)\; ds = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x \int_a^s (s-t)^{n-1} f(t)\; dt\; ds$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x \int_t^x (s-t)^{n-1} f(t)\; ds\; dt = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x \left(\int_t^x (s-t)^{n-1} f(t)\; ds \right)\; dt$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x f(t) \left(\int_t^x (s-t)^{n-1}\; ds \right)\; dt = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x f(t) \left(\left[\frac{1}{n} (s-t)^n \right]_t^x \right)\; dt$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \times \frac{1}{n} \int_a^x (x-t)^n f(t)\; dt = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f(t)\; dt$$

$$= J_{a^+}^{n+1} f(x)\;.$$

Deuxième opérateur J_{b^-} : Soit $f \in L^1([a,b])$, en considérant l'intégrale

$$J_{b^-}^1 f(x) = \int_x^b f(t)\, dt\,,$$

on peut faire un travail analogue. On applique le théorème de Fubini

$$\int_x^b J_{b^-}^1 f(s) ds = \int_x^b \left(\int_s^b f(t)\, dt \right) ds = \int_x^b \int_s^b f(t)\, dt\, ds$$

$$= \int_x^b \int_x^t f(t)\, ds\, dt = \int_x^b \left(\int_x^t f(t)\, ds \right)\; dt$$

$$= \int_x^b f(t) \left(\int_x^t\; ds \right)\; dt = \int_x^b (t-x) f(t)\, dt$$

alors

$$J_{b^-}^2 f(x) = \int_x^b (t-x) f(t)\, dt\,.$$

Une deuxième intégration donne :

$$\int_x^b J_{b^-}^2 f(s)\, ds = \int_x^b \left(\int_s^b (t-s)\, f(t)\, dt \right) ds = \int_x^b \int_s^b (t-s) f(t)\, dt\, ds$$

$$= \int_x^b \int_x^t (t-s) f(t)\, ds\, dt = \int_x^b \left(\int_x^t (t-s) f(t)\, ds \right) dt$$

$$= \int_x^b f(t) \left(\int_x^t (t-s)\, ds \right) dt = \int_x^b f(t) \left(\left[\frac{1}{2}(t-s)^2 \right]_x^t \right) dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_x^b (t-x)^2 f(t)\, dt\,,$$

donc

$$J_{b^-}^3 f(x) = \frac{1}{2} \int_x^b (t-x)^2 f(t)\, dt\,.$$

Une autre intégration pour confirmer :

$$\int_x^b J^3 f(s)\, ds = \int_x^b \left(\frac{1}{2} \int_s^b (t-s)^2\, f(t)\, dt \right) ds = \frac{1}{2} \int_x^b \int_s^b (t-s)^2\, f(t)\, dt\, ds$$

$$= \frac{1}{2} \int_x^b \int_x^t (t-s)^2\, f(t)\, ds\, dt = \frac{1}{2} \int_x^b \left(\int_x^t (t-s)^2\, f(t)\, ds \right) dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_x^b f(t) \left(\int_x^t (t-s)^2\, ds \right) dt = \frac{1}{2} \int_x^b f(t) \left(\left[\frac{1}{3}(t-s)^3 \right]_t^x \right) dt\,,$$

on obtient

$$J_{b^-}^4 f(x) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \int_x^b (t-x)^3 f(t)\, dt = \frac{1}{3!} \int_x^b (t-x)^3 f(t)\, dt\,.$$

Plus généralement on espère avoir :

$$J_{b^-}^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_x^b (t-x)^{n-1} f(t)\, dt\,. \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{2.7}$$

Preuve par récurrence : Supposons (2.7) vraie, montrons que

$$J_{b^-}^{n+1} f(x) = \frac{1}{n!} \int_x^b (t-x)^n f(t)\, dt\,.$$

On intégré $J_{b^-}^n f$ sur $[x,b]$:

