RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN TIARET
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUES
Département de Mathématiques

MÉMOIRE DE MASTER

Spécialité :
« Mathématiques »
Option :
«Analyse fonctionnelle et applications »

Présenté Par :

LAARAK Kheira & **HAMOUM Hana**

Intitulé :

Existence et unicité de solutions d'équation différentielles hybrides avec dérivée fractionnaire proportionnelle séquentielle et avec des conditions hybrides non locales.

Soutenu publiquement le : 06 / 06 / 2024
à Tiaret devant le jury composé de :

Dr. BENALLOU Mohamed	MCB	U. Ibn Khaldoun Tiaret	Président
Dr. BEDDANI Hamid	MCA	ESGEE d'Oran	Encadreur
Dr. BEDDANI Moustafa	MCA	E.N.S de Mostaganem	Examinateur
Dr. BENIA Kheireddine	MCA	U. Ibn Khaldoun Tiaret	Co-encadreur

Année universitaire: 2023/2024

Dédicaces

Nous dédies ce modeste travail à notre parents,

qui nous avons toujours soutenu,

Qui nous avons aide à affronter les difficultés,

A tous notre enseignants pour leurs utiles conseils, leurs patience, leur persévérance.

A toute notre familles.

A tous les amis.

Remerciements

On remercie dieu le tout puissant de nous avoir donné la santé et la volonté d'entamer et de terminer ce mémoire. Tout d'abord, ce travail ne serait pas aussi riche et n'aurait pas pu avoir le jour sans l'aide et l'encadrement de Dr. BEDDANI Hamid, on le remercie pour la qualité de son encadrement exceptionnel, pour sa patience, sa rigueur et sa disponibilité durant notre préparation de ce mémoire .

Résumé : Dans ce mémoire nous aborderons deux chapitre comme suit :

Le premier chapitre contient deux parties, dans la première nous donnons quelques notions préliminaires essentielles, utilisées sur l'intégral et la dérivation fractionnaire, et dans la deuxième partie, nous examinons plusieurs définitions et propriétés de l'intégration et la dérivation de différents types d'ordre fractionnaire, nécessaires.

Le deuxième chapitre nous étudions l'existence de solutions pour un nouveau problème d'équations différentielles hybrides avec des conditions aux limites multipoints non locales en utilisant la dérivée fractionnaire proportionnelle. Les résultats présentés sont obtenus en utilisant des théorèmes hybrides de point fixe pour trois opérateurs de Dhage.

Mots clés : Calcule fractinnaire ; Théorème du point fixe ; Existence et unicité ; Dérivation fractionnaire ; Probléme hybride .

Abstract : In this memory we will address two chapters as follows :

In the first chapter contains two parts, in the first we give some essential preliminary notions, used in integral and fractional derivation, and in the second part we examine several definitions and properties of integration and derivation of different types of fractional order, necessary.

In the second chapter we study the existence of solutions for a new problem of hybrid differential equations with nonlocal multipoint boundary conditions using the proportional fractional derivative. The presented results are obtained using hybrid fixed point theorems for three Dhage operators.

Keywords : Calculate fractional. Fixed point theorem ; Existence and uniqueness ; Fractional derivation ; Hybrid problem.

Table des matières

Index des notations

$\mathbb{N}$: Ensemble des nombres entiers naturels.

$\mathbb{R}$: Ensemble des nombres réels.

$\mathbb{C}$: Ensemble des nombres complexes.

Ω : Domaine borné dans $\mathbb{R}$.

$L^p(\Omega)$: Espace des fonctions mesurables de puissance $p \in [0, +\infty[$ intégrables sur Ω.

$L^\infty(\Omega)$: Espace des fonctions mesurables essentiellement bornées sur Ω.

$C(\Omega)$: Espace des fonctions continues sur Ω.

$C^n(\Omega)$: Espace des fonctions $g : \Omega \to \mathbb{R}$ dérivables n fois et $g^{(n)}$ continues.

$AC(\Omega)$: Espace des fonctions absolument continues sur Ω.

$AC^n(\Omega)$: Espace des fonctions f dérivables à l'ordre $n-1$ et elle que $g^{(n-1)} \in AC(\Omega)$.

$\Gamma(.)$: La fonction Gamma.

$B(.,.)$: La fonction Bêta.

R-L : Riemann-Liouville.

$\mathfrak{J}^{\epsilon}g$: Intégrale fractionnaire au sens de R-L d'ordre $\epsilon > 0$.

$\mathfrak{D}^{\epsilon}g$: Dérivée fractionnaire au sens de R-L d'ordre $\epsilon > 0$.

${}^{c}\mathfrak{D}^{\epsilon}g$: Dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $\epsilon > 0$.

Introduction

Mathématiques ont été décrites comme la « Reine des sciences » en raison de leur rôle clé dans le progrès scientifique et technologique. Il est considéré comme un outil efficace pour comprendre les théories scientifiques et résoudre des problèmes pratiques. Qu'il s'agisse de géométrie spatiale, de théorie des nombres ou de mathématiques appliquées à divers domaines comme la physique, l'ingénierie et l'économie, les mathématiques reflètent la beauté que l'on retrouve dans toutes les régions de notre monde. Ensuite, chaque nouveau développement dans un aspect des mathématiques apporte de nouvelles applications, et la théorie du calcul fractionnaire ne fait pas exception. Alors, quel est le contexte historique de cette théorie ?
Le domaine du calcul fractionnaire implique l'intégration ou la différenciation d'ordres non entiers et est reconnu comme un outil puissant d'analyse mathématique. Elle est née à la fin du XVIIe siècle, après une conversation entre les deux mathématiciens Gottfried Wihelm Leibniz et L'Hopital en 1695. Le sujet de cette conversation tournait autour de la notation $\left(\frac{d^n g}{dt^n}\right)$ établie par Leibniz en termes de nième dérivée de la fonction f pour $n \in \mathbb{N}$, où L'Hopital a demandé : "et si n était (1/2)". Leibniz répondit : « Cela conduirait à un paradoxe dont nous pourrons un jour tirer des conclusions utiles » [21].
Par la suite, le calcul fractionnaire a connu un développement ultérieur, marqué par des progrès significatifs tant dans ses fondements théoriques que dans ses applications pratiques, qui résultaient de la multiplicité de ses opérateurs fractionnaires. Ensuite, de nombreux chercheurs s'intéressent à ce sujet pour développer les équations différentielles fractionnaires (EDF) comme Kilbas et al. [12, 13], Podlubny [22], Baleanu et al. [1, 5, 16].
Les problèmes impliquant des équations différentielles d'ordre fractionnaire ont suscité un grand intérêt dans divers domaines pratiques et techniques au cours des dernières années, en particulier les problèmes de valeurs limites fractionnaires (FBVP). Dans ce contexte, certaines études sont orientées vers les aspects analytiques de la résolution de ces problèmes, ce qui comprend l'examen de l'unicité, de l'existence, de la stabilité et d'autres facteurs connexes. Parallèlement, d'autres efforts de recherche se sont concentrés sur le développement

de méthodes numériques pour résoudre les problèmes linéaires et non linéaires (FBVP). Cela est dû au fait que certains problèmes sont difficiles à résoudre analytiquement.

Ce mémoire est scindé en deux chapitres comme suit :

Dans le premier chapitre nous présentons deux parties, dans la première nous donnons quelques notions préliminaires essentielles, utilisées dans l.intégrale et la dérivation fractionnaire et dans la deuxième partie, nous examinons plusieurs définitions et propriétés de l'intégration et la dérivation de différents types d'ordre fractionnaire.

Dans le deuxième chapitre nous étudions une classe d'équations différentielles fractionnaires hybrides avec des conditions aux limites multipoints non locales en utilisant la dérivée fractionnaire proportionnelle, par le théorème hybride du point fixe pour la somme de trois opérateurs de Dhage, l'existence et l'unicité les résultats des solutions sont obtenus.

$$\begin{cases} {}_0\mathfrak{D}^{\alpha,\rho,\varphi}\left[{}_0\mathfrak{D}^{\beta,\rho,\varphi}\left(\frac{u(t)-({}_0\mathfrak{J}^{\sigma,\rho,\varphi}\mathbb{F})(t,u(t))}{\mathbb{G}(t,u(t))}\right)\right] = \mathbb{H}(t,u(t)),\ t \in J = [0,1]\,, \\ {}_0\mathfrak{J}^{1-\alpha,\rho,\varphi}\left({}_0\mathfrak{D}^{\beta,\rho,\varphi}\left(\frac{u(t)-({}_0\mathfrak{J}^{\sigma,\rho,\varphi}\mathbb{F})(t,u(t))}{\mathbb{G}(t,u(t))}\right)\right)\Big|_{t=0^+} = \lambda, \\ {}_0\mathfrak{J}^{2-\beta,\rho,\varphi}\left(\frac{u(t)-({}_0\mathfrak{J}^{\sigma,\rho,\varphi}\mathbb{F})(t,u(t))}{\mathbb{G}(t,u(t))}\right)\Big|_{t=0^+} = 0, \\ {}_0\mathfrak{J}^{1-\beta,\rho,\varphi}\left(\frac{u(t)-({}_0\mathfrak{J}^{\sigma,\rho,\varphi}\mathbb{F})(t,u(t))}{\mathbb{G}(t,u(t))}\right)\Big|_{t=0^+} = \left({}_0\mathfrak{J}^{\sigma,\rho,\varphi}u\right)(\zeta)\,,\ \zeta \in\,]0,1[\,. \end{cases} .$$

Chapitre 1

Concepts fondamentaux et de base en analyse fonctionnelle et calcul fractionnaire

1.1 Introduction

Ce chapitre sert de préface à notre travail, récapitulant les concepts de base, les propriétés et les résultats liés aux éléments de l'analyse fonctionnelle et du calcul fractionnaire, qui sont des instruments cruciaux dans cette recherche.
Nous avons organisé ce chapitre en trois sections principales. La première section est consacrée aux notions et matériaux fondamentaux de la théorie de l'analyse fonctionnelle. La deuxième section est destinée à certaines fonctions particulières du calcul fractionnaire, ainsi qu'à quelques définitions et propriétés des intégrales et dérivées fractionnaires selon différentes approches.
La troisième section présente quelques théorèmes classiques du point fixe qui sont importants pour une compréhension complète de nos résultats. Pour la bonne structure de ce chapitre, nous avons entouré ses sections d'une introduction et d'une conclusion.

1.2 Notions essentielles de l'analyse fonctionnelle

Le but de cette section est de fournir des informations claires sur les définitions et les outils de base de la théorie de l'analyse fonctionnelle, ainsi que sur les espaces fonctionnels utilisés dans les chapitres qui suivent. Pour plus de détails, nous incitons les lecteurs à consulter ces références ([22, 12, 14, 17])

1.2.1 Concepts et résultats élémentaires

Définition 1.2.1 *(**Norm**) ([23]) Soit $\mathbb{X}$ un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle norme sur $\mathbb{X}$ toute application $\|.\| : \mathbb{X} \to \mathbb{R}_+$ vérifiant les axiomes suivants :*

1. $\|f\|_{\mathbb{X}} = 0 \Leftrightarrow f = 0.$
2. $\forall (\lambda, f) \in \mathbb{K} \times \mathbb{X} : \|\lambda f\|_{\mathbb{X}} = |\lambda| \, \|f\|_{\mathbb{X}}.$
3. $\forall f, g \in \mathbb{X} : \|f + g\|_{\mathbb{X}} \leq \|f\|_{\mathbb{X}} + \|g\|_{\mathbb{X}}.$

Définition 1.2.2 *(Espace vectoriel normé) ([4])Le couple $(\mathbb{X}, \|.\|_{\mathbb{X}})$ est appelée un espace vectoriel normé, où $\mathbb{X}$ est un espace vectoriel et $\|.\|_{\mathbb{X}}$ une norme sur $\mathbb{X}$.*

Définition 1.2.3 *(**Suite de Cauchy**) ([18]) Soit $(\mathbb{X}, \|.\|_{\mathbb{X}})$ un espace vectoriel normé. On dit que la suite $(f_m)_m$ d'éléments de $\mathbb{X}$ est une suite de Cauchy si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N \Rightarrow \|f_p - f_q\|_{\mathbb{X}} < \varepsilon.$$

Définition 1.2.4 *(**Espace complet**) ([18]) On dit que $(\mathbb{X}, \|.\|_{\mathbb{X}})$ est complet, si toute suite de Cauchy $(f_m)_m$ dans $\mathbb{X}$ est convergente.*

Définition 1.2.5 *(**Espace de Banach**) ([18]) Tout espace vectoriel normé complet est appelé espace de Banach.*

Espaces des fonction intégrables "Espace L^p"

En analyse, les espaces L^p sont des espaces de fonction dont la puissance $p - ième$ est intégrable, au sens de Lebesgue.

Définition 1.2.6 *([22])Soient $\Omega = [0, \mathfrak{T}) \, (0 < \mathfrak{T} \leq +\infty)$, un intervalle fini ou infinie de $\mathbb{R}$ et $1 \leq p \leq +\infty$*
1. pour $1 \leq p < \infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est l'espace des (classes de) fonctions g réelles sur Ω telles que g est mesurable et

$$\int_0^b |g(t)| \, dt < +\infty.$$

2. pour $p = \infty$, l'espace $L^\infty(\Omega)$ est l'espace des classes de fonctions mesurables g bornées presque partout (p.p) sur Ω

Théoréme 1.2.1 *Soit* $\Omega = [0, \mathfrak{T})\,(0 < \mathfrak{T} \leq +\infty)$ *un intervalle fini ou infini de* $\mathbb{R}$

1. pour $1 \leq p < \infty$*, l'espace* $L^p(\Omega)$*est un espace de Banach muni de la norme :*

$$\|g\|_p = \left(\int_0^b |g(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

2. L'espace $L^\infty(\Omega)$ *est un espace de Banach muni de la norme :*

$$\|g\|_\infty = \{\inf M \geq 0 : |g(t)| \leq M \quad p.p \ sur \ \Omega.\}$$

Espaces des fonctions continues et absolument continues.

Définition 1.2.7 *([12]) Soit* $\Omega = [0, \mathfrak{T})\,(0 < \mathfrak{T} \leq +\infty)$ *et* $n \in \mathbb{N} = \{0.1...\}$ *On désigne par* $C^n(\Omega)$ *l'espace des fonctions* g *qui ont leurs dérivées d'ordre inférieur ou égale à* n *continues sur* Ω*, à valeur dans* $\mathbb{R}$ *muni de la norme :*

$$\|g\|_{C^n(\Omega)} = \sum_{k=0}^{n} \left\| g^{(k)} \right\|_\infty = \sum_{k=0}^{n} \max_{t \in \Omega} \left| g^{(k)}(t) \right|, n \in \mathbb{N}.$$

En particulier si $n = 0, C^0(\Omega) = C(\Omega)$ *l'espace des fonctions* g *continues sur* Ω *muni de la norme :*

$$\|g\|_\infty = \max_{t \in \Omega} |g(t)|.$$

Définition 1.2.8 *([12]) Soit* $\Omega = [0, \mathfrak{T})\,(0 < \mathfrak{T} \leq +\infty)$ *. On désigne par* $AC(\Omega)$ *l'espace des fonctions primitives des fonctions intégrables, c'est-à-dire :*

$$AC(\Omega) = \left\{ g : \Omega \to \mathbb{R} / \exists \varphi \in L^1(\Omega) : g(t) = c + \int_0^t \varphi(s) ds \right\},$$

et on appelle $AC(\Omega)$ *l'espace des fonctions absolument continues sur* Ω*.*

Définition 1.2.9 *([12]) Pour* $n \in \mathbb{N}$ *on désigne par* $AC^n(\Omega)$ *l'espace des fonctions* h *qui ont des dérivées continues sur* Ω *jusqu'à l'ordre* $(n-1)$ *et telles que* $g^{(n-1)} \in AC(\Omega)$ *c'est-à -dire :*

$$AC^n(\Omega) = \left\{ g : \Omega \to \mathbb{R}, g^{(k)} \in C(\Omega), k \in \{0, 1, ..., n-1\}, g^{(n-1)} \in AC(\Omega) \right\},$$

En particulier $AC^1(\Omega) = AC(\Omega)$*.*

Lemme 1.2.1 *([12]) Une fonction* $g \in AC^n(\Omega)$*,* $n \in \mathbb{N}^*$*, si et seulement si elle est représentée sous la forme :*

$$g(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{n-1} g^{(n)}(s) ds + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} t^k.$$

Théoréme 1.2.2 *([17])(**Opérateur Complètement Continu**) Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux espaces de Banach. L'opérateur continu $\varphi : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ est complètement continu s'il transforme tout ensemble borné de $\mathbb{X}$ en un ensemble relativement compact de $\mathbb{Y}$. En d'autres termes, l'opérateur φ estcomplètement continu, s'il est compact et continu.*

Théoréme 1.2.3 *([14]) (**Théorème d'Arzela-Ascoli**)Soit $\Omega = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ et soit $\mathfrak{A}$ un sous-ensemble de $C(\Omega, \mathbb{X})$. Alors $\mathfrak{A}$ est relativement compact dans $C(\Omega, \mathbb{X})$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées*

1. *$\mathfrak{A}$ est uniformément borné, c'est-à-dire*

$$\exists \delta > 0 : \|\varphi(t)\|_{\infty} \leq \delta, \quad \forall t \in \Omega, \quad and \;\; \varphi \in \mathfrak{A}.$$

2. *$\mathfrak{A}$ est équicontinu, c'est-à-dire*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \varphi \in \mathfrak{A}, \forall t', t \in \Omega : |t - t'| < \delta \Rightarrow \|\varphi(t) - \varphi(t')\|_{\infty} < \varepsilon.$$

1.3 Un bref aperçu du calcul fractionnaire

Cette section sera dédiée aux fonctions d'Euler. Ce sont des outils robustes qui peuvent être utilisés pour résoudre une grande variété de problèmes de calcul fractionnaire. Ensuite, nous rappellerons les définitions et caractéristiques fondamentales des opérateurs fractionnaires.

1.3.1 Quelques fonctions spéciales

Dans cette section,nous présentons les fonction Gamma,Bêta. Ces fonctions jouent un rôle important dans la théorie du calcul fractionnaire.

