RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN TIARET
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUES
Département de Mathématiques

MÉMOIRE MASTER

Présenter en vue de l'obtention du diplôme de master

Spécialité :
« Mathématique »

Option :
« Analyse fonctionnelle et équation différentielle »

Présenté Par :
HENNIA Hicham & BEN MESROUF M'Hamed Aimane

Sous L'intitulé :

Opérateur de Psi-Hilfer et ses Applications

Soutenu publiquement le 06 / juin / 2024
à Tiaret devant le jury composé de :

Mr. BENALLOU Mohamed	MCB	U. Ibn Khaldoun Tiaret	Président
Mr. BEDDANI Hamid	MCA	Esgee d'Oran	Examinateur
Mr. BEDDANI Moustafa	MCA	E.N.S de Mostaganem	Encadreur
Mr. BENIA Kheir eddine	MCA	U. Ibn Khaldoun Tiaret	Co-encadreur

Année universitaire : 2023/2024

Remerciements

Nous aimerions en premier lieu remercier notre dieu"**Allah**" qui nous a donnée la volonté et la courage pour la réalisation de ce travail.
Nous exprimons nos reconnaissance à notre encadreur **Mr. BEDDANI Moustafa**, pour ses multiples conseils et pour toutes les heures qu'il a consacré à diriger cette recherche dés le début à la fin de ce travail.
Nous remercions également le membre de jury **Mr. BEDDANI Hamid** et **Mr. BENALLOU Mohamed** d'avoir consacré de leur temps pour l'évaluation notre modeste travail.
Nous adressons nos sincères remerciements à tous nos familles et en particulier à nos parents qui étaient toujours la quand nous en avions besoin , nos professeurs dés la primaire jusquà l'université , nos amies , nos proches. en fin , nous remercions tous ceux qui nous ont aidé de prés ou de loin à l'élaboration de ce travail.

Merci

Table des matières

Introduction

Le calcul différentiel fractionnaire est une généralisation du calcul différentiel, son histoire remontait au 17 ième siècle, grace à la réponse de G. W. Leibniz concernant la question de l'hôpital, posée sur possibilité de voir une dérivée d'ordre $1/2$. Deux décennies après, nombreuses applications ont été développées en utilisant ce concept, voir [3]
Équations différentielles apparaissent comme une description naturelle de nombreux phénomènes d'évolution dans le monde réel. La majorité des processus dans les sciences appliquées sont représentés par des équations différentielles. Cependant, la situation est différente dans certains phénomènes physiques subissant des changements brusques au cours de leur évolution comme les systèmes mécaniques avec impact, les systèmes biologiques, la dynamique des populations, les désastres naturels, etc. voir par exemple [2]

De nombreuses définitions des dérivées fractionnaires ont été introduites. Elles ont des caractéristiques différentes dans la résolution des équations différentielles, les plus utilisable sont, la Riemann-Liouville, de Caputo, de Hilfer, la dérivée d'ordre variable et la dérivée conditionnelle, voir par exemple [11, 3] .

Les théorèmes du point fixe sont les outils mathématiques de base, montrant l'existence des solutions de divers types d'équations différentielles ordinaires ou fractionnaires. La théorie du point fixe est très important dans l'analyse non linéaire puisque elle fournit les outils nécessaires pour avoir le résultat d'existence de nombreux problèmes non linéaires voir [10].

Le savant Dhage a élaboré son théorème du point fixe qui affirme que dans un convexe borné, toute application qui se met sous la forme d'un produit de deux applications ; l'une est contractante et l'autre est compacte admet un point fixe. Ce théorème est très efficace dans la résolution des équations différentielles non linéaires hybrides.

L'objectif principal de ce mémoire est l'étude du résultat d'existence de certaines équations différentielles fractionnaires.

Dans le **premier chapitre** nous présentons quelques notions préliminaires nécessaires pour la bonne compréhension de ce mémoire. il sera consacré aux éléments de base sur le calcul fractionnaire (intégrales fractionnaires de $\Psi-$ Riemann-Liouville, dérivées fractionnaires de $\Psi-$Riemann-Liouville et dérivées fractionnaires de $\Psi-$Hilfer et leurs propriétés) et théorèmes de point fixe (théorème de Banach, théorème de Dage).

Deuxième chapitre. Dans ce chapitre, on s'intéresse á étudier le résultats d'existence d'une équation différentielle fractionnaire avec condition initiale de la forme suivante :

$$\begin{cases} {}^{H}\mathcal{D}_{a+}^{\eta,\nu,\Psi} y(t) = f(t,y(t)),\ t \in (a,],\eta > 0,\ 0 \leq \nu, \\ \mathcal{J}_{a+}^{1-\zeta,\Psi} y(a) = y_a, \quad \zeta = \eta + \nu(1-\eta). \end{cases}$$

oú ${}^{H}\mathcal{D}_{a^+}^{\eta,\nu,\Psi}$ (resp. $\mathcal{J}_{a+}^{1-\zeta,\Psi}$) est la dérivée fractionnaires de $\Psi-$Hilfer (resp. l'intégrale fractionnaire de $\Psi-$RL), $f \in C(J \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $y_a \in \mathbb{R}$.

Troisième chapitre. Ce chapitre consacré à l'étude de l'existence de solutions, solutions maximales et solutions minimales d'une éuation différentielle fractionnaire hybrides avec condition initiale de la forme suivante

$$\begin{aligned} &{}^{H}\mathcal{D}_{0+}^{\mu,\nu;\Psi}\left[\frac{y(t)}{f(t,y(t))}\right] = g(t,y(t)), \quad t \in J = (0,T], \\ &(\Psi(t)-\Psi(0))^{1-\xi} y(t)|_{t=0} = y_0 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

où ${}^{H}\mathcal{D}_{0+}^{\eta,\nu,\Psi}$ est la dérivée fractionnaires de $\Psi-$Hilfer, $f,\ g \in C(J \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec $f(t,x) \neq 0$ pour tout $(t,x) \in J \times \mathbb{R}$ et $y_a \in \mathbb{R}$, $\Psi \in C^1([0,T], \mathbb{R})$ vérifie $\Psi'(t) > 0$ pour tout $t \in J$.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, on va donner quelques définitions et théorèmes sur le calcule fractionnaires et l'analyse fonctionnel notamment la dérivée fractionnaires de Riemann-Liouville de Caputo et de Hilfer et leurs propriétés et les espaces fonctionnels.

1.1 Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

Définition 1.1. *[12] Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction gamma est définie par*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty s^{\alpha-1} e^{-s} ds.$$

Théorème 1.1. *[12] La fonction gamma $\Gamma(.)$ satisfait les propriétés suivantes :*
(i_1) $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$,
(i_2) $\Gamma(1) = 1$.

Preuve 1. *On preuve l'axiome (i_1), on a :*

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^\infty s^{(\alpha+1)-1} e^{-s} = \int_0^\infty s^\alpha e^{-s} ds = [-s^\alpha e^{-s}]_0^\infty + \alpha \int_0^\infty s^{\alpha-1} e^{-s} = \alpha\Gamma(\alpha).$$

Montrons maintenant l'axiome (i_2), on a :

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty s^{1-1} e^{-s} ds = [-e^{-s}]_0^\infty = 1.$$

Définition 1.2. *[12] Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, alors la fonction $B(\alpha, \beta)$ est définie par*

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 s^{\alpha-1}(1-s)^{\beta-1} ds.$$

Remarque 1.1. *Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, nous avons la propriété suivante*

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Définition 1.3. *[3] Soit $\mathfrak{h}$ une fonction intégrable définie sur $[a, b]$, alors l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\eta > 0$ $(\eta \in \mathbb{R})_+$*
de la fonction $\mathfrak{h}$ est donnée par

$$\mathcal{J}_{a+}^{\eta} \mathfrak{h}(t) = \frac{1}{\Gamma(\eta)} \int_a^t (t-s)^{\eta-1} \mathfrak{h}(s) ds.$$

Définition 1.4. *Soient $\eta \in \mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ et $m \in \mathbb{N}$ tel que $m = \lceil \eta \rceil + 1$ et soit $\mathfrak{h}$ une fonction intégrable définie sur $[a, b]$, alors la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre η de la fonction $\mathfrak{h}$ est donnée par*

$${}^{RL}\mathcal{D}_{a+}^{\eta} \mathfrak{h}(t) = \frac{d^m}{dt^m} \mathcal{J}_{a+}^{m-\eta} \mathfrak{h}(t).$$

1.2 Dérivée fractionnaire de Ψ-Hilfer

Dans cette partie, on va présenter certains notations et résultats sur la dérivée fractionnaire de $\Psi-$Hilfer. Soit $\Delta = [a, b]$ $(0 < a < b)$ un intervalle borné et soit $\Psi : \Delta \to \mathbb{R}$ une fonction croissante vérifiant $\Psi'(t) \neq 0$ pour tout $t \in \Delta$, considérons l'espace $C_{\sigma,\Psi}(\Delta, \mathbb{R})$ défini sur Δ par

$$C_{\sigma,\Psi}(\Delta, \mathbb{R}) = \{\mathfrak{h} : (a, b] \to \mathbb{R} \mid (\Psi(\cdot) - \Psi(a))^{\sigma}\mathfrak{h}(\cdot) \in C(\Delta, \mathbb{R})\}, 0 \leq \sigma < 1,$$

avec la norme

$$\|\mathfrak{h}\|_{\sigma,\Psi} = \max_{t\in\Delta} |(\Psi(t) - \Psi(a))^{\sigma}\mathfrak{h}(t)|.$$

Définition 1.5. *[2] Soit $\mathfrak{h}$ une fonction définie sur $[a, b]$, alors l'intégrale fractionnaire de Ψ Riemann-Liouville d'ordre $\eta > 0$ $(\eta \in \mathbb{R})$ de la fonction $\mathfrak{h}$ est donnée par*

$$\mathfrak{I}^{\eta,\Psi}_{a+}\mathfrak{h}(t) = \frac{1}{\Gamma(\eta)} \int_a^t \Psi'(s)(\Psi(t) - \Psi(s))^{\eta-1}\mathfrak{h}(s)ds. \tag{1.1}$$

Définition 1.6. *[2] Soit $m - 1 < \eta \leq m, \Psi \in C^m[a, b], \Psi'(t) \neq 0, t \in [a, b]$ et $\mathfrak{h} \in C[a, b]$, alors la dérivée fractionnaire Ψ-Riemann-liouville de la fonction $\mathfrak{h}$ d'ordre η est définie par*

$${}^{RL}\mathcal{D}^{\eta,\Psi}_{a+}\mathfrak{h}(t) = \left(\frac{1}{\Psi'}\frac{d}{dt}\right)^m \mathcal{J}^{m-\eta,\Psi}_{a+}\mathfrak{h}(t).$$

Définition 1.7. *[6] Soient $m - 1 < \eta \leq m,\ \Psi \in C^m[a, b],\ \Psi'(t) \neq 0,\ t \in [a, b]$ et $\mathfrak{h} \in C^m[a, b]$ alors la dérivée fractionnaire Ψ -Caputo de la fonction $\mathfrak{h}$ d'ordre η est définie par :*

$${}^{C}\mathcal{D}^{\eta,\Psi}_{a+}\mathfrak{h}(t) = \mathcal{J}^{m-\eta,\Psi}_{a+}\left(\frac{1}{\Psi'}\frac{d}{dt}\right)^m \mathfrak{h}(t).$$

Définition 1.8. *[5] Soit $m - 1 < \eta \leq m, \nu \in [0, 1], \Psi \in C^m[a, b], \Psi'(t) \neq 0, t \in [a, b]$ et $\mathfrak{h} \in C^m[a, b]$, alors la dérivée fractionnaire $\Psi-$Hilfer d'un fonction $\mathfrak{h}$ d'ordre η et de type v est définie par*

$${}^{H}\mathcal{D}^{\nu,\eta,\Psi}_{a+}\mathfrak{h}(t) = \mathcal{J}^{\nu(m-\eta),\Psi}_{a+}\left(\frac{1}{\Psi'}\frac{d}{dt}\right)^m \mathcal{J}^{(1-v)(m-\eta),\Psi}_{a+}\mathfrak{h}(t). \tag{1.2}$$

Remarque 1.2. *On a les remarques suivantes*
i- Pour $\Psi(t) = t$ et $\nu = 0$, la dérivée fractionnaire de Ψ-Hilfer se réduit à la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

$${}^{RL}\mathcal{D}^{\eta,\Psi}_{a+}\mathfrak{h}(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^m \mathcal{J}^{m-\eta}_{a+}\mathfrak{h}(t). \tag{1.3}$$

- Pour $\Psi(t) = t$ et $\nu = 1$, la dérivée fractionnaire Ψ-Hilfer se réduit à la dérivée fractionnaire de Caputo

$${}^{C}\mathcal{D}^{\eta}_{a+}\mathfrak{h}(t) = \mathcal{J}^{m-\eta}_{a+}\left(\frac{d}{dt}\right)^m \mathfrak{h}(t). \tag{1.4}$$

-Pour $\zeta = \eta + \nu(m - \eta)$, nous avons $\nu(m - \eta) = \zeta - \eta$ et $(1 - \nu)(m - \eta) = m - \zeta$, donc la dérivée fractionnaire de $\Psi-$hilfer peut être définie sous la forme suivante

$$\begin{aligned} {}^{H}\mathcal{D}^{\nu,\eta,\Psi}_{a+}\mathfrak{h}(t) &= \mathcal{J}^{(\zeta-\eta),\Psi}_{a+}\left(\frac{1}{\Psi'}\frac{d}{dt}\right)^m \mathcal{J}^{(m-\zeta),\Psi}_{a+}\mathfrak{h}(t) \\ &= \mathcal{J}^{(\zeta-\eta),\Psi}_{a+}\ {}^{RL}\mathcal{D}^{\zeta,\Psi}_{a+}\mathfrak{h}(t). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Notons que pour $\nu \in [0, 1]$ et $m - 1 < \eta < m$, nous avons $m - 1 < \zeta \leq m$.

Remarque 1.3. *On a les remarques suivantes* *i) Pour $\Psi(t) = t$ la dérivée fractionnaire de Ψ-Hilfer se réduit à la dérivée fractionnaire de Hilfer*

$$^{H}\mathcal{D}_{a+}^{\nu,\eta}\mathfrak{h}(t) = \mathcal{J}_{a+}^{\nu(m-\eta)}\left(\frac{d}{dt}\right)^{m}\mathcal{J}_{a+}^{(1-\nu)(m-\eta)}\mathfrak{h}(t). \tag{1.6}$$

ii) On observe que la dérivée fractionnaire de Hilfer définie [10] n'inclut pas la dérivée fractionnaire RL , mais la formule que nous avons définie dans (1.6) inclut de la dérivée fractionnaire RL comme cas particulier pour $\nu = 0$.

1.2.1 Propriétés de l'intégrale fractionnaire de Ψ−Riemann- Liouville

Dans cette section, nous prouvons quelque propriétés de l'intégrale fractionnaire de Ψ-Riemann-Liouville qui sont nécessaires pour étudeir les propriétés de la dérivée fractionnaire Ψ-Hilfer.

Théorème 1.2. *Soit $\mu_i \in \mathbb{R}_+ = (0,\infty), i = 1,2$, nous avons alors*

$$\mathcal{J}_{a+}^{\mu_1,\Psi}\mathcal{J}_{a+}^{\mu_2,\Psi} = \mathcal{J}_{a+}^{\mu_1+\mu_2,\Psi}.$$

Preuve 2. *La preuve se fait facilement en utilisant la définition de l'intégrale fractionnaire Ψ-Hilfer, la formule de Dirichlet, le changement de variable $\Psi(s) = \Psi(a) + z(\Psi(t) + \Psi(a))$ et la propriétés de la fonction gamma donnée dans le théorème 1.1.*

Théorème 1.3. *Soit $\sigma \in \mathbb{R}$ avec $0 \leq \sigma$, $d \in (a,b)$, $g \in C_{\sigma,\Psi}[a,d]$ et $g \in C[d,b]$, alors $g \in C_{\sigma,\Psi}[a,b]$.*

Preuve 3. *Puisque $g \in C_{\sigma,\Psi}[a,d]$, on a $(\Psi(.) - \Psi(a))^{\sigma}g(.)$ est une fonction continue sur $[a,d]$, de plus la fonction $(\Psi(t) - \Psi(a))^{\sigma}g(t)$ est continue sur $[d,b]$, il en résulte que $(\Psi(t) - \Psi(a))^{\sigma}g(t)$ est une fonction continue sur $[a,b]$, cela implique que $g \in C_{\sigma,\Psi}[a,b]$.*

Théorème 1.4. *Soit $\mu \in \mathbb{R}_+ = (0,\infty)$ et Soit $\xi \in \mathbb{R}$ tel que $\xi > -1$, alors*

$$\mathcal{J}_{a+}^{\mu,\Psi}(\Psi(t) - \Psi(a))^{\xi} = \frac{\Gamma(\xi+1)}{\Gamma(\xi+\mu+1)}(\Psi(t) - \Psi(a))^{\xi+\mu}.$$

Preuve 4. *On peut facilement le prouver facilement en utilisant le changement de variable $\Psi(s) = \Psi(a) + z(\Psi(t) - \Psi(a))$ et la définition de la fonction β donnée dans la définition 1.2.*

Remarque 1.4. *Si $\Psi(t) = t$ d'après le théorème 1.4, on obtient le résultat suivant*

$$\mathcal{J}_{a+}^{\mu}(t-a)^{\xi} = \frac{\Gamma(\xi)}{\Gamma(\xi+\mu)}(t-a)^{\xi+\mu}.$$

ce qui est prouvé dans [1].

