RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN TIARET
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUES
Département de Mathématiques

MÉMOIRE de MASTER

Présenter en vue de l'obtention du diplôme de master

Spécialité :

Mathématiques

Option :
«Analyse fonctionnelle et équations différentielles »

Présenté Par :

Arab chamseddine et *Bouhadi abdelaziz*

Sous L'intitulé :

Méthode des sur et sous solutions appliquée aux équations dynamiques fractionnaires conformes sur les échelles de temps

Soutenu publiquement le 27 / 06 / 2024
à Tiaret devant le jury composé de :

Mr ***MAHROUZ Tayeb***	***M.C.A***	Université *Tiaret*	Président
Mr ***BENHABI Mohamed***	***M.A.A***	Université *Tiaret*	Examinateur
Mr ***BENDOUMA Bouharket***	***M.C.A***	Université *Tiare*	Encadreur

Année universitaire : 2023/2024

Remerciements

Avant de commencer la présentation de ce travail, nous tenons à remercier sincèrement et profondément en premier lieu notre Dieu ***ALLAH*** le tout puissant.

Nous devons exprimer notre gratitude à Mr ***Bendouma Bouharket*** d'avoir accepter de nous encadrer avec enthousiasme et beaucoup d'attention, ainsi que pour sa gentillesse, sa disponibilitéé, et ses conseils qui nous ont permis d'avancer, dans le cadre du mémoire, dans touts la période de nos travaille.

Nous tenons à remercier aussi les membres de jury ***Benhabi Mohamed***et ***Mahrouz tayeb*** d'avoir accepter d'examiner ce modeste travail.

Et sans oubli remerciement le chef département á Mr **Benia kheireddine** sur son modeste avec les étudiants (nos camarades),et son attention et contribution beaucoup aides pour les étudiants de départements.

Dédicaces

Avant touts je remercie ***ALLAH*** de m avoir donner la force et le courage

pour réaliser ce modeste travail el hamdoulilah je dédie modeste travail à : Ma chére mère et mon cher père et mon frére et ma fiancé qui m ont soutenue et encouragé durant ces années d'études , à tout la familles

,Sans oublier mes prof qui m ont appris beaucoup de chose durant toutes ces années et spécialement le prof encadrant Mr ;**Bendoma.B** merci pour votre aide et votre compréhension, avec mes voeux

de succès et de réussite à tous mes collègue ,et nous demandons à Dieu puissant de perpétuer nos moments de joie et de plaisir.

Chamseddine Arab

Tout ma gratitude enners Dieu le toute puissant qui ma dennee la foi le courage est qui aeclaire meon chemin pour que je puisse ettendre cet objectif je dedie ce succes pour ma fille kawter t a tous ceux qui me connaissent de pres ou de loin et mescolegue diplomes,á tout mes amis que DIEU m'a ressemble.

Bouhadi abdelaziz

Erick Herbin

Résumé

Dans ce mémoire, on s'intéresse à l'étude d'éxistence de solutions pour des équations différentielles non-linéaires du premier ordre sur les échelles de temps et pour des équations différentielles fractionnaires conformes non-linéaires d'ordre $\alpha \in]0,1]$ sur les échelles de temps avec des conditions de bord (condition de Cauchy ou condition périodique). Nos démonstrations sont basées sur la méthode des sous et sur solutions et le théorème de point fixe de Schauder.

Mots Clés : Calcul sur les échelles de temps, calcul fractionnaire conformes sur les échelles de temps, équations dynamiques, équations dynamiques fractionnaires conformes non-linéaire, méthode des sous et sur solutions, théorème du point fixe de Schauder.

Abstract

- In this work, we present existence solutions for the first order nonlinear differential equations on time scales and for the nonlinear conformable fractional differential equations of order $\alpha \in]0;\ 1]$ on time scales under some boundary conditions.
- These results are obtained by using Schauder's fixed point theorem and with notions of lower and upper solution.

Key words and phrases: Calculus on time scales, conformable fractional calculus on time scales, dynamic equations, nonlinear conformable fractional dynamic equation, boundary conditions, upper and lower solutions, Schauder's fixed-point theorem.