$$\int_x^b J_{b^-}^n f(s)\ ds = \int_x^b \left(\frac{1}{(n-1)!} \int_s^b (t-s)^{n-1} f(t)\ dt \right)\ ds = \frac{1}{(n-1)!} \int_x^b \int_s^b (t-s)^{n-1} f(t)\ dt\ ds$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_x^b \int_x^t (t-s)^{n-1} f(t)\ ds\ dt = \frac{1}{(n-1)!} \int_x^b \left(\int_x^t (t-s)^{n-1} f(t)\ ds \right)\ dt$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_x^b f(t) \left(\int_x^t (t-s)^{n-1}\ ds \right)\ dt = \frac{1}{(n-1)!} \int_b^x f(t) \left(\left[\frac{1}{n} (t-s)^n \right]_x^t \right)\ dt$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \times \frac{1}{n} \int_x^b (t-x)^n f(t)\ dt = \frac{1}{n!} \int_x^b (t-x)^n f(t)\ dt$$

$$= J_{b^-}^{n+1} f(x)\ .$$

2.3 Intégrales d'ordre fractionnaire

Les formules (2.6) et (2.7) suggèrent les définitions suivantes pour des intégrations d'ordre réels positifs.

Définition 2.3. *[3][1] Soit $f \in L_1[a,b]$, les opérateurs fractionnaires gauche (respectivement droite) de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$, notées $J_{a^+}^{\alpha}$ (respectivement $J_{b^-}^{\alpha}$), sont définies par*

$$(J_{a^+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt\ , \quad a < x \leq b$$

et

$$(J_{b^-}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt\ , \quad a \leq x < b\,,$$

où $\Gamma(\alpha)$ est la fonction gamma d'Euler.

Remarque 2.

Pour $\alpha = 0$ on pose $J_{a^+}^0 f(x) = f(x)$ et $J_{b^-}^0 f(x) = f(x)$.

Pour $\alpha = 1$ on obtient l'intégrale de Riemann (classique).

2.4 Propriétés des opérateurs de Riemann-Liouville

2.4.1 Propriété de semi-Groupe

Théorème 2.1. *[3][1] Soient f une fonction intégrable sur $[a,b]$, α et β deux nombres réels strictement positifs, alors on a pour tout $x \in [a,b]$*

$$J_{a^+}^{\alpha} \left[J_{a^+}^{\beta} f(x) \right] = J_{a^+}^{\alpha+\beta} f(x) = J_{a^+}^{\alpha} \left[J_{a^+}^{\beta} f(x) \right]$$

Preuve 2.4.

$$
\begin{aligned}
J^{\alpha}_{a^+}(J^{\beta}_{a^+}f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-s)^{\alpha-1}(J^{\beta}_{a^+}f)(s)\,ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-s)^{\alpha-1}\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^x (s-t)^{\beta-1}\,f(t)\,dt\right)\,ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x \int_a^s (x-s)^{\alpha-1}(s-t)^{\beta-1}\,f(t)\,dt\,ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x f(t)\left[\int_t^x (x-s)^{\alpha-1}(s-t)^{\beta-1}\,ds\right]\,dt\,. \qquad (2.8)
\end{aligned}
$$

En effectuant le changement de variable

$$s = t + (x-t)\tau \quad \textit{alors} \quad ds = (x-t)d\tau\,,$$

on a

$$
\begin{aligned}
s = t &\Rightarrow t + (x-t)\tau = t \Rightarrow \tau = 0 \\
s = x &\Rightarrow t + (x-t)\tau = x \Rightarrow \tau = 1
\end{aligned}
$$

alors

$$
\begin{aligned}
\int_t^x (x-s)^{\alpha-1}(s-t)^{\beta-1}\,ds &= \int_0^1 \left[x-(t+(x-t)\tau)\right]^{\alpha-1}\left[t+(x-t)\tau-t\right]^{\beta-1}\,(x-t)d\tau \\
&= \int_0^1 \left[(x-t)(1-\tau)\right]^{\alpha-1}\left[(x-t)\tau\right]^{\beta-1}\,(x-t)d\tau \\
&= (x-t)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1}\,\tau^{\beta-1}\,d\tau \\
&= (x-t)^{\alpha+\beta-1}\;B(\alpha,\beta)\;.
\end{aligned}
$$

En remplaçant dans (2.8)*, on obtient*

$$
\begin{aligned}
J^{\alpha}_{a^+}(J^{\beta}_{a^+}f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x f(t)\left[(x-t)^{\alpha+\beta-1}\;B(\alpha,\beta)\right]\,dt \\
&= \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x (x-t)^{\alpha+\beta-1}\,f(t)\,dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^x (x-t)^{\alpha+\beta-1}\,f(t)\,dt \\
&= J^{\alpha+\beta}_{a^+}f(x)\;.
\end{aligned}
$$

