



RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN TIARET
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUES
Département de Mathématiques



MÉMOIRE MASTER

Présenter en vue de l'obtention du diplôme de master

Spécialité :
« Mathématiques »

Option :
« Analyse Fonctionnelle et Équations Différentielles »

Présenté Par :
HAMEURLAINE El ghalya

Sous L'intitulé :

Résolution de quelques équations aux dérivées partielles par la méthode des volumes finis

Soutenu publiquement le 30 / 06 / 2024
à Tiaret devant le jury composé de :

Mr MAZOUZ Kadda	MCA Université Tiaret	Président
Mr BENAÏSSA Abdelmalek	MCB Université Tiaret	Encadreur
Mme SABIT Souhila	MCA Université Tiaret	Examinateur

Année universitaire :2023/2024

Dédicaces

Je dédie ce travail aux être les plus chers au monde .

A mon très chers parents qui ont tout sacrifié pour mes études en témoignage de leur amour, patience et qui ont fait moi la personne qui je suis aujourd'hui.

A mon frère :**Kamel,Raafat.**

A mes soeur :**Souaad,Khadra,Heba.**

La petite princesse :Raghad Noursine.

A toue ma famille et à tous ceux qui occupent une place dans ma vie.

Remerciements

Avant tout, je remercie **ALLAH** pour la volonté, la santé et le courage pour réaliser ce travail.

Je tiens à remercier mon encadreur **Dr.BENAISSA Abdelmalek** pour avoir bien voulu m'encadrer et pour le temps qu'il m'a accordé ainsi que les précieux conseils qu'il m'a prodigués.

Je tiens à remercier également **Dr.Sabit Souhila** et **Dr.MAAZOUZ Kadda** qui ont acceptés de lire et de juger mon mémoire.

Je tiens à remercier, tous ceux qui m'ont enseignée durant mes années du primaire jusqu'à l'université.

Enfin, je tiens à témoigner toute ma gratitude à ma famille qui m'ont apportée leur soutien moral et intellectuel tout au long de ma démarche.

ELGHALYA

Table des matières

1	Généralités sur les équations aux dérivées partielles	6
1.1	Classifications des edp semi-linéaires du second ordre sur le plan	6
1.2	Courbes caractéristiques et problème de Cauchy	7
1.3	Réduction à la forme standard	8
1.3.1	Réduction à la forme standard d'équations hyperboliques	9
1.3.2	Réduction à la forme standard d'équations paraboliques	11
1.4	Théorèmes fondamentaux du calcul vectoriel	12
1.4.1	Théorème de Green	12
1.4.2	Théorème de divergence	14
2	Présentation de la méthode des volumes finis et application à la résolution de quelques EDP	15
2.1	l'idée de base de la méthode des volumes finis	15
2.2	Application à la résolution de l'équation de transport	16
2.2.1	Présentation de l'équation de transport	16
2.2.2	Résolution approchée de l'équation de transport à vitesse constante .	17
2.2.3	Écriture matricielle du schéma décentré amont	18
2.3	Application à la résolution de l'équation de la chaleur 1D	18
2.3.1	Équation de la chaleur 1D	18
2.3.2	Approximation par volume finis de l'équation de la chaleur 1D	18
2.3.3	Écriture matricielle	20
2.4	Application à la résolution de l'équation de la chaleur 2D	20
2.4.1	Discrétisation en espace	20
2.4.2	Schéma explicite en temps	21
2.4.3	Écriture matricielle	22
2.4.4	Étude de la stabilité	23
3	Résultats de la simulation numérique de la méthode des volumes finis	24
3.1	Équation de Transport	24
3.1.1	Étude du premier exemple	24
3.1.2	Étude du deuxième exemple	26
3.2	Équation de la chaleur	28
3.2.1	Étude du premier exemple	28

3.2.2	Étude du deuxième exemple	30
-------	-------------------------------------	----

Introduction

La résolution numérique des équations aux dérivées partielles occupe une place très importante en ingénierie, en finance et en mathématiques appliquées.

Il existe plusieurs techniques de résolution numérique des équations aux dérivées partielles tel que les différences finies, les éléments finis, les volumes finis et les méthodes spectrales.

Dans ce travail, on se propose d'appliquer la méthode des volumes finis pour résoudre quelques équations aux dérivées partielles.

Dans le premier chapitre, on donne quelques notions fondamentales sur les équations aux dérivées partielles semi-linéaires d'ordre 2 sur le plan, on rappelle leurs classification et on introduit la notion de courbes caractéristiques qui permettent la réduction au forme standard de ces EDP. On donne quelques théorèmes fondamentaux du calcul vectoriel tel que le théorème de Green et le théorème de divergence.

Dans le deuxième chapitre, on présente la méthode des volumes finis en l'appliquant à la résolution de l'équation de transport sur \mathbb{R} et l'équation de la chaleur sur \mathbb{R} et sur \mathbb{R}^2 .

Dans le dernier chapitre, en utilisant l'environnement MATLAB on simule numériquement à l'aide de la méthode des volumes finis deux types d'équations aux dérivées partielles étudiées dans le chapitre précédent.

Chapitre 1

Généralités sur les équations aux dérivées partielles

1.1 Classifications des edp semi-linéaires du second ordre sur le plan

On commence cette section par donner quelques définitions voir [1]

Définition 1.1.1. On appelle équations aux dérivées partielles semi-linéaire du second ordre sur \mathbb{R}^2 toute équation qui s'écrit sous la forme :

$$a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F \left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (1.1)$$

où a, b, c sont trois fonctions définies sur un ouvert de \mathbb{R}^2 et F une fonction définie sur un ouvert de \mathbb{R}^5

Définition 1.1.2. On pose $\Delta(x, y) = b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y)$ alors on a les définitions suivantes :

1. Si $\Delta(x, y) > 0$ sur un domaine Ω de \mathbb{R}^2 alors l'équation (1.1) est dite hyperbolique sur Ω
2. Si $\Delta(x, y) = 0$ sur un domaine Ω de \mathbb{R}^2 alors l'équation (1.1) est dite parabolique sur Ω
3. Si $\Delta(x, y) < 0$ sur un domaine Ω de \mathbb{R}^2 alors l'équation (1.1) est dite elliptique sur Ω

Exemple 1.1.1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$, considérons l'équation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.2)$$

On a $a(x, y) = 1$, $b(x, y) = 0$ et $c(x, y) = -\alpha^2$ donc $\Delta(x, y) = \alpha^2 > 0$ sur \mathbb{R}^2 donc l'équation (1.2) est hyperbolique sur \mathbb{R}^2 elle est connue en physique sous le nom d'équation des ondes.

Exemple 1.1.2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$, considérons l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \lambda^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.3)$$

On a $a(x, y) = 0$, $b(x, y) = 0$ et $c(x, y) = -\lambda^2$ donc $\Delta(x, y) = 0$ sur \mathbb{R}^2 donc l'équation (1.3) est parabolique sur \mathbb{R}^2 elle est connue en physique sous le nom d'équation de la chaleur.

Exemple 1.1.3. Considérons l'équation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1.4)$$

On a $a(x, y) = 1$, $b(x, y) = 0$ et $c(x, y) = 1$ donc $\Delta(x, y) = -1 < 0$ sur \mathbb{R}^2 donc l'équation (1.4) est elliptique sur \mathbb{R}^2 elle est connue en physique sous le nom d'équation de Laplace.

1.2 Courbes caractéristiques et problème de Cauchy

Définition 1.2.1. On appelle problème de Cauchy relativement à une courbe régulière γ : $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ le système suivant :

$$\begin{cases} a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \\ u(\phi(t), \psi(t)) = u_0(t) \\ \frac{\partial u}{\partial n}(\phi(t), \psi(t)) = v_0(t) \end{cases} \quad (1.5)$$

où u_0, v_0 sont deux fonctions données.