La fonction Gamma

Définition 1.3.1 *([22])Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $Re(z) > 0$. La fonction Gamma Γ est définie par l'intégrale suivante :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \tag{1.3.1}$$

avec $\Gamma(1) = 1, \Gamma(0^+) = +\infty$, Γ est une fonction monotone et strictement décroissante pour $0 < z < 1$.

une propriété importante de la fonction Gamma Γ est la relation de récurrence suivante

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z), \tag{1.3.2}$$

qu'on peut la démontrer par une intégration par parties

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt = \left[-e^{-t} t^z\right]_0^{\infty} + z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z). \tag{1.3.3}$$

La fonction Gamma d'Euler généralise la factorielle car $\Gamma(n+1) = n!$, $\forall n \in \mathbb{N}$, en effet $\Gamma(1) = 1$ et en utilisant la relation (1.3.2) nous obtenons :

$$\begin{aligned} \Gamma(2) &= 1.\Gamma(1) = 1, \\ \Gamma(3) &= 2\Gamma(2) = 2.1! = 2, \\ \Gamma(4) &= 3\Gamma(3) = 6, \end{aligned}$$

par récurrence on obtient $\Gamma(n+1) = n(n-1)! = n!$.

Formule de multiplication

La fonction gamma vérifie également la formule de duplication :

$$\forall z \in \mathbb{C} : \Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = 2^{1-2z}\sqrt{\pi}\Gamma(2z).$$

La formule de duplication est un cas particulier du théoréme de multiplication :

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(z+\frac{2}{m}\right)\cdots\Gamma\left(z+\frac{m-1}{m}\right) = (2\pi)^{\frac{m-1}{2}} m^{\frac{1}{2-mz}}\Gamma(mz).$$

Cette fonction apparaît également dans des formules incluant la fonction zêta de Riemann.

Valeurs particuliéres

Cette section indique quelques valeurs particuliéres de la fonction gamma

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi},\ \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2},\ \ \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4},\ \text{et} \\ \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

Mais aussi négatifs, par exemple :

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}.$$

Le développement asymptotique de $\Gamma(z)$:

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi} z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z}\left[1 + \frac{1}{12z} + \frac{1}{288z^2} - \frac{139}{51840z^3} - \frac{571}{2488320z^4} + O\left(\frac{1}{z^4}\right)\right].$$

La fonction Bêta

Définition 1.3.2 *([22])La fonction Bêta est un type d'intégrale d'Euler définie pour des nombre complexes z et w par :*

$$B(z,w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}\,dt \quad Re(z) > 0, Re(w) > 0. \tag{1.3.4}$$

La fonction Bêta est liée à la fonction Gamma par la relation suivante :

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}, \, \forall z,w : Re(z) > 0, Re(w) > 0. \tag{1.3.5}$$

Remarque 1.3.1 *La fonction Bêta est symétrique i.e.*

$$B(z,w) = B(w,z)$$

1.3.2 Les opérateurs de Riemann-Liouville (R-L)

Dans cette partie, nous présentons deux opérateurs fractionnaires dans le sens de Riemann Liouville avec certaines de leurs propriétés.
La notion d'intégrale fractionnaire d'ordre $\epsilon \in \mathbb{C}(Re(\epsilon) > 0)$, selon l'approche de R-L, généralise la célébre formule (attribuée à Cauchy) d'intégrale répété $n-$fois.

Définition 1.3.3 *([12, 22]) Soit g une fonction continue sur l'intervalle $[0,\mathfrak{T}], \mathfrak{T} > 0$. Une primitive de g est donnée par l'expression :*

$$\mathfrak{J}^1 g(t) = \int_0^t g(x)dx.$$

Pour une primitive seconde et d'aprés le théoréme de Fubini on aura :

$$\begin{aligned}\mathfrak{J}^2 g(t) &= \int_0^t \mathfrak{J}^1 g(x)dx = \int_0^t \left(\int_0^x g(s)ds\right)dx = \int_0^t \left(\int_0^x\right) g(s)dsdx \\ &= \int_0^t (t-s)\, g(s)ds.\end{aligned}$$

En répétant n fois, on arrive à la nieme primitive de la fonction g sous la forme :

$$\mathfrak{J}^n g(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-s)^{n-1} g(s)ds, \; t > 0, n \in \mathbb{N}^*. \tag{1.3.6}$$

Cette formule est appelée formule de Cauchy, et depuis la généralisation du factoriel par la fonction Gamma : $\Gamma(n) = (n-1)!$, Riemanns'est rendu compte que le second membre de (1.3.6) paurrait avoir un sens même quand n prenant une valeur non-entiére, il a définit l'intégrale fractionnaire de la maniére suivante :

Définition 1.3.4 *([12, 22])Soit $g \in L^1([0,\mathfrak{T}]), \mathfrak{T} > 0$. L'intégrale fractionnaire de R-L de la fonction g d'ordre $\epsilon \in \mathbb{C}$(Re$(\epsilon) > 0$) notée $\mathfrak{J}^\epsilon$ est définie par :*

$$\mathfrak{J}^\epsilon g(t) = \frac{1}{\Gamma(\epsilon)} \int_0^t (t-s)^{\epsilon-1} g(s)ds, \tag{1.3.7}$$

où $\Gamma(\epsilon)$ est la fonction Gamma, et $0 < t < +\infty$.

Pour $\epsilon = 0$, on a :

$$\mathfrak{J}^\epsilon = \mathfrak{J} \text{ (l'opérateur identité)}$$

Pour $\epsilon = n \in \mathbb{N}^*$, $\mathfrak{J}^\epsilon$ a coincide avec l'intégrale répétée $n-$fois de la forme :

$$\begin{aligned} (\mathfrak{J}^\epsilon g)(t) &= \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots\ldots \int_0^{t_{n-1}} g(t_n)\, dt_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{n-1} g(s)\, ds. \end{aligned} \tag{1.3.8}$$

Théoréme 1.3.1 *([12, 22]) Si $g \in L^1([0,\mathfrak{T}]), \mathfrak{T} > 0$, alors $\mathfrak{J}^\epsilon g$ existe pour presque tout $t \in [0,\mathfrak{T}]$ et de plus $\mathfrak{J}^\epsilon g \in L^1([0,\mathfrak{T}])$.*

Preuve. En introduisant (1.3.7) puis an utilisant le théoréme de Fubini, on trouve :

$$\begin{aligned} \int_0^{\mathfrak{T}} |\mathfrak{J}^\epsilon g(t)|\, dt &\leq \frac{1}{\Gamma(\epsilon)} \int_0^{\mathfrak{T}} \int_0^t (t-s)^{\epsilon-1} |g(s)|\, dsdt \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\epsilon)} \int_0^{\mathfrak{T}} |g(s)| \left(\int_0^{\mathfrak{T}} (t-s)^{\epsilon-1} dt \right) ds \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\epsilon+1)} \int_0^{\mathfrak{T}} |g(s)| (\mathfrak{T}-s)^\epsilon\, ds \\ &\leq \frac{\mathfrak{T}^\epsilon}{\Gamma(\epsilon+1)} \int_0^{\mathfrak{T}} |g(s)|\, ds, \end{aligned}$$

puisque $g \in L^1([0,\mathfrak{T}])$, la derniére quantité est fini, ce qui établit le résultat. □

Exemple 1.3.1 *Soit $g(t) = t^\delta$ avec $\epsilon > 0, \delta > -1$, alors*

$$\mathfrak{J}^\epsilon g(t) = \frac{\Gamma(\delta+1)}{\Gamma(\epsilon+\delta+1)} t^{\epsilon+\delta}. \tag{1.3.9}$$

En effet,

$$\mathfrak{J}^\epsilon g(t) = \frac{1}{\Gamma(\epsilon)} \int_0^t (t-s)^{\epsilon-1} s^\delta ds.$$

En utilisant le changement de variable et la fonction Bêta on obtient :

$$s = tx, 0 \leq x \leq 1, \tag{1.3.10}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}^{\epsilon} g(t) &= \frac{1}{\Gamma(\epsilon)} \int_0^1 (t - tx)^{\epsilon-1} x^{\delta} t^{\delta+1} dx \\ &= \frac{t^{\epsilon+\delta}}{\Gamma(\epsilon)} \int_0^1 (1-x)^{\epsilon-1} x^{\delta} dx. \end{aligned}$$

En utilisant la définition de la fonction Bêta, on obtient

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}^{\epsilon} g(t) &= \frac{t^{\epsilon+\delta}}{\Gamma(\epsilon)} \beta(\epsilon, \delta+1) \\ &= \frac{\Gamma(\epsilon)\Gamma(\delta+1)}{\Gamma(\epsilon)\Gamma(\epsilon+\delta+1)} t^{\epsilon+\delta} \\ &= \frac{\Gamma(\delta+1)}{\Gamma(\epsilon+\delta+1)} t^{\epsilon+\delta}. \end{aligned}$$

Donc l'intégrale fractionnaire au sens de R-L de la fonction $g(t) = t^{\delta}$ est donnée par :

$$\mathfrak{J}^{\epsilon} g(t) = \frac{\Gamma(\delta+1)}{\Gamma(\epsilon+\delta+1)} t^{\epsilon+\delta}. \tag{1.3.11}$$

En particulier, la relation (1.3.11) montre que l'intégrale fractionnaire au sens de R-L d'ordre ϵ d'une constante est donnée par :

$$\mathfrak{J}^{\epsilon} C = \frac{C}{\Gamma(\epsilon+1)} t^{\epsilon}.$$

Théoréme 1.3.2 *([12, 22])Si $g \epsilon L^1[0, \mathfrak{T}]$ et $\epsilon > 0$, alors $\mathfrak{J}^{\epsilon} g(t)$ existe pour presque tout $t \in [0, \mathfrak{T}]$ et on a :*

$$(\mathfrak{J}^{\epsilon} g) \in L^1[0, \mathfrak{T}]$$

Preuve.

Soit $g \in L^1[0, \mathfrak{T}]$, on a :

$$\frac{1}{\Gamma(\epsilon)} \int_0^t (t-x)^{\epsilon-1} g(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(t-x)\, \varphi_2(x)\, dx$$

avec,

$$\varphi_1(u) = \{ \frac{u^{\epsilon-1}}{\Gamma(\epsilon)} \quad \text{pour} \quad 0 < u \leq \mathfrak{T} \qquad \text{pour} \quad u \in \mathbb{R}^* - \{\mathfrak{T}\},$$

et

$$\varphi_2(u) = \{g(u) \qquad 0 \leq u \leq \mathfrak{T} \quad \mathbb{R} \backslash [0, \mathfrak{T}].$$

Par constraction, $\varphi_j \in L^1(\mathbb{R})$ pour $j \in \{1, 2\}$, et on a : $\mathfrak{J}^\epsilon g \in L^1[0, \mathfrak{T}]$. $\square$

Théoréme 1.3.3 *([12, 22])Soit $\epsilon > 0$ et soit $(g_k)_{k=1}^\infty$ une suite des fonctions continues uniformément convergente sur $[0, \mathfrak{T}]$, alors on peut intervertir l'intégrale fractionnaire de R-L et la limite comme suit :*

$$\left(\mathfrak{J}^\epsilon \lim_{k\to\infty} g_k\right)(t) = \left(\lim_{k\to\infty} \mathfrak{J}^\epsilon g_k\right)(t),$$

en particulier, la suite $(g_k)_{k=1}^\infty$ est uniformément convergente.

Preuve. Soit g la limite de la suite (g_k), il est clair que g est continue, et on a l'estimation :

$$\begin{aligned} |\mathfrak{J}^\epsilon g_k(t) - \mathfrak{J}^\epsilon g(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\epsilon)} \int_0^t (t-x)^{\epsilon-1} |g_k(x) - g(x)| \, dx \\ &\leq \frac{T^\epsilon}{\Gamma(\epsilon+1)} \|g_k - g\|_\infty, \end{aligned}$$

d'où, la convergence uniforme lorsque $k \to \infty$, pour $t \in [0, \mathfrak{T}]$. $\square$

Théoréme 1.3.4 *([12, 22]) Soient $\epsilon.\beta \in \mathbb{C}$ et $Re\epsilon > 0, Re\beta > 0,$ pour toute fonction $g \in L^1$ $[0, \mathfrak{T}]$, on a :*

$$\mathfrak{J}^\epsilon \mathfrak{J}^\beta g(t) = \mathfrak{J}^{\epsilon+\beta} g(t) = \mathfrak{J}^\beta \mathfrak{J}^\epsilon g(t), \tag{1.3.12}$$

pour presque tout $t \in [0, \mathfrak{T}]$, et $g \in C[0, \mathfrak{T}]$, alors (1.3.12) est vraie pour tout $t \in [0, \mathfrak{T}]$.

Preuve. Supposons d'abord que $g \in L^1[0, \mathfrak{T}]$, on a :

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}^\beta \mathfrak{J}^\epsilon g(x) &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-x) \mathfrak{J}^\epsilon g(x) \, dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-x) \left(\frac{1}{\Gamma(\epsilon)} \int_0^x (x-s) g(s) \, ds \right) dx \end{aligned}$$

D'aprés le théoréme 1.3.3 les intégrales existent et par le théoréme de Fubini on a :

$$\mathfrak{J}^\epsilon \mathfrak{J}^\beta g(t) = \frac{1}{\Gamma(\epsilon)\Gamma(\beta)} \int_0^t \left(\int_s^t (t-y)^{\epsilon-1} (y-s)^{\beta-1} \, dy \right) g(s) \, ds$$

En utilisant le changement de variable

$$y = s + (t-s)z$$

où $z=0$ quand $y=s$ et $z=1$ quand $y=t$ et $dy=(t-s)dz$, on obtient :

$$\mathfrak{J}^{\epsilon}\mathfrak{J}^{\beta}g\left(t\right)=\frac{1}{\Gamma\left(\epsilon\right)\Gamma\left(\beta\right)}\int_{0}^{t}\left(t-s\right)^{\epsilon+\beta-1}\left(\int_{0}^{1}\left(1-z\right)^{\epsilon-1}z^{\beta-1}dz\right)g\left(s\right)ds$$

Enfin, en tenant compte de la définition de la fonction Bêta, on obtient :

$$\mathfrak{J}^{\epsilon}\mathfrak{J}^{\beta}g\left(t\right)=\frac{1}{\Gamma\left(\epsilon+\beta\right)}\int_{0}^{t}g\left(z\right)\left(t-z\right)^{\epsilon+\beta-1}dz=\mathfrak{J}^{\epsilon+\beta}g\left(t\right).$$

Supposons maintenant que $h\in C[0,\mathfrak{T}]$, alors (d'aprés les théorémes sur les intégrales dépendant de paramétres) $\mathfrak{J}^{\epsilon}g\in C[0,\mathfrak{T}]$, et par suite

$$\mathfrak{J}^{\epsilon}\mathfrak{J}^{\beta}g,\mathfrak{J}_{a}^{\epsilon+\beta}g\in C[0,\mathfrak{T}].$$

Ainsi, d'aprés ce qui précéde, les deux fonctions continues $\mathfrak{J}^{\epsilon}\mathfrak{J}^{\beta}g,\mathfrak{J}_{a}^{\epsilon+\beta}g$ coïncident presque partout sur $[0,\mathfrak{T}]$, elles doivent donc coïncider partout sur $[0,\mathfrak{T}]$. □

Définition 1.3.5 *([12, 22]) Soit $g\in L^{1}([0,\mathfrak{T}]),\mathfrak{T}>0$ une fonction intégrable sur $[0,\mathfrak{T}]$, la dérivée fractionnaire au sens de R-L de la fonction g d'ordre $\epsilon\in\mathbb{C}(Re(\epsilon)>0)$ notée $\mathfrak{D}^{\epsilon}g$ est définie par :*

$$\mathfrak{D}^{\epsilon}g(t)=\mathfrak{D}^{n}\mathfrak{J}^{n-\epsilon}g(t)=\frac{1}{\Gamma\left(n-\epsilon\right)}\left(\frac{d}{dt}\right)^{n}\int_{0}^{t}\left(t-s\right)^{n-\epsilon-1}g(s)ds,\tag{1.3.13}$$

où $n-1<[Re(\epsilon)]<n$, et $[Re(\epsilon)]$ est la partie entiére de $Re(\epsilon)$ et $\mathfrak{D}^{n}=\frac{d^{n}}{dt^{n}}$.

