RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN TIARET
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUES
Département de Mathématiques

MÉMOIRE MASTER

Présenter en vue de l'obtention du diplôme de master

Spécialité :
« Mathématiques »

Option :
« AFA / AFED»

Présenté Par :
BOUKHOLKHAL ABDELBASET et BAGHDADI DJELLOUL

Sous L'intitulé :

Inégalités de Chebyshev et de Grüss via le calcul fractionnaire

A Soutenu le 23 / 06 / 2024
à Tiaret devant le jury composé de :

Mr SENOUCI Abdelkader	Prof	Université Ibn Khaldoun, Tiaret	Président
Mr BENAISSA Bouharket	MCA	Université Ibn Khaldoun, Tiaret	Examinateur
Mr AZZOUZ Noureddine	MCA	C. Universitaire Nour Bachir, El Bayadh	Encadreur

Année universitaire : 2023/2024

Table des matières

Remerciement

Avant tout, nous remercions ALLAH, le tout puissant de nous avoir donné le courage et la volonté pour accomplir ce travail.

Nous tenons à exprimer toute notre reconnaissances à notre encadreur, Mr.AZZOUZ Noureddine , pour avoir dirigé ce travail avec abnégation et disponibilité. Ces conseils nous ont été d'un grand apport pour l'accomplissement de ce mémoire.

Nous adressons nos plus vifs remerciements à Mr.SENOUCI Abdelkader qui nous a honoré en acceptant de présider le jury de soutenance de notre mémoire.

Des remerciements vont de même à Mr.BENAISSA Bouharket qui nous a honoré en acceptant la discussion de notre mémoire et de participer au jury de soutenance de notre mémoire.

Nous n'oublions pas de remercier nos parents de croire en nous et de nous soutenir tout au long de cette marche scolaire.

Enfin, nous aimerions remercier tous nos collègues et amis qui nous ont encouragé à terminer ce travail.

Introduction et préliminaire

0.1 Introduction

Les inégalités en mathématiques sont un sujet vaste et fascinant, abordé à la fois dans des contextes élémentaires et avancés des mathématiques. Voici quelques exemples des inégalités mathématiques et leurs applications.

Inégalité triangulaire : Bien connue en géométrie euclidienne, elle exprime que dans un triangle, la longueur d'un côté est inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés. En mathématique moderne elle s'énonce : Si (E, d) est un espace métrique alors

$$\forall (x, y, z) \in E^3,\ d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z).$$

Cette inégalité est utilisée pour majoration et/ou minoration dans les modèles et simulations de phénomènes physiques, biologiques et économiques, pour établir des limites sur les variables impliquées et pour garantir la stabilité de ces modèles.

Inégalité de Cauchy-Schwarz : Elle énonce une relation entre les produits scalaires de deux vecteurs. Si H étant un espace muni d'un produit scalaire $< .\, , . >$ et $\|.\|$ la norme associée , alors pour tout $x, y \in H$ on a

$$< x, y > \leq \|x\|\, \|y\|.$$

Cette inégalité constitue un outil fondamental de l'analyse dans les espaces de Hilbert, elle permet de construire un isomorphisme entre l'espace hilbertien H dans son dual topologique : pour tout $y \in H$ fixé, la forme linéaire qui à x associe l'image $< x, y >$ est une bijection continue, de norme égale à celle de y. Ceci permet d'énoncer le théorème de représentation de Riesz fondamental en EDP.

On la retrouve aussi parmi les outils très utiles en théorie des probabilités et du traitement du signal. En optimisation, appliquée à la dérivée directionnelle, elle permet de justifier que le gradient donne la direction de plus grande pente. En physique, elle joue un rôle important dans le principe d'incertitude d'Heisenberg.

Inégalité Arithmético-Géométrique (AG) : Elle établit un lien entre la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique de nombres réels positive.

Théorème 0.1. *Pour tout réels $x, y \geq 0$ on a*

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}, \tag{1}$$

Preuve 0.1. *Soient $x, y \geq 0$, on a*

$$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 = x+y-2\sqrt{xy} \geq 0$$

on déduit

$$2\sqrt{xy} \leq x+y$$

on divise par deux pour obtenir (1).

En élevant au carré dans l'inégalité (1) on obtient le résultat suivant qu'on utilisera plus loin dans ce mémoire

Corollaire 0.1. *Pour tout réels $x, y \geq 0$ on a*

$$4xy \leq (x+y)^2 . \tag{2}$$

D'autre inégalités élémentaires, comme l'inégalité de Hölder et l'inégalité de Minkowski, sont des résultats fondamentaux en mathématiques et ont des applications variées.

Ces exemples, parmi d'autres montrent à quel point les inégalités mathématiques trouvent leurs applications en sciences et en technologie. Pour explorer plus en détail des inégalités mathématiques et leur importance dans divers domaines, voire [4, 7, 9].

Dans ce mémoire on s'intéresse particulièrement à l'inégalité de Chebyshev et celle de Grüss ; on considère l'opérateur suivant défini pour deux fonctions f et g, intégrables et de même sens de variation sur un intervalle $[a, b]$, par

$$T(f,g) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx - \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx\right).$$

En 1882 Chebyshev a montré que

$$T(f,g) \geqslant 0 , \tag{3}$$

et en 1935 G Grüss a prouvé que, si au plus f et g sont bornés, alors

$$T(f,g) \leqslant \frac{(M-m)(P-p)}{4} . \tag{4}$$

Notre mémoire est organisé comme suit :

– Une section de préliminaires va suivre où nous présentons quelques notions utiles dans les chapitres suivants.

– Dans un premier chapitre nous présenterons les inégalités classiques de Chebyshev et de Grüss, dans les cas discret et continue.

– Le deuxième chapitre est consacré au calculs fractionnaires utiles pour le chapitre suivant.

– Le dernier chapitre présentera les inégalités de Chebyshev et de Grüss, via les intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville.

0.2 Préliminaires

Espaces de Lebesgue

Pour $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq \infty$ et $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, on définies les espaces de Lebesgue

$$L^p([a,b]) = \left\{ f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R},\ f \text{ est mesurable et } \int_a^b |f(x)|^p \, dx < \infty \right\} \ , \ 1 \leq p < \infty \ ,$$

et

$$L^\infty([a,b]) = \left\{ f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R},\ f \text{ est mesurable et } \exists M \geq 0 \ : \ |f(x)| \leq M \quad p.p \, x \in [a,b] \right\},$$

on dit que f est essentiellement bornée sur $[a,b]$. La plus petite constante $M \geq 0$ vérifiant $|f(x)| \leq M \quad p.p \ x \in [a,b]$ est par définition la norme de la fonction f dans $L^\infty([a,b])$.

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Pour deux fonctions $f, g \in L^2([a,b])$, alors

$$\int_a^b |f(x)g(x)| \, dx \leq \left(\int_a^b f^2(x) \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g^2(x) \, dx \right)^{\frac{1}{2}} . \tag{5}$$

On aura aussi besoin de la forme discrète de cette inégalité vraie pour toutes suites de nombres réels $\{a_i, b_i \ : i = 1, ..., n \ ; \ n \in \mathbb{N}^*\}$:

$$\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} . \tag{6}$$

Théorème de Fubini et Formule de Dirichlet

Si $f(x,y)$ une fonction intégrable sur $\Omega = (a,b) \times (c,d) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, alors pour presque tout $x \in (a,b)$ $f(x,y)$ est intégrable sur (c,d), pour presque tout $y \in (c,d)$ $f(x,y)$ est intégrable sur (a,b) et on a

$$\int_\Omega f(x,y) \, dx \, dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) dy \right) \, dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y) \, dx \right) \, dy \ .$$

En particulier on a la formule de Dirichlet suivante (sous l'hypothèse de convergence de l'une des deux intégrales doubles) :

$$\int_a^b \int_a^x f(x,y) \, dy \, dx = \int_a^b \int_y^b f(x,y) \, dx \, dy \ .$$

Fonctions synchrones

Définition 0.1. *Deux fonctions ou deux suites sont dites synchrones (respect. asynchrones) si elles sont monotones variant dans la même direction (respect. variant dans des directions inverses).*

On a la caractérisation suivante :

Théorème 0.2. *Si deux fonctions $f, g : [a, b] \to I\!R$ sont synchrones, alors pour tout $x, y \in [a, b]$ on a*

$$[f(x) - f(y)]\,[g(x) - g(y)] \geq 0\,. \tag{7}$$

Si f et g sont asynchrones alors l'inégalité (7) est inversée.

Démonstration. Soient $x < y$ de $[a, b]$ et $f, g : [a, b] \to \mathrm{I\!R}$ synchrones ; on a deux possibilités :

1. f et g croissantes, alors
$$x < y \implies f(x) - f(y) \leq 0,$$
et
$$x < y \implies g(x) - g(y) \leq 0,$$
en combinant les deux inégalités précédentes on obtient l'inégalité (7).
2. f et g décroissantes, alors
$$x < y \implies f(x) - f(y) \geq 0,$$
et
$$x < y \implies g(x) - g(y) \geq 0,$$
en combinant les deux inégalités précédentes on obtient aussi l'inégalité (7).

Si f et g sont asynchrones alors $(f(x) - f(y))$ et $(g(x) - g(y))$ sont se signes contraires par conséquence l'inégalité (7) est inversée.

□

On a des résultats analogue pour le cas discret :

Théorème 0.3. *Si les suites $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in I\!R^n$ et $(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in I\!R^n$ sont synchrones, alors pour tout $i, j \in \overline{1, n}$ on a*

$$(a_i - a_j)\ (b_i - b_j) \geq 0\,. \tag{8}$$

Si (a_i) et (b_i) sont asynchrones alors l'inégalité (8) est inversée.

Démonstration. Soient $i < j$, (a_i) et (b_i) étant synchrones on a deux possibilités :

1. (a_i) et (b_i) croissantes, alors
$$i < j \implies a_i - a_j \leq 0,$$
et
$$i < j \implies b_i - b_j \leq 0,$$
en combinant les deux inégalités précédentes on obtient l'inégalité (8).
2. (a_i) et (b_i) décroissantes, alors
$$i < j \implies a_i - a_j \geq 0,$$
et
$$i < j \implies b_i - b_j \geq 0,$$
en combinant les deux inégalités précédentes on obtient aussi l'inégalité (8).

Si (a_i) et (b_i) sont asynchrones alors $(a_i - a_j)$ et $(b_i - b_j)$ sont se signes contraires par conséquence l'inégalité (8) est inversée.

□

Chapitre 1

Inégalités classiques

1.1 Inégalité de Chebyshev

1.1.1 Cas discret

L'inégalité classique de Chebyshev dans le cas discret est une comparaison entre la moyenne arithmétique du produit de nombres réels et le produit des moyennes arithmétique individuelles de ces nombres.
On s'est inspiré du travail dans[[1] ; Théorème 1.9] pour établir le résultat suivant.

Théorème 1.1. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ deux suites monotones dans la même direction (synchrone), alors*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \;\geq\; \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i\right). \tag{1.1}$$

Si a et b sont asynchrone, alors l'inégalité (1.1) *est inversée.*

Preuve de théorème 1.1.
On suppose que, pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, les suites $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ et $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ sont synchrone, alors d'après (8) on a

$$(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0, \qquad \text{pour tout} \quad 1 \leq i < j \leq n,$$

en additionnant par rapport à i et par rapport à j nous obtenant

$$\begin{aligned}
0 \;&\leq\; \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[(a_i - a_j)(b_i - b_j)\right] \\
&=\; \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[a_i b_i + a_j b_j - a_j b_i - a_i b_j\right] \\
&=\; n\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + n\sum_{j=1}^{n} a_j b_j - \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right) \\
&=\; 2n\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) - 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right),
\end{aligned}$$

il s'ensuit donc

$$n\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right).$$

On divise maintenant par n^2 pour obtenir (1.1). $\square$

1.1.2 Cas continue

L'inégalité de Chebyshev dans le cas continue implique la moyenne intégrale du produit de fonctions et le produit des moyennes intégrales individuelles de ces fonctions.
On s'est inspiré du travail dans[[5] ; Théorème 2.1] pour établir le résultat suivant.

Théorème 1.2. *Soient deux fonctions $f, g : [a, b] \to I\!R$ integrables sur $[a, b]$.*
Si f et g sont synchrones, alors

$$\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx. \tag{1.2}$$

Preuve de théorème 1.2 : f et g étant synchrone, on a d'après (7)

$$[f(x) - f(y)]\,[g(x) - g(y)] \geq 0, \quad \forall x, y \in [a, b],$$

en intégrant par rapport à $x \in [a, b]$ puis par rapport à $y \in [a, b]$, il résulte

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_a^b \int_a^b [f(x) - f(y)][g(x) - g(y)]dxdy \\
&= \int_a^b \int_a^b [f(x)g(x) - f(x)g(y) - f(y)g(x) + f(y)g(y)]dxdy \\
&= \int_a^b \int_a^b f(x)g(x)dxdy - \int_a^b \int_a^b f(x)g(y)dxdy - \int_a^b \int_a^b f(y)g(x)dxdy + \int_a^b \int_a^b f(y)g(y)dxdy \\
&= (b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \int_a^b g(y)dy - \int_a^b f(y)dy \int_a^b g(x)dx + (b-a)\int_a^b f(y)g(y)dy \\
&= 2\left[(b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx\right],
\end{aligned}$$

il s'ensuit donc

$$\int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx \leq (b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx,$$

en divisant par $(b-a)^2$ on obtient (1.2).

$\square$

Exemple 1.1.