Définition 1.2.2. Les courbes caractéristique du problème (1.1) sont les courbes régulières de \mathbb{R}^2 $\gamma : x = \phi(t), y = \psi(t)$ qui annulent

$$\begin{aligned} \Delta(t) &= \begin{vmatrix} \phi'(t) & \psi'(t) & 0 \\ 0 & \phi'(t) & \psi'(t) \\ a(\phi(t), \psi(t)) & 2b(\phi(t), \psi(t)) & c(\phi(t), \psi(t)) \end{vmatrix} \\ &= c(\phi(t), \psi(t))[\phi'(t)]^2 - 2b(\phi(t), \psi(t))[\phi'(t)\psi'(t)] + a(\phi(t), \psi(t))[\psi'(t)]^2 \end{aligned}$$

Définition 1.2.3. Une courbe régulière de \mathbb{R}^2 $\gamma : x = \phi(t), y = \psi(t)$ n'est pas caractéristique en aucun point si pour tout t de son domaine de définition on a

$$\Delta(t) = c(\phi(t), \psi(t))[\phi'(t)]^2 - 2b(\phi(t), \psi(t))[\phi'(t)\psi'(t)] + a(\phi(t), \psi(t))[\psi'(t)]^2 \neq 0$$

Le théorème suivant caractérise les courbes caractéristiques de l'équation (1.1) :

Théorème 1.2.1. 1. Si la fonction a n'est pas identiquement nulle, les courbes caractéristiques de l'équation (1.1) sont les solutions de l'équation différentielle :

$$a(x, y) \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2b(x, y) \frac{dy}{dx} + c(x, y) = 0 \quad (1.6)$$

2. Si la fonction c n'est pas identiquement nulle, les courbes caractéristiques de l'équation (1.1) sont les solutions de l'équation différentielle :

$$c(x, y) \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2b(x, y) \frac{dy}{dx} + a(x, y) = 0 \quad (1.7)$$

3. Si les fonctions a et c sont identiquement nulles ; les courbes caractéristiques de l'équation (1.1) sont les droites $x = cte$ et les droites $y = Cte$.

On donne quelques exemples

Exemple 1.2.1. Soit l'équation

$$y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = C$$

On a $\Delta(x, y) = b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y) = x^2 y^2 \geq 0$, donc cette équation est hyperbolique sur $\mathbb{R}^2 - \{x = 0 \vee y = 0\}$.

Les courbes caractéristiques sont les solutions de l'équation différentielle

$$y^2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - x^2 = 0.$$

Un simple calcul nous donne deux familles de courbes :

$$x^2 + y^2 = C_1 \text{ et } x^2 - y^2 = C_2 \text{ où } C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Exemple 1.2.2. soit

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

On a $\Delta(x, y) = b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y) = 0$, donc cette équation est parabolique sur \mathbb{R}^2 .

Les courbes caractéristiques sont les solutions de l'équation différentielle

$$x^2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2xy \left(\frac{dy}{dx} \right) + y^2 = 0.$$

Un simple calcul nous donne les courbes $y = Cx$ où $C \in \mathbb{R}$

1.3 Réduction à la forme standard

On commence cette section par la proposition suivante :

Proposition 1.3.1. Le type hyperbolique, parabolique ou elliptique de l'équation (1.1) reste invariant après un changement de système de coordonnées.

Démonstration. Soit le changement de variable $X = \phi(x, y)$, $Y = \psi(x, y)$ tel que :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial x} \neq 0$$

On pose $u(x, y) = \tilde{u}(X, Y)$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X^2} \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X \partial Y} \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial Y^2} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X^2} \left(\frac{\partial X}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X \partial Y} \frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial Y^2} \left(\frac{\partial Y}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X^2} \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X \partial Y} \left(\frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial x} \right) + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} \frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial Y^2} \frac{\partial Y}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

On pose

$$\begin{aligned} A(x, y) &= a(x, y) \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)^2 + 2b(x, y) \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial y} + c(x, y) \left(\frac{\partial X}{\partial y} \right)^2 \\ B(x, y) &= a(x, y) \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial x} + b(x, y) \left\{ \frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial y} \right\} + c(x, y) \frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial y} \\ C(x, y) &= a(x, y) \left(\frac{\partial Y}{\partial x} \right)^2 + b(x, y) \frac{\partial Y}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial y} + c(x, y) \left(\frac{\partial Y}{\partial y} \right)^2 \end{aligned}$$

Un simple calcul nous donne

$$B^2 - AC = J^2(b^2 - ac)$$

ce qui achève la preuve de la proposition. □

1.3.1 Réduction à la forme standard d'équations hyperboliques

Théorème 1.3.1. Soient $\phi_1(x, y) = k_1$ et $\phi_2(x, y) = k_2$ les deux familles de courbes caractéristiques d'une équation hyperbolique.

En posant $X_1 = \phi_1(x, y)$ et $X_2 = \phi_2(x, y)$ cette équation deviendra

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X_1 \partial X_2} = G \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial X_1}, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X_2}, \tilde{u}, X_1, X_2 \right)$$

Et en posant $Y_1 = X_1 + X_2$ et $Y_2 = X_1 - X_2$ elle deviendra

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial Y_1^2} - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial Y_2^2} = H \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial Y_1}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial Y_2}, \bar{u}, Y_1, Y_2 \right)$$

Exemple 1.3.1. On considère l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \cos(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \sin^2(x) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sin(x) \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (1.8)$$

On a $a(x, y) = 1$, $b(x, y) = -\cos(x)$ et $c(x, y) = -\sin^2(x)$, donc les courbes caractéristiques sont les solutions de l'équation différentielle :

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + 2 \cos(x) \frac{dy}{dx} - \sin^2(x) = 0$$

donc $\frac{dy}{dx} = -\cos(x) - 1$ ou $\frac{dy}{dx} = -\cos(x) + 1$ d'où
 $y + \sin(x) + x = C_1$ ou $y + \sin(x) - x = C_2$

On pose

$$\begin{cases} X = y + \sin(x) + x \\ Y = y + \sin(x) - x \end{cases}$$

et $u(x, y) = \tilde{u}(X, Y)$ Alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial x} &= \cos(x) + 1 & \frac{\partial X}{\partial y} &= 1 \\ \frac{\partial Y}{\partial x} &= \cos(x) - 1 & \frac{\partial Y}{\partial y} &= 1 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= (\cos(x) + 1) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + (\cos(x) - 1) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -\sin(x) \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \right) + (\cos(x) + 1)^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X^2} + (\cos(x) - 1)^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial Y^2} + 2(\cos^2(x) - 1) \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X \partial Y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial Y^2} + 2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X \partial Y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= (\cos(x) + 1) \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X^2} + (\cos(x) - 1) \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial Y^2} + 2 \cos(x) \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X \partial Y} \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \cos(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \sin^2(x) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sin(x) \frac{\partial u}{\partial y} = -4 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X \partial Y} = 0$$

Donc la forme standard est

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X \partial Y} = 0$$

En intégrant cette dernière équation on obtient

$$\tilde{u}(X, Y) = F(X) + G(Y)$$

D'où la solution générale de l'équation (1.8) est

$$u(x, y) = F(y + \sin(x) + x) + G(y + \sin(x) - x)$$

Où F et G sont deux fonctions arbitraires.

1.3.2 Réduction à la forme standard d'équations paraboliques

Théorème 1.3.2. Soient $\phi(x, y) = c$ la famille de courbes caractéristiques d'une équation parabolique.