Exemple 1.3.2 *En particulier, si $\epsilon=0$, alors*

$$\mathfrak{D}^{0}g(t)=\frac{1}{\Gamma\left(1\right)}\left(\frac{d}{dt}\right)\int_{0}^{t}g(s)ds=\mathfrak{J}g(t).\tag{1.3.14}$$

Si $\epsilon=n\in\mathbb{N}$, alors

$$\mathfrak{D}^{n}g(t)=\frac{1}{\Gamma\left(1\right)}\left(\frac{d}{dt}\right)^{n+1}\int_{0}^{t}g(s)ds=g^{(n)}(t).\tag{1.3.15}$$

Par suite la dérivée fractionnaire au sens de R-L coïncide avec la dérivée classique pour $\epsilon\in\mathbb{N}$. Si de plus $0<\epsilon<1$, alors $n=1$, d'où

$$\mathfrak{D}^{\epsilon}g(t)=\frac{1}{\Gamma\left(1-\epsilon\right)}\left(\frac{d}{dt}\right)\int_{0}^{t}\left(t-s\right)^{-\epsilon}g(s)ds,t>0.$$

La dérivée de $g(t)=t^{\delta}$ au sens de R-L. Soit $\epsilon>0$ tel que $n-1<\epsilon<n$ et $\delta>-1$, d'aprés (1.3.13) et la relation (1.3.11), (Voir l'Exemple 1.3.1) on a :

$$\mathfrak{D}^{\epsilon}t^{\delta}=\mathfrak{D}^{n}\mathfrak{J}^{n-\epsilon}t^{\delta}=\frac{\Gamma\left(\delta+1\right)}{\Gamma\left(n-\epsilon+\delta+1\right)}\mathfrak{D}^{n}t^{n-\epsilon+\delta}.\tag{1.3.16}$$

En tenant compte

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}^n t^{n-\epsilon+\delta} &= (\delta+n-\epsilon)(\delta+n-\epsilon-1).......(b-\epsilon+1)t^{\delta-\epsilon} \\ &= \frac{\Gamma(\delta+n-\epsilon+1)}{\Gamma(\delta-\epsilon+1)}t^{\delta-\epsilon}. \end{aligned} \tag{1.3.17}$$

On substitue le resultat (1.3.17), dans la formule (1.3.16), pour obtenir :

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}^\epsilon t^\delta &= \frac{\Gamma(\delta+1)}{\Gamma(n-\epsilon+\delta+1)}\frac{\Gamma(\delta+n-\epsilon+1)}{\Gamma(\delta-\epsilon+1)}t^{\delta-\epsilon} \\ &= \frac{\Gamma(\delta+1)}{\Gamma(\delta-\epsilon+1)}t^{\delta-\epsilon}. \end{aligned}$$

Donc la dérivée fractionnaire au sens de R-L de la fonction $g(t) = t^\delta$ est donnée par :

$$\mathfrak{D}^\epsilon t^\delta = \frac{\Gamma(\delta+1)}{\Gamma(\delta-\epsilon+1)}t^{\delta-\epsilon}. \tag{1.3.18}$$

En particulier, si $\delta = 0$ et $\epsilon > 0$, la dérivée fractionnaire de R-L d'une fonction constante $g(t) = C$ est non nulle, sa valeur est :

$$\mathfrak{D}^\epsilon C = \frac{C}{\Gamma(1-\epsilon)}t^{-\epsilon}.$$

Lemme 1.3.1 *Soient $n-1 < \epsilon < n$ et $n = [\epsilon]+1$, et h une fonction vérifiant*

$$\mathfrak{D}^\epsilon g(t) = 0.$$

alors :

$$g(t) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\epsilon+n)}t^{k+\epsilon-n}, C_k \in \mathbb{R}, n = [\epsilon]+1.$$

En particulier, si $0 < \epsilon < 1$, alors

$$g(t) = ct^{\epsilon-1}, \forall c \in \mathbb{R}.$$

Preuve. Soit $\mathfrak{D}^\epsilon g(t) = 0$, d'aprés (1.3.13) on a :

$$\mathfrak{D}^\epsilon g(t) = \mathfrak{D}^n \mathfrak{J}^{n-\epsilon} h(t) = 0.$$

Et par suite :

$$\mathfrak{J}^{n-\epsilon} g(t) = \sum_{k=1}^{n-1} C_k t^k. \tag{1.3.19}$$

Maintenant, l'application de l'opérateur Ia à l'équation (1.3.19) donne :

$$\mathfrak{J}^n g(t) = \sum_{k=1}^{n-1} C_k \mathfrak{J}^\epsilon t^k.$$

En utilisant la relation (1.3.11) (Voir l'Exemple **1.3.1**), on obtient :

$$\mathfrak{J}^n g(t) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+\epsilon+1)} t^{k+\epsilon}. \tag{1.3.20}$$

L'application de l'opérateur $\mathfrak{D}^n$ à l'équation (1.3.20) donne :

$$g(t) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+\epsilon+1)} \mathfrak{D}^n t^{k+\epsilon}.$$

Enfin, la dérivation classique et l'utilisation de la formule :

$$\mathfrak{D}^n t^\epsilon = \frac{\Gamma(\epsilon+1)}{\Gamma(\epsilon-n+1)} t^{\epsilon-n},$$

donne :

$$g(t) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+\epsilon+1)} \frac{\Gamma(\epsilon+1)}{\Gamma(\epsilon-n+1)} t^{k+\epsilon-n}.$$

Finalement on obtient :

$$g(t) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\epsilon+n)} t^{k+\epsilon-n}.$$

Ceci compléte la preuve du Lemme. □

Proposition 1.3.1 *([12, 22]) Soient $n-1<\epsilon<n$ et $n=[\epsilon]+1$, si $g \in AC^n([0,\mathfrak{T}])$, $\mathfrak{T}>0$, alors la dérivée fractionnaire $\mathfrak{D}^\epsilon g$ existe presque partout sur $[0,\mathfrak{T}]$ de plus, elle est representée sous la forme :*

$$\mathfrak{D}^\epsilon g(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(0)}{\Gamma(k-\epsilon+1)} t^{k-\epsilon} + \frac{1}{\Gamma(n-\epsilon)} \int_0^t (t-s)^{n-\epsilon-1} g^{(n)}(s) ds. \tag{1.3.21}$$

Lemme 1.3.2 *([12, 22])Soient $\epsilon>0$ et $n=[\epsilon]+1$, alors pour tout entier $m \in \mathbb{N}^*$ on a :*

$$\mathfrak{D}^\epsilon g(t) = \mathfrak{D}^m \mathfrak{J}^{m-\epsilon} g(t), m>\epsilon \tag{1.3.22}$$

Preuve. Comme $m>\epsilon$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D}^m \mathfrak{J}^{m-\epsilon} g(t) &= \mathfrak{D}^n \mathfrak{D}^{m-n} \mathfrak{J}^{m-n} \mathfrak{J}^{n-\epsilon} g(t) \\
&= \mathfrak{D}^n \mathfrak{J}^{n-\epsilon} g(t) \\
&= \mathfrak{D}^\epsilon h(t),
\end{aligned}$$

car $\mathfrak{D}^{m-n}\mathfrak{J}^{m-n} = \mathfrak{J}$. □

Théoréme 1.3.5 *([12, 22]) Soient g_1 et g_2 deux fonctions dont les dérivées fractionnaires de R-L existent, pour $c \in \mathbb{R}$ alors, $\mathfrak{D}^{\epsilon}\left(cg_1+g_2\right)$ existe et on a :*

$$\mathfrak{D}^{\epsilon}\left(cg_1+g_2\right)=c\mathfrak{D}^{\epsilon}g_1+\mathfrak{D}^{\epsilon}g_2. \tag{1.3.23}$$

2) En général

$$\mathfrak{D}^{\epsilon}\left(\mathfrak{D}^{\beta}g\right)(t)\neq\mathfrak{D}^{\epsilon+\beta}g(t).$$

Preuve. Soit $g_1,g_2 \in L^1[0,\mathfrak{T}]$, et $c \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathfrak{D}^{\epsilon}\left(cg_1+g_2\right)=\mathfrak{D}^{n}\mathfrak{J}^{n-\epsilon}\left(cg_1+g_2\right)$$

Comme la dérivée $n^{ième}$ et l'intégrale sont linéaires alors :

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}^{\epsilon}\left(cg_1+g_2\right) &= \mathfrak{D}^{n}\left(c\mathfrak{J}^{n-\epsilon}g_1+\mathfrak{J}^{n-\epsilon}g_2\right)\\ &= c\mathfrak{D}^{n}\mathfrak{J}^{n-\epsilon}g_1+\mathfrak{D}^{n}\mathfrak{J}^{n-\epsilon}g_2\\ &= c\mathfrak{D}^{\epsilon}g_1+\mathfrak{D}^{\epsilon}g_2.\end{aligned}$$

2)

$$\mathfrak{D}^{\epsilon}\left(\mathfrak{D}^{\beta}g\right)(t)=\mathfrak{D}^{\epsilon+\beta}g(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\mathfrak{D}^{\beta-k}g(0)}{\Gamma\left(1-k-\epsilon\right)}t^{-k-\epsilon},$$

et

$$\mathfrak{D}^{\beta}\left(\mathfrak{D}^{\epsilon}g\right)(t)=\mathfrak{D}^{\epsilon+\beta}g(t)-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\mathfrak{D}^{\epsilon-k}g(0)}{\Gamma\left(1-k-\beta\right)}t^{-k-\beta}.$$

Par suite les deux opérateurs de dérivations fractionnaires ne commutent que si $\epsilon=\beta$ et $\mathfrak{D}^{\epsilon-k}g(0)=0$, pour tout $k=1,2,...,m$ et $\mathfrak{D}^{\beta-k}g(0)$, pour tout $k=1,2,...,n$. Ce qui compléte la preuve. □

Lemme 1.3.3 *([12, 22]) Soient $\epsilon>0$ et $g \in L^1[0,\mathfrak{T}]$, alors l'égalité :*

$$\mathfrak{J}^{\epsilon}\mathfrak{D}^{\epsilon}g(t)=g(t), \tag{1.3.24}$$

est vraie pour presque tout $t \in [0,\mathfrak{T}]$.

Preuve. Par définition on a :

$$\mathfrak{J}^{\epsilon}\mathfrak{D}^{\epsilon}g(t)=\mathfrak{D}^{n}\mathfrak{J}^{n-\epsilon}\mathfrak{J}^{\epsilon}g(t)=\mathfrak{D}^{n}\mathfrak{J}^{n}g(t)=g(t).$$

□

Théoréme 1.3.6 *([12, 22])Soient $\epsilon, \beta > 0$ et $n-1 \leq \epsilon < n, m-1 \leq \beta < m$ tel que $(n, m \in \mathbb{N}^*$) alors :*
(1) Si $\epsilon > \beta > 0$, alors pour $g \in L^1[0, \mathfrak{T}]$ l'égalité :

$$\mathfrak{D}^{\beta}\left(\mathfrak{J}^{\epsilon} g\left(t\right)\right) = \mathfrak{J}^{\epsilon-\beta} g\left(t\right). \tag{1.3.25}$$

est presque partout sur $[0, \mathfrak{T}]$.
(2) S'il existe une fonction $\varphi \in L^1[0, \mathfrak{T}]$ tel que $g = \mathfrak{J}^{\epsilon}\varphi\left(t\right)$

$$\mathfrak{D}^{\epsilon}\left(\mathfrak{J}^{\epsilon} g\left(t\right)\right) = g\left(t\right). \tag{1.3.26}$$

presque partout sur $t \in [0, \mathfrak{T}]$.
(3) Pour $\epsilon > 0, k \in \mathbb{N}^*$. Si les dérivées fractionnaires $\mathfrak{D}^{\epsilon} g$ et $\mathfrak{D}^{k+\epsilon} g$ existes, alors :

$$\mathfrak{D}^{k}\left(\mathfrak{D}^{\epsilon} g\left(t\right)\right) = \mathfrak{D}^{k+\epsilon} g\left(t\right). \tag{1.3.27}$$

(4) Si $\beta \geq \epsilon >$ 0 et la dérivée fractionnaire $\mathfrak{D}^{\epsilon-\beta} g$ existe, alors :

$$\mathfrak{D}^{\beta}\left(\mathfrak{J}^{\epsilon} g\left(t\right)\right) = \mathfrak{D}^{\beta-\epsilon} g\left(t\right). \tag{1.3.28}$$

Preuve. Par définition on obtient :
(1) Si $\epsilon > \beta > 0$, alors $n \geq m$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D}^{\beta}\left(\mathfrak{J}^{\epsilon} g\left(t\right)\right) &= \mathfrak{D}^{n}\mathfrak{J}^{n-\beta}\left(\mathfrak{J}^{\epsilon} g\left(t\right)\right) \\
&= \mathfrak{D}^{n}\left(\mathfrak{J}^{n+\epsilon-\beta} g\left(t\right)\right) \\
&= \mathfrak{D}^{n}\mathfrak{J}^{n}\left(\mathfrak{J}^{\epsilon-\beta} g\left(t\right)\right) \\
&= \mathfrak{J}^{\epsilon-\beta} g\left(t\right).
\end{aligned}$$

est presque partout sur $[0, \mathfrak{T}]$.
(2) Par la relation 1.3.24, on obtient :

$$\mathfrak{J}^{\epsilon}\mathfrak{D}^{\epsilon} g\left(t\right) = \mathfrak{J}^{\epsilon}(\mathfrak{D}^{\epsilon}\mathfrak{J}^{\epsilon}\varphi\left(t\right)) = \mathfrak{J}^{\epsilon}(\varphi\left(t\right)) = g\left(t\right).$$

□

Théoréme 1.3.7 *(3) On a :*

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D}^{k}\left(\mathfrak{D}^{\epsilon} g\left(t\right)\right) &= \mathfrak{D}^{k}\left(\mathfrak{D}^{n}\mathfrak{J}^{n-\epsilon} g\left(t\right)\right) \\
&= \mathfrak{D}^{k+n}\mathfrak{J}^{n-\epsilon+k-k} g\left(t\right) \\
&= \mathfrak{D}^{k+n}\mathfrak{J}^{k+n-(\epsilon+k)} g\left(t\right) \\
&= \mathfrak{D}^{k+\epsilon} g\left(t\right),
\end{aligned}$$

d'où la résultat.
(4) On a :

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}^{\beta}\left(\mathfrak{J}^{\epsilon}g\left(t\right)\right) &= \mathfrak{D}^{m}\mathfrak{D}^{m-\beta}\left(\mathfrak{J}^{\epsilon}g\left(t\right)\right)\\ &= \mathfrak{D}^{m}\mathfrak{J}^{m-(\beta-\epsilon)}g\left(t\right)\\ &= \mathfrak{D}^{\beta-\epsilon}g\left(t\right),\end{aligned}$$

existe pour $i-1<\beta-\epsilon<i$ *et* $i\leq m$.

1.3.3 L'opérateur de Caputo

Dans cette partie, nous donnons la définition de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo ainsi que quelques propriétés essentielles.
Bien que la dérivation fractionnaire de Riemann-Liouville ait joué un rôle important dans le développement du calcul fractionnaire, plusieurs auteurs, dont Caputo (1967 – 1969), ont réalisé que cette définition devait être révisée [2], car des problémes de viscoélasticité, de mécanique des solides, et la rhéologie nécessitent des conditions initiales interprétables physiquement par des dérivées classiques telles que $u(0), u'(0)$, etc, ce qui n'est pas le cas.
Malgré le fait que les problémes de valeur initiale avec de telles circonstances de départ peuvent être traités analytiquement, M. Caputo a présenté la réponse à ce probléme dans sa définition, qu'il a adoptée dans le cadre de la théorie de la viscoélasticité avec F. Mainardi [3].
Dans cette partie, nous donnons la définition de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo ainsi que quelques propriétés essentielles.

Définition 1.3.6 *([12]) La dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre* $\epsilon\in\mathbb{C}(Re\epsilon>0)$ *d'une fonction* g *sur* $[0,\mathfrak{T}]$ *est définie par l'intermédiaire de la dérivée fractionnaire de R-L par :*

$$^{c}\mathfrak{D}^{\epsilon}g\left(t\right)=\mathfrak{D}^{\epsilon}\left(g\left(t\right)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{g^{(k)}(0)}{k!}t^{k}\right) \tag{1.3.29}$$

où

$$n=[Re\epsilon]+1 \textit{ pour } \epsilon\notin\mathbb{N},\qquad n=\epsilon \textit{ pour } \epsilon\in\mathbb{N}. \tag{1.3.30}$$

Si $\epsilon=0$, *alors :*

$$^{c}\mathfrak{D}^{0}g\left(t\right)=g(t).$$

En particulier, lorsque $0<Re\epsilon<1$, *la relation (1.3.29) prend la forme :*

$$^{c}\mathfrak{D}^{\epsilon}g\left(t\right)=\mathfrak{D}^{\epsilon}\left(g\left(t\right)-g(0)\right).$$

La dérivée fractionnaire de Caputo (1.3.29) est définie pour les fonctions g pour lesquelles la dérivée fractionnaire de R-L existe en particulier, elle est définie pour les fonctions $g \in AC^n([0,\mathfrak{T}])$. On a le théoréme suivant :

Théoréme 1.3.8 *([12]) Soit $Re\epsilon > 0$ et soit n donné par (1.3.30). Si $g \in AC^n([0,\mathfrak{T}])$, alors la dérivée fractionnaire de Caputo ${}^c\mathfrak{D}^\epsilon g(t)$ existe presque partout sur $[0,\mathfrak{T}]$.*
1) Si $\epsilon \notin \mathbb{N}$, alors ${}^c\mathfrak{D}^\epsilon g(t)$ est donnée par

$$\begin{aligned} {}^c\mathfrak{D}^\epsilon g(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\epsilon)} \int_0^t (t-x)^{n-\epsilon-1} g^{(n)}(x)\,dx, t>0 \\ &= \mathfrak{J}^{n-\epsilon} g^{(n)}(t). \end{aligned} \tag{1.3.31}$$

En particulier, lorsque $0 < Re\epsilon < 1$ et $g \in AC^n([0,\mathfrak{T}])$, alors :

$$\begin{aligned} {}^c\mathfrak{D}^\epsilon g(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\epsilon)} \int_0^t (t-x)^{-\epsilon} g'(x)\,dx, t>0 \\ &= \mathfrak{J}^{1-\epsilon} g'(t). \end{aligned} \tag{1.3.32}$$

2) Si $\epsilon \in \mathbb{N}$, alors :

$${}^c\mathfrak{D}^\epsilon g(t) = g^{(n)}(t).$$

Preuve. D'aprés les Définitions 1.3.6 et 1.3.5 on a :

$$\begin{aligned} {}^c\mathfrak{D}^\epsilon g(t) &= \mathfrak{D}^\epsilon \left(g(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} t^k \right) \\ &= \mathfrak{D}^n \mathfrak{J}^{n-\epsilon} \left(g(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} t^k \right). \end{aligned}$$

Par

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}^\epsilon g(t) &= \mathfrak{D}^n \mathfrak{J}^{n-\epsilon} g(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\epsilon)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_0^t (t-s)^{n-\epsilon-1} g(s)ds, t>0. \end{aligned}$$

On pose :

$$G(t) = \mathfrak{J}^{n-\epsilon} \left(g(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} t^k \right).$$

D'aprés (1.3.7), on a :

$$G(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\epsilon)} \int_0^t (t-s)^{n-\epsilon-1} \left(g(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} s^k \right) ds.$$

En intégrant par partie, on aura :

$$\begin{aligned}
G(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\epsilon)} \int_0^t (t-s)^{n-\epsilon-1} \left(g(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} s^k \right) ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\epsilon)} \left\{ -\frac{(t-s)^{n-\epsilon}}{(n-\epsilon)} \left(g(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} s^k \right) \Bigg|_{s=0}^{s=t} \right. \\
&\quad \left. + \int_0^t \frac{(t-s)^{n-\epsilon}}{(n-\epsilon)} \left(g(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} s^k \right)' ds \right\} \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\epsilon+1)} \int_0^t (t-s)^{n-\epsilon+1-1} \left(g(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} s^k \right)' ds \\
&= \mathfrak{J}^{n-\epsilon+1} \left(g(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} t^k \right)'.
\end{aligned}$$

En répétant ce procédé n fois, on trouve :

$$\begin{aligned}
G(t) &= \mathfrak{J}^{n-\epsilon+n} \left(g(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} t^k \right)^{(n)} \\
&= \mathfrak{J}^{n} \mathfrak{J}^{n-\epsilon} \left(g(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} t^k \right)^{(n)}.
\end{aligned}$$

Or $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} t^k$ est un polynôme de degré $n-1$, par conséquent

$$G(t) = \mathfrak{J}^{n} \mathfrak{J}^{n-\epsilon} g^{(n)}(t).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
{}^{c}\mathfrak{D}^{\epsilon} g(t) &= \mathfrak{D}^{n} G(t) \\
&= \mathfrak{D}^{n} \mathfrak{J}^{n} \mathfrak{J}^{n-\epsilon} g^{(n)}(t) \\
&= \mathfrak{J}^{n-\epsilon} g^{(n)}(t) \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\epsilon)} \int_0^t (t-x)^{n-\epsilon-1} g^{(n)}(x)\, dx.
\end{aligned}$$

Ceci compléte la preuve. □

Théoréme 1.3.9 *([12]) Soit $Re\epsilon > 0$ et soit n donnée par (1.3.30) et $g \in C^n([0, \mathfrak{T}])$. Alors la dérivée fractionnaire de Caputo ${}^{c}\mathfrak{D}^{\epsilon} g(t)$ est continue sur $[0, \mathfrak{T}], \mathfrak{T} > 0$.*
1) Si $\epsilon \notin \mathbb{N}$, alors ${}^{c}\mathfrak{D}^{\epsilon} g(t)$ est donnée par (2.3.7). En particulier, elle prend la forme (1.3.32) pour $0 < \epsilon < 1$.
2) Si $\epsilon \in \mathbb{N}$, alors :

$${}^{c}\mathfrak{D}^{\epsilon} g(t) = g^{(n)}(t).$$

Définition 1.3.7 *([12]) La dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $\epsilon \in \mathbb{C}(Re\epsilon > 0)$ sur $[0, \mathfrak{T}]$ d'une fonction g est donnée par :*

$$^{c}\mathfrak{D}^{\epsilon}g\left(t\right) = \mathfrak{J}^{n-\epsilon}g^{(n)}\left(t\right) = \frac{1}{\Gamma\left(n-\epsilon\right)}\int_{0}^{t}\left(t-x\right)^{n-\epsilon-1}g^{(n)}\left(x\right)dx, t>0, \tag{1.3.33}$$

avec $n-1 < \epsilon \leq n, n \in \mathbb{N}^{*}$.