La deuxième égalité est une conséquence de la commutativité de l'addition : $\alpha+\beta = \beta+\alpha$ *.*

2.5 Propriété de la bornitude

Théorème 2.2. *Si $f \in L^1([a,b])$, alors pour tout $\alpha > 0$*

$$J_{a^+}^{\alpha} f \in L^1([a,b]), \quad J_{b^-}^{\alpha} f \in L^1([a,b]),$$

de plus les opérateurs d'intégrations $J_{a^+}^{\alpha}$ et $J_{b^-}^{\alpha}$ sont bornés, plus précisément on a

$$\| J_{a^+}^{\alpha} f \|_{L^1([a,b])} \leq C \| f \|_{L^1([a,b])} \quad et \quad \| J_{b^-}^{\alpha} f \|_{L^1([a,b])} \leq C \| f \|_{L^1([a,b])},$$

avec $C = \dfrac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}$.

Preuve 2.5. *soit $f \in L^1([a,b])$, alors*

$$\begin{aligned}
\| J_{a^+}^{\alpha} f \|_{L^1([a,b])} &= \int_a^b \left| J_{a^+}^{\alpha} f(x) \right| dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \left| \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \right| dx \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \left| f(t) \right| dt\, dx,
\end{aligned}$$

en utilisant le Théorème de Fubini, on obtient

$$\begin{aligned}
\| J_{a^+}^{\alpha} f \|_{L^1([a,b])} &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \int_t^b (x-t)^{\alpha-1} |f(t)|\, dx\, dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b |f(t)| \int_t^b (x-t)^{\alpha-1}\, dx\, dt \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b |f(t)| \left(\frac{1}{\alpha} \Big[(x-t)^{\alpha} \Big]_t^b \right) dx \\
&= \frac{1}{\alpha \Gamma(\alpha)} \int_a^b |f(t)|\, (b-t)^{\alpha}\, dt,
\end{aligned}$$

on utilise la propriété (2.2) de la fonction Gamma et la décroissance de la fonction $t \to (b-t)^{\alpha}$, on aura

$$\begin{aligned}
\| J_{a^+}^{\alpha} f \|_{L^1([a,b])} &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^b |f(t)||\, (b-t)^{\alpha}\, dt \\
&\leq \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^b |f(t)| dt \\
&= \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \| f \|_{L^1([a,b])}.
\end{aligned}$$

De la même façon,

$$\begin{aligned}\| J^{\alpha}_{b^-} f \|_{L^1([a,b])} &= \int_a^b |I^{\alpha}_{a^+} f(x)| dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b | \int_a^x (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt | dx \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} |f(t)| dt dx\end{aligned}$$

en utilisant le Théorème de Fubini, on obtient

$$\begin{aligned}\| J^{\alpha}_{b^-} f \|_{L^1([a,b])} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b (\int_a^t (t-x)^{\alpha-1} |f(t)| dx) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b |f(t)| (\int_a^t (t-x)^{\alpha-1} dx) dt \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b |f(t)| (\frac{1}{\alpha} [-(t-x)^{\alpha}]_t^b) dx \\ &= \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} \int_a^b |f(t)| (t-a)^{\alpha} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^b |f(t)| (t-a)^{\alpha} dt\end{aligned}$$

on utilise la propriété (2.2) de la fonction Gamma et la décroissance de la fonction $t \to (b-t)^{\alpha}$, on aura

$$\begin{aligned}\| J^{\alpha}_{b^-} f \|_{L^1([a,b])} &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^b |f(t)| (b-a)^{\alpha} dt \\ &= \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^b |f(t)| dt \\ &= \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \| f \|_{L^1([a,b])} .\end{aligned}$$

on déduit que les opérateur $J^{\alpha}_{a^+} f$ et $J^{\alpha}_{b^-} f$ sont bornés de l'espace $L^1([a,b])$ vers lui même .

