REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE IBN KHALDOUN - TIARET

MEMOIRE

Présenté à :

FACULTÉ DES MATHEMATIQUES ET D'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Pour l'obtention du diplôme de :

MASTER

Spécialité :Analyse fonctionnelle et équations différentielles

Par :

Benfriha Sabah

Mekkaoui Halima

Sur le thème

L'étude de l'équation des ondes soumises à différents types de dissipation

---

Soutenu publiquement le ../ 06 /2024 à Tiaret devant le jury composé de :

M Maazouz kadda	***MCA***	***Université Ibn Khaldoun Tiaret***	***Président***
M Braiki Hocine Mohamed	***MCB***	***Université Ibn Khaldoun Tiaret***	***Encadreur***
M Benguessoum Aissa	***MCA***	***Université Ibn Khaldoun Tiaret***	***Examinateur***
M Hallouz Abdelhamid	***Doctorant***	***Université Ibn Khaldoun Tiaret***	***Examinateur***

2023-2024

Remerciments

✓ Nous souhaitons exprimer notre gratitude sincère envers M. ***Braiki Hocine Mohamed*** Juste pour son accord pour nous superviser et pour nous donner l'opportunité de profiter ,En raison de ses connaissances, mais également de sa patience et de sa confiance totale en nous.

✓ Nous exprimons notre gratitude envers le M. ***Hallouz Abdelhamid*** pour toute son assistance dans la réalisation de notre mémoire .

✓ Nous exprimons notre gratitude envers le M. ***Maazouz Kadda*** de l'honneur qu'il nous faite en président ce jury

✓ Nous remercions également M. ***Benguessoum Aissa*** pour l'honneur qu'il nous faite d'avoir accepté l'exmen de ce travail.

✓ Nous tenons à exprimer notre gratitude envers tous les enseignants de Département de Mathématiques l'université Ibn Khaldoun à Tiaret.

✓ Merci à tous ceux qui ont apporté leur contribution, que ce soit de manière directe ou indirecte, à l'issue de cette étude.

Dédicace

A mon pére ***Morsli*** *,toujours présent dans mon coeur et mes pensées.*

A ma mère qui m'a soutenu avec tendresse et prié pour moi à chaque pas.

A mes chers frères ***AbdElhake*** *et* ***Mohamed*** *,ma soeur* ***Malika*** *.*

A mes neveux Salsabil,Mohamed,Mimona et Maria vous êtes la lumière de ma vie et la joie de mon cœur .

Aux personnes qui m'ont toujours aidé et encourager, et tout ma famille ***Mekkaoui*** *et* ***Amari*** *.*

A tous mes amis Amel, Ahelem, Nawel ,Sara et Zohra pour leur encouragement.

A tous les étudiants d'université de Ibn Khaldoun-Tiaret.

A tous

Mekkaoui Halima

Dédicace

*À mon père **AHMED**, toujours présent dans mon cœur et mes pensées.*

À ma mère qui m'a soutenu avec tendresse et prié pour moi à chaque pas.

*À mes chers frères **ZINO,ABDO,BADRO**, et ma sœur **NADJET**.*

À mes neveux RIYAD, RIHAM, IYAD et SEDJOUD, vous êtes la lumière de ma vie et la joie de mon cœur.

*Aux personnes qui m'ont toujours aidé et encouragé, et à toute ma famille **BENFRIHA**.*
A tous mes amis YOSRA, IMANE, HALIMA et ZAHIA pour leur encouragement.

Benfriha Sabah

Table des matières

Notations utilisées

$\mathbb{K}$: un corps commutatif ($\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$) .

H : Espace de Hilbert .

Ω : un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, ($n \in \mathbb{N}^*$).

$\partial\Omega$:la frontière de Ω .

$|\Omega|$: mesure de Ω .

$\|.\|_2$: la norme de l'espace $L^2(\Omega)$ définie par $\|x\|_2 = (\int_\Omega |x|^2)^{\frac{1}{2}}$.

∇ : $\nabla u := \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$.

Δ : $\Delta u := \sum \frac{\partial^2 u}{(\partial x_i)^2}$.

D^α : $D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial^{\alpha_1} x_1 .... \partial^{\alpha_n} x_n}$ est la dérivé partielle de u d'ordre α ; avec $x = (x_1, x_2, ..., x_n)(n \in \mathbb{N}^*)$; $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n (n \in \mathbb{N}^*)$ multi-indice et la longeur de α est $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$

$D(\Omega)$: l'espace des fonctions tests.

INTRODUCTION

Les équations aux dérivées partielles en abréviation (EDP) sont utilisées pour exprimer et expliquer diverses lois essentielles de la nature, ce qui a favorisé l'évolution de la recherche mathématique dans ce cadre.

L'équation des ondes est une équation aux dérivé partielle fondamentale qui décrit la propagation des ondes dans divers milieux. Elle joue un rôle crucial dans de nombreux domaines de la physique, de l'ingénierie et des mathématiques. Cependant, dans la plupart des situations réalistes, les ondes subissent une dissipation d'énergie due à divers mécanismes physiques, tels que la friction, la diffusion et la conductivité. L'étude de l'équation des ondes avec dissipation est donc d'une grande importance pour comprendre et modéliser des phénomènes ondulatoires réalistes

Dans, ce mémoire nous somme intéressées à l'étude de l'existence globale des solutions et la stabilisation de certaines équations d'évolution.

On s'intéresse à l'étude de l'existence globale de la solution ainsi que la stabilité de la solution de l'équation des ondes non-linéaire.

Ce mémoire se décompose en quatre chapitres partagés de la façon suivante :

- ✓ Dans le premier chapitre nous rappelons les principaux notions qui nous aurons besoins, commençons par Quelque espace fonctionnelle , Finalement nous présentons les inégalités intégrales nécessaires qui sont utilisées dans ce mémoire et aussi nous citons quelques théorèmes utiles .

- ✓ Dans le deuxième chapitre, on a étudié l'existence globale et stabilité de la solution pour l'équation de chaleur.

- ✓ Dans le troisième chapitre, où on étudier l'existence globale et stabilité de la solution pour l'équation des ondes .
- ✓ On termine ce travail par le quatrième chapitre, où on étudier l'existence globale et stabilité de la solution pour l'équation de Petrovsky .

Chapitre 1

Préliminaires et notions de base

Dans ce chapitre, nous exposerons quelques définitions essentielles, des théories essentielles et des inégalités qui nous seront utiles et les utiliserons dans ce mémoire.

1.1 Quelque espace fonctionnelle

Espace de Lebesgue : (voir[1, 6, 10]) soit $1 \leq p \leq +\infty$ on appelle espace de Lebesgue noté par $L^p(\Omega)$ et définie par :

$$\begin{cases} L^P(\Omega) := \{ \ f : \Omega \to \mathbb{R} \ \ mesurable / \displaystyle\int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty \} \ , \qquad si \ 1 \leq p < \infty, \\ \\ L^\infty(\Omega) := \{ \ f : \Omega \to \mathbb{R} \ \ mesurable / \exists c > 0 : Sup_{x\in\Omega} |f(x)| \leq c \} \ , \qquad si \ p = \infty. \end{cases}$$

muni de la norme :

$$\begin{cases} \|u\|_p = (\displaystyle\int_\Omega |f(x)|^p dx)^{1/p} \qquad\qquad 1 \leq p < \infty, \\ \\ \|u\|_\infty = \sup ess_{x\in\Omega} |f(x)| \qquad\qquad p = \infty. \end{cases}$$

Corollaire 1.1.1. *Pour p=2, l'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert.*

Espace de Sobolev : (voir[1, 6, 10]) soit $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leqslant p \leqslant +\infty$.On définit l'espace de Sobolev , noté par $W^{k,p}(\Omega)$, par :

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n) \in \mathbb{N}^n, 0 \leqslant |\alpha| \leqslant k\}.$$

Dans le cas p=2 , on note $W^{k,2}(\Omega)$ par $H^k(\Omega)$ est un espace de Hilbert .
cas particulier :

1) k=1 et p=2, $H^1(\Omega)$ définie par :

$$H^1(\Omega) = \left\{ \ u \in L^2(\Omega)/\nabla u \in L^2(\Omega); \forall i \in \{1,2,....,n\} \right\} ,$$

muni du produit scalaire :

$$< u, v >= \int_\Omega u(x)v(x)dx + \int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)dx$$

et la norme :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} =\| u \|_2 + \| \nabla u \|_2$$

2) k=2 et p=2 $H^2(\Omega)$définie par :

$$H^2(\Omega) = \{ \ u \in L^2(\Omega) \ : \ \nabla u \in L^2(\Omega) \ \ et \ \ \Delta u \in L^2(\Omega)\}$$

Remarque 1.1.1. *$H_0^1(\Omega)$ est sous-espace de $H^1(\Omega)$ et qui nous sera très utile pour les problèmes avec **conditions aux limites de Dirichlet**.*

$$H_0^1(\Omega) = \{ \ u \in H^1/u = 0 \ \ sur \ \ \partial\Omega\}$$

et $H_0^1(\Omega)$ est l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$
l'igalité $u = 0$ sur $\partial\Omega$ est au sens des traces pour plus de détaille consulté [1, 6, 10]

On donne quelques injection des espaces de Sobolev connue

Théorème 1.1.1. *(voir[1, 6, 10])(Rellich-Kondrachov) soit Ω un ouvert borné de $I\!R^n (n \in I\!N^*)$ de classe C^1 on a*

1. si $p < n$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, p^*[$ ou$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p^*} - \frac{1}{n}$.

2. si p=n alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ $\forall q \in [1, +\infty[$.

3. si $p > n$ alors $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$.
avec injection compactes.