Premier exemple :
Considérons $a = 0, b = 1$, $f(x) = 2 - x$ *et* $g(x) = -2x^2 + x + 1$ *;* f *est décroissante sur* $I\!R$ *et* $g'(x) = -4x + 1$, *donc* g *est croissante sur* $]-\infty, \frac{1}{4}]$ *et est décroissante sur* $[\frac{1}{4}, -\infty[$. *On déduit*

1. *Sur* $[0, \frac{1}{4}]$ *les fonctions* f *et* g *sont asynchrone :*
   $4\int_0^{\frac{1}{4}} f(x)dx = 4\int_0^{\frac{1}{4}} (2-x)dx = \frac{15}{8}$,
   $4\int_0^{\frac{1}{4}} g(x)dx = 4\int_0^{\frac{1}{4}} (-2x^2 + x + 1)dx = \frac{13}{12}$,
   $4\int_0^{\frac{1}{4}} f(x)\,g(x)dx = 4\int_0^{\frac{1}{4}} (2-x) \times (-2x^2 + x + 1)dx = \frac{779}{384}$,
   on déduit
   $$\left(4\int_0^{\frac{1}{4}} f(x)dx\right)\left(4\int_0^{\frac{1}{4}} g(x)dx\right) = \frac{15}{8}\times\frac{13}{12} \approx\ 2,0312\ >\ 2.0286 \approx \frac{779}{384} = 4\int_0^{\frac{1}{4}} f(x)g(x)dx.$$

2. *Sur* $[\frac{1}{4}, 1]$ *les fonctions* f *et* g *sont synchrone :*
   $\frac{4}{3}\int_{\frac{1}{4}}^1 f(x)dx = \frac{4}{3}\int_{\frac{1}{4}}^1 (2-x)dx = \frac{11}{8}$,
   $\frac{4}{3}\int_{\frac{1}{4}}^1 g(x)dx = \frac{4}{3}\int_{\frac{1}{4}}^1 (-2x^2 + x + 1)dx = \frac{3}{4}$,
   $\frac{4}{3}\int_{\frac{1}{4}}^1 f(x)\,g(x)dx = \frac{4}{3}\int_{\frac{1}{4}}^1 (2-x) \times (-2x^2 + x + 1)dx = \frac{141}{128}$,
   on déduit
   $$\left(\frac{4}{3}\int_{\frac{1}{4}}^1 f(x)dx\right)\left(\frac{4}{3}\int_{\frac{1}{4}}^1 g(x)dx\right) = \frac{11}{8}\times\frac{3}{4} \approx 1,03125\ <\ 1,128 \approx \frac{141}{128} = \frac{4}{3}\int_{\frac{1}{4}}^1 f(x)g(x)dx.$$

Deuxième exemple :
Considérons $a = 0, b = \pi$, $f(x) = \sin(x)$ *et* $g(x) = x$ *;* f *est croissante sur* $[0, \frac{\pi}{2}]$ *et décroissante sur* $[\frac{\pi}{2}, \pi]$, *et* g *est croissante sur* $I\!R$

1. *Sur* $[0, \frac{\pi}{2}]$ *les fonctions* f *et* g *sont synchrone :*
   $\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))dx = \frac{2}{\pi}$,
   $\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x)dx = \frac{\pi}{4}$,
   $\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,g(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x)) \times (x)dx = \frac{2}{\pi}$,

on déduit
$$\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx\right)\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)dx\right) = \frac{2}{\pi}\times\frac{\pi}{4} \approx 0.5 < 0.636 \approx \frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)g(x)dx.$$

2. *Sur* $[\frac{\pi}{2},\pi]$ *les fonctions* f *et* g *sont asynchrone :*
$$\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\sin(x))dx = \frac{2}{\pi},$$
$$\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} g(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(x)dx = \frac{3\pi}{4},$$
$$\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\,g(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\sin(x))\times(x)dx = \frac{2\,(\pi-1)}{\pi},$$
on déduit
$$\left(\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)dx\right)\left(\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} g(x)dx\right) = \frac{2}{\pi}\times\frac{3\pi}{4} \approx 1,5 > 1,363 \approx \frac{2\,(\pi-1)}{\pi} = \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)g(x)dx.$$

Remarque 1.1.
L'inégalité (1.2) *est inversée si les fonctions* f *et* g *sont asynchrones (sens de variation inverse).*

En s'inspirant des résultats de [2] établis dans le cadre fractionnaire, on établi le corollaire suivant dans un cadre classique (intégrale de Riemann).

Corollaire 1.1. *Si* $(f_i)_{i=1,\dots,n}$ $n \in I\!N^*$ *sont des fonctions intégrables, positives et croissantes sur* $[a,b]$*, alors nous avons*
$$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f_i(t)dt\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b\left(\prod_{i=1}^{n} f_i(t)\right)dt. \tag{1.3}$$

Preuve de corollaire 1.1 : Nous procédons par induction, pour $n=1$, nous avons
$$\int_a^b f_1(t)dt \leq \int_a^b f_1(t)dt\ ,$$
pour $n=2$, en appliquant l'inégalité de Chebychev (1.2) nous obtenons :
$$\int_a^b f_1(t)dt\int_a^b f_2(t) \leq (b-a)\int_a^b (f_1f_2)(t)dt\ ,$$
pour $n=3$ appliquons (1.2) à f_1 et f_2 puis posons $g=f_1f_2$, alors
$$\begin{aligned}\int_a^b f_1(t)dt\int_a^b f_2(t)dt\int_a^b f_3(t)dt &= \left[\int_a^b f_1(t)dt\int_a^b f_2(t)dt\right]\int_a^b f_3(t)dt\\ &\leq (b-a)\int_a^b (f_1f_2)(t)dt\int_a^b f_3(t)dt\\ &= (b-a)\int_a^b g(t)dt\int_a^b f_3(t)dt,\end{aligned}$$

en appliquant (1.2) à g et f_3

$$\begin{aligned}\int_a^b f_1(t)dt\int_a^b f_2(t)dt\int_a^b f_3(t)dt &\le (b-a)^2\int_a^b (gf_3)(t)dt\\ &= (b-a)^2\int_a^b (f_1f_2f_3)(t)dt.\end{aligned}$$

Supposons maintenant que (hypothèse d'induction)

$$\prod_{i=1}^{n-1}\int_a^b f_i(t)dt \ \le\ (b-a)^{n-2}\int_a^b\left(\prod_{i=1}^{n-1} f_i(t)\right)\, dt\ , \tag{1.4}$$

alors

$$\prod_{i=1}^{n}\int_a^b f_i(t)dt \ =\ \left(\prod_{i=1}^{n-1}\int_a^b f_i(t)\, dt\right)\int_a^b f_n(t)dt\ ,$$

compte tenu de l'hypothèse (1.4), on obtient :

$$\prod_{i=1}^{n}\int_a^b f_i(t)dt\ \le\ \left[(b-a)^{n-2}\int_a^b\left(\prod_{i=1}^{n-1} f_i(t)\right)\, dt\right]\int_a^b f_n(t)dt\ .$$

Puisque $(f_i)_{i=1,\ldots,n}$ sont des fonctions croissantes positives alors $\left(\prod_{i=1}^{n-1} f_i\right)(t)$ est une fonction croissante, nous pouvons donc appliquer le Théorème 1.2 aux fonctions $\prod_{i=1}^{n-1} f_i = g$ et $f_n = f$ qui sont synchrone :

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n}\int_a^b f_i(t)dt &\le (b-a)^{n-2}\int_a^b g(t)dt\int_a^b f(t)dt\\ &\le (b-a)^{n-2}\,(b-a)\int_a^b g(t)\, f(t)dt\\ &= (b-a)^{n-1}\int_a^b\left(\prod_{i=1}^{n-1} f_i(t)\right) f_n(t)\ dt\ ,\end{aligned}$$

donc

$$\prod_{i=1}^{n}\int_a^b f_i(t)dt\ \le\ (b-a)^{n-1}\int_a^b\left(\prod_{i=1}^{n} f_i(t)\right)dt, \tag{1.5}$$

en divisant par $(b-a)^n$ on obtient le résultat désire (1.3). □

1.2 Inégalité de Grüss

1.2.1 Cas discret

Par analogie au travail precedent, on va présenter d'abord l'inégalité de Grüss dans le cas discret qui donne une estimation de la différence entre la moyenne arithmétique du produit de nombres réels et le produit des moyennes arithmétique individuelles de ces nombres. nous supposerons les suites synchrones.

Théorème 1.3.
Si les suites $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ *et* $(b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ *sont synchrones et telles qu'ils existent des constantes réelles* m, M, p, P *vérifiant*

$$m < a_i < M \quad \text{et} \quad p < b_i < P \quad \text{pour} \quad i = 1, \dots, n \quad (n \in \mathbb{N}^*), \tag{1.6}$$

alors on a

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i \, b_i \; - \; \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i \right) \cdot \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} b_i \right) \right| \leq \frac{(M-m)(P-p)}{4}, \tag{1.7}$$

On aura besoin des lemmes suivants.

Lemme 1. *Soit* $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ *vérifiant la condition*

$$\forall i = 1, ...n : \quad c \leq u_i \leq C \; ; \quad c, C \in \mathbb{R}, \tag{1.8}$$

alors

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (u_i)^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} u_i \right)^2 \leq \left(C - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} u_i \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} u_i - c \right) \tag{1.9}$$

Preuve de lemme :
Si $u_1, u_2, \dots, u_n$ est une suite vérifiant la condition (1.8), alors pour i, j quelconque on peut vérifier aisément que

$$\begin{aligned} (C-u_j)(u_i-c) + (C-u_i)(u_j-c) \\ -(C-u_i)(u_i-c) - (C-u_j)(u_j-c) \\ = (u_i)^2 + (u_j)^2 - 2u_j u_i. \end{aligned} \tag{1.10}$$

En additionnant par rapport à $i \in (1, n)$

$$\begin{aligned} \Big(C - u_j\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} u_i - cn\Big) + \Big(u_j - c\Big)\Big(Cn - \sum_{i=1}^{n} u_i\Big) \\ - \sum_{i=1}^{n} \left(C - u_i\right)\left(u_i - c\right) - \left(C - u_j\right)\left(u_j - c\right)n \\ = \sum_{i=1}^{n} (u_i)^2 + n(u_j)^2 + 2\, u_j \sum_{i=1}^{n} u_i \,. \end{aligned}$$

On additionne maintenant le résultat précédent par rapport à $j \in (1, n)$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\left(Cn - \sum_{j=1}^{n} u_j\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} u_i - cn\right) + \left(\sum_{j=1}^{n} u_j - cn\right) \times \left(Cn - \sum_{i=1}^{n} u_i\right) \\
&\quad - n \sum_{i=1}^{n} \big(C - u_i\big)\big(u_i - c\big) - n \sum_{j=1}^{n} \big(C - u_j\big)\big(u_j - c\big) \\
&\quad = n \sum_{i=1}^{n} (u_i)^2 + n \sum_{j=1}^{n} (u_j)^2 + 2 \left(\sum_{j=1}^{n} u_j\right) \left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right),
\end{aligned}$$

après changement d'indices on aura

$$\begin{aligned}
&2\left(Cn - \sum_{j=1}^{n} u_j\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} u_i - cn\right) - 2\,n \sum_{i=1}^{n} \big(C - u_i\big)\big(u_i - c\big) \\
&\quad = 2\,n \sum_{i=1}^{n} (u_i)^2 + 2 \left(\sum_{j=1}^{n} u_j\right)^2,
\end{aligned}$$

d'où

$$\left(Cn - \sum_{i=1}^{n} u_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} u_i - cn\right) - n \sum_{i=1}^{n} \big(C - u_i\big)\big(u_i - c\big) = n \sum_{i=1}^{n} (u_i)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right)^2. \tag{1.11}$$

Comme $c \leq u_i \leq C$ par hypothèse, on déduit que

$$n \sum_{i=1}^{n} \big(C - u_i\big)\big(u_i - c\big) \geq 0\,,$$

et par suite (1.11) donne

$$\left(Cn - \sum_{i=1}^{n} u_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} u_i - cn\right) \geq n \sum_{i=1}^{n} (u_i)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right)^2,$$

en divisant par n^2 on obtient

$$\left(C - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i - c\right) \geq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (u_i)^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i\right)^2,$$

ce qui termine la preuve du lemme.