Remarque 3. *Pour $f \in L^p([a,b])$ on a*

$$\| J^{\alpha}_{a^+} f \|_{L^1([a,b])} \leq C \| f \|_{L^1([a,b])} < \infty \quad \text{et} \quad \| J^{\alpha}_{b^-} f \|_{L^1([a,b])} \leq C \| f \|_{L^1([a,b])} < \infty \,,$$

on déduit que pour tout $\alpha > 0$ on a $J^{\alpha}_{a^+} f, J^{\alpha}_{b^-} f \in L^1([a,b])$; c'est à dire que les opérateurs $J^{\alpha}_{a^+}$ et $J^{\alpha}_{b^-}$ sont bien définie pour tous $\alpha > 0$.

Chapitre 3

Inégalités au sens fractionnaire

3.1 inégalité de Hölder

Théorème 3.1. *Soient* $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *et* f,g *deux fonctions positives intégrables,* $\alpha > 0$ *alors*

$$J_{a^+}^{\alpha}(f \cdot g)(x) \leq \left(J_{a^+}^{\alpha} f^p(x)\right)^{\frac{1}{p}} \left(J_{a^+}^{\alpha} g^q(x)\right)^{\frac{1}{q}} . \tag{3.1}$$

Preuve 3.1. *on a*

$$J_{a^+}^{\alpha} f\, g(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, g(t)\, dt\,, \tag{3.2}$$

puisque $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *alors*

$$\begin{aligned} J_{a^+}^{\alpha} f g(x) &= \int_a^x \left(\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} f(t)\, g(t)\, dt \\ &= \int_a^x \left(\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\frac{1}{q}} f(t)\, g(t)\, dt\ , \end{aligned}$$

on applique l'inégalité de Hölder classique

$$J_{a^+}^{\alpha} f\, g(x) \leq \left(\int_a^x \left(\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) f^p(t)\, dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^x \left(\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) g^q(t)\, dt\right)^{\frac{1}{q}},$$

donc

$$J_{a^+}^{\alpha} f\, g(x) \leq \left(J_{a^+}^{\alpha} f^p(x)\right)^{\frac{1}{p}}\ \left(J_{a^+}^{\alpha} g^q(x)\right)^{\frac{1}{q}} .$$

3.2 Inégalité de Minkowski

Théorème 3.2. *Soient* $p, q > 1$ *tels que* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$, $\alpha > 0$ *et* f, g *deux fonctions intégrables sur* $[a, b]$, *alors*

$$\left(J_{a^+}^{\alpha}(f+g)^p(x)\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(J_{a^+}^{\alpha} f^p(x)\right)^{\frac{1}{p}} + \left(J_{a^+}^{\alpha} g^p(x)\right)^{\frac{1}{p}} .$$

Preuve 3.2.

$$\begin{aligned} J^{\alpha}_{a^+}(f+g)^p(x) &= \int_a^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}|f+g|^p(t)dt \\ &= \int_a^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}|f+g||f+g|^{p-1}(t)dt \\ &\leq \int_a^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}(|f|+|g|)|f+g|^{p-1}(t)\,dt\,, \end{aligned}$$

donc

$$J^{\alpha}_{a^+}(f+g)^p(x) \leq \int_a^x \left(\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} |f|\,|f+g|^{p-1}(t)dt$$

$$+\int_a^x \left(\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} |g|\,|f+g|^{p-1}(t)dt\ .$$

On applique l'inégalité de Hölder aux deux intégrales

$$J^{\alpha}_{a^+}(f+g)^p(x) \leq \Big(\int_a^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}|f|^p(t)\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_a^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}(|f+g|^{p-1})^q(t)\Big)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\Big(\int_a^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}|g|^p(t)\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_a^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}(|f+g|^{p-1})^q(t)\Big)^{\frac{1}{q}},$$

d'où

$$J^{\alpha}_{a^+}(f+g)^p(x) \leq \left(\Big(J^{\alpha}_{a^+}f^p(x)\Big)^{\frac{1}{p}}+\Big(J^{\alpha}_{a^+}g^p(x)\Big)^{\frac{1}{p}}\right)\left(J^{\alpha}_{a^+}(f+g)^p(x)\right)^{\frac{1}{q}},$$

on déduit

$$\Big(J^{\alpha}_{a^+}(f+g)^p(x)\Big)^{1-\frac{1}{q}} \leq \Big(J^{\alpha}_{a^+}f^p(x)\Big)^{\frac{1}{p}}+\Big(J^{\alpha}_{a^+}g^p(x)\Big)^{\frac{1}{p}},$$

c'est à dire

$$\Big(J^{\alpha}_{a^+}(f+g)^p(x)\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big(J^{\alpha}_{a^+}f^p(x)\Big)^{\frac{1}{p}}+\Big(J^{\alpha}_{a^+}g^p(x)\Big)^{\frac{1}{p}}\ .$$