Théorème 1.1.2. *(Rellich) soit Ω un ouvert borné de $I\!R^n$ $(n \geq 1)$ et $1 \leq p \leq +\infty$, tout partie bornée de $W_0^p(\Omega)$ est relativement compacte dans $L^p(\Omega)$ .Ceci revient à dire que de tout suit bornée de $W_0^1(\Omega)$ on peut extraire une sous-suite qui converge dans $L^p(\Omega)$.*

Avant de conclure cette section on rappel un résultat de régularité qui sera constamment utilisé dans les chapitre qui suivent

Théorème 1.1.3. *Soient $\Omega \subset I\!R^n$ un ouvert borné de classe C^{m+2}, soit $u \in H_0^1(\Omega)$ telque $-\Delta u + u = f$. Alors si $f \in H^m(\Omega)$ donc $u \in H^{m+2}(\Omega)$ et on a*

$$\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq C\|f\|_{H^m(\Omega)}$$

En particulier si $m > \frac{n}{2}$, alors $u \in C^2(\overline{\Omega})$

1.2 Quelques inégalités algébriques et fonctionnelle

Inégalité de Young :(voir[9, 11]) Soient p,q des nombres réels strictement positifs liés par la relation $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ alors

$$\forall (a,b)\in \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+ \qquad ab\leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}.$$

Qu'on l'utilise aussi parfois sous sa forme modifier donnée par. pour tout $\epsilon>0$ et tout $(a,b)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$ on a

$$ab\leq \epsilon a^p+C(\epsilon)b^q. \tag{1.1}$$

Preuve 1.1. *Soit*$(a,b)\in \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$
on $\quad ab\leq\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}.$

$$\begin{aligned} ab &\leq \frac{(a\lambda)^p}{p}+\frac{1}{q}(\frac{b}{\lambda})^q\\ &\leq \frac{\lambda^p a^p}{p}+\frac{b^q}{q\lambda^q}. \end{aligned}$$

Donc l'inégalité (1.1) s'obtient on posons $\lambda=(p\epsilon)^{\frac{1}{p}}$ *et* $C(\epsilon)=\frac{1}{q(p\epsilon)^{q-1}}$

Inégalité de Hölder :(voir[1]) Soient $p,q\in\mathbb{R}_+$ et $f\in L^p(\Omega)$, $g\in L^q(\Omega)$ avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Alors on a

$$\int_\Omega fg\leq \| f\|_{L^p(\Omega)}\| g\|_{L^q}(\Omega) \tag{1.2}$$

Dans le cas $p=q=2$, l'inégalité suscité s'appel l'inégalité de Cauchy-Schwarz
Inégalité de Poincaré :(voir[1, 6, 10]) Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, il existe une constante C (dépendant de Ω) telle que :

$$\| u\|_2\leq C\|\nabla u\|_2, \qquad \forall u\in H_0^1(\Omega). \tag{1.3}$$

1.3 Rappels sur les opérateurs :

Opérateur linéaire continu : Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces normés.

Définition 1.3.1. *L'opérateur linéaire A est continu en $x_0\in E$ si :*

$$\forall\varepsilon>0,\exists\theta>0,\forall x\in E,\|x-x_0\|_E<\theta\Rightarrow\|Ax-Ax_0\|_F<\varepsilon.$$

Opérateur linéaire borné :

Définition 1.3.2. *on considère deux espaces de Hilbert H_1 et H_2 dont les normes et produits scalaires sont notés $\| \cdot \|_{H_1}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{H_1}, \| \cdot \|_{H_2}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{H_2}$, .*
Soit $D(A)$ un sous-espace vectoriel de H_1 et A une application (un opérateur) linéaire de $D(A)$ dans H_2. On dit que A est un opérateur borné de H^1 dans H^2 si $D(A) = H^1$ et s'il existe C tel que :

$$\|Au\|_{H^2} \leq C\|u\|_{H^1}, \quad \forall u \in H^1.$$

On pose alors :

$$\|A\| = \sup_{u \in H^1, u \neq 0} \frac{\|Au\|_{H^2}}{\|u\|_{H^1}}.$$

Si $D(A) \neq H_1$ et s'il existe une constante C telle que :

$$\|Au\|_{H^2} \leq C\|u\|_{H_1}, \quad \forall u \in D(A).$$

Alors l'opérateur A se prolonge en un opérateur borné de $D(A)$ dans H^2, où H^1 désigne l'adhérence de $D(A)$ dans H^1.

Remarque 1.1. *Tout opérateur borné est fermé.*

Définition 1.3.3. *L'opérateur linéaire $A \in L(E, F)$ est borné s'il existe $M > 0$, tel que :*

$$||Ax||_F \leq M||x||_E, \quad \textit{pour tout } x \in E.$$

Théorème 1.3.1. *Soient E, F deux espaces Banach, A un opérateur linéaire. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) L'opérateur A est continu sur E.

(2) L'opérateur A est continu en 0.

(3) Il existe une constante $C > 0$ telle que $\|Ax\|_F \leq C\|x\|_E$ pour tout $x \in E$.

(4) A est Lipschitzienne.

(5) A est borné sur la boule unité $\overline{B}(0, 1)$ de E.

Opérateur linéaire non borné :(voir[9, 4, 8]) Soient E, F deux espaces Banach.
On dit que A est un opérateur non borné de E dans F toute application linéaire$A$:

$D(A) \subset E \longrightarrow F$ définie sur un sous espace vectoriel $D(A) \subset E$ à valeur dans F.D(A) est le domaine de A .
On dit que A est borné s'il existe une constant $C \geq 0$ telle que

$$\|Au\| \leq C\|u\|$$

Opérateur monotone :(voir [14, 7, 8])
A un opérateur dit monotone si

$$\forall x_1, x_2 \in D(A) \qquad < Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2 >\geq 0.$$

Soit $A : D(A) \subset H \to H$ un opérateur linéaire non borné ; A est dit monotone si (-A) est dissipatif c'est-a-dire :

$$\forall v \in D(A) \qquad < Av, v >\leq 0$$

de plus si (-A) est m-dissipatif donc A est **maximal monotone**.
Opérateur fermé : Un opérateur (A,D(A)) linéaire non borné dons X, est fermé si son graphe $G(A) = \{\ (x, Ax)/x \in D(A)\}$ est fermé dans $X \times X$.
Opérateur compact : Soit A un opérateur linéaire d'un espace normé E dans un espace normé F,on dit que A est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné G dans E à un ensemble relativement compact A(G) dans F.Autrement dit,la fermeture$A(\bar{G})$ est compacte.

1.4 Les méthodes de l'éxistence globale

Représentation de Riesz : Soit H' dual topologique de H et $a \in H$ on note $\phi_a\ : x \in H \to < a, x > \in \mathbb{K}$ alors $\phi\ : a \in H \to \phi_a \in H'$ est bien définie et c' est un isomorphisme de$H\ \ sur\ \ H^{'}$.

Théorème de Lax-Milgram :

Définition 1.4.1. *On dite qu' une forme sesquilinéaire* $a(u, v) : H \times H \longrightarrow \mathbb{C}$ *est :*

1. ***Continue** s'il existe une constante* C *telle que*

$$|a(u, v)| \leq C \parallel u \parallel_H \parallel v \parallel_H \qquad \forall u, v \in H \times H.$$

2. ***Coercive** s'il existe une constante* $\alpha > 0$ *telle que*

$$a(v, v) \geq \alpha \parallel v \parallel_H^2,\ \forall v \in H.$$

Théorème 1.4.1. *(voir[9]) Soit $a(u,v)$ une forme sesquilinéaire, continue et coercive. Alors, pour tout $\varphi \in H'$ il existe unique $u \in H$ telle que*

$$a(u,v) = \varphi(v), \quad \forall v \in H.$$

Exemple 1.1. *L'équation de Laplace*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & sur \quad \Omega, \\ u = 0 & sur \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.4}$$

Avec $\Omega \subset I\!R^n$ un ouvert borné de classe C^2, $f \in L^2(\Omega)$.
$\mathcal{P}$: De chercher une solution au système (1.4) toute en respectons la regularité de u. On procède comme suit, multiplions Eq.$(1.4)_1$ par $v \in H_0^1(\Omega)$ et intégrant sur Ω et de la formule de Green

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_\Omega fv, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{1.5}$$

Posons

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v \;\; et \;\; l(v) = \int_\Omega fvdx$$

application de Théorème : *Soit* $a(u,v) = \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx$ *et* $l(v) = \int_\Omega fvdx$
$f \in L^2(\Omega)$
on

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &= |\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx| \\ &\leq \int_\Omega |\nabla u \cdot \nabla v| dx \\ &\leq \|\nabla u\|_2 \|\nabla v\|_2 \\ &\leq \|\nabla u\|_2^2 \|\nabla v\|_2^2 \qquad\qquad M = 1 \end{aligned}$$

donc a(u,v)est continue

on a

$$\begin{aligned}
a(u,u) &= \int_\Omega \nabla u \nabla u dx \quad = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \\
&= \| \nabla u\|_2^2 = \frac{1}{2}\| \nabla u\|_2^2 + \frac{1}{2}\| \nabla u\|_2^2 \\
&\geq \frac{1}{2}\frac{\| u\|_2^2}{(C_\Omega)^2} + \frac{1}{2}\| \nabla u\|_2^2 \\
\textit{on pose que } C &= \min\left\{\frac{1}{(C_\Omega)^2}, \frac{1}{2}\right\} \quad \textit{donc} \\
a(u,u) &\geq C\| u\|_2^2 + C\| \nabla u\|_2^2 \\
&\geq C(\| u\|_2^2 + \| \nabla u\|_2^2) = C\| u\|_V^2
\end{aligned}$$

donc

$$a(u,u) \geq C\| u\|_V^2$$

alors a est coercive
soient $v_1, v_2 \in V \quad \alpha_1, \alpha_2 \in I\!R$

$$\begin{aligned}
l(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) &= \int \Omega f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) \\
&= \alpha_1 \int \Omega f v_1 + \alpha_2 \int \Omega f v_2 \\
&= \alpha_1 l(v_1) + \alpha_2 l(v_2)
\end{aligned}$$

donc l est antilinéaire

$$\begin{aligned}
\exists \ell \geq 0 \qquad |l(v)| \qquad &= |\int_\Omega f v dx| \\
&\leq \int_\Omega |f||v| dx \\
&\leq \sup|f| \cdot \int_\Omega |v| dx \\
&\leq C \cdot \textstyle\int_\Omega 1|v|dx \\
&\leq (C|\Omega|)^{1/2} \textstyle\int_\Omega v^2 dx \\
&\leq \ell\| v\|_2^2
\end{aligned}$$

donc l est continue
alors on a $a(u,v)$ *forme sesquilinéaire continu et coercitive ,et* $l(v)$ *forme antilinéaire et continue par 1.4.1 il existe une unique solution de problème*

$$a(u,v) = l(v)$$

1.5 Théorie des semi-groupes

C_0**-semi-groupe :**(voir[14, 7, 10]) On appelle C_0-semi-groupe toute famille d'opérateurs linéaires bornés $(T(t))_{t\geq 0}$ vérifiant les axiomes suivants :