ملخــص

– نقدم في هذه المذكرة نتائج وجود حلول لمعادلات تفاضلية على سلالم (جداول) زمنية من الدرجة الأولى و لمعادلات تفاضلية كسرية مطابقة مرتبطة بشروط حدية من الدرجة α حيث $0< \alpha \leq 1$.

– يتم الحصول على هذه النتائج باستعمال تقنية نظرية النقطة الصامدة لـ شاودير و مفاهيم الحلول العلوية (الفوقية) والحلول السفلية (التحتية).

الكلمات المفتاحية : الحساب على السلالم الزمنية، الحساب على الاشتقاق الكسري المطابق على السلالم الزمنية، معادلات ديناميكية، معادلات تفاضلية كسرية مطابقة غير خطية على السلالم الزمنية ، شروط حدية ، الحلول العلوية و الحلول السفلية، نظرية النقطة الصامدة ل شاودير.

Table des matières

Résumé **1**

Introduction **4**

1 Préliminaires **6**

1.1 Notations et définitions 6

1.2 Calculs sur les échelles de temps 8

1.2.1 Δ-différentiable 10

1.2.2 Δ-Intégration 11

1.2.3 la fonction exponentielle 13

1.3 Calcul fractionnaire conforme sur les échelles de temps 15

1.3.1 Dérivée fractionnaire conforme 15

1.3.2 Intégrale fractionnaire conforme 17

2 Existence de solutions pour des équations dynamiques sur les échelles de temps **19**

2.1 Introduction 19

2.2 Résultat d'existence pour le problème (2.1),(2.2) 20

2.3 Résultat d'existence pour le problème (2.1)(2.3) 26

2.4 Exemples 29

3 Existence de solutions pour des équations dynamiques fractionnaires conformes sur les échelles de temps **31**

3.1 Introduction 31

3.2 Résultat d'existence pour le problème (3.1)(3.3) 32

3.3 Résultat d'existence pour le problème (3.1)(3.2) 38

3.4 Exemples 41

Conclusion 44

Bibliographie 45

Introduction

Le calcul sur les échelles de temps a été introduite par Stéphan Hilger dans sa thèse de doctorat en 1988, qui a essayé d'unifier l'analyse discrète et l'analyse continue. De nos jours, un grand nombre de livres et d'articles de recherche sont consacrés au calcul sur les échelles de temps et à ses applications, voir [3, 8, 9, 12, 13, 17].

La théorie des équations différentielles fractionnaires a émergé comme un domaine intéressant à explorer ces dernières années. Les équations différentielles fractionnaires sont une généralisation des équations différentielles d'ordre entier. Notons que cette théorie a de nombreuses applications dans la description de nombreux évènements dans le monde réel. Par exemple, les équations différentielles fractionnaires sont souvent applicables dans l'ingénierie, la physique, la chimie, la biologie, ...etc (voir[4, 21, 22, 23, 25, 27]).

En 2014, Khalil et al. [19] ont présenté une nouvelle définition de la dérivée fractionnaire dénommée la dérivée fractionnaire conforme. En particulier, Benkhettou et al. [11] ont étendu cette définition à une échelle de temps arbitraire, qui est une extension naturelle du calcul fractionnaire conforme. Résultats d'existence pour des équations différentielles fractionnaires conformes sur les échelles de temps on été étudiées par plusieurs auteurs en utilisant les théorèmes du points fixes, la méhode des sous et sur solutions, la méhode des sous et sur solutions, méthode de tube solution,...etc (voir [5, 6, 7, 9, 10, 31]).

Dans ce mémoire, nous présentons des résultats d'existence de solutions pour des équations différentielles non-linéaires du premier ordre sur les échelles de temps et pour des équations différentielles fractionnaires conformes non-linéaires d'ordre $\alpha \in]0, 1]$ sur les échelles de temps avec des conditions de bord. Ces résultats ont été obtenus grâce a la méthode des sous et sur solutions. La technique utilisée est de transformer le problème initial en un problème de point fixe de sorte que si l'on prouve qu'une solution du problème modifié existe, elle est aussi solution du problème initial (original).