3.3 inégalité inverse de Hölder

Théorème 3.3. *Soient $p,q>1$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $\alpha>0$ et f, g deux fonctions intégrables sur $[a,b]$. Si*

$$0<m\leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq M \quad \text{pour tout} \quad x\in[a,b]\ , \tag{3.3}$$

alors

$$\Big(J^{\alpha}_{a^+}f(t)\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(J^{\alpha}_{a^+}g(t)\Big)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{pq}}\ J^{\alpha}_{a^+}\left(f^{\frac{1}{p}}\cdot g^{\frac{1}{q}}\right)(t)\ . \tag{3.4}$$

Preuve 3.3. *On inverse* (3.3)

$$\frac{1}{m} \geq \frac{g(x)}{f(x)} \geq \frac{1}{M} \ ,$$

en élevant à le puissance $\frac{1}{q}$ *où* $q \in \mathbb{R}_+^*$

$$\frac{1}{m^{\frac{1}{q}}} \geq \frac{g^{\frac{1}{q}}(x)}{f^{\frac{1}{q}}(x)} \geq \frac{1}{M^{\frac{1}{q}}},$$

multipliant par $f(x)$ *l'inégalité précédente,on obtient*

$$\frac{1}{m^{\frac{1}{q}}} f(x) \geq f^{1-\frac{1}{q}}(x)\, g^{\frac{1}{q}}(x) \geq \frac{1}{M^{\frac{1}{q}}} f(x) \ ,$$

d'où

$$\frac{1}{m^{\frac{1}{q}}} f(x) \geq f^{\frac{1}{p}}(x)\, g^{\frac{1}{q}}(x) \geq \frac{1}{M^{\frac{1}{q}}} f(x) \ ,$$

ce qui donne

$$f(x) \leq M^{\frac{1}{q}}\, f^{\frac{1}{p}}(x)\, g^{\frac{1}{q}}(x) \tag{3.5}$$

On multiplie (3.5) *par* $\dfrac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ *puis on intègre par rapport à* x *,on obtient*

$$\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq M^{\frac{1}{pq}} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f^{\frac{1}{p}}(t)\, g^{\frac{1}{q}}(t)\, dt\right)^{\frac{1}{p}} \ ,$$

et donc

$$\left[J_{a^+}^{\alpha} f(t)\right]^{\frac{1}{p}} \leq M^{\frac{1}{pq}} \left[J_{a^+}^{\alpha} f(t)^{\frac{1}{p}}\, g(t)^{\frac{1}{q}}\right]^{\frac{1}{p}} . \tag{3.6}$$

Maintenant, suite à l'hypothèse (3.3)*,on a*

$$m^{\frac{1}{p}} \leq f^{\frac{1}{p}}(x)\, g^{-\frac{1}{P}}(x) \leq M^{\frac{1}{p}} \ ,$$

on multiplie par $g(x)$ *l'inégalité précédente, on résulte que*

$$m^{\frac{1}{p}}\, g(x) \leq f^{\frac{1}{p}}(x)\, g^{1-\frac{1}{p}} \leq M^{\frac{1}{p}}\, g(x) \ ,$$

donc

$$g(x) \leq \left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{p}} f^{\frac{1}{p}}(x)\, g^{\frac{1}{q}}(x) \ , \tag{3.7}$$

On multiplie (3.7) *par* $\dfrac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ *puis on intègre par rapport à* x*, on obtient*

$$\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (x-t)^{\alpha-1} g(t)\, dt\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{pq}} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f^{\frac{1}{p}}(t)\, g^{\frac{1}{q}}(t)\, dt\right)^{\frac{1}{q}} \ ,$$

finalement, on en déduit que

$$\left[J_{a^+}^{\alpha} g(t)\right]^{\frac{1}{q}} \leq \left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{pq}} \left[J_{a^+}^{\alpha} f^{\frac{1}{p}}(t)\, g^{\frac{1}{q}}(t)\right]^{\frac{1}{q}} . \tag{3.8}$$