1. $T(0) = Id_X$
2. $T(t+s) = T(t)T(s)$

Remarque 1.5.1. $(T(t) \geq 0)$ *est un* C_0*-semi-groupe est appelé aussi un semi-groupe fortement continu si* $\lim\limits_{t\longrightarrow 0} T(t)x = x, \forall x \in X.$

Théorème 1.5.1. *(voir[14, 7, 10]) Soit* $(T(t))_{t\geq 0}$ *un* C_0*-semi groupe. Il existe des constantes* $w \geq 0$ *et* $M \geq 1$ *telle que*

$$\| T(t) \| \leq M \exp(wt) \qquad \textit{pour tout} \quad 0 \leq t < \infty \ .$$

Corollaire 1.5.1. *(voir[14, 7, 10]) Si* $(T(t))_{t\geq 0}$ *est un* C_0*-semi-groupe sur* X *alors, pour tout* $x \in X$*, l'application*

$$t \longmapsto T(t)x$$

est continue de $[0, +\infty)$ *dans* X *.*

Preuve 1.2. ***(i)*** *Soient* $t \geq 0$ *et* $h \geq 0$*, nous avons*

$$\| T(t+h)x - T(t)x \| \leq \| T(t) \| \| T(h)x - x \| \leq M \exp(wt) \| T(h)x - x \| \ .$$

Donc

$$\lim_{h\longrightarrow 0} \| T(h)x - x \| = 0.$$

(ii) *Soient* $t > 0$ *et* $t \geq h \geq 0$*, nous avons*

$$\| T(t-h)x - T(t)x \| \leq M \exp(w(t-h)) \| x - T(h)x \| \ .$$

On conclut avec ce qu'on a montré ***(i)****.*

Générateur infinitésimal(voir[14, 7, 10]) On appelle générateur infinitésimal du C_0-semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$, l'opérateur A défini sur l'ensemble

$$D(A) = \left\{ x \in X \setminus \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \ \textit{existe} \ \right\}$$

par :

$$Ax = \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t}, \ \forall x \in D(A).$$

Théorème 1.5.2. *(voir[14, 7, 10]) Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe sur X et $(A, D(A))$ son générateur infinitésimal. Les propriétés suivantes sont vérifiées.*

(i) *Pour $x \in X$, on a*

$$\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)xds = T(t)x.$$

(ii) *Pour tout $x \in X$ et tout $t > 0$, $\int_0^t T(s)xds \in D(A)$ et*

$$A\left(\int_0^t T(s)xds\right) = T(t)x - x.$$

(iii) *Si $x \in D(A)$ alors, $T(t)x \in D(A)$ et*

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax.$$

Preuve 1.3. ***(i)*** *Soit $x \in X$. Le résultat* ***(i)*** *découle de la continuité de $\mathbb{R}^+$ dans X de l'application*

$$t \longrightarrow T(t)x.$$

(ii) *En utilisant les propretés des semi-groupes, et le fait que $T(h) \in \mathcal{L}(X)$ pour $h > 0$, nous pouvons écrire*

$$\frac{T(h)-I}{h}\int_0^t T(s)xds = \frac{1}{h}\int_0^t (T(s+h)x - T(s)x)ds$$

$$= \frac{1}{h}\int_h^{t+h} T(s)xds - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)xds = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)xds - \frac{1}{h}\int_0^h T(s)xds.$$

En passant à la limite quand h tend vers zéro, nous obtenons

$$A\int_0^t T(s)xds = T(t)x - x.$$

(iii) *Soit $x \in D(A)$ et $h > 0$, on a :*

$$\frac{T(h)-I}{h}T(t)x = T(t)\frac{T(h)-I}{h}x.$$

En passant à la limite quand $h \longrightarrow 0$, nous obtenons :

$$AT(t)x = T(t)Ax = \frac{d^+}{dt}T(t)x.$$

Calculons $\dfrac{d^-}{dt}T(t)x - T(t)Ax$. *Nous avons*

$$\lim_{h\longrightarrow 0}\left(\frac{1}{h}(T(t)x - T(t-h)x) - T(t)Ax\right) = \lim_{h\longrightarrow 0}\left(T(t-h)\frac{T(h)x - x}{h} - T(t)Ax\right)$$
$$= \lim_{h\longrightarrow 0}\left(T(t-h)\left(\frac{T(h)x-x}{h} - Ax\right) + \left(T(t-h) - T(t)\right)Ax\right).$$

et $\| T(t-h) \|$ *est uniformément borné pour* $h \in [0,t]$. *Par passage à la limite dans l'égalité précédente, nous obtenons*

$$\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{1}{h}\left(T(t)x - T(t-h)x\right) - T(t)Ax = 0,$$

c, à, d : $\dfrac{d^-}{dt}T(t)x - T(t)Ax = 0.$

Semi-groupe de contractions $(T(t))_{t\geq 0}$ est un semi-groupe de contraction si :

$$\| T(t) \| \leq 1, \quad \textit{pour tout } t \geq 0.$$

Théorème 1.5.3. ***(Lumer-Phillips)***
soit (A,D(A)) un opérateur linéaire non borné de domaine dense dans X.si A est fermé et si A m-dissipatif alors A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction sur X.

Théorème 1.5.4. *(voir[14, 7, 10])* ***(Hille-Yosida)*** *Un opérateur linéaire non borné* $(A, D(A))$ *est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction dans* X*, si et seulement, si :*

1. *A est fermé ;*
2. $D(A)$ *est dense dans* X *;*
3. $\forall\lambda > 0, (\lambda I - A)^{-1}$ *existe et borné dans* X*, avec :* $\| (\lambda I - A)^{-1} \| \leq \dfrac{1}{\lambda}$.

En particulier, $(A, D(A))$ *est un générateur infinitésimal d'un semi groupe de contraction, si et seulement, si A est m-dissipatif et de domaine dense dans X, (voir[14, 7, 10]).*

Problème de Cauchy et Semi-groupe(voir[14, 7, 10])
On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t), & \forall t \geq 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{1.6}$$

avec

$$u \in C([0,\infty); D(A)) \cap C^1([0,\infty); X) \text{ et } u_0 \in D(A).$$

Théorème 1.5.5. *(voir[14, 7, 10]) Soit $(A, D(A))$ un opérateur m-dissipatif de domaine dense dans X et soit $(S(t))_{t\geq 0}$ le semi-groupe sur X engendré par A. Si $x_0 \in D(A)$ alors la solution $x(t) = S(t)x_0$ du problème 1.5*

Théorème 1.5.6. *Soit $(A, D(A))$ le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ sur X. Alors, pour tout $u_0 \in D(A)$, $u(t) = T(t)u_0$ est l'unique solution du problème 1.5.*

1.6 Théorie spectrale :

Spectre d'un opérateur : Soit E un espace vectoriel normé sur le corps $\mathbb{K}$ = ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Définition 1.6.1. *Le spectre d'un opérateur A défini sur E est :*

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid l'\text{opérateur } A - \lambda I \text{ n'est pas inversible}\}. \tag{1.7}$$

Définition 1.6.2. *Soient $A : E \to E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Si $A - \lambda I$ n'est pas injectif, alors on dit que λ est une valeur propre de A.*

Spectre des opérateurs linéaires bornés : Soit H un espace de Hilbert et $A \in L(H)$.

Définition 1.6.3. ***(Ensemble résolvant).***
Soit $A \in L(H)$, On dit que $\lambda \in \mathbb{C}$ appartient à l'ensemble résolvant de A si $A - \lambda I$ est une bijection de H dans H, et que $(A - \lambda I)^{-1} \in L(H)$ L'ensemble résolvant de A est noté $\rho(A)$, c'est-à-dire :

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}, A - \lambda I \text{ inversible}\}$$

Définition 1.6.4. ***(spectre d'un opérateur) :***
Soient $A \in L(H)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on appelle spectre de l'opérateur A le sous-ensemble défini par :

$$\begin{aligned}\sigma(A) &:= \{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda I) \text{ n'est pas inversible}\} \\ &:= \mathbb{C} \backslash \rho(A)\end{aligned}$$

Un élément $\sigma(A)$ est une valeur spectrale de A.

Définition 1.6.5. ***(Valeurs propres et vecteurs propres d'un opérateur) :***
Soit $A \in L(H)$, le nombre complexe λ est dit valeur propre de A s'il existe un vecteur x dans $H - \{0_H\}$ (appelé vecteur propre associé à λ), tel que :

$$(A - \lambda I)x = 0$$
$$Ax = \lambda x$$

Définition 1.6.6. ***(La résolvante) :***
Soit $A \in L(H)$, pour tout $\lambda \in \rho(A)$, on définit la résolvante de A au point λ par :

$$R_\lambda(A) = (\lambda I - A)^{-1}$$

La résolvante $R_\lambda(A)$ est simplement notée R_λ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur A.

Remarque 1.6.1.
1. $\sigma(A) \cup \rho(A) = \mathbb{C}$.
2. $\sigma(A) \cap \rho(A) = \emptyset$.