La méthode des sous et sur solutions a été largement utilisée pour obtenir des résultats d'existence, voir par exemple [6, 7, 18, 28, 29, 30].

Ce mémoire il se présente sous forme de trois chapitres.

Dans le **Chapitre 1**, nous présentons quelques définitions et résultats utilisés dans ce mémoire.

Dans le **Chapitre 2**, nous étudierons l'existence de solutions pour d'équation dynamique non-linéaire du premier ordre sur les échelles de temps suivante :

$$x^{\Delta}(t) = f(t, x^{\sigma}(t)), \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{T}^k, \tag{1}$$

sataisfont l'une des conditions de bord suivantes (condition de Cauchy ou condition périodique) :

$$\text{Condition de Cauchy (initiale) sur } \mathbb{T}, \qquad x(a) = x_0, \tag{2}$$

$$\text{Condition périodique sur } \mathbb{T}, \qquad x(a) = x(b). \tag{3}$$

Ici, $\mathbb{T}$ est une echelle de temps bornnée ou on notera $a = \min \mathbb{T}$, $b = \max \mathbb{T}$, $\mathbb{T}_0 = \mathbb{T} - \{b\}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{T}^k \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

Dans le **Chapitre 3**, nous étudierons l'existence de solutions pour d'équation dynamique fractionnaire conforme non-linéaire sur les échelles de temps suivante :

$$x_{\Delta}^{(\alpha)}(t) = f(t, x^{\sigma}(t)), \qquad \text{pour tout } t \in I = [a, b]_{\mathbb{T}}, \tag{4}$$

sataisfont l'une des conditions de bord suivantes (condition de Cauchy ou condition périodique) :

$$x(a) = x_0, \tag{5}$$

$$x(a) = x(\sigma(b)). \tag{6}$$

Où, $\mathbb{T}$ est une échelle de temps bornée, $J = [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}$ avec $a, b \in \mathbb{T}$, $0 \leq a < b$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_{\Delta}^{(\alpha)}(t)$ désigne la delta dérivée fractionnaire conforme de x d'ordre $\alpha \in (0, 1]$ en t et $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, on introduit quelques notations, définitions, lemmes et théorèmes. Puis on présente les résultats principaux sur la différentiabilité, l'intégration et la fonction exponentielle sur les échelles de temps. En fin, on traite du calcul fractionnaire conforme sur des échelles de temps.

1.1 Notations et définitions

Nous introduisons les notations, définitions, préliminaires et théorèmes nécessaires. Pour plus de détails, le lecteur pourra consulter [2, 15, 24, 26].

Soit $E = [a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. $C(E, \mathbb{R})$ est l'espace de Banach des fonctions continues de E dans $\mathbb{R}$ muni de la norme :

$$\|y\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |y(t)|.$$

Définition 1.1. *(Espace de Banach) On appelle espace de Banach tout espace vectoriel normé complet sur les corps $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$.*

Définition 1.2. *Le sous ensemble $\boldsymbol{A}$ de l'espace normé X est dit borné si il existe K tel que*

$$\|y\| \leq K \quad \textit{pour tout } y \in \boldsymbol{A}.$$

Définition 1.3. *Soit $\mathcal{T} : (X, \|.\|_X) \to (Y, \|.\|_Y)$ une application. On dit que $\mathcal{T}$ est bornée si elle envoie les parties bornées de X sur des parties bornées de Y i.e. $\mathcal{T}$ (bornée) est bornée.*

Remarque 1.1. *Soit* $\mathcal{T} : (X, \|.\|_X) \to (Y, \|.\|_Y)$ *une application bornée, i.e, pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $\delta > 0$*, tel que*

$$\text{pour tout } x \in X : \|x\|_X \leq \varepsilon \qquad \text{implique} \qquad \|\mathcal{T}(x)\|_Y \leq \delta.$$

Définition 1.4. *Soient* $a \in X$ *et* $\mathcal{H} : (X, \|.\|_X) \to (Y, \|.\|_Y)$*. On dit que* $\mathcal{H}$ *est continue au point* a *si et seulement si, pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $\delta > 0$*, pour* $x \in X$*, on a*

$$\|x - a\|_X < \delta \qquad \text{implique} \qquad \|\mathcal{H}(x) - \mathcal{H}(a)\|_Y < \varepsilon.$$