En multipliant les inégalités (3.6) *et* (3.8), *on obtient*

$$\left(J_{a^+}^{\alpha} f(t)\right)^{\frac{1}{p}} \left(J_{a^+}^{\alpha} g(t)\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{pq}} \left(J_{a^+}^{\alpha} f^{\frac{1}{p}}(t)\, g^{\frac{1}{q}}(t)\right) , \tag{3.9}$$

d'où le résultat (1.4) *requis.*

Corollaire 3.1. *Soient $p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et deux fonctions $f, g > 0$ intégrables sur $[a, b]$, $\alpha > 0$. Si*

$$0 < m < \frac{f^{p-1}(x)}{g(x)} < M , \tag{3.10}$$

alors

$$\left(J_{a^+}^{\alpha} f(t)\right)^{\frac{1}{p}} \left(J_{a^+}^{\alpha} g(t)\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{p}} \left(J_{a^+}^{\alpha} (f \cdot g)(t)\right) . \tag{3.11}$$

Preuve 3.4. *Puisque $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, alors $p - 1 = \dfrac{p}{q}$, donc* (3.10) *devient*

$$m \leq \frac{f(x)^{\frac{p}{q}}}{g(x)} \leq M , \tag{3.12}$$

d'où

$$m^q < \frac{f^p(x)}{g^q(x)} \leq M^q ,$$

on applique alors le théorème (3.3) *avec $m^q = m'$ et $M^q = M'$*

$$\left(J_{a^+}^{\alpha} f(t)\right)^{\frac{1}{p}} \left(J_{a^+}^{\alpha} g(t)\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\frac{M'}{m'}\right)^{\frac{1}{pq}} \left(J_{a^+}^{\alpha} (f \cdot g)(t)\right) .$$

en remarquant que $\left(\frac{M'}{m'}\right)^{\frac{1}{pq}} = \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{p}}$, on obtient le résultat désiré (3.11).

Corollaire 3.2. *Soient $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et deux fonctions $f, g > 0$ intégrables sur $[a, b]$, $\alpha > 0$. Si*

$$0 < m \leq \frac{f(x)}{g^{q-1}(x)} \leq M \tag{3.13}$$

alors

$$\left(J_{a^+}^{\alpha} f(t)\right)^{\frac{1}{p}} \left(J_{a^+}^{\alpha} g(t)\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{q}} \left(J_{a^+}^{\alpha} (f \cdot g)(t)\right) . \tag{3.14}$$

Preuve 3.5. *Puisque* $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, *alors* $q-1=\dfrac{q}{p}$, *donc* (3.13) *devient*

$$m \leq \frac{f(x)}{g^{\frac{q}{p}}(x)} \leq M \ ,$$

d'où

$$m^p < \frac{f^p(x)}{g^q(x)} \leq M^p \ ,$$

on applique alors le théorème (3.3) *avec* $m^p = m'$ *et* $M^p = M'$

$$\left(J^{\alpha}_{a^+} f(t)\right)^{\frac{1}{p}} \left(J^{\alpha}_{a^+} g(t)\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\frac{M'}{m'}\right)^{\frac{1}{pq}} \left(J^{\alpha}_{a^+} (f \cdot g)(t)\right) .$$

en remarquant que $\left(\frac{M'}{m'}\right)^{\frac{1}{pq}} = \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{q}}$ *on obtient le résultat désiré* (3.14).

