RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN TIARET
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUES
Département de Mathématiques

MÉMOIRE MASTER

Présenter en vue de l'obtention du diplôme de master

Spécialité :
« Mathémathique »

Option :
« Analyse fonctionnelle et Applications »

Présenté Par :

CHETOUANE Abdelhak & BENALI Menaour

Sous L'intitulé :

Méthode de sur et sous solutions pour la résolution d'un problème aux valeurs propres d'une équation différentielle fractionnaire

Soutenu publiquement le 11/ juin / 2024
à Tiaret devant le jury composé de :

Dr. BENIA Kheir eddine	MCA	U. Ibn Khaldoun Tiaret	Président
Dr. REZZOUG Nadir	MCB	U. Ibn Khaldoun Tiaret	Examinateur
Dr. AYADI Souad	MCA	U. Khemis Miliana	Encadreur

Année universitaire : 2023/2024

Remerciements

Nous remercions "Allah" tout puissant de nous avoir donné la force, le courage et la patience pour l'élaboration de ce modeste travail.

Nous remercions notre encadreur **Dr Ayadi Souad**, Maitre de Conférence à l'université khemis Miliana , Ain Defla pour son encadrement de qualité, sa motivation professionnelle, ses conseils et critiques constructives, ses correction,
sa gentillesse et sa patience ainsi pour le temps qu'elle a cosacré à la réalisation
de ce travail.

Nous remercions les membres du jury pour leur présence "D. Rezzoug Nadir, D. Benia Khieddine" pour leur lecture attentive de ce mémoire, ainsi que pour les remarques qi'ils m'adresseront lors de cette soutenance afin d'améliorer mon travail.

Nous remercions tous les enseignants de la faculté des Mathématiques et Informatique de l'université Ibn khaldoun de Tiaret. de Recherche Opérationnelle 2023-2024.

Merci à tous

Table des matières

Abstract

In this work, we are interested in the method of over and under solutions and these applications to the resolution of differential equations of integer and non-integer order, in particular for the study of a problem of the eigenvalues of singular fractional differential equations Hadamard type with multipoint boundary conditions. By constructing the upper and lower solutions of the eigenvalue problem and exploiting the properties of the Green's function, we determine the eigenvalue interval of the problem using Schauder's fixed point theorem. The main contribution of this work lies in our approach to nonlinearity, which presents singularities on certain spatial variables.

– • **Keywords :**

Fractional calculus, eigenvalues, Fractional derivative of Hadamard, fixed point, over and under solution.

Résumé

Dans ce travail, nous nous intéressons à la méthode de sur et sous solutions et ces applications à la résolution des équations différentielles d'ordre entier et non entier, en particulier pour l'étude d'un problème des valeurs propres des équations différentielles fractionnaires singulières de type Hadamard avec des conditions aux limites multipoints. En construisant les solutions supérieures et inférieures du problème des valeurs propres et en exploitant les propriétés de la fonction de Green, nous déterminons l'intervalle des valeurs propres du problème en utilisant le théorème du point fixe de Schauder. La principale contribution de ce travail réside dans notre approche de la non-linéarité, qui présente des singularités sur certaines variables spatiales.

- **<u>Mots clés :</u>**

Calcul fractionnaire, valeurs propres, Dérivée fractionnaire de Hadamard, point fixe, sur et sous solution.

Introduction

Les premières discussions systématiques sur les dérivées et les intégrales fractionnaires apparaissent dans les travaux de Gottfried Wilhelm Leibniz et d'Isaac Newton, les fondateurs du calcul différentiel et intégral. Bien que leurs travaux initiaux se soient concentrés sur des ordres entiers, les idées qu'ils ont développées ont jeté les bases du calcul fractionnaire.

Au cours du XIXe siècle, des mathématiciens tels que Liouville, Grunwald, Letnikov et Riemann ont commencé à explorer des généralisations des opérateurs différentiels et intégraux traditionnels pour des ordres non entiers. Leurs travaux ont jeté les bases théoriques du calcul fractionnaire et ont ouvert la voie à des développements ultérieurs.

Le calcul fractionnaire, une branche émergente des mathématiques, offre un cadre puissant pour la modélisation et la résolution de problèmes complexes. Fondamentalement, il généralise les opérations traditionnelles du calcul différentiel et intégral en étendant les concepts de dérivée et d'intégrale à des ordres non entiers. Cette extension vers les ordres fractionnaires ouvre la voie à une compréhension plus profonde des systèmes dynamiques et des processus physiques qui ne peuvent être adéquatement décrits par les méthodes classiques.

Dans le domaine des équations différentielles, le calcul fractionnaire trouve des applications significatives. Les équations différentielles fractionnaires émergent comme des outils puissants pour modéliser des processus physiques présentant des comportements non locaux ou des dépendances à longue portée. De plus, le calcul fractionnaire permet de généraliser les opérateurs différentiels traditionnels tels que la dérivée et l'intégrale, ouvrant ainsi la voie à de nouvelles méthodes de résolution et d'analyse des équations différentielles complexes.

En ce qui concerne les problèmes aux limites, le calcul fractionnaire offre également des perspectives prometteuses. Ces problèmes, qui consistent à trouver une solution à une équation différentielle sous des conditions spécifiques définies aux frontières d'un domaine, sont fréquents dans divers domaines scientifiques et d'ingénierie. Le calcul fractionnaire permet une modélisation plus précise des conditions aux limites, tenant compte des phénomènes non locaux ou des propriétés à longue portée qui peuvent influencer le comportement du système étudié.

Ces dernières années, les problèmes non linéaires d'ordre fractionnaire ont attiré l'attention de nombreux chercheurs en mathématiques et dans d'autres sciences appliquées en raison de leur large gamme d'applications en mathématiques appliquées, physique, biosciences, ingénierie, chimie, etc. Un grand nombre de contributions ont été faites pour les équations différentielles fractionnaires dans le sens de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville ou de la dérivée fractionnaire de Caputo.

Cependant, les intégrales et dérivées fractionnaires de type Hadamard diffèrent de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville et de la dérivée fractionnaire de Caputo car les noyaux de l'intégrale et de la dérivée de type Hadamard contiennent des fonctions logarithmiques d'exposant arbitraire et sont donc considérés comme un type différent de noyaux faiblement singuliers.

Ainsi, il est plus difficile d'explorer l'existence de solutions pour les équations différentielles fractionnaires de type Hadamard.

Dans un travail récent [14] , en analysant la structure spectrale d'un opérateur linéaire et en calculant l'indice du point fixe de l'opérateur non linéaire correspondant, Zhang et al. ont étudié l'existence de solutions positives pour une certaine équation différentielle fractionnaire de type Hadamard.

Récemment, en se basant sur une continuation de type Leray-Schauder, El-Sayed et Gaafar [3] ont établi l'existence de solutions positives pour une classe d'équations différentielles fractionnaires de type Hadamard non linéaires singulières avec des conditions aux limites à points infinis ou des conditions aux limites intégrales. Cependant, lorsque f possède des singularités sur les variables spatiales, en particulier pour le problème de valeurs propres, peu de résultats sont établis sur les équations différentielles fractionnaires de type Hadamard. Suite à ces travaux susmentionnés, Xinguang Zhang et al en 2022 ont établi l'existence de solutions positives pour un problème de valeurs propres d'une équation différentielle fractionnaire de type Hadamard lorsque f possède une singularité sur les variables spatiales que nous présenterons dans ce manuscrit. Ce mémoire est scindé en trois chapitres.

Le premier chapitre est dédié aux généralités sur les dérivées et intégrales fractionnaires en particulier l'intégrale et la dérivée de Hadamard. Dans le deuxième chapitre on expose la méthode de sur et sous solutions pour certaines équations différentielles d'ordre entier .

Le dernier chapitre est consacré à l'étude d'un problème des valeurs propres des équations différentielles fractionnaires singulières de type Hadamard avec des conditions aux limites multipoints posé sur un intervalle borné de la droite réelle. Nous terminons le manuscrit par une conclusion.

Chapitre 1

Calcul Fractionnaire

L'une des outils de base du calcul

1.1 Les fonctions spécifiques

1.1.1 Fonction Gamma

fractionnaire est la fonction Gamma qui prolonge naturellement la factorielle aux nombre réels positifs (et même aux nombres complexe á parties réelles positives).

Définition 1.1.

Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$La fonction Gamma d'Euler est définie par l'intégrale suivante :
$\Gamma(x) = \int_0^\infty \exp^{-t} t^{x-1} dt$
(cette intégrale est convergente pour tout $x > 0$)

Proposition 1.1. *Pour tout $x > 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :*

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$
$$\Gamma(n) = (n-1)!$$
$$\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\ldots(x+n)}$$

$$CasParticuliers$$

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{1-1} dx = 1$$
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$
$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!}\sqrt{\pi}$$

1.1.2 Fonction bêta

Définition 1.2.

Soient $x, y > 0$,la fonction Bêta est la fonction définie par :

$$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt, \quad (\mathrm{Re}(x) > 0, \mathrm{Re}(y) > 0)$$

Proposition 1.2. *[9] [7]*

La fonction Béta est reliée aux fonctions Gamma par la relation suivante : $\forall x, y > 0$ on a

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

Preuve 1.1.

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} t_1^{x-1}e^{-t_1}t_2^{y-1}e^{-t_2}dt_1dt_2 = \int_0^{+\infty} t_1^{x-1}\left(\int_0^{+\infty} t_2^{y-1}e^{-|t_1+t_2|}dt_2\right)dt_1$$

en effectue le changement de variable

$$t' = t_1 + t_2$$

On trouve

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^{+\infty} t_1^{x-1}dt_1 \int_{t_1}^{+\infty} (t'-t_1)^{y-1}e^{-t'}dt' \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t'}dt' \int_0^{t_1} (t'-t_1)^{y-1}t^{x-1}dt_1\end{aligned}$$

Si on pose $r = \frac{t_1}{t'}$ et on aboutit á :

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^{+\infty} e^{-t'}dt'\left(\int_0^1 (rt')^{t_1}(t'-rt')^{y-1}t'dr\right) \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t'}dt'\left((t')^{x+y-1}B(x,y)\right) \\ &= \int_0^{+\infty} (t')^{x+y-1}e^{-t'}dt'B(x,y) \\ B(x,y) &= \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat désiré.

Proposition 1.3.

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{C}$, avec $\mathrm{Re}(x) > 0$ et $\mathrm{Re}(y) > 0$, On a :

1. la fonction B :éta est symétrique c'est-á-dire que :

$$\mathrm{B}(x,y) = \mathrm{B}(y,x)$$

2.

$$B(x+1,y) = xB(x,y+1)$$

3. Si $n = y+1$ est un entier, cela donne une relation de récurrence

$$B(x,y) = \frac{n-1}{x}B(x+1,n-1)$$

4.

$$B(x,1) = \frac{1}{x}$$

5. Si $x = m$ rt $y = n$, on obtient

$$B(m,n) = \frac{(m-1)(n-1)!}{(m+n-1)!}$$

1.2 Calcul Fractionnaire

1.2.1 Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

La notion d'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}; (\mathfrak{Rz}(\alpha) > 0)$, selon l'approche de Riemann-Liouville généralise la célébre formule (attribuée á Cauchy) d'intégrale répété n-fois :

$$\begin{aligned}(I_a^n f)(x) &= \int_a^x dt_1 \times \int_a^{t_1} dt_2 \ldots \times \int_a^{t_{n-1}} f(t_n)\, dt_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt \quad ;(n \in \mathbb{N}^*)\end{aligned}$$

Définition 1.3.

Soit $f \in L^1([a,b])$. L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville de la fonction f d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}; (\mathfrak{Re}(\alpha) > 0)$ notée $I_a^\alpha f$ est définie par :

$$(\mathrm{I}_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \quad ; x > a \quad \text{(gauche)}$$

Théorème 1.1.

Si $f \in L^1([a,b])$, alors $I_a^\alpha f$ existe pour presque tout $x \in [a,b]$ et de plus $I_a^\alpha f \in L^1([a,b])$
Preuve [9],[6].

Exemple 1.1.

Soient $\alpha > 0, \beta > -1$ et $f(x) = (x-a)^\beta$, alors :

$$(I_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}(t-a)^\beta dt. \tag{1.1}$$

En effectuant le changement de variable,

$$t = a + (x-a)y; (0 \leq y \leq 1)$$

alors(1.1) devient

$$\begin{aligned}(I_a^\alpha f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}, \int_a^x (x-t)^{\alpha-1}(t-a)^\beta dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (x-a-(x-a),y)^{\alpha-1}[x+(x-a)y-x]^\beta (x-a) dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}, \int_0^1 [(x-a)(1-y)]^{\alpha-1}(x-a)^{\beta+1} y^\beta dy \\ &= \frac{(x-a)^{\beta+1}}{\Gamma(\alpha)}, \int_0^1 (1-y)^{\alpha-1} y^\beta dy \\ &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}. \int_0^1 (1-y)^{\alpha-1} y^{(\beta+1)-1} dy\end{aligned}$$

utilisant la proprieté de la fonction béta on obtien :

$$
\begin{aligned}
\left(I_a^\alpha f\right)(x) &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, \beta+1) \\
&= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}, \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \\
, &= \frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(x-a)^{\alpha+\beta}.
\end{aligned}
$$

Ainsi on obtient

$$
\left(I_a^\alpha (t-\alpha)^\beta\right)(x) = \frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(x-a)^{\alpha+\beta}.
$$

Exemple 1.2.

Soit $f(x) = x^\beta$ avec $\beta > -1$. Ona

$$
\left(I_0^\alpha f\right)(x) := I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} t^\beta dt \tag{1.2}
$$

En posant : $t = xu$, (1.2) devient

$$
I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} (xu)^\beta x du.
$$

utilisant la proprieté de la fonction béta on obtien :

$$
\begin{aligned}
I^\alpha f(x) &= \frac{x^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^\beta du \\
&= \frac{x^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} B(\beta+1, \alpha), \\
&= \frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(x)^{\alpha+\beta}.
\end{aligned}
$$

Proposition 1.4. *[9],[6]*

Soients $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que $(\mathrm{Re}(\alpha), \mathrm{Re}(\beta) > 0)$, pour toute fonction $f \in L^1([a,b])$, on a :

$$
I_a^\alpha \left(I_a^\beta f\right) = I_a^{\alpha+\beta} f = I_a^\beta \left(I_a^\alpha f\right)
$$

Pour presque tout $x \in [a,b]$.Si de plus $f \in C([a,b])$,alors cette identité est vrai pour tout $x \in [a,b]$

preuve [6]

Théorème 1.2. *[6],[9]*

Soient $\alpha > 0$, et $(f_k)_{k=1}^{+\infty}$ est une suite de fonctions continues et simplement convergentes sur $[a,b]$. Alors on peut invertir l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann Liouville et le signe limite comme suit :

$$
\left[I_a^\alpha \left(\lim_{k\to+\infty} f_k\right)\right](x) = \lim_{k\to+\infty} \left(I_a^\alpha f_k\right)(x).
$$

1.2.2 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Dans les applicIl existe plusieurs définitions mathématiques pour la dérivation d'ordre fractionnaire .Ces définitions ne ménent pas toujours á des résultats identiques mais elles sont équivalentes pour un large panel de fonctions. La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est la plus connue et répondue.