□

Lemme 2. *Pour tout* $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in I\!R^n$ *et* $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in I\!R^n$, *on a*

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} (a_i - a_j)(b_i - b_j) = n \sum_{i=1}^{n} a_i b_i - \sum_{i=1}^{n} b_i \sum_{i=1}^{n} a_i. \tag{1.12}$$

Preuve du lemme 2 : Soient $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, alors pour tout $1 \leq i, j \leq n$ on a

$$(a_i - a_j)(b_i - b_j) = a_i b_i - a_i b_j - a_j b_i + a_j b_j, \tag{1.13}$$

on additionne par rapport à $i \in (1, n)$

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - a_j)(b_i - b_j) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i - b_j \sum_{i=1}^{n} a_i - a_j \sum_{i=1}^{n} b_i + n a_j b_j, \tag{1.14}$$

puis en additionnant (1.14) par rapport à $j \in (1, n)$, nous obtenons

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_j)(b_i - b_j) = n \sum_{i=1}^{n} a_i b_i - \sum_{j=1}^{n} b_j \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} a_j \sum_{i=1}^{n} b_i + n \sum_{j=1}^{n} a_j b_j$$

$$= 2n \sum_{i=1}^{n} a_i b_i - 2 \sum_{i=1}^{n} b_i \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

d'où

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_j)(b_i - b_j) = 2n \sum_{i=1}^{n} a_i b_i - 2 \sum_{i=1}^{n} b_i \sum_{i=1}^{n} a_i. \tag{1.15}$$

On divise (1.15) par 2 pour obtenir le résultat désiré. □

Preuve du Théorème 1.3. Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, considérons deux suites $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ et $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ synchrones et vérifiant les conditions (1.6), on applique deux fois de suite l'inégalité de Cauchy-Schwarz (6)

$$\begin{aligned}
I &= \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_j)(b_i - b_j) \right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |(a_i - a_j)(b_i - b_j)| \right) \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i - a_j)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} (b_i - b_j)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (b_i - b_j)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (b_i - b_j)^2 \right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

on développe les carrés et on utilise la linéarité de la somme

$$
\begin{aligned}
0 \le I \quad &\le \quad \left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2 - 2\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_i a_j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(a_j)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\times \quad \left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2 - 2\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_i b_j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(b_j)^2 \right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}
$$

d'où

$$
\begin{aligned}
0 \le I \quad &\le \quad \left(n\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2 \; - 2\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{n} a_j \; + n\sum_{j=1}^{n}(a_j)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\times \quad \left(n\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2 \; - 2\sum_{i=1}^{n} b_i \sum_{j=1}^{n} b_j \; + n\sum_{j=1}^{n}(b_j)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Par changement d'indice et en élevant au carré on déduit

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(a_i - a_j)(b_i - b_j) \right)^2 \quad &\le \quad 2\left(n\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2 \; - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)^2 \right) \\
&\times \quad 2\left(n\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2 \; - \left(\sum_{i=1}^{n} b_i \right)^2 \right),
\end{aligned}
$$

et en appliquant le lemme 2 on obtient

$$
\begin{aligned}
4\left(n\sum_{i=1}^{n} a_i b_i - \sum_{i=1}^{n} b_i \sum_{i=1}^{n} a_i . \right)^2 \quad &\le 2\left(n\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2 \; - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)^2 \right) \\
&\times 2\left(n\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2 \; - \left(\sum_{i=1}^{n} b_i \right)^2 \right).
\end{aligned}
\tag{1.16}
$$

On applique maintenant le Lemme 1 pour $u_i = a_i$ avec $c = m$ et $C = M$ on aura

$$
n\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)^2 \le \left(Mn - \sum_{i=1}^{n} a_i \right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i - mn \right), \tag{1.17}
$$

puis encore une fois pour $u_i = b_i$ avec $c = p$ et $C = P$, alors

$$
n\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} b_i \right)^2 \le \left(Pn - \sum_{i=1}^{n} b_i \right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i - pn \right) \tag{1.18}
$$

En remplaçant (1.17) et (1.18) dans (1.16), on obtient

$$
\begin{aligned}
16\left(n\sum_{i=1}^{n} a_i b_i - \sum_{i=1}^{n} b_i \sum_{i=1}^{n} a_i \right)^2 \quad &\le 4\left(Mn - \sum_{i=1}^{n} a_i \right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i - mn \right) \\
&\times 4\left(Pn - \sum_{i=1}^{n} b_i \right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i - pn \right).
\end{aligned}
\tag{1.19}
$$

Maintenant on utilise l'inégalité (2) pour obtenir les résultats suivants

$$4\left(Mn-\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}a_i-mn\right)\leq(n(M-m))^2\,, \tag{1.20}$$

et

$$4\left(Pn-\sum_{i=1}^{n}b_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}g(x)-pn\right)\leq(n(P-p))^2\,. \tag{1.21}$$

En combinant (1.19), (1.20) et (1.21), nous obtenons

$$16\left(n\sum_{i=1}^{n}a_ib_i-\sum_{i=1}^{n}b_i\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2\leq n^2(M-m)^2\times\ n^2(P-p)^2\,, \tag{1.22}$$

d'où

$$\left|n\sum_{i=1}^{n}a_ib_i-\sum_{i=1}^{n}b_i\sum_{i=1}^{n}a_i\right|\leq n^2\,\frac{(M-m)(P-p)}{4},$$

on divise par n^2 pour obtenir le résultat (1.7), ce qui termine la preuve du Théorème 1.3. □

1.2.2 Cas continue

On présente maintenant le théorème de Grüss pour le cas intégrale qui présente une estimation de la différence entre la moyenne intégrale du produit de fonctions et le produit des moyennes intégrales individuelles de ces fonctions.

En s'inspirant des résultats dans [3] établis dans un cadre fractionnaire, on a repris le travail en l'adaptant aux intégrales non fractionnaires.

Théorème 1.4.
Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a,b]$, synchrones et satisfaisant les conditions

$$\forall x\in[a,b]\quad m\leq f(x)\leq M\quad et\quad p\leq g(x)\leq P;\quad m,M,p,P\in I\!R\,, \tag{1.23}$$

alors

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx-\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx\right)\leq\frac{(m-M)(p-P)}{4}. \tag{1.24}$$

Pour la preuve nous avons besoin des lemmes suivants.

Lemme 3. *Soit u une fonction intégrable vérifiant la condition*

$$\forall x\in[a,b]\quad c\leq u(x)\leq C\ ;\qquad c,C\in I\!R\,, \tag{1.25}$$

alors on a

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b u^2(x)dx-\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b u(x)dx\right)^2\leq\left(C-\frac{1}{b-a}\int_a^b u(x)dx\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b u(x)dx-c\right). \tag{1.26}$$

Preuve de lemme :
Soit u une fonction intégrable sur $[a,b]$ vérifiant la condition (1.25), alors pour tout $x \in [a,b]$ on a

$$\begin{aligned} &(C-u(y))(u(x)-c)+(C-u(x))(u(y)-c) \\ &-(C-u(x))(u(x)-c)-(C-u(y))(u(y)-c) \\ &=u^2(x)+u^2(y)-2u(y)u(x). \end{aligned} \tag{1.27}$$

On intègre par rapport à $x \in [a,b]$

$$\begin{aligned} &\Big(C-u(y)\Big)\Big(\int_a^b u(x)dx-c(b-a)\Big)+\Big(u(y)-c\Big)\Big(C(b-a)-\int_a^b u(x)dx\Big) \\ &-\int_a^b \big(C-u(x)\big)\big(u(x)-c\big)\,dx-\big(C-u(y)\big)\big(u(y)-c\big)(b-a) \\ &=\int_a^b u^2(x)\,dx+(b-a)u^2(y)\ +2\int_a^b u(x)u(y)\,dx, \end{aligned}$$

puis on intègre par rapport à $y \in [a,b]$ pour obtenir

$$\begin{aligned} &\Big(C(b-a)-\int_a^b u(y)dy\Big)\times\Big(\int_a^b u(x)dx-c(b-a)\Big) \\ &+\Big(\int_a^b u(y)dy-c(b-a)\Big)\times\Big(C(b-a)-\int_a^b u(x)dx\Big) \\ &-(b-a)\int_a^b \big(C-u(x)\big)\big(u(x)-c\big)\,dx-(b-a)\int_a^b \big(C-u(y)\big)\big(u(y)-c\big)dy \\ &=\int_a^b\int_a^b u^2(x)\,dxdy+(b-a)\int_a^b u^2(y)\,dy+2\int_a^b\int_a^b u(x)u(y)\,dxdy. \\ &=(b-a)\int_a^b u^2(x)\,dx+(b-a)\int_a^b u^2(y)\,dy+2\int_a^b\int_a^b u(x)u(y)\,dxdy. \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} &2\Big(C(b-a)-\int_a^b u(x)dx\Big)\times\Big(\int_a^b u(x)dx-c(b-a)\Big) \\ &-2\,(b-a)\int_a^b \big(C-u(x)\big)\big(u(x)-c\big)\,dx \\ &=2\,(b-a)\int_a^b u^2(x)\ +2\ \Big(\int_a^b u(x)\,dx\Big)^2. \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} &\Big(C(b-a)-\int_a^b u(x)dx\Big)\Big(\int_a^b u(x)dx-c(b-a)\Big) \\ &-(b-a)\int_a^b \big(C-u(x)\big)\big(u(x)-c\big)\,dx=(b-a)\int_a^b u^2(x)\,dx+\Big(\int_a^b u(x)dx\Big)^2 \end{aligned} \tag{1.28}$$

comme $c \leq u(x) \leq C$ par hypothèse on déduit que

$$(b-a)\int_a^b \big(C-u(x)\big)\big(u(x)-c\big)\,dx \geq 0,$$

et par suite (1.28) donne

$$\left(C(b-a)-\int_a^b u(x)dx\right)\left(\int_a^b u(x)dx - c(b-a)\right) \geq (b-a)\int_a^b u^2(x)\,dx + \left(\int_a^b u(x)dx\right)^2$$

en divisant par $(b-a)^2$ on aura

$$\left(C-\frac{1}{b-a}\int_a^b u(x)dx\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b u(x)dx - c\right) \geq \frac{1}{b-a}\int_a^b u^2(x)dx - \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b u(x)dx\right)^2,$$

ce qui termine la preuve du lemme.

$\square$

Lemme 4. *(identité de K.A.Andreiev)*
Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a,b]$, on a

$$\frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b (f(x)-f(y))(g(x)-g(y))dxdy = (b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx - \int_a^b g(x)dx\int_a^b f(x)dx. \tag{1.29}$$

Preuve du lemme 4 :
Étant données deux fonctions f et g intégrable sur $[a,b]$, on définie pour $x,y \in (a,b)$

$$\begin{aligned} H(x,y) &= (f(x)-f(y))(g(x)-g(y)) \\ &= f(x)g(x) - f(x)g(y) - f(y)g(x) + f(y)g(y), \end{aligned} \tag{1.30}$$

et intégrons par rapport à $x \in (a,b)$

$$\int_a^b H(x,y)dx = \int_a^b f(x)g(x)dx - g(y)\int_a^b f(x)dx - f(y)\int_a^b g(x)dx + (b-a)f(y)g(y)\,, \tag{1.31}$$

puis intégrons (1.31) par rapport à $y \in (a,b)$

$$\begin{aligned} \int_a^b\int_a^b H(x,y)dxdy &= (b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx - \int_a^b g(y)dy\int_a^b f(x)dx \\ &\quad - \int_a^b f(y)dy\int_a^b g(x)dx + (b-a)\int_a^b f(y)g(y)dy \\ &= 2(b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx - 2\int_a^b g(x)dy\int_a^b f(x)dx, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit le résultat désiré

$$\frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b H(x,y)dxdy=(b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx-\int_a^b g(x)dx\int_a^b f(x)dx.$$

□

Preuve du Théorème 1.4 :
Soient f et g deux fonctions synchrones et remplissant les conditions (1.23) ; étant synchrones on a

$$\forall x,y\in[a,b]\ :\ (f(x)-f(y))(g(x)-g(y))\geq 0\ ,$$

en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz (5) nous obtenons

$$\begin{aligned}
I &= \left(\int_a^b\int_a^b (f(x)-f(y))(g(x)-g(y))\,dxdy\right)^2\\
&= \left(\int_a^b\int_a^b |(f(x)-f(y))(g(x)-g(y))|\,dxdy\right)^2\\
&\leq \left(\int_a^b\left(\int_a^b (f(x)-f(y))^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b (g(x)-g(y))^2dx\right)^{\frac{1}{2}}dy\right)^2\\
&\leq \left(\int_a^b\int_a^b (f(x)-f(y))^2dxdy\right)\times\left(\int_a^b\int_a^b (g(x)-g(y))^2dxdy\right),
\end{aligned}$$

on développe les carrés et on utilise la linéarité de l'intégral

$$\begin{aligned}
I &\leq \left(\int_a^b\int_a^b f^2(x)dx\,dy-2\int_a^b\int_a^b f(x)f(y)dx\,dy+\int_a^b\int_a^b f^2(y)dx\,dy\right)\\
&\times \left(\int_a^b\int_a^b g^2(x)dx\,dy-2\int_a^b\int_a^b g(x)g(y)dx\,dy+\int_a^b\int_a^b g^2(y)dx\,dy\right),
\end{aligned}$$

puis en séparant les variables

$$\begin{aligned}
I &\leq \left((b-a)\int_a^b f^2(x)\,dx-2\int_a^b f(x)\,dx\int_a^b f(y)\,dy+(b-a)\int_a^b f^2(y)\,dy\right)\\
&\times \left((b-a)\int_a^b g^2(x)\,dx-2\int_a^b g(x)\,dx\int_a^b g(y)\,dy+(b-a)\int_a^b g^2(y)\,dy\right),
\end{aligned}$$

on déduit (variables muettes)

$$\begin{aligned}
\left(\int_a^b\int_a^b (f(x)-f(y))(g(x)-g(y))dxdy\right)^2 &\leq \left(2(b-a)\int_a^b f^2(x)\,dx-2\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)^2\right)\\
&\times \left(2(b-a)\int_a^b g^2(x)\,dx-2\left(\int_a^b g(x)\,dx\right)^2\right),
\end{aligned}$$

et en appliquant le lemme 4 on obtient

$$4\left((b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx - \int_a^b g(x)dy \int_a^b f(x)dx.\right)^2$$

$$\leq 2\left((b-a)\int_a^b f^2(x)dx - \left(\int_a^b f(x)dx\right)^2\right) \times 2\left((b-a)\int_a^b g^2(x)dx - \left(\int_a^b g(x)dx\right)^2\right). \tag{1.32}$$

On applique maintenant le Lemme 3 pour $u(x) = f(x)$ avec $c = m$ et $C = M$ on aura

$$(b-a)\int_a^b f^2(x)dx - \left(\int_a^b f(x)dx\right)^2 \leq \left(M(b-a) - \int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_a^b f(x)dx - m(b-a)\right), \tag{1.33}$$

puis encore une fois pour $u(x) = g(x)$ avec $c = p$ et $C = P$ ce qui donne

$$(b-a)\int_a^b g^2(x)dx - \left(\int_a^b g(x)dx\right)^2 \leq \left(P(b-a) - \int_a^b g(x)dx\right)\left(\int_a^b g(x)dx - p(b-a)\right). \tag{1.34}$$

En remplaçant (1.33) et (1.34) dans (1.32), on obtient

$$\begin{gathered}16\left((b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx - \int_a^b g(x)dy \int_a^b f(x)dx\right)^2 \leq \\ 4\left(M(b-a) - \int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_a^b f(x)dx - m(b-a)\right) \times \\ 4\left(P(b-a) - \int_a^b g(x)dx\right)\left(\int_a^b g(x)dx - p(b-a)\right).\end{gathered} \tag{1.35}$$

Maintenant on utilise l'inégalité (2) pour obtenir les résultats suivants

$$4\left(M(b-a) - \int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_a^b f(x)dx - m(b-a)\right) \leq ((b-a)(M-m))^2 \tag{1.36}$$

et

$$4\left(P(b-a) - \int_a^b g(x)dx\right)\left(\int_a^b g(x)dx - p(b-a)\right) \leq ((b-a)(P-p))^2. \tag{1.37}$$

En combinant (1.35), (1.36) et (1.37), nous obtenons

$$\begin{gathered}16\left((b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx - \int_a^b g(x)dx \int_a^b f(x)dx\right)^2 \leq \\ (b-a)^2(M-m)^2 \times (b-a)^2(P-p)^2,\end{gathered} \tag{1.38}$$

d'où

$$\left|(b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx - \int_a^b g(x)dx \int_a^b f(x)dx\right| \leq (b-a)^2\,\frac{(M-m)(P-p)}{4},$$

on divise par $(b-a)^2$ pour obtenir (1.24) ce qui termine la preuve du Théorème 1.4. $\square$

Chapitre 2

Calcul Fractionnaire

2.1 Les fonctions spécifiques

2.1.1 Fonction Gamma

L'un des outils de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma qui prolonge naturellement la factorielle aux nombre réels positifs (et même aux nombres complexe à parties réelles positives).