En posant $X_1 = \phi(x, y)$ et X_2 une variable indépendante de X_1 c-à-d $\frac{D(X_1, X_2)}{D(x, y)} \neq 0$ alors cette équation deviendra

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X_2^2} = G\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial X_1}, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X_2}, \tilde{u}, X_1, X_2\right)$$

Exemple 1.3.2. On considère l'équation

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1.9)$$

On a $a(x, y) = x^2$, $b(x, y) = xy$ et $c(x, y) = y^2$, donc les courbes caractéristiques sont les solutions de l'équation différentielle :

$$x^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2xy \frac{dy}{dx} + y^2 = 0$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

On trouve une seule famille de courbes caractéristiques $\frac{y}{x} = C$

On pose

$$\begin{cases} X = \frac{y}{x} \\ Y = y \end{cases}$$

et $u(x, y) = \tilde{u}(X, Y)$ Alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial x} &= -\frac{y}{x^2} = -\frac{X}{Y} & \frac{\partial X}{\partial y} &= \frac{1}{x} = \frac{X}{Y} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} &= 0 & \frac{\partial Y}{\partial y} &= 1 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{X^2}{Y} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{X}{Y} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y}\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{X^4}{Y^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X^2} + 2\frac{X^3}{Y^2} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{X^2}{Y^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial Y^2} + 2\frac{X}{Y} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X \partial Y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= -\frac{X^3}{Y^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X^2} - \frac{X^2}{Y^2} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} - \frac{X^2}{Y} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X \partial Y}\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = Y^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial Y^2} = 0$$

Donc la forme standard est

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial Y^2} = 0$$

En intégrant cette dernière équation on obtient

$$\tilde{u}(X, Y) = YF(X) + G(X)$$

D'où la solution générale de l'équation (1.9) est

$$u(x, y) = yF\left(\frac{y}{x}\right) + G\left(\frac{y}{x}\right)$$

Où F et G sont deux fonctions arbitraires.

1.4 Théorèmes fondamentaux du calcul vectoriel

On commence cette section par le théorème de Green voir [2]

1.4.1 Théorème de Green

Le théorème de Green exprime l'intégrale de contour d'une simple courbe fermée C en termes de la double intégrale de la région bidimensionnelle R délimitée par C .

Théorème 1.4.1. Soit C le contour fermé d'une région bidimensionnelle R . Si $u(x, y)$ et $v(x, y)$ sont des fonctions à dérivées partielles continues sur R , alors

$$\oint_C (u dx + v dy) = \iint_R \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dy \quad (1.10)$$

Remarque 1.4.1. Dans l'équation. (1.10) l'intégrale de contour le long de C est prise dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

Remarque 1.4.2. Si on pose

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} \quad \mathbf{v} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} \quad d\mathbf{S} = dxdy\mathbf{k}$$

Alors le théorème de Green s'écrit sous la forme :

$$\oint_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{r} = \iint_R (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{S} \quad (1.11)$$

Exemple 1.4.1. En utilisant le théorème de Green on va calculer l'intégrale curviligne suivante :

$$\oint_C 2y^3 dx + 3xy^2 dy$$

$$\text{où } C = \{y = \sqrt{1-x^2} \quad -1 \leq x \leq 1\}$$

On a

$$u(x, y) = 2y^3 \quad \text{et} \quad v(x, y) = 3xy^2$$

donc

$$\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} = -3y^2.$$

En appliquant le théorème de Green on obtient

$$\oint_C 2y^3 dx + 3xy^2 dy = \iint_R -3y^2 dxdy$$

$$\text{où } R = \{0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \quad -1 \leq x \leq 1\}$$

Ce qui nous donne

$$\begin{aligned} \oint_C 2y^3 dx + 3xy^2 dy &= -3 \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y^2 dy dx \\ &= -3 \int_{-1}^1 \left[\frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= - \int_{-1}^1 (1-x^2)^{3/2} dx. \end{aligned}$$

On pose $x = \cos \theta$ donc $dx = -\sin \theta d\theta$

D'où

$$\begin{aligned} \oint_C 2y^3 dx + 3xy^2 dy &= - \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta + \int_0^\pi \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta \\ &= - \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^\pi + \left[\frac{\theta}{8} - \frac{\sin 4\theta}{32} \right]_0^\pi \\ &= -\frac{3\pi}{8}. \end{aligned}$$

1.4.2 Théorème de divergence

Le théorème de divergence également connu sous le nom de théorème de Gauss est donné par le théorème suivant :

Théorème 1.4.2. *Soit V un volume dans un espace tridimensionnel de frontière S . Soit \mathbf{n} le vecteur unitaire normal extérieur à S . Si \mathbf{v} est un champ vectoriel défini sur V , alors*

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{v}) dV = \oint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.12)$$

Exemple 1.4.2. *En utilisant le théorème de divergence on va calculer l'intégrale suivante :*

$$\oiint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

où

$$\mathbf{F} = (3x + z^5) \mathbf{i} + (y^2 - \sin(x^2z)) \mathbf{j} + (xz + ye^{x^5}) \mathbf{k}$$

et

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 3, 0 \leq z \leq 2\}$$

La surface ∂V est orientée vers l'extérieur. On a

$$\oiint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{F}) dV$$

$\nabla \cdot \mathbf{F} = 3 + 2y + x$ donc

$$\begin{aligned} \oiint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \int_0^1 \int_0^3 \int_0^2 (3 + 2y + x) dz dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^3 (6 + 4y + 2x) dy dx \\ &= \int_0^1 (18 + 18 + 6x) dx \\ &= 39. \end{aligned}$$

Chapitre 2

Présentation de la méthode des volumes finis et application à la résolution de quelques EDP

2.1 l'idée de base de la méthode des volumes finis

On s'intéresse à des équations de la forme voir [3]

$$Lu = -\nabla \cdot (K \nabla u - cu) + ru = f \quad (2.1)$$

On se contente d'étudier le cas $d = 2$ et $r = 0$

On pose $q(u) = -K \nabla u + cu$ alors l'équation 2.1 devient

$$\nabla \cdot q(u) = f \quad (2.2)$$

Pour obtenir une discrétisation en volumes finis, on doit diviser le domaine Ω en M sous domaines Ω_i vérifiant les propriétés suivantes :

- 1 Chaque Ω_i est un domaine ouvert borné simplement connexe délimité par un polygone sans fentes.
- 2 Pour $i \neq j$ on a $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$.

$$3 \bigcup_{i=1}^M \overline{\Omega}_i = \overline{\Omega}$$

Remarque 2.1.1. Les sous domaines Ω_i sont appelés volumes de contrôle ou domaines de contrôle.

La prochaine étape commune à toutes les méthodes de volumes finis consiste à intégrer l'équation 2.2 sur chaque volume de contrôle Ω_i . En appliquant le théorème de divergence de Gauss, on obtient

$$\int_{\partial \Omega_i} \nu \cdot q(u) d\sigma = \int_{\Omega_i} f dx \quad (2.3)$$

où le vecteur unitaire ν représente la normale extérieure à $\partial\Omega_i$. D'après la première condition de la partition, la frontière $\partial\Omega_i$ est formée de segments de droite Γ_{ij} tel que ν_{ij} la normale extérieure à Γ_{ij} soit constante. ce qui nous donne

$$\sum_{j=1}^{n_i} \int_{\Gamma_{ij}} \nu_{ij} \cdot q(u) d\sigma = \int_{\Omega_i} f dx \quad (2.4)$$

Les intégrales apparaissant dans 2.4 doivent être approximées ce qui peut être réalisé de plusieurs manières différentes. cela donne plusieurs discrétisations finales.

Remarque 2.1.2. *En général les méthodes de volumes finis se distinguent en se basant sur les critères suivants*

1. la forme géométrique des volumes de contrôle Ω_i
2. la position des inconnues (" variables du problème ") par rapport aux volumes de contrôle.
3. L'approximation des intégrales de frontière .

Remarque 2.1.3. *En particulier le deuxième critère divise les méthodes de volumes finis en deux grandes classes :*

- Les méthodes centrées sur le cellules
- Les méthodes centrées sur les sommets des cellules.

2.2 Application à la résolution de l'équation de transport

2.2.1 Présentation de l'équation de transport

L'équation de transport est l'équation linéaire suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} (v(t, x)u(t, x)) = 0 \quad t > 0 \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.5)$$

où la vitesse v est une fonction de classe C^1 donnée.