Définition 1.4. *[9]*

Soit $f \in L^1([a,b])$ une fonction intégrable sur $[a,b]$, la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction f d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}(\mathrm{Re}(\alpha) > 0)$ notée $D_a^\alpha f$ est définie par :

$$D_a^\alpha f(x) = \frac{d^n}{dx^n}\left(\mathrm{I}_a^{n-\alpha}, f(x)\right) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)dt,$$

avec $(n-1) < [\mathrm{Re}(\alpha)] < n$ et $x > 0$. En particulier, pour $\alpha = m \in \mathbb{N}$, on a

$$\left(D_a^0 f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(1)}\left(\frac{d}{dx}\right)\int_a^x f(t)dt = f(x),$$
$$\left(D_a^m f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(1)}\left(\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}\right)\int_a^x f(t)dt = \left(\frac{d^m}{dx^m}\right) f(x).$$

Par suite la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville councide avec la dérivée classique pour $\alpha \in \mathbb{N}$.

Exemple 1.3.

Reprenons l'exemple de la fonction $f(x) = (x-a)^\beta$, où $\beta \in \mathbb{R}$. On aura

$$D_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{d^n}{dx^n}\left(\mathrm{I}_a^{n-\alpha}(x-a)^\beta\right),$$
$$= \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)}(x-a)^{n-\alpha+\beta}\right),$$

alors :

$$D_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)}\frac{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha},$$
$$= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha}.$$

1.2.2.1 Propriétés de la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Par analogie avec la dérivation usuelle l'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est linéaire.

Théorème 1.3. *[9]*

Soient f et g deux fonctions dont les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville d'ordre α existent . Alors pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, D_a^\alpha(\lambda f + \mu g)$ existe et on a :

$$D_a^\alpha(\lambda f + \mu g) = \lambda\left(D_a^\alpha f\right)(x) + \mu\left(D_a^\alpha g\right)(x)$$

Lemme 1.1.

Soit $\alpha \in]n-1, n[$ et f une fonction vérifiant $D_a^\alpha f = 0$ alors :

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-n)}(x-a)^{j+\alpha-n}$$

1.2.3 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

la dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo de la fonction f notée ${}^cD_a^\alpha$est définie par :

$$\begin{aligned} {}^cD_a^\alpha f(x) =& I_a^{n-a} D^n f(x) \\ =& \frac{1}{\Gamma(n-a)} \sum_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt \end{aligned} \tag{1.3}$$

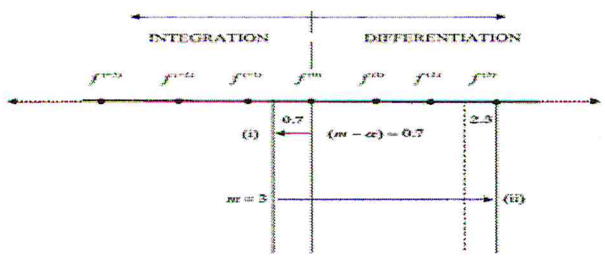
1.2.4 Comparaison entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et de Riemann-Liouville

★ L'avantage principal de l'approche de Caputo est que les conditions initiales des équations différentielles fractionnaires avec dérivées de Caputo acceptent la même forme comme pour les équations différentielles d'ordre entier, c'est à dire, contient les valeurs limites des dérivées d'ordre entier des fonctions inconnues en borne inférieur $t = a$.

★ Une autre différence entre la définition de Riemann et celle de Caputo est que la dérivée d'une constante au sens de Caputo est nulle par contre au sens de Riemann-Lioville elle est :

$$\cdot{}_a^R D_t^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}.$$

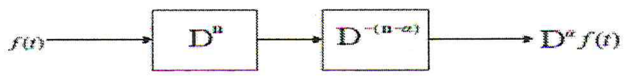
★ Graphiquement, on peut dire que le chemin suivi pour arriver à la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est également l'inverse quand on suit l'autre sens (Riemann-Liouville). En d'autre termes , pour trouver la dérivée fractionnaire d'ordre α où $[\alpha] = n \in \mathbb{N}$*parl'approchedeRiemann– Liouville, oncommenced'abordparl'intgrationfractionnaired'ordre*(n-α) pour la fonction $f(t)$ et puis on dérive le résultat obtenu à l'ordre entier n.

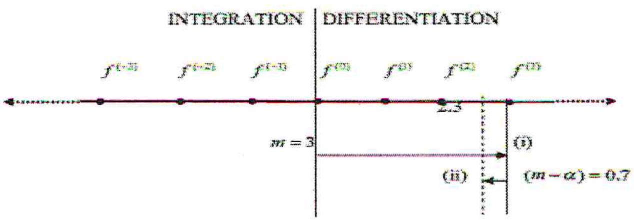


La dérivation fractionnaire au sens de

Rimann-Lieuville d'ordre 2,3

• Mais pour trouver la dérivée fractionnaire d'ordre α par l'approche de Caputo on commence par la dérivée d'ordre entier n de la fonction $f(t)$ et puis on l'intègre d'ordre fractionnaire $(n-\alpha)$.





La dérivation fractionnaire au sens de Caputo
d'ordre 2,3

1.3 Intégrale fractionnaire de type Hadamard

Proposition 1.5.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale d'ordre n de type Hadamard pour $\mu \in \mathbb{R}$ et $a \geq 0$ est donnée par la formule suivante :

$$\begin{aligned}({}^H I^n_{a+\mu} f)(x) &= x^{-\mu} \int_a^x \frac{dt_1}{t_1} \int_a^{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \dots \int_a^{t_{n-1}} t_n^{\mu} f(t_n) \frac{dt_n}{t_n}, \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x \left(\frac{t}{x}\right)^{\mu} \left(\log \frac{x}{t}\right)^{n-1} \frac{f(t)}{t} dt, \quad (x > a).\end{aligned}$$

On peut généraliser, d'une manière naturelle, la formule précédente pour $n = \alpha$ qui est un nombre réel quelconque par la définition suivante.

Définition 1.5.

L'intégrale fractionnaire de type Hadamard avec paramètre $\mu \in \mathbb{R}$ de la fonction f d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}$ est définie par :

$$({}^H I^{\alpha}_{a+\mu} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\frac{t}{x}\right)^{\mu} \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \frac{f(t)}{t} dt \tag{1.4}$$

avec $x \in (a, b)$.
Dans le cas $\mu = 0$, l'équation (2.1) est donnée par :

$$({}^H I^{\alpha}_{a+\mu} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \frac{f(t)}{t} dt.$$

Exemple 1.4.

Soit : $f(x) = x^{-\mu} \left(\log \frac{x}{a}\right)$ avec $0 < \alpha < 1$ et $\beta > 0$, on a :

$$({}^H I^{\alpha}_{a^+,\mu}) f(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} x^{-\mu} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\beta+\alpha-1} \tag{1.5}$$

En effet ;

$$({}^H I^{\alpha}_{a^+\mu})\left[x^{-\mu}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\beta-1}\right]=\frac{x^{-\mu}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\beta-1}\frac{dt}{t}$$

$$\begin{aligned}({}^H I^{\alpha}_{a^+\mu})\left[x^{-\mu}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\beta-1}\right]&=\frac{x^{-\mu}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\beta+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-y)^{\alpha-1}y^{\beta-1}dy\\&=\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha)}x^{-\mu}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\beta+\alpha-1}\\&=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}x^{-\mu}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\beta+\alpha-1}\end{aligned}$$

en effectuant le changement de variable $y=\frac{\log a}{\log x}$, on obtient :

Remarque 1.1.

L'intégrale de type Hadamard de l'équation (2.2) avec $\mu=0$ est donnée par :

$$({}^H I^{\alpha}_{a^+\mu})\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\beta-1}=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\beta+\alpha-1} \tag{1.6}$$

1.3.1 La dérivée fractionnaire de type Hadamard

Définition 1.6.

La dérivée fractionnaire de type Hadamard avec paramètre $\mu\in\mathbb{R}$ de la fonction f d'ordre $\alpha>0$ est définie par :

$$({}^H D^{\alpha}_{a^+\mu}f)(x)=x^{-\mu}\delta^n x^{\mu}({}^H I^{n-\alpha}_{a+\mu}(f(x)) \tag{1.7}$$

avec $\delta=x\frac{d}{dx}$, $n-1<\alpha\leq n\in\mathbb{Z}^+$, $x\in(a,b)$, et $0\leq a<b\leq\infty$.

Dans le cas $\mu=0$

$$({}^H D^{\alpha}_{a^+\mu}f)(x)=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}x^{-\mu}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\beta+\alpha-1}$$

Exemple 1.5. $f(x) = x^{-\mu}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\beta-1}$ *avec* $0 < \alpha < 1$ *et* $\beta > 0$,

$$({}^{H}D^{\alpha}_{a+\mu}f(x)) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}x^{-\mu}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\beta-\alpha-1} \tag{1.8}$$

En effet;

$$\begin{aligned}
({}^{H}D^{\alpha}_{a+\mu})\left[x^{-\mu}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\beta-1}\right] &= x^{-\mu}\delta^{n}x^{\mu}\left[{}^{H}I^{n-\alpha}_{a+\mu}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\beta-1}\right]\\
&= x^{-\mu}\delta^{n}x^{\mu}\left[\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+n-\alpha)}x^{-\mu}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{n-\alpha+\beta-1}\right]\\
&= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+n-\alpha)}x^{-\mu}\delta^{n}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{n-\alpha+\beta-1}\\
&= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+n-\alpha)}\frac{\Gamma(n-\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}x^{-\mu}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\beta-\alpha-1}\\
&= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}x^{-\mu}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\beta-\alpha-1}
\end{aligned}$$

Remarque 1.2.

La dérivée de type Hadamard de l'équation 1.3.1 avec $\mu = 0$ est donnée par :

$${}^{H}D^{\alpha}_{a+}\left(\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\beta-1}\right) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\beta-\alpha-1}.$$

] Pour $\beta = 1$, on a :

$${}^{H}D^{\alpha}_{a+}(1) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{-\alpha}.$$

Donc la dérivée fractionnaire d'une constante au sens de Hadamard n'est pas nulle.

1.3.1.1 Propriétés de la dérivée et l'intégrale fractionnaire de Hadamard

Lemme 1.2.

Soient $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $1 \leq p \leq \infty$, $0 \leq a \leq b \leq \infty$ et μ, $c \in \mathbb{R}$ avec $\mu \geq c$.
Pour $f \in X^{p}_{c}(a,b)$, on a :

$$({}^{H}I^{\alpha}_{a+\mu}.{}^{H}I^{\beta}_{a+,\mu}f)(x) = {}^{H}I^{\alpha+\beta}_{a+,\mu}f(x) \tag{1.9}$$

Preuve

$$\begin{aligned}
({}^{H}I^{\alpha}_{a+\mu}.{}^{H}I^{\beta}_{a+,\mu}f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\left(\frac{u}{x}\right)^{\mu}\left(\log\frac{x}{u}\right)^{\alpha-1}\frac{du}{u}\times\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^u\left(\frac{t}{u}\right)^{u}\left(\log\frac{u}{t}\right)^{\beta-1}f(t)\frac{dt}{t}\\
&= \frac{x^{-\mu}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x t^{\mu-1}f(t)dt\int_t^x\left(\log\frac{x}{u}\right)^{\alpha-1}\left(\log\frac{u}{t}\right)^{\beta-1}\frac{du}{u}
\end{aligned}$$

La fonction de l'intégrale interne est évaluée par le changement de variable suivant :

$$\tau = \frac{\log\frac{u}{t}}{\log\frac{x}{t}}$$

$$\int_t^x\left(\log\frac{x}{u}\right)^{\alpha-1}\left(\log\frac{u}{t}\right)^{\beta-1}\frac{du}{u} = \left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
({}^{H}I^{\alpha}_{a+\mu}.{}^{H}I^{\beta}_{a+\mu}f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^x\left(\frac{u}{x}\right)^{\mu}\left(\log\frac{x}{u}\right)^{\alpha+\beta-1}\frac{du}{u}\\
&= ({}^{H}I^{\alpha+\beta}_{a+\mu}f)(x)
\end{aligned}$$

Lemme 1.3. *[8] [1]*

Soient $\alpha \geq \beta > 0$, $1 \leq p \leq \infty$, $0 \leq a \leq b \leq \infty$,et $\mu, c \in \mathbb{R}$ avec $\mu \geq c$.
Pour $f \in X_c^p(a,b)$, on a :

$$({}^H D^{\beta}_{a^+,\mu} . {}^H I^{\alpha}_{a^+,\mu} f)(x) = {}^H I^{\alpha-\beta}_{a^+,\mu} f(x) \tag{1.10}$$

En particulier, si $\beta = m \in \mathbb{Z}^+$, alors

$$({}^H D^{m}_{a^+,\mu} . {}^H I^{\alpha}_{a^+\mu} f)(x) = {}^H I^{\alpha-m}_{a^+,\mu} f(x) \tag{1.11}$$

Lemme 1.4.

I). Pour l'intégrale fractionnaire au sens de Hadamard 1.5, si $\alpha \longrightarrow 1$ alors

$${}^H I^{\alpha}_{a^+\mu} f)(x) = \int_a^x \left(\frac{t}{x}\right)^{\mu} \frac{f(t)}{t} dt. \tag{1.12}$$

et si $\alpha \longrightarrow 0^+$ on a :

$${}^H I^{\alpha}_{a^+\mu} f(x) = f(x). \tag{1.13}$$

II). Pour la dérivée fractionnaire au sens de Hadamard si $\alpha \longrightarrow 0$ alors

$${}^H D^{\alpha}_{a^+\mu} f(x) = f(x). \tag{1.14}$$

Preuve

I). En utilisant une intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha \longrightarrow 0^+} ({}^H I^{\alpha}_{a^+\mu} f(x)) &= \lim_{\alpha \longrightarrow 0^+} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\frac{t}{x}\right)^{\mu} \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \frac{f(t)}{t} dt \\
&= \lim_{\alpha \longrightarrow 0^+} \frac{-1}{\Gamma(1+\alpha)} \left\{ \left(\frac{t}{x}\right)^{\mu} f(t) \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha} |_a^x - \int_a^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha} d\left[\left(\frac{t}{x}\right)^{\mu} f(t)\right] \right\} \\
&= f(t).
\end{aligned}$$

II). On a :

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha \longrightarrow 0^+} D^{\alpha}_{a^+\mu} f(x) &= lim_{\alpha \longrightarrow 0^+} x^{-\mu} \left(x \frac{d}{dx}\right) \left\{ x^{\mu} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \left(\frac{t}{x}\right)^{\mu} \left(\log \frac{x}{t}\right)^{-\alpha} f(t) \frac{dt}{t} \right\} \\
&= x^{-\mu+1} \frac{d\left(\int_a^x t^{\mu} f(t) \frac{dt}{t}\right)}{dx} \\
&= f(t).
\end{aligned}$$

Si $\alpha \longrightarrow (n-1)^+$ alors :

$${}^H D^{\alpha}_{a^+,\mu} f(x) = x^{-\mu} \delta^{n-1} (x^{\mu} f(x)) = (\delta + \mu)^{n-1} f(x). \tag{1.15}$$

avec $\delta = x \frac{d}{dx}$.
Si $\alpha \longrightarrow n^-$ alors :

$${}^H D^{\alpha}_{a^+,\mu} f(x) = x^{-\mu} \delta^{n} (x^{\mu} f(x)) \equiv (\delta + \mu)^{n} f(x). \tag{1.16}$$

En particulier $\alpha \to 1$ alors :

$${}^H D^{\alpha}_{a^+\mu} f(x) = \mu f(x) + x f'(x) = (\mu + \delta) f(x). \tag{1.17}$$

Théorème 1.4.