Théorème 1.5. *Soit $\mu, \sigma \in \mathbb{R}_+ = (0,\infty)$, avec $\sigma \leq \mu$, alors l'intégrale fractionnaire de Ψ−Riemann-Liouville $\mathcal{J}_{a+}^{\mu,\Psi}$ est borné de $C_{\sigma,\Psi}$ à $C[a,b]$ et pour tout $\mathfrak{h} \in C_{\sigma,\Psi}[a,b]$*

$$\|\mathcal{J}_{a+}^{\mu,\Psi}\mathfrak{h}\|_{C[a,b]} \leq \|\mathfrak{h}\|_{C_{\sigma,\Psi}[a,b]}\frac{\Gamma(1-\sigma)}{\Gamma(1-\mu-\sigma)}(\Psi(b) - \Psi(a))^{\mu-\sigma}.$$

Preuve 5. *Soient $\mathfrak{h} \in C_{\sigma,\Psi}[a,b]$ et $t_1, t_2 \in [a,b]$, avec $t_1 < t_2$ ensuite en utilisant la définition de l'intégrale fractionnaire Ψ−Riemann-Liouville et le théorème 1.3, nous obtenons*

$$\begin{aligned}
&\left|\mathcal{J}_{a+}^{\mu,\Psi}\mathfrak{h}(t_2)-\mathcal{J}_{a+}^{\mu,\Psi}\mathfrak{h}(t_1)\right|\\
&=\left|\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_a^{t_2}\Psi'(s)(\Psi(t_2)-\Psi(s))^{\mu-1}\mathfrak{h}(s)ds\right|\\
&-\left|\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_a^{t_2}\Psi'(s)(\Psi(t_1)-\Psi(s))^{\mu-1}\mathfrak{h}(s)ds\right|\\
&\leq\left|\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_a^{t_2}\Psi'(s)(\Psi(t_2)-\Psi(s))^{\mu-1}(\Psi(s)-\Psi(a))^{-\sigma}|(\Psi(s)-\Psi(a))^{\sigma}\mathfrak{h}(s)|\right|ds\\
&-\left|\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_a^{t_1}\Psi'(s)(\Psi(t_1)-\Psi(s))^{\mu-1}(\Psi(s)-\Psi(a))^{-\sigma}\,|(\Psi(s)-\Psi(a))^{\sigma}\mathfrak{h}(s)|\,ds\right|\\
&\leq\|\mathfrak{h}\|_{C_{\sigma,\Psi}[a,b]}\left|\mathcal{J}_{a+}^{\mu,\Psi}(\Psi(t_2)-\Psi(a))^{-\sigma}-\mathcal{J}_{a+}^{\mu,\Psi}(\Psi(t_1)-\Psi(a))^{-\sigma}\right|\\
&\leq\|\mathfrak{h}\|_{C_{\sigma,\Psi}[a,b]}\frac{\Gamma(1-\sigma)}{\Gamma(1+\mu-\sigma)}\left|(\Psi(t_2)-\Psi(a))^{\mu-\sigma}-(\Psi(t_1)-\Psi(a))^{\mu-\sigma}\right|.
\end{aligned}$$

En utilisant la continuité de Ψ, nous avons

$$\left|\mathcal{J}_{a+}^{\mu,\Psi}\mathfrak{h}(t_2)-\mathcal{J}_{a+}^{\mu,\Psi}\mathfrak{h}(t_1)\right|\longrightarrow 0 \text{ comme } |t_2-t_1|\to 0.$$

Cela implique $\mathcal{J}_{a+}^{\mu,\Psi}\mathfrak{h}\in C[a,b]$, en suivant des étapes similaires à celle ci-dessus , on peut vérifier

$$\|\mathcal{J}_{a+}^{\mu,\Psi}\mathfrak{h}\|_{C[a,b]}\leq\|\mathfrak{h}\|_{C_{\sigma,\Psi}[a,b]}\frac{\Gamma(1-\sigma)}{\Gamma(1-\mu-\sigma)}(\Psi(b)-\Psi(a))^{\mu-\sigma}.$$

Théorème 1.6. *Soit $\mu,\sigma\in\mathbb{R}=(0,\infty)$, avec $\sigma<1$, alors l'opérateur intégral Ψ-Riemann-Liouville $\mathcal{J}_{a+}^{\mu,\Psi}$ est borné de $C_{\sigma,\Psi}[a,b]$ à $C_{\sigma,\Psi}[a,b]$ et pour tout $\mathfrak{h}\in C_{\sigma,\Psi}[a,b]$*

$$\|\mathcal{J}_{a+}^{\mu,\Psi}\mathfrak{h}\|_{C_{\sigma\Psi}[a,b]}\leq\|\mathfrak{h}\|_{C_{\sigma,\Psi}[a,b]}\frac{\Gamma(1-\sigma)}{\Gamma(1-\mu-\sigma)}(\Psi(b)-\Psi(a))^{\mu}.$$

Preuve 6. *Soient $\mathfrak{h}\in C_{\sigma,\Psi}[a,b]$ et $t_1,t_2\in[a,b]$, avec $t_1<t_2$, alors en utilisant la définition de l'opérateur intégral fractionnaire de Ψ-RL et le théorème 1.3 nous avons*

$$\begin{aligned}
&\left|(\Psi(t_2)-\Psi(a))^{\sigma}\mathcal{J}_{a+}^{\mu,\Psi}\mathfrak{h}(t_2)-(\Psi(t_1)-\Psi(a))^{\sigma}\mathcal{J}_{a+}^{\mu,\Psi}\mathfrak{h}(t_1)\right|\\
&=\left|\frac{(\Psi(t_2)-\Psi(a))^{\sigma}}{\Gamma(\mu)}\int_a^{t_2}\Psi'(s)(\Psi(t_2)-\Psi(s))^{\mu-1}\mathfrak{h}(s)ds\right|\\
&-\left|\frac{(\Psi(t_1)-\Psi(a))^{\sigma}}{\Gamma(\mu)}\int_a^{t_1}\Psi'(s)(\Psi(t_1)-\Psi(s))^{\mu-1}\mathfrak{h}(s)ds\right|\\
&\leq\left|(\Psi(t_2)-\Psi(a))^{\sigma}\mathcal{J}_{a+}^{\mu,\Psi}(\Psi(t_2)-\Psi(a))^{-\sigma}-|(\Psi(t_1)-\Psi(a))^{\sigma}\mathcal{J}_{a+}^{\mu,\Psi}(\Psi(t_1)-\Psi(a))^{-\sigma}\right|\|\mathfrak{h}\|_{C_{\sigma,\Psi}[a,b]}\\
&\leq\|\mathfrak{h}\|_{C_{\sigma,\Psi}[a,b]}\frac{\Gamma(1-\sigma)}{\Gamma(1-\sigma+\mu)}\left|(\Psi(t_2)-\Psi(a))^{-\mu}-(\Psi(t_1)-\Psi(a))^{\mu}\right|.
\end{aligned}$$

en utilisant la continuité de Ψ nous avons :

$$\left|(\Psi(t_2)-\Psi(a))^{\sigma}\mathcal{J}_{a+}^{\mu,\Psi}\mathfrak{h}(t_2)-(\Psi(t_1)-\Psi(a))^{\sigma}\mathcal{J}_{a+}^{\mu,\Psi}\mathfrak{h}(t_1)\right|\to 0 \text{ comme } |t_2-t_1|\to 0$$

Ce preuve pour tout $\mu>0$ et $\mathfrak{h}\in C_{\sigma,\Psi}[a,b]$ on à $\mathcal{J}_{a+}^{\mu,\Psi}\mathfrak{h}\in C_{\sigma,\Psi}[a,b]$ en suivent les mêmes types d'étapes que ce-dessus on peut facilement vérifier que

$$\left\|\mathcal{J}_{a+}^{\mu,\Psi}\mathfrak{h}\right\|_{C_{\sigma,\Psi}[a,b]}\leq\|\mathfrak{h}\|_{C_{\sigma,\Psi}[a,b]}\frac{\Gamma(1-\sigma)}{\Gamma(1-\sigma+\mu)}(\Psi(b)-\Psi(a))^{\mu}.$$

Théorème 1.7. *Soit $\mu \geq 0$ ($\mu \in \mathbb{R}$), l'opérateur $\mathcal{J}_{a+}^{\mu,\Psi}$ est définie de $C[a,b]$ dans $C[a,b]$.*

Preuve 7. *La preuve se fait de même méthode similaires que celles de théorèmes 1.5 et 1.6.*

Théorème 1.8. *Soient $\mu, \sigma \in \mathbb{R}_+ = (0, \infty)$, avec $\sigma < \mu < 1$ et $\mathfrak{h} \in C_{\sigma,\Psi}[a,b]$, alors*

$$\mathcal{J}_{a+}^{\mu,\Psi}\mathfrak{h}(a) = \lim_{t \to a+} \mathcal{J}_{a+}^{\mu,\Psi}\mathfrak{h}(t) = 0. \tag{1.7}$$

Preuve 8. *Soient $\mathfrak{h} \in C_{\sigma,\Psi}[a,b]$, alors d'après le théorème 1.5, on a $\mathcal{J}_{a+}^{\mu,\Psi}\mathfrak{h} \in C[a,b]$, de plus, on a*

$$\begin{aligned}
\left|\mathcal{J}_{a+}^{\mu,\Psi}\mathfrak{h}(t)\right| &= \left|\frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_a^t \Psi'(s)(\Psi(t) - \Psi(s))^{\mu-1}\mathfrak{h}(s)ds\right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_a^t \Psi'(s)(\Psi(t_2) - \Psi(s))^{\mu-1}(\Psi(s) - \Psi(a))^{-\sigma} \left|(\Psi(s) - \Psi(a))^{\sigma}\mathfrak{h}(s)\right| ds \\
&\leq \|\mathfrak{h}\|_{C_{\sigma,\Psi}[a,b]} \mathcal{J}_{a+}^{\mu,\Psi}(\Psi(t) - \Psi(a))^{-\sigma} \\
&\leq \|\mathfrak{h}\|_{C_{\sigma,\Psi}[a,b]} \frac{\Gamma(1-\sigma)}{\Gamma(1-\sigma+\mu)}(\Psi(t) - \Psi(a))^{\mu-\sigma}.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Puisque $\sigma < \mu$, à partir de l'inégalité (3.2) et la continuité de Ψ, on obtient

$$\lim_{t \to a+} \left| |\mathcal{J}_{a+}^{\mu,\Psi}\mathfrak{h}(t) \right| = 0.$$

Cela donne l'équation (3.1).

Lemme 1. *Soient $m \in \mathbb{N}$ et $\mathfrak{h} \in C[a,b]$, nous avons alors*

$$\left(\frac{1}{\Psi'(t)} \frac{d}{dt}\right)^m \mathcal{J}_{a+}^{m,\Psi}\mathfrak{h}(t) = \mathfrak{h}(t).$$

Preuve 9. *En utilisant la définition 1.4 [2], pour $m - 1 < \mu \leq m \in \mathbb{N}$ et $\mathfrak{h} \in C[a,b]$, nous avons*

$$\begin{aligned}
\mathfrak{h}(t) &= {}^{RL}\mathcal{D}_{a+}^{\mu,\Psi}\mathcal{J}_{a+}^{\mu,\Psi}\mathfrak{h}(t) \\
&= \left(\frac{1}{\Psi'(t)} \frac{d}{dt}\right)^m \mathcal{J}_{a+}^{m-m,\Psi}\mathcal{J}_{a+}^{m,\Psi}\mathfrak{h}(t) \\
&= \left(\frac{1}{\Psi'(t)} \frac{d}{dt}\right)^m \mathcal{J}_{a+}^{m,\Psi}\mathfrak{h}(t).
\end{aligned}$$

1.2.2 Propriétés de la dérivée fractionnaire de $\Psi-$Riemann-Liouville

Dans cette section , nous prouvons quelques propriétés de la dérivée fractionnaire Ψ-RL qui sont nécessaires pour étudier les propriétés de la dérivée fractionnaire de Ψ-Hilfer

Théorème 1.9. *Soit $\mu \in \mathbb{R} = (0, \infty)$ et soit $\xi \in \mathbb{R}$ tel que $\xi > -1$, alors*

$${}^{RL}\mathcal{D}_{a+}^{\mu,\Psi}(\Psi(t) - \Psi(a))^{\xi} = \frac{\Gamma(\xi+1)}{\Gamma(1+\xi-\mu)}(\Psi(t) - \Psi(a))^{\xi-\mu}.$$

Preuve 10. *Il suffit d'utiliser la définition de la dérivée fractionnaire de Ψ-RL et le théorème 1.4.*

Théorème 1.10. *Soient $\eta \in \mathbb{R} = (0, \infty)$, avec $\eta < 1, \nu \in [0, 1]$ et $\zeta = (\eta + \nu(1 - \eta))$, alors pour $\mathfrak{h} \in C^{\zeta}_{1-\zeta,\Psi}[a, b]$*

$$^{RL}\mathcal{D}^{\zeta,\Psi}_{a+} \mathcal{J}^{\mu,\Psi}_{a+} \mathfrak{h}(t) = {}^{RL}\mathcal{D}^{\nu(1-\eta),\Psi}_{a+} \mathfrak{h}(t).$$

Preuve 11. *Puisque $\eta < 1$, donc $\lceil \zeta \rceil + 1 = 1$, en utilisant la définition de la dérivée fractionnaire de Ψ-RL et la propriété de semi-groupe de l'intégrale fractionnaire de Ψ-RL nous avons*

$$\begin{aligned} ^{RL}\mathcal{D}^{\zeta,}_{a+} \mathcal{J}^{\mu,\Psi}_{a+} \mathfrak{h}(t) &= \left(\frac{1}{\Psi'(t)} \frac{d}{dt} \right) \mathcal{J}^{1-\zeta,\Psi}_{a+} \mathcal{J}^{\eta,\Psi}_{a+} \mathfrak{h}(t) \\ &= \left(\frac{1}{\Psi'(t)} \frac{d}{dt} \right) \mathcal{J}^{1-\zeta+\eta,\Psi}_{a+} \mathfrak{h}(t) \\ &= \left(\frac{1}{\Psi'(t)} \frac{d}{dt} \right) \mathcal{J}^{1-\nu(1-\eta)\Psi}_{a+} \mathfrak{h}(t) \\ &=^{RL} \mathcal{D}^{\nu(1-\eta),\Psi}_{a+} \mathfrak{h}(t). \end{aligned}$$

Théorème 1.11. *Soit $\mu \in \mathbb{R}_+ = (0, \infty)$, $m = \lceil \mu \rceil + 1$, alors pour $h \in C_{m-\zeta,\Psi}[a, b]$, nous avons*

$$^{RL}\mathcal{D}^{\mu,\Psi}_{a+} \mathcal{J}^{\mu,\Psi}_{a+} \mathfrak{h}(t) = \mathfrak{h}(t)$$

Preuve 12. *En utilisant le théorème 1.9 et le lemme 1 nous avons*

$$\begin{aligned} ^{RL}\mathcal{D}^{\mu,\Psi}_{a+} \mathcal{J}^{\mu,\Psi}_{a+} \mathfrak{h}(t) &= \left(\frac{1}{\Psi'(t)} \frac{d}{dt} \right)^m \mathcal{J}^{m-\mu,\Psi}_{a+} \mathcal{J}^{\mu,\Psi}_{a+} \mathfrak{h}(t) \\ &= \left(\frac{1}{\Psi'(t)} \frac{d}{dt} \right)^m \mathcal{J}^{m,\Psi}_{a+} \mathfrak{h}(t) \\ &= \mathfrak{h}(t). \end{aligned}$$

Théorème 1.12. *Soit $\mu, \sigma \in \mathbb{R}_+ = (0, \infty)$, avec $\sigma < 1$ et $m = \lceil \mu \rceil + 1$, supposons que $\mathfrak{h} \in C_{\sigma,\Psi}[a, b]$ et $\mathcal{J}^{m-\mu,\Psi}_{a+} \mathfrak{h} \in C^m_{\sigma,\Psi}[a, b]$, alors*

$$\mathcal{J}^{\mu,\Psi}_{a+} \left(^{RL}\mathcal{D}^{\mu,\Psi}_{a+} \mathfrak{h}(t) \right) = \mathfrak{h}(t) - \sum_{j=1}^{m} \frac{(\Psi(t) - \Psi(a))^{\mu-j}}{\Gamma(\mu - j + 1)} \left[\left(\frac{1}{\Psi'(t)} \frac{d}{dt} \right)^{m-j} \mathcal{J}^{m-\mu,\Psi}_{a+} \mathfrak{h}(t) \right]_{t=a}.$$

Preuve 13. *En utilisant le lemme 1 pour $m = 1$, on obtient*

$$\left(\frac{1}{\Psi'(t)} \frac{d}{dt} \right) \mathcal{J}^{\Psi}_{a+} \mathfrak{h}(t) = \mathfrak{h}(t). \tag{1.9}$$