Si v est constante et u_0 est une fonction de classe C^1 sur \mathbb{R} ; alors on a le résultat suivant :

Proposition 2.2.1. *La solution du problème de Cauchy :*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + v \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) = 0 & t > 0 \quad x \in \mathbb{R} \\ u(0, x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.6)$$

est donnée par :

$$u(t, x) = u_0(x - vt) \quad (2.7)$$

2.2.2 Résolution approchée de l'équation de transport à vitesse constante

On s'intéresse à la résolution approchée de l'équation (2.5) dans un intervalle $[a, b]$ pour cela on introduit :

- * $M > 0$ le nombre de points de la discrétisation de l'intervalle $[a, b]$, $h = (b - a)/(M + 1)$ le pas de la discrétisation et $x_j = a + jh, j = 0, \dots, M + 1$ les points du maillage spatial ;
- * le pas de temps $k > 0$ et $t^n = nk, n \in \mathbb{N}$, les instants temporels ;
- * le nombre $\lambda = v \frac{k}{h}$, appelé nombre de courant -friedrichs-levy (CFL).

On cherche alors des valeurs u_j^n approchant

$$\frac{1}{h} \int_{x_j}^{x_{j+1}} u(t^n, x) dx$$

et pour ce faire on va considérer les schémas numériques suivants voir [6]

(i) schéma centré explicite

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} + v \frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^n}{2h} = 0 \quad (2.8)$$

(ii) schéma décentré amont

— Si $v > 0$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} + v \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0$$

— Si $v < 0$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} + v \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = 0$$

(iii) schéma de Lax-Friedrichs

$$\frac{u_j^{n+1} - \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2}}{k} + v \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0; \quad (2.9)$$

(iv) schéma de Lax-Wendroff

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} + v \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} - v^2 k \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{2h^2} = 0. \quad (2.10)$$

2.2.3 Écriture matricielle du schéma décentré amont

On pose $x_j = a + hj \quad j = 0, 1, 2, \dots, M + 1$ où $h = \frac{b-a}{M+1}$. On note $u_j(t)$ une approximation de $u(t, x_j)$ pour $j = 0, 1, \dots, M + 1$.

On pose $U(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_J(t))^T$, $U^0 = (u^0(x_1), u^0(x_2), \dots, u^0(x_J))^T$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On obtient le schéma de volumes finis explicite défini par :

$$\begin{cases} U^{k+1} = \left(I - \frac{\Delta t}{h} A \right) U^k & k = 0, 1, \dots \\ U^0 \text{ donné} \end{cases} \quad (2.11)$$

2.3 Application à la résolution de l'équation de la chaleur 1D

2.3.1 Équation de la chaleur 1D

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0 & x \in]a, b[\quad t > 0 \quad \mu > 0 \\ u(t, a) = u(t, b) = 0 & t > 0 \\ u(0, x) = u^0(x) & x \in [a, b] \end{cases} \quad (2.12)$$

les notations discrètes de points et de mailles sont conservées le pas de temps est noté $\Delta t > 0$ et $\Delta x > 0$ est le pas d'espace.

2.3.2 Approximation par volume finis de l'équation de la chaleur 1D

Considérons à présent une discrétisation par la méthode des volume finis pour la forme divergente voir [4]

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial x} = 0, \\ g = -\frac{\partial u}{\partial x}. \end{cases} \quad (2.13)$$

Nous intégrons en espace entre $x_{j-\frac{1}{2}}$ et $x_{j+\frac{1}{2}}$

$$\frac{d}{dt} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u(t, x) dx + \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \frac{\partial g}{\partial x}(t, x) dx \quad (2.14)$$

D'où

$$\frac{d}{dt} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u(t, x) dx + \frac{\partial g}{\partial x}(t, x_{j+\frac{1}{2}}) - \frac{\partial g}{\partial x}(t, x_{j-\frac{1}{2}}) = 0 \quad (2.15)$$

On note

$$x_j = \frac{x_{j-\frac{1}{2}} + x_{j+\frac{1}{2}}}{2}$$

La valeur moyenne de u dans la maille est notée

$$v_j^n = \frac{\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u(n\Delta t, x) dx}{\Delta x_j} = u(n\Delta t, x_j) + O(\Delta x_j^2) \quad (2.16)$$

et la dérivation en temps est approchée par la différences finie explicite .

Une discrétisation naturelle du flux $\partial_x g(t, x_{j+\frac{1}{2}})$ est

$$\frac{\partial u}{\partial x}(n\Delta t, x_{j+\frac{1}{2}}) = \frac{u(n\Delta t, x_{j+1}) - u(n\Delta t, x_j)}{x_{j+1} - x_j} + O(x_{j+1} - x_j) \quad (2.17)$$

On peut remarquer que si le maillage est uniforme

$$x_{j+1} - x_{j+\frac{1}{2}} = x_{j+\frac{1}{2}} - x_j \iff x_{j+\frac{3}{2}} - x_{j+\frac{1}{2}} = x_{j+\frac{1}{2}} - x_{j-\frac{1}{2}}$$

alors l'erreur d'interpolation est du second ordre

$$\frac{\partial u}{\partial x}(n\Delta t, x_{j+\frac{1}{2}}) = \frac{u(n\Delta t, x_{j+1}) - u(n\Delta t, x_j)}{x_{j+1} - x_j} + O((x_{j+1} - x_j)^2)$$

En remplaçant la valeur exacte par la valeur moyenne (2.16), nous obtenons

$$\frac{\partial u}{\partial x}(n\Delta t, x_{j+\frac{1}{2}}) = \frac{v_{j+1}^n - v_j^n}{x_{j+1} - x_j} + O(\max(\Delta x_{j+1}, \Delta x_j))$$

d'où à partir de (2.15)

$$\Delta x_j \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} - \frac{v_{j+1}^n - v_j^n}{x_{j+1} - x_j} + \frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{x_j - x_{j-1}} = O(\max(\Delta x_{j+1}, \Delta x_j, \Delta t))$$

En abandonnant le résidu et en remplaçant la solution exacte par la solution numérique on obtient

$$\Delta x_j \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{x_{j+1} - x_j} + \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{x_j - x_{j-1}} = 0 \quad (2.18)$$

Remarque 2.3.1. Soit une grille uniforme : $\Delta x_j = \Delta x$ pour tout j . Alors le schéma de volume finis (2.18) s'écrit

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0 \quad (2.19)$$

2.3.3 Écriture matricielle

On pose $x_j = a + hj \quad j = 0, 1, 2, \dots, M + 1$ où $h = \frac{b-a}{M+1}$. On note $u_j(t)$ une approximation de $u(t, x_j)$ pour $j = 0, 1, \dots, M + 1$.

On pose $U(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_J(t))^T$, $U^0 = (u^0(x_1), u^0(x_2), \dots, u^0(x_J))^T$

$$A = \text{tridiag}(-1, 2, -1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ \vdots & & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On obtient le schéma de volumes finis explicite défini par :

$$\begin{cases} U^{k+1} = \left(I - \frac{\Delta t}{h^2} A \right) U^k & k = 0, 1, \dots \\ U^0 \text{ donné} \end{cases} \quad (2.20)$$

2.4 Application à la résolution de l'équation de la chaleur 2D

soit le système

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u = f & \text{dans }]0, T[\times \Omega \\ u = g & \text{sur }]0, T[\times \partial \Omega \\ u(0, \cdot) = u_0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (2.21)$$

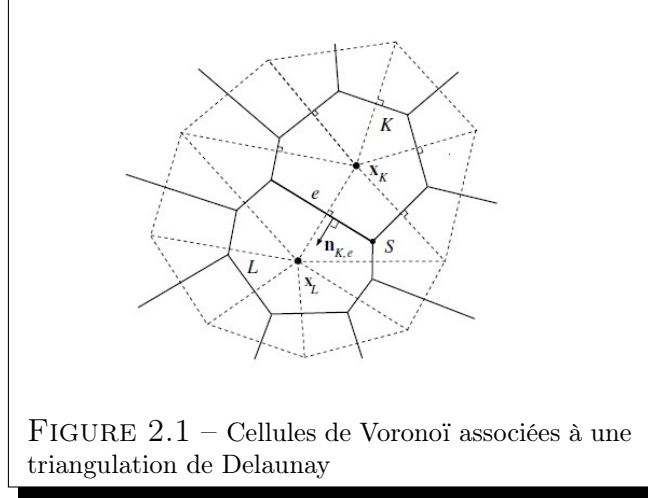
où $\nu > 0$ et les fonctions f, g, u_0 sont assez régulières. On associe au domaine Ω un maillage dont les volumes de contrôle sont les cellules de Voronoï associées à une triangulation de Delaunay de Ω comme le montre la figure suivante.