Soit $(n-1) < \alpha < \beta \leq n \in \mathbb{Z}^+$, $1 \leq p \leq \infty$, $0 \leq a < b \leq \infty$ et soit $\mu, c \in \mathbb{R}$, pour tout $\mu \geq c$ et pour $f \in X_c^p(a,b)$ et ${}^H I^{\alpha}_{a^+,\mu} f \in AC^n_{\delta,\mu}[a,b,]$:

$$ {}^H D^{\beta}_{a^+,\mu} . {}^H I^{\alpha}_{a^+,\mu} f(x) = {}^H D^{\beta-\alpha}_{a^+\mu} f(x). \tag{1.18} $$

En particulier, si $\beta = n$ alors

$$ {}^H D^{n}_{a^+,\mu} . {}^H I^{\alpha}_{a^+\mu} f(x) = {}^H D^{n-\alpha}_{a^+,\mu} f(x). \tag{1.19} $$

Preuve
D'après la définition de l'intégrale (2.1) et la dérivée (2.2) de type Hadamard, on a :

$$
\begin{aligned}
{}^H D^{\alpha}_{a^+\mu} . {}^H I^{\alpha}_{a^+\mu} f(x) &= x^{-\mu} \delta^n x^{\mu} ({}^H I^{n-\beta}_{a^+\mu} . {}^H I^{\alpha}_{a^+\mu} f(x)),\\
&= x^{-\mu} \delta^n x^{\mu} ({}^H I^{n-\beta+\alpha}_{a^+,\mu} f(x)),\\
&= x^{-\mu} \delta \delta^{n-1} x^{\mu} ({}^H I^{n-\beta+\alpha}_{a^+\mu} f(x)).
\end{aligned}
$$

L'expression intérieure peut être formulée comme suit :

$$
\begin{aligned}
\delta^{n-1} x^{\mu} ({}^H I^{n-\beta+\alpha}_{a^+\mu} f(x)) &= \delta^{n-1} \left(\frac{1}{\Gamma(n+\alpha-\beta)} \int_a^x t^{\mu} \left(\log \frac{x}{t}\right)^{n+\alpha-\beta-1} f(t) \frac{dt}{t} \right)\\
, &= \frac{(n+\alpha-\beta-1)(n+\alpha-\beta-2)...(n+\alpha-\beta-(n-1))}{\Gamma(n+\alpha-\beta)} \int_a^x t^{\mu} \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha-\beta} f(t) \frac{dt}{t},\\
&= \frac{x^{\mu}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)} \int_a^x \left(\frac{t}{x}\right)^{\mu} \left(\log \frac{x}{t}\right)^{(\alpha-\beta+1)-1} f(t) \frac{dt}{t},\\
&= x^{\mu} . {}^H I^{\alpha-\beta+1}_{a^+\mu} f(x).
\end{aligned}
$$

Ainsi :

$$
\begin{aligned}
({}^H D^{\beta}_{a^+\mu} . {}^H I^{\alpha}_{a^+\mu} f)(x) &= x^{-\mu} \delta x^{\mu} ({}^H I^{1+\alpha-\beta}_{a^+,\mu} f(x))\\
&= {}^H D^{\beta-\alpha}_{a^+\mu} f(x).
\end{aligned}
$$

Théorème 1.5. [10]

Soient $\beta \geq a > 0$, $(n-1) < \alpha \leq n$, $n \in \mathbb{Z}^+$, $m-1 < \beta \leq m, m \in \mathbb{Z}^+$, $0 \leq a \leq b \leq \infty$, $1 \leq p \leq \infty$, et soit $\mu, c \in \mathbb{R}$ avec $\mu \geq c$ et pour $f \in AC^m_{\delta,\mu}$ et ${}^H D^{\alpha}_{a^+,\mu} f \in X0_c(a,b)$, on a :

$$ {}^H I^{\beta}_{a^+,\mu} . {}^H D^{\alpha}_{a^+,\mu} f(x) = {}^H I^{\beta-\alpha}_{a^+,\mu} f(x), \tag{1.20} $$

En particulier, si $\alpha = \beta$ alors

$$ {}^H I^{\beta}_{a^+,\mu} . {}^H D^{\alpha}_{a^+,\mu} f(x) = f(x). \tag{1.21} $$

Lemme 1.5.

Si $\alpha > 0$, $f(t) \in C([a,b])$ et $a > 0$, alors l'équation différentielle :

$$ {}^H D^{\alpha}_{a^+} f(t) = 0, \tag{1.22} $$

admet comme solution :

$$ f(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\alpha-j}. \tag{1.23} $$

Et on a la formule suivante :

$$^{H}I^{\alpha}_{a^+}.^{H}D^{\alpha}_{a^+}f(t) = f(t) + \sum_{j=1}^{n} c_j \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\alpha - j}. \tag{1.24}$$

où $j = 1, 2, \ldots, n$, $n - 1 < \alpha < n$ et $c \in \mathbb{R}$.

Preuve

$$\begin{aligned}
^{H}D^{\alpha}_{a^+}f(t) = 0 \Leftrightarrow \delta^n.^{H}I^{n-\alpha}_{a^+}f(t) = 0,\\
&\Leftrightarrow^{H} I^{n-\alpha}_{a^+}f(t) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \left(\log \frac{t}{a}\right)^{j},\\
&\Rightarrow^{H} D^{n-\alpha}_{a^+}.^{H}I^{n-\alpha}_{a^+}f(t) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j D^{n-\alpha}_{a^+} \left(\log \frac{t}{a}\right)^{j},\\
&\Rightarrow f(t) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j-n+\alpha+1)} \left(\log \frac{t}{a}\right)^{j-n+\alpha},\\
&\Rightarrow f(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j \frac{\Gamma(j)}{\Gamma(j-n+\alpha)} \left(\log \frac{t}{a}\right)^{j-n+\alpha-1},\\
&\Rightarrow f(t) = \sum_{j=1}^{n} c'_j \left(\log \frac{t}{a}\right)^{j-n+\alpha-1},\\
&\Rightarrow f(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\alpha-j}.
\end{aligned}$$

Inversement, on a :

$$\begin{aligned}
f(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\alpha-j} &\Rightarrow^{H} D^{\alpha}_{a^+}f(t) =^{H} D^{\alpha}_{a^+} + \sum_{j=1}^{n} c_j \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\alpha-j},\\
&\Rightarrow^{H} D^{\alpha}_{a^+}f(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j.^{H}D^{\alpha}_{a^+} \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\alpha-j},\\
&\Rightarrow^{H} D^{\alpha}_{a^+}f(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j.0 = 0.
\end{aligned}$$

ona alors :

$$^{H}D^{\alpha}_{a^+}f(t) = 0 \Leftrightarrow f(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\alpha-j}. \tag{1.25}$$

Puisque

$$^{H}I^{\alpha}_{a^+}.^{H}D^{\alpha}_{a^+}f(t) = f(t) + \sum_{j=1}^{n} c_j \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\alpha-j}, b$$

est équivalente à :

$$^{H}I^{\alpha}_{a^+}.^{H}D^{\alpha}_{a^+}f(t) - f(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\alpha-j}.$$

On pose

$$y(t) =^H I^{\alpha}_{a+}.^H D^{\alpha}_{a+} f(t) - f(t).$$

ona

$$\begin{aligned} {}^H D^{\alpha}_{a+} y(t) = 0 &\Leftrightarrow^H D^{\alpha}_{a+}(^H I^{\alpha}_{a+}.^H D^{\alpha}_{a+} f(t)) = 0 \\ &\Leftrightarrow^H D^{\alpha}_{a+}.^H I^{\alpha}_{a+}.^H D^{\alpha}_{a+} f(t) -^H D^{\alpha}_{a+} f(t) = 0 \\ &\Leftrightarrow^H D^{\alpha}_{a+} f(t) -^H D^{\alpha}_{a+} f(t) = 0 \end{aligned}$$

Chapitre 2

Méthode de sur et sous solutions pour les équations différentielles

Les équations différentielles sont omniprésentes dans de nombreux domaines scientifiques, de l'ingénierie à la physique en passant par la biologie.
La résolution de ces équations est souvent complexe et nécessite l'utilisation de différentes méthodes. Parmi celles-ci, la méthode des sur et sous solutions est une approche puissante et élégante pour résoudre certains types d'équations différentielles.

L'idée fondamentale de cette méthode repose sur la comparaison de l'équation différentielle donnée avec une série d'équations plus simples, appelées sur et sous solutions. Ces solutions, généralement choisies de manière astucieuse, encadrent la solution exacte de l'équation différentielle. En comparant ces sur et sous solutions avec l'équation différentielle initiale, on peut déterminer des bornes supérieures et inférieures pour la solution exacte.

En d'autres termes, la méthode des sur et sous solutions repose sur le principe d'encadrer la solution exacte d'une équation différentielle en comparant cette équation avec des fonctions choisies comme sur et sous solutions. Cette méthode offre une approche systématique et efficace pour résoudre de nombreux types d'équations différentielles, en particulier lorsque d'autres méthodes analytiques ou numériques peuvent être difficiles à appliquer.

Cette approche offre plusieurs avantages, notamment sa simplicité conceptuelle et sa flexibilité pour traiter une variété d'équations différentielles. De plus, elle peut souvent fournir des résultats précis même pour des équations complexes pour lesquelles d'autres méthodes de résolution peuvent être difficiles à appliquer.

Dans ce contexte, explorons de plus près les principes fondamentaux de la méthode des sur et sous solutions et examinons comment elle peut être appliquée pour résoudre efficacement les équations différentielles dans divers domaines d'application.

2.1 Méthode de sur et sous solutions

[3] La méthode des solutions supérieures et inférieures est un outil utilisé pour prouver l'existence de solution d'une équation différentielle. Tout d'abord, nous définissons les solutions supérieures et inférieures et donnons quelques théorèmes sur leurs propriétés.

2.1.1 Cas du premier ordre

[10] Soit $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction C^1 (c'est-à-dire que F est continue et continûment différentiable). Nous considérons l'ED suivante :

$$[u'(t) = F(t, u(t))] \tag{2.1}$$

Soit J un intervalle, ouvert ou fermé, et $\underline{u} \in C^1(J, \mathbb{R})$. Nous disons que $\underline{u}$ est une solution inférieure stricte de 2.1 sur J si

$$\underline{u}'(t) < F(t, \underline{u}(t))$$

pour tout $t \in J$. Si $\overline{u} \in C^1(J, \mathbb{R})$, nous disons que $\overline{u}$ est une solution supérieure stricte de (2.1) sur J si

$$\overline{u}'(t) > F(t, \overline{u}(t))$$

pour tout $t \in J$.

Remarque 2.1.

Nous pouvons parler de solutions supérieures et inférieures (en supprimant le mot strict") si nous affaiblissons les inégalités dans la définition. Si cela est fait, il serait possible pour une solution supérieure ou inférieure d'être une solution réelle de l'équation différentielle.

Théorème 2.1.

Soit $\underline{u}$ une solution inférieure stricte de (2.1) sur l'intervalle $[t_0, \infty)$. Soit $u_0 > \underline{u}(t_0)$. Alors la solution de (2.1) satisfaisant $u(t_0) = u_0$, avec l'intervalle maximal de l'existence à droite $[t_0, \beta)$, satisfait

$$u(t) > \underline{u}(t)$$

sur $[t_0, \beta)$.

Preuve :

Supposons que la conclusion est fausse, et soit $c = \inf_{t \geq t_0}\{t \,|\, u(t) \leq \underline{u}(t)\}$.
L'ensemble $\{t \,|\, u(t) \leq \underline{u}(t)\}$ est fermé puisque les deux fonctions u et $\underline{u}$ sont continues, donc $c \in \{t \,|\, u(t) \leq \underline{u}(t)\}$. Ainsi, $u(c) \leq \underline{u}(c)$, tandis que $u(t) > \underline{u}(t)$ pour tout $t \in [t_0, c)$. La continuité forcerait alors $u(c) = \underline{u}(c)$. Soit $y(t) = u(t) - \underline{u}(t)$. Alors $y(t) > 0$ sur $[t_0, c)$ et $y(c) = 0$. Ainsi, $y'(c) \leq 0$. Mais sur $[t_0, \beta)$, nous avons

$$y'(t) = u'(t) - \underline{u}'(t) > F(t, u(t)) - F(t, \underline{u}(t))$$

et donc à $t = c$ nous avons

$$y'(c) > F(c, u(c)) - F(c, \underline{u}(c)) = 0$$

ce qui contredit $y'(c) \leq 0$. Ceci prouve le théorème.

Théorème 2.2.

Soit $\underline{u}$ une solution supérieure stricte de (2.1) sur l'intervalle $[t_0, \infty)$. Soit $u_0 < \underline{u}(t_0)$. Alors la solution de (2.1) satisfaisant $u(t_0) = u_0$, avec l'intervalle maximal de l'existence à droite $[t_0, \beta)$, satisfait

$$u(t) < \underline{u}(t)$$

sur $[t_0, \beta)$.

Théorème 2.3.

Soient $\underline{u}$ et $\overline{u}$ des solutions inférieures et supérieures strictes, respectivement, de (2.1) sur l'intervalle $[t_0, \infty)$. Supposons $\underline{u}(t) < \overline{u}(t)$ pour $t \geq t_0$. Soit $\underline{u}(t_0) < u_0 < \overline{u}(t_0)$ et soit $u(t)$ la solution de (2,1) satisfaisant la condition initiale $u(t_0) = u_0$. Alors $u(t)$ est une solution de (3) sur $[t_0, \infty)$ et $\underline{u}(t) < u(t) < \overline{u}(t)$ pour $t_0 \leq t < \infty$.

