RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN TIARET
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUES
Département de Mathématiques

MÉMOIRE MASTER

Présenter en vue de l'obtention du diplôme de master

Spécialité :
« Mathématiques»

Option :
«Analyse Fonctionnelles et Equations différentielles »

Présenté Par :

Aissat Nessrine
et
Djillali Wafaa

Sous L'intitulé :

Sur les opérateurs de type potentiel

Soutenu publiquement le 24/ 06 / 2024
à Tiaret devant le jury composé de :

Mr Larrabi Abdelrahmane	MCB	Université de Tiaret	Président
Mr Ouardani Abdelrahmane	MCB	Université de Tiaret	Examinateur
Mr Lahcen Guedda	MCB	Université de Tiaret	Encadreur

Année universitaire :2023/2024

Remerciements

Avant de commencer la présentation de ce travail, nous tenons à remercier sincèrement et profondément en premier lieu notre Dieu ***ALLAH*** *tout-Puissant.*

Nous devons exprimer notre gratitude à Encadreur ***Mr. Lahcene- Gudda****, d'avoir accepter de nous encadrer avec enthousiasme et beaucoup d'attention, ainsi que pour sa gentillesse, sa disponibilité, et ses conseils qui nous ont permis d'avancer, non seulement dans le carde du mémoire.*

Nous tenons à remercier aussi les nombres de jury ***Mr.Ourdani-Abdelrahmane*** *et* ***Mr.Larabi-Abdelrahamane*** *,d'avoir accepter d'examiner ce modeste travail.*

Nous ne pouvons oublier de remercier les parents pour leur soutien, leur aide et patience, tout au long de nos études.

Enfin, nous adressons nos remerciements à tous nos professeurs, collègues et tous ceux qui nous ont encouragés, à faire ce travail.

Dédicaces

Je dédie ce travail :

À mes chèrs parents pour leur soutien, leur patience et leurs encouragements durent mon parcours universitaire.
*À mes frères, ainsi ma famille **Aissat** et **Daoui** .*
À mes Amis. À Tous mes professeurs qu'il soient du primaire, du secondaire ou du supérieur.

Nessrine

Je dédie ce travail :

À mes chères parents pour leur soutien, leur patience et leurs encouragements durent mon parcours universitaire.
*À mes frères, ainsi ma famille **Djilali** et **Rouab** .*
À mes Amis. À Tous mes professeurs qu'il soient du primaire, du secondaire ou du supérieur.

Wafaa

TABLE DES MATIÈRES

Introduction

L'étude des équations intégrales, Intégro-différentielles et d'autres types d'équations est généralement simplifiée si elles peuvent être considérées comme des équations d'opérateurs dans des espaces de fonctions.

Un choix réussi des espaces garantit des bonnes propriétés des opérateurs dans les équations : continuité, complète-continuité, différentiabilité, et autres.

Dans l'étude des opérateurs dans les espaces L_p, Il est naturel de rechercher ceux p, q pour lesquels ces opérateurs possèdent des propriétés voulues. La notion de L-caractéristique d'un opérateur donné devient alors une méthode pratique pour la description et l'étude des propriétés de ces opérateurs dans les espaces L_p pour divers p.

Notre objectif dans ce mémoire est de donner quelques résultats de base sur les opérateurs homogènes de type potentiel

les opérateurs homogènes de type potentiel ont été étudiés en détail en relation avec la théorie des séries de Fourier, la calcul fractionnaire, etc. (On peut consulter la bibliographie complète et satisfaisante dans la monographie de G. Hardy, D. Littlewood et K. G. Polya [2]). Les travaux de base sur la théorie des opérateurs multidimensionnels de type potentiel sont dus à S. L. Sobolev [9, 10]. Il a clarifié le rôle de tels opérateurs dans la théorie des espaces de fonctions différentiables et dans les problèmes aux limites de la physique mathématique. Les premiers théorèmes sur la compacité des opérateurs de type potentiel ont été indiqués par V. I. Kondrashov. Des résultats importants dans la théorie des opérateurs de type potentiel sont dus à V.

P. Ilin [3, 5] et à d'autres auteurs. La technique utilisée dans ce paragraphe pour appliquer les théorèmes de Stein-Weiss [8] à l'étude de certaines classes d'opérateurs de type potentiel est soulignée dans l'article de S. G. Krein et E. M. Semenov [7]. La preuve du théorème d'Ilin, présentée en 16, semble être nouvelle.

CHAPITRE 1

LES ESPACES L^p

L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni de la mesure de Lebesgue dx. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On désigne par $L^1(\Omega)$ l'espace des fonctions intégrables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pose

$$\| f \|_{L^1} = \int_\Omega |f(x)|dx.$$

On identifie deux fonctions de $L^1(\Omega)$ qui coïncident $p.p.$ = presque partout (= sauf sur un ensemble négligeable).

1.1 Quelques résultats d'intégration

Théorème 1.1.1 (Théorème de convergence monotone de Beppo Levi) *Soit (f_n) une suite croissante de fonction de $L^1(\Omega)$ telle que $\sup_n \int f_n \leq \infty$. Alors $f_n(x)$ converge p.p. sur Ω vers une limite finie notée $f(x)$; de plus $f \in L^1(\Omega)$ et $\|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \to 0$.*

Théorème 1.1.2 (Théorème de convergence dominée de Lebesgue) *Soit (f_n) une suite de fonctions de $L^1(\Omega)$. On suppose que :*

a)$f_n(x) \to f(x)$ *p.p. sur* Ω.

b)*il existe une fonction* $g \in L^1(\Omega)$ *telle que pour chaque* n, $f|f_n(x)| \leq g(x)$ *p.p. sur* Ω.

Alors, $f \in L^1(\Omega)$ *et* $\| f_n - f \|_{L^1} \to 0$.

Lemme 1.1.1 (lemme de Fatou) *Soit* (f_n) *une suite de fonctions de* $L^1(\Omega)$ *telle que*

(1) pour chaque n, $f_n(x) \geq 0$ *p.p. sur* Ω.

(2) $\sup_n \int f_n \leq \infty$.

pour chaque $x \in \Omega$ *on pose* $f(x) = \lim_{n\to\infty} \inf f_n(x)$ *Alors* $f \in L^1(\Omega)$ *et*

$$\int f \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int f_n.$$

Soient $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{N_1}$; $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^{N_2}$ des ouverts et soit $F : \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable .

Théorème 1.1.3 (Tonelli) *On suppose que*

$$\int_{\Omega_2} |F(x,y)|dy < \infty \text{ pour presque tout } x \in \Omega_1.$$

Et que

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} |F(x,y)|dy < \infty.$$

Alors, $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2$.

Théorème 1.1.4 (Fubini) *On suppose que* $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. *Alors, pour presque tout* $x \in \Omega_1$

$$F(x,y) \in L^1_y(\Omega_2) \text{ et } \int_{\Omega_2} F(x,y)dy \in L^1_x(\Omega_1).$$

De même, pour presque tout $y \in \Omega_2$,

$$F(x,y) \in L^1_x(\Omega_1) \text{ et } \int_{\Omega_2} F(x,y)dx \in L^1_y(\Omega_2).$$

De plus on a,

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x,y)dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x,y)dx = \int\int_{\Omega_1\times\Omega_2} F(x,y)dxdy.$$

1.2 Définition et propriétés élémentaires des espaces L^p

Définitions

Définition 1.2.1 *Soit* $p \in \mathbb{R}$ *avec* $1 \leq p < \infty$ *; on pose*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f \quad \text{mesurable et } |f|^p \in L^1(\Omega)\}.$$

On note

$$\| f \|_{L^p} = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p dx\right]^{1\backslash p}.$$

On vérifiera ultérieurement que $\| \ \|_{L^p}$ *est une norme.*

Définition 1.2.2 *On pose*

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R};\ f \text{ mesurable et } \exists C \text{ telle que} |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\}.$$

On note

$$\| f \|_{L^\infty} = \{\inf C; |f(x)| \leq C\boldsymbol{p.p.}sur\ \Omega\}$$

.

On vérifiera ultérieurement que $\| \cdot \|_{L^\infty}$ *est une norme .*

Remarque 1.2.1 *Si* $f \in L^\infty$ *on a*

$$|f(x)| \leq \| f \|_{L^\infty} \ \ p.p. \ sur \ \Omega.$$

En effet il existe une suite C_n *tell que* $C_n \to \| f \|_{L^\infty}$ *et pour chaque* n, $|f(x)| \leq C_n$ *p.p sur* Ω*. Donc* $|f(x)| \leq C_n$ *pour tout* $x \in \Omega \setminus E_n$ *avec* E_n *négligeable. On pose* $E = \bigcup_n E_n$ *de sorte que* E *est négligeable et l'on a* $|f(x)| \leq C_n$ *pour tout* n *et pour tout* $x \in \Omega \backslash E$*. Par conséquent* $|f(x)| \leq \| f \|_{L^\infty}$ *pour tout* $x \in \Omega \backslash E$*.*

Notation. *Soit* $1 \leq p \leq \infty$ *; on désigne par* p' *l'exposant conjugue de* p *i.e.* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$*.*

Théorème 1.2.1 (Inégalité de Hölder) *Soient* $f \in L^p$ *et* $g \in L^{p'}$ *avec* $1 \leq p \leq \infty$*. Alors* $f.g \in L^1$ *et*

$$\int |fg| \leq \| f \|_{L^p} \| g \|_{L^{p'}} . \tag{1.1}$$

Démonstration : La conclusion est évidente si $p = 1$ et si $p = \infty$. Supposons donc que $1 < p < \infty$. Rappelons l'inégalité de Young

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} b^{p'} \qquad \forall a \geq 0, \ \forall b \geq 0.$$

La démonstration de cette inégalité est simple : la fonction log étant concave sur $]0, \infty[$ on a

$$\log \left(\frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} b^{p'} \right) \geq \frac{1}{p} \log a^p + \frac{1}{p'} \log b^{p'} = \log ab.$$

Donc

$$|f(x)| \parallel g(x) \parallel \leq \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{p'}|g(x)|^{p'} \; p.p \; x \in \Omega.$$

Il résulte que $fg \in L^1$ et que

$$\int |fg| \leq \frac{1}{p} \parallel f \parallel_{L^p}^p + \frac{1}{p'} \parallel g \parallel_{L^{p'}}^{p'} . \tag{1.2}$$

Remplacent dans (1.2) f par $\lambda f(\lambda > 0)$ il vient

$$\int |f\, g| \leq \frac{\lambda^{p-1}}{p} \parallel f \parallel_{L^p}^p + \frac{1}{\lambda p'} \parallel g \parallel_{L^p}^p . \tag{1.3}$$

On choisit $\lambda = \parallel f \parallel_{L^p}^{-1} \parallel g \parallel_{L^p}^{p' \backslash p}$ (de manière à minimiser le nombre de droite dans (1.3)). On obtient alors (1.1).