A chaque cellule K , on associe les centres x_K qui sont les sommets des triangles.

2.4.1 Discrétisation en espace

On suppose la solution u de (2.21) régulière. On intègre l'équation (2.21) sur une cellule K et en utilisant la formule de la divergence, on obtient (voir [5]) :

$$\frac{d}{dt} \int_K u(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} - \nu \int_{\partial K} \nabla u \cdot \mathbf{n}_K d\Gamma = |K| f_K$$



avec $f_K(t) = \frac{1}{|K|} \int_K f(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x}$ et \mathbf{n}_K désigne la normale unitaire extérieur de K .

On pose $u_K(t) = \frac{1}{|K|} \int_K u(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x}$, on obtient pour tout $t \in [0, T]$

$$|K| \frac{du_K}{dt}(t) - \nu \sum_{e \in \Xi_K} \int_e \nabla u \cdot \mathbf{n}_{K,e} d\Gamma = |K| f_K(t) \quad (2.22)$$

où Ξ_K désigne l'ensemble des arêtes de la cellule K et $\mathbf{n}_{K,e}$ est la normale unitaire à e dirigée vers l'extérieur de K .

On approche le flux

$$- \int_e \nabla u \cdot \mathbf{n}_{K,e} d\Gamma \simeq F_{K,e}$$

avec

$$F_{K,e} = \frac{u_K - u_L}{\mathbf{x}_K - \mathbf{x}_L} |e| \quad \text{si } e \not\subset \partial\Omega \quad (2.23)$$

Si K possède une arête sur le bord $\partial\Omega$, on impose

$$u_K = u_e = \frac{1}{|K|} \int_e g(t, \mathbf{x}) d\Gamma \quad \text{si } e \subset \partial\Omega \quad (2.24)$$

Le schéma Volumes Finis de discrétisation en espace s'écrit ainsi, pour $t \in [0, T]$:

$$|K| \frac{du_K}{dt}(t) + \sum_{\substack{e \in \Xi_K \\ e \not\subset \partial\Omega}} \nu F_{K,e}(t) = |K| f_K(t) \quad (2.25)$$

2.4.2 Schéma explicite en temps

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\Delta t = \frac{T}{n}$ le pas de discrétisation en temps avec $t^k = k\Delta t$ pour $k = 0, 1, \dots, n$.

On note l'approximation :

$$u_K^k \simeq u_K(t^k) = \frac{1}{|K|} \int_K u(\mathbf{x}, t^k) d\mathbf{x}$$

Le schéma explicite associé à (2.25) s'écrit $\forall K \in T \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$

$$|K| \frac{u_K^k - u_L^k}{\Delta t} + \sum_{\substack{e \in \Xi_K \\ e \not\subset \partial\Omega}} \nu F_{K,e}^k = |K| f_K^k \quad (2.26)$$

avec

$$F_{K,e}^k = \frac{(u_K^k - u_L^k)}{|\mathbf{x}_K - \mathbf{x}_L|} |e| \quad (e \not\subset \partial\Omega) \quad (2.27)$$

On écrit les relations (2.26) pour toute cellule K intérieure i.e. une cellule ne possédant pas d'arête sur le bord $\partial\Omega$.

Pour une cellule K ayant une arête sur $\partial\Omega$, on impose $u_K = u_e$ donnée par (2.24). On obtient ainsi le schéma :

1. Pour toute cellule K intérieure

$$u_K^{k+1} = u_K^k - \frac{\nu \Delta t}{|K|} \sum_{\substack{e \in \Xi_K \\ e = (K|L)}} \frac{|e|}{|\mathbf{x}_K - \mathbf{x}_L|} (u_K^k - u_L^k) + \Delta t f_K^k \quad (2.28)$$

2. Pour toute cellule K possédant une arête $e \subset \partial\Omega$, on impose $u_K^{k+1} = u_e$ où u_e est donnée par (2.24).

2.4.3 Écriture matricielle

On suppose que $g = 0$. Soit N le nombre de cellules de contrôles intérieures. On regroupe les inconnues dans le vecteur $\mathbf{u}^k = (u_{K_1}^k, u_{K_2}^k, \dots, u_{K_N}^k)^T$ et on note $\mathbf{f}^k = (f_{K_1}^k, f_{K_2}^k, \dots, f_{K_N}^k)^T$. Le système linéaire correspondant à (2.28) s'écrit :

$$\mathbf{u}^{k+1} = (I_N - \nu \Delta t H^{-1} A) \mathbf{u}^k + \Delta t \mathbf{f}^k \quad (2.29)$$

où I_N est la matrice identité d'ordre N La matrice diagonale H de taille $N \times N$ est définie par :

$$H = \begin{pmatrix} |K_1| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |K_2| & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & |K_N| \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

A est la matrice de taille $N \times N$ correspondant au Laplacien et représentée par la figure (Figure 2.2) voir [5]

On a noté $e_{K,L} = (K|L)$ l'arête commune aux cellules K et L et $d_{K,L} = |\mathbf{x}_K - \mathbf{x}_L|$. Les cellules L_1, L_2, \dots sont les cellules intérieures ayant une arête en commun avec la cellule K .

$$A = \begin{pmatrix}
\cdots & \sum_{\substack{e_{K,L} \subset \partial K \\ e_{K,L} \not\subset \partial \Omega}} \frac{|e_{K,L}|}{d_{K,L}} & \cdots & -\frac{|e_{K,L_1}|}{d_{K,L_1}} & \cdots & -\frac{|e_{K,L_2}|}{d_{K,L_2}} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\cdots & -\frac{|e_{L_1,K}|}{d_{L_1,K}} & \cdots & \sum_{\substack{e_{L_1,L} \subset \partial L_1 \\ e_{L_1,L} \not\subset \partial \Omega}} \frac{|e_{L_1,L}|}{d_{L_1,L}} & \cdots & -\frac{|e_{L_1,L_2}|}{d_{L_1,L_2}} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\cdots & -\frac{|e_{L_2,K}|}{d_{L_2,K}} & \cdots & -\frac{|e_{L_2,L_1}|}{d_{L_2,L_1}} & \cdots & \sum_{\substack{e_{L_2,L} \subset \partial L_2 \\ e_{L_2,L} \not\subset \partial \Omega}} \frac{|e_{L_2,L}|}{d_{L_2,L}} & \cdots
\end{pmatrix} \begin{matrix} K \\ L_1 \\ L_2 \end{matrix}$$

FIGURE 2.2 – Matrice A associée au Laplacien

2.4.4 Étude de la stabilité

Définition 2.4.1. *Le schéma 2.29 est L^∞ stable si $\|\mathbf{u}^k\| \leq C$ pour tout $0 \leq k \leq n$ avec $C > 0$ indépendante de k et N*

On a le résultat suivant :

Proposition 2.4.1. *Le schéma 2.29 est L^∞ stable sous la condition*

$$\lambda = \nu \Delta t \max_{1 \leq i \leq N} \left(\frac{1}{|K_i|} \sum_{\substack{e \in \Xi_{K_i} \\ e = (K_i|L)}} \frac{|e|}{|\mathbf{x}_{K_i} - \mathbf{x}_L|} \right) \leq 1 \tag{2.31}$$