Théorème 2.4.

ona $y(t; t_0 y_0)$ la solustion initial dans le propleme (2) au l'interval fermé $[t_0, T](a < t_0 < T < b).\forall \varepsilon > 0$. et $\delta = \delta(\varepsilon y_0)$ si $|y_0 - y_1| < \delta$ y_1,la solution $y(t; t_0, y_1)$ to (1) et $y(t_0; t_0, y_1) = y_1$ elle definé par $[t_0, T]$ et satisfie$|y(t, t_0, y_0) - y(t; t_0, y_1)| < \varepsilon fort_0 \leq t \leq T$.

Théorème 2.5.

Soient $\underline{u}$ et $\overline{u}$ des solutions inférieures et supérieures strictes, respectivement, de (2.1) sur l'intervalle $[t_0, \infty)$. Supposons $\underline{u}(t) < \overline{u}(t)$ pour $t \geq t_0$. Soit $u^*(t)$ la solution de (2.1) satisfaisant la condition initiale $u^*(t_0) = \underline{u}(t_0)$. Alors $u^*(t)$ est une solution de (2.1) sur $[t_0, \infty)$ et $\underline{u}(t) \leq u^*(t) < \overline{u}(t)$ pour $t_0 < t < \infty$.

Preuve

Soit $\{\varepsilon_n\}$ une suite de nombres positifs convergeant vers zéro lorsque $n \to \infty$, et tels que $\underline{u}(t_0) < \underline{u}(t_0) + \varepsilon_n < \overline{u}(t_0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $u_n(t)$ la solution de (2.1) satisfaisant $u_n(t_0) = \underline{u}(t_0) + \varepsilon_n$. Alors $\underline{u}(t) < u_n(t) < \overline{u}(t)$ pour $t_0 \leq t < \infty$. Soit $T > t_0$. Par le théorème (2.1.1), la suite de fonctions $\{u_n\}$ converge uniformément sur $[t_0, T]$ vers $u^*(t)$. Ainsi, $\underline{u}(t) \leq u^*(t) < \overline{u}(t)$ pour $t_0 \leq t \leq T$. Puisque ces inégalités tiennent pour tout $T > t_0$, elles tiennent sur $[t_0, \infty)$. Il est également clair que

Théorème 2.6.

Soient $\underline{u}$ et $\overline{u}$ des solutions inférieures et supérieures strictes, respectivement, de (2.1) sur l'intervalle $[t_0, \infty)$. Supposons $\underline{u}(t) < \overline{u}(t)$ pour $t \geq t_0$. Soit $u^*(t)$ la solution de (2.1) satisfaisant la condition initiale $u^*(t_0) = \overline{u}(t_0)$. Alors $u^*(t)$ est une solution de 2.1 sur $[t_0, \infty)$ et $\underline{u}(t) < u^*(t) \leq \overline{u}(t)$ pour $t_0 < t < \infty$.

2.1.2 Application de la méthode à des Problèmes périodiques

Soit $F \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, et supposons qu'il existe un nombre $T > 0$ tel que $F(t+T, x) = F(t, x)$ pour tout $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Considérons l'équation différentielle

$$u' = F(t, u). \tag{2.2}$$

Nous nous intéressons à l'existence de solutions périodiques de période T de (2.2). Une solution T-périodique est une solution $y = y(t)$ satisfaisant 2.2 pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $y(t+T) = y(t)$ pour tout t. En bref, y est périodique avec une période T. Il est évident que toute solution T-périodique u satisfait les conditions aux limites

$$u(0) = u(T). \tag{2.3}$$

Le réciproque est également vrai, dans le sens suivant : si u est une solution de (2.2) satisfaisant (2.3), alors u peut être prolongée en tant que fonction T-périodique sur toute la droite réelle $\mathbb{R}$, et cette extension sera une solution T-périodique de (2.2).

Théorème 2.7.

Soient $\underline{u}(t) < \overline{u}(t)$ respectivement des solutions inférieure et supérieure strictes de (2.2) sur $[0, T]$. Supposons également que

$$\underline{u}(0) \leq \underline{u}(T) \quad \text{et} \quad \overline{u}(0) \geq \overline{u}(T).$$

Alors (2.2),(2.3) a une solution $u^*(t)$ satisfaisant $\underline{u}(t) \leq u^*(t) \leq \overline{u}(t)$ pour $0 \leq t \leq T$. Ainsi, (2.2) a une solution T-périodique. **Preuve** :
Soit $J = [\underline{u}(0), \overline{u}(0)]$ et soit $x \in J$. Soit $u(t; x)$ la solution de (2.2) avec $u(0; x) = x$. Par les théorèmes de la section précédente, $u(t; x)$ est une solution sur $[0, T]$ et satisfait
$\underline{u}(t) \leq u(t; x) \leq \overline{u}(t)$ pour $0 \leq t \leq T$. Ainsi, $u(T; x) \in [\underline{u}(T), \overline{u}(T)] \subset J$. Ainsi, l'application $x \mapsto u(T; x)$ envio J sur lui-même. Soit Φ cette application, donc $\Phi(x) := u(T; x)$ et $\Phi(J) \subset J$. Par le Théorème 2.1.1, Φ est continue, donc il s'ensuit que Φ a un point fixe. Autrement dit, il existe $x^* \in J$ tel que $\Phi(x^*) = x^*$. Il s'ensuit maintenant que la solution u^* de (2.2) avec $u^*(0) = x^*$ satisfait (2.3). Cela prouve le théorème.

Remarque 2.2.

Il est facile de voir que si J est un intervalle borné et fermé et que $G : J \longrightarrow J$ est continue, alors G a un point fixe. Soit $J = [a, b]$ et soit $F(x) = G(x) - x$ pour $x \in J$. Alors $F(a) = G(a) - a \geq a - a = 0$ et $F(b) = G(b) - b \leq b - b = 0$. Ainsi, $F(a) \geq 0 \geq F(b)$ et comme F est continue sur $[a, b]$, $F(x^*) = 0$ pour un certain $x^* \in [a, b]$. Donc $0 = F(x^*) = G(x^*) - x^*$, donc $G(x^*) = x^*$.

En inversant les inégalités, nous avons également le théorème suivant, dont la preuve est similaire à celle du Théorème (2.1.2).

Théorème 2.8.

Soient $\underline{u}(t) > \overline{u}(t)$ respectivement des solutions inférieure et supérieure strictes de (2.2) sur $[0, T]$. Supposons également que

$$\underline{u}(0) \geq \underline{u}(T) \quad \text{et} \quad \overline{u}(0) \leq \overline{u}(T).$$

Alors 2.2,2.3 a une solution $u^*(t)$ satisfaisant $\underline{u}(t) \geq u^*(t) \geq u(t)$ pour $0 \leq t \leq T$. Ainsi, (2.2) a une solution périodique de période T.

2.1.2.1 Exemples de Mathématiques Pures

Nos deux premiers exemples impliqueront des équations différentielles linéaires facilement solvables analytiquement, mais nous souhaitons les utiliser afin de démontrer la méthode des solutions supérieures et inférieures. Notre troisième exemple ne sera pas solvable analytiquement, donc nous montrerons l'utilité de la méthode dans les équations non linéaires.

Exemple 2.1.

Utilisons des solutions strictes supérieures et inférieures pour étudier l'existence de solutions périodiques à l'équation

$$u' = -u + \beta \sin(\omega t) \tag{2.4}$$

où $\beta, \omega > 0$. Maintenant, nous pouvons facilement résoudre la solution générale de (2.4) :

$$u(t) = Ce^{-t} + \frac{\beta}{1 + \omega^2} (\sin(\omega t) - \omega \cos(\omega t)),$$

et donc avec $C = 0$, nous avons une solution périodique. Cependant, nous souhaitons démontrer la méthode des solutions supérieures et inférieures. Puisque $F(t, u) := -u + \beta \sin(\omega t)$ satisfait $F(t, u) = F(t + T, u)$ pour $T = 2\pi/\omega$, nous cherchons des solutions de période $T = 2\pi/\omega$.

Soit $\underline{u} = -2\beta$. Ainsi, $\underline{u}' = 0 < 2\beta + \beta\sin(\omega t)$. Donc $\underline{u}$ est une solution inférieure stricte de (2.4). De même, soit $\overline{u} = 2\beta$. Alors $\overline{u'} = 0 > -2\beta + \beta\sin(\omega t)$, et $\overline{u}$ est une solution supérieure stricte de (2.4). Maintenant, nous avons $\underline{u}(t) = -2\beta < 2\beta = \overline{u}(t)$ pour tout $t \in [0,T]$, où $T = 2\pi/\omega$. De plus, $\underline{u}(0) = \underline{u}(T)$ et $\overline{u}(0) = \underline{u}(T)$. Ainsi, par le Théorème 9 (2.1.1), (2.4) a une solution périodique de période T.

La Figure (2.1) illustre un ensemble de solutions à 2.4 avec des valeurs initiales espacées de 0,1 unités. Puisque nous obtenons l'existence d'une solution périodique à partir du Théorème (2.1.1), Nous pouvons être assez sûrs de son emplacement en remarquant que les solutions tendent vers une fonction sinusoïdale dans le temps futur. Maintenant, considérons un exemple similaire qui illustre l'utilité du Théorème(2.8).

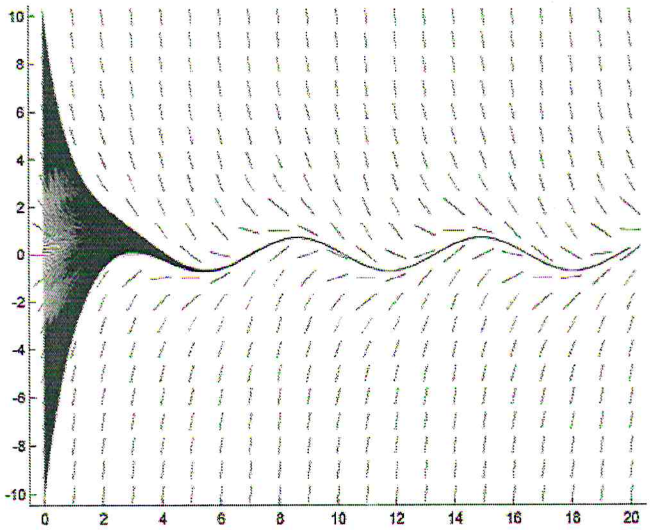


FIGURE 2.1 – Solutions de l'équation 2.4 pour le cas $\beta = 1$, $\omega = 1$.

Exemple 2.2.

Utilisons des solutions strictes supérieures et inférieures pour étudier l'existence de solutions périodiques à l'équation

$$u' = u + \beta\sin(\omega t) \tag{2.5}$$

Comme dans l'exemple précédent, on peut trouver une solution périodique en résolvant directement l'équation, mais ici nous souhaitons utiliser le Théorème (2.8). Encore une fois, nous cherchons des solutions de période $T = 2\pi/\omega$.

Soit $\underline{u} = 2\beta$. Ainsi, $\underline{u}' = 0 < 2\beta + \beta\sin(\omega t)$. Donc $\underline{u}$ est une solution inférieure stricte de (2.5). De même, soit $\overline{u} = -2\beta$. Alors $\overline{u'} = 0 > -2\beta + \beta\sin(\omega t)$, et $\overline{u}$ est une solution supérieure stricte de (2.5). Maintenant, nous avons $\underline{u}(t) > \overline{u}(t)$ pour tout $t \in [0,T]$, où $T = 2\pi/\omega$. De plus, $\underline{u}(0) = \underline{u}(T)$ et $\overline{u}(0) = \overline{u}(T)$. Donc, par le Théorème (2.8), (2.5) a une solution périodique de période T.

Dans la Figure (2.2) nous voyons une illustration des solutions à (2.5). C'est similaire à la façon dont la Figure (2.1) se projeterait dans le temps en arrière (c'est-à-dire que les solutions à (2.4) divergeraient de la solution périodique). Dans la Figure (2.2), nous voyons les solutions diverger dans le temps futur, mais en arrière, elles devraient converger vers des solutions périodiques stables. Ainsi, encore une fois, en utilisant les lignes de champ directionnelles, nous pouvons estimer où se situe la solution périodique.

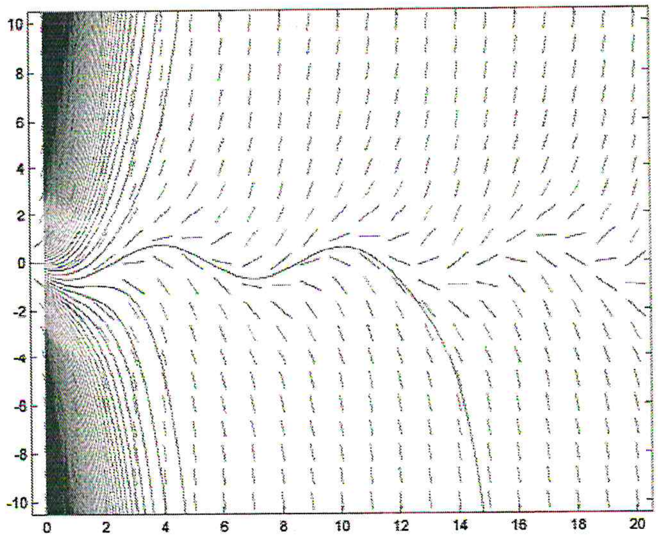


FIGURE 2.2 – Solutions de l'équation (2.5) pour le cas $\beta = 1$, $\omega = 1$.

Maintenant, regardons une équation différentielle non linéaire qui ne peut pas être résolue analytiquement.

Exemple 2.3.