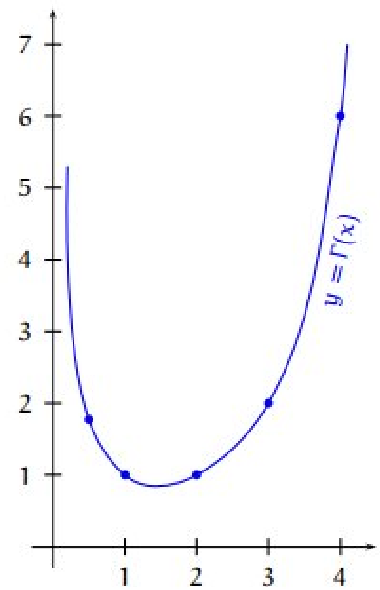
Définition 2.1. *Soit $x > 0$, la fonction Gamma d'Euler est définie par l'intégrale suivante :*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \tag{2.1}$$

(*cette intégrale est convergente pour tout $x > 0$*)

Exemple 2.1. *Voici les images de la fonction Gamma pour quelques valeurs réels particulières*

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{1-1} dx = 1 \ , \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \ .$$



Proposition 2.1. *Pour tout $x > 0$, et pour tout $n \in I\!N^*$ on a :*

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)\,, \tag{2.2}$$

$$\Gamma(n) = (n-1)!\ . \tag{2.3}$$

Preuve 2.1. *1. Soit $x > 0$, par une intégration par partie , on obtient*

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t}t^x\,dt \\ &= \Big[-e^{-t}\ t^x\Big]_{t=0}^{t=+\infty} + x\int_0^{+\infty} e^{-t}\,t^{x-1}\,dt \\ &= x\Gamma(x)\,.\end{aligned}$$

2. Soit $n \in I\!N^*$, en appliquant successivement la formule précédente

$$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n) = n\,(n-1)\,\Gamma(n-1) = ... = n\,(n-1)\,(n-2)\,...\,1\Gamma(1) = n!$$

2.1.2 Fonction Bêta

Définition 2.2. *Soient $x, y > 0$, la fonction Bêta est définie par :*

$$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt\,. \tag{2.4}$$

Exemple 2.2. *pour $x > 0$*

$$B(x,1) = \int_0^1 t^{x-1}dt\ = \left.\frac{t^x}{x}\right|_0^1 = \frac{1}{x}\ .$$

Proposition 2.2. *La fonction Bêta est reliée aux fonctions Gamma par la relation suivante :*

$$\forall x, y > 0 \ : \quad B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \, . \tag{2.5}$$

Preuve : Pour $x, y > 0$ on a

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^\infty \int_0^\infty t_1^{x-1} e^{-t_1} t_2^{y-1} e^{-t_2} dt_1 dt_2 = \int_0^{+\infty} t_1^{x-1} \left(\int_0^{+\infty} t_2^{y-1} e^{-(t_1+t_2)} dt_2 \right) dt_1 \, ,$$

en effectuant le changement de variable

$$s = t_1 + t_2,$$

on trouve

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^{+\infty} t_1^{x-1} dt_1 \int_{t_1}^{+\infty} (s-t_1)^{y-1} e^{-s} ds \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-s} ds \int_0^{t_1} (s-t_1)^{y-1} t_1^{x-1} dt_1 \, . \end{aligned}$$

Si on pose $r = \dfrac{t_1}{s}$ alors on aboutit à

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^{+\infty} e^{-s} ds \left(\int_0^1 (rs)^{x-1} (s-rs)^{y-1} s dr \right) \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-s} ds \left(s^{x-1+y-1+1} \int_0^1 (r)^{x-1} (1-r)^{y-1} dr \right) \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-s} ds \left(s^{x+y-1} \ B(x,y) \right) \\ &= \int_0^{+\infty} s^{(x+y)-1} e^{-s} ds \ B(x,y) \\ &= \Gamma(x+y) \ B(x,y) \, , \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat désiré

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

□

Proposition 2.3. *Pour tout* $(x,y) \in I\!R_+^*$, *on a*

$$\mathrm{B}(x,y) = \mathrm{B}(y,x) \, ,$$

c'est-à-dire : la fonction Bêta est symétrique

Preuve : On a
$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt\,,$$
en effectuant le changement de variable
$$t' = 1-t\ , \quad \text{donc} \quad t = 1-t' \quad \text{et} \quad dt = -dt'\,,$$
on déduit
$$B(x,y) = \int_1^0 (1-t')^{x-1}t'^{y-1}\,(-dt')$$
$$= \int_0^1 t'^{y-1}(1-t')^{x-1}\,dt'$$
$$= B(y,x)\,.$$
□

2.2 Les opérateurs de Riemann-Liouville (R-L)

2.2.1 Intégration d'ordre entier

Premier opérateur : Soit $f \in L^1([a,b])$, on défini la fonction $J_{a^+}f : [a,b] \to \mathbb{R}$ par
$$J_{a^+}f(x) = \int_a^x f(t)\,dt\ ,$$
alors $J_{a^+}f$ est absolument continue. On peut intégrer une deuxième fois etc ...

On note $J^1_{a^+}f(x) := J_{a^+}f(x)$, on va composer successivement cette intégration i.e.
$$J^2_{a^+}f(x) = \int_a^x J^1_{a^+}f(s)ds \quad ... \quad J^n_{a^+}f(x) = \int_a^x J^{n-1}_{a^+}f(s)ds.$$
Appliquons le théorème de Fubini, on obtient
$$J^2_{a^+}f(x) = \int_a^x \left(\int_a^s f(t)\,dt\right) ds = \int_a^x \int_a^s f(t)\,dt\,ds$$
$$= \int_a^x \int_t^x f(t)\,ds\,dt = \int_a^x f(t)\left(\int_t^x ds\right) dt$$
$$= \int_a^x (x-t)f(t)\,dt\,.$$

Donc on a
$$J^2_{a^+}f(x) = \int_a^x (x-t)f(t)\,dt\,.$$

De la même manière, intégrons $J^2_{a^+}f(x)$

$$
\begin{aligned}
J^3_{a^+}f(x) &= \int_a^x J^2_{a^+}f(s)\,ds \\
&= \int_a^x \left(\int_a^s (s-t)\,f(t)\,dt\right)\,ds = \int_a^x\int_a^s (s-t)f(t)\,dt\,ds \\
&= \int_a^x\int_t^x (s-t)f(t)\,ds\,dt = \int_a^x \left(\int_t^x (s-t)f(t)\,ds\right)dt \\
&= \int_a^x f(t)\left(\int_t^x (s-t)\,ds\right)dt = \int_a^x f(t)\left(\left[\frac{1}{2}(s-t)^2\right]_t^x\right)dt \\
&= \frac{1}{2}\int_a^x (x-t)^2 f(t)\,dt\,,
\end{aligned}
$$

donc

$$J^3_{a^+}f(x) = \frac{1}{2}\int_a^x (x-t)^2 f(t)\,dt\,.$$

On intègre encore une fois pour confirmer ...

$$
\begin{aligned}
\int_a^x J^3_{a^+}\,f(s)\,ds &= \int_a^x \left(\frac{1}{2}\int_a^s (s-t)^2\,f(t)\,dt\right)\,ds = \frac{1}{2}\int_a^x\int_a^s (s-t)^2\,f(t)\,dt\,ds \\
&= \frac{1}{2}\int_a^x\int_t^x (s-t)^2\,f(t)\,ds\,dt = \frac{1}{2}\int_a^x \left(\int_t^x (s-t)^2\,f(t)\,ds\right)\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int_a^x f(t)\,\left(\int_t^x (s-t)^2\,ds\right)\,dt = \frac{1}{2}\int_a^x f(t)\,\left(\left[\frac{1}{3}(s-t)^3\right]_t^x\right)\,dt\,,
\end{aligned}
$$

on obtient

$$J^4_{a^+}\,f(x) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\int_a^x (x-t)^3 f(t)\,dt = \frac{1}{3!}\int_a^x (x-t)^3 f(t)\,dt\,.$$

Utilisons un raisonnement par récurrence pour montrer le résultat de la n-ième composition $J^n_{a^+}\,f$ de l'opérateur J_{a^+} appliquée à f : supposons que

$$J^n_{a^+}\,f(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)\,dt\ , \tag{2.6}$$

et montrons que

$$J^{n+1}_{a^+}\,f(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f(t)\,dt\ .$$

On intègre $J_{a^+}^n$ une fois

$$\int_a^x J_{a^+}^n f(s)\,ds = \int_a^x \left(\frac{1}{(n-1)!}\int_a^s (s-t)^{n-1} f(t)\,dt\right)\,ds = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x\int_a^s (s-t)^{n-1} f(t)\,dt\,ds$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x\int_t^x (s-t)^{n-1} f(t)\,ds\,dt = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x \left(\int_t^x (s-t)^{n-1} f(t)\,ds\right)\,dt$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f(t)\left(\int_t^x (s-t)^{n-1}\,ds\right)\,dt = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f(t)\left(\left[\frac{1}{n}(s-t)^n\right]_t^x\right)\,dt\,,$$

on obtient

$$J_{a^+}^{n+1} f(x) = \frac{1}{n}\times\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^n f(t)\,dt = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f(t)\,dt\,.$$

Deuxième opérateur : Soit $f \in L^1([a,b])$, on défini la fonction $J_{b^-} f : [a,b] \to \mathbb{R}$ par

$$J_{b^-} f(x) = \int_x^b f(t)\,dt\ ,$$

alors $J_{b^-} f$ est absolument continue. On peut intégrer une deuxième fois etc ...

On va composer successivement cette intégration, en notant $J_{b^-}^1 f(x) := J_{b^-} f(x)$, alors

$$J_{b^-}^2 f(x) = \int_x^b J^1 f(s)ds \quad \ldots \quad J_{b^-}^n f(x) = \int_x^b J^{n-1} f(s)ds.$$

En appliquant le théorème de Fubini, on obtient

$$J_{b^-}^2 f(x) = \int_x^b \left(\int_s^b f(t)\,dt\right)\,ds = \int_x^b\int_s^b f(t)\,dtds$$

$$= \int_x^b\int_x^t f(t)\,ds\,dt = \int_x^b \left(\int_x^t f(t)\,ds\right)\,dt$$

$$= \int_x^b f(t)\left(\int_x^t ds\right)\,dt = \int_x^b (t-x) f(t)\,dt$$

d'où

$$J_{b^-}^2 f(x) = \int_x^b (t-b) f(t)\,dt\,.$$

De la même manière, intégrons $J^2 f(x)$

$$J^3_{b^-} f(x) = \int_x^b J^2 f(s)\, ds$$

$$= \int_x^b \left(\int_s^b (t-s)\, f(t)\, dt \right) ds = \int_x^b \int_s^b (t-s) f(t)\, dt\, ds$$

$$= \int_x^b \int_x^t (s-t) f(t)\, ds\, dt = \int_x^b \left(\int_x^t (t-s) f(t)\, ds \right) dt$$

$$= \int_x^b f(t) \left(\int_x^t (t-s)\, ds \right) dt = \int_x^b f(t) \left(\left[\frac{1}{2} (t-s)^2 \right]_x^t \right) dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_x^b (t-x)^2 f(t)\, dt\,,$$

donc

$$J^3_{b^-} f(x) = \frac{1}{2} \int_x^b (t-x)^2 f(t)\, dt\,.$$

Un raisonnement par récurrence donnera le résultat de la n-ième composition $J^n_{b^-} f$ de l'opérateur J_{b^-} appliquée à f.

Supposons

$$J^n_{b^-} f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_x^b (t-x)^{n-1} f(t)\, dt\ , \tag{2.7}$$

et montrons que

$$J^{n+1}_{b^-} f(x) = \frac{1}{n!} \int_x^b (t-x)^n f(t)\, dt\ .$$

En intégrant $J^n_{b^-}$ on aura

$$\int_x^b J^n_{b^-} f(s)\, ds = \int_x^b \left(\frac{1}{(n-1)!} \int_s^b (t-s)^{n-1} f(t)\, dt \right) ds = \frac{1}{(n-1)!} \int_x^b \int_s^b (t-s)^{n-1} f(t)\, dt\, ds$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_x^b \int_x^t (t-s)^{n-1} f(t)\, ds\, dt = \frac{1}{(n-1)!} \int_x^b \left(\int_t^x (s-t)^{n-1} f(t)\, ds \right) dt$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_x^b f(t) \left(\int_x^t (t-s)^{n-1}\, ds \right) dt = \frac{1}{(n-1)!} \int_x^b f(t) \left(\left[\frac{1}{n} (t-s)^n \right]_t^x \right) dt\,,$$

d'où

$$J^{n+1}_{b^-} f(x) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{(n-1)!} \int_x^b (t-b)^n f(t) dt = \frac{1}{n!} \int_x^b (t-x)^n f(t)\, dt\,.$$

2.2.2 Intégration d'ordre fractionnaire : opérateurs de Riemann-Liouville

S'inspirant des formules (2.6) et (2.7) obtenues sur $\mathbb{N}$, on propose les définitions suivantes des intégrales fractionnaires au sens de Riemann-Liouville d'ordre α réel positif.