En utilisant l'équation (1.9) et on remplace $\mathfrak{h}(t)$ par $\mathcal{J}^{\mu,\Psi}_{a+}(^{RL}\mathcal{D}^{\mu,\Psi}_{a+})\mathfrak{h}(t)$ on obtient

$$\mathcal{J}^{\mu,\Psi}_{a+} \left(^{RL}\mathcal{D}^{\mu,\Psi}_{a+} \mathfrak{h}(t) \right) = \left(\frac{1}{\Psi'(t)} \frac{d}{dt} \right) \mathcal{J}^{\Psi}_{a+} \left[\mathcal{J}^{\mu,\Psi}_{a+} \left(^{RL}\mathcal{D}^{\mu,\Psi}_{a+} \mathfrak{h}(t) \right) \right]. \tag{1.10}$$

En utilisant la relation (1.10) et la propriété de semi groupe de íntégrale fractionnaire de Ψ RL et le théorème 1.1, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^{\mu,\Psi}_{a+} \left(^{RL}\mathcal{D}^{\mu,\Psi}_{a+} \mathfrak{h}(t) \right) &= \left(\frac{1}{\Psi'(t)} \frac{d}{dt} \right) \mathcal{J}^{1+\mu,\Psi}_{a+} \left[\mathcal{J}^{\mu,\Psi}_{a+} \left(^{RL}\mathcal{D}^{\mu,\Psi}_{a+} \mathfrak{h}(t) \right) \right] \\ &= \frac{1}{\Psi'(t)} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\Gamma(1 + \mu)} \int_a^t \Psi'(s)(\Psi(t) - \Psi(s))^{\mu} (^{RL}\mathcal{D}^{\mu,\Psi}_{a+})\mathfrak{h}(s) ds \right]. \end{aligned}$$

En utilisant la définition de la dérivée fractionnaire de $\Psi-RL$ et l'intégration par partie, on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(1+\mu)}\int_a^t \Psi'(s)(\Psi(t)-\Psi(s))^{\mu}({}^{RL}\mathcal{D}_{a+}^{\mu,\Psi})\mathfrak{h}(s)ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(1+\mu)}\int_a^t \Psi'(s)(\Psi(t)-\Psi(s))^{\mu}\left(\frac{1}{\Psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^{m}(\mathcal{J}_{a+}^{m-\mu,\Psi})\mathfrak{h}(s)ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\mu+1)}\int_a^t (\Psi(t)-\Psi(s))^{\mu}\frac{d}{ds}\left[\left(\frac{1}{\Psi'(s)}\frac{d}{ds}\right)^{m-1}\mathcal{J}_{a+}^{m-\mu,\Psi}\mathfrak{h}(s)\right]ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\mu+1)}(\Psi(t)-\Psi(a))^{\mu}\left[\left(\frac{1}{\Psi'(s)}\frac{d}{ds}\right)^{m-1}\mathcal{J}_{a+}^{m-\mu,\Psi}\mathfrak{h}(s)\right]_{s=a} \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_a^t (\Psi(t)-\Psi(s))^{\mu-1}\frac{d}{ds}\left[\left(\frac{1}{\Psi'(s)}\frac{d}{ds}\right)^{m-2}\mathcal{J}_{a+}^{m-\mu,\Psi}\mathfrak{h}(s)\right]ds.
\end{aligned}$$

En répétant la processus de l'intégration par parties n fois, on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(\mu+1)}\int_a^t \Psi'(s)(\Psi(t)-\Psi(s))^{\mu}\ {}^{RL}\mathcal{D}_{a}^{\mu,\Psi}\mathfrak{h}(s) \\
&\sum_{j=1}^{m}\frac{-1}{\Gamma(\mu-j+2)}(\Psi(t)-\Psi(a))^{\mu-j+1}\left[\left(\frac{1}{\Psi'(s)}\frac{d}{ds}\right)^{m-j}\mathcal{J}_{a+}^{m-\mu,\Psi}\mathfrak{h}(s)\right]_{s=a} \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\mu-m+1)}\int_a^t \Psi'(s)(\Psi(t)-\Psi(s))^{\mu-m}\mathcal{J}_{a+}^{m-\mu,\Psi}\mathfrak{h}(s)ds \\
&= \sum_{j=1}^{m}\frac{-1}{\Gamma(\mu-j+2)}(\Psi(t)-\Psi(a))^{\mu-j+1}\left[\left(\frac{1}{\Psi'(s)}\frac{d}{ds}\right)^{m-j}\mathcal{J}_{a+}^{m-\mu,\Psi}\mathfrak{h}(s)\right]_{s=a} \\
&+ \mathcal{J}_{a+}^{\mu-m+1,\Psi}\mathcal{J}_{a+}^{m-\mu,\Psi}\mathfrak{h}(t) \\
&= \sum_{j=1}^{m}\frac{-1}{\Gamma(\mu-j+2)}(\Psi(t)-\Psi(a))^{\mu-j+1}\left[\left(\frac{1}{\Psi'(s)}\frac{d}{ds}\right)^{m-j}\mathcal{J}_{a+}^{m-\mu,\Psi}\mathfrak{h}(s)\right]_{s=a} \\
&+ \mathcal{J}_{a+}^{\Psi}\mathfrak{h}(t) \\
&\sum_{j=1}^{m}\frac{-1}{\Gamma(\mu-j+2)}(\Psi(t)-\Psi(a))^{\mu-j+1}\left[\left(\frac{1}{\Psi'(s)}\frac{d}{ds}\right)^{m-j}\mathcal{J}_{a+}^{m-\mu,\Psi}\mathfrak{h}(s)\right]_{s=a} \\
&+ \int_a^t \Psi'(s)\mathfrak{h}(s)ds.
\end{aligned}$$

En substituant l'équation (1.10) dans (1.9) et en appliquant le théorème 1.1 ., on obtient

$$\begin{aligned}
&\mathcal{J}_{a+}^{\mu,\Psi}({}^{RL}\mathcal{D}_{a+}^{\mu,\Psi})\mathfrak{h}(t)\\
&= \frac{1}{\Psi'(t)}\frac{d}{dt}\left\{\int_a^t \Psi'(s)\mathfrak{h}(s)ds\right\}\\
&- \left\{\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\Gamma(\mu-j+2)}(\Psi(t)-\Psi(a))^{\mu-j+1}\left[\left(\frac{1}{\Psi'(s)}\frac{d}{ds}\right)^{m-j}\mathcal{J}_{a+}^{m-\mu,\Psi}\mathfrak{h}(s)\right]_{s=a}\right\}\\
&= \mathfrak{h}(t) - \sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\Gamma(\mu-j+1)}(\Psi(t)-\Psi(a))^{\mu-j}\left[\left(\frac{1}{\Psi'(s)}\frac{d}{ds}\right)^{m-j}\mathcal{J}_{a+}^{m-\mu,\Psi}\mathfrak{h}(s)\right]_{s=a}\\
&= \mathfrak{h}(t) - \sum_{j=1}^{m}\frac{(\Psi(t)-\Psi(a))^{\mu-j}}{\Gamma(\mu-j+1)}\left[\left(\frac{1}{\Psi'(s)}\frac{d}{ds}\right)^{m-j}\mathcal{J}_{a+}^{m-\mu,\Psi}\mathfrak{h}(s)\right]_{s=a}\\
&= \mathfrak{h}(t) - \sum_{j=1}^{m}\frac{(\Psi(t)-\Psi(a))^{\mu-j}}{\Gamma(\mu-j+1)}\left[\left(\frac{1}{\Psi'(s)}\frac{d}{ds}\right)^{m-j}\mathcal{J}_{a+}^{m-\mu,\Psi}\mathfrak{h}(t)\right]_{t=a}.
\end{aligned}$$

Remarque 1.5. *Pour $\Psi(t) = t$, le résultat ci-dessus se réduit à*

$$\mathcal{J}_{a+}^{\mu}({}^{RL}\mathcal{D}_{a+}^{\mu}) = \mathfrak{h}(t) - \sum_{j=1}^{m}\frac{(t-a)^{\mu-j}}{\Gamma(\mu-j+1)}\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^{m-j}\mathcal{J}_{a+}^{m-\mu}\mathfrak{h}(t)\right]_{t=a}.$$

Ce qui donne le résultat dans [9].

1.2.3 Propriété de la de dérivée fractionnaire de Ψ Hilfer

Théorème 1.13. *Soit $\mu \in \mathbb{R}_+ = (0,\infty)$ et soit $\xi \in \mathbb{R}$ tel que $\xi > -1$, alors*

$${}^{RL}\mathcal{D}_{a+}^{\mu,\Psi}(\Psi(t)-\Psi(a))^{\xi}\mathfrak{h}(t) = \frac{\Gamma(\xi+1)}{\Gamma(\xi-\mu+1)}(\Psi(t)-\Psi(a))^{\xi-\mu}.$$

Preuve 14. *La preuve se fait en utilisant la définition de la dérivée fractionnaire de $\Psi-$Hilfer et application du théorème 1.4 et la théorème 1.9.*

Théorème 1.14. *[4] Soit $\eta \in \mathbb{R}_+ = (0,\infty)$, avec $\eta < 1, \nu \in [0,1]$ et $\zeta = \eta + \nu(1-\eta)$, alors*

$$\mathcal{J}_{a+}^{\zeta,\Psi}({}^{RL}\mathcal{D}_{a+}^{\zeta,\Psi})\mathfrak{h}(t) = \mathcal{J}_{a+}^{\eta,\Psi}({}^{H}\mathcal{D}_{a+}^{\eta,\nu,\Psi})\mathfrak{h}(t), \mathfrak{h} \in C_{1-\zeta,\Psi}^{\zeta}[a,b].$$

Preuve 15. *En utilisant la propriété de semi-groupe de l'intégrale fractionnaire Ψ-RL et la définition de la dérivée fractionnaire dre Ψ-Hilfer, nous avons alors*

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{a+}^{\zeta,\Psi}({}^{RL}\mathcal{D}_{a+}^{\zeta,\Psi})\mathfrak{h}(t) &= \mathcal{J}_{a+}^{\eta+\nu(1-\eta),\Psi}({}^{RL}\mathcal{D}_{a+}^{\zeta,\Psi})\mathfrak{h}(t)\\
&= \mathcal{J}_{a+}^{\eta,\Psi}\mathcal{J}_{a+}^{\nu(1-\eta),\Psi}({}^{RL}\mathcal{D}_{a+}^{\zeta,\Psi})\mathfrak{h}(t)\\
&= \mathcal{J}_{a+}^{\eta,\Psi}\mathcal{J}_{a+}^{\zeta-\eta,\Psi}({}^{RL}\mathcal{D}_{a+}^{\zeta,\Psi})\mathfrak{h}(t)\\
&= \mathcal{J}_{a+}^{\eta,\Psi}({}^{H}\mathcal{D}_{a+}^{\eta,\nu,\Psi})\mathfrak{h}(t).
\end{aligned}$$

Théorème 1.15. *Soit $\mathfrak{h} \in \mathrm{L}^1[a,b]$ supposons que ${}^{RL}\mathcal{D}_{a+}^{\nu(1-\eta),\Psi}\mathfrak{h} \in \mathrm{L}^1[a,b]$, alors*

$${}^{H}\mathcal{D}_{a+}^{\eta,\nu,\Psi}\mathcal{J}_{a+}^{\eta,\Psi} = \mathcal{J}_{a+}^{\nu(1-\eta),\Psi}{}^{RL}\mathcal{D}_{a+}^{\nu(1-\eta),\Psi}\mathfrak{h}(\mathfrak{t}).$$

Preuve 16. *En utilisant la définition de la dérivée fractionnaire de Ψ Hilfer et le théorème 1.10, on obtient*

$$\begin{aligned}
{}^{H}\mathcal{D}_{a+}^{\eta,\nu,\Psi}\mathcal{J}_{a+}^{\eta,\Psi} &= \mathcal{J}_{a+}^{\nu(1-\eta),\Psi}({}^{RL}\mathcal{D}_{a+}^{\zeta,\Psi})\mathcal{J}_{a+}^{\eta,\Psi}\mathfrak{h}(\mathfrak{t})\\
&= \mathcal{J}_{a+}^{\nu(1-\eta),\Psi}({}^{RL}\mathcal{D}_{a+}^{\nu(1-\eta),\Psi})\mathfrak{h}(\mathfrak{t}).
\end{aligned}$$

Chapitre 2

Equation Différentielle Fractionnaire nonlinéaire comportant la dérivée de $\Psi-$Hifer

Dans ce Chapitre [7], nous étudions l'existence et l'unicité de la solution d'une équation différentielle fractionnaire comportant la dérivée de $\Psi-$Hilfer. On considère le problème de Cauchy suivant[2]

$$\begin{cases} {}^{H}\mathcal{D}_{a+}^{\eta,\nu,\Psi}y(t) = f(t,y(t)),\ t\in(a,],\eta>0,\ 0\leq\nu, \\ \mathcal{J}_{a+}^{1-\zeta,\Psi}y(a)=y_a, \quad \zeta=\eta+\nu(1-\eta), \end{cases} \tag{2.1}$$

oú ${}^{H}\mathcal{D}_{a+}^{\eta,\nu,\Psi}$ (resp. $\mathcal{J}_{a+}^{1-\zeta,\Psi}$) est la dérivée fractionnaires de $\Psi-$Hilfer (resp. l'intégrale fractionnaire de $\Psi-$RL), $f\in C(J\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $y_a\in\mathbb{R}$.

2.1 Préliminaires

Nous définissons tout d'abord les espaces fonctionnels suivants. Soit $[a,b]$ $(0<a<b<\infty)$ un intervalle borné et $\Psi\in C^1([a,b],\mathbb{R})$ une fonction croissante telle que $\Psi'(t)\neq0$, pour tout $t\in[a,b]$. Soient $0<\eta<1$, $\nu\in[0,1]$ et $\zeta=\eta+\nu(1-\eta)$, on définit respectivement les espace $C_{1-\zeta,\Psi}[a,b]$, $C_{1-\zeta,\Psi}^{\zeta}[a,b]$ et $C_{1-\zeta,\Psi}^{m}[a,b]$ par

$$C_{1-\zeta,\Psi}[a,b]=\Big\{\mathfrak{h}:(a,b]\longrightarrow\mathbb{R},\ \ (\Psi(\cdot)-\Psi(a))^{1-\zeta}\mathfrak{h}(\cdot)\in C[a,b]\Big\}. \tag{2.2}$$

avec la norme

$$\|\mathfrak{h}\|_{C_{1-\zeta,\Psi}[a,b]}=\max_{t\in[a,b]}\Big|(\Psi(t)-\Psi(a))^{1-\zeta}\mathfrak{h}(t)\Big|,$$

$$C_{1-\zeta,\Psi}^{\zeta}[a,b]=\Big\{\mathfrak{h}\in C_{1-\zeta,\Psi}[a,b]:({}^{RL}\mathcal{D}_{a+}^{\zeta,\Psi})\mathfrak{h}\in C_{1-\zeta,\Psi}[a,b]\Big\}, \tag{2.3}$$

et

$$C_{1-\zeta,\Psi}^{m}[a,b]=\left\{\mathfrak{h}:\left(\frac{1}{\Psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^{m-1}\mathfrak{h}(t)\in C[a,b]\text{ et }\left(\frac{1}{\Psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^{m}\mathfrak{h}(t)\in C_{1-\zeta,\Psi}[a,b]\right\}(m\in\mathbb{N}). \tag{2.4}$$

2.2 Équation intégrale

Dans cette partie, on va aborder une relation entre le problème (2.1) et l'équation intégrale suivante

$$y(t)=\frac{(\Psi(t)-\Psi(a))^{\zeta-1}}{\Gamma(\zeta)}y_a+\frac{1}{\Gamma(\eta)}\int_a^t\Psi'(s)(\Psi(t)-\Psi(s))^{\eta-1}f(s,y(s))ds,\ t\in(a,b]. \tag{2.5}$$

Théorème 2.1. *Soient* $0 < \eta < 1$, $\nu \in [0,1]$ *et* $\zeta = \eta + \nu(1-\eta)$, *supposons que* $f : (a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *vérifie* $f(\cdot, y(\cdot)) \in C_{1-\zeta,\Psi}[a,b]$ *pour tout* $y \in C_{1-\zeta,\Psi}[a,b]$, *alors* $y \in C^{\zeta}_{1-\zeta,\Psi}[a,b]$, *est une solution du problème (2.1) si et seulement si y satisfait l'équation intégrale (2.5).*

Preuve 17. *Supposons que* $y \in C^{\zeta}_{1-\zeta,\Psi}[a,b]$ *est une solution du problème (2.1), on vaut prouver que y satisfait l'équation intégrale fractionnaire (2.5), puisque* $y \in C^{\zeta}_{1-\zeta,\Psi}[a,b]$, *on a* $y \in C_{1-\zeta,\Psi}[a,b]$ *et*

$$\left(\frac{1}{\Psi'(t)}\frac{d}{dt}\right) \mathcal{J}^{1-\zeta,\Psi}_{a+} y = {}^{RL}\mathcal{D}^{\zeta,\Psi}_{a+} y \in C_{1-\zeta,\Psi}[a,b]. \tag{2.6}$$