Exemple 1.3.3 *Soit $g(t) = t^{\gamma}$ avec $\gamma > 0$, pour $(0 < \epsilon \leq 1)$ et utilisant le changement de variable (1.3.10) on a :*

$$\begin{aligned} ^{c}\mathfrak{D}^{\epsilon}g\left(t\right) &= \mathfrak{J}^{1-\epsilon}g'\left(x\right) = \gamma\mathfrak{J}^{1-\epsilon}\left(x-a\right)^{\gamma-1} \\ &= \frac{\gamma}{\Gamma\left(1-\epsilon\right)}\int_{a}^{t}\left(t-s\right)^{-\epsilon}s^{\gamma-1}ds \\ &= \frac{\gamma t^{-\epsilon+\gamma}}{\Gamma\left(1-\epsilon\right)}\int_{0}^{1}s^{\gamma-1}\left(1-s\right)^{-\epsilon}ds \\ &= \frac{t^{-\epsilon+\gamma}}{\Gamma\left(1-\epsilon\right)}\beta\left(\gamma, 1-\epsilon\right) \\ &= \frac{\Gamma\left(\gamma+1\right)}{\Gamma\left(1-\epsilon+\gamma\right)}t^{-\epsilon+\gamma}. \end{aligned}$$

Donc la dérivée fractionnaie au sens de Caputo de la fonction $g(t) = t^{\gamma}$ est donnée par :

$$^{c}\mathfrak{D}^{\epsilon}g\left(t\right) = \frac{\Gamma\left(\gamma+1\right)}{\Gamma\left(1-\epsilon+\gamma\right)}t^{-\epsilon+\gamma}. \tag{1.3.34}$$

En particulier, l'utilisation de la formule (1.3.29) ou (2.3.7) pour calculer la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $\epsilon > 0$ d'une constante $C \in \mathbb{R}$ exprime que cette dérivée est nulle c'est-à-dire :

$$^{c}\mathfrak{D}^{\epsilon}C = 0.$$

Corollaire 1.3.1 *([12, 22]) Soient $\epsilon \geq 0$ et $n = [\epsilon]+1$, si $^{c}\mathfrak{D}^{\epsilon}g$, $\mathfrak{D}^{\epsilon}g$ et existents, on suppose que $\mathfrak{D}^{k}g(0) = 0$ pour tout $k \in \{0, 1, ...n-1\}$ alors :*

$$^{c}\mathfrak{D}^{\epsilon}g\left(t\right) = \mathfrak{D}^{\epsilon}g\left(t\right) \tag{1.3.35}$$

Théoréme 1.3.10 *([12, 22]) Si $g \in C[0, \mathfrak{T}]$ et si $\epsilon > 0 (n-1 < \epsilon \leq n)$, alors :*

$$^{c}\mathfrak{D}^{\epsilon}\mathfrak{J}^{\epsilon}g\left(t\right) = g\left(t\right). \tag{1.3.36}$$

Preuve. Soit $g = \mathfrak{J}^{\epsilon}g$ et par le corollaire precédent $(\mathfrak{D}^{k}g\left(a\right) = 0$, pour $\kappa \in \{0, 1, ..., n-1\})$ et d'aprés l'égalité (1.3.35), on a :

$$^{c}\mathfrak{D}^{\epsilon}\mathfrak{J}^{\epsilon}g =^{c}\mathfrak{D}^{\epsilon}g = \mathfrak{D}^{\epsilon}g =^{c}\mathfrak{D}^{\epsilon}\mathfrak{J}^{\epsilon}g = g.$$

$\square$

Proposition 1.3.2 *([12, 22])On suppose que $n-1 < Re(\epsilon) < n$, $m, n \in \mathbb{N}$ et soit la fonction g telle que ${}^{c}\mathfrak{D}^{\epsilon}g$ existe, alors :*

$$ {}^{c}\mathfrak{D}^{\epsilon}\left(\mathfrak{D}^{m}g\left(t\right)\right) = {}^{c}\mathfrak{D}^{\epsilon+m}g\left(t\right) \neq \mathfrak{D}^{m}\left({}^{c}\mathfrak{D}^{\epsilon}g\left(t\right)\right); $$

Théoréme 1.3.11 *([12, 22]) Soient g_1 et g_2 deux fonctions définies sur $[0, \mathfrak{T}]$, telles que ${}^{c}\mathfrak{D}^{\epsilon}g_1$ et ${}^{c}\mathfrak{D}^{\epsilon}g_2$ existent presque partout. De plus, soit $c \in \mathbb{R}$ alors, ${}^{c}\mathfrak{D}^{\epsilon}\left(g_1 + cg_2\right)$ existe presque partout sur $[0, \mathfrak{T}]$, et on a :*

$$ {}^{c}\mathfrak{D}^{\epsilon}\left(g_1 + cg_2\right) = {}^{c}\mathfrak{D}^{\epsilon}g_1 + c\left({}^{c}\mathfrak{D}^{\epsilon}g_2\right). $$

Preuve. On a d'aprés (2.3.7)

$$ {}^{c}\mathfrak{D}^{\epsilon}\left(g_1 + cg_2\right) = \mathfrak{J}^{n-\epsilon}\mathfrak{D}^{n}\left(g_1 + cg_2\right). $$

Comme la dérivée $n^{ième}$ et l'intégrale sont linéaires alors :

$$ \begin{aligned} {}^{c}\mathfrak{D}^{\epsilon}\left(g_1 + cg_2\right) &= \mathfrak{J}^{n-\epsilon}\mathfrak{D}^{n}\left(g_1 + cg_2\right) \\ &= \mathfrak{J}^{n-\epsilon}\left(\mathfrak{D}^{n}g_1 + c\mathfrak{D}^{n}g_2\right) \\ &= \mathfrak{J}^{n-\epsilon}\mathfrak{D}^{n}G_1 + c\mathfrak{J}^{n-\epsilon}\mathfrak{D}^{n}g_2 \\ &= {}^{c}\mathfrak{D}^{\epsilon}g_1 + c\left({}^{c}\mathfrak{D}^{\epsilon}g_2\right). \end{aligned} $$

D'où le résultat. □

1.3.4 Composition avec l'opérateur d'intégration fractionnaire

L'opérateur de dérivée fractionnaire au sens de Caputo est un inverse à gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire de R-L mais pas un inverse à droite car :
Si g est une fonction continue sur $[0, \mathfrak{T}]$ on a :

$$ {}^{c}\mathfrak{D}^{\epsilon}\left(\mathfrak{J}^{\epsilon}g\left(t\right)\right) = g(t), \mathfrak{J}^{\epsilon}\left({}^{c}\mathfrak{D}^{\epsilon}g\left(t\right)\right) = g(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{g^{(k)}(0)}{k!}t^{k}. \tag{1.3.37} $$

L'avantage principal de l'approche Caputo et que les conditions initiales des équations différentielles fractionnaires avec dérivées de Caputo acceptent la même forme comme pour les équations différentielles d'ordre entier.

1.4 À propos des théorèmes du point fixe

Ce théoréme consiste à prouver l'existence et l'unicité d'un point fixe pour un certain opérateur. On s'intéresse au théoréme du point fixe de Banach qui assure l'existence et l'unicité. Le théoréme de Schauder n'assure que l'existence seulement. On présente différents théorémes d'existence et d'unicité basés sur les théorémes classiques qui affirment l'existence et l'unicité des points fixes de certains opérateurs. On utilisera des définitions et des notions connues de l'analyse fonctionnelle.

Définition 1.4.1 *(**Application contractante**) ([8]) Soit $(\mathbb{X}, \|.\|_{\mathbb{X}})$ un espace vectoriel normé. Une application φ de $\mathbb{X}$ dans $\mathbb{X}$ est appelée une contraction, s'il existe un nombre positif $\mathcal{K} \in [0,1[$, tel que pour tout $f_1, f_2 \in \mathbb{X}$, on a :*

$$\|\varphi(f_1) - \varphi(f_2)\|_{\mathbb{X}} < \mathcal{K} \|f_1 - f_2\|_{\mathbb{X}} .$$

Définition 1.4.2 *Soit $\mathfrak{A} : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$. On dit que $u \in \mathbb{E}$ est un point fixe de $\mathfrak{A}$ si :*

$$\mathfrak{A}u = u.$$

Définition 1.4.3 *([12]) Soit $\mathbb{E}$ un espace de Banach, et $\mathfrak{A} : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ une application continue, on dit que $\mathfrak{A}$ est contractante si $\mathfrak{A}$ est lipschitzienne de rapport $k < 1$:*

$$\exists k < 1, \forall u, v \in \mathbb{E} : \|\mathfrak{A}(u) - \mathfrak{A}(v)\|_{\mathbb{E}} \leq k \|u - v\|_{\mathbb{E}} .$$

Théoréme 1.4.1 *(Théoréme du point fixe de Banach [6]) Soit $\mathbb{F}$ un ensemble fermé de $\mathbb{E}$ et $\mathfrak{A} : \mathbb{F} \to \mathbb{E}$ satisfait*

$$|\mathfrak{A}u - \mathfrak{A}v| \leq k |u - v| , \text{ pour tout } k \in (0,1) , \text{et pour } u, v \in \mathbb{F}.$$

Alors $\mathfrak{A}$ admet un point fixe dans $\mathbb{F}$.

Théoréme 1.4.2 *([12]) Soit $\mathbb{E}$ un espace de Banach, et $\mathfrak{A} : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ un opérateur contractant alors $\mathfrak{A}$ admet un point fixe unique, c'est-à-dire $\exists! u^* \in \mathbb{E}$ tel que :*

$$\mathfrak{A}u^* = u^*.$$

De plus, Si $\mathfrak{A}^m, m \in \mathbb{N}$ est une suite d'opérateur définie par $\mathfrak{A}^1 = \mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}^m = \mathfrak{A}\mathfrak{A}^{m-1}, m > 1$, alors pour tout $u_0 \in \mathbb{E}$ la suite $\{\mathfrak{A}^m u_0\}_{m=0}^{\infty}$ converge vers le point fixe u^*.

$$\lim_{m \to \infty} \|\mathfrak{A}^m u_0 - u^*\| = 0.$$

Théoréme 1.4.3 *(Théoréme du point fixe de Krasnoselskii [13]) Soit* $\mathbb{M}$ *un sous-ensemble fermé, borné, convexe et non vide d'un espace de Banach* $\mathbb{E}$*. Soient* $\mathfrak{A} : \mathfrak{S} \to \mathbb{E}, \mathfrak{B} : \mathfrak{S} \to \mathbb{E}$ *des opérateurs tels que*
(i) $\mathfrak{A}u + \mathfrak{B}v \in \mathfrak{S}$ *où* $u, v \in \mathfrak{S}$*,*
(ii) $\mathfrak{A}$ *est compact et continu, et*
(iii) $\mathfrak{B}$ *est une application de contraction. Alors il existe* $w \in \mathfrak{S}$ *tel que* $w = \mathfrak{A}w + \mathfrak{B}w$*.*

Théoréme 1.4.4 *([11]) Soient* $\mathbb{E}$ *un espace de Banach,et* $\mathfrak{A} : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ *un opérateur contractant. Alors* $\mathfrak{A}$ *admet un point fixe unique. i.e* $\exists! u^* \in \mathbb{E}$ *tel que* $\mathfrak{A}u^* = u^*$*. De plus, si* $u_0 \in E$ *et* $u_n = \mathfrak{A}u_{n-1}$*, alors :*

$$u = \lim_{n\to\infty} u_n.$$

Preuve. Soit k est une constante de contraction $\mathfrak{A}$,(nous construirons explicitement un ordre convergant au point fixe). Soit u_n un élement fixé de $\mathbb{E}$. On consid re $\{u_n\}$ dans $\mathbb{E}$ définie par :

$$u_n = \mathfrak{A}u_{n-1} \forall n \geq 1$$

Puisque $\mathfrak{A}$ est un opérateur contractant, on obtient

$$\|u_n - u_{n+1}\| = \|\mathfrak{A}u_{n-1} - \mathcal{A}u_n\| \leq k \|u_{n-1} - u_n\| \, \forall n \geq 1$$

Ainsi,

$$\|u_n - u_{n-1}\| \leq k^n \|u_0 - u_1\| \, \forall n \geq 1$$

Par conséquent,pour tout $m > n$ on a :

$$\|u_n - u_m\| \leq (k^n + k^{n+1} + \cdots + k^{m-1}) \|u_0 - u_1\| \leq \frac{k^n}{1-k} \|u_0 - u_1\|.$$

On déduit que $\{u_n\}$ est une suite de cauchy dans $\mathbb{E}$. Soit $u_n \to u, u \in \mathbb{E}$,on utilise la continuité de $\mathfrak{A}$, on a :

$$u = \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} u_{n-1} = \mathfrak{A}u$$

Pour montrer l'unicité un point fixe dans $\mathbb{E}$, soit u, v deux points fixes de $\mathfrak{A}$. Alors

$$\|u - v\| = \|\mathfrak{A}(u) - \mathfrak{A}(v)\| \leq k |u - v|.$$

comme $0 < k < 1$ on a donc $u = v$. □

Exemple 1.4.1 *Considérer l'espace métrique usuel* $(\mathbb{R}, \delta)$*, on définit*

$$\mathfrak{A}(u) = \frac{u}{a} + b \text{ pour tout } u \in \mathbb{R}.$$

Puisque, $\mathfrak{A}$ *est une contraction sur* $\mathbb{R}$ *si* $a > 1$ *et la solution de l'equation* $(u - \mathfrak{A}(u) = 0)$ *est* $u = \frac{ab}{a-1}$*.*

Chapitre 2

Existence et unicité de solutions d'équation différentielles hybrides avec dérivée fractionnaire proportionnelle séquentielle et avec des conditions hybrides non locales.

2.1 Introduction :

De nombreux auteurs ont étudié l'existence de solutions de problèmes de valeurs limites fractionnaires dans diverses conditions aux limites et par différentes approches. Nous renvoyons les lecteurs aux articles [7, 12, 19, 26, 24, 28] et les références qui y figurent. Ces dernières années, les équations différentielles fractionnaires hybrides ont suscité beaucoup d'intérêt et d'attention de la part de plusieurs chercheurs. Pour certains développements sur les résultats d'existence d'équations différentielles fractionnaires hybrides, nous nous référons à [15, 20, 25, 27] et aux références qui y sont contenues.