Définition 2.3. *Soient $\alpha > 0$ et $f \in L^1([a,b])$, on définit les opérateurs intégrales à gauche (respectivement à droite) de Riemann-Liouville d'ordre α noté $J^\alpha_{a^+}$ (respectivement $J^\alpha_{b^-}$) par :*

$$J^\alpha_{a^+} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \quad a < x \leq b, \tag{2.8}$$

et

$$J^\alpha_{b^-} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt, \quad a \leq x < b. \tag{2.9}$$

où $\Gamma(\alpha)$ est la fonction gamma d'Euler.

Remarque 2.1. *Pour $\alpha = 0$ on définit* $J^0_{a^+} f(x) = f(x)$ *et* $J^0_{b^-} f(x) = f(x)$.

Pour $\alpha = 1$ on obtient $J^1_{a^+} f(x) = \int_a^x f(x)dx$ *et* $J^1_{b^-} f(x) = \int_x^b f(x)dx$.
(intégrale classique de Riemann).

Exemple 2.3.

$$\left(J^\alpha_{a^+} 1\right)(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-x)^{\alpha-1} dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{(t-x)^\alpha}{\alpha}\Big|_a^t = \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}. \tag{2.10}$$

$$\left(J^\alpha_{b^-} 1\right)(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (x-t)^{\alpha-1} dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{(x-t)^\alpha}{\alpha}\Big|_t^b = \frac{(b-t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}. \tag{2.11}$$

2.3 Propriétés des opérateurs de Riemann-Liouville

2.3.1 Propriété de semi-groupe

Proposition 2.4. *[6][8] Soient $f \in L^1([a,b])$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*_+$; pour tout $x \in [a,b]$ on a :*

$$J^\alpha_{a^+}\left(J^\beta_{a^+} f(x)\right) = J^{\alpha+\beta}_{a^+} f(x) = J^\beta_{a^+}\left(J^\alpha_{a^+} f(x)\right), \tag{2.12}$$

et

$$J^\alpha_{b^-}\left(J^\beta_{b^-} f(x)\right) = J^{\alpha+\beta}_{b^-} f(x) = J^\beta_{b^-}\left(J^\alpha_{b^-} f(x)\right). \tag{2.13}$$

Preuve de la proposition 2.4 : D'après la formule (2.8), on a

$$\begin{aligned}\left[J^\alpha_{a^+}\left(J^\beta_{a^+} f\right)\right](x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-s)^{\alpha-1} \left(J^\beta_{a^+} f\right)(s)ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-s)^{\alpha-1} \int_a^s (s-t)^{\beta-1} f(t)dtds,\end{aligned}$$

le théorème de Fubini permet d'écrire

$$\left[J_{a^+}^{\alpha}\left(J_{a^+}^{\beta}f\right)\right](x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x f(t)\left[\int_t^x (x-s)^{\alpha-1}(s-t)^{\beta-1}ds\right]dt,$$

en effectuant le changement de variable $s=t+(x-t)y,\ 0\leq y\leq 1$ on obtient

$$\left[J_{a^+}^{\alpha}\left(J_{a^+}^{\beta}f\right)\right](x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1(1-y)^{\alpha-1}y^{\beta-1}dydt.$$

Enfin, d'après (2.4) puis la relation (2.5), on obtient

$$\begin{aligned}\left[J_{a^+}^{\alpha}\left(J_{a^+}^{\beta}f\right)\right](x) &= \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha+\beta-1}dt\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^x (x-t)^{\alpha+\beta-1}f(t)dt\\ &= \left(J_{a^+}^{\alpha+\beta}f\right)(x).\end{aligned}$$

La deuxième égalité dans (2.12) est une conséquence de la commutativité : $\alpha+\beta=\beta+\alpha$. (2.13) se démontre de la même manière. □

2.3.2 Propriété de la bornitude

Maintenant nous allons montrer que ces opérateurs sont bien définis pour tout ordre positif et sont en outre bornés sur $L^1([a,b])$.

Théorème 2.1. *Si $f\in L^1([a,b])$, alors pour tout $\alpha>0$*

$$J_{a^+}^{\alpha}f\in L^1([a,b]) \quad \textit{et} \quad J_{b^-}^{\alpha}f\in L^1([a,b])\,. \tag{2.14}$$

De plus les opérateurs d'intégrations $J_{a^+}^{\alpha}$ et $J_{b^-}^{\alpha}$ sont bornés, plus précisément on a

$$\| J_{a^+}^{\alpha}f \|_{L^1([a,b])}\leq C \| f \|_{L^1([a,b])}\,, \tag{2.15}$$

et

$$\| J_{b^-}^{\alpha}f \|_{L^1([a,b])}\leq C \| f \|_{L^1([a,b])}\,, \tag{2.16}$$

avec $C=\dfrac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}$.

Preuve 2.2. *soit $J_{a^+}^{\alpha}f$ l'opérateur gauche de Riemann-Liouville, alors*

$$\begin{aligned}\| J_{a^+}^{\alpha}f \|_{L^1([a,b])} &= \int_a^b \left|J_{a^+}^{\alpha}f(x)\right|dx\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b\left|\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt\right|dx\\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}\left|f(t)\right|dt\,dx,\end{aligned}$$

en utilisant le Théorème de Fubini, on obtient

$$\| J^{\alpha}_{a^+} f \|_{L^1([a,b])} \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \int_t^b (x-t)^{\alpha-1} |f(t)| \, dx \, dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b |f(t)| \int_t^b (x-t)^{\alpha-1} \, dx \, dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b |f(t)| \left(\frac{1}{\alpha} \Big[(x-t)^{\alpha} \Big]_t^b \right) \, dx$$

$$= \frac{1}{\alpha \Gamma(\alpha)} \int_a^b |f(t)| \, (b-t)^{\alpha} \, dt,$$

et d'après la propriété (2.1) *de la fonction Gamma et la décroissance de la fonction* $t \to (b-t)^{\alpha}$

$$\| J^{\alpha}_{a^+} f \|_{L^1([a,b])} \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^b |f(t)| \, (b-t)^{\alpha} \, dt$$

$$\leq \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^b |f(t)| dt$$

$$= \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \| f \|_{L^1([a,b])} \, .$$

De la même façon, considérant l'opérateur gauche de Riemann-Liouville $J^{\alpha}_{b^-} f(x)$ *, alors*

$$\| J^{\alpha}_{b^-} f \|_{L^1([a,b])} = \int_a^b \left| J^{\alpha}_{b^-} f(x) \right| dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \left| \int_x^b (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \right| dx$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \int_x^b (x-t)^{\alpha-1} \left| f(t) \right| dt \, dx,$$

le Théorème de Fubini donne

$$\begin{aligned}
\| J_{b^-}^{\alpha} f \|_{L^1([a,b])} &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \int_a^t (t-x)^{\alpha-1} |f(t)|\, dx\, dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b |f(t)| \int_a^t (t-x)^{\alpha-1}\, dx\, dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b |f(t)| \left(\frac{1}{\alpha} \Big[(t-x)^{\alpha} \Big]_a^t \right) dx \\
&= \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} \int_a^b |f(t)|\, (t-a)^{\alpha}\, dt,
\end{aligned}$$

et de la propriété (2.1) *de la fonction Gamma et la décroissance de la fonction* $t \to (t-a)^{\alpha}$, *on aura*

$$\begin{aligned}
\| J_{b^-}^{\alpha} f \|_{L^1([a,b])} &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^b |f(t)|\, (t-a)^{\alpha}\, dt \\
&\leq \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^b |f(t)| dt \\
&= \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \| f \|_{L^1([a,b])} .
\end{aligned}$$

Remarque 1. *La propriété* (2.14) *montre que les opérateurs d'intégrations fractionnaires* $J_{a^+}^{\alpha}$ *et* $J_{b^-}^{\alpha}$ *sont bien définis sur* $L^1([a,b])$*, pour tout* $\alpha > 0$ *.*

Chapitre 3

Inégalités au sens fractionnaire

3.1 Inégalité de Chebyshev au sens fractionnaire

Théorème 3.1. *[2]*
Soient f et g deux fonctions synchrones sur $[a,b]$, alors

pour tout $a < t \leq b$ et $\alpha > 0$, nous avons

$$J_{a^+}^{\alpha}(fg)(t) \;\geq\; \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(t-a)^{\alpha}}\; J_{a^+}^{\alpha} f(t)\; J_{a^+}^{\alpha} g(t). \tag{3.1}$$

et pour $a \leq t < b$ et $\alpha > 0$ nous avons

$$J_{b^-}^{\alpha}(fg)(t) \;\geq\; \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-t)^{\alpha}}\; J_{b^-}^{\alpha} f(t)\; J_{b^-}^{\alpha} g(t). \tag{3.2}$$

Preuve de théorème 3.1 : Puisque les fonctions f et g sont synchrones sur $[a,b]$, alors pour tout $x \geq 0$, $y \geq 0$, nous avons,

$$[f(x)-f(y)]\,[g(x)-g(y)] \geq 0\,,$$

par conséquent

$$f(x)g(x)+f(y)g(y) \geq f(x)g(y)+f(y)g(x). \tag{3.3}$$

Prouvons d'abord l'inégalité (3.1) **:**

En multipliant (3.3) par $\frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} &\frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(x)g(x)+\frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(y)g(y) \\ &\geq \frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(x)g(y)+\frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(y)g(x)\,, \end{aligned} \tag{3.4}$$

on intègre (3.4) par rapport à $x \in (a,t)$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-x)^{\alpha-1} f(x)g(x)dx + f(y)\,g(y)\,\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-x)^{\alpha-1}dx \\
\geq\;\; & g(y)\,\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-x)^{\alpha-1} f(x)dx + f(y)\,\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-x)^{\alpha-1} g(x)dx\,,
\end{aligned}$$

d'où

$$J_{a^+}^{\alpha}(fg)(t) + f(y)\,g(y) \;\;\geq\;\; g(y)\,J_{a^+}^{\alpha}(f)(t) + f(y)\,J_{a^+}^{\alpha}(g)(t)\,. \tag{3.5}$$

De manière similaire, on multiplie (3.5) par $\frac{(t-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$

$$\begin{aligned}
&\frac{(t-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} J_{a^+}^{\alpha}(fg)(t) + \frac{(t-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(y)g(y)\left(J_{a^+}^{\alpha}1\right)(t) \\
\geq\; & \frac{(t-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g(y) J_{a^+}^{\alpha} f(t) + \frac{(t-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(y) J_{a^+}^{\alpha} g(t)\,,
\end{aligned} \tag{3.6}$$

puis en intégrant (3.6) par rapport $y \in (a,t)$

$$\begin{aligned}
&J_{a^+}^{\alpha}(fg)(t)\,\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-y)^{\alpha-1}dy + \frac{\left(J_{a^+}^{\alpha}1\right)(t)}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t f(y)g(y)(t-y)^{\alpha-1}dy \\
\geq\; & \frac{J_{a^+}^{\alpha} f(t)}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-y)^{\alpha-1} g(y)dy + \frac{J_{a^+}^{\alpha} g(t)}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-y)^{\alpha-1} f(y)dy.
\end{aligned}$$

Donc

$$J_{a^+}^{\alpha}(fg)(t)\;\left(J_{a^+}^{\alpha}1\right)(t)\; + \left(J_{a^+}^{\alpha}1\right)(t) J_{a^+}^{\alpha}(fg)(t) \geq J_{a^+}^{\alpha} f(t)\;J_{a^+}^{\alpha} g(t) + J_{a^+}^{\alpha} g(t)\;J_{a^+}^{\alpha} f(t),$$

d'où

$$J_{a^+}^{\alpha}(fg)(t) \geq \frac{1}{\left(J_{a^+}^{\alpha}1\right)(t)} J_{a^+}^{\alpha} f(t)\,J_{a^+}^{\alpha} g(t),$$

en utilisant (2.10), on obtient (3.1)

Prouvons maintenant l'inégalité (3.2) **:**

En multipliant (3.3) par $\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(x)g(x) + \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(y)g(y) \\
\geq\; & \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(x)g(y) + \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(y)g(x)\,,
\end{aligned} \tag{3.7}$$

on intègre (3.7) par rapport à $x \in (t, b)$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (x-t)^{\alpha-1} f(x) g(x) dx + f(y)\, g(y)\, \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (x-t)^{\alpha-1} dx \\
\geq \; & g(y)\, \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (x-t)^{\alpha-1} f(x) dx + f(y)\, \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (x-t)^{\alpha-1} g(x) dx\,,
\end{aligned}$$

d'où

$$J_{b^-}^{\alpha}(fg)(t) + f(y)\, g(y) \;\; \geq \;\; g(y)\, J_{b^-}^{\alpha}(f)(t) + f(y)\, J_{b^-}^{\alpha}(g)(t)\,. \tag{3.8}$$

De manière similaire, on multiplie (3.8) par $\frac{(y-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$

$$\begin{aligned}
&\frac{(y-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} J_{b^-}^{\alpha}(fg)(t) + \frac{(y-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(y) g(y) \left(J_{b^-}^{\alpha} 1\right)(t) \\
\geq\; & \frac{(y-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g(y) J_{b^-}^{\alpha} f(t) + \frac{(y-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(y) J_{b^-}^{\alpha} g(t)\,,
\end{aligned} \tag{3.9}$$

puis en intégrant (3.9) par rapport $y \in (t, b)$

$$\begin{aligned}
&J_{b^-}^{\alpha}(fg)(t)\, \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (y-t)^{\alpha-1} dy + \frac{\left(J_{b^-}^{\alpha} 1\right)(t)}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b f(y) g(y) (t-y)^{\alpha-1} dy \\
\geq\; & \frac{J_{b^-}^{\alpha} f(t)}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (y-t)^{\alpha-1} g(y) dy + \frac{J_{b^-}^{\alpha} g(t)}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (y-t)^{\alpha-1} f(y) dy.
\end{aligned}$$

Donc

$$J_{b^-}^{\alpha}(fg)(t) \;\; \left(J_{b^-}^{\alpha} 1\right)(t) \;\; + \left(J_{b^-}^{\alpha} 1\right)(t) J_{b^-}^{\alpha}(fg)(t) \geq J_{b^-}^{\alpha} f(t) \;\; J_{b^-}^{\alpha} g(t) + J_{b^-}^{\alpha} g(t) \;\; J_{b^-}^{\alpha} f(t),$$

d'où

$$J_{b^-}^{\alpha}(fg)(t) \geq \frac{1}{\left(J_{b^-}^{\alpha} 1\right)(t)} J_{b^-}^{\alpha} f(t)\, J_{b^-}^{\alpha} g(t),$$

en utilisant (2.11), on obtient (3.2). $\square$

Remarque 3.1. *Si α=1 alors on obtient le théorème* (1.2).