Remarque 1.2.2 *Il convient de retenir une conséquence très utile de l'inégalité de Hölder : soient $f_1, f_2 ... f_k$ des fonctions telle que $f_i \in L^p(\Omega)$, $\quad 1 \leq i \leq k$ avec*

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + ... + \frac{1}{p_k} \leq 1.$$

Alors le produit $f = f_1 f_2 ... f_k$ appartient à $L^p(\Omega)$ et

$$\parallel f \parallel_{L^p} \leq \parallel f_1 \parallel_{L^{p'}} ... \parallel f_k \parallel_{L^{p^k}} .$$

En particulier si $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq p \leq \infty$, alors $f \in L^p(\Omega)$ pour tout $p \leq r \leq q$ et l'on a l'inégalité d'interpolation,

$$\parallel f \parallel_{L^p} \leq \parallel f \parallel_{L^p}^{\alpha} \parallel f \parallel_{L^p}^{1-\alpha} \quad \text{où } \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q} \; (0 \leq \alpha \leq 1). \tag{1.4}$$

Théorème 1.2.2 *$L^p(\Omega)$ est un espace vectoriel et $\parallel \cdot \parallel_{L^p}$ est une norme pour tout $1 \leq p \leq \infty$.*

Preuve 1.2.3 *Les cas $p = 1$ et $p = \infty$ sont simples. Supposons que $1 < p < \infty$ et soient $f,\ g \in L^p(\Omega)$. On a*

$$|f(x) + g(x)|^p \leq (|f(x) + g(x))|^p \leq 2^p(|f(x)|^p + |g(x)|^p).$$

Par conséquent $f + g \in L^p$. D'autre part on a

$$\| f + g \|_{L^p}^p = \int |f + g|^{p-1}|f + g| \leq \int |f + g|^{p-1}|f| + \int |f + g|^{p-1}|g|.$$

Or $|f + g|^{p-1} \in L^{p'}$ et grâce à l'inégalité de Hölder on obtient

$$\| f + g \|_{L^p}^p \leq \| f + g \|_{L^p}^{p-1} \| f \|_{L^p} + \| f + g \|_{L^p}^{p-1} \| g \|_{L^p}$$

i.e $\| f + g \|_{L^p}^p \leq \| f \|_{L^p} + \| g \|_{L^p}$.

Théorème 1.2.4 (Fischer-Riesz) *L^p est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq \infty$.*

Preuve 1.2.5 *1) Supposons d'abord que $p = \infty$. Soit (f_n) une suite de Cauchy dans L^∞. Étant donné un entier $k \geq 1$ il existe N_k tel que*

$$\| f_m - f_n \|_{L^\infty} \leq \frac{1}{k} \text{ pour } m, n \geq N_k.$$

Donc il existe E_k négligeable tel que

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k}\ \forall x \in \Omega \backslash E_k,\ \forall m, n \geq N_k.$$

Enfin, posant $E = \bigcup\limits_k E_k$ (E est négligeable), on voit que pour tout $x \in \Omega \backslash E$ la suite $f_n(x)$ est de Cauchy (dans $\mathbb{R}$). Soit $f_n(x) \to f(x)$ pour $x \in \Omega \backslash E$ passant à la limite quand $m \to \infty$ on obtient

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k}\ \forall x \in \Omega \backslash E,\ \forall n \geq N_k.$$

Donc $f \in L^\infty$ *et* $\| f - f_n \|_{L^\infty} \leq \frac{1}{k}, \forall n \geq N_k$ *par conséquent,* $\| f - f_n \|_{L^\infty} \to 0$

.

2) Supposons maintenant que $1 \leq p < \infty$*. Soit* (f_n) *une suite de Cauchy dans* L^p *pour conclure il suffit de montrer qu'une sous-suite extraite converge dans* L^p*.*

On extrait une sous suite (f_{n_k}) *telle que*

$$\| f_{n_{k+1}} - f_{n_k} \|_{L^p} \leq \frac{1}{2^k} \ \forall k \geq 1.$$

[On procède comme suite : Il existe n_1 *tel que* $\| f_m - f_n \|_{L^p} \leq \frac{1}{2}$ *pour* $m, n \geq n_1$ *; On prend ensuite* $n_2 \geq n_1$ *tell que* $\| f_m - f_n \|_{L^p} \leq \frac{1}{2^2}$ *pour* $m, n \geq n_2$ *.etc]. On va montrer que* f_{n_k} *converge dans* $L^p(\Omega)$*. Pour simplifier les notations on écrit* f_k *au lieu de* f_{n_k} *de sorte que l'on a*

$$\| f_{k+1} - f_k \|_{L^p} \leq \frac{1}{2^k} \ \forall k \geq 1. \tag{1.5}$$

Posant

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |f_{k+1}(x) - f_k(x)|.$$

Il vient

$$\| g_n \|_{L^P} \leq 1.$$

On déduit du théorème de convergence monotone que p.p. sur Ω*,*$g_n(x)$ *converge vers une limite finie notée* $g(x)$ *avec* $g \in L^p(\omega)$*. D'autre part , on a pour* $m \geq n \geq 2$

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f_{m-1}(x)| + ...|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq g(x) - g_{n-1}(x).$$

Il en résulte que p.p sur Ω*,* $(f_n(x))$ *est de Cauchy et converge vers une limite* *notée $f(x)$. On a p.p sur Ω*

$$|f(x) - f_n(x)| \leq g(x) \text{ pour } n \geq 2. \tag{1.6}$$

Il en résulte que $f \in L^p$. Enfin $\| f_n(x) - f \|_{L^p} \to 0$, en effet on a $|f_n - f(x)|^p \to 0$ p.p. et $|f_n(x) - f(x)|^p \leq g^p(x)$ majorante intégrable. On conclut grâce au théorème de Lebesgue .

Théorème 1.2.6 *Soient (f_n) une suite de $L^p(\Omega)$ et $f \in L^p(\Omega)$, tels que $\| f_n - f \|_{L^p} \to 0$.*

Alors il existe une sous titre-extraite (f_{n_k}) telle que

a) $f_{n_k}(x) \to f(x)$ p.p sur Ω.

b) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ $\forall k$ et p.p sur Ω, $h \in L^p(\Omega)$.

1.3 Réflexivité Séparabilité Dual de $L^p(\Omega)$

Dual Topologique

Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel topologique sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Le dual topologique $\mathbb{E}'$ de $\mathbb{E}$ est le sous-espace de $\mathbb{E}^*$ (espace dual de E) formé des formes linéaires continues (il est immédiat que c'est bien un sous-espace vectoriel).

Si l'espace est de dimension finie le dual topologique coïncide avec le dual (algébrique) puisque dans ce cas toute forme linéaire est continue.

Par contre ceci est inexact dans le cas général. Ainsi par exemple envisageons l'espace vectoriel réel $\mathbb{D}$ des fonctions dérivables de l'intervalle $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie de la norme uniforme $n(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$. Soit alors p la forme linéaire définie par $p(f) = f'(0)$. Soit par ailleurs la suite $(f_n)_{n>0}$ de fonctions de $\mathbb{D}$ définie par $f_n(x) = x(1-x)^n$. On constate facilement que $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$ (la fonction f_n est positive et maximale pour $x = 1/(n+1)$). Mais $p(f_n) = 1$ pour tout n alors que $p(f_n)$ devrait tendre vers $p(0) = 0$ si p était continue!

Théorème 1.3.1 (Théorème de représentation de Riesz) *Soit* $1 < p < \infty$ *et soit* $\psi \in (L^p(\Omega))'$. *Alors il existe* $u \in L^{p'}(\Omega)$ *unique tel que*

$$< \psi, f >= \int u f \quad \forall f \in L^p(\Omega).$$

De plus on a

$$\| u \|_{L^{p'}(\Omega)} = \| \psi \|_{(L^p(\Omega))'} .$$

Remarque 1.3.1 *Le théorème de représentation de Riesz est très important. Il exprime que toute forme linéaire continue sur* $L^p(\Omega)$ *avec* $1 < p < \infty$ *se représente à l'aide d'une fonction de* L^p. *L'application* $\psi \mapsto u$ *est un opérateur linéaire isométrique et surjectif qui permet d'identifier le dual de* L^p. *On fera systématiquement l'identification :*

$$(L^p(\Omega))' = L^{p'}(\Omega).$$

Théorème 1.3.2 *Soit* $\phi \in (L^1(\Omega))'$.*Alors il existe* $u \in L^\infty$ *unique tel que*

$$< \phi, f >= \int uf \qquad \forall f \in L^1(\Omega).$$

On a de plus

$$\| u \|_{L^\infty} = \| \phi \|_{(L^p(\Omega))} .$$

Remarque 1.3.2 *Le théorème affirme que toute forme linéaire et continue sur* $L^1(\Omega)$ *se représente à l'aide d'une fonction de* $L^\infty(\Omega)$. *L'application* $\phi \mapsto$

u. Est une isométrie surjective qui permet d'identifier $(L^1(\Omega))'$ et $L^\infty(\Omega)$. Dans la suite on fera systématiquement l'identification.

$$(L^1(\Omega))' = L^\infty(\Omega).$$

Remarque 1.3.3 *Le dual de $L^\infty(\Omega)$ contient $L^1(\Omega)$ (puisque $(L^1(\Omega))' = L^\infty(\Omega)$) et il est strictement plus grand que $L^1(\Omega)$.*

Espace réflexif

Soit X un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Il s'injecte "canoniquement" dans son bidual topologique par l'application linéaire continue suivante :

$$\begin{array}{rcl} J : X & \to & X'' \\ x & \mapsto & \hat{x} : X' \to \mathbb{K},\ f \mapsto f(x). \end{array}$$

Comme conséquence du théorème de Hahn-Banach, J est une isométrie et est donc injective. On dit que X est réflexif si J est surjective, c'est-à-dire si toute forme linéaire continue sur X' est de la forme $f \mapsto f(x)$ pour un x de X. Ainsi, tout espace vectoriel normé réflexif est de Banach, puisqu'il est isomorphe à X'' qui est toujours un espace de Banach.