Ce mémoire traite l'existence et l'unicitéde solutions pour le problème dd'équations différentielles hybrides avec des conditions aux limites integro multi-points non locales en utilisant la dérivée fractionnaire proportionnelle. Pour $t \in [0,1]$, nous étudions le problème suivant :

$$\begin{cases} {}_0\mathfrak{D}^{\alpha,\rho,\varphi}\left[{}_0\mathfrak{D}^{\beta,\rho,\varphi}\left(\frac{u(t)-({}_0\mathfrak{J}^{\sigma,\rho,\varphi}\mathbb{F})(t,u(t))}{\mathbb{G}(t,u(t))}\right)\right] = \mathbb{H}(t,u(t)),\ t \in J = [0,1]\,, \\ {}_0\mathfrak{J}^{1-\alpha,\rho,\varphi}\left({}_0\mathfrak{D}^{\beta,\rho,\varphi}\left(\frac{u(t)-({}_0\mathfrak{J}^{\sigma,\rho,\varphi}\mathbb{F})(t,u(t))}{\mathbb{G}(t,u(t))}\right)\right)\Big|_{t=0^+} = \lambda, \\ {}_0\mathfrak{J}^{2-\beta,\rho,\varphi}\left(\frac{u(t)-({}_0\mathfrak{J}^{\sigma,\rho,\varphi}\mathbb{F})(t,u(t))}{\mathbb{G}(t,u(t))}\right)\Big|_{t=0^+} = 0, \\ {}_0\mathfrak{J}^{1-\beta,\rho,\varphi}\left(\frac{u(t)-({}_0\mathfrak{J}^{\sigma,\rho,\varphi}\mathbb{F})(t,u(t))}{\mathbb{G}(t,u(t))}\right)\Big|_{t=0^+} = \left({}_0\mathfrak{J}^{\sigma,\rho,\varphi}u\right)(\zeta)\,,\ \zeta \in \,]0,1[\,. \end{cases} \tag{HP}$$

Ici, nous prenons $\rho \in (0,1]$, ${}_0\mathfrak{D}^{\alpha,\rho,\varphi}$, ${}_0\mathfrak{D}^{\beta,\rho,\varphi}$ comme les dérivées fractionnaires proportionnelles d'ordre, $0 < \alpha < 1 < \beta < 2$, et ${}_0\mathfrak{J}^{1-\alpha,\rho,\varphi}$, ${}_0\mathfrak{J}^{1-\beta,\rho,\varphi}$, ${}_0\mathfrak{J}^{2-\beta,\rho,\varphi}$, ${}_0\mathfrak{J}^{\sigma,\rho,\varphi}$ sont les intégrales fractionnaires proportionnelles à gauche d'ordre $(1-\alpha)$, $(1-\beta)$, $(2-\beta)$ et σ respectivement, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\varphi : J \to \mathbb{R}$ est une fonction telle que $\varphi'(t) > 0$. Pour tout $t \in [0,1]$, $\mathbb{F}, \mathbb{H} : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\mathbb{G} : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ sont des fonctions données satisfaisant certaines hypothèses qui seront précisées ultérieurement.

2.2 Préliminaires

Soit $\mathcal{C} = C(J,\mathbb{R})$ l'espace de Banach de tous les fonctions continus de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|u\|_{\mathcal{C}} = \sup_{t\in[0,1]} u(t)$.

Nous introduisons quelques notations et définitions de la dérivée fractionnaire proportionnelle, voir [7, 9, 10]. Soit $\varphi : J \to \mathbb{R}$ une fonction croissante avec $\varphi'(t) \neq 0$ pour tout $t, s \in J$ $(t > s)$, on pose

$$\varphi(t,s) = (\varphi(t) - \varphi(s)).$$

Définition 2.2.1 *[9] Prenons $\rho \in (0,1], \alpha \in \mathbb{C}$, $Re(\alpha) > 0$, $\varphi \in C^1[a,b]$, $\varphi'(t) > 0$. Les intégrales fractionnaires gauche et droite de la fonction $x \in L^1[a,b]$ par rapport à une autre fonction φ sont définies par*

$$ {}_a\mathfrak{J}^{\alpha,\rho,\varphi}x(t) = \frac{1}{\rho^{\alpha}\Gamma(\alpha)} \int_a^t e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(t,s)} \varphi(t,s)^{\alpha-1}\varphi'(s)x(s)ds, \tag{2.2.1}$$

$$ \mathfrak{J}_b^{\alpha,\rho,\varphi}x(t) = \frac{1}{\rho^{\alpha}\Gamma(\alpha)} \int_t^b e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(s,t)} \varphi(s,t^{\alpha-1}\varphi'(s)x(s)ds, \tag{2.2.2}$$

respectivement.

Définition 2.2.2 *[9] Prenons $\rho \in (0,1], \alpha \in \mathbb{C}$, $Re(\alpha) > 0$, $\varphi \in C^1[a,b]$, $\varphi'(t) > 0$. La dérivée fractionnaire gauche de la fonction $x \in C^n[a,b]$ par rapport à une autre fonction φ sont définies par*

$$\begin{aligned} {}_a\mathfrak{D}^{\alpha,\rho,\varphi}x(t) &= \mathfrak{D}^{n,\rho,\varphi}\left({}_a\mathfrak{J}^{n-\alpha,\rho,\varphi}x\right)(t) \\ &= \frac{\mathfrak{D}^{n,\rho,\varphi}}{\rho^{n-\alpha}\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(t,s)} \varphi(t,s)^{n-\alpha-1}\varphi'(s)x(s)ds, \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

et la dérivée fractionnaire droite de x par rapport à φ est définie par

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_b^{\alpha,\rho,\varphi}x(t) &=_* \mathfrak{D}^{n,\rho,\varphi}\mathfrak{J}_b^{n-\alpha,\rho,\varphi}x(t) \\ &= \frac{{}_*\mathfrak{D}^{n,\rho,\varphi}}{\rho^{n-\alpha}\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(s,t)} \varphi(s,t)^{n-\alpha-1}\varphi'(s)x(s)ds, \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

où $n=[Re\,(\alpha)]+1, \mathfrak{D}^{n,\rho,\varphi}=\underbrace{\mathfrak{D}^{n,\rho,\varphi}\cdots\mathfrak{D}^{n,\rho,\varphi}}_{n\ fois}$ *et*

$$\begin{aligned} {}_{*}\mathfrak{D}^{\rho,\varphi}x(t) &= (1-\rho)\,x(t)-\rho\frac{x'(t)}{\varphi'(t)}, \\ {}_{*}\mathfrak{D}^{n,\rho,\varphi} &= \underbrace{{}_{*}\mathfrak{D}^{n,\rho,\varphi}\cdots{}_{*}\mathfrak{D}^{n,\rho,\varphi}}_{n\ fois}. \end{aligned}$$

Lemme 2.2.1 *[9] Si* $\rho\in(0,1], \alpha,\beta\in\mathbb{C},\ Re\,(\alpha)>0,\ Re\,(\beta)>0,$ *alors pour* $\varphi\in C^1[a,b]$, *et* $\varphi'(t)>0$, *on a*

$$ {}_{a}\mathfrak{J}^{\alpha,\rho,\varphi}\left({}_{a}\mathfrak{J}^{\beta,\rho,\varphi}x\right)(t)={}_{a}\mathfrak{J}^{\beta,\rho,\varphi}\left({}_{a}\mathfrak{J}^{\alpha,\rho,\varphi}x\right)(t)=\left({}_{a}\mathfrak{J}^{\alpha+\beta,\rho,\varphi}x\right)(t), \tag{2.2.5}$$

$$\mathfrak{J}_{b}^{\alpha,\rho,\varphi}\left(\mathfrak{J}_{b}^{\beta,\rho,\varphi}x\right)(t)=\mathfrak{J}_{b}^{\beta,\rho,\varphi}\left(\mathfrak{J}_{b}^{\alpha,\rho,\varphi}x\right)(t)=\left(\mathfrak{J}_{b}^{\alpha+\beta,\rho,\varphi}x\right)(t), \tag{2.2.6}$$

Lemme 2.2.2 *[9] Si* $\rho\in(0,1], \alpha\in\mathbb{C}, Re\,(\alpha)>0,$ *et* $n=[Re\,(\alpha)]+1$, *alors pour* $\varphi\in C^1[a,b]$, $\varphi'(t)>0$, *on a*

$$ {}_{a}\mathfrak{J}^{\alpha,\rho,\varphi}\left({}_{a}\mathfrak{D}^{\alpha,\rho,\varphi}x\right)(t)=x(t), \tag{2.2.7}$$

$$\mathfrak{J}_{b}^{\alpha,\rho,\varphi}\left(\mathfrak{D}_{b}^{\alpha,\rho,\varphi}x\right)(t)=x(t). \tag{2.2.8}$$

Lemme 2.2.3 *[10] Soient* $\alpha\in\mathbb{C},\ Re\,(\alpha)>0, \rho\in(0,1],\ n=-[-Re\,(\alpha)],\ x\in L^1[a,b]$ *et* $\mathfrak{J}_{a^+}^{\alpha,\rho,\varphi}x(t)\in AC^n[a,b]$. *Alors*

$$ {}_{a}\mathfrak{J}^{\alpha,\rho,\varphi}\left({}_{a}\mathfrak{D}^{\alpha,\rho,\varphi}x\right)(t)=x(t)-e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(t,a)}\sum_{i=1}^{n}\left({}_{a}\mathfrak{J}^{i-\alpha,\rho,\varphi}x\right)\left(a^+\right)\frac{\varphi(t,a)^{\alpha-i}}{\rho^{\alpha-i}\Gamma\left(\alpha+1-i\right)}. \tag{2.2.9}$$

Dans un cas particulier, pour $0<\alpha<1$, *on a*

$$ {}_{a}\mathfrak{J}^{\alpha,\rho,\varphi}\left({}_{a}\mathfrak{D}^{\alpha,\rho,\varphi}x\right)(t)=x(t)-\frac{e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(t,a)}\varphi(t,a)^{\alpha-1}}{\rho^{\alpha-1}\Gamma\left(\alpha\right)}\left({}_{a}\mathfrak{J}^{1-\alpha,\rho,\varphi}x\right)\left(a^+\right). \tag{2.2.10}$$

Lemme 2.2.4 *[10] Soient* $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ *tels que* $Re\,(\alpha)>0, Re\,(\beta)\geq 0$ *et* $n=[Re\,(\alpha)]+1$, *Alors, pour tout* $\rho>0$, *on a*

1. $\left({}_{a}\mathfrak{J}^{\alpha,\rho,\varphi}e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(s)}\varphi(s,a)^{\beta-1}\right)(t)=\frac{\Gamma(\beta)e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(t)}}{\rho^{\alpha}\Gamma(\alpha+\beta)}\varphi(t,a)^{\alpha+\beta-1},\ Re\,(\beta)>0,$
2. $\left(\mathfrak{J}_{b}^{\alpha,\rho,\varphi}e^{-\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(s)}\varphi(b,s)^{\beta-1}\right)(t)=\frac{\Gamma(\beta)e^{-\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(t)}}{\rho^{\alpha}\Gamma(\alpha+\beta)}\varphi(b,t)^{\alpha+\beta-1},\ Re\,(\beta)>0,$
3. $\left({}_{a}\mathfrak{D}^{\alpha,\rho,\varphi}e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(s)}\varphi(s,a)^{\beta-1}\right)(t)=\frac{\rho^{\alpha}\Gamma(\beta)e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(t)}}{\Gamma(\beta-\alpha)}\varphi(t,a)^{\beta-\alpha-1},$
4. $\left(\mathfrak{D}_{b}^{\alpha,\rho,\varphi}e^{-\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(s)}\varphi(b,s)^{\beta-1}\right)(t)=\frac{\rho^{\alpha}\Gamma(\beta)e^{-\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(t)}}{\Gamma(\beta-\alpha)}\varphi(b,t)^{\beta-\alpha-1}.$

Remarque 2.2.1 *[10]Au vu de la définition 2.2.2 et pour $0 < \beta < 1$, on note que*

$$ {}_0\mathfrak{D}_0^{\beta,\rho,\varphi}\left(e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(t)}\varphi(t,0)^{\beta-1}\right) = 0. $$

Lemme 2.2.5 *[7] Soit $\mathcal{X}$ un sous-ensemble fermé, convexe, borné et non vide d'une algèbre de Banach $\mathcal{E}$; et que $\mathbb{T}, \mathbb{N} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ et $\mathbb{M} : \mathcal{X} \to \mathcal{E}$ soient trois opérateurs tels que :*

(a) $\mathbb{T}$ et $\mathbb{N}$ ont Lipschitziens avec les constantes τ et σ, respectivement,

(b) $\mathbb{N}$ est compact et continu,

(c) $u = \mathbb{T}u\mathbb{M}v + \mathbb{N}u \Longrightarrow u \in \mathcal{X}$ por tout $v \in \mathcal{X}$,

(d) $\tau K + \sigma < 1$, où $K = \mathbb{M}(\mathcal{X})$.

Alors l'équation de l'opérateur $\mathbb{T}u\mathbb{M}u + \mathbb{N}u = u$ admet une solution dans $\mathcal{X}$.

2.3 Principaux résultats

Définition 2.3.1 *Une fonction $u \in C(J, \mathbb{R})$ est dite une solution du problème fractionnaire hybride (HP) si la fonction*

$$ t \longmapsto \frac{u(t) - \left({}_0\mathfrak{J}^{\sigma,\rho,\varphi} f\right)(t)}{g(t)} $$

est continue pour chaque $u \in \mathbb{R}$ et u satisfait l'équation intégrale fractionnaire

$$ \begin{aligned} u(t) \quad = \quad & g(t)\left\{\left({}_0\mathfrak{J}^{\beta+\alpha,\rho,\varphi}h\right)(t) + \frac{\lambda e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(t,0)}}{\rho^{\alpha+\beta-1}\Gamma(\alpha+\beta)}\varphi(t,0)^{\alpha+\beta-1}\right. \\ & \left. + \frac{e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(t,0)}\varphi(t,0)^{\beta-1}}{\rho^{\beta-1}\Gamma(\beta)}\left({}_0\mathfrak{J}^{\sigma,\rho,\varphi}u\right)(\zeta)\right\} + \left({}_0\mathfrak{J}^{\sigma,\rho,\varphi} f\right)(t). \end{aligned} \tag{2.3.1} $$

Considérons maintenant le problème fractionnaire hybride suivant (HP) :

$$ \begin{cases} {}_0\mathfrak{D}^{\alpha,\rho,\varphi}\left[{}_0\mathfrak{D}^{\beta,\rho,\varphi}\left(\frac{u(t)-({}_0\mathfrak{J}^{\sigma,\rho,\varphi}f)(t)}{g(t)}\right)\right] = h(t), \\ {}_0\mathfrak{J}^{1-\alpha,\rho,\varphi}\left({}_0\mathfrak{D}^{\beta,\rho,\varphi}\left(\frac{u(t)-({}_0\mathfrak{J}^{\sigma,\rho,\varphi}f)(t)}{g(t)}\right)\right)\Big|_{t=0} = \lambda, \\ {}_0\mathfrak{J}^{2-\beta,\rho,\varphi}\left(\frac{u(t)-({}_0\mathfrak{J}^{\sigma,\rho,\varphi}f)(t)}{g(t)}\right)\Big|_{t=0} = 0, \\ {}_0\mathfrak{J}^{1-\beta,\rho,\varphi}\left(\frac{u(t)-({}_0\mathfrak{J}^{\sigma,\rho,\varphi}f)(t)}{g(t)}\right)\Big|_{t=0} = \left({}_0\mathfrak{J}^{\sigma,\rho,\varphi}u\right)(\zeta), \zeta \in \left]0,1\right[. \end{cases} \tag{HP} $$

où $f, h \in L^1(J, \mathbb{R})$ et $g \in L^1(J, \mathbb{R}^*)$.

Lemme 2.3.1 *Soient $0 < \alpha < 1 < \beta < 2$, $f, h \in L^1(J, \mathbb{R})$ et $g \in L^1(J, \mathbb{R}^*)$. Le problème fractionnaire hybride (HP) a une solution $u \in C(J, \mathbb{R})$ si et seulement si l'équation intégrale fractionnaire (2.3.1) est résoluble et que leurs solutions coïncident.*

Preuve. 1/ ($\Longrightarrow$) Par (2.3.1) on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{u(t)-\left({}_0\mathfrak{J}^{\sigma,\rho,\varphi}f\right)(t)}{g(t)}\\
=&\left\{\left({}_0\mathfrak{J}^{\beta+\alpha,\rho,\varphi}h\right)(t)+\frac{\lambda e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(t,0)}}{\rho^{\alpha+\beta-1}\Gamma(\alpha+\beta)}\varphi(t,0)^{\alpha+\beta-1}\right.\\
&\left.+\frac{e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(t,0)}\varphi(t,0)^{\beta-1}}{\rho^{\beta-1}\Gamma(\beta)}\left({}_0\mathfrak{J}^{\sigma,\rho,\varphi}u\right)(\zeta)\right\},
\end{aligned}$$

et supposons que u satisfait (HP). Alors, $\frac{u(t)-({}_0\mathfrak{J}^{\sigma,\rho,\varphi}f)(t)}{g(t)}$ est continu et on obtient que ${}_0\mathfrak{D}^{\alpha,\rho,\varphi}\left[{}_0\mathfrak{D}^{\beta,\rho,\varphi}\left(\frac{u(t)-({}_0\mathfrak{J}^{\sigma,\rho,\varphi}f)(t)}{g(t)}\right)\right]$ existe.
On appliquant l'intégrale fractionnaire proportionnelle $\mathfrak{J}_{0^+}^{\alpha,\rho,\varphi}$ aux deux côtés de (HP) et utiliser le lemme 2.2.3 et le lemme 2.2.4, et en appliquant le condition sur $t=0$, on obtient

$$\begin{aligned}
&{}_0\mathfrak{D}^{\beta,\rho,\varphi}\left(\frac{u(t)-\left({}_0\mathfrak{J}^{\sigma,\rho,\varphi}f\right)(t)}{g(t)}\right)\\
=&\left({}_0\mathfrak{J}^{\alpha,\rho,\varphi}h\right)(t)\\
&+e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(t,0)}\left[{}_0\mathfrak{J}^{1-\alpha,\rho,\varphi}\left({}_0\mathfrak{D}^{\beta,\rho,\varphi}\left(\frac{u(t)-\left({}_0\mathfrak{J}^{\sigma,\rho,\varphi}f\right)(t)}{g(t)}\right)\right)\right]_{t=0^=}\frac{\left(\varphi(t,0)\right)^{\alpha-1}}{\rho^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)}\\
=&\left({}_0\mathfrak{J}^{\alpha,\rho,\varphi}h\right)(t)+\frac{\lambda e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(t,0)}}{\rho^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)}\left(\varphi(t,0)\right)^{\alpha-1}.
\end{aligned}$$