Remarque 3.2. *Les inégalités* (3.1) *et* (3.2) *sont inversées si les fonctions f et g sont asynchrones.*

Corollaire 3.1. *[2]*
Soient f et g deux fonctions synchrones sur $[a,b]$, alors

pour tout $a < t \leq b$, $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ nous avons

$$J_{a^+}^{\alpha} f(t)\, J_{a^+}^{\alpha} g(t) + J_{a^+}^{\beta} f(t)\, J_{a^+}^{\beta} g(t) \;\leq\; \frac{(t-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}\; J_{a^+}^{\beta}(fg)(t) + \frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\; J_{a^+}^{\alpha}(fg)(t) \tag{3.10}$$

et pour $a \leq t < b$ et $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ nous avons

$$J_{b^-}^{\alpha} f(t)\, J_{b^-}^{\alpha} g(t) + J_{b^-}^{\beta} f(t)\, J_{b^-}^{\beta} g(t) \;\leq\; \frac{(b-t)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}\; J_{b^-}^{\beta}(fg)(t) + \frac{(b-t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\; J_{b^-}^{\alpha}(fg)(t) \tag{3.11}$$

Preuve de corollaire : En appliquant l'inégalité (3.1) avec les ordres d'intégration β et α, on aura respectivement

$$J_{a^+}^{\beta} f(t) J_{a^+}^{\beta} g(t) \leq \frac{(t-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}\; J_{a^+}^{\beta}(fg)(t) \tag{3.12}$$

et

$$J_{a^+}^{\alpha} f(t) J_{a^+}^{\alpha} g(t) \leq \frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}(t)\; J_{a^+}^{\alpha}(fg)(t)\ , \tag{3.13}$$

en additionnant (3.12) et (3.13) on obtient (3.10).

Maintenant on applique l'inégalité (3.2) avec les ordres d'intégration β et α, on aura respectivement

$$J_{b^-}^{\beta} f(t) J_{b^-}^{\beta} g(t) \leq \frac{(b-t)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}\; J_{b^-}^{\beta}(fg)(t) \tag{3.14}$$

et

$$J_{b^-}^{\alpha} f(t) J_{b^-}^{\alpha} g(t) \leq \frac{(b-t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}(t)\; J_{b^-}^{\alpha}(fg)(t)\ , \tag{3.15}$$

on additionne (3.14) et (3.15) on obtient (3.11). □

Corollaire 3.2. *[2] Soient $(f_i)_{i=1,\ldots,n}$ des fonctions croissantes positives sur $[a,b]$, alors*

pour tout $a < t \leq b$ et $\alpha > 0$ nous avons

$$J_{a^+}^{\alpha}\left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right)(t) \geq \frac{1}{\left(\left(J_{a^+}^{\alpha} 1\right)(t)\right)^{n-1}} \prod_{i=1}^{n} J_{a^+}^{\alpha} f_i(t). \tag{3.16}$$

et pour $a \leq t < b$ et $\alpha > 0$ nous avons

$$J_{b^-}^{\alpha}\left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right)(t) \geq \frac{1}{\left(\left(J_{b^-}^{\alpha} 1\right)(t)\right)^{n-1}} \prod_{i=1}^{n} J_{b^-}^{\alpha} f_i(t). \tag{3.17}$$

où $J_{a^+}^{\alpha} 1(t)$ et $J_{b^-}^{\alpha} 1(t)$ sont données par (2.10) et (2.11) respectivement.

Preuve du corollaire : Pour $n=1$ nous avons pour tout $a<t\leq b,\ \alpha>0$

$$J_{a^+}^{\alpha}\left(f_1\right)(t)\geq J_{a^+}^{\alpha}\left(f_1\right)(t),$$

appliquant (3.1) nous obtenons pour $n=2$

$$J_{a^+}^{\alpha}\left(f_1f_2\right)(t)\geq\left(\left(J_{a^+}^{\alpha}1\right)(t)\right)^{-1}J_{a^+}^{\alpha}\left(f_1\right)(t)J_{a^+}^{\alpha}\left(f_2\right)(t),\qquad \text{pour tout } a<t\leq b,\alpha>0.$$

Supposons maintenant que

$$J_{a^+}^{\alpha}\left(\prod_{i=1}^{n-1}f_i\right)(t)\geq\left(\left(J_{a^+}^{\alpha}1\right)(t)\right)^{2-n}\prod_{i=1}^{n-1}J_{a^+}^{\alpha}f_i(t),\quad a<t\leq b,\alpha>0, \tag{3.18}$$

$\left(f_i\right)_{i=1,\ldots,n}$ étant des fonctions croissantes positives alors $\left(\prod_{i=1}^{n-1}f_i\right)(t)$ est une fonction croissante.

Nous pouvons donc appliquer le théorème (3.1) aux fonctions $\prod_{i=1}^{n-1}f_i=g,\ f_n=f$ qui sont synchrones. On obtient :

$$J_{a^+}^{\alpha}\left(\prod_{i=1}^{n}f_i\right)(t)=J_{a^+}^{\alpha}(gf)(t)\geq\left(\left(J_{a^+}^{\alpha}1\right)(t)\right)^{-1}J_{a^+}^{\alpha}\left(\prod_{i=1}^{n-1}f_i\right)(t)\ J_{a^+}^{\alpha}\left(f_n\right)(t).$$

Compte tenu de l'hypothèse (3.18), on obtient :

$$J_{a^+}^{\alpha}\left(\prod_{i=1}^{n}f_i\right)(t)\geq\left(\left(J_{a^+}^{\alpha}1\right)(t)\right)^{-1}\left(\left(\left(J_{a^+}^{\alpha}1\right)(t)\right)^{2-n}\left(\prod_{i=1}^{n-1}J_{a^+}^{\alpha}f_i\right)(t)\right)J_{a^+}^{\alpha}\left(f_n\right)(t),$$

donc

$$J_{a^+}^{\alpha}\left(\prod_{i=1}^{n}f_i\right)(t)\geq\left(\left(J_{a^+}^{\alpha}1\right)(t)\right)^{2-n-1}\left(\prod_{i=1}^{n-1}J_{a^+}^{\alpha}f_i\right)(t)\times J_{a^+}^{\alpha}\left(f_n\right)(t),$$

ce qui donne (3.16).

Prouvons maintenant l'inégalité (3.17)

Pour $n=1$ nous avons pour tout $a\leq t<b,\ \alpha>0$

$$J_{b^-}^{\alpha}\left(f_1\right)(t)\geq J_{b^-}^{\alpha}\left(f_1\right)(t),$$

on applique (3.1), alors pour $n=2$

$$J_{b^-}^{\alpha}\left(f_1f_2\right)(t)\geq\left(\left(J_{b^-}^{\alpha}1\right)(t)\right)^{-1}J_{b^-}^{\alpha}\left(f_1\right)(t)J_{b^-}^{\alpha}\left(f_2\right)(t),\quad \text{pour } a\leq t<b.$$

Supposons maintenant que

$$J_{b^-}^{\alpha}\left(\prod_{i=1}^{n-1}f_i\right)(t)\geq\left(\left(J_{b^-}^{\alpha}1\right)(t)\right)^{2-n}\prod_{i=1}^{n-1}J_{b^-}^{\alpha}f_i(t),\quad a\leq t<b,\ \alpha>0, \tag{3.19}$$

$(f_i)_{i=1,\dots,n}$ étant des fonctions croissantes positives alors $\left(\prod_{i=1}^{n-1} f_i\right)(t)$ est une fonction croissante.

Nous appliquons l'inégalité (3.2) aux fonctions $\prod_{i=1}^{n-1} f_i = g$, $f_n = f$ qui sont synchrones :

$$J_{b^-}^{\alpha}\left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right)(t) = J_{b^-}^{\alpha}(gf)(t) \geq \left(\left(J_{b^-}^{\alpha}1\right)(t)\right)^{-1} J_{b^-}^{\alpha}\left(\prod_{i=1}^{n-1} f_i\right)(t)\ J_{b^-}^{\alpha}(f_n)(t).$$

Compte tenu de l'hypothèse (3.19), on obtient :

$$J_{b^-}^{\alpha}\left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right)(t) \geq \left(\left(J_{b^-}^{\alpha}1\right)(t)\right)^{-1}\left(\left(\left(J_{b^-}^{\alpha}1\right)(t)\right)^{2-n}\left(\prod_{i=1}^{n-1} J_{b^-}^{\alpha} f_i\right)(t)\right) J_{b^-}^{\alpha}(f_n)(t),$$

donc

$$J_{b^-}^{\alpha}\left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right)(t) \geq \left(\left(J_{b^-}^{\alpha}1\right)(t)\right)^{2-n-1}\left(\prod_{i=1}^{n-1} J_{b^-}^{\alpha} f_i\right)(t) \times J_{b^-}^{\alpha}(f_n)(t),$$

ce qui donne (3.17). □

3.2 Inégalité de Grüss au sens fractionnaire

Théorème 3.2. *[3]*
Soient f et g deux fonctions intégrables et synchrones sur $[a,b]$ satisfaisant les conditions

$$\forall x \in [a,b]\ :\ m \leq f(x) \leq M \quad et \quad p \leq g(x) \leq P; \quad m, M, p, P \in \mathbb{R}, \tag{3.20}$$

alors pour $a < t \leq b$ et $\alpha > 0$ nous avons

$$\left|\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} J_{a^+}^{\alpha} fg(t) - J_{a^+}^{\alpha} f(t) J_{a^+}^{\alpha} g(t)\right| \leq \left(\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)^2 \frac{(M-m)(P-p)}{4}. \tag{3.21}$$

et pour $a \leq t < b$ et $\alpha > 0$ nous avons

$$\left|\frac{(b-t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} J_{b^-}^{\alpha} fg(t) - J_{b^-}^{\alpha} f(t) J_{b^-}^{\alpha} g(t)\right| \leq \left(\frac{(b-t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)^2 \frac{(M-m)(P-p)}{4}. \tag{3.22}$$

Pour la preuve nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 5. *Soit u une fonction intégrable vérifiant la condition*

$$\forall x \in [a,b]\ :\ c \leq u(x) \leq C\ ; \quad c, C \in \mathbb{R}, \tag{3.23}$$

alors pour tous $a < t \leq b$ et $\alpha > 0$ on a

$$\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} J_{a^+}^{\alpha} u^2(t) - \left(J_{a^+}^{\alpha} u(t)\right)^2 \ \leq\ \left(C\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} - J_{a^+}^{\alpha} u(t)\right)\left(J_{a^+}^{\alpha} u(t) - c\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right), \tag{3.24}$$

et pour tous $a \leq t < b$ et $\alpha > 0$ on a

$$\frac{(b-t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} J_{b^-}^{\alpha} u^2(t) - \left(J_{b^-}^{\alpha} u(t)\right)^2 \ \leq\ \left(C\frac{(b-t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} - J_{b^-}^{\alpha} u(t)\right)\left(J_{b^-}^{\alpha} u(t) - c\frac{(b-t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right). \tag{3.25}$$

Preuve de lemme : Soit u une fonction intégrable sur $[0,\infty[$ vérifiant la condition (3.23), alors

$$\begin{aligned}&(C-u(y))(u(x)-c)+(C-u(x))(u(y)-c)\\ &-(C-u(x))(u(x)-c)-(C-u(y))(u(y)-c) \qquad (3.26)\\ &=u^2(x)+u^2(y)-2u(y)u(x).\end{aligned}$$

On multiple (3.26) par $\frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ puis on intègre par rapport à $x\in(a,t)$, nous obtenons

$$\begin{aligned}&\Big(C-u(y)\Big)\int_a^t\left(\frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)\Big(u(x)-c\Big)\,dx+\Big(u(y)-c\Big)\int_a^t\left(\frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)\Big(C-u(x)\Big)\,dx\\ &-\int_a^t\left(\frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)\Big(C-u(x)\Big)\Big(u(x)-c\Big)\,dx-\Big(C-u(y)\Big)\Big(u(y)-c\Big)\int_a^t\left(\frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)dx\\ &=\int_a^t\left(\frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)u^2(x)\,dx+\int_a^t\left(\frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)u^2(y)\,dx+2\int_a^t\left(\frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)u(x)u(y)\,dx,\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}&\Big(C-u(y)\Big)\left(J_{a^+}^{\alpha}u(t)-c\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)+\left(C\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}-J_{a^+}^{\alpha}u(t)\right)\Big(u(y)-c\Big)\\ &-J_{a^+}^{\alpha}\Big((C-u(t))(u(t)-c)\Big)-\Big((C-u(y))\Big)\Big(u(y)-c\Big)\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \qquad (3.27)\\ &=J_{a^+}^{\alpha}u^2(t)+u^2(y)\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}-2u(y)J_{a^+}^{\alpha}u(t).\end{aligned}$$