Alors l'opérateur $\mathcal{H}$ *est dit continu sur* X*, ou simplement continu si il est continu en tout point de* X*.*

Proposition 1.1. *Une application* $\mathcal{H} : (X, \|.\|_X) \to (Y, \|.\|_Y)$ *est continue au point* x*, si et seulement si pour tout suite* $(x_n)_n$ *converge vers* x *dans* X*, alors* $(\mathcal{H}(x_n))_n$ *converge vers* $\mathcal{H}(x)$ *dans* Y*.*

Définition 1.5. *Un sous ensemble* A *de l'espace normé* B *est dit compact si pour toute suite d'éléments de* A *on peut extraire une sous suite convergente vers un élément de* A*.*

Remarque *Un ensemble compact est un ensemble fermé borné ; la réciproque n'est pas toujours vraie.*

Définition 1.6. *Un ensemble* D *est relativement compact si* $\overline{D}$ *est compact.*

Définition 1.7. *Soient* X *et* Y *deux espaces de Banach et* $\mathcal{H} : X \longrightarrow Y$ *est une fonction continue. On dit que* $\mathcal{H}$ *est compacte si* $\overline{\mathcal{H}(X)}$ *est compact. On dit que* $\mathcal{H}$ *est complètement continue si* $\overline{\mathcal{H}(B)}$ *est compact pour tout sous-ensemble borné* $B \subset X$*.*

Définition 1.8. *(Ensemble équicontinue) Un ensemble* $\mathcal{M}$ *de* $C([a, b], \mathbb{R})$ *est dit équicontinu, si pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $\delta > 0$*, tel que, pour tout* $t_1, t_2 \in [a, b]$*,* $|t_2 - t_1| \leq \delta$ *on a :*

$$\|h(t_2) - h(t_1)\| \leq \varepsilon, \quad \text{pour tout} \quad h \in \mathcal{M}.$$

Définition 1.9. *(Ensemble uniformément borné)* $\mathcal{M}$ *est dit uniformément borné dans* $C([a, b], \mathbb{R})$ *s'il existe un nombre réel* $K > 0$ *tel que* $\|z\|_\infty \leq K$ *pour tout* $z \in \mathcal{M}$*.*

Lemme 1.1. *Une application continue sur un ensemble compact est uniformement borné.*

Théorème 1.1. *(Arzela-Ascoli) Soit $M \subset C([a,b],\mathbb{R})$, M est relativement compact dans $C([a,b],\mathbb{R})$ si et seulement si :*

(a) *M est uniformément borné.*

(b) *M est équicontinu.*

Théorème 1.2. *(Théorème du point fixe de Schauder) Soit C un sous-ensemble convexe, fermé, borné, non vide d'un espace de Banach X et $\mathcal{H} : C \to C$ une application compact i.e ($\overline{\mathcal{H}(C)}$ est compact). Alors $\mathcal{H}$ admet au moins un point fixe (i.e il existe un point x_0 dans C tel que $\mathcal{H}(x_0) = x_0$).*

1.2 Calculs sur les échelles de temps

Dans cette section, nous présentons les notions de base pour comprendre le calcul sur les échelles de temps. Nous explorons la différentiabilité et l'intégration des fonctions et la fonction exponentielle sur les échelles de temps. Pour plus de détails, le lecteur pourra consulter [3, 12, 13, 17].

Définition 1.10. *(Échelle de temps.) Une échelle de temps $\mathbb{T}$ est un sous-ensemble non vide fermé de l'ensemble de nombre réels $\mathbb{R}$.*

Les ensembles $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}$ sont des échelles de temps.

Les ensembles $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$ et $]0;1[$ ne sont pas des échelles de temps.

On sous-entend que la topologie de $\mathbb{T}$ est induite par celle de $\mathbb{R}$.