En appliquant maintenant l'intégrale fractionnaire proportionnelle $\mathfrak{J}_{0^+}^{\beta,\rho,\varphi}$ aux deux côtés, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\frac{u(t)-\left({}_0\mathfrak{J}^{\sigma,\rho,\varphi}f\right)(t)}{g(t)}\\
=&\ {}_0\mathfrak{J}^{\beta,\rho,\varphi}\left(\left({}_0\mathfrak{J}^{\alpha,\rho,\varphi}h\right)(t)+\frac{\lambda e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(t,0)}}{\rho^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)}\left(\varphi(t,0)\right)^{\alpha-1}\right)\\
&+e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(t,0)}\left[{}_0\mathfrak{J}^{1-\beta,\rho,\varphi}\left(\frac{u(t)-\left({}_0\mathfrak{J}^{\sigma,\rho,\varphi}f\right)(t)}{g(t)}\right)\right]_{t=0^+}\frac{\left(\varphi(t,0)\right)^{\beta-1}}{\rho^{\beta-1}\Gamma(\beta)}\\
&+e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(t,0)}\left[{}_0\mathfrak{J}^{2-\beta,\rho,\varphi}\left(\frac{u(t)-\left({}_0\mathfrak{J}^{\sigma,\rho,\varphi}f\right)(t)}{g(t)}\right)\right]_{t=0^+}\frac{\left(\varphi(t,0)\right)^{\beta-2}}{\rho^{\beta-2}\Gamma(\beta-1)}.
\end{aligned}$$

Par le lemme 2.2.4 et la deuxième condition sur $t=0$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{u(t)-\left({}_0\mathfrak{J}^{\sigma,\rho,\varphi}f\right)(t)}{g(t)}\\
=&\left({}_0\mathfrak{J}^{\beta+\alpha,\rho,\varphi}h\right)(t)+\left({}_0\mathfrak{J}^{\beta,\rho,\varphi}\frac{\lambda e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(t,0)}}{\rho^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)}\left(\varphi(t,0)\right)^{\alpha-1}\right)\\
&+\frac{e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(t,0)}\varphi(t,0)^{\beta-1}}{\rho^{\beta-1}\Gamma(\beta)}\left({}_0\mathfrak{J}^{\sigma,\rho,\varphi}u\right)(\zeta)\\
=&\left({}_0\mathfrak{J}^{\beta+\alpha,\rho,\varphi}h\right)(t)+\frac{\lambda e^{\frac{1-\rho}{\rho}\varphi(0)}}{\rho^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)}\left({}_0\mathfrak{J}^{\beta,\rho,\varphi}e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(t)}\left(\varphi(t,0)\right)^{\alpha-1}\right)\\
&+\frac{e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(t,0)}\varphi(t,0)^{\beta-1}}{\rho^{\beta-1}\Gamma(\beta)}\left({}_0\mathfrak{J}^{\sigma,\rho,\varphi}u\right)(\zeta)\\
=&\left({}_0\mathfrak{J}^{\beta+\alpha,\rho,\varphi}h\right)(t)+\frac{\lambda e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(t,0)}}{\rho^{\alpha+\beta-1}\Gamma(\alpha+\beta)}\varphi(t,0)^{\alpha+\beta-1}\\
&+\frac{e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(t,0)}\varphi(t,0)^{\beta-1}}{\rho^{\beta-1}\Gamma(\beta)}\left({}_0\mathfrak{J}^{\sigma,\rho,\varphi}u\right)(\zeta).
\end{aligned}$$

Ainsi, l'équation intégrale fractionnaire (2.3.1) est obtenue.

2/ ($\Longleftarrow$) Inversement, supposons que u satisfasse (2.3.1). Par définition, la fonction $t\longmapsto\frac{u(t)-\left({}_0\mathfrak{J}^{\sigma,\rho,\varphi}f\right)(t)}{g(t)}$ est continue pour chaque $u\in C(J,\mathbb{R})$. Alors

$$\begin{aligned}
\frac{u(t)-\left({}_0\mathfrak{J}^{\sigma,\rho,\varphi}f\right)(t)}{g(t)}=&\left\{\left({}_0\mathfrak{J}^{\beta+\alpha,\rho,\varphi}h\right)(t)+\frac{\lambda e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(t,0)}}{\rho^{\alpha+\beta-1}\Gamma(\alpha+\beta)}\varphi(t,0)^{\alpha+\beta-1}\right.\\
&\left.+\frac{e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(t,0)}\varphi(t,0)^{\beta-1}}{\rho^{\beta-1}\Gamma(\beta)}\left({}_0\mathfrak{J}^{\sigma,\rho,\varphi}u\right)(\zeta)\right\}.
\end{aligned}\tag{2.3.2}$$

Nous dérivons les deux côtés de (2.3.2) par la dérivée fractionnaire proportionnelle ${}_0\mathfrak{D}^{\beta,\rho,\varphi}$, on obtient

$$\begin{aligned}
&{}_0\mathfrak{D}^{\beta,\rho,\varphi}\left(\frac{u(t)-\left({}_0\mathfrak{J}^{\sigma,\rho,\varphi}f\right)(t)}{g(t)}\right)\\
=&\ {}_0\mathfrak{D}^{\beta,\rho,\varphi}\left({}_0\mathfrak{J}^{\beta+\alpha,\rho,\varphi}h\right)(t)+{}_0\mathfrak{D}^{\beta,\rho,\varphi}\left(\frac{\lambda e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(t,0)}}{\rho^{\alpha+\beta-1}\Gamma(\alpha+\beta)}\varphi(t,0)^{\alpha+\beta-1}\right)\\
&+{}_0\mathfrak{D}^{\beta,\rho,\varphi}\left(\frac{e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(t,0)}\varphi(t,0)^{\beta-1}}{\rho^{\beta-1}\Gamma(\beta)}\left({}_0\mathfrak{J}^{\sigma,\rho,\varphi}u\right)(\zeta)\right).
\end{aligned}\tag{2.3.3}$$

En utilisant les Lemmes 2.2.1,2.2.2, 2.2.4 et la remarque 2.2.1, on obtient

$$\begin{aligned}
&{}_0\mathfrak{D}^{\beta,\rho,\varphi}\left(\frac{u(t)-\left({}_0\mathfrak{J}^{\sigma,\rho,\varphi}f\right)(t)}{g(t)}\right) \qquad (2.3.4)\\
=\;& {}_0\mathfrak{D}^{\beta,\rho,\varphi}\left({}_0\mathfrak{J}_0^{\beta,\rho,\varphi}\mathfrak{J}^{\alpha,\rho,\varphi}h\right)(t)+\frac{\lambda e^{\frac{1-\rho}{\rho}\varphi(0)}}{\rho^{\alpha+\beta-1}\Gamma\left(\alpha+\beta\right)}\;{}_0\mathfrak{D}^{\beta,\rho,\varphi}\left(e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(t)}\varphi(t,0)^{\alpha+\beta-1}\right)\\
&+\frac{e^{\frac{1-\rho}{\rho}\varphi(0)}\left({}_0\mathfrak{J}^{\sigma,\rho,\varphi}u\right)(\zeta)}{\rho^{\beta-1}\Gamma\left(\beta\right)}\;{}_0\mathfrak{D}_0^{\beta,\rho,\varphi}\left(e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(t)}\varphi(t,0)^{\beta-1}\right)\\
=\;& \left({}_0\mathfrak{J}^{\beta,\rho,\varphi}h\right)(t)+\frac{\lambda e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(t,0)}}{\rho^{\alpha-1}\Gamma\left(\alpha\right)}\varphi(t,0)^{\alpha-1}.
\end{aligned}$$

Nous dérivons les deux côtés de (2.3.4) par la dérivée fractionnaire proportionnelle ${}_0\mathfrak{D}^{\alpha,\rho,\varphi}$, on obtient

$$\begin{aligned}
&{}_0\mathfrak{D}^{\alpha,\rho,\varphi}\left[{}_0\mathfrak{D}^{\beta,\rho,\varphi}\left(\frac{u(t)-\left({}_0\mathfrak{J}^{\sigma,\rho,\varphi}f\right)(t)}{g(t)}\right)\right] \qquad (2.3.5)\\
=\;& {}_0\mathfrak{D}^{\alpha,\rho,\varphi}\left({}_0\mathfrak{J}^{\alpha,\rho,\varphi}h\right)(t)+{}_0\,\mathfrak{D}^{\alpha,\rho,\varphi}\left(\frac{\lambda e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(t,0)}}{\rho^{\alpha-1}\Gamma\left(\alpha\right)}\varphi(t,0)^{\alpha-1}\right).
\end{aligned}$$

Par le lemme 2.2.2 et la remarque 2.2.1, on obtient

$${}_0\mathfrak{D}^{\alpha,\rho,\varphi}\left[{}_0\mathfrak{D}^{\beta,\rho,\varphi}\left(\frac{u(t)-\left({}_0\mathfrak{J}^{\sigma,\rho,\varphi}f\right)(t)}{g(t)}\right)\right]=h(t).$$

Par (2.3.5) et le lemme 2.2.4, on a

$$\begin{aligned}
&{}_0\mathfrak{J}^{1-\alpha,\rho,\varphi}\left[{}_0\mathfrak{D}^{\beta,\rho,\varphi}\left(\frac{u(t)-\left({}_0\mathfrak{J}^{\sigma,\rho,\varphi}f\right)(t)}{g(t)}\right)\right]\\
=\;& {}_0\mathfrak{J}^{1,\rho,\varphi}h(t)+\lambda\,{}_0\mathfrak{J}^{1-\alpha,\rho,\varphi}\left(\frac{e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(t,0)}}{\rho^{\alpha-1}\Gamma\left(\alpha\right)}\varphi(t,0)^{\alpha-1}\right)\\
=\;& {}_0\mathfrak{J}^{1,\rho,\varphi}h(t)+\lambda.
\end{aligned}$$

En substituant t21920, on obtient ${}_0\mathfrak{J}^{1-\alpha,\rho,\varphi}\left({}_0\mathfrak{D}^{\beta,\rho,\varphi}\left(\frac{u(t)-({}_0\mathfrak{J}^{\sigma,\rho,\varphi}f)(t)}{g(t)}\right)\right)\Big|_{t=0^+}=\lambda.$
Par (2.3.3), le lemme 2.2.4 et la remarque 2.2.1, on a

$$\begin{aligned}
&{}_0\mathfrak{J}^{1-\beta,\rho,\varphi}\left(\frac{u(t)-\left({}_0\mathfrak{J}^{\sigma,\rho,\varphi}f\right)(t)}{g(t)}\right)\\
=\;& \left({}_0\mathfrak{J}^{\alpha,\rho,\varphi}h\right)(t)+\;{}_0\mathfrak{D}^{\beta,\rho,\varphi}\left(\frac{\lambda e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(t,0)}}{\rho^{\alpha+\beta-1}\Gamma\left(\alpha+\beta\right)}\varphi(t,0)^{\alpha+\beta-1}\right)\\
&+\left({}_0\mathfrak{J}^{\sigma,\rho,\varphi}u\right)(\zeta)_0\,\mathfrak{D}^{\beta,\rho,\varphi}\left(\frac{e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(t,0)}\varphi(t,0)^{\beta-1}}{\rho^{\beta-1}\Gamma\left(\beta\right)}\right)\\
=\;& \left({}_0\mathfrak{J}^{\alpha,\rho,\varphi}h\right)(t)+{}_0\,\mathfrak{J}^{\sigma,\rho,\varphi}u\left(\zeta\right)\\
&+\frac{\lambda}{\rho^{\alpha+\beta-1}\Gamma\left(\alpha+\beta\right)}\;{}_0\mathfrak{J}^{\alpha,\rho,\varphi}\left({}_0\mathfrak{D}^{\alpha+\beta,\rho,\varphi}\left(e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(t,0)}\varphi(t,0)^{\alpha+\beta-1}\right)\right),
\end{aligned}$$

et
$$ {}_0\mathfrak{J}^{2-\beta,\rho,\varphi}\left(\frac{u(t)-\left({}_0\mathfrak{J}^{\sigma,\rho,\varphi}f\right)(t)}{g(t)}\right) ={}_0 \mathfrak{J}^{1,\rho,\varphi}\left({}_0\mathfrak{J}^{1-\beta,\rho,\varphi}\left(\frac{u(t)-\left({}_0\mathfrak{J}^{\sigma,\rho,\varphi}f\right)(t)}{g(t)}\right)\right). $$
En substituant $t \to 0$, on obtient
$$ {}_0\mathfrak{J}^{1-\beta,\rho,\varphi}\left(\frac{u(t)-\left({}_0\mathfrak{J}^{\sigma,\rho,\varphi}f\right)(t)}{g(t)}\right)\Bigg|_{t=0} ={}_0 \mathfrak{J}^{\sigma,\rho,\varphi}u\left(\zeta\right) $$
et
$$ {}_0\mathfrak{J}^{2-\beta,\rho,\varphi}\left(\frac{u(t)-\left({}_0\mathfrak{J}^{\sigma,\rho,\varphi}f\right)(t)}{g(t)}\right)\Bigg|_{t=0} = 0. $$
Ceci termine la preuve. □

2.3.1 Hypothèses

— $(\mathbb{HP}_0)$ Les fonctions $\mathbb{F}, \mathbb{G}$ et $\mathbb{H}$ sont des fonctions continues.

— $(\mathbb{HP}_1)$ Il existe 3 nombres positives $\mathcal{K}_{\mathcal{F}}, \mathcal{K}_{\mathcal{G}}$, et $\mathcal{K}_{\mathcal{H}}$ telles que
$$ \left|\mathbb{F}(t,u)-\mathbb{F}(t,\widetilde{u})\right| \leq \mathcal{K}_{\mathcal{F}}\left|u-\widetilde{u}\right|, $$
$$ \left|\mathbb{G}(t,u)-\mathbb{G}(t,\widetilde{u})\right| \leq \mathcal{K}_{\mathcal{G}}\left|u-\widetilde{u}\right|, $$
pout tout $t \in [0,1]$ et $u, \widetilde{u} \in \mathbb{R}$.

— $(\mathbb{HP}_2)$ Il existe deux fonctions positives $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$, telles que :
$$ \left|\mathbb{H}(t,u)\right| \leq \mathcal{H}_1(t)+\mathcal{H}_2(t)\left|u\right|, $$
pour tout $t \in [0,1]$ et $u \in \mathbb{R}$.

— $(\mathbb{HP}_3)$ Il existe 4 nombres positifs $\mathcal{K}^*_{\mathcal{F}}, \mathcal{K}^*_{\mathcal{G}}, \mathcal{H}^*_1$ et $\mathcal{H}^*_2$ tels que :
$$ \begin{aligned} \mathcal{K}^*_{\mathcal{F}} &= \sup_{t\in[0,1]}\left|\mathbb{F}(t,0)\right|,\ \mathcal{K}^*_{\mathcal{G}} = \sup_{t\in[0,1]}\left|\mathbb{G}(t,0)\right|, \mathcal{H}^*_1 = \sup_{t\in[0,1]}\left|\mathcal{H}_1(t)\right| \\ \text{and}\ \mathcal{H}^*_2 &= \sup_{t\in[0,1]}\left|\mathcal{H}_2(t)\right| < 1. \end{aligned} $$

— $(\mathbb{HP}_4)$ L'inégalité suivante est valable :
$$ \mathcal{B}_3 = \Upsilon\mathcal{K}_{\mathcal{G}} + \frac{\mathcal{K}^{\sigma}_{\varphi}e^{\frac{\rho-1}{\rho}\mathcal{K}_{\varphi}}}{\rho^{\sigma}\Gamma\left(\sigma+1\right)}\mathcal{K}_{\mathcal{F}} < 1, \tag{2.3.6} $$

où

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_{\varphi} &= \varphi(1,0),\\
\mathcal{A} &= \left[\left|\frac{\rho}{\rho-1}\frac{\mathcal{K}_{\varphi}^{\sigma-1}}{\rho^{\sigma}\Gamma(\sigma)}\right| e^{\frac{\rho-1}{\rho}\mathcal{K}_{\varphi}}\right]\mathcal{K}_{\mathcal{F}},\\
\mathcal{B}_1 &= \frac{\mathcal{K}_{\varphi}^{\beta+\alpha}e^{\frac{\rho-1}{\rho}\mathcal{K}_{\varphi}}\mathcal{H}_1^*}{\rho^{\beta+\alpha}\Gamma(\beta+\alpha+1)}+\frac{\lambda e^{\frac{\rho-1}{\rho}\mathcal{K}_{\varphi}}}{\rho^{\alpha+\beta-1}\Gamma(\alpha+\beta)}\mathcal{K}_{\varphi}^{\alpha+\beta-1},\\
\mathcal{B}_2 &= \frac{\mathcal{K}_{\varphi}^{\beta+\alpha}e^{\frac{\rho-1}{\rho}\mathcal{K}_{\varphi}}\mathcal{H}_2^*}{\rho^{\beta+\alpha}\Gamma(\beta+\alpha+1)}+\frac{e^{2\frac{\rho-1}{\rho}\mathcal{K}_{\varphi}}\mathcal{K}_{\varphi}^{\sigma+\beta-1}}{\rho^{\sigma+\beta-1}\Gamma(\beta)\Gamma(\sigma+1)},\\
\Upsilon &= \mathcal{B}_1+\mathcal{B}_2 r,\\
\mathcal{B}_4 &= \frac{\mathcal{K}_{\varphi}^{\sigma}e^{\frac{\rho-1}{\rho}\mathcal{K}_{\varphi}}}{\rho^{\sigma}\Gamma(\sigma+1)}\mathcal{K}_{\mathcal{F}}^*+\Upsilon\mathcal{K}_{\mathcal{G}}^*.
\end{aligned}$$

Théoréme 2.3.1 *Supposons que ($\mathbb{HP}_0$)–($\mathbb{HP}_4$) sont vérifiées. Alors, le problème (HP) admet au moins une solution définie sur l'intervalle* $[0,1]$.