Utilisons des solutions strictes supérieures et inférieures pour étudier l'existence de solutions périodiques à l'équation

$$u' = \sin(u) + \beta \sin(\omega t) \tag{2.6}$$

Encore une fois, nous cherchons des solutions de période $T = 2\pi/\omega$. Maintenant, (2.6) est difficile à traiter directement (à moins que nous supposions, par exemple, $0 < \beta < 1$), donc nous allons changer de variables. Soit

$$y' = \beta \sin(\omega t)$$

donc $y = -\frac{\beta}{\omega}\cos(\omega t) + C$. Soit $C = 0$, et soit $u = x + y = x - \frac{\beta}{\omega}\cos(\omega t)$. Ainsi,

$$x = u + \frac{\beta}{\omega}\cos(\omega t)$$

et

$$x' = u' - \beta \sin(\omega t) = \sin(u) = \sin\left(x - \frac{\beta}{\omega}\cos(\omega t)\right)$$

Nous avons donc

$$x' = \sin\left(x - \frac{\beta}{\omega}\cos(\omega t)\right) \tag{2.7}$$

Nous aimerions maintenant trouver une solution périodique à (2.7) de période $2\pi/\omega$, ce qui prouverait l'existence d'une solution périodique à (2.6).
Supposons

$$\frac{\beta}{\omega} < \frac{\pi}{2}$$

, et soit $\underline{x}$ tel que $0 < \frac{\beta}{\omega} < \underline{x} < \pi - \frac{\beta}{\omega}$. Nous prétendons que $\underline{x}$ est une solution inférieure stricte de (2.7). Autrement dit,

$$\underline{x}' = 0 < \sin\left(\underline{x} - \frac{\beta}{\omega}\cos(\omega t)\right) \tag{2.8}$$

Pour voir cela, notons d'abord que puisque $-1 \leq \cos(\omega t) \leq 1$, nous devons avoir $-\frac{\beta}{\omega} \leq \frac{\beta}{\omega}\cos(\omega t) \leq \frac{\beta}{\omega}$. Il s'ensuit que $-\frac{\beta}{\omega}\cos(\omega t) \leq \frac{\beta}{\omega}$, et

$$0 < \underline{x} - \frac{\beta}{\omega}\cos(\omega t) < \pi - \frac{\beta}{\omega} - \frac{\beta}{\omega}\cos(\omega t) \leq \pi - \frac{\beta}{\omega} + \frac{\beta}{\omega} = \pi,$$

donc

$$0 < \underline{x} - \frac{\beta}{\omega}\cos(\omega t) < \pi$$

et donc

$$0 < \sin\left(\underline{x} - \frac{\beta}{\omega}\cos(\omega t)\right)$$

Cela montre que $\underline{x}$ est une solution inférieure stricte de (2.7).

Maintenant, soit $\overline{x}$ tel que $\pi < \pi + \frac{\beta}{\omega} < \overline{x} < 2\pi - \frac{\beta}{\omega}$. Avec un argument similaire, on peut montrer que

$$\overline{x}' = 0 > \sin\left(\overline{x} - \frac{\beta}{\omega}\cos(\omega t)\right) \tag{2.9}$$

est satisfait, et donc $\overline{x}$ est une solution supérieure stricte de(2.7).

Nous allons maintenant vérifier les conditions nécessaires pour appliquer le Théorème 2.1.2. Définissons d'abord $\underline{x}(t) = \underline{x}$ et $\overline{x}(t) = \overline{x}$ pour tout $t \in [0, T]$. Par définition, nous avons

$$\underline{x}(t) = \underline{x} < \pi - \frac{\beta}{\omega} < \pi + \frac{\beta}{\omega} < \overline{x} = \overline{x}(t)$$

pour tout $t \in [0, T]$. De plus, $\underline{x}(0) = \underline{x}(T)$ et $\overline{x}(0) = \overline{x}(T)$. Ainsi, par le Théorème (2.1.2), (2.7) a une solution périodique $x^*(t)$.

Prenons $u^*(t) = x^*(t) - \frac{\beta}{\omega}\cos(\omega t)$. Puisque $x^*(t)$ et $-\frac{\beta}{\omega}\cos(\omega t)$ sont tous deux périodiques de période T, $u^*(t)$ l'est aussi. Ainsi, (2.6) a une solution périodique.

Ci-dessous, dans la Figure (2.3), est une illustration du cas où $\beta = 1$ et $\omega = 1$. Nous notons qu'il existe plusieurs solutions périodiques dont les valeurs moyennes semblent être placées à des multiples impairs de π, et que ces solutions semblent stables. À partir des lignes de champ directionnelles, il semble qu'il y ait d'autres solutions périodiques à des multiples pairs de π également, bien qu'elles soient instables. Il est postulé qu'en remontant le temps, les solutions à des multiples impairs de π seraient instables tandis que les solutions à des multiples pairs de π seraient stables.

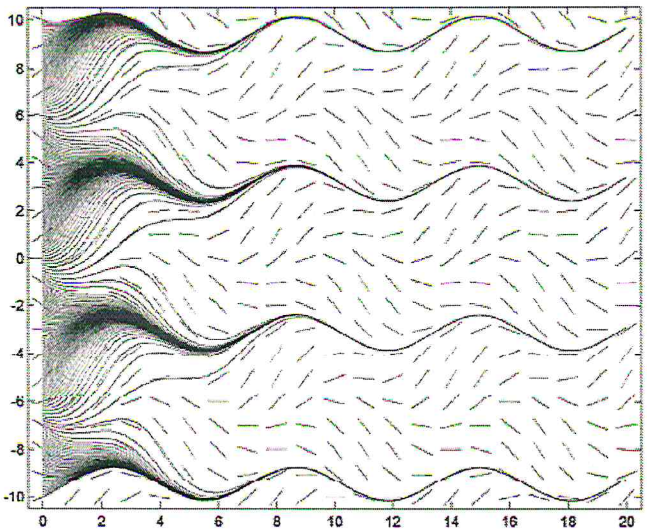


FIGURE 2.3 – Solutions de l'équation 2.6 pour le cas $\beta = 1$, $\omega = 1$.

La Figure (2.4) montre le cas où $\beta = 1$ et $\omega = 2$. Le comportement est le même que celui de la Figure (2.3), mais avec une période et une amplitude réduites.

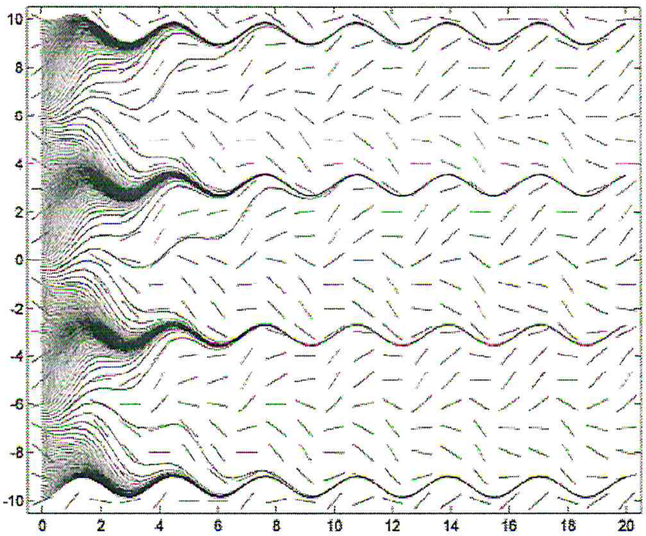


FIGURE 2.4 – Solutions de l'équation 2.6 pour le cas $\beta = 1$, $\omega = 2$.

Il est intéressant de noter que dans l'exemple précédent, bien que nous ayons la restriction $\frac{\beta}{\omega} < \frac{\pi}{2}$, les données numériques semblent suggérer qu'une telle restriction est inutile : il semble toujours que des solutions périodiques existeront, comme le montre ce qui suit.

Avec des conditions initiales à nouveau espacées de 0.1 unité, observez dans la Figure (2.5) le cas où $\beta = 2$, $\omega = 1$, et dans la Figure (2.6) le cas où $\beta = 3$, $\omega = 1$. Dans les deux cas, il semble y avoir des solutions périodiques, mais le taux de convergence des solutions vers elles (si elles convergent du tout) est plus lent. Notez également l'amplitude croissante en augmentant β.

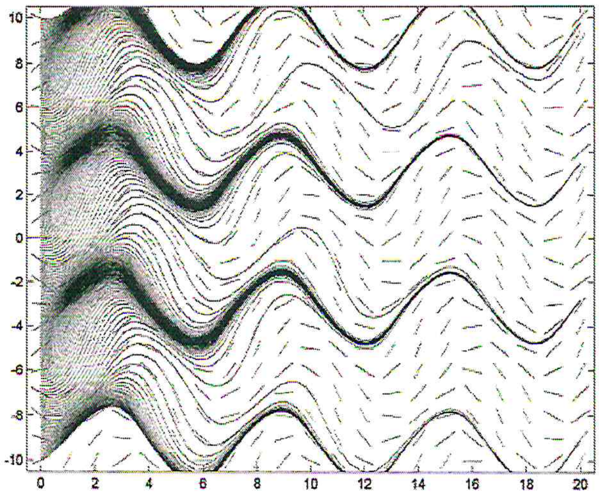


FIGURE 2.5 – Solutions de l'équation 2.6 pour le cas $\beta = 2$, $\omega = 1$.

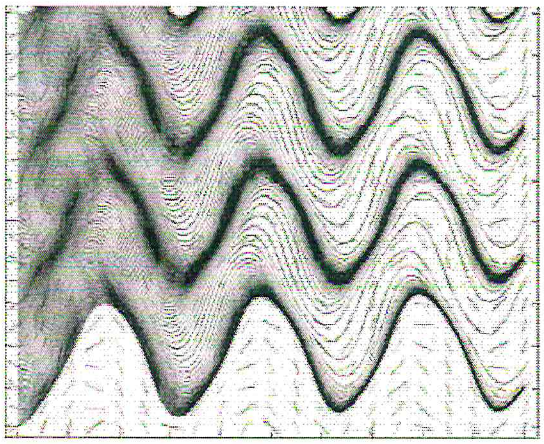


FIGURE 2.6 – Solutions de l'équation (8) pour le cas $\beta = 3$, $\omega = 1$.

2.1.3 Applicaction de la méthode au Probléme de Sturm-Liouville non linéaire

2.1.3.1 Théorèmes de Comparaison

Dans cette section, on considère léquation différentielle

$$u'' = f(x, u, u'), \tag{2.10}$$

où $f \in C(I \times \mathbb{R}^2)$ est supposée croissante par rapport à la seconde variable.

Définition 2.1.

1. On appelle sous-solution de l'équation (2.10) toute fonction v qui vérifie :

$$v'' \geq f(x, v, v'), \tag{2.11}$$
$$v(a) \leq u(a), v(b) \leq u(b). \tag{2.12}$$

2. On appelle sur-solution de l'équation (2.10) toute fonction w qui vérifie :

$$w'' \leq f(x, w, w'), \tag{2.13}$$
$$w(a) \geq u(a), w(b) \geq u(b). \tag{2.14}$$

Soit v une sous-solution et w une sur-solution
avec $v(a) \leq u(a) \leq w(a)$, $v(b) \leq u(b) \leq w(b)$. On a le résultat de comparaison.

Théorème 2.9. *[2]*

Si l'une des inégalités est stricte, alors $v < u$.

Théorème 2.10. [6]

Supposons qu'il existe $K > 0$, et que f est croissant par rapport à la seconde variable, Lipschitz unilatérale par rapport à la 3^{me} variable, c'est-à-dire :

$$f(x, y, z_1) - f(x, y, z_2) \leq K(z_1 - z_2), \quad \forall z_1 > z_2$$

Alors : $v \leq u \leq w$ sur I.

Corollaire 2.1. *[4]*

D'après le Théorème (2.1.1), le problème aux limites :

$$y'' = f(x, y, y'), \quad a < x < b \quad y(a)$$
$$= \alpha, \quad y(b) = \beta$$

admet au plus une solution.

I.2 Probléme de Sturm-Liouville non linéaire

Considérons le problème de Sturm-Liouville non linéaire :

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), & a \leq x \leq b, \\ a_1 y(a) - a_2 y'(a) = \alpha, \\ b_1 y(b) + b_2 y(b) = \beta \end{cases} \tag{2.15}$$

avec $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 > 0, \alpha_1 + \alpha_2 > 0, \beta_1 + \beta_2 > 0$.

Définition 2.2.

[4] Soient v et w deux fonctions deux fois dérivables.

1. v est une sous-solution du problème (2.15) si :

$$\begin{cases} v''(x) \geq f(x, v(x), v'(x)) \quad \forall x \in]a, b[\\ \quad \forall x \in]a, b[, \\ \ a_1 v(a) - a_2 v'(a) \leq \alpha, \\ b_1 v(b) + b_2 v(b) \leq \beta. \end{cases}$$

2. w est une sur-solution du problème (2.15) si :

$$\begin{cases} w''(x) \leq f(x, w(x), w'(x)), \quad \forall x \in]a, b[, \\ a_1 w(a) - a_2 w^{'}(a) \geq \alpha, \\ b_1 w(b) + b_2 w'(b) \geq \beta. \end{cases} \tag{2.16}$$

Théorème 2.11. *[4]*

Considérons le problème de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} y'' = f(x,y), & a < x < b \quad , \\ y(a) = \alpha; & y(b) = \beta. \end{cases} \tag{2.17}$$

Supposons l'existence de v et w respectivement sous et sur-solutions telles que $v \leq w$. Supposons que f est continue sur l'ensemble

$$K = \{(x,y) \in [a,b] \times \mathbb{R}; v(x) \leq y \leq w(x)\}.$$

Alors, le problème (2.17) admet au moins une solution u telle que $v(x) \leq u(x) \leq w(x)$.

Corollaire 2.2. *[4]*

Soit f une fonction continue sur l'intervalle [a, b], croissante par rapport à y. Alors le problème :

$$\begin{cases} y''(x) = f(x,y), & a < x < b, \\ y(a) = \gamma, y(b) = \delta \end{cases} \tag{2.18}$$

admet exactement une solution $y \in C^2([a,b])$.

Théorème 2.12.

Supposons que :

1. Il existe v et w deux fonctions de classe C^1 sous et sur solutions avec $v \leq w$ sur $[a,b]$,
2. f est continue et k-Lipschitzienne par rapport à la 3ème variable sur l'ensemble $K = \{(x,y,z) \in [a,b] \times \mathbb{R}^2; v(x) \leq y \leq w(x)\}$.

Alors, le problème (2.15) admet au moins une solution $u \in C^2([a,b])$ telle que $v(x) \leq u(x) \leq w(x)$, $\forall x \in [a,b]$.

Preve.

Considérons la fonction modifiée f' définie par :

$$f^{\Lambda}(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,c) & \text{si } z \geq 0 \\ f(x,y,z) & \text{si } |z| \leq 0 \\ f(x,y,-c) & \text{si } z \leq 0 \end{cases}$$

tel que : $c > \max_{X \in (a,b)}\{|v'(x)|, |w'(x)|\}$

$$f^{\Lambda\Lambda}(x,y,z) = \begin{cases} f^{\Lambda}(x,v(x),z) & \text{si } y \leq v(x) \\ f^{\Lambda}(x,w(x),z) & \text{si } y \geq w(x) \end{cases}$$

Où

$$f^{\sim} = f^{\Lambda\Lambda}(x,(\gamma(x,y)),z) + \frac{y - \gamma(x,y)}{1+y^2}$$

On a : $\gamma(x,y) = \max\{v(x), \min(y, w(x))\}$.