Maintenant, on multiplie (3.27) par $\frac{(t-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ puis on intègre par rapport à $y\in(a,t)$, nous obtenons

$$\left(J_{a^+}^{\alpha}u(t)-c\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t(t-y)^{\alpha-1}(C-u(y))dy$$

$$+\left(C\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}-J_{a^+}^{\alpha}u(t)\right)\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t(t-y)^{\alpha-1}(u(y)-c)dy$$

$$-J_{a^+}^{\alpha}\Big((C-u(t))(u(t)-c)\Big)\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t(t-y)^{\alpha-1}dy$$

$$-\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t(t-y)^{\alpha-1}(C-u(y))\Big(u(y)-c\Big)dy$$

$$=u^2(t)\int_a^t\left(\frac{(t-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)J_{a^+}^{\alpha}dy+\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^t\left(\frac{(t-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)u^2(y)dy$$

$$-2J_{a^+}^{\alpha}u(t)\int_a^t\left(\frac{(t-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)u(y)dy\,,$$

on déduit

$$\left(J_{a^+}^{\alpha}u(t)-c\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\left(C\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}-J_{a^+}^{\alpha}u(t)\right)$$

$$+\left(C\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}-J_{a^+}^{\alpha}u(t)\right)\left(J_{a^+}^{\alpha}u(t)-c\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)$$

$$-\ J_{a^+}^{\alpha}\Big(\left(C-u(t)\right)\left(u(t)-c\right)\Big)\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\ -\ \frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}J_{a^+}^{\alpha}\Big(\left(C-u(t)\right)\left(u(t)-c\right)\Big)$$

$$=J_{a^+}^{\alpha}u^2(t)\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}+J_{a^+}^{\alpha}u^2(t)\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}-2\left(J_{a^+}^{\alpha}u(t)\right)\ ,$$

d'où

$$2\left(C\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}-J_{a^+}^{\alpha}u(t)\right)\left(J_{a^+}^{\alpha}u(t)-c\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)$$

$$-2\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}J_{a^+}^{\alpha}\left(C-u(t)\right)\left(u(t)-c\right) \tag{3.28}$$

$$=2\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}J_{a^+}^{\alpha}u^2(t)-2\left(J_{a^+}^{\alpha}u(t)\right)^2,$$

et comme $c\leq u(x)\leq C$ par hypothèse on déduit

$$\frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} J^\alpha_{a^+} \left(C-u(t)\right)\left(u(t)-c\right) \geq 0\,,$$

et par conséquent

$$\left(C\frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - J^\alpha_{a^+}u(t)\right)\left(J^\alpha_{a^+}u(t) - c\frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right) \geq \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} J^\alpha_{a^+}u^2(t) - \left(J^\alpha_{a^+}u(t)\right)^2\,, \tag{3.29}$$

d'où (3.24).

On multiple (3.26) par $\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ puis on intègre par rapport à $x \in (t,b)$, nous obtenons

$$\left(C-u(y)\right)\int_t^b \left(\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)\left(u(x)-c\right)dx + \left(u(y)-c\right)\int_t^b \left(\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)\left(C-u(x)\right)dx$$

$$-\int_t^b \left(\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)\left(C-u(x)\right)\left(u(x)-c\right)dx - \left(C-u(y)\right)\left(u(y)-c\right)\int_t^b \left(\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)dx$$

$$= \int_t^b \left(\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)u^2(x)\,dx + \int_t^b \left(\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)u^2(y)\,dx + 2\int_t^b \left(\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)u(x)u(y)\,dx,$$

d'où

$$\left(C-u(y)\right)\left(J^\alpha_{b^-}u(t) - c\frac{(b-t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right) + \left(C\frac{(b-t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - J^\alpha_{b^-}u(t)\right)\left(u(y)-c\right)$$

$$-J^\alpha_{b^-}\left((C-u(t))(u(t)-c)\right) - \left((C-u(y))\right)\left(u(y)-c\right)\frac{(b-t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \tag{3.30}$$

$$= J^\alpha_{b^-}u^2(t) + u^2(y)\frac{(b-t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - 2u(y)J^\alpha_{b^-}u(t).$$

Maintenant, on multiplie (3.30) par $\frac{(y-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ puis on intègre par rapport à $y \in (t,b)$, nous obtenons

$$\left(J_{b^-}^{\alpha}u(t)-c\frac{(b-t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^b(y-t)^{\alpha-1}(C-u(y))dy$$

$$+\left(C\frac{(b-t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}-J_{b^-}^{\alpha}u(t)\right)\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^b(y-t)^{\alpha-1}(u(y)-c)dy$$

$$-J_{b^-}^{\alpha}\Big((C-u(t))(u(t)-c)\Big)\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^b(y-t)^{\alpha-1}dy$$

$$-\frac{(b-t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^b(y-t)^{\alpha-1}(C-u(y))\Big(u(y)-c\Big)dy$$

$$=u^2(t)\int_t^b\left(\frac{(y-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)J_{b^-}^{\alpha}dy+\frac{(b-t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\int_t^b\left(\frac{(y-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)u^2(y)dy$$

$$-2J_{b^-}^{\alpha}u(t)\int_t^b\left(\frac{(y-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)u(y)dy\,,$$

on déduit

$$\left(J_{b^-}^{\alpha}u(t)-c\frac{(b-t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\left(C\frac{(b-t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}-J_{b^-}^{\alpha}u(t)\right)$$

$$+\left(C\frac{(b-t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}-J_{b^-}^{\alpha}u(t)\right)\left(J_{b^-}^{\alpha}u(t)-c\frac{(b-t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)$$

$$-\ J_{b^-}^{\alpha}\Big((C-u(t))\,(u(t)-c)\Big)\frac{(b-t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\ -\ \frac{(b-t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}J_{b^-}^{\alpha}\Big((C-u(t))\,(u(t)-c)\Big)$$

$$=J_{b^-}^{\alpha}u^2(t)\frac{(b-t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}+J_{b^-}^{\alpha}u^2(t)\frac{(b-t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}-2\left(J_{b^-}^{\alpha}u(t)\right)\,,$$

d'où

$$2\left(C\frac{(b-t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}-J_{b^-}^{\alpha}u(t)\right)\left(J_{b^-}^{\alpha}u(t)-c\frac{(b-t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)$$

$$-2\frac{(b-t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}J_{b^-}^{\alpha}\left(C-u(t)\right)\left(u(t)-c\right) \tag{3.31}$$

$$=2\frac{(b-t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}J_{b^-}^{\alpha}u^2(t)-2\left(J_{b^-}^{\alpha}u(t)\right)^2,$$

et comme $c \leq u(x) \leq C$ par hypothèse on déduit

$$\frac{(b-t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} J_{b^-}^\alpha \left(C - u(t)\right)\left(u(t) - c\right) \geq 0\,,$$

et par conséquent

$$\left(C\frac{(b-t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - J_{b^-}^\alpha u(t)\right)\left(J_{b^-}^\alpha u(t) - c\frac{(b-t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right) \geq \frac{(b-t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} J_{b^-}^\alpha u^2(t) - \left(J_{b^-}^\alpha u(t)\right)^2\,, \tag{3.32}$$

d'où (3.25).
Ceci termine la preuve du lemme.

□

Preuve du Théorème 3.2 : Soient f et g deux fonctions synchrones et remplissant les conditions (3.20) du Théorème 3.2, on définie pour $x, y \in (a,b)$,

$$\begin{aligned} H(x,y) &= (f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \\ &= f(x)g(x) - f(x)g(y) - f(y)g(x) + f(y)g(y). \end{aligned} \tag{3.33}$$

Puisque f et g sont synchrones alors on a

$$H(x,y) \geq 0$$

Multiplions (3.33) par $\frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} o\ x \in (a,t)$ et intégrons par rapport à x

$$\begin{aligned} \int_a^t \left(\frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) H(x,y)dx &= \int_a^t \left(\frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) f(x)g(x)dx - g(y)\int_a^t \left(\frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) f(x)dx \\ &- f(y)\int_a^t \left(\frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) g(x)dx + f(y)g(y)\int_a^t \left(\frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) dx \\ &= J_{a^+}^\alpha fg(t) - g(y)J_{a^+}^\alpha f(t) - f(y)J_{a^+}^\alpha g(t) + f(y)g(y)\frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Multiplions maintenant (3.34) par $\frac{(t-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ et intégrons par rapport à $y \in (a,t)$

$$\begin{aligned} & J_{a^+}^\alpha fg(t)\int_a^t \left(\frac{(t-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) - J_{a^+}^\alpha f(t)\int_a^t \left(\frac{(t-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) g(y) \\ - \quad & J_{a^+}^\alpha g(t)\int_a^t \left(\frac{(t-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) f(y) + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^t \left(\frac{(t-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) f(y)g(y) \\ = \quad & 2\,\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} J_{a^+}^\alpha fg(t) - 2\,J_{a^+}^\alpha f(t) J_{a^+}^\alpha g(t)\,, \end{aligned}$$

d'où

$$\int_a^t \int_a^t \left(\frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)\left(\frac{(t-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) H(x,y)dxdy = 2\,\frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} J_{a^+}^\alpha fg(t) - 2\, J_{a^+}^\alpha f(t)\, J_{a^+}^\alpha g(t)\,. \tag{3.35}$$

D'autre part, en appliquant la forme continue de l'inégalité de Cauchy Schwarz (5), nous avons

$$\begin{aligned}
I \;&:=\; \left(\int_a^t \int_a^t \left(\frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)\left(\frac{(t-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) H(x,y)dxdy\right)^2 \\
&=\; \left(\int_a^t \int_a^t \left(\frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)\left(\frac{(t-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) (f(x)-f(y))(g(x)-g(y))dxdy\right)^2 \\
&\leq\; \Bigg[\left(\int_a^t \left(\int_a^t \left(\frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)^2 (f(x)-f(y))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\right) dy \\
&\times\; \left(\int_a^t \left(\frac{(t-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)\left(\int_a^t (g(x)-g(y))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} dy\right)\Bigg]^2 \\
&\leq\; \left(\int_a^t \int_a^t \left(\frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)^2 (f(x)-f(y))^2 dxdy\right) \\
&\times\; \left(\int_a^t \int_a^t \left(\frac{(t-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)^2 (g(x)-g(y))^2 dxdy\right) \\
&\leq\; \left(\int_a^t \int_a^t \left(\frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)\left(\frac{(t-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) (f(x)-f(y))^2 dxdy\right) \\
&\times\; \left(\int_a^t \int_a^t \left(\frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)\left(\frac{(t-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) (g(x)-g(y))^2 dxdy\right),
\end{aligned}$$

on développe les carrés et on utilise la linéarité de l'intégral

$$
\begin{aligned}
I \quad \leq \quad & \left[\int_a^t \int_a^t \left(\frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)\left(\frac{(t-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) f^2(x)dx\,dy\right. \\
- \quad & 2\int_a^t \int_a^t \left(\frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)\left(\frac{(t-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) f(x)f(y)dx\,dy \\
+ \quad & \left.\int_a^t \int_a^t \left(\frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)\left(\frac{(t-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) f^2(y)dx\,dy\right] \\
\times \quad & \left[\int_a^t \int_a^t \left(\frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)\left(\frac{(t-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) g^2(x)dx\,dy\right. \\
- \quad & 2\int_a^t \int_a^t \left(\frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)\left(\frac{(t-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) g(x)g(y)dx\,dy \\
+ \quad & \left.\int_a^t \int_a^t \left(\frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)\left(\frac{(t-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) g^2(y)dx\,dy\right],
\end{aligned}
$$

on obtient

$$
\begin{aligned}
I \quad \leq \quad & \left[\int_a^t \left(\frac{(t-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) dy \times \int_a^t \left(\frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) f^2(x)\,dx\right. \\
- \quad & 2\int_a^t \left(\frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) f(x)dx \times \int_a^t \left(\frac{(t-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) f(y)\,dy \\
+ \quad & \left.\int_a^t \left(\frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) dx \times \int_a^t \left(\frac{(t-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) f^2(y)\,dy\right] \\
\times \quad & \left[\int_a^t \left(\frac{(t-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) dx \times \int_a^t \left(\frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) g^2(x)\,dx\right. \\
- \quad & 2\int_a^t \left(\frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g(x)\right) dx \times \int_a^t \left(\frac{(t-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) g(y)\,dy \\
+ \quad & \left.\int_a^t \left(\frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) dx \times \int_a^t \left(\frac{(t-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) g^2(y)\,dy\right] \\
= \quad & \left(\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} J_{a^+}^{\alpha} f^2(t) - 2J_{a^+}^{\alpha} f(t) J_{a^+}^{\alpha} f(t) + \frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} J_{a^+}^{\alpha} f^2(t)\right) \\
& \left(\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} J_{a^+}^{\alpha} g^2(t) - 2J_{a^+}^{\alpha} g(t) J_{a^+}^{\alpha} g(t) + \frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} J_{a^+}^{\alpha} g^2(t)\right),
\end{aligned}
$$

donc

$$
I \leq \left(2\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} J_{a^+}^{\alpha} f^2(t) - 2\left(J_{a^+}^{\alpha} f(t)\right)^2\right)\left(2\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} J_{a^+}^{\alpha} g^2(t) - 2\left(J_{a^+}^{\alpha} g(t)\right)^2\right). \tag{3.36}
$$