Exemple 1.3.1 *Tout espace vectoriel normé de dimension finie, tout espace de Hilbert.*

Les espaces de suite ℓ_1, c_0, ℓ_∞ ne sont pas réflexifs, comme $\mathcal{C}([0,1])$. On peut caractériser les espaces réflexifs de la façon suivante :

Théorème 1.3.3 *Soit X un espace vectoriel normé. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

• *X est réflexif.*

• *La boule unité fermée de X est compacte pour la topologie faible.*

• *toute suite bornée de X admet une sous-suite faiblement convergente.*

• *X est complet et son dual (topologique) est réflexif.*

• *X est complet et toute forme linéaire continue sur X atteint sa norme en un point de la boule unité fermée de X.*

• *X est complet et tout convexe fermé non vide C de X est proximinal, c'est-à-dire que pour tout x dans X, il existe dans C au moins un c (non unique en général) tel que $\|x\breve{\ }c\|$ soit égal à la distance de x à C.*

Par ailleurs, les espaces réflexifs vérifient les propriétés suivantes :

Si Y est un sous-espace vectoriel fermé d'un espace réflexif X alors Y et X/Y sont réflexifs.

Un espace réflexif est séparable si et seulement si son dual topologique est séparable.

Théorème 1.3.4 *$L^p(\Omega)$ est réflexif pour $1 < p < \infty$.*

Espace uniformément convexe

Définition 1.3.1 *Un espace uniformément convexe est un espace de Banach tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ pour lequel, pour tout couple (x, y) de vecteurs,*

$$\|x\| \leq 1,\ \|y\| \leq 1 \, et \, \|x - y\| \geq \varepsilon \Longrightarrow \left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta.$$

Le concept de convexité uniforme a été introduit par James Clarkson.

De manière intuitive, cela signifie que les boules sont bien arrondies.

Théorème 1.3.5 (Milman-Pettis) *Tout espace de Banach uniformément convexe est réflexif.*

Ce théorème a été prouvé indépendamment par David Milman et Billy James Pettis.

L'identité du parallélogramme montre que tout espace de Hilbert est uniformément convexe. Les inégalités de Clarkson permettent de montrer que les espaces $L^p(\Omega)$ pour $1 < p < \infty$ sont uniformément convexes. Plus précisément :

Théorème 1.3.6 *Soit* $1 \leq p < +\infty$ *et soit* $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ *un espace mesuré. Pour tous* $f, g \in L^p(\Omega, \mu)$ *on a*

$$\|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p \leq 2\left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right),$$

si $p \in [1, 2]$ *et*

$$\|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p \geq 2\left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right),$$

si $p > 2$*. De plus, si* $p \neq 2$*, on a égalité si et seulement si* f *et* g *ont des supports disjoints.*

1.4 Théorème de densité

Théorème 1.4.1 *(Densité).– L'espace* $C_c(\Omega)$ *est dense dans* $L^p(\Omega)$ *pour* $1 \leq p < \infty$ *Commençons par une définition et un lemme.*

Le tableau suivant récapitule les principales propriétés des espaces L^p rencontrés au 1.3

	Réflexif	séparable	espace dual
L^p, $1 < p < \infty$	OUI	OUI	$L^{p'}$
L^1	NON	OUI	L^∞
L^∞	NON	NON	contient strictement L^1

1.5 Critère de compacité forte dans L^p

Il est important de savoir reconnaître quand une famille de $L^p(\Omega)$ est relativement compacte dans $L^p(\Omega)$ pour la topologie forte. Rappelons d'abord le théorème d'Ascoli qui répond à la même question dans $C(K)$ ou K est un espace métrique compact.

Théorème 1.5.1 (Ascoli) *Soit K un espace métrique compact et soit $\mathfrak{K}$ un sous ensemble borné de $C(K)$. On suppose que $\mathfrak{K}$ est uniformément équicontinu i.e*

$$\forall \epsilon > 0\, \exists \delta > 0 \; texttelque \, d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon \quad \forall f \in \mathfrak{K}.$$

Alors $\mathfrak{K}$ est relativement compact dans $C(K)$.

Le théorème suivant (et son corolaire)sont des versions L^p du théorème d'Ascoli.

Notations

1) On pose $(\tau_h f)(x) = f(x+h)$ (translation de f par h).

2) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ouvert : On dit qu'un ouvert ω est fortement inclus dans Ω et on écrit $\omega \subset\subset \Omega$ si $\overline{\omega} \subset \Omega$ et si $\overline{\omega}$ est compact.

Théorème 1.5.2 (M.Risez-Frécher-kolmogrov) *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un ouvert et soit* $\omega \subset \Omega$. *Soit* $\mathfrak{F}$ *un sous-ensemble borné de* $L^p(\Omega)$ *avec* $1 \leq p < \infty$. *On suppose que*

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0, \, \delta < dist(\omega, C\Omega) \ tel \ que$$

$$\| \tau_h f - f \|_{L^p(\Omega)} < \epsilon \ \forall h \in \mathbb{R}^N \ avec \ |h| < \delta \ et \, \forall f \in \mathfrak{F}.$$

Alors $\mathfrak{F}_{|\omega}$ *est relativement compact dans* $L^p(\omega)$.

Corollaire 1.5.1 *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un ouvert et soit* $\mathfrak{F}$ *un sous-ensemble borné de* $L^p(\Omega)$ *avec* $1 \leq p \leq \infty$.

On suppose que

$$\begin{cases} \forall \epsilon > 0, \forall \omega \subset\subset \Omega, \ \exists \delta < 0, \ \delta < dist(\omega, C\Omega) \ tel \ que \\ \| \tau_h f - f \|_{L^p(\omega)} < \epsilon \ \forall h \in \mathbb{R}^N \ avec \ |h| < \delta et \forall f \in \mathfrak{F}, \end{cases}$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \omega \subset\subset \Omega telque \ \| \ f \ \|_L^p \ (\Omega \backslash \omega) < \epsilon \forall f \in \mathfrak{F}.$$

Alors $\mathfrak{F}$ *est relativement compact dans* $L^p(\Omega)$.

Corollaire 1.5.2 *Soit* $G \in L^1(\mathbb{R}^N)$*une fonction fixée et soit*

$$\mathfrak{F} = G * \mathfrak{B}.$$

où $\mathfrak{B}$ *désigne un borné de* $L^p(\mathbb{R}^N)$ *avec* $1 \leq p < \infty$. *Alors* $\mathfrak{F}_{|\omega}$ *est relativement compact dans* $L^p(\omega)$ *pour tout ouvert borné* ω *de* $\mathbb{R}^N$.

1.6 Autres résultats utiles

Théorème 1.6.1 (Egorov) *On suppose que* $|\Omega| < \infty$. *Soit* (f_n) *une suite de fonctions mesurables de* Ω *dans* $\mathbb{R}$ *telle que*

$$f_n(x) \to f(x) \ p.p \ sur \ \Omega \ avec \ |f(x) < \infty \ p.p.$$

Alors

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, A \subset \Omega \quad \textit{mesurable tel que } |\Omega \backslash A| < \epsilon$$

$$\textit{et } f_n \to f \quad \textit{uniformément sur } A.$$

• On a vu que les ensembles bornés de $L^p(\Omega)$ sont relativement compacts pour la topologie $\sigma(L^p, L^{p'})$ lorsque $1 < p \leq \infty$. Par contre $L^1(\Omega)$ n'est pas réflexif et on peut même montrer que $L^1(\Omega)$ n'est pas un espace dual. Il en résulte que les bornés de $L^1(\Omega)$ ne possèdent aucune propriétés de compacité relativement à une topologie faible.

Alors : Quels sont les ensembles de $L^1(\Omega)$ qui sont relativement compacts pour la topologie $\sigma(L^1, L^\infty)$?

La réponse est fournie par

Théorème 1.6.2 (Dunford-pettis) *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné (pour simplifier). Soit $\mathfrak{F} \subset L^1(\Omega)$ un sous-ensemble borné. Alors $\mathfrak{F}$ est relativement compact pour la topologie $\sigma(L^1, L^\infty)$ si et seulement si l'on a*

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \qquad \textit{tel que}$$
$$\int_A |f| < \epsilon \quad \forall f \in \mathfrak{F} \quad \textit{et} \quad \forall A \subset \Omega \textit{ avec } |A| < \delta.$$

CHAPITRE 2

OPÉRATEURS DANS LES ESPACES L^p

Pour des raisons techniques, on pose :

Définition 2.0.1

1. Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $0 < p \leq 1$,

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f \quad \textit{mesurable et } |f|^{1/p} \in L^1(\Omega)\}.$$

On note

$$\| f \|_{L^p} = \left[\int_\Omega |f(x)|^{1/p} dx\right]^p.$$

On sait que $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach.

2. On pose

$$L^0(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R};\ f \,\text{mesurable et}\ \exists\, C \,\text{telle que}\, |f(x)| \leq C \ p.p. \ \text{sur}\ \ \Omega\}.$$

On note

$$\parallel f \parallel_{L^0} = \{\inf C; |f(x)| \leq C \; textp.p.sur \; \Omega\}$$

.

On sait que $L^0(\Omega)$ est un espace de Banach.

Soit $\mathbf{A}$ un opérateur concret, Par exemple, Un opérateur intégral

$$Ax(t) = \int_{\Omega} K[t, s, x(s)]ds, \tag{2.1}$$

Agissant depuis un espace de fonctions, défini sur un ensemble Ω vers un espace de fonctions défini, en général, sur un autre ensemble Ω^*. L'ensemble $L(A; def.)$ de tous les points $\{p, q\}$ dans le quadrant $p, q \geq 0$ tels que l'opérateur $\mathbf{A}$ agit de L_p à L_q, Est appelé la L-caractéristique de l'opérateur $\mathbf{A}$. Il possède la propriété importante d'extrapolation : Si $\{p_0, q_0\} \in L(\mathbf{A}; def.)$ alors

$$\{p, q\} \in L(\mathbf{A}; def.) \text{ pour } p \leq p_0, \; q \geq q_0.$$

En effet, si $\mathbf{A}$ agit de L_{p_0} à L_{q_0}, alors il agira également de l'espace plus petit $L_p\,(p \leq p_0)$ à l'espace plus grand $L_q(q \geq q_0)$.

La propriété d'extrapolation implique que la fonction

$$\xi(p) = \xi(p; \mathbf{A}; def.) = \inf_{(p,q) \in L(A; def.)} q. \tag{2.2}$$

est définie soit sur un semi-intervalle $[0, p_0[$ soit sur un intervalle $[0, p_0]$ et est non décroissante. Il est clair que

$$\{\{p, q\}; q > \xi(p)\} \subset L(\mathbf{A}; def.) \subset \{\{p, \beta\}; q \geqq \xi(p)\}. \tag{2.3}$$

L'ensemble $L(\mathbf{A}; def.)$ possède quelques propriétés simples résultant immédiatement de la définition.