Preuve. Par le lemme 2.3.1, la solution du problème (HP) est donnée par :

$$\begin{aligned}
u(t) &= \mathbb{G}(t,u(t))\left\{ {}_0\mathfrak{J}^{\beta+\alpha,\rho,\varphi}\mathbb{H}(t,u(t))+\frac{\lambda e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(t,0)}}{\rho^{\alpha+\beta-1}\Gamma(\alpha+\beta)}\varphi(t,0)^{\alpha+\beta-1}\right. \\
&\quad \left. +\frac{e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(t,0)}\varphi(t,0)^{\beta-1}}{\rho^{\beta-1}\Gamma(\beta)}\left({}_0\mathfrak{J}^{\sigma,\rho,\varphi}u\right)(\zeta)\right\}+\left({}_0\mathfrak{J}^{\sigma,\rho,\varphi}\mathbb{F}\right)(t,u(t)).
\end{aligned} \tag{2.3.7}$$

Choisissez $r>0$, tel de sorte que :

$$r=\mathcal{B}_4\left(1-\mathcal{B}_3\right)^{-1}. \tag{2.3.8}$$

Nous définissons l'ensemble $\mathcal{X}=\left\{u\in\mathcal{C},\|u\|_{\mathcal{C}}\leq r\right\}$. Il est évidente que $\mathcal{X}$ est un sous-ensemble non vid fermé, convexe et borné de l'espace de Banach $\mathcal{C}$.
D'après le lemma 2.2.5, nous définissons trois opérateurs $\mathbb{T},\mathbb{N}:\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ et $\mathbb{M}:\mathcal{X}\to\mathcal{C}$ par

$$\begin{aligned}
\mathbb{T}(u)(t) &= \mathbb{G}(t,u(t)), \qquad (2.3.9)\\
\mathbb{M}(u)(t) &= \left({}_0\mathfrak{J}^{\beta+\alpha,\rho,\varphi}\mathbb{H}\right)(t,u(t))+\frac{\lambda e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(t,0)}}{\rho^{\alpha+\beta-1}\Gamma(\alpha+\beta)}\varphi(t,0)^{\alpha+\beta-1}\\
&\quad +\frac{e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(t,0)}\varphi(t,0)^{\beta-1}}{\rho^{\beta-1}\Gamma(\beta)}\left({}_0\mathfrak{J}^{\sigma,\rho,\varphi}u\right)(\zeta),\\
\mathbb{N}(u)(t) &= \left({}_0\mathfrak{J}^{\sigma,\rho,\varphi}\mathbb{F}\right)(t,u(t)),
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
{}_0\mathfrak{J}^{\beta+\alpha,\rho,\varphi}\mathbb{H}(t,u(t)) &= \frac{1}{\rho^{\beta+\alpha}\Gamma(\beta+\alpha)}\int_0^t e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(t,s)}\varphi(t,s)^{\beta+\alpha-1}\varphi'(s)\mathbb{H}(s,u(s))ds, \\
{}_0\mathfrak{J}^{\sigma,\rho,\varphi}u(\zeta) &= \frac{1}{\rho^{\sigma}\Gamma(\sigma)}\int_0^\zeta e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(\zeta,s)}\varphi(\zeta,s)^{\sigma-1}\varphi'(s)u(s)ds, \\
&\quad \text{et} \\
{}_0\mathfrak{J}^{\sigma,\rho,\varphi}\mathbb{F}(t,u(t)) &= \frac{1}{\rho^{\sigma}\Gamma(\sigma)}\int_0^t e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(t,s)}\varphi(t,s)^{\sigma-1}\varphi'(s)\mathbb{F}(s,u(s))ds.
\end{aligned}$$

Alors l'équation intégrale(2.3.7) peut être écrite sous la forme d'opérateur comme suit

$$u(t) = \mathbb{T}(u)(t)\mathbb{M}(u)(t) + \mathbb{N}(u)(t), t \in [0,1]. \tag{2.3.10}$$

Nous allons montrer que les opérateurs $\mathbb{T},\mathbb{M}$, et $\mathbb{N}$ satisfont toutes les conditions du lemme 2.2.5. Ceci sera réalisé dans la série d'étapes suivante.

Étape1. Nous montrerons que les opérateurs $\mathbb{T}$ et $\mathbb{N}$ sont lipschitziens sur $\mathcal{C}$.soient $u,\widetilde{u} \in \mathcal{C}$, par hypothèse $(\mathbb{HP}_1)$, $\forall t \in [0,1]$, on a

$$|\mathbb{T}(u)(t) - \mathbb{T}(\widetilde{u})(t)| = |\mathbb{G}(u)(t) - \mathbb{G}(\widetilde{u})(t)| \leq \mathcal{K}_{\mathcal{G}}|u-\widetilde{u}|.$$

donc

$$\|\mathbb{T}(u) - \mathbb{T}(\widetilde{u})\|_{\mathcal{C}} \leq \mathcal{K}_{\mathcal{G}}\|u-\widetilde{u}\|_{\mathcal{C}}.$$

Donc $\mathbb{T}$ est lipschitzien sur $\mathcal{C}$ avec une constante de lipschitz $\mathcal{K}_{\mathcal{G}}$, pour tout $u,\widetilde{u} \in \mathcal{C}$. Aussi, par $(\mathbb{HP}_1)$, pour $t \in [0,1]$, et $u,\widetilde{u} \in \mathcal{C}$ on a

$$\begin{aligned}
& |\mathbb{N}(u)(t) - \mathbb{N}(\widetilde{u})(t)| \\
= & \left|\left({}_0\mathfrak{J}^{\sigma,\rho,\varphi}\mathbb{F}\right)(u)(t) - \left({}_0\mathfrak{J}^{\sigma,\rho,\varphi}\mathbb{F}\right)(\widetilde{u})(t)\right| \\
\leq & \frac{1}{\rho^{\sigma}\Gamma(\sigma)}\left|\int_0^t e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(t,s)}\varphi(t,s)^{\sigma-1}\varphi'(s)\mathbb{F}(s,u(s))ds\right. \\
& \left. - \int_0^t e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(t,s)}\varphi(t,s)^{\sigma-1}\varphi'(s)\mathbb{F}(s,\widetilde{u}(s))ds\right| \\
\leq & \frac{1}{\rho^{\sigma}\Gamma(\sigma)}\int_0^t e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(t,s)}\varphi(t,s)^{\sigma-1}\varphi'(s)\left|\mathbb{F}(s,u(s)) - \mathbb{F}(s,\widetilde{u}(s))\right|ds \\
\leq & \left[\left|\frac{\rho}{\rho-1}\frac{\mathcal{K}_{\varphi}^{\sigma-1}}{\rho^{\sigma}\Gamma(\sigma)}\right| e^{\frac{\rho-1}{\rho}\mathcal{K}_{\varphi}}\right]\left|\mathbb{F}(s,u(s)) - \mathbb{F}(s,\widetilde{u}(s))\right| \\
\leq & \left[\left|\frac{\rho}{\rho-1}\frac{\mathcal{K}_{\varphi}^{\sigma-1}}{\rho^{\sigma}\Gamma(\sigma)}\right| e^{\frac{\rho-1}{\rho}\mathcal{K}_{\varphi}}\right]\mathcal{K}_{\mathcal{F}}|u-\widetilde{u}| \\
\leq & \mathcal{A}|u-\widetilde{u}|,
\end{aligned}$$

donc

$$\|\mathbb{N}(u) - \mathbb{N}(\widetilde{u})\|_{\mathcal{C}} \leq \mathcal{A}\|u-\widetilde{u}\|_{\mathcal{C}}.$$

Ainsi $\mathbb{N}$ est lipschitzien sur $\mathcal{C}$ avec une constante de lipschitz $\mathcal{A}$, pour tout $u, \widetilde{u} \in \mathcal{C}$.

Étape 2a. Nous montrons que $\mathbb{M}$ est un opérateur complètement continu de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{C}$. Soit une suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{X}$, telle que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to u \in \mathcal{X}$. Alors en utilisant le théorème de convergence dominée de Lebsgue, nous avons :

$$\begin{aligned}
& \lim_{n\to+\infty} \mathbb{M}(u_n)(t) \\
= \; & \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\rho^{\beta+\alpha}\Gamma(\beta+\alpha)} \int_0^t e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(t,s)} \varphi(t,s)^{\beta+\alpha-1}\varphi'(s)\mathbb{H}(s,u_n(s))ds \\
& + \frac{\lambda e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(t,0)}}{\rho^{\alpha+\beta-1}\Gamma(\alpha+\beta)} \varphi(t,0)^{\alpha+\beta-1} \\
& + \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(t,0)}\varphi(t,0)^{\beta-1}}{\rho^{\sigma+\beta-1}\Gamma(\beta)\Gamma(\sigma)} \int_0^\zeta e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(\zeta,s)}\varphi(\zeta,s)^{\sigma-1}\varphi'(s)u_n(s)ds \\
= \; & \frac{1}{\rho^{\beta+\alpha}\Gamma(\beta+\alpha)} \int_0^t e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(t,s)} \varphi(t,s)^{\beta+\alpha-1}\varphi'(s)\lim_{n\to+\infty}\mathbb{H}(s,u_n(s))ds \\
& + \frac{\lambda e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(t,0)}}{\rho^{\alpha+\beta-1}\Gamma(\alpha+\beta)} \varphi(t,0)^{\alpha+\beta-1} \\
& + \frac{e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(t,0)}\varphi(t,0)^{\beta-1}}{\rho^{\sigma+\beta-1}\Gamma(\beta)\Gamma(\sigma)} \int_0^\zeta e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(\zeta,s)}\varphi(\zeta,s)^{\sigma-1}\varphi'(s)\lim_{n\to+\infty}u_n(s)ds \\
= \; & \frac{1}{\rho^{\beta+\alpha}\Gamma(\beta+\alpha)} \int_0^t e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(t,s)} \varphi(t,s)^{\beta+\alpha-1}\varphi'(s)\mathbb{H}(s,u(s))ds \\
& + \frac{\lambda e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(t,0)}}{\rho^{\alpha+\beta-1}\Gamma(\alpha+\beta)} \varphi(t,0)^{\alpha+\beta-1} \\
& + \frac{e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(t,0)}\varphi(t,0)^{\beta-1}}{\rho^{\sigma+\beta-1}\Gamma(\beta)\Gamma(\sigma)} \int_0^\zeta e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(\zeta,s)}\varphi(\zeta,s)^{\sigma-1}\varphi'(s)u(s)ds \\
= \; & \mathbb{M}(u)(t).
\end{aligned}$$

Cela montre que $\mathbb{M}$ est un opérateur continu de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{C}$

Étape **2b.** Ensuite, nous montrerons que l'opérateur $\mathbb{M}$ est compact sur $\mathcal{X}$, c'est à dire prouvons que l'énsemble $\mathbb{M}(\mathcal{X})$ est uniformément borné dans $\mathcal{X}$, soit $u \in \mathcal{X}$ et en appliquant

$(\mathbb{HP}_3)$, nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
|\mathbb{M}(u)(t)| &\leq \frac{1}{\rho^{\beta+\alpha}\Gamma(\beta+\alpha)}\int_a^t e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(t,s)}\varphi(t,s)^{\beta+\alpha-1}\varphi'(s)\,|\mathbb{H}(s,u(s))|\,ds \\
&\quad +\frac{\lambda e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(t,0)}}{\rho^{\alpha+\beta-1}\Gamma(\alpha+\beta)}\varphi(t,0)^{\alpha+\beta-1} \\
&\quad +\frac{e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(t,0)}\varphi(t,0)^{\beta-1}}{\rho^{\sigma+\beta-1}\Gamma(\beta)\Gamma(\sigma)}\int_a^\zeta e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(\zeta,s)}\varphi(\zeta,s)^{\sigma-1}\varphi'(s)\,|u(s)|\,ds \\
&\leq \frac{\mathcal{K}_\varphi^{\beta+\alpha}e^{\frac{\rho-1}{\rho}\mathcal{K}_\varphi}\left(\mathcal{H}_1^*+\mathcal{H}_2^*r\right)}{\rho^{\beta+\alpha}\Gamma(\beta+\alpha+1)}+\frac{\lambda e^{\frac{\rho-1}{\rho}\mathcal{K}_\varphi}}{\rho^{\alpha+\beta-1}\Gamma(\alpha+\beta)}\mathcal{K}_\varphi^{\alpha+\beta-1} \\
&\quad +\frac{re^{2\frac{\rho-1}{\rho}\mathcal{K}_\varphi}\mathcal{K}_\varphi^{\sigma+\beta-1}}{\rho^{\sigma+\beta-1}\Gamma(\beta)\Gamma(\sigma+1)} \\
&\leq \frac{\mathcal{K}_\varphi^{\beta+\alpha}e^{\frac{\rho-1}{\rho}\mathcal{K}_\varphi}\mathcal{H}_1^*}{\rho^{\beta+\alpha}\Gamma(\beta+\alpha+1)}+\frac{\lambda e^{\frac{\rho-1}{\rho}\mathcal{K}_\varphi}}{\rho^{\alpha+\beta-1}\Gamma(\alpha+\beta)}\mathcal{K}_\varphi^{\alpha+\beta-1} \\
&\quad +\left(\frac{\mathcal{K}_\varphi^{\beta+\alpha}e^{\frac{\rho-1}{\rho}\mathcal{K}_\varphi}\mathcal{H}_2^*}{\rho^{\beta+\alpha}\Gamma(\beta+\alpha+1)}+\frac{re^{2\frac{\rho-1}{\rho}\mathcal{K}_\varphi}\mathcal{K}_\varphi^{\sigma+\beta-1}}{\rho^{\sigma+\beta-1}\Gamma(\beta)\Gamma(\sigma+1)}\right)r.
\end{aligned}
$$

En prenant la valeur supérieure par rapport à u ci-dessus, on obtient :

$$
\|\mathbb{M}(u)(t)\| \leq \mathcal{B}_1+\mathcal{B}_2 r=\Upsilon<\infty, \quad \text{for all } u\in\mathcal{X}. \tag{2.3.11}
$$

Donc $\mathbb{M}$ est uniformément borné sur $\mathcal{X}$.

Étape 2c. On montre ensuite que $\mathbb{M}(\mathcal{X})$ est un ensemble équicontinu dans $\mathcal{C}$.

Soit $t, \widetilde{t} \in [0,1]$ tel que $t < \widetilde{t}$. Alors pour tout $u \in \mathcal{X}$, et par $\mathbb{HP}_2, \mathbb{HP}_3$ on obtient

$$\begin{aligned}
& \left|\mathbb{M}(u)(\widetilde{t}) - \mathbb{M}(u)(t)\right| \\
\leq\; & \frac{1}{\rho^{\beta+\alpha}\Gamma(\beta+\alpha)} \left| \int_0^{\widetilde{t}} e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(\widetilde{t},s)} \varphi(\widetilde{t},s)^{\beta+\alpha-1}\varphi'(s)\mathbb{H}(s,u(s))ds \right. \\
& \left. - \int_0^{t} e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(t,s)} \varphi(t,s)^{\beta+\alpha-1}\varphi'(s)\mathbb{H}(s,u(s))ds \right| \\
& + \frac{\lambda e^{\frac{1-\rho}{\rho}\varphi(0)}}{\rho^{\alpha+\beta-1}\Gamma(\alpha+\beta)} \left(e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(\widetilde{t})}\varphi(\widetilde{t},0)^{\alpha+\beta-1} - e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(t)}\varphi(t,0)^{\alpha+\beta-1} \right) \\
& + \frac{e^{\frac{1-\rho}{\rho}\varphi(0)}}{\rho^{\sigma+\beta-1}\Gamma(\beta)\Gamma(\sigma)} \left(e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(\widetilde{t})}\varphi(\widetilde{t},0)^{\beta-1} - e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(t)}\varphi(t,0)^{\beta-1} \right) \\
& \int_0^{\zeta} e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(\zeta,s)}\varphi(\zeta,s)^{\sigma-1}\varphi'(s)u(s)ds \\
\leq\; & \frac{e^{\frac{\rho-1}{\rho}\mathcal{K}_\varphi}\left(\mathcal{H}_1^* + \mathcal{H}_2^* r\right)}{\rho^{\beta+\alpha}\Gamma(\beta+\alpha+1)}\varphi(\widetilde{t},t)^{\beta+\alpha} \\
& + \frac{\lambda e^{\frac{\rho-1}{\rho}\mathcal{K}_\varphi}}{\rho^{\alpha+\beta-1}\Gamma(\alpha+\beta)} \left(\varphi(\widetilde{t},0)^{\alpha+\beta-1} - \varphi(t,0)^{\alpha+\beta-1}\right) \\
& + \frac{\mathcal{K}_\varphi^{\sigma} r e^{\frac{\rho-1}{\rho}\mathcal{K}_\varphi}}{\rho^{\sigma+\beta-1}\Gamma(\beta)\Gamma(\sigma+1)} \left(\varphi(\widetilde{t},0)^{\beta-1} - \varphi(t,0)^{\beta-1}\right) \\
& + \left[\frac{\mathcal{K}_\varphi^{\sigma+\beta-1} e^{\frac{1-\rho}{\rho}\varphi(1)} r}{\rho^{\sigma+\beta-1}\Gamma(\beta)\Gamma(\sigma+1)} + \frac{\lambda e^{\frac{1-\rho}{\rho}\varphi(0)}\mathcal{K}_\varphi^{\alpha+\beta-1}}{\rho^{\alpha+\beta-1}\Gamma(\alpha+\beta)} \right] \left(e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(\widetilde{t})} - e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(t)} \right),
\end{aligned}$$

alors

$$\left|\mathbb{M}(u)(\widetilde{t}) - \mathbb{M}(u)(t)\right| \to 0, \text{ lorsque } \widetilde{t} \to t,$$

ce qui implique que

$$\left\|\mathbb{M}(u)(\widetilde{t}) - \mathbb{M}(u)(t)\right\|_{\mathcal{C}} \to 0$$

uniformément pour tout $u \in \mathcal{X}$. Cela signifie que $\mathbb{M}$ est équicontinu sur $\mathcal{C}$. Par conséquent, $\mathbb{M}$ est relativement compact. Du théorème d'Arzelà–Ascoli, on en déduit que $\mathbb{M}$ est complètement continue. Ainsi, $\mathbb{M}$ est compact sur $\mathcal{X}$.