En combinant (3.35) et (3.36) on déduit

$$4\left(\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}J_{a^+}^{\alpha}fg(t)-J_{a^+}^{\alpha}f(t)J_{a^+}^{\alpha}g(t)\right)^2 \;\leq\; 4\left(\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}J_{a^+}^{\alpha}f^2(t)-\left(J_{a^+}^{\alpha}f(t)\right)^2\right)$$
$$\times\;\left(\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}J_{a^+}^{\alpha}g^2(t)-\left(J_{a^+}^{\alpha}g(t)\right)^2\right), \tag{3.37}$$

on applique maintenant le Lemme 5 pour $u(x)=f(x)$ avec $c=m$ et $C=M$ on aura

$$\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}J_{a^+}^{\alpha}f^2(t)-(J_{a^+}^{\alpha}f(t))^2\leq\left(M\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}-J_{a^+}^{\alpha}f(t)\right)\left(J_{a^+}^{\alpha}f(t)-m\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right) \tag{3.38}$$

En appliquant encore une fois le Lemme 5 pour $u(x)=g(x)$ avec $c=p$ et $C=P$, alors

$$\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}J_{a^+}^{\alpha}g^2(t)-(J_{a^+}^{\alpha}g(t))^2\leq\left(P\frac{(t-a)^{a}}{\Gamma(\alpha+1)}-J_{a^+}^{\alpha}g(t)\right)\left(J_{a^+}^{\alpha}g(t)-p\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right). \tag{3.39}$$

En remplaçant (3.38) et (3.39) dans (3.37), on obtient

$$\begin{aligned}
&16\left(\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}J_{a^+}^{\alpha}fg(t)-2J_{a^+}^{\alpha}f(t)J_{a^+}^{\alpha}g(t)\right)^2\\
&\leq 4\left(M\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}-J_{a^+}^{\alpha}f(t)\right)\times\left(J_{a^+}^{\alpha}f(t)-m\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\\
&\times 4\left(P\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}-J_{a^+}^{\alpha}g(t)\right)\times\left(J_{a^+}^{\alpha}g(t)-p\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right).
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Maintenant on utilise l'inégalité (2) pour obtenir les résultats suivants

$$4\left(M\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}-J_{a^+}^{\alpha}f(t)\right)\left(J_{a^+}^{\alpha}f(t)-m\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\leq\left(\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}(M-m)\right)^2 \tag{3.41}$$

et

$$4\left(P\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}-J_{a^+}^{\alpha}g(t)\right)\left(J_{a^+}^{\alpha}g(t)-p\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\leq\left(\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}(P-p)\right)^2 \tag{3.42}$$

En utilisant (3.40), (3.41) et (3.42), nous obtenons

$$\left|\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}J_{a^+}^{\alpha}fg(t)-J_{a^+}^{\alpha}f(t)J_{a^+}^{\alpha}g(t)\right|\leq\frac{1}{4}\left(\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)^2(M-m)(P-p),$$

ce qui termine la preuve de l'inégalité (3.21).

Pour prouver l'inégalité (3.22), multiplions (3.33) par $\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ où $x \in (t,b)$ puis intégrons par rapport à x

$$\begin{aligned}
\int_t^b \left(\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) H(x,y)dx &= \int_t^b \left(\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) f(x)g(x)dx - g(y)\int_t^b \left(\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) f(x)dx \\
&\quad - f(y)\int_t^b \left(\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) g(x)dx + f(y)g(y)\int_t^b \left(\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) dx \\
&= J_{b^-}^{\alpha} fg(t) - g(y)J_{b^-}^{\alpha} f(t) - f(y)J_{b^-}^{\alpha} g(t) + f(y)g(y)\frac{(b-t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}.
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Multiplions maintenant (3.43) par $\frac{(y-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ et intégrons par rapport à $y \in (t,b)$

$$\begin{aligned}
& J_{b^-}^{\alpha} fg(t)\int_t^b \left(\frac{(y-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) - J_{b^-}^{\alpha} f(t)\int_t^b \left(\frac{(y-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) g(y) \\
- \;& J_{b^-}^{\alpha} g(t)\int_t^b \left(\frac{(y-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) f(y) + \frac{(b-t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\int_t^b \left(\frac{(y-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) f(y)g(y) \\
= \;& 2\,\frac{(b-t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} J_{b^-}^{\alpha} fg(t) - 2\, J_{b^-}^{\alpha} f(t) J_{b^-}^{\alpha} g(t)\,,
\end{aligned}$$

d'où

$$\int_t^b \int_t^b \left(\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)\left(\frac{(y-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) H(x,y)dxdy = 2\,\frac{(b-t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} J_{b^-}^{\alpha} fg(t) - 2\, J_{b^-}^{\alpha} f(t)\, J_{b^-}^{\alpha} g(t)\,. \tag{3.44}$$

D'autre part, f et g étant synchrone on a $(f(x)-f(y))(g(x)-g(y)) \geq 0$, d'où

$$\begin{aligned}
I \;&:=\; \left(\int_t^b \int_t^b \left(\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)\left(\frac{(y-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) H(x,y)dxdy\right)^2 \\
&=\; \left(\int_t^b \int_t^b \left(\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)\left(\frac{(y-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) (f(x)-f(y))(g(x)-g(y))dxdy\right)^2 \\
&=\; \left(\int_t^b \int_t^b \left(\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)\left(\frac{(y-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) |(f(x)-f(y))(g(x)-g(y))|dxdy\right)^2,
\end{aligned}$$

en appliquant l'inégalité de Cauchy Schwarz (5), nous obtenant

$$\begin{aligned}
I &\leq \left[\left(\int_t^b \left(\int_t^b \left(\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)^2 (f(x)-f(y))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\right) dy\right. \\
&\times \left.\left(\int_t^b \left(\frac{(y-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)\left(\int_t^b (g(x)-g(y))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} dy\right)\right]^2 \\
&\leq \left(\int_t^b \int_t^b \left(\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)^2 (f(x)-f(y))^2 dxdy\right) \\
&\times \left(\int_t^b \int_t^b \left(\frac{(y-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)^2 (g(x)-g(y))^2 dxdy\right) \\
&\leq \left(\int_t^b \int_t^b \left(\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)\left(\frac{(y-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)(f(x)-f(y))^2 dxdy\right) \\
&\times \left(\int_t^b \int_t^b \left(\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)\left(\frac{(y-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)(g(x)-g(y))^2 dxdy\right),
\end{aligned}$$

on développe les carrés et on utilise la linéarité de l'intégral

$$\begin{aligned}
I \leq & \left[\int_t^b \int_t^b \left(\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)\left(\frac{(y-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) f^2(x) dx\, dy\right. \\
& - 2\int_t^b \int_t^b \left(\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)\left(\frac{(y-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) f(x)f(y) dx\, dy \\
& + \left.\int_t^b \int_t^b \left(\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)\left(\frac{(y-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) f^2(y) dx\, dy\right] \\
& \times \left[\int_t^b \int_t^b \left(\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)\left(\frac{(y-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) g^2(x) dx\, dy\right. \\
& - 2\int_t^b \int_t^b \left(\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)\left(\frac{(y-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) g(x)g(y) dx\, dy \\
& + \left.\int_t^b \int_t^b \left(\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)\left(\frac{(y-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) g^2(y) dx\, dy\right],
\end{aligned}$$

on obtient

$$
\begin{aligned}
I \;\leq\; & \left[\int_t^b \left(\frac{(y-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) dy \times \int_t^b \left(\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) f^2(x)\, dx\right. \\
- \;& 2\int_t^b \left(\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) f(x)dx \times \int_t^b \left(\frac{(y-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) f(y)\, dy \\
+ \;& \left.\int_t^b \left(\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) dx \times \int_t^b \left(\frac{(y-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) f^2(y)\, dy\right] \\
\times \;& \left[\int_t^b \left(\frac{(y-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) dx \times \int_t^b \left(\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) g^2(x)\, dx\right. \\
- \;& 2\int_t^b \left(\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g(x)\right) dx \times \int_t^b \left(\frac{(y-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) g(y)\, dy \\
+ \;& \left.\int_t^b \left(\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) dx \times \int_t^b \left(\frac{(y-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) g^2(y)\, dy\right] \\
= \;& \left(\frac{(b-t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} J_{b^-}^\alpha f^2(t) - 2J_{b^-}^\alpha f(t) J_{b^-}^\alpha f(t) + \frac{(b-t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} J_{b^-}^\alpha f^2(t)\right) \\
& \left(\frac{(b-t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} J_{b^-}^\alpha g^2(t) - 2J_{b^-}^\alpha g(t) J_{b^-}^\alpha g(t) + \frac{(b-t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} J_{b^-}^\alpha g^2(t)\right),
\end{aligned}
$$

donc

$$
I \leq \left(2\frac{(b-t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} J_{b^-}^\alpha f^2(t) - 2\left(J_{b^-}^\alpha f(t)\right)^2\right)\left(2\frac{(b-t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} J_{b^-}^\alpha g^2(t) - 2\left(J_{b^-}^\alpha g(t)\right)^2\right). \quad (3.45)
$$

En combinant (3.44) et (3.45) on déduit

$$
\begin{aligned}
4\left(\frac{(b-t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} J_{b^-}^\alpha fg(t) - J_{b^-}^\alpha f(t) J_{b^-}^\alpha g(t)\right)^2 \;\leq\; & 4\left(\frac{(b-t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} J_{b^-}^\alpha f^2(t) - \left(J_{b^-}^\alpha f(t)\right)^2\right) \\
\times \;& \left(\frac{(b-t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} J_{b^-}^\alpha g^2(t) - \left(J_{b^-}^\alpha g(t)\right)^2\right),
\end{aligned}
\quad (3.46)
$$

on applique maintenant le Lemme 5 pour $u(x) = f(x)$ avec $c = m$ et $C = M$ on aura

$$
\frac{(b-t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} J_{b^-}^\alpha f^2(t) - \left(J_{b^-}^\alpha f(t)\right)^2 \leq \left(M\frac{(b-t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - J_{b^-}^\alpha f(t)\right)\left(J_{b^-}^\alpha f(t) - m\frac{(b-t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right) \quad (3.47)
$$

En appliquant encore une fois le Lemme 5 pour $u(x) = g(x)$ avec $c = p$ et $C = P$, alors

$$
\frac{(b-t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} J_{b^-}^\alpha g^2(t) - \left(J_{b^-}^\alpha g(t)\right)^2 \leq \left(P\frac{(b-t)^a}{\Gamma(\alpha+1)} - J_{b^-}^\alpha g(t)\right)\left(J_{b^-}^\alpha g(t) - p\frac{(b-t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right). \quad (3.48)
$$

En remplaçant (3.47) et (3.48) dans (3.46), on obtient

$$\begin{aligned}
&16\left(\frac{(b-t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}J_{b^-}^{\alpha}fg(t)-2J_{b^-}^{\alpha}f(t)J_{b^-}^{\alpha}g(t)\right)^2\\
&\leq 4\left(M\frac{(b-t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}-J_{b^-}^{\alpha}f(t)\right)\times\left(J_{b^-}^{\alpha}f(t)-m\frac{(b-t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\\
&\times 4\left(P\frac{(b-t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}-J_{b^-}^{\alpha}g(t)\right)\times\left(J_{b^-}^{\alpha}g(t)-p\frac{(b-t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right).
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Maintenant on utilise l'inégalité (2) pour obtenir les résultats suivants

$$4\left(M\frac{(b-t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}-J_{b^-}^{\alpha}f(t)\right)\left(J_{b^-}^{\alpha}f(t)-m\frac{(b-t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\leq\left(\frac{(b-t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}(M-m)\right)^2 \tag{3.50}$$

et

$$4\left(P\frac{(b-t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}-J_{b^-}^{\alpha}g(t)\right)\left(J_{b^-}^{\alpha}g(t)-p\frac{(b-t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\leq\left(\frac{(b-t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}(P-p)\right)^2 \tag{3.51}$$

En utilisant (3.49), (3.50) et (3.51), nous obtenons (3.22)

$$\left|\frac{(b-t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}J_{b^-}^{\alpha}fg(t)-J_{b^-}^{\alpha}f(t)J_{b^-}^{\alpha}g(t)\right|\leq\frac{1}{4}\left(\frac{(b-t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)^2(M-m)(P-p).$$

Ceci termine la preuve du Théorème 3.2 $\square$

Bibliographie

[1] Boumediene Becherif. Introduction à la théorie des inégalites et leurs applications. *Université Abdelhamid Ibn Badis - Mostaganem*, (2017).

[2] Soumia Belarbi and Zoubir Dahmani. On some new fractional integral inequalities. *Int. Journal of Math. Analysis*, Vol 4 (4) :185 – 191, (2010).

[3] Zoubir Dahmani, Louiza Tabharit, and Sabrina Taf. New generalizations of gruss inequality using riemann-liouville fractional integrals. *Bull. Math. Anal. Appl.*, Vol 2 (3) :93–99, (1991).

[4] J.E. Hardy, G.H. Littlewood and G. Polya. Inequalities. *Cambridge, University Press*, (1934).

[5] Hans Heinig and Lech Maligranda. Chebyshev inequality in function spaces. *Real Analysis Exchange*, Vol. 17, no 1 :p. 211–247, (1991).

[6] H.M. Kilbas, A.A. Srivastava and J.J. Trujillo. Theory and applications of fractional differential equations. *Elsevier Science B.V., Amsterdam*, (2006).

[7] Albert W. Ingram Olkin Marshall and Barry C. Arnold. Inequalities : Theory of majorization and its applications. *Springer New York, NY*, (2011).

[8] A.A. Samko, S.G. Kilbas and O.I. Marichev. Fractional integrals and derivatives : Theory and applications. *Gordon and Breach, Yverdon*, (1993).

[9] J. Michael Steele. The cauchy-schwarz master class : An introduction to the art of mathematical inequalities. *MAA Problem Books Series*, (2004).