1) Pour les L-caractéristiques de deux opérateurs A et B, l'inclusion suivante est valide :

$$L(\mathbf{A}+\mathbf{B}; def.) \supset L(\mathbf{A}; def.) \cap L(\mathbf{B}; def.). \tag{2.4}$$

Et donc l'inégalité :

$$\xi(p; \mathbf{A}+\mathbf{B}; def.) \leqq max\{\xi(p; \mathbf{A}def.),\ \xi(\alpha; \mathbf{B}; def.)\}. \tag{2.5}$$

si $\xi(p; \mathbf{A}) \neq \xi(p, \mathbf{B})$ pour tout p, Alors

$$L(\mathbf{A}+\mathbf{B}; def.) = L(\mathbf{A}; def.) \cap L(\mathbf{B}; def.) \tag{2.6}$$

2) L'inégalité suivante est valide :

$$\xi(p; \mathbf{C}; def.) \leqq \xi(p; \mathbf{A}; def.) + \xi(p; \mathbf{B}; def.). \tag{2.7}$$

Où C désigne l'opérateur, Défini par la relation $\mathbf{C}x = \mathbf{A}x.\mathbf{B}x$.

3) Soient $\mathbf{A}$ et$\mathbf{B}$ deux opérateurs. La L-caractéristique $L(\mathbf{AB}; def.)$ contient l'ensemble de points $\{p, q\}$, pour lesquels il existe un nombre γ tel que

$$\{p, \gamma\} \in L(\mathbf{B}; def.), \quad \{\gamma, q\} \in L(\mathbf{A}; def.). \tag{2.8}$$

Ainsi (si $\xi(p; \mathbf{A}; def.)$ est continue á droite)

$$\xi(p; \mathbf{AB}; def.) \leqq \xi[\xi(p; \mathbf{B}; def.); \mathbf{A}, def]. \tag{2.9}$$

Il est naturel d'examiner les sous-ensembles de la L-caractéristique $L(\mathbf{A}; def.)$, consistant en des points $\{p, q\}$ tels que l'opérateur $\mathbf{A}$ agisse de L_p à L_q et possède une propriété supplémentaire $\mathfrak{R}$: continuité, compacité, etc. Ces sous-ensembles seront désignés par $L(\mathbf{A}; \mathfrak{R})$ fig(1.2) et seront également appelés

L caractéristiques de l'opérateur $\mathbf{A}$. Pour la plupart des propriétés étudiées par la suite, les ensembles $L(\mathbf{A};\mathfrak{R})$ possédéront la propriété d'extrapolation. Comme pour la L-caractéristique $L(\mathbf{A}; def.)$, les ensembles $L(\mathbf{A};\mathfrak{R})$ dans de tels cas sont définis essentiellement par des fonctions monotones.

$$\xi(p;\mathbf{A};\mathfrak{R}) = \inf_{\{p,q\}\in L(\mathbf{A},\mathfrak{R})} q.$$

Il est clair que $\xi(p;\mathbf{A};\mathfrak{R}) \geqq \xi(p;\mathbf{A}; def)$. Nous étudierons souvent les L-caractéristiques $L(\mathbf{A}; cont)$ et $L(\mathbf{A}; comp)$ correspondant aux propriétés de continuité et de compacité de l'opérateur $\mathbf{A}$.

Considérons, à titre d'exemple simple, un opérateur $\mathbf{A}$ défini par la relation

$$\mathbf{A}x(s) = a(s)x(s)$$

Où $a(s)$est une fonction mesurable. Supposons que $a(s) \in L_\gamma$. Alors ínégalité de Holder implique que $\mathbf{A}x(s)$ et une fonction dans $L_{\gamma+p}$ si $x(s) \in L_p$, et

$$\| \mathbf{A}x(s) \|_{\gamma+p} \leq \| a(s) \|_\gamma . \| x(s) \|_p .$$

En d'autres termes, la L-caractéristique $L(\mathbf{A}; cont.)$ contient l'ensemble des points $\{p,q\}$, pour lesquels,$q \geq \gamma + p$.

La L caractéristique $L(\mathbf{A}; cont.)$ de cet opérateur peut être complètement déterminée. Soit γ_0 tel que $a(s) \in L_\gamma$ pour $\gamma > \gamma_0$, mais $a(s) \notin L_\gamma$ pour $\gamma < \gamma_0$. Il n'est pas difficile de voir que dans le cas où $a(s) \in L_{\gamma_0}$, l'ensemble $L(\mathbf{A}) = L(\mathbf{A}; cont)$ coïncide avec l'ensemble des points $\{p,q\}$, pour lesquels $q \geq \gamma_0 + p$, tandis que dans le cas où $a(s) \notin L_{\gamma_0}$, $L(\mathbf{A})$ coïncide avec l'ensemble des points $\{p,q\}$, pour lesquels $q > \gamma_0 + p$.

La notion de L-caractéristiques a été systématiquement appliquée par de nombreux auteurs pour fournir une description géométrique des théorèmes d'interpolation pour les opérateurs linéaires. Un certain nombre d'affirmations sur les propriétés générales des L-caractéristiques sont mentionnées dans l'article de P. P. Zabreiko et M. A. Krasnoselskii [1].

2.1 Opérateurs linéaires continu

Dans ce point, nous rappelons certaines définitions fondamentales concernant les opérateurs linéaires, agissant d'un espace E_1 à un autre espace E_2. Un opérateur $\mathbf{A}$ est linéaire s'il est additif et homogène :

$$\mathbf{A}(\alpha_1 x_1 + \alpha_1 x_2) = \alpha_1 \mathbf{A} x_1 + \alpha_2 \mathbf{A} x_2. \tag{2.10}$$

Un opérateur linéaire $\mathbf{A}$ est continu s'il transforme les suites convergentes en norme en suites convergentes en norme. Si E_1 et E_2 sont des espaces de Banach, un opérateur linéaire continu transforme également chaque suite convergente faiblement en une suite convergente faiblement. Nous attribuons à un opérateur linéaire continu $\mathbf{A}$ sa norme $\| A \|$:

$$\| A \| = \sup_{\|x\|_{E_1} \leq 1} \| \mathbf{A} x \|_{E_2} . \tag{2.11}$$

Les problèmes généraux dans la théorie des opérateurs linéaires dans les espaces de fonctions sont discutés dans de nombreux livres sur l'analyse fonctionnelle (voir S. Banach [1], L. A. Ljusternik et V. I. Sobolev [1], L. V. Kantorovic et G. P. Akilov [1], A. Zaanen [3], E. Hille et R. Phillips [1], V. I. Smirnov [1]). Veuillez consulter la présentation de ces problèmes et la bibliographie dans N. Dunford et J. T. Schwartz [1].

L'équation (2.11) a du sens dans le cas de n'importe quels espaces de Banach E_1 et E_2. Nous l'appliquerons également au cas où E_1 et E_2 sont des espaces L^p et L^q, où les nombres p et q peuvent être inférieurs à 1. La norme d'un opérateur linéaire $\mathbf{A}$, agissant de L^p à L^q, sera notée $\| \mathbf{A} \|_{p\to q}$.

Dans ce paragraphe, nous intéressons aux problèmes liés à la continuité des opérateurs linéaires agissant de L^p à L^q. Prouver la continuité de tels opérateurs équivaut à donner une preuve de l'inégalité

$$\| \mathbf{A}x \|_q \leqq M \| x \|_p \qquad (x \in L^p). \tag{2.12}$$

Il est clair que l'infimum de ceux pour lesquels (2.12) est satisfait est égal à $\| \mathbf{A} \|_{p\to q}$. Il s'avère qu'il n'existe aucun opérateur linéaire continu non identiquement nul agissant de L^p à L^q si $p > 1$ et $q < p$. Pour la preuve, il suffit de montrer que tout opérateur linéaire continu $\mathbf{A}$ agissant de L^p à L^q s'annule sur toutes les fonctions caractéristiques de k_D. Partageons l'ensemble D en n parties $D_1, ..., D_n$ de mesure égale. Il est clair que

$$\| k_{D_1} \|_{L^p} = n^{-p}(mes \;\; D)^p \qquad (i = 1, 2, ..., n).$$

Par conséquent

$$\| \mathbf{A}k_{D_1} \|_{L^q} \leq \| A \|_{p\to q} \, n^{-p}(mes\, D)^p \qquad (i = 1, 2, ..., n).$$

D'abord, laissons $q \leq 1$. Alors

$$\| \mathbf{A}k_D \|_{L^q} = \| \sum_{i=1}^{n} \mathbf{A}k_{D_1} \|_{L^q} \leq \sum_{i=1}^{n} \| \mathbf{A}k_{D_1} \|_{L^q} \leq \| \mathbf{A} \|_{p\to q} \, (mes\, D)^p \, n^{1-p}.$$

Si $q > 1$, alors

$$\| \mathbf{A}k_D \|_{L^q} = \| \sum_{i=1}^{n} \mathbf{A}k_{D_1} \|_{L^q} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \| \mathbf{A}k_{D_1} \|_{L^q}^{1/q} \right)^q \leq \| \mathbf{A} \|_{p\to q} \, (mes\, D)^p \, n^{q-p}.$$

Comme n est abitraire les dernières inégalités impliquent que $\mathbf{A}k_D = 0$.

Par la suite, nous étudions généralement seulement les parties de L-caractéristiques, qui se trouvent dans la bande $0 \leq p \leq 1$, $0 \leq q < \infty$. De plus, dans de nombreux cas importants, seules les parties des L-caractéristiques situées dans le carré unité sont d'intérêt.

Dans l'étude d'un opérateur linéaire $\mathbf{A}$ agissant d'un espace de Banach E_1 à un autre espace de Banach E_2, l'opérateur adjoint $\mathbf{A}^*$, qui agit de E_2^* à E_1^*, joue un rôle important. Cet opérateur est défini par la relation

$$[\mathbf{A}^* f](x) = f(\mathbf{A}x) \quad (x \in E_1, f \in E_2^*). \tag{2.13}$$

Dans le cas d'un opérateur linéaire $\mathbf{A}$ agissant de L^p à L^q, $0 < p, q \leq 1$, l'opérateur $\mathbf{A}^*$ agit de $L^{1/(1-p)}$ à $L^{1/(1-q)}$ et la relation (2.13) prend la forme

$$(\mathbf{A}x, y) = (x, \mathbf{A}^* y) \quad (x \in L^p, y \in L_{1-q}). \tag{2.14}$$

Si $0 < p \leq 1$, $q = 0$, alors l'opérateur adjoint $\mathbf{A}^*$ agira de $(L^0)^*$ à L^{1-p}. Puisque L^1 est un sous-espace de $(L^0)^*$, $\mathbf{A}^*$ peut être considéré comme un opérateur de L_1 à L_{1-p}, cet opérateur sera également noté $\mathbf{A}^*$.