De plus, en appliquant le théorème 1.5 avec $\sigma = \mu = 1-\zeta$, *on obtient*

$$\mathcal{J}^{1-\zeta,\Psi}_{a+} y \in C[a,b]. \tag{2.7}$$

D'après les équation (2.6) et (2.7) et la définition de l'espace $C^{\zeta}_{1-\zeta,\Psi}[a,b]$, *nous avons* $\mathcal{J}^{1-\zeta,\Psi}_{a+} y \in C^{1}_{1-\zeta,\Psi}[a,b]$, *puisque* $y \in C_{1-\zeta,\Psi}[a,b]$ *et* $\mathcal{J}^{1-\zeta,\Psi}_{a+} y \in C^{1}_{1-\zeta,\Psi}[a,b]$, *on applique le théorème 1.12 avec* $\sigma = 1-\zeta, \mu = \zeta$ *et* $m = \lceil \zeta \rceil = 1$, *on obtient*

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^{\zeta,\Psi}_{a+}({}^{RL}\mathcal{D}^{\zeta,\Psi}_{a+})y(t) &= y(t) - \frac{(\Psi(t)-\Psi(a))^{\zeta-1}}{\Gamma(\zeta)}\left[\mathcal{J}^{1-\zeta,\Psi}_{a+} y(t)\right]_{t=a} \\ &= y(t) - \frac{(\Psi(t)-\Psi(a))^{\zeta-1}}{\Gamma(\zeta)} y_a. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Puisque $y \in C^{\zeta}_{1-\zeta,\Psi}[a,b]$, *d'après le théorème 1.14 et l'équation (2.1), on obtient*

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^{\zeta,\Psi}_{a+}({}^{RL}\mathcal{D}^{\zeta,\Psi}_{a+})y(t) &= \mathcal{J}^{\eta,\Psi}_{a+}({}^{H}\mathcal{D}^{\nu,\eta,\Psi}_{a+})y(t) \\ &= \mathcal{J}^{\eta,\Psi}_{a+} f(t,y(t)), \end{aligned} \tag{2.9}$$

à partir des équation (2.8) et (2.9), nous avons

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{(\Psi(t)-\Psi(a))^{\zeta-1}}{\Gamma(\zeta)} y_a + \mathcal{J}^{\eta,\Psi}_{a+} f(t,y(t)) \\ &= \frac{(\Psi(t)-\Psi(a))^{\zeta-1}}{\Gamma(\zeta)} y_a + \frac{1}{\Gamma(\eta)}\int_a^t \Psi'(s)(\Psi(t)-\Psi(s))^{\eta-1} f(s,y(s))ds, \ t \in [a,b]. \end{aligned}$$

Donc, y satisfait l'équation intégrale (2.5).
Inversement. *Supposons que* $y \in C^{\zeta}_{1-\zeta,\Psi}[a,b]$ *satisfait l'équation (2.5), alors*

$$y(t) = \frac{(\Psi(t)-\Psi(a))^{\zeta-1}}{\Gamma(\zeta)} y_a + \mathcal{J}^{\eta,\Psi}_{a+} f(t,y(t)), \ t \in (a,b].$$

En appliquant ${}^{RL}\mathcal{D}^{\zeta,\Psi}_{a+}$ *aux deux côtés de l'équation ci-dessus, nous obtenons*

$${}^{RL}\mathcal{D}^{\zeta,\Psi}_{a+} y(t) = \frac{y_a}{\Gamma(\zeta)} {}^{RL}\mathcal{D}^{\zeta,\Psi}_{a+}(\Psi(t)-\Psi(a))^{\zeta-1} + {}^{RL}\mathcal{D}^{\zeta,\Psi}_{a+}\mathcal{J}^{\eta,\Psi}_{a+} f(t,y(t)). \tag{2.10}$$

En utilisant le théorèmes 1.10, on trouve

$$\begin{aligned} {}^{RL}\mathcal{D}^{\zeta,\Psi}_{a+} y(t) &= \frac{y_{(a)}}{\Gamma(\zeta)} {}^{RL}\mathcal{D}^{\zeta,\Psi}_{a+}(\Psi(t)-\Psi(a))^{\zeta-1} + {}^{RL}\mathcal{D}^{\nu(1-\eta),\Psi}_{a+} f(t,y(t)) \\ &= {}^{RL}\mathcal{D}^{\nu(1-\eta),\Psi}_{a+} f(t,y(t)). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Puisque $y \in C^{\zeta}_{1-\zeta,\Psi}[a,b]$, *on obtient* ${}^{RL}\mathcal{D}^{\zeta,\Psi}_{a+} y \in C_{1-\zeta,\Psi}[a,b]$, *par conséquent, il résulte de l'équation (2.11) que*

$${}^{RL}\mathcal{D}^{\nu(1-\eta),\Psi}_{a+} f(\cdot,y(\cdot)) \in C_{1-\zeta,\Psi}[a,b]. \tag{2.12}$$

Comme $0 < \eta < 1,\ \nu \in [0,1]$ *et* $0 < 1-\eta < 1$, *on a* $\nu(1-\eta) < 1$, *donc*

$$^{RL}\mathcal{D}_{a+}^{\nu(1-\eta),\Psi} f(t, y(t)) = \left(\frac{1}{\Psi'(t)}\frac{d}{dt}\right) \mathcal{J}_{a+}^{1-\nu(1-\eta),\Psi} f(t, y(t)). \tag{2.13}$$

En vertu de l'équation (2.12), nous avons

$$\left(\frac{1}{\Psi'(t)}\frac{d}{dt}\right) \mathcal{J}_{a+}^{1-\nu(1-\eta),\Psi} f(\cdot, y(\cdot)) \in C_{1-\zeta,\Psi}[a, b]. \tag{2.14}$$

Comme $\zeta = \eta + \nu(1-\eta) > \nu(1-\eta)$ *on a* $1-\zeta < 1-\nu(1-\eta)$, *puisque* $f(\cdot, y(\cdot)) \in C_{1-\zeta,\Psi}[a, b]$, *en appliquant le théorème 1.5 avec* $\sigma = 1-\zeta, \mu = (1-\eta)$ *et* $m = 1$, *on obtient*

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{a+}^{\nu(1-\eta),\Psi}(^{RL}\mathcal{D}_{a+}^{\zeta,\Psi})y(t) &= \mathcal{J}_{a+}^{\nu(1-\eta),\Psi}(^{RL}\mathcal{D}_{a+}^{\nu(1-\eta),\Psi})f(t, y(t)) \\ &= f(t, y(t)) - \frac{(\Psi(t)-\Psi(a))^{\nu(1-\eta)-1}}{\Gamma(\nu(1-\eta))} \left[\mathcal{J}_{a+}^{1-\nu(1-\eta),\Psi} f(t, y(t))\right]_{t=a}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

En utilisant le théorème 1.8 avec $\sigma = 1-\zeta$ *et* $\mu = 1-\nu(1-\eta)$, *on obtient*

$$\left[\mathcal{J}_{a+}^{1-\nu(1-\eta),\Psi} f(t, y(t))\right]_{t=a} = 0. \tag{2.16}$$

En utilisant la définition de la dérivée fractionnaire de $\Psi-$*Hilfer et les équation (2.15)-(2.16), on trouve*

$$^{H}\mathcal{D}_{a+}^{\eta,\nu,\Psi} y(t) = f(t, y(t)),\ t \in (a, b].$$

De plus, l'équation (2.2) est bien vérifiée, il reste maintenant de vérifier la condition initiale du problème (2.1), en entrant $\mathcal{J}_{a+}^{1-\zeta,\Psi}$ *aux deux cotés de l'équation (2.5) et d'après la propriété de semi-groupe de l'intégrale fractionnaire de* $\Psi-RL$, *nous avons*

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{a+}^{1-\zeta,\Psi} y(t) &= \frac{y_a}{\Gamma(\zeta)} \mathcal{J}_{a+}^{1-\zeta,\Psi}(\Psi(t)-\Psi(a))^{\zeta-1} + \mathcal{J}_{a+}^{1-\zeta+\eta,\Psi} f(t, y(t)) \\ &= \frac{y_a}{\Gamma(1)} + \mathcal{J}_{a+}^{1-\nu(1-\eta),\Psi} f(t, y(t)).\end{aligned}$$

Alors,

$$\left[\mathcal{J}_{a+}^{1-\zeta,\Psi} y(t)\right]_{t=a} = y_a + \left[\mathcal{J}_{a+}^{1-\nu(1-\eta),\Psi} f(t, y(t))\right]_{t=a}.$$

D'après l'équation 2.16), on a

$$\left[\mathcal{J}_{a+}^{1-\zeta,\Psi} y(t)\right]_{t=a} = y_a.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Remarque 2.1. *Si* $\Psi(t) = t$, *on trouve le résultat obtenu dans [8]*

2.3 Existence et unicité de la solution

Dans cette partie, on s'intéresse à étudier le résultat d'existence et d'unicité du problème (2.1).

Théorème 2.2. *Soit (E,d) un espace métrique complet et s Soit* $T : E \to E$, *un application contractante avec la constante de contraction* K, *alors* T *admet un unique point fixe* $x \in E$, *de plus nous avant la propriété suivante qui importante si* $x_0 \in E$ *et* $x_n = T_{x_{n-1}}$, *telle que*

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x \text{ et } d(x_n,\ x) \le K^n(1-K)^{-1}d(x_1,\ x_0),\ n \ge 1 \tag{2.17}$$

x *étant le point fixe de* T.

Théorème 2.3. *Soit $f : (a,b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(\cdot, y(\cdot)) \in C^{\nu(1-\eta)}_{1-\zeta,\Psi}[a,b]$, pour tout $y \in C_{1-\zeta,\Psi}[a,b]$, supposons que f satisfait la condition de Lipschitz par rapport à la deuxième variable, c'est à dire que, il existe $L > 0$:*

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq \mathrm{L}|x-y| \text{ pour tout}, \quad x,\ y \in \mathbb{R} \text{ et } \ t \in (a,b]. \tag{2.18}$$

Alors, il existe une unique solution $y \in C^{\zeta}_{1-\zeta,\Psi}[a,b]$ du problème (2.1).

Preuve 18. *D'après le théorème 2.1, on voit que les solutions de (2.5) et du problème (2.1) sont coïncidentes. Considérons l'opérateur $\mathcal{A}$, défini par*

$$\mathcal{A}y(t) = y_0(t) + \mathcal{J}^{\eta;\Psi}_{a+} f(t, y(t)),\ t \in (a,b].$$

Où

$$y_0(t) = \frac{y_a}{\Gamma(\zeta)}(\Psi(t) - \Psi(a))^{\zeta-1}.$$

L'équation intégrale (2.5) peut être écrite sous la forme suivante

$$y(t) = \mathcal{A}y(t),\ t \in (a,b]$$

Premièrement, nous montrons que l'opérateur $\mathcal{A}$ est une contraction sur l'espace qui dépend d'un sous intervalle obtenu en subdivisant l'intervalle $[a,b]$. Soit $c_1,\ c_2 \in [a,b]$ avec $c_1 < c_2$, il est clair que l'espace $C_{1-\zeta,\Psi}[c_1,c_2]$ est un espace vectoriel complet avec la norme

$$\|y\|_{C_{1-\zeta,\Psi}[c_1,c_2]} = \max_{t\in[c_1,c_2]} \left|(\Psi(t) - \Psi(c_1))^{1-\zeta} y(t)\right|.$$

Comme Ψ est continue sur $[a,b]$ et $\eta > 0$, il existe $t_1 \in (a,b]$, tel que

$$\omega_1 = \frac{\mathrm{L}\Gamma(\zeta)}{\Gamma(\zeta+\eta)}(\Psi(t_1) - \Psi(a))^{\eta} < 1. \tag{2.19}$$

Nous avons aussi

$$(\Psi(\cdot) - \Psi(a))^{1-\zeta} y_0(\cdot) = \frac{y_a}{\Gamma(\zeta)} \in C[a,t_1].$$

Cela implique que

$$y_0 \in C_{1-\zeta,\Psi}[a,t_1]. \tag{2.20}$$

Comma $f(\cdot,y(\cdot)) \in C^{\nu(1-\eta)}_{1-\zeta,\Psi}\ [a,b]$, pour tout $y \in C_{1-\zeta,\Psi}[a,b]$, on a $f(\cdot,y(\cdot)) \in C^{\nu(1-\eta)}_{1-\zeta,\Psi}\ [a,t_1]$, pour tout $y \in C_{1-\zeta,\Psi}[a,t_1]$, par conséquent, d'après le théorème 1.6, nous avons

$$\mathcal{J}^{\eta,\Psi}_{a+} f(\cdot, y(\cdot)) \in C_{1-\zeta,\Psi}[a,t_1]. \tag{2.21}$$

D'après les équations (2.20), (2.21), il résulte que $\mathcal{A}y \in C_{1-\zeta,\Psi}[a,t_1]$, donc $\mathcal{A}$ est un opérateur de $C_{1-\zeta,\Psi}[a,t_1]$ en lui même. Soit $y_1,\ y_2 \in C_{1-\zeta,\Psi}[a,t_1]$, en utilisant la définition de l'opérateur $\mathcal{A}$, le théorème (3.1.3) et la condition de Lipschitz sur f, on obtient

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{A}y_1 - \mathcal{A}y_2\|_{C_{1-\zeta,\Psi}[a,t_1]} \\
&= \max_{t\in[a,t_1]} \left| \frac{(\Psi(t)-\Psi(a))^{1-\zeta}}{\Gamma(\eta)} \int_a^t \Psi'(s)(\Psi(t)-\Psi(s))^{\eta-1}[f(s,y_1(s) - f(s,y_2(s))]ds \right| \\
&\leq \max_{t\in[a,t_1]} \frac{\mathrm{L}(\Psi(t)-\Psi(a))^{1-\zeta}}{\Gamma(\eta)} \int_a^t \Psi'(s)(\Psi(t)-\Psi(s))^{\eta-1}(\Psi(s)-\Psi(a))^{\zeta-1} \times \\
&\left|(\Psi(s)-\Psi(a))^{1-\zeta}(y_1(s)-y_2(s))\right| ds \\
&\leq \|y_1 - y_2\|_{C_{1-\zeta,\Psi}[a,t_1]} \mathrm{L}(\Psi(t)-\Psi(a))^{1-\zeta} \mathcal{J}^{\eta,\Psi}_{a+}(\Psi(t)-\Psi(a))^{\zeta-1} \\
&\leq \|y_1 - y_2\|_{C_{1-\zeta,\Psi}[a,t_1]} \mathrm{L}(\Psi(t)-\Psi(a))^{1-\zeta} \frac{\Gamma(\zeta)}{\Gamma(\eta+\zeta)}(\Psi(t)-\Psi(a))^{\zeta+\eta-1} \\
&\leq \frac{\mathrm{L}\Gamma(\zeta)}{\Gamma(\eta+\zeta)}(\Psi(t_1)-\Psi(a))^{\eta}\|y_1-y_2\|_{C_{1-\zeta,\Psi}[a,t_1]}.
\end{aligned}$$

En utilisant l'intégrale (2.19), on trouve

$$\|\mathcal{A}y_1 - \mathcal{A}y_2\|_{C_{1-\zeta,\Psi}[a,t_1]} \leq \omega_1 \|y_1 - y_2\|_{C_{1-\zeta,\Psi}[a,t_1]}.$$

Comme $0 < \omega_1 < 1$, *alors l'opérateur* $\mathcal{A}$ *est une contradiction sur* $[a, t_1]$, *par le théorème de point fixe de Banach et le théorème 2.1, il existe une unique solution* $y_0^* \in C_{1-\zeta,\Psi}[a, t_1]$ *du problème (2.1]). Si* $t_1 \neq b$, *on considère, l'équation intégrale suivante*

$$y(t) = \mathcal{A}y(t) = y_{01}(t) + \frac{1}{\Gamma(\eta)} \int_{t_1}^{t} \Psi'(s)(\Psi(t) - \Psi(s))^{\eta-1} f(s, y(s))ds \ t \in [t_1, b]. \tag{2.22}$$

Où

$$y_{01}(t) = \frac{y_0}{\Gamma(\zeta)}(\Psi(t) - \Psi(a))^{\zeta-1} + \frac{1}{\Gamma(\eta)} \int_{a}^{t_1} \Psi'(s)(\Psi(t) - \Psi(s))^{\eta-1} f(s, y(s))ds. \tag{2.23}$$

Par la continuité de Ψ, *il est possible de trouver* $t_2 \in [t_1, b]$, *tel que*

$$\omega_2 = \frac{\mathrm{L}(\Psi(t_2) - \Psi(t_1))^\eta}{\eta\Gamma(\eta)} < 1. \tag{2.24}$$

Comme $f(\cdot, (\cdot)) \in C[t_1, t_2]$, *pour* $y \in C[t_1, t_2]$, *alors d'après le théorème 1.7, on obtient*

$$\mathcal{J}_{t_1+}^{\eta,\Psi} f(\cdot, (\cdot)) \in C_{1-\zeta,\Psi}[t_1, t_2]. \tag{2.25}$$

De l'équation (2.23) et la condition (2.25), il résulte que $\mathcal{A}$ *est défini de* $C[t_1, t_2]$ *dans lui même. Soient* $y_1, y_2 \in C[t_1, t_2]$, *en utilisant la condition de Lipschitz sur la fonction* f, *on trouve*

$$\begin{aligned}
|\mathcal{A}y_1(t) - \mathcal{A}y_2(t)\| &= \left|\mathcal{J}_{t_1+}^{\eta,\Psi}[f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))]\right| \\
&\leq \mathrm{L}\mathcal{J}_{t_1+}^{\eta,\Psi}|y_1(t) - y_2(t)| \\
&\leq \mathrm{L}\|y_1 - y_2\|_{C[t_1,t_2]}\mathcal{J}_{a+}^{\eta,\Psi}(1) \\
&= \frac{\mathrm{L}}{\eta\Gamma(\eta)}(\Psi(t_2) - \Psi(t_1))^\eta \|y_1 - y_2\|_{C[t_1,t_2]}.
\end{aligned} \tag{2.26}$$

De l'équation (2.24), il en résulte que nous avons :

$$\|\mathcal{A}y_1 - \mathcal{A}y_2\|_{C[t_1,t_2]} \leq \omega_2 \|y_1 - y_2\|_{C[t_1,t_2]}.$$

Puisque $0 < \omega_2 < 1$, *alors l'opérateur* $\mathcal{A}$ *est une contradiction sur* $C[t_1, t_2]$, *d'après le théorème du point fixe de Banach, il existe une unique solution* $y_1^* \in C[, t_1]$ *de l'équation (2.5). Il est facile de voir* $y_0^*(t_1) = y_1^*(t_1)$, *on définit la fonction* $y^* : [a, t_2] \to \mathbb{R}$ *par*

$$y^*(t) = \begin{cases} y_0^*(t), & t \in [a, t_1] \\ y_1^*(t), & t \in [t_1, t_2] \end{cases}. \tag{2.27}$$

qui appartient à $C_{1-\zeta,\Psi}[a, t_2]$, *on en conclut que* y^* *est l'unique solution du problème (2.1]) dans l'espace* $C_{1-\zeta,\Psi}[a, t_2]$. *Si* $t_2 \neq b$, *alors, nous continuions la procédure jusqu'à on trouve* $t_n = b$. *En procédant la même manière comme précédente, nous obtenons que* y^* *est l'unique solution de l'équation (2.5) dans l'espace* $C_{1-\zeta,\Psi}[a, b]$.