Chapitre 3

Résultats de la simulation numérique de la méthode des volumes finis

3.1 Équation de Transport

3.1.1 Étude du premier exemple

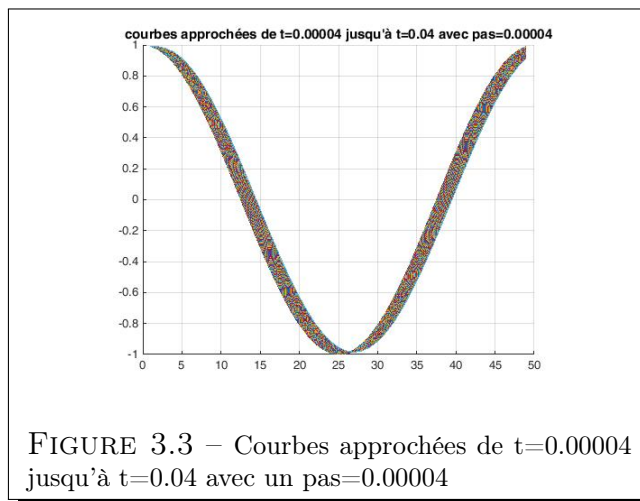
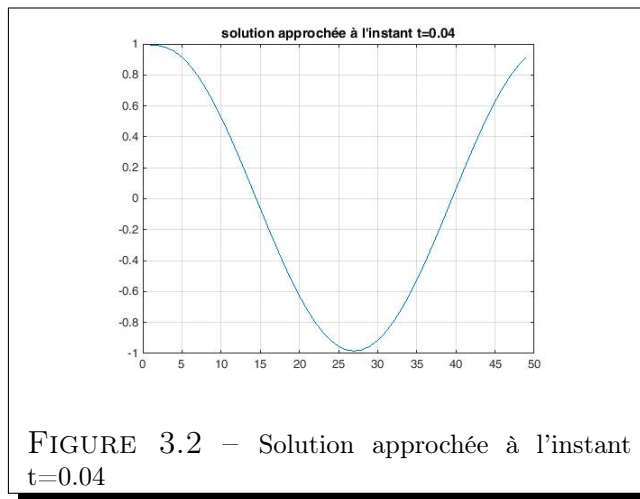
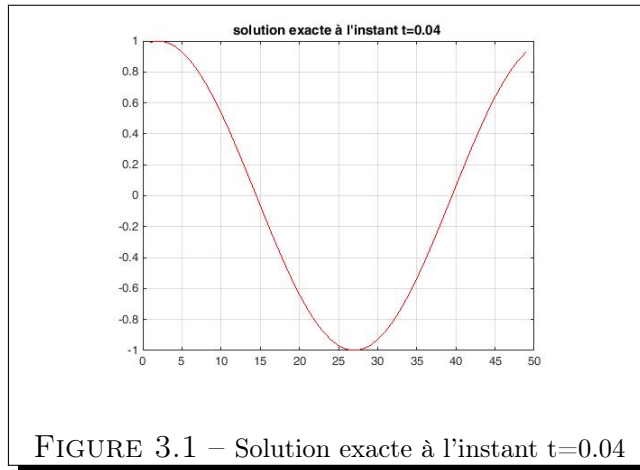
On considère le problème

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} u(t, x) = 0 & t > 0 \quad x \in \mathbb{R} \\ u(0, x) = u_0(x) = \cos(2\pi x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (3.1)$$

La solution exacte du problème précédent est :

$$u(t, x) = \cos(2\pi(x - t)) \quad (3.2)$$

En utilisant le schéma décentré amont en respectant la condition $\frac{\delta t}{h} \leq 1$, on prend $h = 0.02$ et $\Delta t = 4 \times 10^{-5}$ on obtient les résultats suivant :



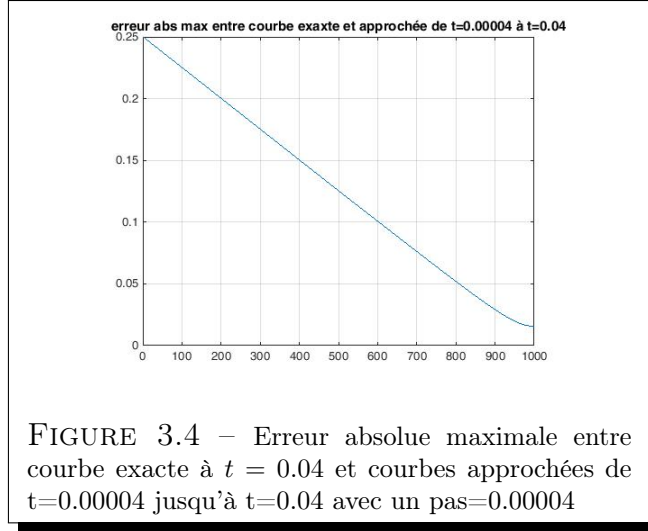


FIGURE 3.4 – Erreur absolue maximale entre courbe exacte à $t = 0.04$ et courbes approchées de $t=0.00004$ jusqu'à $t=0.04$ avec un pas= 0.00004

Conclusion On constate que pour $h = 0.02$ et $\Delta t = 4 \times 10^{-5}$ la courbe représentant l'erreur maximale absolue entre la courbe exacte à $t = 0.04$ et les courbes approchées de $t = 0.00004$ jusqu'à $t = 0.04$ avec le pas = $\Delta t = 0.00004$ est une courbe strictement décroissante. Ce qui mis en évidence la convergence du schéma décentré amont.

3.1.2 Étude du deuxième exemple

On considère le problème

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} u(t, x) = 0 & t > 0 \quad x \in \mathbb{R} \\ u(0, x) = u_0(x) = \cosh(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (3.3)$$

La solution exacte du problème précédent est :

$$u(t, x) = \cosh(x - t) \quad (3.4)$$

En utilisant le schéma décentré amont en respectant la condition $\frac{\delta t}{h} \leq 1$, on prend $h = 0.0200$ et $\Delta t = 2 \times 10^{-4}$ on obtient les résultats suivant :