Définition 1.6.7. ***(Ponctuel spectre)*** *On appelle spectre ponctuel de A L'ensemble des valeurs propres de A, noté $\sigma_p(A)$ tel que :*

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} / \mid A - \lambda I \text{ non injectif}\}. \tag{1.8}$$

Définition 1.6.8. ***(Spectre continu)*** *On appelle spectre continu de A et on note par $\sigma_c(A)$, l'ensemble*

$$\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} / \mid A - \lambda I \text{ injective et } Im(A - \lambda I) \subsetneq \overline{Im(A - \lambda I)} = \mathcal{H}\}$$

Définition 1.6.9. ***(Spectre résiduel)*** *On appelle spectre résiduel de A et on note par $\sigma_c(A)$, l'ensemble*

$$\sigma_c(A) = \{\lambda \in \sigma(A) \mid A - \lambda I \text{ injective et } \overline{Im(A - \lambda I)} \neq \mathcal{H}\}$$

Définition 1.6.10. *Le spectre $\sigma_c(A)$ est le réunion disjointe de trois ensembles :*

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)$$

Chapitre 2

Existence et stabilisation de l'équation de chaleur :

Dans ce chapitre on va considérer l'équation de la chaleur dont l'existence et le comportement asymptotic sont bien connu dans la littérature et elle est donnée par

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & Sur \quad (0,+\infty)\times\Omega, \\ u = 0 & Sur \quad (0,+\infty)\times\partial\Omega, \\ u(x,0) = u_0(x) & Sur \quad \Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

Où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert borné au moins de classe C^2. On commence à prime abord par un lemme qui révèle l'énergie associe au système (2.1)

Lemme 1. *Supposons que u atteint la régularité requise pour le système (2.1), alors la formule de son énergie est donnée par*

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \parallel u \parallel_2^2 . \tag{2.2}$$

De plus

$$\mathcal{E}'(t) = - \parallel \nabla u \parallel_2^2 . \tag{2.3}$$

Démonstration. On prend le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$ l'équation $(2.1)_1$ par $\overline{u}$ on aura

$$\int_\Omega u_t\overline{u} - \int_\Omega \Delta u\overline{u} = 0. \tag{2.4}$$

Par une application des formules de Green dans le terme de droite est la différentiation du produit scalaire sur le terme de gauche on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u|^2 + \int_\Omega \nabla u\nabla\overline{u} = 0. \tag{2.5}$$

De léquation (2.5) on obtient

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \parallel u \parallel_2^2, \text{ et } \mathcal{E}'(t) = - \parallel \nabla u \parallel_2^2 .$$

Ceci achève la démonstration de notre lemme. □

2.1 L'existence globale

Dans cette partie on a pour objective d'étudier l'existence des solutions du système (2.1), est ceci sera une conséquence de la théorie des semi groupe, est pour y-arrivez on va préciser l'espace de Hilbert dans lequel on travaille.
On prend $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$ muni de son produit scalaire $< u, v >_{\mathcal{H}} = \int_\Omega u\overline{v}dx$, l'éspace $\mathcal{H}$ s'appelle l'éspace de l'énergie.
Posons $\mathcal{A}u = \Delta u$, et on prend comme domaine

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ u \in \mathcal{H} | u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \right\} . \tag{2.6}$$

Avec les notations précédentes on peut récrire le système (2.1) en un problème de Cauchy abstrait comme suit

$$\begin{cases} u_t = \mathcal{A}u, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{2.7}$$

On va énoncer le théorème d'existence suivant

Théorème 2.1.1. *(Existence et unicitè)*

1. *Supposons que $u_0 \in \mathcal{H}$, alors système (2.1) admet une unique solution*
$$u \in C^0(\mathbb{R}^+; \mathcal{H}).$$
2. *Supposons que $u_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, alors système (2.1) admet une unique solution*
$$U \in C^0(\mathbb{R}^+; \mathcal{D}(\mathcal{A})) \cap C^1(\mathbb{R}^+; \mathcal{H}).$$

Remarque 2.1.1. *On pourrai procéder à un effet de régularisation de notre solutions par prendre des données initial mieux régulière.*

Démonstration. Pour prouver le théorème précédent on va utiliser un équivalent du théorème de (Hille-Yosida) qui est (Lummer-Philips) est qui consiste a prouvé que $\mathcal{A}$ est maximal et monotone, la preuve se divise en trois partie
Partie 1 :Monotonicité Cette partie montre que $\Re e \langle \mathcal{A}u, u \rangle_{\mathcal{H}} \leq 0$, et don on a

$$\langle \mathcal{A}u, u \rangle_{\mathcal{H}} = \int_\Omega \Delta u \overline{u} dx. \tag{2.8}$$

On applique la formule de Green dans le membre de droit et on prend la partie réel de l'équation (2.8) pour aboutir à

$$\Re e \langle \mathcal{A}u, u \rangle_{\mathcal{H}} = \mathcal{E}'(t) = - \parallel \nabla u \parallel^2 \leq 0.$$

Ce qui achève la première partie.

<u>Partie 2 : Maximalité</u> Cette partie a pour objectif d'étudie l'équation suivant

$$(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{A})u = f. \tag{2.9}$$

Avec $\lambda \in \mathbb{R}$, $u \in D(\mathcal{A})$ et $f \in \mathcal{H}$, pour le faire on prend $w \in H_0^1(\Omega)$ et multiplions l'équation (2.9) par $\overline{w}$, intégrer sur Ω et obtenir

$$\lambda \int_\Omega u\overline{w} - \int_\Omega \Delta u \overline{w} = \int_\Omega f\overline{w}. \tag{2.10}$$

Par la formule de Green on obtient

$$\lambda \int_\Omega u\overline{w} + \int_\Omega \nabla u \nabla \bar{w} = \int_\Omega f\overline{w}. \tag{2.11}$$

On peut récrire l'équation (2.11) de la manière suivante

$$\mathcal{B}(u, w) = \mathcal{L}(w), \tag{2.12}$$

avec $\mathcal{B} : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{C}$ est une forme sesquilinéaire donnée par

$$\mathcal{B}(u, w) = \lambda \int_\Omega u\overline{w} - \int_\Omega \Delta u \overline{w},$$

et $\mathcal{L} : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{C}$ est une forme antilinéaire donnée par

$$\mathcal{L}(w) = \int_\Omega f\overline{w}.$$

Pour pouvoir appliquer le lemme de Lax-Milgram il reste a montrer que $\mathcal{B}(u, w)$ est coercive.

<u>Coercivité de $\mathcal{B}$</u> Soit $u \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} B(u, u) &= \lambda \int_\Omega u\bar{u} + \int_\Omega \nabla u \nabla \bar{u} \\ &= \lambda \parallel u \parallel^2 + \parallel \nabla u \parallel^2 \geq C(\parallel u \parallel_2^2 + \parallel \nabla u \parallel_2^2) \\ &\geq C \parallel u \parallel_{H_0^1}^2 . \end{aligned} \tag{2.13}$$

Avec $C = \min\{1, \lambda\}$.

Maintenant on fait appelle au lemme (Lax-Milgram) pour affirmer l'existence de $u \in H_0^1(\Omega)$ et par la régularité des équation elliptique Théorème 1.1.3 on obtient $u \in D(\mathcal{A})$, et ceci achève la maximalité de $\mathcal{A}$.

<u>Partie 3 : Existence Globale</u> Le Théorème 2.1.1 est la conséquence de la combinaison des deux précédentes parties et l'application du théorème de (Lummer-Philips), la preuve est achevée. $\square$

2.2 Stabilité :

Après avoir traiter la question de l'existence il devin naturel de se poser la question suivant :
La solution est-elle stable ? (au sens préciser dans le chapitre 1) est si c'est le cas de quelle manière tendra-t-elle vers son point d'équilibre.

2.2.1 Stabilité forte :

On commence par une réponse positive de la question précédente et on établie le théorème suivant

Théorème 2.2.1. *Le C_0-semigroup $e^{t\mathcal{A}}$ est fortement stable dans $\mathcal{H}$; i.e, pour tout $u_0 \in \mathcal{H}$, la solution du système (2.1) satisfait*

$$\lim_{t\to\infty} \|e^{t\mathcal{A}}u_0\|_{\mathcal{H}} = 0.$$

Pour prouver que le semi-groupe $(e^{t\mathcal{A}})_{t\geq 0}$ est fortement asymptotiquement stable, on va faire apple au théorème de Arendt-Batty[2] and Lyubich-Vu[12] pour les espaces de Hilbert . Le théorème 2.2.1 se déduit du lemme suivant

Lemme 2. *Soit $\mathcal{A}$ l'opérateur définie précédemment, alors*

1. *$\mathcal{A}$ n'a pas de valeurs propres dans $i\mathbb{R}$*
2. *$i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$*
3. *$\mathcal{A}$ est compact*

Démonstration. La partie (3) du lemme se déduit des injection compact de Sobolev donc il reste a montrer les deux première partie.
Montrons que $\mathcal{A}$ n'a pas de valeurs propres dans $i\mathbb{R}$, on va argumenter par absurde. Supposons que ce dernier admet un élément dans $i\mathbb{R}$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$, par définition d'une valeurs propre on a

$$i\lambda u - Au = 0 \tag{2.14}$$

Avec $0 \neq u \in D(\mathcal{A})$. On prend la partie réel du produit scalaire dans $\mathcal{H}$ de l'équation (2.14) par u on aura

$$0 = \Re e \left\langle i\lambda u - Au, u\right\rangle_{\mathcal{H}} = \Re e(i\lambda\|u\|_2^2 - \langle Au, u\rangle_{\mathcal{H}}) = \|\nabla u\|_2^2 \tag{2.15}$$

On fait appel à l'inégalité de Poincaré(1.3) pour aboutir a $u = 0$ dans $H_0^1(\Omega)$ ce qui est absurde a l'hypothèse de départ.
Montrer que $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$ revient à étudier l'équation suivant

$$(i\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A})u = f. \tag{2.16}$$

Avec $\lambda \in \mathbb{R}$, $u \in D(\mathcal{A})$ et $f \in \mathcal{H}$, pour le faire on prend $w \in H_0^1(\Omega)$ et multiplions l'équation (2.9) par $\overline{w}$, intégrer sur Ω et obtenir

$$i\lambda \int_\Omega u\overline{w} - \int_\Omega \Delta u\overline{w} = \int_\Omega f\overline{w}. \tag{2.17}$$

Par la formule de Green on obtient

$$i\lambda \int_\Omega u\overline{w} + \int_\Omega \nabla u \nabla \bar{w} = \int_\Omega f\overline{w}. \tag{2.18}$$

On peut réécrire l'équation (2.18) de la manière suivante

$$\mathcal{B}(u, w) = \mathcal{L}(w), \tag{2.19}$$

avec $\mathcal{B} : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{C}$ est une forme sesquilinéaire donnée par

$$\mathcal{B}(u, w) = i\lambda \int_\Omega u\overline{w} - \int_\Omega \Delta u\overline{w},$$

et $\mathcal{L} : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{C}$ est une forme antilinéaire donnée par

$$\mathcal{L}(w) = \int_\Omega f\overline{w}.$$

Pour pouvoir appliquer le lemme de Lax-Milgram il reste a montrer que $\mathcal{B}(u, w)$ est coercive.