Enfin, nous rappelons que

$$\| \mathbf{A} \|_{E_1 \to E_2} = \| \mathbf{A}^* \|_{E_2^* \to E_1^*} . \tag{2.15}$$

Cette relation est valable même dans le cas où $\mathbf{A}^*$ est un opérateur de L_1 à L_{1-p}.

2.2 Opérateur linéaire compact

Un opérateur est appelé compact s'il transforme les ensembles bornés en ensembles compacts. La compacité implique la continuité dans le cas des opérateurs linéaires. Les opérateurs linéaires compacts sont souvent appelés complètement continus.

Un opérateur $\mathbf{A}$ agissant de L^p à L^q sera appelé compact en mesure si l'ensemble des éléments

$\{\mathbf{A}x; \| x \|_\alpha \leqq 1\}$ est compact en mesure. Il s'avère que les opérateurs les plus importants agissant dans les espaces des opérateurs intégraux L^p—- possèdent généralement la propriété de compacité en mesure.

Théorème 2.2.1 *Soit* $\mathbf{A}$ *un opérateur linéaire continu agissant de* L^p *à* $L^q\,(0 \leq p < \infty, 0 < \beta < \infty)$*. Il est nécessaire et suffisant pour la compacité de l'opérateur* $\mathbf{A}$ *que* $\mathbf{A}$ *soit compact en mesure et satisfasse la relation suivante :*

$$\lim_{mesD^*\to 0} \| \mathbf{P}_{\mathbf{D}^*}\mathbf{A} \|_{p\to q} = 0. \tag{2.16}$$

oú pour $D^* \subset \Omega^*$*,* $\mathbf{P}_{\mathbf{D}^*}$ *désigne un opérateur linéaire défini par la relation*

$$\mathbf{P}_{\mathbf{D}^*}y(s) = \begin{cases} y(s) & si \quad s \in D^* \\ 0 & si \quad s \notin D^*. \end{cases}$$

Preuve 2.2.2 (2.16) *Implique que la portée de l'opérateur* $\mathbf{A}$ *sur chaque boule a des normes équivalents-absolument continues. Ainsi, la suffisance des conditions du théorème découle du Lemme (1.1). Si* $\mathbf{A}$ *est compact en tant qu'opérateur de* L^α *à* L^β*. Il reste a montrer que* (2.16) *est rempli. Supposons le contraire. Alors, il existe des éléments* $x_1, x_2, ... \| x_n \|_n \leqq 1$ *et et une séquence d'ensembles* D_α*, avec une mesure convergente vers zéro lorsque* $n \to \infty$ *tel que*

$$\| \mathbf{P}_{D_n^*}\mathbf{A}x_n \|_\beta \geqq \epsilon_0 > 0 \qquad (n = 1, 2, ...)$$

Mais cette inégalité contredit l'absolue équicontinuité des normes des éléments $\mathbf{A}x_n$. *Le théorème a été prouvé.*

2.3 Compacité et opérateurs adjoints

Dans cette section, nous considérons des opérateurs agissant de L^α à L^β, où $0 \leqq \alpha, \beta \leqq 1$.

Dans certaines applications, il est parfois plus pratique d'étudier l'opérateur adjoint $\mathbf{A}^*$ plutôt que l'opérateur $\mathbf{A}$.

Rappelons qu'un opérateur $\mathbf{A}$ est compact si et seulement si l'opérateur $\mathbf{A}^*$ est compact. Cette assertion reste valable même lorsque $\mathbf{A}$ agit de L^α à L_0, est $\mathbf{A}^*$ est considéré comme un opérateur de L_1 à $L_{1-\alpha}$. Cette assertion ci-dessus reste également vraie pour les opérateurs $\mathbf{A}$ qui agissent de L_0 à un espace $L^\beta(0 \leqq \beta \leqq 1)$ et possèdent des opérateurs adjoints qui transforment les fonctions en $L_{1-\beta}$ à L_1. Notez que la plupart des opérateurs importants dans les applications appartiennent à cette dernière classe (par exemple, les opérateurs intégraux réguliers).

Dans nos constructions ultérieures, des produits d'opérateurs linéaires $\mathbf{A}$ avec des opérateurs de projection de la forme $\mathbf{P}_D$ et $\mathbf{P}_{D^*}(D \subset \Omega, D^* \subset \Omega^*)$ apparaîtront. Nous utiliserons souvent les relations triviales.

$$(\mathbf{P}_{D^*}\mathbf{A})^* = \mathbf{A}^*\mathbf{P}_{D^*}, \quad (\mathbf{A}\mathbf{P}_\mathbf{D})^* = \mathbf{P}_D\mathbf{A}^*$$

Les théorèmes 2.2.1 implique les assertions suivantes.

Théorème 2.3.1 *Soit* $\mathbf{A}$ *un opérateur linéaire continu agissant de* L^α *à* $L^\beta(0 < \alpha < 1, 0 \leqq \beta \leqq 1)$. *Il est nécessaire et suffisant pour la compacité de* *l'opérateur* $\mathbf{A}$ *que l'opérateur* $\mathbf{A}^*$ *soit compact en mesure et que* $\mathbf{A}$ *satisfasse la relation suivant :*

$$\lim_{mesD \to 0} \| \mathbf{AP}_D \|_{\alpha \to \beta} = 0 \tag{2.17}$$

Théorème 2.3.2 *Soit* $\mathbf{A}$ *un opérateur linéaire régulier agissant de* L^α *à* $L^\beta (0 < \alpha < 1, 0 \leqq \beta \leqq 1)$. *Il est nécessaire et suffisant pour la compacité de l'opérateur* $\mathbf{A}$ *que l'opérateur* $\mathbf{A}^*$ *soit compact en mesure et que* A *satisfasse la relation suivante :*

$$\lim_{mesD + mesD^* \to 0} \| \mathbf{P}_{D^*} \mathbf{AP}_D \|_{\alpha \to \beta} = 0. \tag{2.18}$$

Dans les conditions de ce théorème, α peut être égal à zéro si l'opérateur $\mathbf{A}^*$ agit de $L_{1-\beta}$ à L_1.

Théorème 2.3.3 *Soit* $\mathbf{A}$ *un opérateur linéaire continu agissant de* L^α *à* $L^\beta (0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1)$. *Il est nécessaire et suffisant pour la compacité de l'opérateur* $\mathbf{A}$ *que les opérateurs* $\mathbf{A}$ *et* $\mathbf{A}^*$ *soient compacts en mesure et que la relation suivante soit vérifiée :*

$$\lim_{mesD + mesD^* \to 0} \| \mathbf{P}_{D^*} \mathbf{AP}_D \|_{\alpha \to \beta} = 0. \tag{2.19}$$

Pour prouver la suffisance, nous établissons que l'opérateur $\mathbf{A}$ transforme les suites convergentes faiblement en suites convergentes fortement. Il s'ensuivra alors que $\mathbf{A}$ transforme la boule unité $\| x \|_\alpha \leqq 1$ en un ensemble compact (pour chaque suite $\mathbf{A}x_n$ $\| x_n \|_\alpha \leqq 1$, il est possible de prendre une sous-suite convergente faiblement x_{ni}, car les espaces L^α pour $0 < \alpha < 1$ ont des sphères faiblement compactes).

Supposons que $\mathbf{A}$ transforme une certaine suite convergente faiblement en une suite qui n'est pas convergente en norme.

Alors il existe une suite $x_n \in L^\alpha, \| x_n \|_\alpha \leqq 1$, qui converge faiblement vers zéro, pour laquelle

$$\| \mathbf{A}x_n \|_\beta \geqq c_0 > 0 \quad (n = 1, 2, ...).$$

La suite $\mathbf{A}x_n$ converge également faiblement vers zéro (dans L^β). La compacité (en mesure) de l'opérateur $\mathbf{A}$ implique donc que la suite $\mathbf{A}x_n$ converge vers zéro en mesure. On peut même supposer sans perte de généralité que $\mathbf{A}x_n$ converge vers zéro presque partout.

Par le théorème d'Egorov, il est possible pour chaque $\epsilon > 0$ d'obtenir un ensemble $D^*_\epsilon \subset \Omega^*$ tel que $mes(D^*_\epsilon) < \epsilon$ et tel que sur $\Omega^* - D^*_\epsilon$ la suite $\mathbf{A}x_n$ converge uniformément vers zéro. Cela implique que

$$\lim_{n\to\infty} \| \mathbf{P}_{\Omega^* - D^*_\epsilon} \mathbf{A}x_n \|_\beta = 0. \tag{2.21}$$

Supposons que D^*_ϵ est un ensemble fixe. L'inégalité 2.20 implique l'existence de fonctions $y_n \in L_{1-\beta}, \| y \|_{1-\beta} \leqq 1$ tel que

$$(\mathbf{A}x_n, y_n) \geqq c_0 > 0 \quad (n = 1, 2, ...).$$

Il est possible de supposer sans perte de généralité que la suite y_n converge faiblement vers une certaine fonction $y_0, \| y_0 \|_{1-\beta} \leqq 1$. Il est clair que

$$(\mathbf{A}x_n, y_n - y_0) = (\mathbf{A}x_n, y_n) - (x_n, \mathbf{A}^* y_0).$$

Le deuxième membre du côté droit converge vers zéro lorsque $n \to \infty$. Par conséquent, on peut supposer que pour tout n, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$(\mathbf{A}x_n, y_n - y_0) > \frac{1}{2}c_0 \quad (n = 1, 2, ...).$$

La suite $\mathbf{A}^*\mathbf{P}_{D_\epsilon^*}(y_n - y_0)$ converge faiblement vers zéro. La compacité (en mesure) de l'opérateur $\mathbf{A}^*$ implique que la suite $\mathbf{A}^*\mathbf{P}_{D_\epsilon^*}(y_n - y_0)$ converge également vers zéro en mesure. On peut supposer sans perte de généralité que la suite $\mathbf{A}^*\mathbf{P}_{D_\epsilon^*}(y_n - y_0)$ converge presque partout vers zéro. Par conséquent, pour chaque $\epsilon_1 > 0$ il est possible de choisir un ensemble $D_{\epsilon_1} \subset \Omega$ tel que $mes(D_\epsilon) < \epsilon_1$ et sur $\Omega - D_{\epsilon_1}$, la suite $\mathbf{A}^*\mathbf{P}_{D_\epsilon^*}(y_n - y_0)$ converge uniformément vers zéro. En conséquence

$$\lim_{n\to\infty} \| \mathbf{P}_{\Omega - D_{\epsilon_1}}\mathbf{A}^*\mathbf{P}_{D_\epsilon^*}(y_n - y_0) \|_{1-\alpha} = 0. \tag{2.22}$$

Considérons l'identité

$$(\mathbf{A}x_n, y_n - y_0) = (\mathbf{P}_{\Omega^* - D_\epsilon^*}\mathbf{A}x_n, y_n - y_0)$$

$$+ (\mathbf{P}_{D_\epsilon^*}\mathbf{A}\mathbf{P}_{D_{\epsilon_1}}x_n, y_n - y_0) + (x_n, \mathbf{P}_{\Omega - D_{\epsilon_1}}\mathbf{A}^*\mathbf{P}_{D_\epsilon^*}(y_n - y_0))$$

Les premier et troisième termes de la somme convergent vers zéro selon 2.21 et 2.22. Ainsi, pour suffisamment grand n, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$(\mathbf{P}_{D_\epsilon^*}\mathbf{A}\mathbf{P}_{D_{\epsilon_1}x_n, y_n - y_0}) \geqq c_0/4$$

Par conséquent

$$\| \mathbf{P}_{D_\epsilon^*}\mathbf{A}\mathbf{P}_{D_{\epsilon_1}}x_n \|_\beta \| y_n - y_0 \|_{1-\beta} \geqq c_0/4$$

Et puisque $\| x_n \|_\alpha \leqq 1$ et $\| y_n - y_0 \|_{1-\beta} \leqq 2$

$$\| \mathbf{P}_{D_\epsilon^*}\mathbf{A}\mathbf{P}_{D_{\epsilon_1}} \|_{\alpha\to\beta} \geqq c_0/8$$

Cette inégalité contredit (3.4). Ainsi, la suffisance des conditions du théorème a été prouvée. La nécessité découle, par exemple, du Théorème **??** Le théorème a été prouvé.