Alors,

$$\forall (x,y,z) \in [a,b] \times \mathbb{R}^2 : |f^{\sim}(x,y,z)| \leq \max_{a \leq y \leq b, v(x) \leq y \leq w(x)} |f(x,y,z)| + \frac{1}{2} \max_{a \leq y \leq b}(|v(x)|, |w(x)|).$$

Soit $|z_1| \in \mathbb{C}$, $z_2 \geq 0$. On a :

$$\begin{aligned}|f^{\Lambda}(x,y,z_1) - f^{\Lambda}(x,y,z_2)| &= |f(x,y,z_1) - f(x,y,z_2)| \\ &\leq K|z_1 - c| = K(c - z_1) \\ &\leq K(z_2 - z_1) = K|z_1 - z_2|\end{aligned}$$

Donc f^{Λ} est k-Lipschitzienne. Par suite, $f^{\sim}$ est aussi k-lipschitzienne et bornée. D'après le théorème(2.9), le problème $(P_{f^{\sim}})$ admet au moins une solution u.

Soit v sur-solution, w est une sous-solution du problème (2.15).

$$v(x) \leq u(x) \leq w(x)$$

On montre que $u(x) \leq w(x)$, pour certains x et on suppose que $d = u(x) - w(x)$ admet un maximum strictement positif en $x_0 \in (a,b)$.

Etape (1) $x_0 \in]a,b[$:

On a : $d^{'}(x_0) = 0$, et $d^{''}(x_0) \leq 0$.

$$d(x) > 0 \tag{2.19}$$

alors : $d^{''}(x_0) = u^{''}(x_0) - w^{''}(x_0) \leq f^{\sim}(x_0, u(x_0), u^{''}(x_0)) - f^{\sim}(x_0, w(x_0), w^{''}(x_0))$.
Donc
$d^{'}(x_0) = 0 \Leftrightarrow w^{'}(x_0) = u^{'}(x_0) = 0 \Leftrightarrow w^{'}(x_0) = u^{'}(x_0)$. alors :

$$\begin{aligned}&\leq f(x_0, w(x_0), w^{'}(x_0)) - f^{\sim}(x_0, u(x_0), w^{r}(x_0)) \\ &\leq f(x_0, w(x_0), w^{'}(x_0)) - f^{\Lambda}(x_0, \gamma(x_0), u(x_0)), w^{'}(x_0)) - \frac{u(x_0) - \gamma(x_0, u(x_0)}{1u^2(x_0)} \\ &\leq f(x_0, w(x_0), w^{'}(x_0)) - f^{\Lambda}(x_0, w(x_0), w^{'}(x)) - \frac{u(x_0) - w(x_0)}{1u^2(x_0)}\end{aligned}$$

On a : $w'(x_0) > 0$, donc les fonctions f et $f^{\sim}$ coïncident en x_0.
Finalement,

$$f(x_0, w(x_0), w'(x_0)) - f(x_0, w(x_0), w'(x_0)) + \frac{d(x_0)}{1} + d^2(x_0) \leq 0. \tag{2.20}$$

Par conséquent,

$$d(x_0) \leq 0$$

d'après (2.16), on a une contradiction.

$v(x) \leq u(x)$ l'autre inégalité de même manière.

Etape (2) $x_0 = a$:

$$\begin{aligned}&d(a) > d(x) \text{ pour tout } x \in [a,b] \\ &\quad a_1 w(a) - a_2 w^{'}(a) \leq \alpha, \qquad \text{donc} \Leftrightarrow a_1(u(a) - w(a)) - a_2(u^{'}(a) - w^{'}(a)) \geq 0 \\ &\quad a_1 u(a) + a_2 u^{'}(a) = \alpha\end{aligned}$$

Donc,
$a_1 d(a) - a_2 d^{'}(a) \geq 0 \Leftrightarrow a_1 d^{'}(a) \geq a_2 d^{'}(a)(a_1, a_2 \neq 0)$

c'est à dire : $d^{'}(a) \leq 0$

D'autre part, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $d(x) > 0$, pour tout $x \in (a,b)$ et l'on a sur l'intervalle $J = (a, a+\varepsilon)$:

$$\begin{aligned}u^{''}(x) - w^{''}(x) \geq 0 \Leftrightarrow u^{rr}(x) \geq w^{''}(x), \\ f(x, u(x), u^{'}(x)) \geq f^{\sim}(x, w(x), w^{'}(x)), \\ f^{\Lambda}(x, \gamma(x), u(x), u^{'}(x)) + \frac{u(x) - (\gamma, u(x))}{1 + u^2(x)} \geq f(x, w(x), w^{'}(x)), \\ f^{\Lambda}(x, w(x), w^{'}(x)) + \frac{u(x) - w(x)}{u^2(x)} \geq f(x, w(x), w^{'}(x)) + 1.\end{aligned}$$

On a f, f^{Λ} est k-Lipschitzienne.
Alors :

$$f^{\Lambda}(x,w(x),w^{'}(x))-f^{'}(x,w(x),w^{'}(x))\geq -k|v^{'}(x)-u^{'}(x)|$$

Par suite,
$d^{''}(x)\geq -K|d^{'}(x)|$, pour tout $x\in J$,

$d^{'}(x)\leq 0$, pour tout $x\in J$.
Alors $d^{''}(x)\geq kd^{'}(x)$.
Par intégration : $\forall x\in J$
$\int d^{''}(x)=\int kd^{'}(x)\Leftrightarrow \ln d^{'}(x)=kx+c\Leftrightarrow d^{'}(x)=\exp(kx)$
La fonction $x\mapsto d^{'}(x)\exp(-kx)$ est croissante sur J.
On a $d(a)>d(x)$, $d'(x)\exp(-kx)>d'(a)exp(-ka)\geq 0$, $\forall x\in (a,b)$. Alors $d'(x)\equiv 0$, Donc $d'(a)\equiv d$
On a $d^{''}(x)\leq f(x,w(x),w^{'}(x))-f(x,w(x),w^{'}(x))+\frac{d(x)}{1+u^2(x)}\leq 0$,

$$0<\frac{d(x)}{1+u^2(x)}\leq 0.\ Donc\ d(x)=d(a)>0$$

ce qui est une contradiction, alors

$$d'(x)>0,\ \forall x\in J$$

$d'(x)\geq 0$ pour tout $x\in(x_1,x_1+\delta)$, $(\delta>0)$
On a :

$$d^{''}(x)\geq -kd^{'}(x)$$

Par intégration :

$$\int_{x_1}^{x}\frac{d^{''}(x)}{d^{'}(x)}\geq\int_{x_1}^{x}-k\Leftrightarrow Ind^{'}(x_1)\geq -k(x-x_1)+c$$

$$\Rightarrow d^{'}(x)\geq d^{'}(x_1)exp(-k(x-x_1))+c>0$$

D'après les conditions aux limites :

$$\begin{matrix} b_1w(b)+b_2w^{'}(b)\geq\beta \\ b_1u(b)+b_2u^{'}(b)=\beta \end{matrix}\ \Leftrightarrow\ \begin{matrix} -b_1w(b)-b_2w^{'}(b)\leq\beta \\ b_1u(b)+b_2u^{'}(b)=\beta \end{matrix}$$

Donc : $b_1d(b)+b_2d^{'}(b)\leq 0$, c.a.d

$$b_2d^{'}(b)\leq -b_1d(b)\leq 0.$$

D'autre part, en continuant ainsi suite jusqu'au point b, on arrive à,

$$d^{'}(b)>0 \text{ et } d(b)>d(a)>0$$

d'après (2.16) et (
Alors

$$0<-b_1d(b)<0$$

.
Donc contradiction
il suffit de choisir $c>max(R,|v^{'}(x)|,|w^{'}(x)|)$, ce qui montre $\exists R>0$ tel que $|u'(x)|\leq R$.
Alors : pour $f^{\sim}=f^{\Lambda}$ le problème $(P_{f)}$ admet au moins une solution.

Chapitre 3

Méthode de sur et sous solution pour un probléme fractionnaire

3.1 Introduction

Dans cet chapitre, nous nous concentrons sur l'étude d'existence de solutions positives pour le problème aux valeurs propres avec des équations différentielles fractionnaires singulières de type Hadamard dont l es conditions aux limites sont multi-points [11] :

$$\begin{cases} -_HD^{\alpha}x(t) = \lambda f(t, x(t)), \text{a.e. } t \in (1, 0), \\ x(1) = 0, \;\; x(e) = x_0 + \mu \sum_{i=1}^{m} a_i x(\varphi(\eta_i)), . \end{cases} \tag{3.1}$$

Où $f : [1, e] \times (0, +\infty)$ est continue, $_HD^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire de Hadamard d'ordre α avec $1 < \alpha < 2, 1 < \eta_1 < \eta_2 < ... < \eta_m < e$, et les constantes x_0 et μ sont non négatives, la fonction $\varphi : [1, e] \longrightarrow [1, e], \varphi(t) \leq t$ est continue.

Ces dernières années, les problèmes non linéaires d'ordre fractionnaire ont attiré l'attention de nombreux chercheurs en mathématiques et dans d'autres sciences appliquées en raison de leur large gamme d'applications en mathématiques appliquées, physique, biosciences, ingénierie, chimie, etc.
Un grand nombre de contributions ont été apportées pour les équations différentielles fractionnaires selon la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville ou la dérivée fractionnaire de Caputo. Cependant, le type intégral et dérivé fractionnaire de Hadamard diffère de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville et de la dérivée fractionnaire de Caputo car les noyaux de l'intégrale et de la dérivée de type Hadamard contiennent des fonctions logarithmiques d'exposant arbitraire et sont donc considérés comme un type différent de noyaux faiblement singuliers.
Ainsi, il est plus difficile d'explorer l'existence de solutions pour les équations différentielles fractionnaires de type Hadamard.

Dans le récent travail [14], en analysant la structure spectrale d'un opérateur linéaire et en calculant l'indice de point fixe de l'opérateur non linéaire correspondant, Zhang et al. ont considéré l'existence de solutions positives pour l'équation différentielle fractionnaire de type Hadamard suivante :

$$\begin{cases} \mathscr{D}_t^{\alpha}\mathscr{D}_t^{\beta}z(t) = f(t, z(t), -\mathscr{D}_t^{\beta}z(t)), \; 1 < t < e, \\ z(1) = \sigma z(1) = \sigma z(e) = 0, \\ \mathscr{D}_t^{\beta}z(1) = \sigma\mathscr{D}_t^{\beta}z(1) = \sigma\mathscr{D}_t^{\beta}z(e) = 0, \end{cases} \tag{3.2}$$

Où $2 < \alpha, \beta \leq 3$, σ est un opérateur différentiel noté $t(d/dt)$, c'est-à-dire $\sigma z(t) = t(d/dt)z(t)$, $\mathscr{D}_t^{\alpha}$ et $\mathscr{D}_t^{\beta}$ sont les dérivées fractionnaires de Hadamard d'ordre $\alpha, \beta, f \in (1, e) \times (0, +\infty) \times$

$(0,+\infty),[0,+\infty)$ est une fonction continue, et les critères de l'existence de solutions positives ont été établis. Récemment, basé sur une continuation de type Leray-Schauder, El-Sayed et Gaafar [5] ont établi l'existence de solutions positives pour une classe d'équations différentielles fractionnaires de type Hadamard singulières avec des conditions aux limites à points infinis ou des conditions aux limites intégrales.

Cependant, lorsque f possède des singularités sur les variables d'espace, en particulier pour le problème de valeurs propres, peu de résultats sont établis sur les équations différentielles fractionnaires de type Hadamard. Inspiré par les travaux précédents, l'objectif de ce chapitre est d'établir l'existence de solutions positives pour le problème de valeurs propres de l'équation différentielle fractionnaire de type Hadamard 3.1 lorsque f possède une singularité sur les variables d'espace.

Lemme 3.1. *[5] [14]*

Pour $g \in L^1[1,e]$, le problème aux limites

$$-_HD^\alpha x(t) = \lambda g(t), \quad .e.t \in (1,e)$$

soumis aux conditions limites multipoints pour tout $t \in (1,e)$,

$$\begin{cases} x(e) = x_0 + \mu \sum_{i=1}^m a_i x(\varphi(\eta_i)) \\ x(1) = 0, \end{cases}$$

a une solution unique $x \in AC[1,e]$ si et seulement si x est une solution de l'équation intégrale

$$x(t) = \lambda \int_1^e G(t,s)g(s)\frac{ds}{s} + \sum_i^m \frac{\lambda\mu a_i(\ln t)^{\alpha-1}}{(1-\sigma)} \int_1^e G(\varphi(\eta_i),s)g(s)\frac{ds}{s} + \frac{x_0(\ln t)^{\alpha-1}}{(1-\sigma)},$$

où

$$G(t,s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \begin{cases} (\ln t)^{\alpha-1}(1-\ln s)^{\alpha-1} - (\ln t - \ln s)^{\alpha-1}, & 1 \le s \le t \le e, \\ (\ln t)^{\alpha-1}(1-\ln s)^{\alpha-1}, & 1 \le t \le s \le e, \end{cases}$$

et

$$\sigma = \lambda \sum_{i=1}^m a_i (\ln \varphi(\eta_i))^{\alpha-1} \neq 1.$$

Lemme 3.2. *[12], [14]*

Soit $\kappa(t) = t^{\alpha-1}(1-t)$. Les fonctions de Green G ont les propriétés suivantes :
(i) $G \in C([1,e]\times[1,e],\mathbb{R}^+)$.
(ii) Pour tout $t,s \in (1,e)$, les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$(\alpha-1)\kappa(\ln t)\kappa(1-\ln s) \le \Gamma(\alpha)G(t,s) \le \kappa(\ln t)(1-\ln s)^{\alpha-2}.$$

Définition 3.1.

Une fonction continue $\psi(t)$ est appelée une solution inférieure de (3.1) si elle satisfait

$$-_HD^\alpha \psi(t) \le \lambda f(t,\psi(t)), \quad \text{a.e.} t \in (1,e),$$

$$\psi(1) \ge 0, \psi(e) \ge x_0 + \mu \sum_{i=1}^m a_i \phi(\varphi(\eta_i)).$$

Définition 3.2.

Une fonction continue $\phi(t)$ est appelée une solution supérieure du problème aux valeurs propres (3.1) si elle satisfait :

$$-_{H}D^{\alpha}\phi(t) \geq \lambda f(t, \phi(t)), \quad \text{a.e.} t \in (1, e),$$

$$\phi(1) \leq 0, \quad \phi(e) \leq x_0 + \mu \sum_{i=1}^{m} a_i \phi(\varphi(\eta_i)).$$

Nous faisons les hypothèses suivantes tout au long de cet article :

(H1) $f : [1, e] \times (0, +\infty) \to [0, +\infty)$ est continue et non croissante en $x > 0$.

(H2) Pour tout $r \in (0, 1)$, il existe une constante $\epsilon > 0$ telle que, pour tout $(t, x) \in [1, e] \times (0, +\infty)$, $f(t, rx) \leq r^{-\epsilon} f(t, x)$.

Remarque 3.1.