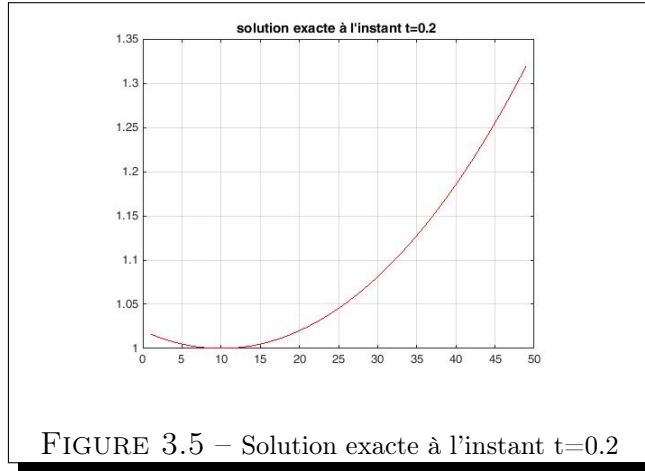


FIGURE 3.5 – Solution exacte à l'instant $t=0.2$

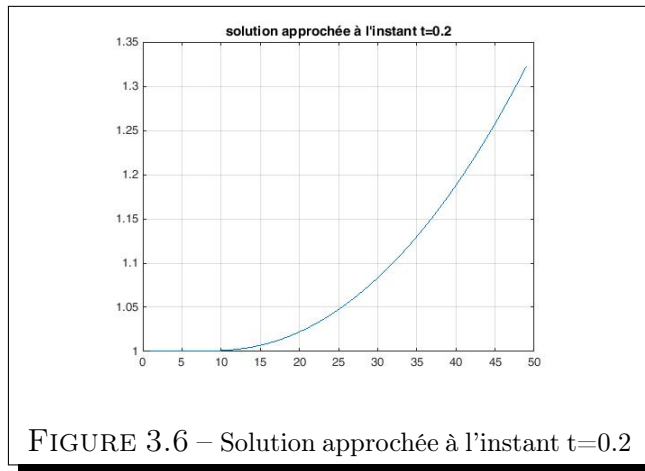


FIGURE 3.6 – Solution approchée à l'instant $t=0.2$

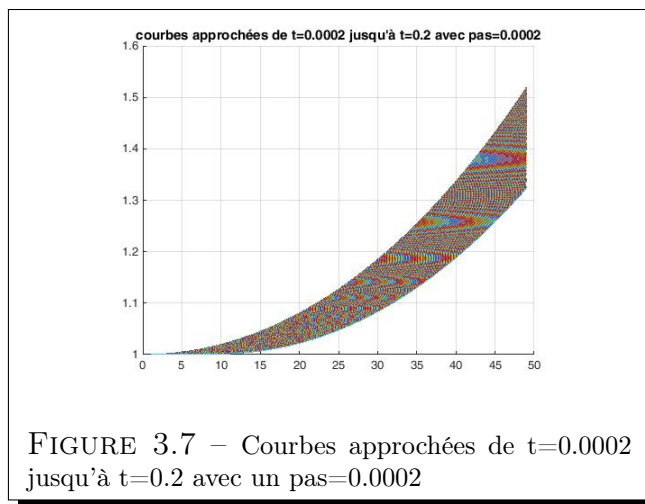


FIGURE 3.7 – Courbes approchées de $t=0.0002$ jusqu'à $t=0.2$ avec un pas=0.0002

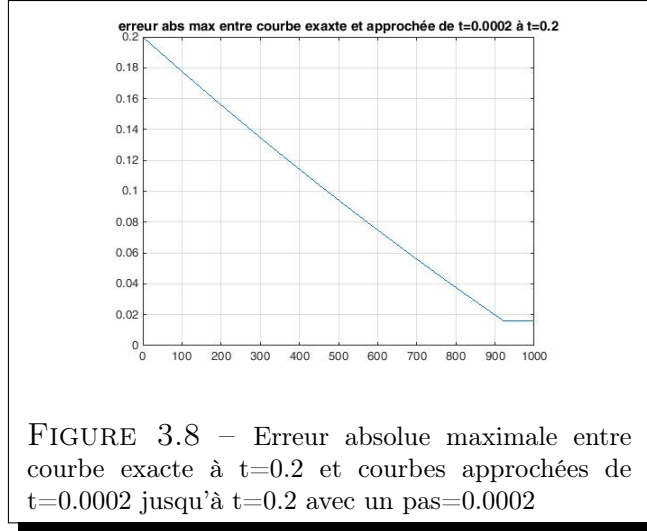


FIGURE 3.8 – Erreur absolue maximale entre courbe exacte à $t=0.2$ et courbes approchées de $t=0.0002$ jusqu'à $t=0.2$ avec un pas= 0.0002

Conclusion On constate que pour $h = 0.0200$ et $\Delta t = 2 \times 10^{-4}$ la courbe représentant l'erreur maximale absolue entre la courbe exacte à $t = 0.2$ et les courbes approchées de $t = 0.0002$ jusqu'à $t = 0.4$ avec le pas= $\Delta t = 0.0002$ est une courbe strictement décroissante. Ce qui mis en évidence la convergence du schéma décentré amont.

3.2 Équation de la chaleur

3.2.1 Étude du premier exemple

On considère le problème

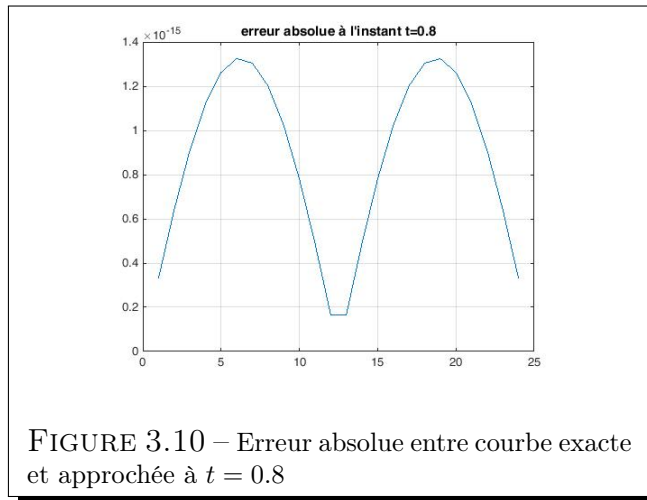
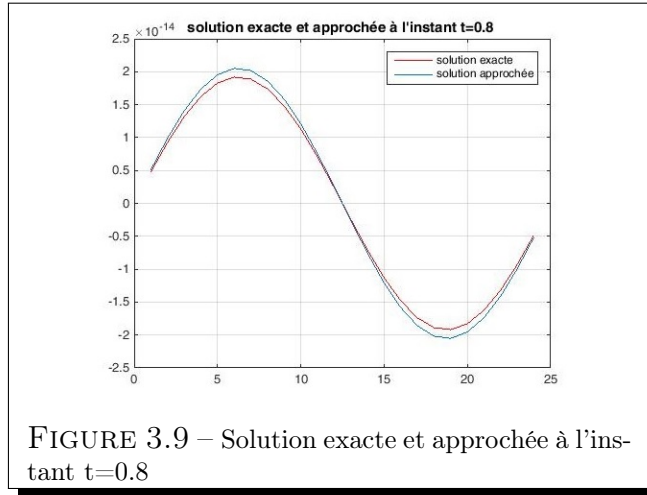
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) & t > 0 \quad x \in]0, 1[\\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0 & t > 0 \\ u(0, x) = u^0(x) = \sin(2\pi x) & x \in [0, 1] \end{cases} \quad (3.5)$$

La solution exacte du problème précédent est

$$u(t, x) = \sin(2\pi x) \exp(-4\pi^2 t) \quad (3.6)$$

La méthode explicite

En utilisant La méthode explicite et en respectant la condition $\frac{\delta t}{h^2} \leq \frac{1}{2}$, on prend $h = 0.0400$ et $\Delta t = 1.6 \times 10^{-4}$ on obtient les résultats suivant :



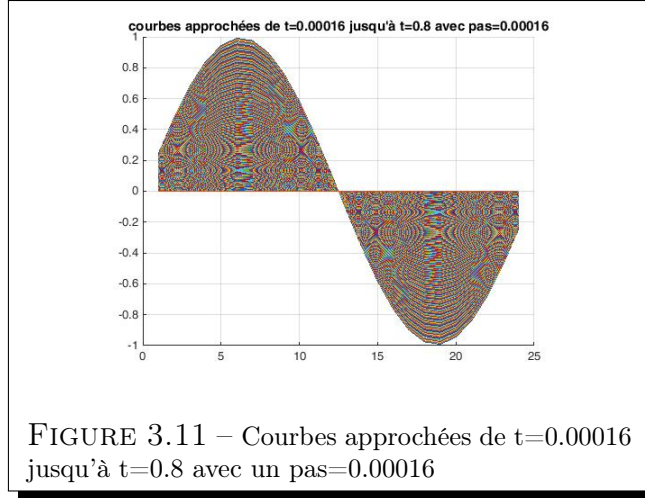


FIGURE 3.11 – Courbes approchées de $t=0.00016$ jusqu'à $t=0.8$ avec un pas= 0.00016

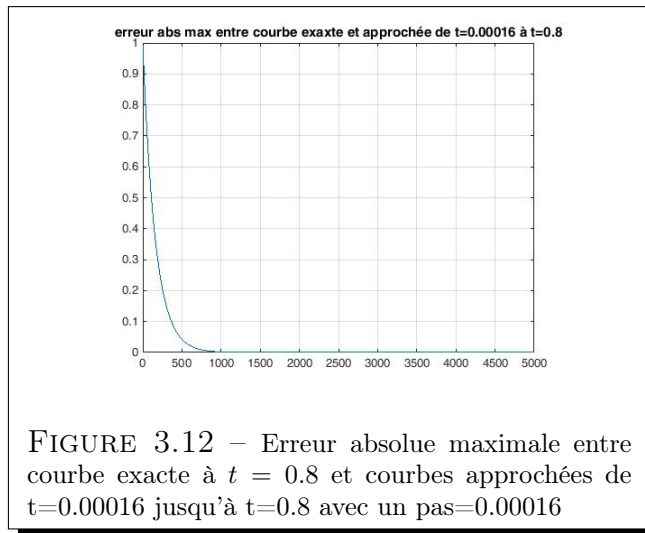


FIGURE 3.12 – Erreur absolue maximale entre courbe exacte à $t = 0.8$ et courbes approchées de $t=0.00016$ jusqu'à $t=0.8$ avec un pas= 0.00016

Conclusion On constate que pour $h = 0.04$ et $\Delta t = 1.6 \times 10^{-4}$ la courbe représentant l'erreur maximale absolue entre la courbe exacte à $t = 0.8$ et les courbes approchées de $t = 0.00016$ jusqu'à $t = 0.8$ avec le pas= $\Delta t = 0.00016$ est une courbe strictement décroissante. Ce qui mis en évidence la convergence de la méthode explicite.