Dans le prochain chapitre, il sera démontré que sous des hypothèses naturelles, les opérateurs intégraux linéaires sont compacts en mesure. Par conséquent, une étude indépendante des opérateurs qui sont compacts en mesure est d'intérêt.

Théorème 2.3.4 *Un opérateur linéaire continu* $\mathbf{A}$ *agissant de* L^{α} *à* $L^{\beta}(0 \leqq \alpha < 1, 0 < \beta \leqq 1)$ *est compact en mesure si et seulement s'il transforme chaque suite convergente faiblement* $x_n \in L^{\alpha}$ *en une suite* $\mathbf{A}x_n$ *qui converge en mesure.*

Preuve 2.3.5 *La suffisance découle de la compacité faible de la boule unité de l'espace* $L^{\alpha}(0 \leqq \alpha < 1)$.

Maintenant, soit l'opérateur $\mathbf{A}$ *compact en mesure et considérons une suite* x_n *convergente faiblement vers* x_0. *Alors, la continuité de l'opérateur* $\mathbf{A}$ *implique que la suite* $\mathbf{A}x_n$ *converge faiblement vers* $\mathbf{A}x_0$. *D'autre part, la suite des éléments* $\mathbf{A}x_n$ *est compacte en mesure. Par conséquent,* $\mathbf{A}x_n$ *converge vers* $\mathbf{A}x_0$ *en mesure.*

Le théorème est ainsi démontré.

Dans de nombreux cas, la compacité d'un opérateur en mesure implique sa compacité.C'est le cas, par exemple, oú $\mathbf{A}$ un opérateur régulier (i.e., $A = A_1 - A_2$ oú A_1 et A_2 sont des opérateurs positifs), compact en mesure, agissant de L_0 à L^{β}, où $\beta > 0$.

On termine cette section avec ce résultat intéressent :

Théorème 2.3.6 *Soit* **A** *un opérateur continu, compact en mesure, agissant de* L^{α} *à* L^{β}*. Alors* **A** *est compact en tant qu'opérateur agissant de* L^{α} *à* L_{β_1}*, chaque fois que* $\beta_1 > \beta$*.*

CHAPITRE 3

LES OPÉRATEURS DE TYPE POTENTIEL

3.1 Définitions

Dans la suite, $|t-s|$ désigne la distance entre les points t et s dans l'espace euclidien n-dimensionnel $\mathbb{R}^n$. Dans ce paragraphe, nous étudions les opérateurs intégraux.

$$A_\lambda x(t) = \int\limits_\Omega K_\lambda(t,s)x(s)ds. \tag{3.1}$$

avec les noyaux spéciaux

$$K_\lambda(t,s) = |t-s|^{-\lambda}. \tag{3.2}$$

Ici, $\mathbf{\Omega}$ un ensemble borné de l'espace $\mathbb{R}^n$ avec une mesure de Lebesgue non nulle. Les opérateurs de la forme (3.1) sont appelés potentiels [1] ; parfois, le nombre λ est appelé l'exposant du potentiel (ou exposant de l'opérateur A_λ).

Notre principal intérêt est de déterminer les caractéristiques L($\mathbf{A}_\lambda$; cont.) et $L(\mathbf{A}_\lambda,$; comp.) des potentiels $\mathbf{A}_\lambda$.

L'opérateur

$$A_{(\ln)}x(t) = \int_{\Omega} K_{(ln)}(t,s)x(s)ds. \tag{3.3}$$

Avec noyau

$$K_{(\ln)}(t,s) = |\ln|t-s||. \tag{3.4}$$

Est appelé le potentiel logarithmique. Des généralisations immédiates des opérateurs (3.1) sont les opérateurs de type potentiel.

$$Ax(t) = \int\limits_{\Omega} \frac{Q(t,s)}{|t-s|^{\lambda}} x(s)ds. \tag{3.5}$$

Ici, $Q(t,s)$ est, en règle générale, une fonction bornée. Notez que les problèmes aux limites pour les équations de type elliptique sont réduits à des équations intégrales avec ces opérateurs.

3.2 Des théorèmes trés simples sur continuité et la compacité des potentiels

Considérez la fonction

$$\psi_r(t) = \| K_{\lambda}(t,s) \|_r = \{\int\limits_{\Omega} |t-s|^{-\lambda/r} ds\}^r. \tag{3.6}$$

Cette fonction est considérée comme étant définie pour tous les points $t \in \mathbb{R}^n$

Remarque 3.2.1 *Si $n = 3, \lambda = 1$, alors le côté droit de (3.6) représente le potentiel, au point t, de la charge distribuée sur le domaine $\mathbf{\Omega}$ avec une densité $x(s)$.*

Lemme 3.2.1 *: Si*

$$n/\lambda < r < \infty, \tag{3.7}$$

Alors la fonction (3.6) est bornée sur $\mathbb{R}_n$

Preuve 3.2.1 *: L'inégalité suivante est évidente :*

$$\int_{\Omega} |t-s|^{-\lambda/r} ds \leqq \int_{T(t,R)} |t-s|^{-\lambda/r} ds,$$

où $T(t,R)$ est la sphère centrée en t et de rayon R, égal au diamètre de l'ensemble Ω. L'intégrale J du côté droit de l'inégalité ci-dessus ne dépend pas de t et est facilement calculée en passant aux coordonnées polaires :

$$J = \int_{T(t,R)} |t-s|^{-\lambda/r} ds = v_n \int_0^R \rho^{n-\lambda/r-1} d\rho = \frac{v_n}{n\,r-\lambda} R^{n-\lambda/r},$$

où v_n est l'aire de la surface unité dans $\mathbb{R}^n$ $[v_n = 2\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}]$. Ainsi

$$\int_{\Omega} |K_\lambda(t,s)|^{1/r} ds \leq \frac{v_n}{n\,r-\lambda} R^{n-\lambda/r}. \tag{3.8}$$

Le lemme est prouvé.

On utilisant la symétrie du noyau $K_\lambda(t,s)$, on peut avoir plus de résltats :

Théorème 3.2.2 *Soit $0 < \lambda < n$. Alors le potentiel est compact en tant qu'opérateur agissant de $L^\alpha = L^\alpha(\Omega)$ à $L^0 = L^0(\Omega)$ lorsque :*

$$0 \leq \alpha < 1 - \lambda/n, \tag{3.9}$$

et en tant qu'opérateur de $L^\alpha(\Omega)$ à $L^\beta(\Omega)$ lorsque

$$1 - \lambda/n < \alpha \leq 1, \quad \beta > \alpha - 1 + \lambda/n.$$

Le preuve nécessite seulement que nous vérifiions que A_λ est compact en tant qu'opérateur de L^α à L^0 lorsque α satisfait l'inégalité (3.9) et on tant qu'opérateur de L_1 à L_β lorsque $\beta > \lambda/n$.

La compacité de A_λ en tant qu'opérateur de L^α $(0 \leq \alpha < 1 - \lambda/n)$ à L^0 découle immédiatement du fait que le rang de la fonction-vectorielle

$$w(t) = |t - s|^{-\lambda} \ (t \in \Omega),$$

dans l'espace $L^{1-\alpha}$ forme un ensemble compact (la compacité du rang de $w(t)$ pour $t \in \Omega$ en mesure est évidente ; la continuité absolue de $w(t)$dans $L^{1-\alpha}$ vient du fait que $w(t) \in L^\sigma$, où σ est un certain nombre dans l'intervalle $(\lambda/n, 1 - \alpha$.

La compacité de A_λ en tant qu'opérateur de L_1 à $L_\beta, \beta > \lambda/n$, découle de la symétrie du noyau $K_\lambda(t, s)$.

L'affirmation du Théorème 3.2.2 signifie que les caractéristiques $L(\mathbf{A}_\lambda; cont.)$ et $L(\mathbf{A}_\lambda\,;\,\text{comp.})$ du potentiel $\mathbf{A}_\lambda$ contiennent tous les points $\{\alpha,\, \beta\}$, pour lesquels les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$0 \leq \alpha \leq 1, \quad \beta \geq 0, \quad \beta > \alpha - 1 + \lambda/n. \tag{3.10}$$

Remarque 3.2.2 *Il s'avère que la L-caractéristique $L(\mathbf{A}_\lambda\,;$ comp.) du potentiel $\mathbf{A}_\lambda$ ne contient aucun autre point. La caractéristique $L(\mathbf{A}_\lambda\,;$ cont.) contient d'autres points , on montre que tous les points intérieurs du segment joignant les points $\{1 - \lambda/n,\, 0\}$ et $\{1,\, \lambda/n\}$ appartiennent également à cette L-caractéristique.*

3.3 Théorème d'interpolation de Stein-Weiss

On donne un théorème d'interpolation, due à Stein et Weiss.