Définition 1.11. *Soit $\mathbb{T}$ une echelle de temps. Pour $t \in \mathbb{T}$, On définit :*

i) - L'opérateur de saut-avant $\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ par $\sigma(t) : = \inf \{s \in \mathbb{T} : s > t\}$.

ii) - L'opérateur de saut-arriere $\rho \colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ par $\rho(t) : = \sup \{s \in \mathbb{T} : s < t\}$.

iii) - La fonction de granulation en avant $\mu \colon \mathbb{T} \to [0, \infty)$ par $\mu(t) : = \sigma(t) - t$.

iv) - La fonction $\varphi^\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ par $\varphi^\sigma(t) := (\varphi \circ \sigma)(t) = \varphi(\sigma(t))$, $t \in \mathbb{T}$.

Définition 1.12. *Soit $\mathbb{T}$ échelle de temps, $t \in \mathbb{T}$:*

1) Si $\sigma(t) > t$, on dit que t est un point dispersé à droite (rs).

2) *Si* $\sigma(t) = t$ *et* $t < \sup \mathbb{T}$, *on dit que* t *est un point dense à droite* (rd).
3) *Si* $\rho(t) < t$, *on dit que* t *est un point dispersé à gauche* (ls).
4) *Si* $\rho(t) = t$ *et* $t > \inf \mathbb{T}$, *on dit que* t *est un point dense à gauche* (ld).
5) *Si un point est dispersé à droite et à gauche,(i.e* $\rho(t) < t < \sigma(t)$*), on dit qu'il est isolé.*
6) *Si un point est dense à droite et à gauche,(i.e* t=$\sigma(t)$=$\rho(t)$*), on dit qu'il est dense.*

Exemple 1.1. *Soit* $\mathbb{T}$ *une échelle de temps,* $t \in \mathbb{T}$.

1. *Pour* $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ *, on a :* $\sigma(t) = t$ *et* $\rho(t) = t$
   Donc, chaque point de $\mathbb{R}$ *est dense :* $\mu(t) = \gamma(t) = 0$.
2. *Pour* $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ *on a, chaque point de* $\mathbb{Z}$ *est isolé et* $\sigma(t) = t+1, \rho(t) = t-1$ *et* $\mu(t) = \gamma(t) = 1$.

Définition 1.13. *Soit* $\mathbb{T}$ *échelle de temps,* $t \in \mathbb{T}$ *:*

i) *Si* $\mathbb{T}$ *admet un maximum* M *dispersé à gauche, on pose* $\mathbb{T}^k = \mathbb{T} - \{M\}$, *sinon* $\mathbb{T}^k = \mathbb{T}$.

ii) *Si* $\mathbb{T}$ *admet un minimum* m *dispersé à droite, on pose* $\mathbb{T}_k = \mathbb{T} - \{m\}$, *sinon* $\mathbb{T}_k = \mathbb{T}$.

Définition 1.14. *Soit* $\mathbb{T}$ *une échelle de temps, on définie l'intervalle* $[a, b]$ *dans* $\mathbb{T}$ *par :* $[a, b] = [a, b]_{\mathbb{T}} = [a, b] \cap \mathbb{T} = \{t \in \mathbb{T} : a \leq t \leq b\}$.

Définition 1.15. *Une fonction* $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *est dite régulière, si sa limite à droite existe en tout point dense à droite de* $\mathbb{T}$, *et sa limite à gauche existe en tout point dense à gauche de* $\mathbb{T}$.

Théorème 1.3. *Toute fonction régulière sur un compact d'une échelle de temps est bornée.*

Définition 1.16. *On dit qu'une fonction* $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *est continue en un point* $t \in \mathbb{T}$ *si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall s \in]t - \delta, t + \delta[\cap \mathbb{T} : |\varphi(t) - \varphi(s)| \leq \varepsilon.$$

Remarque 1.2. *Toute fonction définie en un point isolé est continue en ce point.*

Définition 1.17. *Une fonction $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est dite rd-continue si elle est continue en tout point dense à droite de $\mathbb{T}$, et si sa limite à gauche existe et finie en tout point dense à gauche de $\mathbb{T}$.*
On note :
– L'ensemble des fonctions $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ qui sont rd-continues sur $\mathbb{T}$ par

$$\mathrm{C}_{rd} = \mathrm{C}_{rd}(\mathbb{T}) = \mathrm{C}_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}).$$