3.2.2 Étude du deuxième exemple

On considère le problème

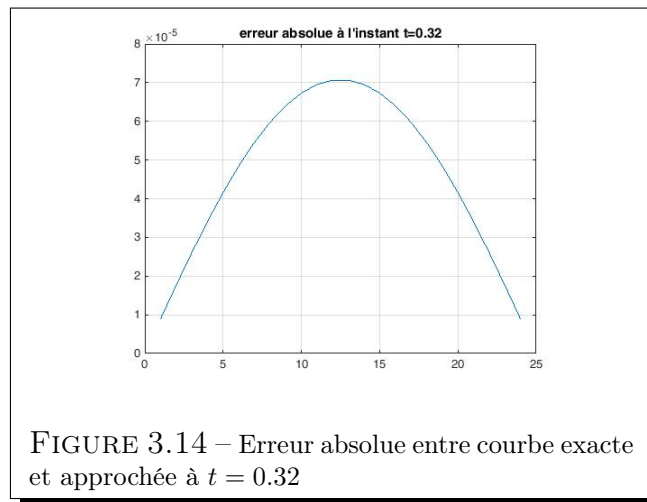
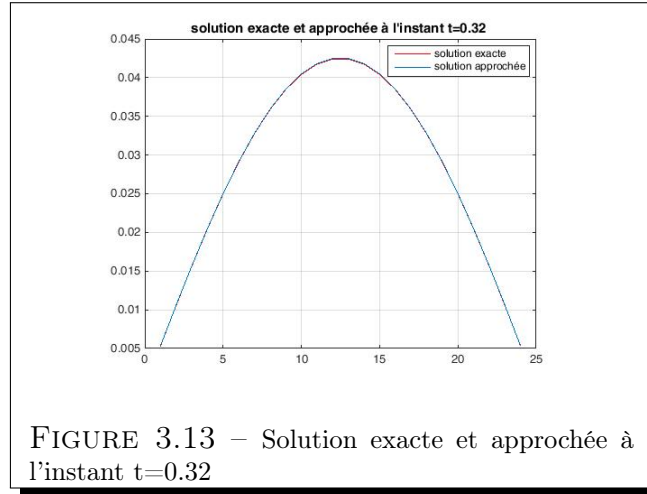
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) & t > 0 \quad x \in]0, 1[\\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0 & t > 0 \\ u(0, x) = u^0(x) = \sin(\pi x) + \sin(10\pi x) & x \in [0, 1] \end{cases} \quad (3.7)$$

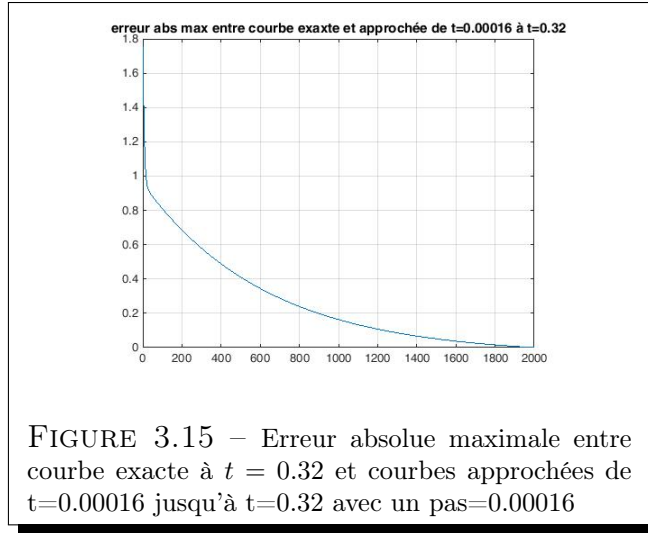
La solution exacte du problème précédent est

$$u(t, x) = \sin(\pi x) \exp(-\pi^2 t) + \sin(10\pi x) \exp(-100\pi^2 t) \quad (3.8)$$

La méthode explicite

En utilisant La méthode explicite et en respectant la condition $\frac{\delta t}{h^2} \leq \frac{1}{2}$, on prend $h = 0.0400$ et $\Delta t = 1.6 \times 10^{-4}$ on obtient les résultats suivant :





Conclusion On constate que pour $h = 0.0400$ et $\Delta t = 1.6000 \times 10^{-4}$ la courbe représentant l'erreur maximale absolue entre la courbe exacte à $t = 0.32$ et les courbes approchées de $t = 0.00016$ jusqu'à $t = 0.32$ avec le pas= $\Delta t = 0.00016$ est une courbe strictement décroissante. Ce qui mis en évidence la convergence de la méthode explicite.

Conclusion

Dans ce mémoire, après un bref rappel sur les équations aux dérivées partielles semi-linéaires d'ordre 2 sur le plan et les théorèmes fondamentaux du calcul vectoriel .

On a étudié en détail la méthode des volumes finis. Cette étude porte sur la résolution de l'équation de Transport sur \mathbb{R} et l'équation de la chaleur sur \mathbb{R} et sur \mathbb{R}^2 .

On a terminé ce mémoire par la résolution numérique de l'équation de Transport sur \mathbb{R} et l'équation de la chaleur sur \mathbb{R} en implémentant la méthode des volumes finis sous MATLAB . Les résultats de la simulation numérique nous ont permis de valider la convergence de la méthode des volumes finis pour deux problèmes d'évolution linéaires .

Bibliographie

- [1] David.Claire Gosselet.Pierre, Équations aux dérivées partielles Cours et exercices corrigés, 2e édition Dunod, 2015.
- [2] F. Moukalled L. Mangani M. Darwish, The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics An Advanced Introduction with OpenFOAM and Matlab, Springer, 2016.
- [3] Peter Knabner Lutz Angermann, Numerical Methods for Elliptic and Parabolic Partial Differential Equations, Springer-Verlag New York, 2003.
- [4] Bruno Després, Différences Finies et Volumes Finis, Master Mathématiques et Applications, 2021.
- [5] JEAN-FRANÇOIS SCHEID, Méthodes numériques avancées pour la résolution des EDP Volumes Finis, Master 2 IMOI, Université de Lorraine, Année 2017-2018.
- [6] Filipa Caetano, Équation de transport et lois de conservation scalaires - discrétisation par volumes finis, Cours accéléré d'analyse numérique - M2 AMS, Université Paris-Saclay, Année 2022-2023.

Résumé

Dans ce travail, après un bref rappel sur les edp semilinéaires sur le plan, et le théorème de divergence, on présente la méthode des volumes finis en l'appliquant à la résolution de l'équation transport sur \mathbb{R} et l'équation de la chaleur sur \mathbb{R} et sur \mathbb{R}^2 . Pour cette dernière on donne un résultat de stabilité. En utilisant l'environnement MATLAB on simule numériquement à l'aide de la méthode des volumes finis l'équation de transport 1D et l'équation de la chaleur 1D.

Summary

In this work, after a brief reminder on the semilinear edp on the plane, and the divergence theorem we present the finite volume method by applying it to the resolution of the transport equation on \mathbb{R} and the heat equation on \mathbb{R} and on \mathbb{R}^2 . For the latter we give stability result. Using the MATLAB environment, we numerically simulate the 1D transport equation and the 1D heat equation using the finite volume method.

ملخص

في هذه المذكرة، بعد تذكير قصير حول المعادلات التفاضلية ذات المشتقات الجزئية شبه الخطية على المستوى و نظرية التباعد ، نقدم طريقة الحجوم المحدودة من خلال تطبيقها على حل معادلة Transport على \mathbb{R} ومعادلة الحرارة على \mathbb{R} و \mathbb{R}^2 . نعطي نتائج الاستقرار. باستخدام برنامج MATLAB ، نقوم بمحاكاة معادلة 1D Transport ومعادلة الحرارة 1D رقميًا باستخدام طريقة الحجوم المحدودة.