Pour $r \geq 1$, selon (H2), nous obtenons la conclusion équivalente suivante :
pour tout $(t, x) \in [1, e] \times (0, +\infty)$, $f(t, rx) \geq r^{-\epsilon} f(t, x)$.
En fait, pour $r \geq 1$ et tout $(t, x) \in [1, e] \times (0, +\infty)$, on a $f(t, r \cdot (1/r)x) \leq (1/r)^{-\epsilon} f(t, rx)$, ce qui implique que $f(t, rx) \geq r^{-\epsilon} f(t, x)$.

Lemme 3.3.

Principe du maximum [13]
Si $x \in C([0, 1], \mathbb{R})$ satisfait

$$\begin{cases} x(1) = 0 \\ x(e) = x_0 + \mu \sum_{i=1}^{m} a_i x(\varphi(\eta_i)), \end{cases}$$

et $-_{H}D^{\alpha}x(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, 1]$, alors $x(t) \geq 0$, pour tout $t \in [0, 1]$.

Preuve :
Par le Lemme (3.1), la conclusion est évidente, et nous omettons donc la preuve ici.

3.2 Résultats Principaux

Soit :

$$A = \frac{(\alpha - 1)}{\Gamma(\alpha + 2)} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\mu a_i (\alpha - 1) \kappa(\ln \varphi(\eta_i))}{(1 - \sigma)\Gamma(\alpha + 2)},$$

alors nous énonçons notre principal résultat comme suit.

Théorème 3.1.

Supposons que (H1) et (H2) sont vérifiées, et
(H3) $inf_{t \in [1,0]} f(t, 1) > 0$ et $0 < \int_1^e (1 - \ln s)^{\alpha - 2} f(s, \kappa(\ln s))(ds/s) < +\infty$.
Alors il existe des constantes $0 < \lambda_1 < \lambda^*$ et $\rho > 0$ telles que pour tout $\lambda \in (\lambda_1, \lambda^*)$, le problème aux valeurs propres (3.1) a au moins une solution positive $x(t)$ satisfaisant la propriété asymptotique

$$\kappa(\ln t) \leq x(t) \leq \rho(\ln t)^{\alpha - 1}.$$

Preuve :
Tout d'abord, définissons un espace fonctionnel $E = C[1, e]$ et un sous-ensemble Q de E :

$$Q = x(t) \in E | \exists l_x > 0 : x(t) \geq l_x \kappa(\ln t), t \in [1, e] \tag{3.3}$$

De manière évidente, Q n'est pas vide puisque $\kappa(\ln t) \in Q$.
Définissons un opérateur T_λ dans E :

$$(T_\lambda x)(t) = \lambda \int_1^e G(t,s)f(s,x(s))\frac{ds}{d} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda\mu a_i(\ln t)^{\alpha-1}}{(1-\sigma)} \int_1^e G(\varphi(\eta_i),s)f(s,x(s))\frac{ds}{s} + \frac{x_0(\ln t)^{\alpha-1}}{(1-\sigma)}. \tag{3.4}$$

Il découle du (3.1) que le point fixe de l'opérateur T_λ est la solution du problème aux valeurs propres (3.1).

Dans ce qui suit, nous prouvons que l'opérateur T_λ est bien défini et que $T_\lambda(Q) \subset Q$. Pour ce faire, pour tout $x^* \in Q$, il découle de la définition de Q qu'il existe un nombre positif $l^*_{x^*}$ tel que $x^*(t) \geq l^*_{x^*}\kappa(\ln t)$ pour tout $t \in [1,e]$. Choisissons $l_{x^*} = \min\{1/2, l^*_{x^*}\}$, alors nous avons $x^*(t) \geq l_{x^*}\kappa(\ln t)$ pour tout $t \in [1,e]$. Donc, en utilisant le (3.2), (H2) et (H3), nous obtenons

$$\begin{aligned}
(T_\lambda x^*)(t) &\leq \frac{\lambda\kappa(\ln t)}{\Gamma(\alpha)} \int_1^e (1-\ln s)^{\alpha-2} f(s,x^*(s))\frac{ds}{s}, \\
&+ \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda\mu a_i(\ln t)^{\alpha-1}\kappa(\ln\varphi(\eta_i))}{(1-\sigma)\Gamma(\alpha)} \int_1^e (1-\ln s)^{\alpha-2} f(s,r^*(s))\frac{ds}{s} + \frac{x_0(\ln t)^{\alpha-1}}{(1-\sigma)}, \\
&\leq \frac{\lambda\kappa(\ln t)}{\Gamma(\alpha)} \int_1^e (1-\ln s)^{\alpha-2} f(s,l_{x^*}\kappa(\ln s))\frac{ds}{s}, \\
&+ \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda\mu a_i(\ln t)^{\alpha-1}\kappa(\ln\varphi(\eta_i))}{(1-\sigma)\Gamma(\alpha)} \int_1^e (1-\ln s)^{\alpha-2} f(s,l_{x^*}\kappa(\ln s))\frac{ds}{s} + \frac{x_0(\ln t)^{\alpha-1}}{(1-\sigma)}, \\
&\leq \left(\frac{\lambda l_{x^*}^{-\epsilon}}{\Gamma(\alpha)} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda\mu a_i l_{x^*}^{-\epsilon}\kappa(\ln\varphi(\eta_i))}{(1-\sigma)\Gamma(\alpha)}\right) \int_1^e (1-\ln s)^{\alpha-2} f(s,\kappa(\ln s))\frac{ds}{s} + \frac{x_0}{(1-\sigma)}, \\
&< +\infty.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Ensuite, prenons $B = \max\{2, \max_{t\in[1,e]} x^*(t)\}$, alors il découle du 3.2 et de (H2) que

$$\begin{aligned}
(T_\lambda x^*)(t) &\geq \frac{\lambda(\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)}\kappa(\ln t)_i n_1^e \kappa(1-\ln s) f(s,x^*(s))\frac{ds}{s}, \\
&+ \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda\mu(\alpha-1)a_i\kappa(\ln t)\kappa(\varphi(\eta_i))}{(1-\sigma)\Gamma(\alpha)} \int_1^e \kappa(1 - \in s) f(s,B)\frac{ds}{s}, \\
&\geq \frac{\lambda(\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)}\kappa(\ln t) \int_1^e \kappa(1-\ln s) f(s,B)\frac{ds}{s}, \\
&+ \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda\mu(\alpha-1)a_i\kappa(\ln t)\kappa(\varphi(\eta_i))}{(1-\sigma)\Gamma(\alpha)} \int_1^e \kappa(1 - \in s) f(s,B)\frac{ds}{s}, \\
&\geq \frac{\lambda(\alpha-1)B^{-\epsilon}}{\Gamma(\alpha)}\kappa(\ln t) \int_1^e \kappa(1-\ln s) f(s,1)\frac{ds}{s}, \\
&+ \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda\mu(\alpha-1)B^{-\epsilon}a_i\kappa(\ln t)\kappa(\varphi(\eta_i))}{(1-\sigma)\Gamma(\alpha)} \int_1^e \kappa(1-\ln s) f(s,1)\frac{ds}{s}, \\
&\geq \left[\frac{\lambda(\alpha-1)B^{-\epsilon}}{\Gamma(\alpha)}\left(1 + \sum_{i=1}^{m} \frac{\mu a_i\kappa(\varphi(\eta_i))}{(1-\sigma)}\right) \int_1^e \kappa(1-\ln s) f(f,s)\frac{ds}{s}\right] \kappa(\ln t).
\end{aligned} \tag{3.6}$$

(3.5)et(3.6) indiquent que T_λ est bien défini et $T_\lambda(Q) \subset Q$.

Maintenant, nous allons essayer de construire les solutions supérieures et inférieures du problème aux valeurs propres (3.1). Comme l'opérateur T_λ est décroissant par rapport à x, définissons

$$L(t)=\int_e^1 G(t,s)f(s,k(\ln s))\frac{ds}{s}\sum_{i=1}^{m}\frac{\mu a_i(\ln t)^{\alpha-1}}{(1-\sigma)}\int_1^e G(\varphi(\eta_i),s)f(s,\kappa(\ln s))\frac{ds}{s},$$

alors, de manière similaire à (3.6) , pour tout $t\in[1,e]$, on obtient

$$L(t)\geq\left[\frac{(\alpha-1)}{(\Gamma(\alpha)}\left(1+\sum_{i=1}^{m}\frac{\mu a_i\kappa(\varphi(\eta_i))}{(1-\sigma)}\right)\int_1^e\kappa(1-\ln s)f(s,\kappa(\ln s))\frac{ds}{s}\right]\kappa(\ln t),$$

c.a.d ;

$$\lambda_1 L(t)\geq\kappa(\ln t),\qquad\forall\, t\in[1,e]$$

où

$$\lambda_1=\frac{\Gamma(\alpha)}{(\alpha-1)(1+\sum_{i=1}^{m}\frac{\mu a_i\kappa(\varphi(\eta_i))}{(1-\sigma)})\int_1^e\kappa(1-\ln s)f(s,\kappa(\ln s))\frac{ds}{s}}$$

D'autre part, remarquons que $f(t,x)$ décroît en $x>0$, donc, pour tout $\lambda>\lambda_1$, il découle du 3.2 et de (H3) que

$$\begin{aligned}
&\int_1^e G(t,s)f(s,\lambda L(s))\frac{ds}{s}+\sum_{i=1}^{m}\frac{\mu a_i(\ln t)^{\alpha-1}}{(1-\sigma)}\int_1^e G(\varphi(\eta_i),s)f(s,\lambda L(s))\frac{ds}{s}+\frac{x_0(\ln t)^{\alpha-1}}{(1-\sigma)}\\
&\leq\int_1^e G(t,s)f(s,\lambda_1 L(s))\frac{ds}{s}+\sum_{i=1}^{m}\frac{\mu a_i(\ln t)^{\alpha-1}}{(1-\sigma)}\int_1^e G(\varphi(\eta_i),s)f(s,\lambda_1 L(s))\frac{ds}{s}+\frac{x_0(\ln t)^{\alpha-1}}{(1-\sigma)}\\
&\leq\int_1^e G(t,s)f(s,\kappa(\ln s))\frac{ds}{s}+\sum_{i=1}^{m}\frac{\mu a_i(\ln t)^{\alpha-1}}{(1-\sigma)}\int_1^e G(\varphi(\eta_i),s)f(s,\kappa(\ln s))\frac{ds}{s}+\frac{x_0(\ln t)^{\alpha-1}}{(1-\sigma)}\\
&\leq\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}+\sum_{i=1}^{m}\frac{\mu a_i\kappa(\ln\varphi(\eta_i))}{(1-\sigma)\Gamma(\alpha)}\right)\int_1^e(1-\ln s)^{\alpha-2}f(s,\kappa(\ln s))\frac{ds}{s}+\frac{x_0}{(1-\sigma)}\\
&<+\infty.
\end{aligned}$$

Maintenant, prenons $C=\max\{2,\max_{t\in[1,e]}L(t)\}$ et

$$\lambda^*>\max\left\{1,\lambda_1\left[\frac{C^\epsilon}{A\,inf_{s\in[1,e]}f(s,1)}\right]^{1/(-\epsilon+)}\right\}.$$

Ona

$$\begin{aligned}
R(t)=\lambda^*&\int_1^e G(t,s)f(s,\lambda^*L(s))\frac{ds}{s}\\
&+\sum_{i=1}^{m}\frac{\mu a_i(\ln t)^{\alpha-1}}{(1-\sigma)}\int_1^e G(\varphi(\eta_i),s)f(s,\lambda^*L(s))\frac{ds}{s}+\frac{x_0(\ln t)^{\alpha-1}}{(1-\sigma)}.
\end{aligned}$$

Par (H2), pour tout $t\in[1,e]$, nous avons

$$\lambda^*f(s,\lambda^*L(s))\geq(\lambda^*)^{-\epsilon+1}f(s,C)\geq(\lambda^*)^{-\epsilon+1}C^{-\epsilon}f(s,1)\geq A^{-1}.$$

Ainsi, il découle du(3.2)que

$$\begin{aligned}
R(t) &\geq \frac{(\alpha-1)A^{-1}}{\Gamma(\alpha)}\kappa(\ln t)\int_1^e \kappa(1-\ln s)\frac{ds}{s} \\
&+\sum_{i=1}^{m}\frac{\mu a_i(\alpha-1)A^{-1}\kappa(\ln\varphi(\eta_i))}{(1-\sigma)\Gamma(\alpha)}\kappa(\ln t)\int_1^e \kappa(1-\ln s)\frac{ds}{s} \\
&=\left(\frac{(\alpha-1)A^{-1}}{\Gamma(\alpha+2)}+\sum_{i=1}^{m}\frac{\mu a_i(\alpha-1)A^{-1}\kappa(\ln\varphi(\eta_i))}{(1-\sigma)\Gamma(\alpha+2)}\right)\kappa(\ln t) \\
&\geq \kappa(\ln t), \quad \forall\, t\in[1,e].
\end{aligned}$$

Ona

$$\phi(t)=\lambda^*L(t)+\frac{x_0(\ln t)^{\alpha-1}}{(1-\sigma)},\quad \psi(t)=R(t),$$

Alors, par le (3.1), pour tout $t\in[1,e]$, nous avons

$$\begin{cases}\phi(t)=\lambda^*L(t)+\frac{x_0(\ln t)^{\alpha-1}}{(1-\sigma)}\geq\kappa(\ln t),\\ \phi(1)=0,\\ \phi(e)=x_0+\mu\sum_{i=1}^m a_i\phi(\varphi(\eta_i))\end{cases} \tag{3.7}$$

$$\begin{cases}\psi(t)=R(t)\geq\kappa(\ln t),\qquad t\in[1,e],\\ \psi(1)=0,\\ \psi(e)=x_0+\mu\sum_{i=1}^m a_i\psi(\varphi(\eta_i))\end{cases} \tag{3.8}$$