Théorème 1.4. *Soit $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction, on a :*
1. *Si φ est continue, alors φ est rd-continue.*
2. *Si φ est rd-continue, alors φ est régulière.*

1.2.1 Δ-différentiable

Définition 1.18. *Soit $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $t \in \mathbb{T}^k$. On dit que φ est Δ-différentiable en t s'il existe un nombre réel $\varphi^{\Delta}(t) \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de t (i.e, $\mathcal{U} = (t-\delta, t+\delta) \cap \mathbb{T}$ pour certain $\delta > 0$) tel que*

$$\left|\varphi^{\sigma}(t) - \varphi(s) - \varphi^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s)\right| \leq \varepsilon|\sigma(t) - s|, \qquad \textit{pour touts} \in \mathcal{U}.$$

On appelle $\varphi^{\Delta}(t)$ la Δ-dérivée de φ en t.
Si φ est Δ-différentiable en tout $t \in \mathbb{T}^k$, alors $\varphi^{\Delta} : \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}$ est appelée la delta dérivée de f sur $\mathbb{T}^k$.

- L'ensemble des fonctions $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ qui sont différentiables et ses dérivées sont rd-continues sur $\mathbb{T}$ par

$$\mathrm{C^1}_{rd} = \mathrm{C^1}_{rd}(\mathbb{T}) = \mathrm{C^1}_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}).$$

Remarque 1.3. *On dit que la fonction $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est Δ-différentiable en $t \in \mathbb{T}^k$ s'il existe*

$$\varphi^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{\varphi(\sigma(t)) - \varphi(s)}{\sigma(t) - s} \qquad s \neq \sigma(t)$$

Exemple 1.2. *Soit $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction*
1. *Pour $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, on a $\sigma(t) = t$ alors :*

$$\varphi^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t - s} = \varphi'(t).$$

2. *Pour* $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, *on a* $\sigma(t) = t + 1$ *alors :*

$$\varphi^{\Delta}(t) = \frac{\varphi(\sigma(t)) - \varphi(t)}{\sigma(t) - t} = \varphi(t+1) - \varphi(t) = \Delta\varphi(t)$$

où Δ *l'opérateur de différence .*

Théorème 1.5. *Soit* $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *une fonction et soit* $t \in \mathbb{T}^k$.

1) *Si* φ *est* Δ*-différentiable en* t, *alors* φ *est continue en* t.

4) *Si* φ *est* Δ*-différentiable en* t, *alors*

$$\varphi^{\sigma}(t) = \varphi(t) + \mu(t)\,\varphi^{\Delta}(t).$$

Exemple 1.3. *Soit* $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *une fonction définie par :*

1. $\varphi(t) = \alpha$ *pour tout* $t \in \mathbb{T}$, *où* $\alpha \in \mathbb{R}$ *est constante. alors* $\varphi^{\Delta}(t) = 0$.
2. $\varphi(t) = t$ *pour tout* $t \in \mathbb{T}$, *alors* $\varphi^{\Delta}(t) = 1$.

Théorème 1.6. *Soient* $\varphi, \phi : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *deux fonctions* Δ*-différentiables en* $t \in \mathbb{T}^k$ *alors :*

1) *Pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha\varphi + \phi : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *est* Δ*-différentiable en* t *et*

$$(\alpha\varphi + \phi)^{\Delta}(t) = \alpha\varphi^{\Delta}(t) + \phi^{\Delta}(t).$$

2) $\varphi\phi : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *est* Δ*-différentiable en* t *et*

$$(\varphi\phi)\Delta(t) = \varphi^{\Delta}(t)\phi(t) + \varphi(\sigma(t))\phi^{\Delta}(t) = \varphi(t)\phi^{\Delta}(t) + \varphi^{\Delta}(t)\phi(\sigma(t)). \tag{1.1}$$

Exemple 1.4. *Soit* $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *une fonction définie par* $\varphi(t) = t^2$, *on a :*
1. *Si* $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, *on a* $\sigma(t) = t$ *et* $\rho(t) = t$, *alors :* $\varphi^{\Delta}(t) = \varphi'(t) = 2t$.
2. *Si* $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, *on a* $\sigma(t) = t + 1$ *et* $\rho(t) = t - 1$ *alors :* $\varphi^{\Delta}(t) = 2t + 1$.