3.4 Inégalité inverse de Minkowski

Théorème 3.4. *Voir [7] Soit* $\alpha > 0$, $p > 1$ *et soit* f,g *deux fonctions strictement positives sur . Si*

$$0 < m \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq M \ , \quad x \in [a,b] \tag{3.15}$$

alors

$$\left[J^{\alpha}_{a^+} f^p(t)\right]^{\frac{1}{p}} + \left[J^{\alpha}_{a^+} g^p(t)\right]^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1+M(m+2)}{(m+1)(M+1)} \left[J^{\alpha}_{a^+} (f+g)^p(t)\right]^{\frac{1}{p}} . \tag{3.16}$$

Preuve 3.6. *De* (3.15) *on déduit* $f(x) \leq M\, g(x)$ *d'où*

$$f(x) + M \ f(x) \leq M \ g(x) + M \ f(x) \ ,$$

en élevant à le puissance p

$$(M+1)^p \ f^p(x) \leq M^p \ (f+g)^p(x) \ , \tag{3.17}$$

on multiplie (3.17) *par* $\dfrac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ *puis en intégrant sur* $[a,b]$, *on obtient*

$$\frac{(M+1)^p}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f^p(t) \ dt \leq \frac{M^p}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \ (f+g)^p(t) dt \ ,$$

c'est à dire

$$J^{\alpha}_{a^+} f^p(x) \leq \frac{M^p}{(M+1)^p} \ J^{\alpha}_{a^+} (f+g)^p(x) \ ,$$

donc

$$\left[J^{\alpha}_{a^+} f^p(x)\right]^{\frac{1}{p}} \leq \frac{M}{M+1} \left[J^{\alpha}_{a^+} (f+g)^p(x)\right]^{\frac{1}{p}} . \tag{3.18}$$

D'autre part, de (3.15) *on a* $g(x) \leq \frac{1}{m}\ f(x)$ *d'où*

$$g(x) + \frac{1}{m}\ g(x) \leq \frac{1}{m}\ f(x) + \frac{1}{m}\ g(x)\ ,$$

donc

$$g^p(x)\ \left(1+\frac{1}{m}\right)^p \leq \left(\frac{1}{m}\right)^p\ (f+g)^p\,(x)\ , \tag{3.19}$$

on multiplie (3.19) *par* $\dfrac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ *puis en intégrant sur* $[a,b]$*, on obtient*

$$\left(\frac{1}{m}\right)^p\ \frac{(m+1)^p}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}\ g^p(t)\ dt \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\ \left(\frac{1}{m}\right)^p\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}\ (f+g)^p(t)\ dt\ ,$$

d'où

$$J^{\alpha}_{a^+}g^p(x) \leq \left(\frac{1}{m+1}\right)^p\ J^{\alpha}_{a^+}(f+g)^p(x)\ ,$$

donc

$$\left[J^{\alpha}_{a^+}g^p(x)\right]^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{m+1}\ \left[J^{\alpha}_{a^+}(f+g)^p(x)\right]^{\frac{1}{p}}\ . \tag{3.20}$$

On additionnent (3.18) *et* (3.20) *on obtient* (3.16) *.*

Corollaire 3.3. *Soient* $p > 1$ *et deux fonctions* $f, g > 0$ *intégrables sur* $[a,b]$*,*$\alpha > 0$ *satisfaisants*

$$0 < a \leq f(x) \leq A\ , \tag{3.21}$$

et

$$0 < b \leq g(x) \leq B\ , \tag{3.22}$$

alors

$$\left[J^{\alpha}_{a^+}f^p(x)\right]^{\frac{1}{p}} + \left[J^{\alpha}_{a^+}g^p(x)\right]^{\frac{1}{p}} \leq c\left[J^{\alpha}_{a^+}(f+g)^p(x)\right]^{\frac{1}{p}}\ , \tag{3.23}$$

avec $c = \dfrac{A(a+B)+B(A+b)}{(A+b)(a+B)}$ *.*

Preuve 3.7. *On inverse* (3.22)

$$\frac{1}{B} \leq \frac{1}{g(x)} \leq \frac{1}{b}\ , \tag{3.24}$$

on multiplie (3.24) *avec* (1.20)

$$\frac{a}{B} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq \frac{A}{b}\ . \tag{3.25}$$