<u>Coercivité de $\mathcal{B}$</u> Soit $u \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} \Re e B(u, u) &= \Re e \left(i\lambda \int_\Omega u\bar{u} + \int_\Omega \nabla u \nabla \bar{u} \right) \\ &= \| \nabla u \|^2 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Pour les mêmes argument, dans la partis de l'existence, on peut garantir l'existence de $u \in H_0^1(\Omega)$ et par la régularité des équation elliptique Théorème 1.1.3 on obtient $u \in D(\mathcal{A})$, et ceci achève la preuve de lemme.

□

Démonstration. La partie (1) du lemme 2 garantie la première condition du théorème 2.2.1 donc reste a déduire le deuxième, mais on a $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$ ce là veut dire que $i\mathbb{R} \cap \sigma(\mathcal{A}) = \emptyset$ et donc ce dernier est dénombrable. Tout les condition du théorème précité son vérifier, ce qui fait fin à la démonstration. □

2.2.2 Stabilité exponentielle

Cette partie porte réponse à la deuxième question posée à l'introduction de ce chapitre et donne le théorème suivant

Théorème 2.2.2. *Le C_0-semi-groupe de contractions générer par $\mathcal{A}$ est exponentiellement stable.*

Démonstration. Pour démontrer le théorème 2.2.2 il faut remplir les deux conditions du théorème **??** mais (**??**) elle est remplie par le lemme 2 donc il reste a prouvé (**??**) qui n'est autre que l'étude de l'équation de la résolvante. Soit $f \in \mathcal{H}$, il existe $u \in D(\mathcal{A})$ tel que

$$(i\lambda I - A)u = f. \tag{2.21}$$

On prend la partie réel du produit scalaire dans $\mathcal{H}$ de l'équation (2.21) par u et par l'intermédiaire de l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_2^2 = \Re e \left\langle i\lambda u - Au, u \right\rangle_{\mathcal{H}} &= \Re e \left\langle f, u \right\rangle_{\mathcal{H}} \\ &\leq \|f\|_{\mathcal{H}} \|u\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Par l'intermédiaire de l'inégalité de Poincaré on obtient

$$\|u\|_{\mathcal{H}} \leq C\|f\|_{\mathcal{H}}. \tag{2.23}$$

Avec C une constant générique. l'équation (2.21) est équivalente à

$$(i\lambda I - A)^{-1} f = u. \tag{2.24}$$

est par suite l'équation prend la forme

$$\|(i\lambda I - A)^{-1} f\|_{\mathcal{H}} \leq C\|f\|_{\mathcal{H}}. \tag{2.25}$$

Cette dernière inégalité remplie la condition (**??**) est le théorème s'achève. □

Chapitre 3

Existence et stabilisation de l'équation des ondes :

Dans ce chapitre on va considérer l'équation des Ondes dont l'existence et le comportement asymptotic sont bien connu dans la littérature et elle est donnée par

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + u_t = 0 & Sur \quad (0, +\infty) \times \Omega, \\ u = 0 & Sur \quad (0, +\infty) \times \partial\Omega, \\ u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x) & Sur \quad \Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

Où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert borné au moins de classe C^2. On commencé à prime abord par un lemme qui révèle l'énergie associée au système (3.1)

Lemme 3. *Supposons que u atteint la régularité requise pour le système (3.1), alors la formule de son énergie est donnée par*

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \parallel u_t \parallel_2^2 + \frac{1}{2} \parallel \nabla u \parallel_2^2 \tag{3.2}$$

De plus

$$\mathcal{E}'(t) = - \parallel u_t \parallel_2^2 . \tag{3.3}$$

Démonstration. On prend le produit scalaire dans $L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ l'équation $(3.1)_1$ par $\overline{u_t}$ on aura

$$\int_\Omega u_{tt}\overline{u_t} - \int_\Omega \Delta u \overline{u_t} - \int_\Omega u_t \overline{u_t} = 0 \tag{3.4}$$

Par une application des formules de Green dans le terme de droite est la différentiation du produit scalaire sur le terme de gauche on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\int_\Omega |u_t|^2 + \int_\Omega \nabla u \nabla \overline{u}) + \int_\Omega |u_t|^2 = 0 \tag{3.5}$$

De léquation (3.5) on obtient

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}(\| u_t \|_2^2 + \| \nabla u \|) \text{ et } \mathcal{E}'(t) = - \| u_t \|_2^2 .$$

Ceci achève la démonstration de notre lemme. □

3.1 L'existence globale

Dans cette partie on a pour objective d'étudier l'existence des solutions du système (3.1), et ceci sera une conséquence de la théorie des semi groupes, est pour y-arrivez on va préciser l'espace de Hilbert dans lequel on travaille.
On prend $\mathcal{H} = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, muni de son produit scalaire pour $U = (u, v)^T \in \mathcal{H}$ et $\widetilde{U} = (\widetilde{u}, \widetilde{v})^T \in \mathcal{H}$

$$< U, \widetilde{U} >_{\mathcal{H}} = \int_\Omega \nabla u \nabla \overline{\widetilde{u}} dx + \int_\Omega v \overline{\widetilde{v}} dx.$$

l'éspace $\mathcal{H}$ s'appelle l'éspace de l'énergie.
On procède a un processus de réduction d'ordre on choisissons $v = u_t$, $X = (u, v)^T$ pour réécrire le système (3.1) en un problème de Cauchy abstrait comme suit

$$\begin{cases} X' = \mathcal{A}X, \\ X(0) = X_0. \end{cases} \tag{3.6}$$

Avec $X_0 = (u_0, u_1)$ et $\mathcal{A}$ est l'opérateur

$$\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}. \tag{3.7}$$

Définie par :

$$\mathcal{A}X = \begin{pmatrix} v \\ \Delta u - v \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

De domaine

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{ (u, v)^T \in \mathcal{H} \,\middle|\, \begin{array}{c} u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega); \\ v \in H_0^1(\Omega); \end{array} \right\}. \tag{3.9}$$

On va énoncer le théorème d'existence suivant

Théorème 3.1.1. *(Existence et unicité)*

1. *Supposons que $u_0 \in \mathcal{H}$, alors système (3.1) admet une unique solution*

$$u \in C^0(\mathbb{R}^+; \mathcal{H})$$

.

2. *Supposons que $u_0 \in H$, alors système (3.1) admet une unique solution*

$$U \in C^0(\mathbb{R}^+; \mathcal{D}(\mathcal{A})) \cap C^1(\mathbb{R}^+; \mathcal{H}).$$

Remarque 3.1.1. *On pourrai procéder à un effet de régularisation de notre solutions par prendre des données initial mieux régulière.*

Démonstration. Pour prouver le théorème précédent on va utiliser un équivalent du théorème de (Hille-Yosida) qui est (Lummer-Philips) est qui consiste a prouvé que $\mathcal{A}$ est maximal et monotone, la preuve se divise en trois partie

Partie 1 :Monotonicité Cette partie montre que $\Re e \left<\mathcal{A}U, U\right>_{\mathcal{H}} \leq 0$, et don on a

$$\left<\mathcal{A}U, U\right>_{\mathcal{H}} = \int_\Omega \nabla v \nabla \overline{u} dx + \int_\Omega (\Delta u - v)\overline{v} dx. \tag{3.10}$$

On applique la formule de Green dans le membre de droit et on prend la partie réel de l'équation (2.8) pour aboutir a

$$\Re e \left<\mathcal{A}U, U\right>_{\mathcal{H}} = \mathcal{E}'(t) = - \parallel v \parallel^2 \leq 0.$$

Ce qui achève la première partie.

Partie 2 : Maximalité Cette partie a pour objectif d'étudie l'équation suivant

$$(\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A})U = F \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda u - v = f_1 \\ \\ \lambda u - \Delta u + v = f_2 \end{cases} \qquad avec \;\; U = (u,v)^T \;\; etF = (f_1, f_2)^T \tag{3.11}$$

Avec $\lambda \in \mathbb{R}$, $U \in D(\mathcal{A})$ et $F \in \mathcal{H}$, pour le faire on prend $w \in H_0^1(\Omega)$ et multiplions l'équation $(3.11)_2$ par $\overline{w}$, intégrer sur Ω, la considération de $(3.11)_1$ et obtenir

$$(\lambda^2 + \lambda) \int_\Omega u\overline{w} - \int_\Omega \Delta u \overline{w} = \int_\Omega f_2 \overline{w} + (\lambda + 1) \int_\Omega f_1 \overline{w}. \tag{3.12}$$

Par la formule de Green on obtient

$$(\lambda^2 + \lambda) \int_\Omega u\overline{w} - \int_\Omega \nabla u \nabla \overline{w} = \int_\Omega f_2 \overline{w} + (\lambda + 1) \int_\Omega f_1 \overline{w}. \tag{3.13}$$

On peut réécrire l'équation (3.13) de la manière suivante

$$\mathcal{B}(u, w) = \mathcal{L}(w), \tag{3.14}$$

avec $\mathcal{B} : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{C}$ est une forme sesquilinéaire donnée par

$$\mathcal{B}(u, w) = (\lambda^2 + \lambda) \int_\Omega u\overline{w} - \int_\Omega \nabla u \nabla \overline{w},$$

et $\mathcal{L} : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{C}$ est une forme antilinéaire donnée par

$$\mathcal{L}(w) = (\lambda + 1) \int_\Omega f_1 \overline{w} + \int_\Omega f_2 \overline{w}.$$

Pour pouvoir appliquer le lemme de Lax-Milgram il reste a montrer que $\mathcal{B}(u, w)$ est coercive.
<u>Coercivité de $\mathcal{B}$</u> Soit $u \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} B(u,u) &= (\lambda^2 + \lambda) \int_\Omega u\bar{u} + \int_\Omega \nabla u \nabla \bar{u} \\ &= (\lambda^2 + \lambda) \int_\Omega |u|^2 + \int_\Omega |\nabla u|^2 \\ &= (\lambda^2 + \lambda)\|u\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2 \\ &\geq C(\|u\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2) \\ &\geq C\|u\|_{H_0^1} \end{aligned} \tag{3.15}$$

Avec $C = \min\{1, \lambda^2 + \lambda\}$.
Maintenant on fait appelle au lemme (Lax-Milgram) pour affirmer l'existence de $u \in H_0^1(\Omega)$ et par la régularité des équation elliptique Théorème 1.1.3 on obtient $u \in D(\mathcal{A})$, et ceci achève la maximalité de $\mathcal{A}$.
<u>Partie 3 : Existence Globale</u> Le théorème 3.1.1 est la conséquence de la combinaison des deux précédente parties et l'application du théorème de (Lummer-Philips), la preuve est achevé. □

3.2 Stabilité :

Après avoir traité la question de l'existence il devin naturel de se poser la question suivante :
La solution est-elle stable ? (au sens préciser dans le chapitre 1) est si c'est le cas de quelle manière tendra-t-elle vers son point d'équilibre.