On note par $\lambda(x;h)$ la mesure de l'ensemble des points $t \in \Omega$ tels que $|x(t)| \geqq h$, et par $M_\alpha (0 < \alpha \leq 1)$ l'espace linéaire des fonctions $x(t)$ avec une quasi-norme finie :

$$\| x \|^*_{M_\alpha} = \sup_{0<h<\infty} h \, \lambda(x;h)^\alpha, \tag{3.11}$$

alors que M_0 désigne l'espace L^∞ et

$$\| x \|^*_{M_0} = \| x \|_{L^\infty} . \tag{3.12}$$

Soit $0 < \alpha < 1$. Posons

$$\| x \|_{M_\alpha} = \sup_{D \in \Omega} \left\{ \frac{1}{(mesD)^{1-\alpha}} \int_D |x(t)| dt \right\} \tag{3.13}$$

Et montrons que la classe de fonctions pour lesquelles $\| x \|_{M_\alpha} < \infty$ coïncide avec M_α.

Soit $\| x \|_{M_\alpha} < \infty$, c'est -à-dire pour chaque D

$$\int_D |x(t)| dt \leqq \| x \|_{M_\alpha} ; (mesD)^{1-\alpha}.$$

Alors, en particulier

$$\int_{\{t:|x(t)| \geqq h\}} |x(t)| dt \leq \| x \|_{M_\alpha} . \lambda(x;h)^{1-\alpha}.$$

Mais d'autre part

$$\int_{\{t:|x(t)| \geq h\}} |x(t) dt \geq h \cdot \lambda(x;h).$$

Par conséquent

$$h \cdot \lambda(x;h)^\alpha \leqq \| x \|_{M_p} \quad (0 < h < \infty), \tag{3.14}$$

d'oú, $x \in M_\alpha$.

Maintenant, soit $x \in M_\alpha$,c'est-à-dire $\| x \|^*_{M_\alpha} < \infty$. Alors pour tout ensemble $\mathbb{D} \subset \Omega$

$$\int_D |x(t)|dt \leq \int_0^{mesD} \tilde{x}(\tau)d\tau$$

Où $\tilde{x}(\tau)(0 \leq \tau \leq mesD)$ est la fonction monotone décroissante telle que

$$\lambda(x;h) = \lambda(\tilde{x};h).$$

De l'équation (3.11),on a

$$|\tilde{x}(\tau)| \leqq \frac{\| x \|^*_{M_\alpha}}{\tau^\alpha}$$

Et par conséquent

$$\int\limits_D |x(t)|dt \leqq \| x \|^*_{M_\alpha} \int\limits_0^{mes\ \ D} \tau^{-\alpha} d\tau = \frac{\| x \|^*_{M_\alpha}}{1-\alpha}(mes\ \ D)^{1-\alpha}, \qquad (3.15)$$

d'où, il suit que $\| x \|_{M_\alpha} < \infty$.

De (3.14) et (3.15) découlent les inégalités importantes :

$$(1-\alpha) \| x \|_{M_\alpha} \leq \| x \|^*_{M_\alpha} \leq \| x \|_{M_\alpha} . \qquad (3.16)$$

Il est facile de voir que $M_\alpha(0 < \alpha < 1)$ devient un espace de Banach si la norme est définie par la relation (3.13). L'espace M_α sera appelé un espace de Marcinkiewicz.

Définition 3.3.1 *Un opérateur linéaire A est dit satisfaire la condition $\Lambda M(\alpha, \beta)$, s'il est défini sur toutes les fonctions caractéristiques k_D des ensembles mesurables $D \subset \Omega$ et si*

$$\| Ak_D \|^*_{M_\alpha} \leq C(mes\ \ D)^\beta,$$

où C est une constante ne dépendant pas de D. La condition $AM(\alpha, \beta)$ est bien sûr remplie si A agit de L_α à L_β et est continue.

Théorème 3.3.1 (Théorème d'interpolation de Stein-Weiss) *Soit un opérateur linéaire A satisfaisant les conditions $\Lambda M(\alpha_0, \beta_0)$ et $\Lambda M(\alpha_1, \beta_1)$:*

$$\begin{aligned} \| Ak_D \|^*_{M_{\beta_0}} &\leqq C_0 (mesD)^{\alpha_0} \quad (D \subset \Omega) \\ \| Ak_D \|^*_{M_{\beta_1}} &\leqq C_1 (mesD)^{\alpha_1} \quad (D \subset \Omega) \end{aligned} \tag{3.17}$$

Où

$$0 \leq \beta_0 \leq \alpha_0 \leqq 1, \quad 0 \leqq \beta_1 \leqq \alpha_1 \leqq 1. \tag{3.18}$$

Et

$$\beta_0 \neq \beta_1, \quad \alpha_0 \neq \alpha_1. \tag{3.19}$$

Alors pour chaque $\tau \in (0, 1)$,l'opérateur **A** agit de l'espace $L_{\alpha(\tau)}$ à l'espace $L_{\beta(\tau)}$ où

$$\alpha(\tau) = (1 - \tau)\alpha_0 + \tau\alpha_1, \quad \beta(\tau) = (1 - \tau)\beta_0 + \tau\beta_1 \tag{3.20}$$

et est continue. Ici

$$\| A \|_{L_{\alpha(\tau)} \to L_{\beta(\tau)}} \leq K(\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1)\, C_0^{1-\tau} C_1^{\tau}. \tag{3.21}$$

Preuve 3.3.2 *: L'inégalité (1.4) implique que pour chaque $\tau \in (0, 1)$, nous avons :*

$$\| Ak_D \|_{L_{\beta(\tau)}} \leqq \frac{1}{|\beta_0 - \beta_1|.\tau(1 - \tau)} \| Ak_D \|^{*1-\tau}_{M_{\beta_0}} \| Ak_D \|^{*\tau}_{M_{\beta_1}} .$$

D'où par (3.17)

$$\| Ak_D \|_{L_{\beta(\tau)}} \leqq \frac{1}{|\beta_0 - \beta_1|.\tau(1 - \tau)} C_0^{1-\tau} C_1^{\tau} (mes \;\; D)^{\alpha(\tau)} \tag{3.22}$$

Soit $y(t)$ une fonction en escalier. En raison de l'inégalité (3.22) et du fait que $\alpha(\tau) \neq 0$, la fonction d'ensemble additive

$$\psi(D) = \int_{\Omega} Ak_D(t)y(t)dt. \tag{3.23}$$

Est absolument continue ; donc, par le théorème de Radon-Nikodym (voir, par exemple, N. Dunford et J. T. Schwartz [1]), elle peut être écrite sous la forme

$$\psi(D) = \int_{D} y^*(t)dt \qquad (D \subset \Omega). \tag{3.24}$$

Définissons l'opérateur B sur les fonctions en escalier par la relation

$$By(s) = y^*(s). \tag{3.25}$$

Il est évident que l'opérateur B est linéaire sur l'ensemble des fonctions en escalier. Montrons que pour chaque fonction en escalier $y(t)$, l'inégalité suivante est vraie :

$$\| By \|_{M_{1-\alpha(\tau)}} \leqq \frac{2C_0^{1-\tau}C_1^{\tau}}{|\beta_0 - \beta_1|\tau(1-\tau)} \| y \|_{L_{1-\beta(\tau)}} . \tag{3.26}$$

Soit $D \subset \Omega$, alors

$$\int_D |By(s)|ds = \int_{D^+} By(s)ds - \int_{D^-} By(s)ds, \tag{3.27}$$

Où D^+ est l'ensemble des points $s \in D$ où $By(s)$ est non négatif et $D^- = D - D^+$. En utilisant les équations (3.23) à (3.25), la relation ci-dessus peut être écrite sous la forme

$$\int_{D} |By(s)|ds = \int_{\Omega} Ak_{D^+}(t)y(t)dt - \int_{\Omega} Ak_{D^-}(t)y(t)dt. \tag{3.28}$$

En appliquant l'inégalité de Hölder à chaque intégrale du côté droit et en utilisant l'estimation (3.22), nous obtenons

$$\int_D |By(s)ds \leq \frac{2}{|\beta_0 - \beta_1|\tau(1-\tau)} C_0^{1-\tau} C_1^{\tau} \parallel y \parallel_{L_{1-\beta(\tau)}} (mes\, D)^{\alpha(\tau)}, \quad (3.29)$$

d'où résulte (3.26).

À partir de l'équation (3.26), il s'ensuit, en particulier, que B peut être étendu à un opérateur B_1 agissant de chaque $L_{1-\beta(\tau)}$(pour $0 < \tau < 1$) vers le $M_{1-\alpha(\tau)}$ correspondant et est continu. Cela signifie que l'opérateur B_1 satisfait la condition de Marcinkiewicz $LM[1-\beta(\tau), 1-\alpha(\tau)]$ pour tout $\tau \in (0,1)$ .En combinant les équations (3.26) et (3.16).On obtient

$$\parallel B_1 y(st) \parallel_{L_{1-\beta(\tau)}} \leq \frac{2}{|\beta_0 - \beta_1|\beta(\tau)\tau(1-\tau)} C_0^{1-\tau} C_1^{\tau} \parallel y \parallel_{L_{1-\beta(\tau)}} . \quad (3.30)$$

Il resulte que B_1 agit de $L_{1-\beta(\tau)}$ à $L_{1-\alpha(\tau)}$ (pour tout $\tau \in (0,1)$) et est continu. Les inégalités (2.51) et (3.30) impliquent que chaque fois que

$$0 < \tau_0 < \tau < \tau_1 < 1,$$

l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\begin{aligned} \parallel B_1 \parallel_{L_{1-\beta(\tau)} \to L_{1-\alpha(\tau)}} \leq & \frac{4(\tau_1 - \tau_0)}{|\beta(\tau_0) - \beta(\tau_1)|(\tau_1 - \tau)(\tau - \tau_0)} \\ & \times \left[\frac{C_0^{1-\tau_0} C_{1_0^{\tau}}}{|\beta_0 - \beta_1|\beta(\tau_0)\tau_0(1-\tau_0)} \right]^{(\tau-\tau_0)/(\tau_1-\tau_0)} \\ & \times \left[\frac{C_0^{1-\tau_1} C_1^{\tau_0}}{|\beta_0 - \beta_1|\beta(\tau_1)\tau_1(1-\tau_1)} \right]^{(\tau-\tau_0)/(\tau_1-\tau_0)} \\ & = K(\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \tau, \tau_0, \tau_1) C_0^{1-\tau} C_1^{\tau}. \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient l'estimation

$$\parallel B_1 \parallel_{L_{1-\beta(\tau)} \to L_{1-\alpha(\tau)}} \leqq K(\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \tau) C_0^{1-\tau} C_1^{\tau} \quad (3.31)$$

Si nous posons, par exemple, $\tau_0 = \frac{1}{2}\tau, \tau_1, \tau_1 = \frac{1}{2}(1+\tau)$. *De* (3.23) *à* (3.25), *il s'ensuit que pour toutes les fonctions échelonnées* $x(s)$ *et* $y(t)$, *nous avons la relation :*

$$(Ax, y) = (x, By).$$

Cela implique que $A = B_1^*$. *Ainsi, l'opérateur* A *agit de* $L_{\alpha(t)}$ *à* $L_{\beta(t)}$ *(pour* $0 < \tau < 1$) *et est continu. L'estimation* (3.21) *découle de l'estimation* (3.31). *Le théorème est ainsi démontré.*

3.4 Application du théorème de Stein-Weiss : continuité des potentiels

Théorème 3.4.1 *Soit* $0 < \lambda < n$. *Alors pour* $1 - \lambda\backslash n < \alpha < 1$ *le potentiel* A_λ *agit de* L_α *à* $L_{\alpha-1+\lambda\backslash n}$ *et est continue.*

Preuve 3.4.2 *Montrons que l'opérateur* A_λ *satisfait les conditions* $AM(1-\lambda/n, 0)$ *et* $AM(1, \lambda/n)$.