Maintenant, nous prouvons que l'unique solution $y^* \in C_{1-\zeta,\Psi}[a, b]$ *appartient à* $C_{1-\zeta,\Psi}^{\zeta}[a, b]$, *à partir de l'équation (2.5), nous avons*

$$y^*(t) = \frac{(\Psi(t) - \Psi(a))^{\zeta-1}}{\Gamma(\zeta)} y_a + \mathcal{J}_{a+}^{\eta,\Psi} f(t, y^*(t)), \ t \in [a, b]. \tag{2.28}$$

En appliquant ${}^{RL}\mathcal{D}_{a+}^{\zeta,\Psi}$ *aux deux côtés de l'équation (2.28) et en utilisant le théorème 1.10, on obtient*

$$\begin{aligned} {}^{RL}\mathcal{D}_{a+}^{\zeta,\Psi} y^*(t) &= {}^{RL}\mathcal{D}_{a+}^{\zeta,\Psi} \frac{(\Psi(t)-\Psi(a))^{\zeta-1}}{\Gamma(\zeta)} y_a + \mathcal{J}_{a+}^{\eta,\Psi} f(t,y^*(t))^{RL}\mathcal{D}_{a+}^{\zeta,\Psi}, \\ &= {}^{RL}\mathcal{D}_{a+}^{\nu(1-\eta),\Psi} f(t,y^*(t)). \end{aligned} \tag{2.29}$$

Par l'hypothèse $f(\cdot,y^*(\cdot)) \in C_{1-\zeta,\Psi}^{\nu(1-\eta)}[a,b]$*, on obtient*

$${}^{RL}\mathcal{D}_{a+}^{\nu(1-\eta),\Psi} f(\cdot,y(\cdot)) \in C_{1-\zeta,\Psi}[a,b]. \tag{2.30}$$

De l'équation (2.29) et de la condition (2.30), il résulte que

$${}^{RL}\mathcal{D}_{a+}^{\zeta,\Psi} y^*(t) \in C_{1-\zeta,\Psi}[a,b].$$

Cela implique que $y^* \in C_{1-\zeta,\Psi}^{\zeta}[a,b]$*, d'après le théorème 2.1* y^* *est l'unique solution du problème (2.1]).*

Chapitre 3

Équation différentielle fractionnaire hybride non linéaire de $\Psi-$Hilfer

Dans ce chapitre [8], on étudier l'existence et l'unicité de solutions de certains types d'inégalités différentielles fractionnaires hybrides, on considère le problème suivant

$$
{}^{H}\mathcal{D}_{0+}^{\mu,\nu;\Psi}\left[\frac{y(t)}{f(t,y(t))}\right] = g(t,y(t)), \quad t \in J = (0,T], \tag{3.1}
$$

$$
(\Psi(t)-\Psi(0))^{1-\xi}y(t)|_{t=0} = y_0 \in \mathbb{R}, \tag{3.2}
$$

oú ${}^{H}\mathcal{D}_{0+}^{\eta,\nu,\Psi}$ est la dérivée fractionnaires de $\Psi-$Hilfer, $f,\ g \in C(J\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ avec $f(t,x) \neq 0$ pour tout $(t,x) \in J\times\mathbb{R}$ et $y_a \in \mathbb{R}$, $\Psi \in C^1([0,T],\mathbb{R})$ vérifie $\Psi'(t) > 0$ pour tout $t \in J$.

3.1 Existence de solution

Dans le lemme suivant, nous allons présenter la relation entre le problème en question (3.1)-(3.2) et l'équation intégrale hybride suivante

$$
y(t) = f(t,y(t))\left\{\frac{y_0}{f(0,y(0))}(\Psi(t)-\Psi(0))^{\xi-1} + \mathcal{I}_{0+}^{\mu,\Psi}g(t,y(t))\right\}, t \in (0,T]. \tag{3.3}
$$

Lemme 2. *Soit $y \in C_{1-\xi,\Psi}(J,\mathbb{R})$, alors, y est une solution du problème (3.1)-(3.2) si et seulement si y satisfait l'équation intégrale (3.3).*

Preuve 19. *Soit $y \in C_{1-\xi,\Psi}(J,\mathbb{R})$, on suppose que y est une solution du problème (3.1)-(3.2), en entrant l'intégrale fractionnaire de $\Psi-RL$ aux deux côtés de l'équation (3.1), on trouve*

$$
\frac{y(t)}{f(t,y(t))} - \frac{(\Psi(t)-\Psi(0))^{\xi-1}}{\Gamma(\xi)}\left[\mathcal{J}_{0+}^{1-\xi,\Psi}\frac{t(t)}{f(t,y(t))}\right]_{t=0} = \mathcal{J}_{0+}^{\mu,\Psi}g(t,y(t)), \quad t \in (0,T].
$$

Ceci équivalant à

$$
y(t) = f(t,y(t))\left\{\frac{C}{\Gamma(\xi)}(\Psi(t)-\Psi(0))^{\xi-1} + \mathcal{J}_{0+}^{\mu,\Psi}g(t,y(t))\right\}, t \in (0,T]. \tag{3.4}
$$

Où

$$
C = \left[\mathcal{J}_{0+}^{1-\xi,\Psi}\frac{y(t)}{f(t,y(t))}\right]_{t=0}.
$$

En suite, nous évaluons la valeur de C en utilisant la condition initiale (3.2), en multipliant l'équation (3.4) par $(\Psi(t)-\Psi(0))^{1-\xi}$, on trouve

$$
(\Psi(t)-\Psi(0))^{1-\xi}y(t) = \frac{C}{\Gamma(\xi)}f(t,y(t)) + (\Psi(t)-\Psi(0))^{1-\xi}f(t,y(t))\mathcal{J}_{0+}^{\mu,\Psi}g(t,y(t)),\ t \in J.
$$

En remplaçant t par 0, on obtient

$$C = \frac{y_0 \Gamma(\xi)}{f(0, y(0))}.$$

En mettant la valeur de C dans l'équation (3.4), on obtient

$$y(t) = f(t, y(t)) \left[\frac{y_0}{f(0, y(0))} (\Psi(t) - \Psi(0))^{\xi - 1} \mathcal{J}_{0+}^{\mu, \Psi} g(t, y(t)) \right], \ t \in (0, T].$$

Donc y vérifie l'équation (3.3).

Inversement. *Soit $y \in C_{1-\xi, \Psi}(J, \mathbb{R})$ est une solution de l'équation (3.3), alors on la réécrire comme*

$$\frac{y(t)}{f(t, y(t))} = \frac{y_0}{f(0, y(0))} (\Psi(t) - \Psi(0))^{\xi - 1} + \mathcal{J}_{0+}^{\mu, \Psi} g(t, y(t)), \quad t \in (0, T]. \tag{3.5}$$

En appliquant la dérivée ${}^H\mathcal{D}_{0+}^{\mu, \nu, \Psi}$ aux deux côtés de l'équation (3.5) et en utilisant le lemme 1.4 et le lemme 2, on obtient

$$\begin{aligned} {}^H\mathcal{D}_{0+}^{\mu, \nu, \Psi} \left[\frac{y(t)}{f(t, y(t))} \right] &= \frac{y_0}{f(0, y_0)} ({}^H\mathcal{D}_{0+}^{\mu, \nu, \Psi})(\Psi(t) - \Psi(0))^{\xi - 1} + ({}^H\mathcal{D}_{0+}^{\mu, \nu, \Psi}) \mathcal{J}_{0+}^{\mu, \Psi} g(t, y(t)) \\ &= g(t, y(t)). \end{aligned}$$

il Reste à vérifier la condition initiale (3.2). De l'équation (3.5), nous avons

$$(\Psi(t) - \Psi(0))^{1 - \xi} \frac{y(t)}{f(t, y(t))} = \frac{y_0}{f(0, y(0))} + (\Psi(t) - \Psi(0))^{1 - \xi} \mathcal{J}_{0+}^{\mu, \Psi} g(t, y(t)).$$

Quand $t = 0$, on obtient

$$\left[(\Psi(t) - \Psi(0))^{1 - \xi} y(t) \right]_{t=0} = y_0.$$

Ce qui donne la condition initiale (3.2).

Pour prouver l'existence de solutions du problème(3.1)-(3.2), nous avons besoin des hypothèses suivants sur f et g.

(H1) Supposons que $f \in C(J \times \mathbb{R}, \mathbb{R} \backslash \{0\})$, f est bornée et satisfait les conditions suivantes

(i) la fonction $\upsilon \to \frac{\upsilon}{f(t, \upsilon)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ pour tout $t \in (0, T]$,

(ii) il existe $\mathrm{L} > 0$ tel que

$$|f(t, x) - f(t, y) \leq \mathrm{L} |x - y|, \quad t \in J \quad \text{et} \quad x, \ y \in \mathbb{R}.$$

(H2) Supposons que $g \in C(J \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ et qu'il existe une fonction $h \in C(J, \mathbb{R})$, tel que

$$|g(t, y)| \leq h(t), \quad t \in J \ et \ y \in \mathbb{R}.$$

Théorème 3.1. *Supposons que les hypothèses (H1)-(H2) sont vérifiées, supposons aussi que l'inégalité suivante est satisfaite*

$$\mathrm{L} \left\{ \left| \frac{y_0}{f(0, y(0))} \right| + \frac{\|h\|_\infty (\Psi(T) - \Psi(0))^\mu}{\Gamma(\mu + 1)} \right\} < 1. \tag{3.6}$$

Alors le problème (3.1)-(3.2) admet au moins une solution y dans $C_{1-\xi, \Psi}(J, \mathbb{R})$.

Preuve 20. *Posons* $X := \left(C_{1-\xi,\Psi}(J,\mathbb{R}),\ \|\cdot\|_{C_{1-\xi,\Psi}}\right)$*, alors* X *est une algèbre de Banach, on définit le sous-ensemble* S *par*

$$S = \{x \in X : \|x\|_{C_{1-\xi,\Psi}} \leq R\}.$$

Où

$$R = K\left\{\left|\frac{y_0}{f(0,y(0))}\right| + \frac{\|h\|_\infty(\Psi(T)-\Psi(0))^{\mu-\xi+1}}{\Gamma(\mu+1)}\right\}.$$

il est clair que S *est un sous-ensemble fermé , convexe et borné de* X*. On définit les deux opérateur* $A : X \to X$ *et* $B : S \to X$ *par*

$$\begin{aligned} Ay(t) &= f(t,y(t)), \quad t \in J \\ By(t) &= \frac{y_0(\Psi(t)-\Psi(0))^{\xi-1}}{f(0,y(0))} + \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^t \Psi'(s)(\Psi(t)-\Psi(s))^{\mu-1}g(s,y(s))ds, \quad t \in (0,T]. \end{aligned}$$

On récrire l'équation (3.3) sur la forme suivante

$$y(t) = Ay(t)By(t), \ y \in X, \quad t \in J.$$

Nous montrons que les opérateurs A *et* B *satisfont touts les conditions du théorème 2.3, la preuve est donnée sous les étapes suivants :*

Étape 1. *Montrons que* $A : X \to X$ *est Lipschitzien. En utilisant l'hypothèse (H1)-(ii), on obtient*

$$\begin{aligned} \left|(\Psi(t)-\Psi(0))^{1-\xi}(Ax(t)-Ay(t))\right| &= \left|(\Psi(t)-\Psi(0))^{1-\xi}(f(t,x(t))-f(t,y(t)))\right| \\ &\leq L\left|(\Psi(t)-\Psi(0))^{1-\xi}(x(t)-y(t))\right| \\ &\leq L\|x-y\|_{C_{1-\xi,\Psi}}(J,\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Cela nous donne

$$\|Ax-Ay\|_{C_{1-\xi,\Psi}} \leq L\|x-y\|_{C_{1-\xi,\Psi}}(J,\mathbb{R}). \tag{3.7}$$

Étape 2. *Montrons que* $B : S \to X$ *est complètement continu. Premièrement, montrons que* $B : S \to X$ *est continue, soit* $y_n \to y$ *dans* S*, alors*

$$\begin{aligned} \|By_n - By\|_{C_{1-\xi,\Psi}} &= \max_{t\in J}\left|(\Psi(t)-\Psi(0))^{1-\xi}(By_n(t)-By(t))\right| \\ &\leq \max_{t\in J}\frac{(\Psi(t)-\Psi(0))^{1-\xi}}{\Gamma(\mu)}\int_0^t \Psi'(s)(\Psi(t)-\Psi(s))^{\mu-1})\left|g(s,y_n(s))-g(s,y(s))\right|ds. \end{aligned}$$

Par la continuité de g *et le théorème de convergence dominé de Lebesgue, nous avons*

$$\|By_n - By\|_{C_{1-\xi,\Psi(J,\mathbb{R})}} \to 0 \ \textit{quand} \ \to \infty.$$

Cela implique que $B : S \to X$ *est continu. Deuxièmement, montrons que* $B(S) = \{By : y \in S\}$ *est uniformément borné, en utilisant l'hypothèse (H2), pour tout* $y \in S$ *et* $t \in J$*, on a*

$$\begin{aligned} \left|(\Psi(t)-\Psi(0))^{1-\xi}By(t)\right| &\leq \left|\frac{y_0}{f(0,y(0))}\right| \\ &\quad + \frac{(\Psi(t)-\Psi(0))^{1-\xi}}{\Gamma(\mu)}\int_0^t \Psi'(s)((\Psi(t)-\Psi(s))^{\mu-1}|g(s,y(s))|ds \\ &\leq \left|\frac{y_0}{f(0,y(0))}\right| + \frac{(\Psi(t)-\Psi(0))^{1-\xi}}{\Gamma(\mu)}\int_0^t \Psi'(s)((\Psi(t)-\Psi(s))^{\mu-1}h(s)ds \\ &\leq \left|\frac{y_0}{f(0,y(0))}\right| + \|h\|_\infty(\Psi(t)-\Psi(0))^{1-\xi}\frac{(\Psi(t)-\Psi(0))^{\mu}}{\Gamma(\mu+1)} \\ &\leq \left|\frac{y_0}{f(0,y(0))}\right|\frac{\|h\|_\infty(\Psi(T)-\Psi(0))^{\mu-\xi+1}}{\Gamma(\mu+1)}. \end{aligned}$$

Donc,

$$\|By\|_{C_{1-\xi,\Psi}} \leq \left|\frac{y_0}{f(0,y(0))}\right| \frac{\|h\|_\infty (\Psi(T)-\Psi(0))^{\mu-\xi+1}}{\Gamma(\mu+1)}. \tag{3.8}$$

Troisièmement, montrons que $B(S)$ est équicontinu. Soient $y \in S$ et $t_1, t_2 \in J$ avec $t_1 < t_2$, alors en utilisant l'hypothèse (H2) ; nous avons

$$\begin{aligned}
&\left|(\Psi(t_2)-\Psi(0))^{1-\xi}By(t_2) - (\Psi(t_1)-\Psi(0))^{1-\xi}By(t_1)\right| \\
&= \left|\left\{\frac{y_0}{f(0,y(0))} + \frac{(\Psi(t_2)-\Psi(0))^{1-\xi}}{\Gamma(\mu)}\int_0^{t_2}\Psi'(s)(\Psi(t_2)-\Psi(s))^{\mu-1}|g(s,y(s))|ds\right\}\right| \\
&- \left|\left\{\frac{y_0}{f(0,y(0))} + \frac{(\Psi(t_1)-\Psi(0))^{1-\xi}}{\Gamma(\mu)}\int_0^{t_1}\Psi'(s)(\Psi(t_1)-\Psi(s))^{\mu-1}|g(s,y(s))|ds\right\}\right| \\
&\leq \left|\frac{(\Psi(t_2)-\Psi(0))^{1-\xi}}{\Gamma(\mu)}\int_0^{t_2}\Psi'(s)(\Psi(t_2)-\Psi(s))^{\mu-1}|g(s,y(s))|ds\right| \\
&- \left|\frac{(\Psi(t_1)-\Psi(0))^{1-\xi}}{\Gamma(\mu)}\int_0^{t_1}\Psi'(s)(\Psi(t_1)-\Psi(s))^{\mu-1}|g(s,y(s))|ds\right| \\
&\leq \left|\frac{(\Psi(t_2)-\Psi(0))^{1-\xi}}{\Gamma(\mu)}\int_0^{t_2}\Psi'(s)(\Psi(t_2)-\Psi(s))^{\mu-1}h(s)ds\right| \\
&- \left|\frac{(\Psi(t_1)-\Psi(0))^{1-\xi}}{\Gamma(\mu)}\int_0^{t_1}\Psi'(s)(\Psi(t_1)-\Psi(s))^{\mu-1}h(s)ds\right| \\
&\leq \left|\frac{(\Psi(t_2)-\Psi(0))^{1-\xi}\|h\|_\infty}{\Gamma(\mu)}\int_0^{t_2}\Psi'(s)(\Psi(t_2)-\Psi(s))^{\mu-1}ds\right| \\
&- \left|\frac{(\Psi(t_1)-\Psi(0))^{1-\xi}\|h\|_\infty}{\Gamma(\mu)}\int_0^{t_1}\Psi'(s)(\Psi(t_1)-\Psi(s))^{\mu-1}ds\right| \\
&= \frac{\|h\|_\infty}{\Gamma(\mu+1)}\left\{(\Psi(t_2)-\Psi(0))^{\mu-\xi+1} - (\Psi(t_1)-\Psi(0))^{\mu-\xi+1}\right\}.
\end{aligned}$$

Par la continuité de Ψ, il résulte que

$$|t_1-t_2| \to 0, \quad \textit{alors} \quad \left|(\Psi(t_2)-\Psi(0))^{1-\xi}By(t_2) - (\Psi(t_1)-\Psi(0))^{1-\xi}By(t_1)\right| \to 0.$$

D'après le théorème d'Arzela-Ascoli $B(S)$ est relativement compact, donc il est complètement continue.