On applique maintenant le théorème (3.4) *avec* $m = \dfrac{a}{B}$ *et* $M = \dfrac{A}{b}$

$$\left[J^{\alpha}_{a^+}f^p(x)\right]^{\frac{1}{p}} + \left[J^{\alpha}_{a^+}g^p(x)\right]^{\frac{1}{p}} \leq c\left[J^{\alpha}_{a^+}(f+g)^p(x)\right]^{\frac{1}{p}}\ , \tag{3.26}$$

avec

$$
\begin{aligned}
c &= \frac{M(m+1)+M+1}{(m+1)(M+1)} \\
&= \frac{\frac{A}{b}\left(\frac{a}{B}+1\right)+\frac{A}{b}}{\left(\frac{A}{b}+1\right)\left(\frac{a}{B}+1\right)} \\
&= \frac{\frac{A}{b}+\frac{(a+B)}{B}+\frac{B(A+b)}{bB}}{\frac{(A+b)}{b}+\frac{(a+B)}{B}} \\
&= \frac{A(a+B)+B(A+b)}{(A+b)+(a+B)}\ .
\end{aligned}
$$

Conclusion

Les inégalités de Hölder et de Minkowski sont deux outils fondamentaux en analyse fonctionnelle et en théorie de l'intégration, largement utilisés dans divers domaines des mathématiques et de leurs applications.
L'application des inégalités de Hölder et de Minkowski dans le contexte du calcul fractionnaire offre des perspectives intéressantes. Le calcul fractionnaire généralise les opérations dérivées et intégrales pour des ordres non entiers, offrant ainsi une approche plus flexible pour modéliser des phénomènes complexes.
Ces inégalités constituent des outils puissants pour analyser les propriétés des fonctions, des espaces vectoriels normés et des espaces de mesure. Leur compréhension et leur application sont cruciales pour de nombreux résultats et théorèmes fondamentaux dans divers domaines des mathématiques .

Annexe

Otto Hölder : était un mathématicien allemand né le 22 décembre 1859 à Stuttgart et décédé le 29 août 1937 à Leipzig. Il a contribué à plusieurs domaines des mathématiques, notamment l'analyse réelle et fonctionnelle, la théorie des nombres, la théorie des groupes, la géométrie et la théorie des fonctions. Sa contribution la plus célèbre est peut-être l'inégalité de Hölder, qui établit une relation entre les normes de deux fonctions dans un espace de mesure.L'inégalité inverse de Hölder a été explorée par un certain nombre de scientifiques à travers des articles récents.

Guido Fubini : était un mathématicien italien né le 19 janvier 1879 à Venise et décédé le 6 juin 1943 à New York. Il est surtout connu pour ses contributions importantes en analyse mathématique, notamment dans le domaine de l'intégration. Sa contribution la plus célèbre est le théorème de Fubini. a également travaillé sur d'autres sujets en mathématiques, tels que la théorie des fonctions de variable réelle et complexe, la théorie de la mesure et l'analyse harmonique.

Hermann Minkowski : était un mathématicien allemand né le 22 juin 1864 à Aleksotas, et décédé le 12 janvier 1909 à Göttingen, en Allemagne. Il a apporté d'importantes contributions à divers domaines des mathématiques, notamment la géométrie, la physique mathématique et la théorie de la relativité. En plus de ses contributions à la relativité restreinte, Minkowski a également travaillé sur la théorie des nombres, la géométrie différentielle, la théorie des fonctions et d'autres domaines des mathématiques.

Bibliographie

[1] H.M.Srivastava A. A Kilbas and J.J.Trujillo. Theory and applications of fractional differential equations. *North-Holland Mathematical studies 204, Ed van Mill, Amsterdam*, (2006.

[2] H. Budak B.Benaissa. More on reverse hölder's intégral inequality. *Korean J.*, 1 :9–15, 2020.

[3] Erdelyi A.Magnus W.Oberhettinger F and Tricomi F. Higher transcendental functions. *Voll.III,Krieger Pub ,Melbourne, Florida*, (1981.

[4] L.Bougoffa. J.inequal.pure appl.math. *On Minkowski's and Hardu Integral Inequalities*, 7, 2006.

[5] A. A Kilbas S. G. Samko and O. I. Marichev. Fractional integrals and derivatives, theory and application. *Gordan and Breach Science, New York*, 1993.

[6] W.T. Sulaiman. Reverses of minkowski's, hölder's, and hardy's integral inequalities. *Int.J.Mod.Math*, pages 14–24, 2012.

[7] Z.Dahmani. On minkowski and hermite-hadamard integral inequalities via fractional integration. *,Ann. Funct. Anal. 1 (2010)*, pages 51–58, 2008.