Soit $K_D(s)$ *la fonction caractéristique d'un ensemble* $D \subset \Omega$. *Alors*

$$A_\lambda k_D(t) = \int\limits_D |t-s|^{-\lambda} ds.$$

Estimons $A_\lambda k_D(t)$. *Désignons par* $T(t,r)$ *la sphère avec un centre au point* t *et un rayon* r,*telle que*

$$mes\, T(t,r) = mes\, D. \tag{3.32}$$

Il est clair que

$$v_n r^n = mes\, D, \tag{3.33}$$

où v_n *est le volume de la sphère unité dans* R_n. *Soit*

$$T_1 = T(t,r) \cap D.$$

Par (3.32),

$$mes(D - T_1) = mes(T(t,r) - T_1),$$

et donc

$$\int_{T(t,r)} \frac{ds}{|t-s|^\lambda} - \int_D \frac{ds}{|t-s|^\lambda} = \int_{T(t,r-T_1} \frac{ds}{|t-s|^\lambda} - \int_{D-T_1} \frac{ds}{|t-s|^\lambda}$$
$$\geq \frac{1}{r^\lambda}\{mes[T(t,r) - T_1] - mes(D - T_1)\} = 0.$$

Ainsi

$$\int\limits_D \frac{ds}{|t-s|^\lambda} \leqq \int\limits_{T(t,r)} \frac{ds}{|t-s|^\lambda} = \int\limits_{T(0,r)} \frac{ds}{|s|^\lambda}. \tag{3.34}$$

En utilisant les coordonnées polaires pour évaluer la dernière intégrale dans (3.34), *on a*

$$\int\limits_{T(0,r)} \frac{ds}{|s|^\lambda} \leq nv_n \int\limits_0^r \rho^{n-\lambda-1} d\rho = \frac{nv_n}{n-\lambda} r^{n-\lambda},$$

et selon (3.33),

$$\int\limits_{T(0,r)} \frac{ds}{|s|^\lambda} = \frac{nv_n^{\lambda\backslash n}}{n-\lambda}(mes \quad D)^{1-\lambda\backslash n}. \tag{3.35}$$

En comparant (3.34) *avec* (3.35), *nous en déduisons que pour tout* $t \in \Omega$

$$|A_\lambda k_D(t)| \leq C(mes \quad D)^{1-\lambda\backslash n},$$

où C *est une constante. Cela signifie que*

$$\| A_\lambda k_D(t) \|_0 \leq C(mesD)^{1-\lambda\backslash n}. \tag{3.36}$$

Ainsi, nous avons prouvé que l'opérateur A_λ *satisfait la condition* $AM(1 - \lambda\backslash n, 0)$.

Maintenant, soit $x(s)$ une fonction sommable arbitraire. Alors, pour chaque ensemble mesurable $D \subset \Omega$

$$\int\limits_D |A_\lambda x(t)|dt = \int\limits_D \left| \int_\Omega \frac{x(s)}{|t-s|^\lambda} ds \right| dt \leq \int\limits_D \int\limits_\Omega \frac{|x(s)|}{|t-s|^\lambda} ds\, dt = \int_\Omega \Big[\int_D \frac{dt}{|t-s|^\lambda} \Big] |x(s)| ds.$$

De (3.36), resulte

$$\int\limits_D \frac{dt}{|t-s|^\lambda} \leqq C(mes \quad D)^{1-\lambda\backslash n}.$$

D'oú

$$\int\limits_D |Ax(t)|dt \leqq C \parallel x(s) \parallel_1 .(mes \quad D)^{1-\lambda\backslash n}. \tag{3.37}$$

Par conséquent, l'opérateur A_λ satisfait la condition $LM(1, \lambda\backslash n)$ et, a fortiori, la condition $AM(1, \lambda\backslash n)$.

Il ne reste plus qu'à appliquer le théorème d'interpolation de Stein-Weiss. Le théorème est ainsi démontré.

Montrons maintenant que A_λ , en tant qu'opérateur de $L_\alpha$où , $1-\lambda\backslash n < \alpha < 1$, à $L_{\alpha-1+\lambda\backslash n}$ n'est pas compact. Ce fait a été d'abord démontré, peut-être, par V. M. Babic [1].

Considérons une séquence d'ensembles $\Omega_k \subset \Omega(k = 1, 2, ...)$,dont les diamètres sont respectivement inférieurs à $1\backslash k$ et dont les mesures sont égales à $c_k k^{-n}$, où $0 < a \leqq c_k \leqq b\infty^1$.mPosons

$$x_k(s) = \begin{cases} k^{n\alpha} & , \quad \text{si } s \in \Omega_k \ (k = 1, 2, ...) \\ 0 & , \quad \text{si} \quad s \neq \Omega_k. \end{cases}$$

Il est clair que

$$\parallel x_k(s) \parallel_{L_\alpha} = K^{n\alpha}(mes \quad \Omega_k)^\alpha \leqq b^\alpha.$$

Par conséquent, les fonctions

$$A_\lambda x_k(t) = K^{n\alpha} \int\limits_{\Omega_k} \frac{ds}{|t-s|^\lambda}.$$

Appartiennent à l'espace $L_{\alpha-1+\lambda\backslash n}$.

Montrons que ces fonctions ne possèdent pas de norme équicontinuitée absolue, d'où il résulte que A_λ. En tant qu'opérateur de L_α à $L_{\alpha-1+\lambda\backslash n}$, n'est pas compact. Puisque le diamètre de Ω_k est inférieur à $1\backslash k$,

$$A_\lambda x_k(t) \geqq K^{n\alpha} k^\lambda \quad mes \quad \Omega_k \geqq a{\cdot}k^{n(\alpha-1+\lambda\backslash n)} \qquad (t \in \Omega_k).$$

Et par conséquent

$$\| P_{\Omega_k} A_\lambda x_k(t) \|_{\alpha-1+\lambda\backslash n} \geq a^{\alpha+\lambda\backslash n}.$$

Cette inégalité signifie que les normes des fonctions $A_\lambda x_k$ ne possèdent pas la propriété de équi-continuité absolue, car $mes\,\Omega_k \to 0$ lorsque $k \to \infty$.

Nous avons prouvé que les points $\{\alpha, \alpha - 1 + \lambda\backslash n\}$ pour $1 - \lambda\backslash n < \alpha < 1$ n'appartiennent pas à la caractéristique $L(A_\lambda; cont.)$. Il s'ensuit donc (voir Théorème 5.4) qu'aucun point $\{\alpha, \beta\}$, pour lequel

$$\beta < \alpha - 1 + \lambda\backslash n, 1 - \lambda\backslash n < \alpha < 1,$$

appartiennent à la caractéristique $L(A_\lambda; cont)$. Cette assertion découle également du Théorème 7.9.

Remarquez également qu'à partir des Théorèmes 7.2 et 7.7, il en découle que les points $\{1 - \lambda\backslash n, 0\}$ et $\{1, \lambda\backslash n\}$ n'appartiennent pas à la caractéristique $L(A_\lambda; cont)$. Les affirmations des Théorèmes 2.1 et 2.3 donnent une description complète des caractéristiques $L(A_\lambda; comp.)$et $L(A_\lambda; cont.)$.

3.5 Opérateurs de type potentiel sous une forme plus générale

Commençons une investigation des opérateurs de la forme

$$Ax(t) = \int_{\Omega} \frac{Q(t,s)}{|t-s|^{\lambda}} x(s)ds. \tag{3.38}$$

Quelques théorèmes simples mais très importants sur les caractéristiques L de cet opérateur peuvent être obtenus si la fonction $Q(t,s)$ est bornée. Plus précisement :

Théorème 3.5.1 *Soit* $0 < \lambda < n$ *et que la fonction* $Q(t,s)$ *soit bornée.Alors* $L(A; cont)$ *contient* $L(A_{\lambda}; comp.)$.

Théorème 3.5.2 *Soit* $0 < \lambda < n$ *et que la fonction* $Q(t,s)$*soit bornée. Alors* $L(A; comp.)$ *contient tous les points de la caractéristique* $L(A_{\lambda}; comp.)$. *à l'exception éventuelle de certains points de bord.*

Théorème 3.5.3 *Soit* $0 < \lambda < n$ *et que la fonction* $Q(t,s)$ *soit bornée et uniformément continue pour* $t \neq s$*.Alors* $L(A; comp.)$ *contient* $L(A_{\lambda}; comp.)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. Brezis, Analyse fonctionnelle. Théorie et applications, 1983.

[2] G. Hardy, D. Littlewood and G. Polya Inequalities, Univ. Press, Cambridge, 1952. 18-912.

[3] V.P. Ilin,, On an imbedding theorem for a limiting exponent, Dokl. Acad. Nauk SSSR 96 (1954) 905-908. MR 16-121.

[4] V.P. Ilin, Some functional inequalities of the type of imbedding theorems, Dokl. Akad. Nauk SSSR 123 (1958) 967-970. MR 21 - 103.

[5] V.P. Ilin, Imbedding theorems, Trudy Mat. Inst. Steklov 53 (1959) 359-386. MR 22 - 3776.

[6] M.I. Krasnosel'skii, P.P. Zabreyko and Pustylnik, Integral operators in spaces of summable functions. Springer 1976.

[7] S.G. Krein and ?. ?. Semenov, On a scale of spaces, Dokl. Akad. Nauk SSSR 138 (1961) 763-766. MR 25 - 4352.

[8] E.M. Stein and G. Weiss, An extension of a theorem of Marcinkiewicz and some of its applications, /. Math. Mech. 8 (1959) 263-284. MR 21 - 5888.

[9] S.L Sobolev, On a theorem of functional analysis, Mat. Sb. (N.S.) 4 (46) (1938) 471-497.

[10] Sobolev, S. L, Some applications of functional analysis in mathematical physics (English translation), Amer. Math. Soc., Providence, 1963.