3.2.1 Stabilité forte :

On commence par une réponse positive de la question précédente et on établie le théorème suivant

Théorème 3.2.1. *Le C_0-semigroup $e^{t\mathcal{A}}$ est fortement stable dans $\mathcal{H}$; i.e, pour tout $u_0 \in \mathcal{H}$, la solution du système (3.1) satisfait*

$$\lim_{t \to \infty} \|e^{t\mathcal{A}} u_0\|_{\mathcal{H}} = 0.$$

Pour prouver que le semi-groupe $(e^{t\mathcal{A}})_{t\geq 0}$ est fortement asymptotiquement stable, on va faire apple au théorème de Arendt-Batty[2] et Lyubich-Vu[12] pour les espaces de Hilbert . Le théorème 2.2.1 se déduit du lemme suivant

Lemme 4. *Soit $\mathcal{A}$ l'opérateur définie précédemment, alors*

1. *$\mathcal{A}$ n'a pas de valeurs propres dans $i\mathbb{R}$*
2. *$i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$*
3. *$\mathcal{A}$ est compact*

Démonstration. La partie 3 du lemme se déduit des injections compacts de Sobolev donc il reste à montrer les deux premières parties.
Montrons que $\mathcal{A}$ n'a pas de valeurs propres dans $i\mathbb{R}$, on va argumenter par absurde. Supposons que ce dernier admet un élément dans $i\mathbb{R}$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$, par définition d'une valeurs propre on a

$$i\lambda U - \mathcal{A}U = 0 \tag{3.16}$$

Ceci est équivalent à

$$\begin{cases} i\lambda u - v = 0, \\ i\lambda v - \Delta u + v = 0, \end{cases} \tag{3.17}$$

avec $0 \neq U \in D(\mathcal{A})$. On prend la partie réel du produit scalaire dans $\mathcal{H}$ de l'équation (3.16) par u on aura

$$0 = \Re e\, \langle i\lambda U - \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} = \Re e(i\lambda \|U\|_2^2 - \langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}}) = \|v\|_2^2 \tag{3.18}$$

donc $v = 0$.
De Eq.$(3.17)_2$ et l'inégalité de Poincaré pour aboutir à $u = 0$ dans $H_0^1(\Omega)$ d'où $U = 0$ ce qui est absurde a l'hypothèse de départ.
Montrer que $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$ revient à étudier l'équation suivant

$$(i\lambda \mathcal{I} - \mathcal{A})U = F. \tag{3.19}$$

Ceci est équivalent à

$$\begin{cases} i\lambda u - v = f_1 \\ i\lambda v - \Delta u + v = f_2 \end{cases} \tag{3.20}$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$, $U = (u, v)^T \in D(\mathcal{A})$ et $F = (f_1, f_2)^T \in \mathcal{H}^{\in}$, pour le faire on prend $w \in H_0^1(\Omega)$ et multiplions l'équation (3.20) par $\overline{w}$, intégrer sur Ω et de l'équation (3.20) on obtenir

$$-\lambda^2 \int_\Omega u\bar{w} - \int_\Omega \Delta u\bar{w} + i\lambda \int_\Omega u\bar{w} = \int_\Omega f_2\bar{w} + (i\lambda + 1) \int_\Omega f_1\bar{w}. \tag{3.21}$$

Par la formule de Green on obtient

$$-\lambda^2 \int_\Omega u\bar{w} + \int_\Omega \nabla u \nabla \bar{w} + i\lambda \int_\Omega u\bar{w} = \int_\Omega f_2 \bar{w} + (i\lambda + 1) \int_\Omega f_1 \bar{w}. \tag{3.22}$$

Le signe - nous prive d'utiliser (Lax-Milgram), mais on peu utiliser un autre outils qui est le Lemme On peut récrire l'équation (3.22) de la manière suivante

$$\mathcal{B}_1(u,w) + \mathcal{B}_2(u,w) = \mathcal{L}(w), \tag{3.23}$$

avec $\mathcal{B}_1 : L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \to \mathbb{C}$ et $\mathcal{B}_2 : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{C}$ deux une forme sesquilinéaire coercive donnée par

$$\mathcal{B}_1(u,w) = -\lambda^2 \int_\Omega u\bar{w},$$

et

$$\mathcal{B}_2(u,w) = \int_\Omega \nabla u \nabla \bar{w} + i\lambda \int_\Omega u\bar{w}.$$

et $\mathcal{L} : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{C}$ est une forme antilinéaire donnée par

$$\mathcal{L}(w) = \int_\Omega f_2 \bar{w} + (i\lambda + 1) \int_\Omega f_1 \bar{w}.$$

On a l'injection $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ est compact et dense par le théorème 1.1.1 donc par le Lemme **??** .Supposons que l'équation(3.23) n'admet pas de solution, ceci veut dire qu'elle admet une solution non-triviale pour $\mathcal{L} \equiv 0$, mais pour $w = u$ on obtient

$$-\lambda^2 \parallel u \parallel^2 + \parallel \nabla u \parallel^2 = -i\lambda \parallel u \parallel^2 . \tag{3.24}$$

On déduit que $u = 0$ dans $H_0^1(\Omega)$ ce qui implique que $\mathcal{A}$ admet une valeur propre purement imaginaire et contredit la partie 1, d'ou le résultat. Pour les mêmes argument, dans la partis de l'existence, on peut garantir l'existence de $u \in H_0^1(\Omega)$ et par la régularité des équation elliptique Théorème 1.1.3 on obtient $u \in D(\mathcal{A})$, et ceci achève la preuve de lemme.

□

Démonstration. La partie (1) du lemme 4 garantie la première condition du théorème **??** donc reste a déduire le deuxième, mais on a $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$ ce là veut dire que $i\mathbb{R} \cap \sigma(\mathcal{A}) = \emptyset$ et donc ce dernier est dénombrable. Tout les condition du théorème précité son vérifier, ce qui fait fin à la démonstration. □

3.2.2 Stabilité exponentielle

Cette partie porte réponse à la deuxième question posé à l'introduction de ce chapitre es donne le théorème suivant

Théorème 3.2.2. *Le C_0-semi-groupe de contractions générer par $\mathcal{A}$ est exponentiellement stable.*

Démonstration. Pour démontrer le théorème 3.2.2 il faut remplir les deux conditions du théorème mais elle est remplie par le lemme 4 donc il reste a prouvé qui n'est autre que l'étude de l'équation de la résolvante. Soit $F \in \mathcal{H}$, il existe $U \in D(\mathcal{A})$ tel que

$$(i\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A})U = F. \tag{3.25}$$

Ceci est équivalent à

$$\begin{cases} i\lambda u - v = f_1 \\ i\lambda v - \Delta u + v = f_2 \end{cases} \tag{3.26}$$

On prend la partie réel du produit scalaire dans $\mathcal{H}$ de l'équation (3.25) par U et par l'intermédiaire de l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient

$$\begin{aligned} \|v\|_2^2 = \Re e \,\langle i\lambda U - AU, U\rangle_{\mathcal{H}} &= \Re e\,\langle F, U\rangle_{\mathcal{H}} \\ &\leq C\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Multiplions Eq.$(3.26)_2$ par $\overline{u}$ et intégrant sur Ω on obtient

$$-\int_\Omega v\overline{(i\lambda u)} - \int_\Omega \Delta u\overline{u} + \int_\Omega v\overline{u} = \int_\Omega f_2\overline{u} \tag{3.28}$$

Par l'application de la formule de Green et considération de Eq.$(3.26)_1$ on obtient

$$\|\nabla u\|_2^2 = \int_\Omega f_2\overline{u} + \|v\|_2^2 + \int_\Omega v\overline{f_1} - \int_\Omega v\overline{u} \tag{3.29}$$

On applique l'inégalité Cauchy-Schwarz, l'inégalité (1.1) dans Eq.(3.28) et Eq.(3.27) on obtient

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_2^2 &= \int_\Omega f_2\overline{u} + \|v\|_2^2 + \int_\Omega v\overline{f_1} - \int_\Omega v\overline{u} \\ &\leq \|f_2\|_2\|u\|_2 + \|f_1\|_2\|v\|_2 + \|u\|_2\|v\|_2 + \|v\|_2^2 \\ &\leq C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}}\|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \epsilon\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + c(\epsilon)\|F\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Des équations Eq.(3.27) et Eq.(3.30) et pour ϵ assez petit on obtient

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}} \tag{3.31}$$

Avec C une constant générique. l'équation (3.25) est équivalente a

$$(i\lambda\mathcal{I}-\mathcal{A})^{-1}F=U. \tag{3.32}$$

Est par suite l'équation prend la forme

$$\|(i\lambda\mathcal{I}-\mathcal{A})^{-1}F\|_{\mathcal{H}}\leq C\|F\|_{\mathcal{H}}. \tag{3.33}$$

Cette dernière inégalité remplie la condition (**??**) est le théorème s'achève. $\square$

Chapitre 4

Existence et stabilisation de l'équation de Petrovsky :

Dans ce chapitre on va considérer l'équation de Petrovsky dont l'existence et le comportement asymptotique.et elle est donnée par