Il découle des équations (3.7) et (3.8) que $\phi(t),\psi(t)\in Q$ et

$$\kappa(\ln t\leq\psi(t)=T_{\lambda^*}(\lambda^*L(t)),\kappa(\ln t)\leq\phi(t)\forall t\in[1,e], \tag{3.9}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}
\psi(t)&=T_{\lambda^*}(\lambda^*L(t)) \\
&=\lambda^*\int_1^e G(t,s)f(s,\lambda^*L(s))\frac{ds}{s} \\
&+\lambda^*\sum_{i=1}^m\frac{\mu a_i(\ln t)^{\alpha-1}}{(1-\sigma)}\int_1^e G(\varphi(\eta_i),s)f(s,\lambda^*L(s))\frac{ds}{s}+\frac{x_0(\ln t)^{\alpha-1}}{(1-\sigma)} \\
&\leq\lambda^*\int_1^e G(t,s)f(s,\lambda_1L(s))\frac{ds}{s} \\
&+\lambda^*\sum_{i=1}^m\frac{\mu a_i(\ln t)^{\alpha-1}}{(1-\sigma)}\int_1^e G(\varphi(\eta_i),s)f(s,\lambda_1L(s))\frac{ds}{s}+\frac{x_0(\ln t)^{\alpha-1}}{(1-\sigma)} \\
&\leq\lambda^*\int_1^e G(t,s)f(s,\kappa(\ln s))\frac{ds}{s} \\
&+\lambda^*\sum_{i=1}^m\frac{\mu a_i(\in t)^{\alpha-1}}{(1-\sigma)}\int_1^e G(\varphi(\eta_i),s)f(s,\kappa(\ln s))\frac{ds}{s}+\frac{x_0(\ln t)^{\alpha-1}}{(1-\sigma)} \\
&=\phi(t)\quad\forall t\in[1,e].
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Ainsi, par (3.9) et (3.10), nous avons

$$\begin{aligned}HD^\alpha\psi(t)+\lambda^*f(t,\psi(t))&\geq_H D^\alpha(T_\lambda(\lambda^*L(t)))+\lambda^*f(t,\phi(t))\\ &=-\lambda^*f(t,\lambda^*L(t))+\lambda^*f(t,\phi(t))\geq 0,\end{aligned} \tag{3.11}$$

$$
\begin{aligned}
{}_H D^{\alpha}\phi(t) + \lambda^* f(t,\phi(t)) &\leq_H D^{\alpha}\left(\lambda^* L(t) + \frac{x_0(\ln t)^{\alpha-1}}{(1-\sigma)}\right) + \lambda^* f(t,\phi(t)) \\
&=_H D^{\alpha}(T_{\lambda^*}\kappa(\ln t)) + \lambda^* f(t,\phi(t)) \qquad (3.12)\\
&= -\lambda^* f(t,\kappa(\ln t)) + \lambda^* f(t,\phi(t)) \\
&\leq -\lambda^* f(t,\kappa(\ln t)) + \lambda^* f(t,\kappa(\ln t)) = 0.
\end{aligned}
$$

Par conséquent, les équations (3.7) et (3.8) impliquent que ϕ, ψ satisfait les conditions aux limites du problème aux valeurs propres (3.1) . Ainsi, il découle des équations (3.10) à (3.12) que $\psi(t), \phi(t)$ sont des solutions supérieures et inférieures de l'équation aux valeurs propres (1) lorsque $\lambda = \lambda^*$ et $\psi(t), \phi(t) \in Q$.
Ensuite, construisons une fonction F :

$$
F(y) = \begin{cases} f(t,\phi(t)), & y < \psi(t), \\ f(t,y(t)). & \psi(t) \leq y \leq \phi(t),) \\ f(t,\psi(t)), & y > \phi(t). \end{cases} \qquad (3.13)
$$

Pour tout $\lambda \in (\lambda_1, \lambda^*)$, considérons le problème aux valeurs propres modifié suivant :

$$
\begin{cases} -{}_H D^{\alpha} y(t) = \lambda F(y), \quad \text{a.e. } t \in (1,e), \\ y(1) = 0 \\ , \quad y(e) = x_0 + \mu \sum_{i=1}^{m} a_i y(\varphi(\eta_i)) \end{cases} \qquad (3.14)
$$

Nous définissons un opérateur $\mathfrak{A}_\lambda$ dans E :

$$
(\mathfrak{A}_\lambda y)(t) = \lambda \int_1^e G(t,s)F(y(s))\frac{ds}{s} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda\mu a_i(\ln t)^{\alpha-1}}{(1-\sigma)} \int_1^e G(\varphi(\eta_i),s)F(y(s))\frac{ds}{s}
$$
$$
+ \frac{x_0(\ln t)^{\alpha-1}}{(1-\sigma)} \quad \forall y \in E.
$$

Il découle de l'hypothèse que $F : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ est continue. Ainsi, il est clair qu'un point fixe de l'opérateur $\mathfrak{A}_\lambda$ est une solution du problème aux valeurs propres modifié (3.14).

Pour tout $y \in E$, il découle du (3.2), de (3.13) et de $\psi(t) \geq \kappa(\ln t)$ que

$$
\begin{aligned}
(\mathfrak{A}_\lambda y)(t) &= \lambda \int_1^e G(t,s)F(y(s))\frac{ds}{s} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda\mu a_i(\ln t)^{\alpha-1}}{(1-\sigma)} \int_1^e G(\varphi(\eta_i),s)F(y(s))\frac{ds}{s} \\
&+ \frac{x_0(\ln t)^{\alpha-1}}{(1-\sigma)} \\
&\leq \lambda^* \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\mu a_i \kappa(\ln\varphi)(\eta_i))}{(1-\sigma)\Gamma(\alpha)}\right) \int_1^e (1-\ln s)^{\alpha-2} F(y(s))\frac{ds}{s} + \frac{x_0}{(1-\sigma)} \\
&\leq \lambda^* \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\mu a_i \kappa(\ln\varphi)(\eta_i))}{(1-\sigma)\Gamma(\alpha)}\right) \int_1^e (1-\ln s)^{\alpha-2} f(s,\psi(s))\frac{ds}{s} + \frac{x_0}{(1-\sigma)} \\
&\leq \lambda^* \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\mu a_i \kappa(\ln\varphi)(\eta_i))}{(1-\sigma)\Gamma(\alpha)}\right) \int_1^e (1-\ln s)^{\alpha-2} f(s,\kappa(\ln s))\frac{ds}{s} \\
&+ \frac{x_0}{(1-\sigma)} < +\infty.
\end{aligned}
$$

Donc, $\mathfrak{A}_\lambda$ est borné. Il est facile de voir que $\mathfrak{A}_\lambda : E \longrightarrow E$ est continu grâce à la continuité de $F(y)$ et de $G(t,s)$.

D'autre part, pour tout $\Omega \subset E$ borné, puisque $G(t,s)$ est uniformément continue sur $[1,e]$, nous savons que $\mathfrak{A}_\lambda(\Omega)$ est équicontinu. Ainsi, le théorème d'Arzelà-Ascoli implique que $\mathfrak{A}_\lambda : E \longrightarrow E$ est complètement continue. Il découle du théorème du point fixe de Schauder qu'il existe au moins un point fixe y de $\mathfrak{A}_\lambda$ tel que $y = \mathfrak{A}_\lambda y$.

Maintenant, nous montrons

$$\psi(t) \leq y(t) \leq \phi(t), \quad t \in [1,e].$$

Pour ce faire, soit $w(t) = \phi(t) - y(t)$, $t \in [1,e]$. Puisque $\phi(t)$ est la solution supérieure du problème aux valeurs propres 3.1 et que y est un point fixe de $\mathfrak{A}_\lambda$, nous avons

$$w(1) = 0, \quad w(e) = x_0 + \mu \sum_{i=1}^{m} a_i w(\varphi(\eta_i)) \tag{3.15}$$

Il découle de la définition de F, de (3.9) et de (3.10) que

$$f(t,\phi(t)) \leq F(y(t)) \leq f(t,\psi(t)) \leq f(t,\kappa(\ln t)) \quad \forall y \in E, \quad \forall t \in [1,e], \tag{3.16}$$

c'est-à-dire,

$${}_H D^\alpha w(t) =_H D^\alpha \phi(t) -_H D^\alpha y(t) = -\lambda^* f(t,\kappa(\ln t)) + \lambda F(y(t)) \leq 0, \tag{3.17}$$

ce qui implique que $-{}_H D^\alpha w(t) \geq 0$. Il découle du 3.3 que $w(t) \geq 0$, c'est-à-dire, $y(t) \leq \phi(t)$ sur $[0,1]$. De la même manière, nous avons $y(t) \geq \psi(t)$ sur $[0,1]$, donc nous obtenons $(t) \leq y(t) \leq (t)$, $t \in [1,e]$.

$$\psi(t) \leq y(t) \leq \phi(t), \quad t \in [1,e]. \tag{3.18}$$

Par (3.13), nous avons $F(y(t)) = f(t,y(t))$, $t \in [1,e]$. Par conséquent, $y(t)$ est une solution positive du problème aux valeurs propres (3.1).

Enfin, nous prouvons les propriétés asymptotiques des solutions. Tout d'abord, à partir de (3.18), nous obtenons

$$y(t) \geq \psi(t) \geq \kappa(\ln t). \tag{3.19}$$

D'autre part, il découle de (3.19) et du (3.2)que

$$\begin{aligned}
y(t) &= \lambda \int_1^e G(t,s) f(s,y(s)) \frac{ds}{s} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda \mu a_i (\ln t)^{\alpha-1}}{(1-\sigma)} \int_1^e G(\varphi(\eta_i),s) f(s,y(s)) \frac{ds}{s} \\
&+ \frac{x_0 (\ln t)^{\alpha-1}}{(1-\sigma)} \\
&\leq \left[\lambda^* \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\mu a_i \kappa(\ln t \varphi(\eta_i))}{(1-\sigma)\Gamma(\alpha)} \right) \int_1^e (1-\ln s)^{\alpha-2} f(s,\kappa(\ln s)) \frac{ds}{s} + \frac{x_0}{(1-\sigma)} \right] \\
&\times (\ln t)^{\alpha-1} \\
&= \rho (\ln t)^{\alpha-1}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, nous obtenons les propriétés asymptotiques des solutions

$$\kappa(\ln t) \leq y(t) \leq \rho(\ln t)^{\alpha-1}$$

.

Exemple 3.1. *[11]*

Considérons le problème aux valeurs propres singulier suivant :

$$\begin{cases} -{}_HD^{3/2}x(t) = \lambda(1-\ln t)^2 x^{-2/3}(t), & \text{a.e. } t \in (1,e) \\ x(1) = 0, \\ x(e) = \frac{1}{2} + 2x\left(\varphi\left(\frac{3}{2}\right)\right) + x\left(\varphi\left(\frac{5}{2}\right)\right), \end{cases} \tag{3.20}$$

où

$$\varphi(t) = t^{1/2}$$

.

Preuve.
Soit $\alpha = 3/2$, $\mu = 1$, $\eta_1 = 3/2$, $\eta_2 = 5/2$,

$$f(t,x) = (1-\ln t)^2 x^{-2/3}(t),$$

alors (H1) est vérifié, et pour tout $r \in (0,1)$ et pour tout $(t,x) \in [1,e] \times (0,+\infty)$,

$$f(t,rx) = r^{-2/3}(1-\ln t)^2 x^{-2/3} \leq r^{-2/3} f(t,x),$$

ce qui implique que (H2) est également vérifié.
De plus, par calcul direct, nous avons $\inf_{t\in[1,e]} f(t,1) = 1 > 0$,

$$\begin{aligned} 0 &< \int_1^e (1-\ln s)^{\alpha-2} f(s,\kappa(\ln s))\frac{ds}{s} = \int_1^e (1-\ln s)^{-1/2}(1-\ln s)^2 \kappa^{-2/3}(s)\frac{ds}{s}, \\ &\leq \int_1^e (1-\ln s)^{-1/6} \ln^{-1/3}(s)\frac{ds}{s} < +\infty. \end{aligned}$$

Par conséquent, (H3) est vérifié. Ainsi, par le théorème (3.1), il existe deux constantes $0 < \lambda_1 < \lambda^*$ telles que pour tout $\lambda \in (\lambda_1, \lambda^*)$, le problème aux valeurs propres singulier (3.20) a au moins une solution positive $x(t)$, et il existe une constante $\rho > 0$ telle que :

$$\ln^{1/2}(t)(1-\ln t) \leq x(t) \leq \rho \ln^{1/2}(t).$$

Conclusion

Dans ce mémoire nous avons présenté quelques type de dérivées et intégrales fractionnaires, en particulier les dérivées et intégrales de Hadamard et leurs propriétés qui ont beaucoup servi dans ce manuscrit.

D'autre part, nous avons exposé la méthode de sur et sous solutions et son utilisation pour le résolution d'une équation différentielle périodique et le problème de Sturm Liouville non linéaire. La partie la plus consistante du mémoire était consacré à l'étude d'un problème des valeurs propres des équations différentielles fractionnaires singulières de type Hadamard avec des conditions aux limites multipoints posé sur un intervalle borné de la droite réelle ou nous avons appliqué la méthode de sous - solution et sur - solution.

En construisant les solutions supérieures et inférieures du problème des valeurs propres et en utilisant les propriétés de la fonction de Green, l'intervalle des valeurs propres du problème est établi via la théorie du point fixe.

Bibliographie

[1] Y.Arioua,N.Benhamidouch :Boundary value problems for Caputo-Hadamard fractionnal differential equation,Survey in Mathematics and its Applications,103-115p,2017.

[2] P.B.Bailey,L.F.Shampine :Waltman P.E.,Nonlinear two point Boundary value Problems,Academic press,1968.

[3] A.Batoola,I.Talibb,M.B Riaz,D.C.Tun,Extention of lower and upper solutions approach for generalizednonlinear fractional boundary value problems, ARAB JOURNAL OF BASIC AND APPLIED SCIENCE2022,VOL.29,NO.1,249-257(2022).

[4] S.Djebli :Problèmes aux limites associés aux E.D.O du second ordre,ENS Kouba,Alger,2007.

[5] A.El-sayed,F.Gaafar,Positive solution of singular Hadamard-type fractional differntial equations with infinite-point boundary conditions or integral boundary conditions,Adv.Difference Equ.,2019 :382,2019.

[6] Z. Kilbas,H.Sirvastava et J.Trujllo.Theory and application of fractional differential Equations north-holland mathematical studies 204,Ed van Mill. Amstredam,2006.

[7] I.Podlubny : Fractional Differential Eqautions, Academic Press, New york, 1999.

[8] X.Ren,G. Wang,Z.Bai, A.A.El-Deeb, Maximum principle and its application to mutiindex Hadamard fractional diffusion equation,Bound.Value Probl.,2019 :182,2019.

[9] S.Samko.G Kilbas A.A and Marichev O.I.(1993),Fractional integrals and derivatives :theory and application Gordon and Breach,New York.

[10] A.Shi :Upper and lower solution methode and a fractional differential equation boundary value proplem, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations,30,1-13,(2009).

[11] X.Zhang,D.Kong,H.Tian,Y.Wu and B.Wiwatanapataphee,An upper-lower solution methode for the eigenvalue problem of Hadamard-type singular fractional diffrential equation,Nonlinear Analysis :Modelling and control ,vol.27,N.4,789-802,2022.

[12] X.Zhang,L. Liu,B. Wiwatanapataphee, Y. Wu, The eigenvalue for a class of singular . Laplacian fractional differantial equations involving the Riemann-stieltjes integral boundary condition, Appl. mayh comput.,235 :412-422,2014.

[13] X.Zhang,L.Liu,Y.Wu, Variational structure and multiple solution for a fractional advection dispersion equation, Comput.Math.Appl.,68)(12) :1794-1805,2014.

[14] X.Zhang,L. Yu,J.Jiang,Y.Wu,Y.Cui,Positive solution for a weakly singular Hadamard-type fractional differential with changing-sign nonlinearity, J.Funct.spaces,2020 :5623589,2020.

Table des figures