Étape 3. Nous montrons que l'hypothèse (c) du lemme 2.2.5 est vérifiée. Pour tout $u \in \mathcal{X}$, $t \in [0,1]$, Par $\mathbb{HP}_2$ et $\mathbb{HP}_3$, on a

$$\begin{aligned}
|\mathbb{T}(t,u(t))| &= |\mathbb{G}(t,u)| \leq |\mathbb{G}(t,u) - \mathbb{G}(t,0)| + |\mathbb{G}(t,0)| \\
&\leq \mathcal{K}_{\mathcal{G}}|u(t)| + \mathcal{K}_{\mathcal{G}}^*,
\end{aligned} \tag{2.3.12}$$

et

$$\begin{aligned} |\mathbb{N}(u)(t)| &= \left|\left({}_0\mathfrak{J}^{\sigma,\rho,\varphi}\mathbb{F}\right)(u)(t)\right| \qquad (2.3.13) \\ &\leq \frac{1}{\rho^{\sigma}\Gamma(\sigma)}\left|\int_0^t e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(t,s)}\varphi(t,s)^{\sigma-1}\varphi'(s)\mathbb{F}(s,u(s))ds\right| \\ &\leq \frac{1}{\rho^{\sigma}\Gamma(\sigma)}\int_0^t e^{\frac{\rho-1}{\rho}\varphi(t,s)}\varphi(t,s)^{\sigma-1}\varphi'(s)\left(\mathcal{K}_{\mathcal{F}}|u|+\mathcal{K}_{\mathcal{F}}^*\right)ds \\ &\leq \frac{\mathcal{K}_{\varphi}^{\sigma}e^{\frac{\rho-1}{\rho}\mathcal{K}_{\varphi}}}{\rho^{\sigma}\Gamma(\sigma+1)}\left(\mathcal{K}_{\mathcal{F}}|u(t)|+\mathcal{K}_{\mathcal{F}}^*\right). \end{aligned}$$

Soit $u \in \mathcal{C}$ et $v \in \mathcal{X}$ arbitraires tels que

$$u = \mathbb{T}u\mathbb{M}v + \mathbb{N}u.$$

Alors, par (2.3.11) (2.3.12) et (2.3.13), on a

$$|u(t)| \leq |\mathbb{T}u(t)|\,|\mathbb{M}v(t)| + |\mathbb{N}u(t)|\,,$$

donc

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathcal{C}} &\leq \Upsilon\left(\mathcal{K}_{\mathcal{G}}\|u\|_{\mathcal{C}}+\mathcal{K}_{\mathcal{G}}^*\right)+\frac{\mathcal{K}_{\varphi}^{\sigma}e^{\frac{\rho-1}{\rho}\mathcal{K}_{\varphi}}}{\rho^{\sigma}\Gamma(\sigma+1)}\left(\mathcal{K}_{\mathcal{F}}\|u\|_{\mathcal{C}}+\mathcal{K}_{\mathcal{F}}^*\right) \\ &\leq \mathcal{B}_3\|u\|_{\mathcal{C}}+\mathcal{B}_4. \end{aligned}$$

Ainsi, par (2.3.6), on obtient

$$\|u\|_{\mathcal{C}} \leq \frac{\mathcal{B}_4}{1-\mathcal{B}_3} \leq r.$$

Étape 4. Enfin, par

$$\mathcal{B}_3 = \Upsilon\mathcal{K}_{\mathcal{G}} + \frac{\mathcal{K}_{\varphi}^{\sigma}e^{\frac{\rho-1}{\rho}\mathcal{K}_{\varphi}}}{\rho^{\sigma}\Gamma(\sigma+1)}\mathcal{K}_{\mathcal{F}} < 1,$$

on voit que $\tau K + \sigma < 1$ est satisfaite, où $\tau = \mathcal{K}_{\mathcal{G}}$ et $\sigma = \frac{\mathcal{K}_{\varphi}^{\sigma}e^{\frac{\rho-1}{\rho}\mathcal{K}_{\varphi}}}{\rho^{\sigma}\Gamma(\sigma+1)}\mathcal{K}_{\mathcal{F}}$.
Ainsi, toutes les conditions du lemme 2.2.5 sont satisfaites. donc l'équation de l'opérateur $u = \mathbb{T}u\mathbb{M}u + \mathbb{N}u$ possède une solution dans $\mathcal{X}$. Par conséquent, le problème (HP) a une solution sur $[0,1]$. □

2.4 Example

Dans cette section,nous donnons deux exemple pour illustrer les principaux résultats.

Exemple 2.4.1 *Considérons le problème fractionnaire hybride suivant :*

$$\begin{cases} {}_0\mathfrak{D}^{\frac{6}{8},\frac{1}{2},t^2}\left[{}_0\mathfrak{D}^{\frac{3}{2},\frac{1}{2},t^2}\left(\frac{u(t)-\left({}_0\mathfrak{J}^{\frac{1}{2},\frac{1}{2},t^2}\mathbb{F}\right)(t,u(t))}{\mathbb{G}(t,u(t))}\right)\right]=\mathbb{H}(t,u(t)), t\in J=[0,1]\,, \\ {}_0\mathfrak{J}^{\frac{1}{4},\frac{1}{2},t^2}\left({}_0\mathfrak{D}^{\frac{3}{2},\frac{1}{2},t^2}\left(\frac{u(t)-\left({}_0\mathfrak{J}^{\frac{1}{2},\frac{1}{2},t^2}\mathbb{F}\right)(t,u(t))}{\mathbb{G}(t,u(t))}\right)\right)\Bigg|_{t=0^+}=\frac{1}{9}, \\ {}_0\mathfrak{J}^{\frac{1}{2},\frac{1}{2},t^2}\left(\frac{u(t)-\left({}_0\mathfrak{J}^{\frac{1}{2},\frac{1}{2},t^2}\mathbb{F}\right)(t,u(t))}{\mathbb{G}(t,u(t))}\right)\Bigg|_{t=0^+}=0, \\ {}_0\mathfrak{J}^{\frac{-1}{2},\frac{1}{2},t^2}\left(\frac{u(t)-\left({}_0\mathfrak{J}^{\frac{1}{2},\frac{1}{2},t^2}\mathbb{F}\right)(t,u(t))}{\mathbb{G}(t,u(t))}\right)\Bigg|_{t=0^+}=\left({}_0\mathfrak{J}^{\frac{1}{2},\frac{1}{2},t^2}u\right)(\zeta)\,,\zeta\in\,]0,1[\ ; \end{cases} \tag{2.4.1}$$

et

$$\varphi(t)=t^2, \lambda=\frac{1}{9}, \alpha=\frac{6}{8}, \beta=\frac{3}{2}, \rho=\sigma=\frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} \mathbb{H}(t,u(t)) &= \frac{1}{9+t^2}+\frac{t^2}{99}\left|u(t)\right|, \\ \mathbb{G}(t,u(t)) &= \frac{1}{8+e^t}+\frac{e^{-3t}}{1+9e^t}\frac{|u(t)|}{1+u^2(t)}, \\ \mathbb{F}(t,u(t)) &= \frac{1}{9+t^2}+\frac{t^2}{9\left(1+t^2\right)}\frac{|u(t)|}{1+u^2(t)}. \end{aligned}$$

Donc, on a

$$\mathcal{K}_\varphi=1, \mathcal{K}_\mathcal{F}=\frac{1}{9}, \mathcal{K}_\mathcal{G}=\frac{1}{10},$$

$$\mathcal{H}_1=\frac{1}{9\left(1+t^2\right)}, \mathcal{H}_2(t)=\frac{t^2}{99},$$

$$\mathcal{K}_\mathcal{F}^*=\mathcal{K}_\mathcal{G}^*=\mathcal{H}_1^*=\frac{1}{9} \quad et \quad \mathcal{H}_2^*=\frac{1}{99}<1.$$

Par conséquent, les hypothèses ($\mathbb{HP}_0$)*-*($\mathbb{HP}_4$) *sont satisfaites. En fait, nous avons*

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{\sqrt{2}e^{-1}}{9\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{9e}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\simeq 0,032614, \\ \mathcal{B}_1 &= \frac{\frac{e^{-1}}{9}2^{\frac{9}{4}}}{\Gamma\left(\frac{13}{4}\right)}+\frac{\frac{e^{-1}}{9}2^{\frac{5}{4}}}{\Gamma\left(\frac{9}{4}\right)}\simeq 0,84853, \\ \mathcal{B}_2 &= \frac{2^{\frac{9}{4}}\frac{e^{-1}}{99}}{\Gamma\left(\frac{13}{4}\right)}+\frac{e^{-2}2^{\frac{5}{4}}}{\Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)}\simeq 0,41677, \\ \Upsilon &= \mathcal{B}_1+\mathcal{B}_2 r\simeq 0,84853+0,41677r, \\ \mathcal{B}_3 &\simeq 0.150083+0,041677r, \\ \mathcal{B}_4 &= \frac{\frac{2e^{-1}}{9}\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}+\frac{\Upsilon}{9}\simeq 0,15951+0,04631r. \end{aligned}$$

Par (2.3.8), $r \simeq 0.2005$; et donc $\mathcal{B}_3 < 1$. En conséquence, toutes les conditions du Théorème 2.3.1 sont satisfaites. Alors, le problème fractionnaire hybride (2.4.1) admet au moins une solution sur $[0,1]$.

Exemple 2.4.2 *Considérons le problème fractionnaire hybride suivant :*

$$\begin{cases} {}_0\mathfrak{D}^{\frac{6}{8},\frac{1}{2},t^2}\left[{}_0\mathfrak{D}^{\frac{3}{2},\frac{1}{2},t^2}\left(\frac{u(t)-\left({}_0\mathfrak{J}^{\frac{1}{2},\frac{1}{2},t^2}\mathbb{F}\right)(t,u(t))}{\mathbb{G}(t,u(t))}\right)\right] = \mathbb{H}(t,u(t)), t \in J = [0,1], \\ {}_0\mathfrak{J}^{\frac{1}{4},\frac{1}{2},t^2}\left({}_0\mathfrak{D}^{\frac{3}{2},\frac{1}{2},t^2}\left(\frac{u(t)-\left({}_0\mathfrak{J}^{\frac{1}{2},\frac{1}{2},t^2}\mathbb{F}\right)(t,u(t))}{\mathbb{G}(t,u(t))}\right)\right)\Big|_{t=0^+} = \frac{1}{15}, \\ {}_0\mathfrak{J}^{\frac{1}{2},\frac{1}{2},t^2}\left(\frac{u(t)-\left({}_0\mathfrak{J}^{\frac{1}{2},\frac{1}{2},t^2}\mathbb{F}\right)(t,u(t))}{\mathbb{G}(t,u(t))}\right)\Big|_{t=0^+} = 0, \\ {}_0\mathfrak{J}^{\frac{-1}{2},\frac{1}{2},t^2}\left(\frac{u(t)-\left({}_0\mathfrak{J}^{\frac{1}{2},\frac{1}{2},t^2}\mathbb{F}\right)(t,u(t))}{\mathbb{G}(t,u(t))}\right)\Big|_{t=0^+} = \left({}_0\mathfrak{J}^{\frac{1}{2},\frac{1}{2},t^2}u\right)(\zeta), \zeta \in]0,1[\ ; \end{cases} \tag{2.4.2}$$

et

$$\varphi(t) = t^4, \lambda = \frac{1}{15}, \alpha = \frac{5}{6}, \beta = \frac{5}{4}, \rho = \sigma = \frac{1}{4},$$

$$\begin{aligned} \mathbb{H}(t,u(t)) &= \frac{1}{20+\sqrt{t}} + \frac{t^3}{100}|u(t)|, \\ \mathbb{G}(t,u(t)) &= \frac{1}{8+e^t} + \frac{e^{-3t}}{1+9e^t}\sin u(t), \\ \mathbb{F}(t,u(t)) &= \frac{1}{9+t^2} + \frac{t^2}{9(1+t^2)}\tan u(t). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\mathbb{G}(t,u(t)) - \mathbb{G}(t,v(t))| &\leq \frac{e^{-3t}}{1+9e^t}|\sin u(t) - \sin v(t)| \leq \frac{1}{(1+9)}|u(t)-v(t)| \\ |\mathbb{F}(t,u(t)) - \mathbb{F}(t,v(t))| &\leq \frac{t^2}{9(1+t^2)}|\tan u(t) - \tan v(t)| \leq \frac{1}{9}|u(t)-v(t)| \end{aligned}$$

Donc, on a

$$\mathcal{K}_\varphi = 1, \mathcal{K}_\mathcal{F} = \frac{1}{9}, \mathcal{K}_\mathcal{G} = \frac{1}{10},$$

$$\mathcal{H}_1 = \frac{1}{20+\sqrt{t}}, \mathcal{H}_2(t) = \frac{t^3}{100},$$

$$\mathcal{K}_\mathcal{F}^* = \mathcal{K}_\mathcal{G}^* = \S\S, \mathcal{H}_1^* = \frac{1}{20} \quad et \quad \mathcal{H}_2^* = \frac{1}{100} < 1.$$

Par conséquent, les hypothèses ($\mathbb{HP}_0$)-($\mathbb{HP}_4$) sont satisfaites. En fait, nous avons

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \frac{\sqrt{2}e^{-1}}{9\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{9e}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \simeq 0,032614, \\
\mathcal{B}_1 &= \frac{\frac{e^{-1}}{9}2^{\frac{9}{4}}}{\Gamma\left(\frac{13}{4}\right)} + \frac{\frac{e^{-1}}{9}2^{\frac{5}{4}}}{\Gamma\left(\frac{9}{4}\right)} \simeq 0,84853, \\
\mathcal{B}_2 &= \frac{2^{\frac{9}{4}}\frac{e^{-1}}{99}}{\Gamma\left(\frac{13}{4}\right)} + \frac{e^{-2}2^{\frac{5}{4}}}{\Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)} \simeq 0,41677, \\
\Upsilon &= \mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2 r \simeq 0,84853 + 0,41677r, \\
\mathcal{B}_3 &\simeq 0.150083 + 0,041677r, \\
\mathcal{B}_4 &= \frac{\frac{2e^{-1}}{9}\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} + \frac{\Upsilon}{9} \simeq 0,15951 + 0,04631r.
\end{aligned}$$

Par (2.3.8), $r \simeq 0.2005$; et donc $\mathcal{B}_3 < 1$. En conséquence, toutes les conditions du Théorème 2.3.1 sont satisfaites. Alors, le problème fractionnaire hybride (2.4.1) admet au moins une solution sur $[0,1]$.

Bibliographie

[1] **R. L. Bagley et P. J. Torvik**, ”A theoritical basis for the application of fractional calculus in viscoelasticity”. Journal of Rheology, 27 :201-210, (1983).

[2] **M. Caputo**, ”Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent”. Part II, Geophys. J. R. Astr. Soc., 13 :529-539, (1967).

[3] **M. Caputo et F. Mainardi**, ”Linear models of dissipation in anelastic solids”. Riv. Nuovo Cimento (Ser. II), 1 :161-198, (1971).

[4] **R. Coleman**, ”Calculus on Normed Vector Spaces”, 2012th edition, Springer Science & BusinessMedia, (2012). 4, 5

[5] **S. Das**. ”Functional fractional calculus for system identification and controls”. Springer, New York, (2008).

[6] **K. Deimling**, ”Nonlinear Functional Analysis”. Springer : New York, NY, USA, (1985).

[7] **B.C. Dhage**, ”A fixed point theorem in Banach algebras with applications to functional integral equations”. Kyungpook Math. J. 44, 145–155 (2004)

[8] **J. Dugundji and A. Granas**, ”Fixed Point Theory”. Springer, New York, (2003). 4, 5, 20, 21.

[9] **F. Jarad, M.A. Alqudah, T. Abdeljawad**, ”On more general forms of proportional fractional operators”. Open Math. 2020, 18, 167–176.

[10] **F. Jarad, T. Abdeljawad, S. Rashid, Z. Hammouch**, ”More properties of the proportional fractional integrals and derivatives of a function with respect to another function”. Adv. Differ. Equ. 2020, 2020, 303

[11] **A. Granas and J. Dugundji**, ”Fixed Point Theory”. Springer-Verlag, New York, (2003).

[12] **A. Kilbas, H. M. Srivastava, et J. J. Trujillo**, "Theory and Application of Fractional Differential equations". Elsevier, North-Holland, (2006).

[13] **M.A.Krasnoselskii**, "Two remarkson the method of successive approximations". Uspekhi Mat.Nauk,10,123-127.(1955).

[14] **P. Kumlin**, "A Note on Fixed Point Theory". Mathematics Chalmers & GU, TMA 401/MAN 670 Functional Analysis, (2003/2004). 4, 6

[15] **N. Mahmudov, M. Matar**, "Existence of mild solutions for hybrid differential equations with arbitrary fractional order". TWMS J. Pure Appl. Math. 8(2), 160–169 (2017).

[16] **F. Mainradi, P. Pironi**, "The fractional Langevin equation : Brownian motion revisited", Extracta Math., **11** (1996), pages 140-154.

[17] **R. E.Megginson**, "An Introduction to Banach Space Theory", Springer, (1998). 4, 5.

[18] **J.Mikusinski**, "The Bochner Integral", Springer Basel AG, Verlag New York, (1978). 4, 5, 6

[19] **T. Muensawat, S. K. Ntouyas, J. Tariboon**, "Systems of generalized Sturm-Liouville and Langevin fractional differentialequations", Adv. Difference Equ., **2017** (2017), pages 1-15.

[20] **K. Nouri, D. Baleanu, L. Torkzadeh**, "Study on application of hybrid functions to fractional differential equations". Iran. J. Sci. Technol., Trans. A, Sci. 42(3), 1343–1350 (2018)

[21] **K. B. Oldham, J. Spanier**. "The fractional calculus". Academic Press, New York, (1974).

[22] **I. Podlubny**, "Fractional Differential Equations". Academic Press, New York, (1999).

[23] **B. P. Rynne and M. A. Youngson**, "Linear Functional Analysis", second edition, Springer-Verlag London, (2008). 4, 5

[24] **G. Samko, A.A. Kilbas, O.I. Marichev**, "Fractional Integral and Derivative : Theory and Applications". Gordon & Breach, Yverdon (1993).

[25] **S.Sitho, S.K. Ntouyas, J. Tariboon**, "Existence results for hybrid fractional integro-differential equations". Bound. Value Probl. 2015, Article ID113 (2015).

[26] **W. Sudsutad, J. Tariboon**, "Nonlinear fractional integro-differential Langevin equation involving two fractional orders withthree-point multi-term fractional integral boundary conditions". J. Appl. Math. Comput., **43** (2013), pages 507-522.

[27] **S. Sun, Y. Zhao, Z. Han, Y. Lin**, ”The existence of solutions for boundary value problem of fractional hybrid differential equations”. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 17, 4961–4967 (2012).

[28] **T. Yu, K. Deng, M. Luo**, ”Existence and uniqueness of solutions of initial value problems for nonlinear Langevin equationinvolving two fractional orders”. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., **19** (2014), 1661–1668.1.