Étape 3. *Montrons l'implication : $y = AyBx \Longrightarrow y \in S$, pour tout $x \in S$.*
Soient $y \in X$ et $x \in S$ tel que $y = AyBx$, en utilisant l'hypothèse (H2) et la bornitude de f, pour tout $t \in J$, nous avons

$$\begin{aligned}
&\left|(\Psi(t)-\Psi(0))^{1-\xi}y(t)\right| = \left|(\Psi(t)-\Psi(0))^{1-\xi}Ay(t)Bx(t)\right| \\
&= \left|(\Psi(t)-\Psi(0))^{1-\xi}f(t,y(t))\left\{\frac{y_0(\Psi(t)-\Psi(0))^{1-\xi}y(t)}{f(0,x(0))}\right.\right. \\
&+ \left.\left.\frac{1}{\Gamma 5\mu}\int_0^t \Psi'(s)(\Psi(t)-\Psi(s))^{\mu-1}g(s,x(s))ds\right\}\right| \\
&\leq |f(t,y(t))|\left\{\left|\frac{y_0}{f(0,x(0))}\right| + \frac{(\Psi(t)-\Psi(0))^{1-\xi}}{\Gamma(\mu)}\int_0^t \Psi'(s)(\Psi(t)-\Psi(s))^{\mu-1}|g(s,x(s))|ds\right\} \\
&\leq K\left\{\left|\frac{y_0}{f(0,x(0))}\right| + \frac{(\Psi(t)-\Psi(0))^{1-\xi}}{\Gamma(\mu)}\int_0^t \Psi'(s)(\Psi(t)-\Psi(s))^{\mu-1}h(s)ds\right\} \\
&\leq K\left\{\left|\frac{y_0}{f(0,x(0))}\right| + \frac{(\Psi(t)-\Psi(0))^{\mu-\xi+1}\|h\|_\infty}{\Gamma(\mu+1)}\right\}.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\|y\|_{C_{1-\xi,\Psi}} \leq K\left\{\left|\frac{y_0}{f(0,x(0))}\right| + \frac{(\Psi(T)-\Psi(0))^{\mu-\xi+1}\|h\|_\infty}{\Gamma(\mu+1)}\right\} = R.$$

Cela implique que $y \in S$.

Étape 4. *Prouvons que* $\alpha M < 1$ *où* $M = \sup\left\{\|By\|_{C_{1-\xi,\Psi}} : y \in S\right\}$. *D'après l'inégalité (3.8), nous avons*

$$M = \sup\left\{\|By\|_{C_{1-\xi,\Psi}} : y \in S\right\} \leq \left|\frac{y_0}{f(0,y(0))}\right| + \frac{(\Psi(T)-\Psi(0))^{\mu-\xi+1}\|h\|_\infty}{\Gamma(\mu+1)}.$$

De l'inégalité (3.7), nous avons un $\alpha = L$ *donc en utilisant la condition (3.6), on obtient*

$$\alpha M \leq L\left\{\left|\frac{y_0}{f(0,y(0))}\right| + \frac{(\Psi(T)-\Psi(0))^{\mu-\xi+1}\|h\|_\infty}{\Gamma(\mu+1)}\right\} < 1.$$

Finalement, toutes les condition du théorème 2.3 sont remplies, par conséquent, l'équation $y = AyBy$ *a un solution dans* S, *d'apres le lemme 2, le problème (3.1)-(3.2) admet au moins une solutions dans* s.

3.2 Estimation sur la dérivé de Ψ−Hilfer

Théorème 3.2. *Soient* $m \in C_{1-\xi,\Psi}(J,\mathbb{R})$, $t_1 \in (0,T]$, *tel que* $m(t_1) = 0$ *et* $m(t) \leq 0$, *pour tout* $t \in (0,t_1)$, *alors* ${}^H\mathcal{D}_{0+}^{\mu,\nu,\Psi} m(t_1) \geq 0$.

Preuve 21. *Définissons la fonction* $M_\Psi(.) : J \to \mathbb{R}$ *comme suit*

$$M_\Psi(t) = \int_0^t \Psi'(s)(\Psi(t)-\Psi(s))^{-\xi} m(s)ds, \quad t \in J.$$

Soit $h > 0$ *tel que* $0 < t_1 - h < t_1$, *nous avons alors*

$$\begin{aligned}
M_\Psi(t_1) - M_\Psi(t_1-h) &= \int_0^{t_1} \Psi'(s)(\Psi(t_1)-\Psi(s))^{-\xi} m(s)ds \\
&\quad - \int_0^{t_1-h} \Psi'(s)(\Psi(t_1-h)-\Psi(s))^{-\xi} m(s)ds \\
&= \int_0^{t_1-h} \Psi'(s)\left\{(\Psi(t_1)-\Psi(s))^{-\xi} - (\Psi(t_1-h)-\Psi(s))^{-\xi}\right\} m(s)ds \\
&\quad + \int_{t_1-h}^{t_1} \Psi'(s)(\Psi(t_1)-\Psi(s))^{-\xi} m(s)ds.
\end{aligned}$$

Posons

$$I_1 = \int_0^{t_1-h} \Psi'(s)\left\{(\Psi(t_1)-\Psi(s))^{-\xi} - (\Psi(t_1-h)-\Psi(s))^{-\xi}\right\} m(s)ds.$$

et

$$I_2 = \int_{t_1-h}^{t_1} \Psi'(s)(\Psi(t_1)-\Psi(s))^{-\xi} m(s)ds.$$

Alors,

$$M_\Psi(t_1) - M_\Psi(t_1-h) = I_1 + I_2. \tag{3.9}$$

Puisque $\xi > 0$ *et* Ψ *est un fonction croissante, nous avons*

$$0 < (\Psi(t_1-h)-\Psi(s))^{\xi} < (\Psi(t_1)-\Psi(s))^{\xi} < 0 \text{ pour } 0 < s < t_1 - h < t_1$$

Cela donne

$$(\Psi(t_1)-\Psi(s))^{-\xi}-(\Psi(t_1-h)-\Psi(s))^{-\xi}<0 \text{ pour } 0<s<t_1-h<t_1.$$

Par l'hypothèse $m(s)\leq 0,\ s\in(0,t_1)$ *et le fait que* $\Psi'(s)>0,\ s\in J$, *on a*

$$\Psi'(s)\left\{(\Psi(t_1)-\Psi(s))^{-\xi}-(\Psi(t_1-h)-\Psi(s))^{-\xi}\right\}m(s)\geq 0 \text{ pour } \ 0<s<t_1-h<t_1.$$

Cela implique que $I_1\geq 0$, *par conséquent, l'équation (3.9) se réduit à*

$$M_\Psi(t_1)-M_\Psi(t_1-h)\geq I_2. \tag{3.10}$$

Puisque $(\Psi(t)-\Psi(0))^{1-\xi}m(t)$ *est continue sur* J, *il existe une constante* $K(t_1)>0$, *telle que pour tout* $0<t_1-h<s<t_1$, *on a*

$$-K(t_1)(t_1-s)\leq(\Psi(t_1)-\Psi(0))^{1-\xi}m(t_1)-(\Psi(s)-\Psi(0))^{1-\xi}m(s)\leq K(t_1)(t_1-s).$$

Par l'hypothèse $m(t_1)=0$, *pour* $0<t_1-h<s<t_1$, *nous avons*

$$-K(t_1)(t_1-s)\leq-(\Psi(s)-\Psi(0))^{1-\xi}m(s)\leq K(t_1)(t_1-s).$$

Cela donne

$$(\Psi(s)-\Psi(0))^{1-\xi}m(s)\geq -K(t_1)(t_1-s), 0<t_1-h<s<t_1. \tag{3.11}$$

D'après l'inégalité $-K(t_1)(t_1-s)>-K(t_1)h$, *on a*

$$(\Psi(s)-\Psi(0))^{1-\xi}m(s)>-K(t_1)h, 0<t_1-h<s<t_1.$$

Cela implique

$$\Psi'(s)(\Psi(t_1)-\Psi(s))^{-\xi}m(s)\geq -K(t_1)h\Psi'(s)(\Psi(t_1)-\Psi(s))^{-\xi}(\Psi(s)-\Psi(0))^{\xi-1}. \tag{3.12}$$

Comme Ψ *est croissante, pour* $0<t_1-h<s<t_1$, *on a*

$$\Psi(t_1-h)<\Psi(s)<\Psi(t_1),\quad s\in(t_1-h,t_1)$$

Comme $\xi\leq 1$, *on a*

$$(\Psi(t_1-h)-\Psi(0))^{\xi-1}>(\Psi(s)-\Psi(0))^{\xi-1}>(\Psi(t_1)-\Psi(0))^{\xi-1}, s\in(t_1-h,t_1). \tag{3.13}$$

D'après les inégalités (3.12) et (3.13), on trouve

$$\Psi'(s)(\Psi(t_1)-\Psi(s))^{-\xi}m(s)>-hK(t_1)\Psi'(s)(\Psi(t_1)-\Psi(s))^{-\xi}(\Psi(t_1-h)-\Psi(0))^{\xi-1}.$$

En intégrant l'inégalité précédente de t_1-h *à* t_1 *et en utilisant la définition de* I_2, *on obtient*

$$\begin{aligned} I_2 &> -hK(t_1)(\Psi(t_1-h)-\Psi(0))^{\xi-1}\int_{t_1-h}^{t_1}\Psi'(s)(\Psi(t_1)-\Psi(s))^{-\xi}ds \\ &\geq -hK(t_1)(\Psi(t_1-h)-\Psi(0))^{\xi-1}\frac{(\Psi(t_1)-\Psi(t_1-h))^{\xi-1}}{1-\xi}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

A partir des inégalités (3.10) et (3.14) on a

$$\frac{M_\Psi(t_1)-M_\Psi(t_1-h)}{h}>-K(t_1)(\Psi(t_1-h)-\Psi(0))^{\xi-1}\frac{(\Psi(t_1)-\Psi(t_1-h))^{1-\xi}}{1-\xi}.$$

On fait h *tend vers* 0, *on obtient*

$$\left[\frac{d}{dt}M_\Psi(t)\right]_{t=t_1}\geq 0.$$

Puisque $\Psi'(t_1) > 0$, *en utilisant la définition de* M_Ψ *on a*

$$\left[\frac{1}{\Psi'(t)}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\Gamma(1-\xi)}\int_0^t \Psi'(s)(\Psi(t)-\Psi(s))^{-\xi}m(s)ds\right)\right]_{t=t_1} \geq 0.$$

Cela donne

$$^{H}\mathcal{D}_{0+}^{\mu,\nu,\Psi}m(t_1) = \left[\mathcal{J}_{0+}^{\nu(1-\mu),\Psi}\left(\frac{1}{\Psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)\mathcal{J}_{0+}^{(1-\nu)(1-\mu),\Psi}m(t)\right]_{t=t_1} \geq 0.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Théorème 3.3. *Soient* $m \in C_{1-\xi,\Psi}(J,\mathbb{R}$ *et* $t_1 \in (0,T]$, *tel que* $m(t_1) = 0$ *et* $m(t) \geq 0$ *pour tout* $t \in (0,t_1)$, *alors* $^{H}\mathcal{D}_{0+}^{\mu,\nu,\Psi}m(t_1) \leq 0$.

Preuve 22. *La démonstration se fait de même méthode que celle du théorème 3.3.*

3.3 Inégalités différentielles hybrides avec la dérivée Ψ-Hilfer

Théorème 3.4. *Soit* $f \in C(J\times\mathbb{R},\mathbb{R}\setminus\{0\})$, $g \in C(J\times\mathbb{R},\ \mathbb{R})$, *supposons que l'hypothèse (H1)(i) est vérifiée, soient* $y,\ z \in C_{1-\xi,\Psi}(J,\mathbb{R})$ *telles que*

$$^{H}\mathcal{D}_{0+}^{\mu,\nu,\Psi}\left[\frac{y(t)}{f(t,y(t))}\right] \leq g(t,y(t)),\quad t\in(0,T]. \tag{3.15}$$

$$^{H}\mathcal{D}_{0+}^{\mu,\nu,\Psi}\left[\frac{z(t)}{f(t,z(t))}\right] \geq g(t,z(t)),\quad t\in(0,T]. \tag{3.16}$$

et l'une des inégalités est stricte, alors

$$(\Psi(t)-\Psi(0))^{1-\xi}y(t)|_{t=0} < (\Psi(t)-\Psi(0))^{1-\xi}z(t)|_{t=0},$$

implique que

$$y < z \text{ dans } C_{1-\xi,\Psi}(J,\mathbb{R}).$$

Preuve 23. *Supposons que la conclusion du théorème ne soit pas vraie , en utilisant la continuité de* $(\Psi(t)-\Psi(0))^{1-\xi}y(t)$ *et* $(\Psi(t)-\Psi(0))^{1-\xi}z(t)$ *sur* J, *il existe* $t_1 \in (0,T]$, *tel que*

$$(\Psi(t_1)-\Psi(0))^{1-\xi}y(t_1) = (\Psi(t_1)-\Psi(0))^{1-\xi}z(t_1).$$

Et

$$(\Psi(t)-\Psi(0))^{1-\xi}y(t) < (\Psi(t)-\Psi(0))^{1-\xi}z(t)\ t\in[0,t_1).$$

Cela donne

$$y(t_1) = z(t_1) \text{ et } y(t) < z(t),\ t\in(0,t_1). \tag{3.17}$$

Définie

$$Y(t) = \frac{y(t)}{f(t,y(t))} \text{ et } Z(t) = \frac{z(t)}{f(t,z(t))},\ t\in(0,T].$$

Puisque $Y, Z \in C_{1-\xi,\Psi}(J,\mathbb{R})$, *en utilisant les relations dans l'équation (3.17) et l'hypothèse (H1)-(i), on obtient*

$$Y(t_1) = Z(t) \text{ et } Y(t) \leq Z(t),\ t\in(0,t_1).$$

Posons $m(t) = Y(t) - Z(t),\ t\in(0,T]$, *on a alors* $m \in C_{1-\xi,\Psi}(J,\mathbb{R})$ *et*

$$m(t_1) = 0 \text{ et } m(t) \leq 0,\ t\in(0,t_1).$$

Donc, d'après le théorème 3.2, on obtient

$$^{H}\mathcal{D}_{0+}^{\mu,\nu,\Psi} m(t_1) \geq 0.$$

Cela implique que

$$^{H}\mathcal{D}_{0+}^{\mu,\nu,\Psi} Y(t_1) \geq^{H} \mathcal{D}_{0+}^{\mu,\nu,\Psi} Z(t_1).$$

Par l'inégalité (3.15), en supposant que l'inégalité (3.15) est stricte on obtient

$$g(t_1 y(t_1)) \geq^{H} \mathcal{D}_{0+}^{\mu,\nu,\Psi} Y(t_1) \geq^{H} \mathcal{D}_{0+}^{\mu,\nu,\Psi} Z(t_1) \geq g(t_1, z(t_1)).$$