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u - \Delta u_t = 0 & \text{dans} \quad (0, +\infty) \times \Omega, \\ u = \partial_v u = 0 & \text{sur} \quad (0, +\infty) \times \partial\Omega, \\ u(0) = u_0, u_t(0) = u_1 & \text{dans} \quad \Omega. \end{cases} \tag{4.1}$$

avec Ω un ouvert borné non vide dans $R^n (n \in N^*)$ de frontière Γ au moins de classe C^4. On commence à prime abord par un lemme qui révèle l'énergie associe au système (4.1)

Lemme 5. *Supposons que u atteint la régularité requise pour le système (4.1), alors la formule de son énergie est donnée par*

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}(\| u_t \|_2^2 + \| \Delta u \|_2^2). \tag{4.2}$$

De plus

$$\mathcal{E}'(t) = - \| \nabla u_t \|_2^2 . \tag{4.3}$$

Démonstration. On prend le produit scalaire dans $(H_0^2(\Omega) \times 2(\Omega))$ l'équation $(4.1)_1$ par $\overline{u}$ on aura

$$\int \overline{u} u_{tt} + \int \overline{u} \Delta^2 u - \int \overline{u} \Delta u_t = 0 \tag{4.4}$$

Par une application des formules de Green dans le terme de droite est la différentiation du produit scalaire sur le terme de gauche on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int |u_t|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int |\Delta u|^2 = -\|\nabla u_t\| \tag{4.5}$$

De l'équation (4.5) on obtient

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}(\| u_t \|_2^2 + \| \Delta u \|_2^2), \text{ et } \mathcal{E}'(t) = - \| \nabla u_t \|_2^2 .$$

Ceci achève la démonstration de notre lemme. □

4.1 L'existence globale

Dans cette partie on a pour objective d'étudier l'existence des solutions du système (4.1), est ceci sera une conséquence de la théorie des semi groupe, est pour y-arrivez on va préciser l'espace de Hilbert dans lequel on travaille.
On prend $\mathcal{H} = H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, muni de son produit scalaire pour $U = (u, v)^T \in \mathcal{H}$ et $\widetilde{U} = (\widetilde{u}, \widetilde{v})^T \in \mathcal{H}$

$$< U, \widetilde{U} >_{\mathcal{H}} = \int_\Omega \Delta u \Delta \overline{\widetilde{u}} dx + \int_\Omega v \overline{\widetilde{v}} dx.$$

l'espace $\mathcal{H}$ s'appelle l'espace de l'énergie.
On procède a un processus de réduction d'ordre on choisissons $v = u_t$, $X = (u, v)^T$ pour réécrire le système (4.1) en un problème de Cauchy abstrait comme suit

$$\begin{cases} X' = \mathcal{A}X, \\ X(0) = X_0. \end{cases} \tag{4.6}$$

Avec $X_0 = (u_0, u_1)$ et $\mathcal{A}$ est l'opérateur

$$\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}. \tag{4.7}$$

Définie par :

$$\mathcal{A}X = \begin{pmatrix} v \\ -\Delta^2 u + \Delta v \end{pmatrix}. \tag{4.8}$$

De domaine

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{ (u, v)^T \in \mathcal{H} \;\middle|\; \begin{array}{c} u \in H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega); \\ v \in H_0^2(\Omega); \end{array} \right\}. \tag{4.9}$$

On va énoncer le théorème d'existence suivant

Théorème 4.1.1. *(Existence et unicité)*

1. *Supposons que $u_0 \in \mathcal{H}$, alors système (3.1) admet une unique solution*

$$u \in C^0(\mathbb{R}^+; \mathcal{H})$$

.

2. *Supposons que $u_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, alors système (3.1) admet une unique solution*

$$U \in C^0(\mathbb{R}^+; \mathcal{D}(\mathcal{A})) \cap C^1(\mathbb{R}^+; \mathcal{H}).$$

Remarque 4.1.1. *On pourrai procéder à un effet de régularisation de notre solutions par prendre des données initial mieux régulière.*

Démonstration. Pour prouver le théorème précédent on va utiliser un équivalent du théorème de (Hille-Yosida) qui est (Lummer-Philips) est qui consiste a prouvé que $\mathcal{A}$ est maximal et monotone, la preuve se divise en trois partie
Partie 1 :Monotonicité Cette partie montre que $\Re e \langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} \leq 0$, et don on a

$$\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} \Delta v \Delta \overline{u} dx + \int_{\Omega} (\Delta^2 u + \Delta v)\overline{v} dx. \tag{4.10}$$

On applique la formule de Green dans le membre de droit et on prend la partie réel de l'équation (4.10) pour aboutir a

$$\Re e \langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} = \mathcal{E}'(t) = - \parallel \nabla v \parallel^2 \leq 0.$$

Ce qui achève la première partie.

Partie 2 : Maximalité Cette partie a pour objectif d'étudie l'équation suivant

$$(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{A})U = Y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda u - v = f_1 \\ \\ \lambda u + \Delta^2 u - \Delta v = f_2 \end{cases} \qquad avec\;\; U = (u, v)^t \;\; et Y = (y_1, y_2)^t \tag{4.11}$$

Avec $\lambda \in \mathbb{R}$, $u \in D(\mathcal{A})$ et $Y \in \mathcal{H}$, pour le faire on prend $w \in H_0^2(\Omega)$ et multiplions l'équation $(4.11)_2$ par $\overline{w}$, intégrer sur Ω, la considération de $(4.11)_1$ et obtenir

$$\lambda^2 \int_{\Omega} u\bar{w} + \int_{\Omega} \Delta^2 u\bar{w} - \lambda \int_{\Omega} \Delta u\bar{w} = \int_{\Omega} y_2\bar{w} + \lambda \int_{\Omega} y_1\bar{w} - \int_{\Omega} \Delta y_1\bar{w} \tag{4.12}$$

Par la formule de Green on obtient

$$\lambda^2 \int_{\Omega} u\bar{w} + \int_{\Omega} \Delta u \Delta\bar{w} + \lambda \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla\bar{w} = \int_{\Omega} y_2\bar{w} + \lambda \int_{\Omega} y_1\bar{w} + \int_{\Omega} \nabla y_1 \cdot \nabla\bar{w} \tag{4.13}$$

On peut réécrire l'équation (4.13) de la manière suivante

$$\mathcal{B}(u, w) = \mathcal{L}(w), \tag{4.14}$$

avec $\mathcal{B} : H_0^2 \times H_0^2 \to \mathbb{C}$ est une forme sesquilinéaire donnée par

$$B(u, \bar{w}) = \lambda^2 \int_\Omega u\bar{w} + \int_\Omega \Delta u \Delta \bar{w} + \lambda \int_\Omega \nabla u \nabla \bar{w}$$

et $\mathcal{L} : H_0^2(\Omega) \to \mathbb{C}$ est une forme antilinéaire donnée par

$$\mathcal{L}(w) = \int_\Omega y_2 \bar{w} + \lambda \int_\Omega y_1 \bar{w} + \int_\Omega \nabla y_1 \nabla \bar{w}.$$

Pour pouvoir appliquer le lemme de Lax-Milgram il reste a montrer que $\mathcal{B}(u, w)$ est coercive.

Coercivité de $\mathcal{B}$ Soit $u \in H_0^2(\Omega)$

$$\begin{aligned} B(u, u) &= \lambda^2 \int_\Omega u\overline{u} + \int_\Omega \Delta u \Delta \overline{u} + \lambda \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \overline{u} \\ &= \lambda^2 \parallel u \parallel^2 + \parallel \Delta u \parallel^2 + \parallel \nabla u \parallel^2 \\ &\geq c \parallel u \parallel_{H_0^2}^2 \end{aligned}$$

Avec $C = \min\{1, \lambda, \lambda^2\}$.

Maintenant on fait appelle au lemme (Lax-Milgram) pour affirmer l'existence de $u \in H_0^2(\Omega)$ et par la régularité des équation elliptique Théorème 1.1.3 on obtient $u \in D(\mathcal{A})$, et ceci achève la maximalité de $\mathcal{A}$.

Partie 3 : Existence Globale Le théorème 4.1.1 est la conséquence de la combinaison des deux précédente parties et l'application du théorème de (Lummer-Philips), la preuve est achevé. □

4.2 Stabilité :

Après avoir traiter la question de l'existence il devin naturel de se poser la question suivant :

La solution est-elle stable ?

4.2.1 Stabilité forte :

On commence par une réponse positive de la question précédente et on établie le théorème suivant

Théorème 4.2.1. *Le C_0-semigroup $e^{t\mathcal{A}}$ est fortement stable dans $\mathcal{H}$; i.e, pour tout $u_0 \in \mathcal{H}$, la solution du système (2.1) satisfait*

$$\lim_{t\to\infty} \|e^{t\mathcal{A}} u_0\|_{\mathcal{H}} = 0.$$

Pour prouver que le semi-groupe $(e^{t\mathcal{A}})_{t\geq 0}$ est fortement asymptotiquement stable, on va faire appel au théorème de Arendt-Batty[2] et Lyubich-Vu[12] pour les espaces de Hilbert . Le théorème 4.2.1 se déduit du lemme suivant

Lemme 6. *Soit $\mathcal{A}$ l'opérateur définie précédemment, alors*

1. *$\mathcal{A}$ n'a pas de valeurs propres dans $i\mathbb{R}$*
2. *$i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$*
3. *$\mathcal{A}$ est compact*

Démonstration. La partie (3) du lemme se déduit des injection compact de Sobolev don il reste a montrer les deux première partie.
Montrons que $\mathcal{A}$ n'a pas de valeurs propres dans $i\mathbb{R}$, on va argumenter par absurde. Supposons que ce dernier admet un élément dans $i\mathbb{R}$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$, par définition d'une valeurs propre on a

$$i\lambda U - \mathcal{A}U = 0 \tag{4.15}$$

Ceci est équivalent à

$$\begin{cases} i\lambda u - v = 0 \\ i\lambda v + \Delta^2 u - \Delta v = 0 \end{cases} \tag{4.16}$$