Ceci est une contradiction avec le fait que $y(t_1) = z(t_1)$, nous avons donc

$$y < z \text{ dans } C_{1-\xi,\Psi}(J,\mathbb{R}).$$

Théorème 3.5. *Supposons que les condition du théorème 3.4 soient vérifiées avec les inégalités (3.16) et (3.15) ne sont pas strictes, supposons de plus qu'il existe un nombre réel $L > 0$, tel que*

$$g(t,x_1) - g(t,x_2) \leq L\left(\frac{x_1}{f(t,x_1)} - \frac{x_2}{f(t,x_2)}\right), \ ei\ t \in J. \tag{3.18}$$

Pour tout $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, avec $x_1 \geq x_2$, alors

$$(\Psi(t) - \Psi(0))^{1-\xi} y(t)|_{t=0} \leq (\Psi(t) - \Psi(0))^{1-\xi} z(t)|_{t=0}.$$

Implique que

$$y \leq z \text{ dans } C_{1-\xi,\Psi}(J,\mathbb{R}).$$

Preuve 24. *Soit ϵ un nombre réel strictement positif fixé, nous avons*

$$\frac{z_\epsilon(t)}{f(t,z_\epsilon(t))} = \frac{z(t)}{f(t,z(t))} + \epsilon E_\mu(2L(\Psi(t) - \Psi(0))^\mu), \ t \in (0,T]. \tag{3.19}$$

Où $E_\mu(\cdot)$ est la fonction de Mittag-Leffler, ceci implique que

$$\frac{z_\epsilon(t)}{f(t,z_\epsilon(t))} > \frac{z(t)}{f(t,z(t))}.$$

En utilisant l'hypothèse (H1)(i), on trouve

$$z_\epsilon(t) > z(t), \ t \in (0,T]. \tag{3.20}$$

On définit les fonctions $Z_\epsilon(.), Z(.) : J \to \mathbb{R}$ par

$$Z_\epsilon = \frac{z_\epsilon(t)}{f(t,z_\epsilon(t))} \text{ et } Z(t) = \frac{z(t)}{f(t,z(t))}, \ t \in (0,T].$$

Alors l'équation (3.19) peut être prendre la forme suivante

$$Z_\epsilon(t) = Z(t) + \epsilon E_\mu(2L(\Psi(t) - \Psi(0))^\mu), \ t \in (0,T].$$

En appliquant $^{H}\mathcal{D}_{0+}^{\mu,\nu,\Psi}$ aux deux côtés de l'équation ci-dessus et en utilisant l'inégalité (3.16), on obtient

$$\begin{aligned} ^{H}\mathcal{D}_{0+}^{\mu,\nu,\Psi} Z_\epsilon(t) &=^{H} \mathcal{D}_{0+}^{\mu,\nu,\Psi} Z(t) +^{H} \mathcal{D}_{0+}^{\mu,\nu,\Psi} \epsilon E_\mu(2L(\Psi(t) - \Psi(0))^\mu) \\ &\geq g(t,z(t)) +^{H} \mathcal{D}_{0+}^{\mu,\nu,\Psi} \epsilon E_\mu(2L(\Psi(t) - \Psi(0))^\mu). \end{aligned} \tag{3.21}$$

D'après le remarque1.4, on obtient

$$
\begin{aligned}
{}^{H}\mathcal{D}_{0+}^{\mu,\nu,\Psi} E_\mu(2L(\Psi(t)-\Psi(0))^\mu) &= {}^{H}\mathcal{D}_{0+}^{\mu,\nu,\Psi}\left\{\sum_{K=0}^{\infty}\frac{[(2L(\Psi(t)-\Psi(0))^\mu)]^K}{\Gamma(K\mu+1)}\right\} \\
&= \sum_{K=1}^{\infty}\frac{2^K L^K}{\Gamma(K\mu+1)}\frac{\Gamma(K\mu+1)}{\Gamma(K\mu+1-\mu)}(\Psi(t)-\Psi(0))^{K\mu-\mu} \\
&= \sum_{K=0}^{\infty}\frac{2^{K+1}L^{K+1}}{\Gamma(K\mu+\mu-\mu+1)}(\Psi(t)-\Psi(0))^{K\mu+\mu-\mu} \\
&= 2LE_\mu(2L(\Psi(t)-\Psi(0))^\mu). \qquad (3.22)
\end{aligned}
$$

L'inégalité (3.21) se réduit donc à

$$
{}^{H}\mathcal{D}_{0+}^{\mu,\nu,\Psi} Z_\epsilon(t) \geq g(t,z(t)) + 2L\epsilon E_\mu(2L(\Psi(t)-\Psi(0))^\mu),\ t\in(0,T]. \qquad (3.23)
$$

En utilisant la condition sur g donnée en (3.18) et en utilisant l'équation (3.19) on a

$$
\begin{aligned}
g(t,z_\epsilon(t)) - g(t,z(t)) &\leq L\left[\frac{z_\epsilon}{f(t,z_\epsilon(t))} - \frac{z(t)}{f(t,z(t))}\right] \\
&\leq L\epsilon E_\mu(2L(\Psi(t)-\Psi(0))^\mu),\ t\in J. \qquad (3.24)
\end{aligned}
$$

En substituant l'inégalité (3.24) dans l'inégalité (3.23), on obtient

$$
\begin{aligned}
{}^{H}\mathcal{D}_{0+}^{\mu,\nu,\Psi} Z_\epsilon(t) &\geq g(t,z_\epsilon(t)) - L\epsilon E_\mu(2L(\Psi(t)-\Psi(0))^\mu) + 2L\epsilon E_\mu(2L(\Psi(t)-\Psi(0))^\mu) \\
&\geq g(t,z_\epsilon(t)) + L\epsilon E_\mu(2L(\Psi(t)-\Psi(0))^\mu) \\
&\geq g(t,z_\epsilon(t)).
\end{aligned}
$$

Donc,

$$
{}^{H}\mathcal{D}_{0+}^{\mu,\nu,\Psi}\left[\frac{z_\epsilon(t)}{f(t,z_\epsilon(t))}\right] \geq g(t,z_\epsilon(t)),\ t\in(0,T].
$$

De l'inégalité (3.20), nous avons

$$
(\Psi(t)-\Psi(0))^{1-\xi} z_\epsilon(t)|_{t=0} > (\Psi(t)-\Psi(0))^{1-\xi} z(t)|_{t=0}.
$$

Par l'hypothèse

$$
(\Psi(t)-\Psi(0))^{1-\xi} z(t)|_{t=0} \geq (\Psi(t)-\Psi(0))^{1-\xi} y(t)|_{t=0}.
$$

Donc,

$$
(\Psi(t)-\Psi(0))^{1-\xi} z_\epsilon(t)|_{t=0} > (\Psi(t)-\Psi(0))^{1-\xi} y(t)|_{t=0}. \qquad (3.25)
$$

Appliquant le théorème 3.4 avec $z = z_\epsilon$, la condition (3.25) implique

$$
y < z_\epsilon \text{ dans } C_{1-\xi,\Psi}(J,\mathbb{R}). \qquad (3.26)
$$

En prenant $\epsilon \to 0$ dans l'équation (3.19) et en utilisant l'hypothèse (H1)(i), on trouve

$$
\lim_{\epsilon\to 0} z_\epsilon(t) = z(t). \qquad (3.27)
$$

par utilisation de (3.27), on obtient

$$
\lim_{\epsilon\to 0}\|z_\epsilon - z\|_{C_{1-\xi,\Psi}(J,\mathbb{R})} = \lim_{\epsilon\to 0}\left\{\max_{t\in[0,T]}(\Psi(t)-\Psi(0))^{1-\xi}|z_\epsilon(t)-z(t)\ |\right\} = 0.
$$

Cela donne $\lim_{\epsilon\to 0} z_\epsilon = z$ dans $C_{1-\xi,\Psi}(J,\mathbb{R})$ par conséquent, l'inégalité (3.26) se réduit à $y \leq z$ dans $C_{1-\xi,\Psi}(J,\mathbb{R})$.

3.4 Solution maximale et minimale

Dans cette partie, nous démontrerons l'existence de solutions maximales et minimales pour le problème (3.1)-(3.2) dans l'espace $C_{1-\xi,\Psi}(J,\mathbb{R})$.

Définition 3.1. *Soit $r : J \to \mathbb{R}$ une fonction de $C_{1-\xi,\Psi}(J,\mathbb{R})$, r est dite solution minimale du problème (3.1)-(3.2) si pour toutes solution $y \in C_{1-\xi,\Psi}(J,\mathbb{R})$ de (3.1)-(3.2), on a $y \leq r$ dans $C_{1-\xi,\Psi}(J,\mathbb{R})$.*

Définition 3.2. *Soit $q : J \to \mathbb{R}$ une fonction de $C_{1-\xi,\Psi}(J,\mathbb{R})$, q est dite solution minimale du problème (3.1)-(3.2) si pour toutes solution $y \in C_{1-\xi,\Psi}(J,\mathbb{R})$ de (3.1)-(3.2), on a $y \geq q$ dans $C_{1-\xi,\Psi}(J,\mathbb{R})$.*

Soit $\epsilon > 0$, considérons le problème hybride suivant

$$
{}^{H}\mathcal{D}_{0+}^{\mu,\nu,\Psi}\left[\frac{y(t)}{f(t,y(t))}\right] = g(t,y(t)) + \epsilon,\ t \in (0,T]. \tag{3.28}
$$

$$
(\Psi(t) - \Psi(0))^{1-\xi} y(t)|_{t=0} = y_0 + \epsilon \in \mathbb{R}. \tag{3.29}
$$

Théorème 3.6. *Supposons que les hypothèse (H1)-(H2) et la condition (3.6) sont vérifiées, alors pour tout $\epsilon > 0$ suffisamment petit, le problème (3.28)-(3.29) admet au moins une solution dans $C_{1-\xi,\Psi}(J,\mathbb{R})$.*

Preuve 25. *Par la condition (3.6), il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que*

$$
L\left\{\left|\frac{y_0+\epsilon}{f(0,y(0))}\right| + \frac{(\|h\|_\infty + \epsilon)(\Psi(T)-\Psi(0))^\mu}{\Gamma(\mu+1)}\right\} < 1, \quad 0 < \epsilon \leq \epsilon_0.
$$

En suivant les mêmes étapes que la preuve du théorème (3.1), on peut facilement prouver l'existence de solution du problème (3.28)-(3.29).

Théorème 3.7. *Supposons que les hypothèse (H1)-(H2) et la condition problème (3.6) sont vérifiées, alors pour tout $\epsilon > 0$, le problème (3.1)-(3.2) admet au moins une solution maximal dans $C_{1-\xi,\Psi}(J,\mathbb{R})$.*

Preuve 26. *Soit $\{\epsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$ une suite réelles décroissante positives telle que $\lim_{n\to\infty}\epsilon_n = 0$ et ϵ_0 satisfait l'inégalité*

$$
L\left\{\left|\frac{y_0+\epsilon}{f(0,y(0))}\right| + \frac{(\|h\|_\infty + \epsilon)(\Psi(T)-\Psi(0))^\mu}{\Gamma(\mu+1)}\right\} < 1. \tag{3.30}
$$

Comme $\epsilon_n \leq \epsilon_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il en résulte et que

$$
L\left\{\left|\frac{y_0+\epsilon_n}{f(0,y(0))}\right| + \frac{(\|h\|_\infty + \epsilon_n)(\Psi(T)-\Psi(0))^\mu}{\Gamma(\mu+1)}\right\} < 1,\ \textit{pour tout } n \in \mathbb{N}^*.
$$

Donc, le théorème 3.6 garantit l'existence de solutions $r(\cdot\,,\epsilon_n) \in C_{1-\xi,\Psi}(J,\mathbb{R})$ du problème suivant

$$
\begin{cases}
{}^{H}\mathcal{D}_{0+}^{\mu,\nu,\Psi}\left[\frac{y(t)}{f(t,y(t))}\right] = g(t,y(t)) + \epsilon_n,\ t \in (0,T] \\
(\Psi(t) - \Psi(0))^{1-\xi} y(t)|_{t=0} = y_0 + \epsilon_n \in \mathbb{R}.
\end{cases} \tag{3.31}
$$

De (3.31), il résulte que

$$
{}^{H}\mathcal{D}_{0+}^{\mu,\nu,\Psi}\left[\frac{r(t,\epsilon_n)}{f(t,r(t,\epsilon_n))}\right] > g(t,r(t,\epsilon_n)), \quad t \in (0,T].
$$

De plus, toute solution $u \in C_{1-\xi,\Psi}(J,\mathbb{R})$ *du problème (3.1)-(3.2) satisfait*

$$ {}^{H}\mathcal{D}^{\mu,\nu,\Psi}_{0+}\left[\frac{u(t)}{f(t,u(t))}\right] \leq g(t,u(t)), \quad t \in (0,T]. $$

d'après le théorème (3.4), la condition

$$ (\Psi(t)-\Psi(0))^{1-\xi}u(t)|_{t=0} = y_0 < y_0+\epsilon_n = (\Psi(t)-\Psi(0))^{1-\xi}r(t,\epsilon_n)|_{t=0}. $$

implique

$$ u < r(\cdot,\epsilon_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}\cup\{0\} \text{ dans } C_{1-\xi,\Psi}(J,\mathbb{R}). \tag{3.32} $$

Soit $r(t,\epsilon_1)$ *et* $r(t,\epsilon_2)$ *les solutions de (3.31), on a alors*

$$ \begin{aligned} {}^{H}\mathcal{D}^{\mu,\nu,\Psi}_{0+}\left[\frac{r(t,\epsilon_1)}{f(t,r(t,\epsilon_1))}\right] &= g(t,r(t,\epsilon_1))+\epsilon_1 \\ &> g(t,r(t,\epsilon_1))+\epsilon_2 \\ {}^{H}\mathcal{D}^{\mu,\nu,\Psi}_{0+}\left[\frac{r(t,\epsilon_2)}{f(t,r(t,\epsilon_2))}\right] &\leq g(t,r(t,\epsilon_2))+\epsilon_2. \end{aligned} $$

et

$$ (\Psi(t)-\Psi(0))^{1-\xi}r(t,\epsilon_1)|_{t=0} = y_0+\epsilon_1 > y_0+\epsilon_2 = (\Psi(t)-\Psi(0))^{1-\xi}r(t,\epsilon_2)|_{t=0}. $$

En appliquant le théorème 3.4, nous avons

$$ r(\cdot\ ,\epsilon_1) > r(\cdot\ ,\epsilon_2) \text{ dans } C_{1-\xi,\Psi}(J,\mathbb{R}). $$

On en conclut que $r(\cdot\ ,\epsilon_n)$ *est une suite bornée inférieurement et décroissante dans* $C_{1-\xi,\Psi}(J,\mathbb{R})$*, donc, elle est convergente, soit* $r \in C_{1-\xi,\Psi}(J,\mathbb{R})$ *tel que*

$$ \|r(\cdot\ ,\epsilon_n)-r(\cdot)\|_{C_{1-\xi,\Psi}} \to 0 \text{ quand } n \longrightarrow \infty. $$

$$ (\Psi(t)-\Psi(0))^{1-\xi}r(t) = \lim_{n\longrightarrow\infty}(\Psi(t)-\Psi(0))^{1-\xi}r(t,\epsilon_n), t \in J. \tag{3.33} $$

Nous montrons que la convergence dans (3.33) est uniforme sur J *, pour cela il suffit de prouve que la suite* $\left\{(\Psi(\cdot)-\Psi(0))^{1-\xi}r(\cdot,\epsilon_n)\right\}_{n>0}$ *est equicontinue sur* J*, soit* $t_1,t_2 \in J$*, avec* $t_1 > t_2$.