Avec $0 \neq U \in D(\mathcal{A})$. On prend la partie réel du produit scalaire dans $\mathcal{H}$ de l'équation (4.15) par u on aura

$$0 = \Re e \left\langle i\lambda u - Au, u \right\rangle_{\mathcal{H}} = \Re e(i\lambda \|u\|_2^2 - \langle Au, u\rangle_{\mathcal{H}}) = \|\nabla v\|_2^2 \tag{4.17}$$

donc $v = 0$.
De Eq.$(3.17)_2$ et l'inégalité de Poincaré pour aboutir a $u = 0$ dans $H_0^2(\Omega)$ d'où $U = 0$ ce qui est absurde a l'hypothèse de départ.
Montrer que $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$ revient à étudier l'équation suivant

$$(i\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A})U = F. \tag{4.18}$$

Par équivalence on écrit

$$\begin{cases} i\lambda u - v = f_1 \\ i\lambda v + \Delta^2 u - \Delta v = f_2 \end{cases} \tag{4.19}$$

Avec $\lambda \in \mathbb{R}$, $U = (u, v)^t \in D(\mathcal{A})$ et $F = (f_1, f_2)^t \in \mathcal{H}$, pour le faire on prend $w \in H_0^2(\Omega)$ et multiplions l'équation $(4.19)_2$ par $\overline{w}$, intégrer sur Ω et de l'équation $(4.19)_1$ on obtenir

$$-\lambda^2 \int_\Omega u\bar{w} + \int_\Omega \Delta^2 u\bar{w} - i\lambda \int_\Omega \Delta u\bar{w} = \int_\Omega f_2\bar{w} + i\lambda \int_\Omega f_1\bar{w} - \int_\Omega \Delta f_1\bar{w}. \tag{4.20}$$

Par la formule de Green on obtient

$$-\lambda^2\int_\Omega u\bar{w}+\int_\Omega \Delta u\Delta\bar{w}+i\lambda\int_\Omega \nabla u\nabla\bar{w}=\int_\Omega f_2\bar{w}+i\lambda\int_\Omega f_1\bar{w}-\int_\Omega \nabla f_1\nabla\bar{w}. \quad (4.21)$$

Le signe - nous prive d'utiliser (Lax-Milgram), mais on peu utiliser un autre outils qui est le Lemme **??**. On peut réécrire l'équation (3.22) de la manière suivante

$$\mathcal{B}_1(u,w)+\mathcal{B}_2(u,w)=\mathcal{L}(w), \quad (4.22)$$

avec $\mathcal{B}_1 : L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)\to\mathbb{C}$ et $\mathcal{B}_2 : H_0^2(\Omega)\times H_0^2(\Omega)\to\mathbb{C}$ deux une forme sesquilinéaire coercive donnée par

$$\mathcal{B}_1(u,w)=-\lambda^2\int_\Omega u\bar{w},$$

et

$$\mathcal{B}_2(u,w)=\int_\Omega \Delta u\Delta\bar{w}+i\lambda\int_\Omega \nabla u\nabla\bar{w}.$$

et $\mathcal{L} : H_0^1(\Omega)\to\mathbb{C}$est une forme antilinéaire donnée par

$$\mathcal{L}(w)=\int_\Omega f_2\bar{w}+i\lambda\int_\Omega f_1\bar{w}-\int_\Omega \nabla f_1\nabla\bar{w}.$$

On a l'injection $H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)$ est compact par le théorème 1.1.1 donc par le Lemme **??** supposons que l'équation(3.23) n'admet pas de solution, ceci veut dire qu'elle admet une solution non-triviale pour $\mathcal{L}\equiv 0$, mais pour $w=u$ on obtient

$$-\lambda^2\parallel u\parallel^2+\parallel\Delta u\parallel^2=-i\lambda\parallel\nabla u\parallel^2. \quad (4.23)$$

On déduit que $u=0$ dans $H_0^2(\Omega)$ ce qui implique que $\mathcal{A}$ admet une valeur propre purement imaginaire et contredit la partie 1, d'ou le résultat. Pour les mêmes argument, dans la partis de l'existence, on peut garantir l'existence de $u\in H_0^2(\Omega)$ et par la régularité des équation elliptique Théorème 1.1.3 on obtient $u\in D(\mathcal{A})$, et ceci achève la preuve de lemme.

□

Démonstration. (Théorème 4.2.1) La partie (1) du lemme 2 garantie la première condition du théorème **??** donc reste a déduire le deuxième, mais on a $i\mathbb{R}\subset\rho(\mathcal{A})$ ce là veut dire que $i\mathbb{R}\cap\sigma(\mathcal{A})=\emptyset$ et donc ce dernier est dénombrable. Tout les condition du théorème précité son vérifier, ce qui fait fin à la démonstration. □

4.2.2 Stabilité exponentielle

Cette partie porte réponse à la deuxième question posée à l'introduction de ce chapitre es donne le théorème suivant

Théorème 4.2.2. *Le C_0-semi-groupe de contractions générer par $\mathcal{A}$ est exponentiellement stable.*

Démonstration. Pour démontrer le théorème 4.2.2 il faut remplir les deux conditions du théorème **??** mais (**??**) elle est remplie par le lemme 6 donc il reste a prouvé (**??**) qui n'est autre que l'étude de l'équation de la résolvante. Soit $F \in \mathcal{H}$, il existe $U \in D(\mathcal{A})$ tel que

$$(i\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A})U = F. \tag{4.24}$$

Ceci est équivalent à

$$\begin{cases} i\lambda u - v = f_1 \\ i\lambda v + \Delta^2 u - \Delta v = f_2 \end{cases} \tag{4.25}$$

On prend la partie réel du produit scalaire dans $\mathcal{H}$ de l'équation (4.24) par U et par l'intermédiaire de l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient

$$\begin{aligned} \|\nabla v\|_2^2 = \Re e \langle i\lambda U - \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} &= \Re e \langle F, U\rangle_{\mathcal{H}} \\ &\leq \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Multiplions Eq.$(4.25)_2$ par $\overline{u}$ et intégrant sur Ω on obtient

$$-\int_\Omega v\overline{(i\lambda u)} + \int_\Omega \Delta^2 u\overline{u} - \int_\Omega \Delta v\overline{u} = \int_\Omega f_2\overline{u} \tag{4.27}$$

Par l'application de la formule de Green et considération de Eq.$(3.26)_1$ on obtient

$$\|\Delta u\|_2^2 = \int_\Omega f_2\overline{u} + \|v\|_2^2 + \int_\Omega v\overline{f_1} - \int_\Omega \nabla v \nabla\overline{u} \tag{4.28}$$

On applique l'inégalité Cauchy-Schwarz, l'négalité (1.1) dans Eq.(3.28) et Eq.(3.27) on obtient

$$\begin{aligned} \|\Delta u\|_2^2 &= \int_\Omega f_2\overline{u} + \|v\|_2^2 + \int_\Omega v\overline{f_1} - \int_\Omega \nabla v\nabla\overline{u} \\ &\leq \|v\|^2 + \|f_1\|\|v\| + \|\nabla u\| + \|\nabla v\| + \|f_2\|\|\|u\| \\ &\leq C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}}\|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \epsilon\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + c(\epsilon)\|F\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Des équations Eq.(4.26) et Eq.(4.29) et pour ϵ assez petit on obtient

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}} \tag{4.30}$$

Avec C une constant générique. l'équation (4.24) est équivalente a

$$(i\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A})^{-1}F = U. \tag{4.31}$$

Est par suite l'équation prend la forme

$$\|(i\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A})^{-1}F\|_{\mathcal{H}} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}}. \tag{4.32}$$

Cette dernière inégalité remplie la condition (**??**) est le théorème s'achève. $\square$

Conclusion

Ce mémoire est consacré à l'étude de l'existence globale et la stabilisation de l'équation des ondes linéaire Etant donné un système vibrant (par exemple une corde), on mesure à tout instant t les vibrations a l'aide de l'énergie qu'on note E(t).
On suppose que ce système est soumis à un terme d'amortissement qui fait décroître l'énergie.
Notre problème est de déterminer le comportement asymptotique de l'énergie : étudier sa limite (c'est-à-dire chercher le cas òu cette limite est nulle) pour donner une estimation de la vitesse de décroissance de l'énergie vers zéro.
Tout cela dépend des hypothèses sur le terme d'amortis- sement. Divers aspects de ce problème ont été étudiés par de nombreux mathématiciens ces dernières années sous diverses hypothèses sur le terme d'amortissement, des propriétés de stabilité forte.

Bibliographie

[1] R. A. Adams ; Sobolev spaces, Academic press, Pure and Applied Mathematics, vol. 65 1978.

[2] Arendt, W. and . Batty, C. J. K. Tauberian theorems and stability of one-parameter semi-groups, Trans. Amer. Math. Soc., 306 (1988)-2, 837-852.

[3] C. D. Benchimol. A note on weak stabilizability of contraction semigroups. SIAM, 16(3) :373–379, 1978. :78

[4] H. Brezis. Analyse fonctionelle. Théorie et applications. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]. Masson, Paris, 1983. :83

[5] W. Desch, E. Fašangová, J. Milota, G. Propst, Stabilization through viscoelastic bound-ary damping : a semigroup approach, Semigroup Forum, 80 (2010)-3, 405-415.

[6] Evans, L. C. (1998). Partial Differential Equations, Rhode Island : AMS, Providence.

[7] A.Haraux, and T.Cazenave, An introduction to semilinear evolution equations, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications 13 (1998).

[8] T. Kato. Perturbation theory for linear operators. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 132. Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1966. 43

[9] Kesavan, S. Functional Analysis-(texts and readings in mathematics) (2004). Hindustan Book Agency : New Delhi, India, 2009, ISBN : 978-93-86279-42-2.

[10] Kesavan, S. *Topics in Functional Analysis and Applications*, 1st ed. ; Hindustan Book Agency : New Delhi, India, 2009, ISBN : 978-93-86279-42-2.

[11] Kesavan, S. - Measure and Integration-Springer (texts and Readings in Mathematics 77)-(2019) (texts and Readings in Mathematics 77).

[12] Lyubich Yu, I. and Q. P. Vu, Asymptotic stability of linear differential equations in banach spaces, Studia Math. 88 (1988)-1, 37-42.

[13] Nandakumaran, A. K., Datti.. (2017). Partial Differential Equations : Classical Theory With a Modern Touche, Cambridge : Cambridge University Press.

[14] Pazy,A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Diferential Equations,Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1983.

[15] Pruss, J. On the spectrum of C_0-semigroups, Transactions of the American Mathematical Society, 284 (1984)-2, 847-857.