alors

$$\begin{aligned}
&\left|(\Psi(t_1)-\Psi(0))^{1-\xi}r(t_1,\epsilon_n)-(\Psi(t_2)-\Psi(0))^{1-\xi}r(t_2,\epsilon_n)\right|\\
=&\left|f(t_1,r(t_1,\epsilon_n))\left\{\frac{y_0+\epsilon_n}{f(0,r(0,\epsilon_n))}+\frac{(\Psi(t_1)-\Psi(0))^{1-\xi}}{\Gamma(\mu)}\int_0^{t_1}\Psi'(s)(\Psi(t_1)-\Psi(s))^{\mu-1}(g(s,r(s,\epsilon_n))+\epsilon_n)ds\right\}\right|\\
-&\left|f(t_2,r(t_2,\epsilon_n))\left\{\frac{y_0+\epsilon_n}{f(0,r(0,\epsilon_n))}+\frac{(\Psi(t_2)-\Psi(0))^{1-\xi}}{\Gamma(\mu)}\int_0^{t_2}\Psi'(s)(\Psi(t_2)-\Psi(s))^{\mu-1}(g(s,r(s,\epsilon_n))+\epsilon_n)ds\right\}\right|\\
=&\left|f(t_1,r(t_1,\epsilon_n))\left\{\frac{y_0+\epsilon_n}{f(0,r(0,\epsilon_n))}+\frac{(\Psi(t_1)-\Psi(0))^{1-\xi}}{\Gamma(\mu)}\int_0^{t_1}\Psi'(s)(\Psi(t_1)-\Psi(s))^{\mu-1}(g(s,r(s,\epsilon_n))+\epsilon_n)ds\right\}\right|\\
-&\left|f(t_2,r(t_2,\epsilon_n))\left\{\frac{y_0+\epsilon_n}{f(0,r(0,\epsilon_n))}+\frac{(\Psi(t_2)-\Psi(0))^{1-\xi}}{\Gamma(\mu)}\int_0^{t_1}\Psi'(s)(\Psi(t_2)-\Psi(s))^{\mu-1}(g(s,r(s,\epsilon_n))+\epsilon_n)ds\right\}\right|\\
+&\left|f(t_2,r(t_2,\epsilon_n))\left\{\frac{y_0+\epsilon_n}{f(0,r(0,\epsilon_n))}+\frac{(\Psi(t_1)-\Psi(0))^{1-\xi}}{\Gamma(\mu)}\int_0^{t_1}\Psi'(s)(\Psi(t_1)-\Psi(s))^{\mu-1}(g(s,r(s,\epsilon_n))+\epsilon_n)ds\right\}\right|\\
-&\left|f(t_2,r(t_2,\epsilon_n))\left\{\frac{y_0+\epsilon_n}{f(0,r(0,\epsilon_n))}+\frac{(\Psi(t_2)-\Psi(0))^{1-\xi}}{\Gamma(\mu)}\int_0^{t_2}\Psi'(s)(\Psi(t_2)-\Psi(s))^{\mu-1}(g(s,r(s,\epsilon_n))+\epsilon_n)ds\right\}\right|\\
&\leq|f(t_1,r(t_1,\epsilon_n))-f(t_2,r(t_2,\epsilon_n))|\times\\
&\left\{\left|\frac{y_0+\epsilon_n}{f(0,r(0,\epsilon_n))}\right|+\frac{(\Psi(t_1)-\Psi(0))^{1-\xi}}{\Gamma(\mu)}\int_0^{t_1}\Psi'(s)(\Psi(t_1)-\Psi(s))^{\mu-1}(|g(s,r(s,\epsilon_n))|+\epsilon_n)ds\right\}\\
&+|f(t_2,r(t_2,\epsilon_n))|\left\{\frac{(\Psi(t_1)-\Psi(0))^{1-\xi}}{\Gamma(\mu)}\int_0^{t_1}\Psi'(s)(\Psi(t_1)-\Psi(s))^{\mu-1}(|g(s,r(s,\epsilon_n))|+\epsilon_n)ds\right\}\\
&\quad-\frac{(\Psi(t_2)-\Psi(0))^{1-\xi}}{\Gamma(\mu)}\int_0^{t_2}\Psi'(s)(\Psi(t_2)-\Psi(s))^{\mu-1}(|g(s,r(s,\epsilon_n))|+\epsilon_n)ds.
\end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse (H2), nous avons $(|g(t,r(t,\epsilon_n))|+\epsilon_n\leq\|h\|_\infty+\epsilon_n, t\in J$*, par conséquent, à partir de l'inégalité ci-dessus, on obtient*

$$\begin{aligned}
&|(\Psi(t_1)-\Psi(0))^{1-\xi}r(t_1,\epsilon_n)-(\Psi(t_2)-\Psi(0))^{1-\xi}r(t_2,\epsilon_n)|\\
&\leq|f(t_1,r(t_1,\epsilon_n))-f(t_2,r(t_2,\epsilon_n))|\left\{\left|\frac{y_0+\epsilon_n}{f(0,r(0,\epsilon_n))}\right|+\frac{(\|h\|_\infty+\epsilon_n)(\Psi(t_1)-\Psi(0))^{\mu+1-\xi}}{\Gamma(\mu+1)}\right\}\\
&+K^*(\|h\|_\infty+\epsilon_n)\left\{\frac{\Psi(t_1)-\Psi(0))^{\mu+1-\xi}}{\Gamma(\mu+1)}-\frac{\Psi(t_2)-\Psi(0))^{\mu+1-\xi}}{\Gamma(\mu+1)}\right\}. \qquad (3.34)
\end{aligned}$$

Où

$$K^*=\sup_{(t,y)\in J\times[-R,R]}|f(t,r(t,\epsilon_n))|.$$

Puisque f *est continue sur l'ensemble compact* $J\times[-R,R]$*, on a*

$$|f(t_1,r(t_1,\epsilon_n))-f(t_2,r(t_2,\epsilon_n))|\longrightarrow 0 \ \ \textit{quant} \ \ |t_1-t_2|\longrightarrow 0. \qquad (3.35)$$

Uniformément pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ *en utilisant la condition (3.35) et la continuité de fonction* Ψ *dans l'inégalité (3.34) on obtient*

$$(\Psi(t_1)-\Psi(0))^{1-\xi}r(t_1,\epsilon_n)-(\Psi(t_2)-\Psi(0))^{1-\xi}r(t_2,\epsilon_n)|\to 0 \textit{ comme } |t_1-t_2|\to 0.$$

Cela preuve que $\{(\Psi(t)-\Psi(0))^{1-\xi}r(t,\epsilon_n)\}$ *est equicontinue et donc* $(\Psi(t)-\Psi(0))^{1-\xi}r(t,\epsilon_n)\to(\Psi(t)-\Psi(0))^{1-\xi}r(t)$ *converge uniformément sur* J*, nous prouvons que* $r\in C_{1-\xi,\Psi}(J,\mathbb{R})$ *est une solution de (3.1)-(3.2), puisque* $r(\cdot\,,\epsilon_n)\in C_{1-\xi,\Psi}(J,\mathbb{R})$ *est une solution de (3.31), nous avons*

$$r(t,\epsilon_n)=f(t,r(t,\epsilon_n))\left\{\frac{y_0+\epsilon_n}{f(0,r(0,\epsilon_n))}(\Psi(t)-\Psi(0))^{1-\xi}+\mathcal{J}_{0+}^{\mu,\Psi}(g(t,r(t,\epsilon_n))+\epsilon_n)\right\}, t\in(0,T].$$

En utilisant la continuité des fonction f et g et en prenant la limite comme $n \to 0$ dans l'équation ci-dessus, nous obtenons

$$r(t) = f(t, r(t)) \left\{ \frac{y_0}{f(0, r(0))} (\Psi(t) - \Psi(0))^{1-\xi} + \mathcal{J}_{0+}^{\mu,\Psi} g(t, r(t)) \right\}, t \in (0, T].$$

Ainsi, $r(t)$ est une solution de (3.1)-(3.2), d'après l'inégalité (26), on trouve que $u \leq \lim_{n\to\infty}$ dans $C_{1-\xi,\Psi}(J, \mathbb{R})$, donc $u \leq r$ dans $C_{1-\xi,\Psi}(J, \mathbb{R})$, finalement, le problème (3.1)-(3.2) admet une solution maximale dans $C_{1-\xi,\Psi}(J, \mathbb{R})$.

3.5 Théorèmes de comparaison

Théorème 3.8. *Supposons que les hypothèse (H1)-(H2) et la condition (3.6) sont vérifiées, supposons qu'il existe une fonction $u \in C_{1-\xi,\Psi}(J, \mathbb{R})$ telle que*

$$^H\mathcal{D}_{0+}^{\mu,\nu,\Psi} \left[\frac{u(t)}{f(t, u(t))} \right] \leq g(t, u(t)), \quad t \in (0, T], \tag{3.36}$$

$$(\Psi(t) - \Psi(0))^{1-\xi} u(t)|_{t=0} \leq y_0. \tag{3.37}$$

Alors,

$$u \leq r \text{ dans } C_{1-\xi,\Psi}(J, \mathbb{R}),$$

où r est une solution maximale du problème (3.1)-(3.2).

Preuve 27. *Soit $\epsilon > 0$ un nombre réel suffisamment petit, d'après le théorème(3.7), le problème (3.28)-(3.29) a au moins une solution que l'on note $r(\cdot\ , \epsilon) \in C_{1-\xi,\Psi}(J, \mathbb{R})$, de plus, la limite*

$$(\Psi(t) - \Psi(0))^{1-\xi} r(t) = \lim_{\epsilon\to 0} (\Psi(t) - \Psi(0))^{1-\xi} r(t, \epsilon), \tag{3.38}$$

est uniforme sur J où $r \in C_{1-\xi,\Psi}(J, \mathbb{R})$ est une solution maximale du problème (3.1)-(3.2), comme $r(t, \epsilon)$ est une solution de (3.28)(3.29). Donc

$$^H\mathcal{D}_{0+}^{\mu,\nu,\Psi} \left[\frac{r(t, \epsilon)}{f(t, r(t, \epsilon))} \right] = g(t, r(t, \epsilon)), \quad t \in (0, T]. \tag{3.39}$$

$$(\Psi(t) - \Psi(0))^{1-\xi} r(t, \epsilon)|_{t=0} = y_0 + \epsilon \in \mathbb{R}. \tag{3.40}$$

Alors,

$$^H\mathcal{D}_{0+}^{\mu,\nu,\Psi} \left[\frac{r(t, \epsilon)}{f(t, r(t, \epsilon))} \right] > g(t, r(t, \epsilon)), \quad t \in (0, T]. \tag{3.41}$$

$$(\Psi(t) - \Psi(0))^{1-\xi} r(t, \epsilon)|_{t=0} > y_0 \in \mathbb{R}. \tag{3.42}$$

D'après les équation (3.37) et (3.40), nous avons

$$(\Psi(t) - \Psi(0))^{1-\xi} r(t, \epsilon)|_{t=0} > (\Psi(t) - \Psi(0))^{1-\xi} u(t)|_{t=0}. \tag{3.43}$$

En appliquant le théorème (3.4), d'après les inégalités (3.36), (3.39) et (3.43), on obtient

$$u < r(\cdot, \epsilon) \text{ dans } C_{1-\xi,\Psi}(J, \mathbb{R}).$$

En prenant la limite $\epsilon \to 0$ de l'inégalité ci-dessus et en utilisant l'équation (3.38), on obtient

$$u \leq r \text{ dans } C_{1-\xi,\Psi}(J, \mathbb{R}).$$

La preuve du théorème suivante concernant la comparaison minimale de solutions se fera de même analogue que celle du théorème 3.9.

Théorème 3.9. *Supposons que les hypothèse (H1)-(H2) et la condition (3.6) sont vérifiées, supposons qu'il existe une fonction* $v \in C_{1-\xi,\Psi}(J,\mathbb{R})$ *telle que*

$$ {}^{H}\mathcal{D}_{0+}^{\mu,\nu,\Psi}\left[\frac{v(t)}{f(t,v(t))}\right] \geq g(t,v(t)), \quad t \in (0,T]. \tag{3.44}$$

$$ (\Psi(t)-\Psi(0))^{1-\xi}v(t)|_{t=0} \geq y_0. \tag{3.45}$$

Alors,

$$q \leq v \text{ dans } C_{1-\xi,\Psi}(J,\mathbb{R}).$$

où q *est une solution minimale du problème (3.1)-(3.2).*

3.6 Unicité de la solution

Dans le théorème ci-dessous, nous démontrons que le problème (3.1)-(3.2) a une solution unique via le théorème 3.9.

Théorème 3.10. *Supposons que les hypothèse (H1)(H2) et la condition (3.4) sont vérifiées, supposons qu'il existe une fonction* $G : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telle que*

$$ g(t,y_1) - g(t,y_2) \leq G\left(t, \frac{y_1}{f(t,y_1)} - \frac{y_2}{f(t,y_2)}\right), \quad t \in (0,T]. \tag{3.46}$$

Pour tout $y_1,\ y_2 \in \mathbb{R}$ *avec* $y_1 > y_2$. *Si la fonction identiquement nulle est la seule solution du problème suivant*

$$\begin{aligned} {}^{H}\mathcal{D}_{0+}^{\mu,\nu,\Psi}m(t) &= G(t,m(t)), t \in (0,T] \\ (\Psi(t)-\Psi(0))^{1-\xi}m(t)|_{t=0} &= 0. \end{aligned}$$

Alors, le problème (3.1)-(3.2) a une solution unique.

Preuve 28. *D'après le théorème 3.1, le problème (3.1)-(3.2) a au moins une solution en* $C_{1-\xi,\Psi}(J,\mathbb{R})$, *supposons que* u_1 *et* u_2 *soient deux solution du problème (3.1)-(3.2) avec* $u_1 > u_2$ *dans* $C_{1-\xi,\Psi}(J,\mathbb{R})$, *définissons la fonction* $m : (0,T] \to \mathbb{R}$ *par*

$$m(t) = \frac{u_1(t)}{f(t,u_1(t))} - \frac{u_2(t)}{f(t,u_2(t))}, \quad t \in (0,T].$$

En vertu de l'hypothèse (H1)(i), on obtient

$$ m > 0 \text{ dans } C_{1-\xi,\Psi}(J,\mathbb{R}). \tag{3.47}$$

En utilisant l'inégalité (3.46), on obtient

$$\begin{aligned} {}^{H}\mathcal{D}_{0+}^{\mu,\nu,\Psi}m(t) &= {}^{H}\mathcal{D}_{0+}^{\mu,\nu,\Psi}\left[\frac{u_1(t)}{f(t,u_1(t))}\right] - {}^{H}\mathcal{D}_{0+}^{\mu,\nu,\Psi}\left[\frac{u_2(t)}{f(t,u_2(t))}\right] \\ &= g(t,u_1(t)) - g(t,u_2(t)) \\ &\leq G\left(t, \frac{u_1(t)}{f(t,u_1(t))} - \frac{u_2(t)}{f(t,u_2(t))}\right) \\ &= G(t,m(t)). \end{aligned}$$

On a aussi

$$(\Psi(t)-\Psi(0))^{1-\xi}m(t)|_{t=0} = (\Psi(t)-\Psi(0))^{1-\xi}u_1(t)|_{t=0} - (\Psi(t)-\Psi(0))^{1-\xi}u_2(t)|_{t=0} = 0.$$

Donc,

$$\begin{cases} {}^{H}\mathcal{D}_{0+}^{\mu,\nu,\Psi} m(t) \leq G(t, m(t)), \quad t \in (0, T) \\ (\Psi(t) - \Psi(0))^{1-\xi} m(t)|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{3.48}$$

Comme la fonction identiquement nulle est une solution maximale de

$$\begin{cases} {}^{H}\mathcal{D}_{0+}^{\mu,\nu,\Psi} m(t) = G(t, m(t)), t \in (0, T) \\ (\Psi(t) - \Psi(0))^{1-\xi} m(t)|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{3.49}$$

En appliquant le théorème 3.9 aux problème (3.48) et (3.49) avec $f(t,x) = 1$, $g = G$ *et* $y_0 = 0$, *on obtient*

$$m \leq 0 \textit{ dans } C_{1-\xi,\Psi}(J, \mathbb{R}). \tag{3.50}$$

l'équation (3.50) est en contradiction avec l'équation (3.47), ainsi nous avons $u_1 = u_2$ *dans* $C_{1-\xi,\Psi}(J, \mathbb{R})$.

Conclusion

Nous avons donné dans ce mémoire dans un premier temps une petite introduction sur le calcul différentielle fractionnaire notamment les concepts de base des intégrales et des dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville et Hilfer, puis on a étudié l'existence de solutions, de solutions minimales et de solution maximales d'une classe d'équations et d'inéquations différentielles fractionnaires. on a traité également d'autres résultats tels que les estimations et les théorèmes de comparaison.

Bibliographie

[1] D. Kucche A. D. Mali. Problème de valeur limite non locale pour les équations différentielles fractionnaires implicites de hilfer généralisées. *Mathimatical methods dans le applied sciences*, 43(15)(2020).8608-9631.

[2] J.J.Trujillo A.AKilbas, H.M.Srivastava. Théorème et application différentielles fractionnaire. *North-Hollond Mathematics Studies, Elservier, Amsterdam*, 2007, 2006.

[3] Podlubny I. équation difféeantiel fractionnaire , une introdaction aux dérivées fractionnaires ,aux équations différentielles fractionnaires. page Méthodesde leur solution et à certaines de leurs applications, 1999.

[4] K. D. Kucche J. P. Kharade. Sur les équation différenteilles fractionnaires implicites de psi-hilfer avec retard. *Mathématique Méthodes dans les sciences appliquées*, 43(4)(2019) ;1038-1952.

[5] E. Ccaples de Oliveira J.Vanterler da, C. Sousa. Sur la dérivée fractionnaire non linéaire ; sci non linéaire. numéro. simul. *Sci non linéaire. Numéro. SimuL*, 60(2018),72-91.

[6] A.D. Mali k. D. kucche. Sur les équation différenteilles fractionnaires hybride non linéaires psi-hilfer.

[7] J.Venterla da. C. Sousa K. D. Kucche, A. D. Mali. Sur les équation différenteilles fractionnaires non linéaires de hilfer. *Mathématiques computationnalles et appliquées*, 38(2)(2019) :73.

[8] N.E Tatar K.M Furati, M.D.Kassim. Existence et unicité pour un probl eme impliquant la dérivée fractionnaire de hilfer. *Comp Mathématique Appl*, 64(2012),.

[9] X. Wang M. Ahmed, A. Zada. Existence, unicité et stabilité des équation différentielles fractionnaire implicites couplées a commutation de type psi-hilfer. *Internationale des sciences non linéaires et de la simulation numérique*, 21(2020) ;327-337.

[10] H. A. Wahash Ulam-Hyers-Mittag-Leffler M. S. Abdo, S. K. Panachal. pourun problème de psi hilfer avec ordre fractionnaire et retarde infini. *Résultates en mathématiques appliquées*, 7(2020) : 100115 ;doi : 10.1016/j.rinam.2020.100115.

[11] L. Podlubny. équation différentielle fractionnaire. *Academic Press, New York*, 1999.

[12] E. Pariguan R. Diaz. Sur les fonction hypergéométriques et le k-symbok de pochhammer divulgaciones mathématique. 2007.