1.2.2 Δ-Intégration

Définition 1.19. *La fonction* $H : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *est dite la primitive de* $h : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *si*

$$H^{\Delta}(t) = h(t), \quad pour\ chaque\ t \in \mathbb{T}^k.$$

- On définit l'intégrale de Cauchy par :

$$\int_a^b h(t)\Delta(t) = H(b) - H(a), pour\ tout \quad a, b \in \mathbb{T}.$$

Définition 1.20. *Soit $h : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction régulière , on définit l'intégrale indéfinie par :*

$$\int h(t)\Delta(t) = H(t) + c,$$

où c est une constante arbitraire et H est la primitive de h.

Théorème 1.7. *Toute fonction rd-continue possède une primitive. En particulier ,si $t_0 \in \mathbb{T}$, alors la fonction H définit par :*

$$H(t) = \int_{t_0}^{t} h(\tau)\Delta\tau, \quad \textit{pour tout} \quad t \in \mathbb{T},$$

est une primitive de h.

Théorème 1.8. *Tout fonction continue h sur $[a, b]$ est Δ-intégrable.*

Théorème 1.9. *Si $h \in C_r d$ et $t \in \mathbb{T}^k$, alors*

$$\int_{t}^{\sigma(t)} h(\tau)\Delta(\tau) = \mu(t)h(t).$$

Théorème 1.10. *Si $a, b, c \in \mathbb{T}, \alpha \in \mathbb{R}$ et $f, g \in C_r d$, alors :*

1. $\int_a^b [\alpha f(t) + g(t)]\Delta t = \alpha \int_a^b f(t)\Delta t + \int_a^b g(t)\Delta t.$
2. $\int_a^b f(t)\Delta t = -\int_b^a f(t)\Delta t$ *et* $\int_a^a f(t)\Delta t = 0.$
3. $\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^c f(t)\Delta t + \int_c^b f(t)\Delta t.$
4. $\int_a^b f(\sigma(t))g^{\Delta}(t)\Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^{\Delta} g(t)\Delta t.$
5. *Si* $|f(t)| \leq g(t)$ *sur* $[a, b]$, *alors* $\left|\int_a^b f(t)\Delta t\right| \leq \int_a^b g(t)\Delta t.$

Théorème 1.11. *Soient $a, b \in \mathbb{T}$et $f \in C_r d$*
1.*Si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, alors*

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^b f(t)dt$$

où l'intégrale à droite est l'intégrale usuelle de Riemann.
2. *Si* $[a, b]$ *ne contient que des points isolés, alors*

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \begin{cases} \sum\limits_{t\in[a,b)} \mu(t)f(t) & si\ a<b \\ 0 & si\ a=b \\ -\sum\limits_{t\in[a,b)} \mu(t)f(t) & si\ a>b \end{cases}$$

Exemple 1.5. *Soit* $\mathbb{T}$ *une échelle de temps :*
1. *Soit* $a, b \in \mathbb{T}$, *on a :* $\displaystyle\int_a^b c\Delta t = c\int_a^b 1\Delta t = c(b-a)$.
2. *On calculons* $\displaystyle\int_0^t s\Delta s$ *sur* $\mathbb{T}$ *:*
-Pour $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ *on a :* $\displaystyle\int_0^t s\Delta s = \int_0^t sds = \left[\frac{1}{2}s^2\right]_0^t = \frac{1}{2}t^2$.
-Pour $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ *on a :* $\displaystyle\int_0^t s\Delta s = \sum_{s=0}^{t-1} s = \frac{t(t-1)}{2}$.

1.2.3 la fonction exponentielle

Définition 1.21. *Pour* $h > 0$, *on définit les nombres complexes de Hilger* $\mathbb{C}_h$ *et l'axe imaginaire de Hilger* $\mathbb{Z}_h$, *par :*

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_h &= \{z \in \mathbb{C}, z \neq \frac{-1}{h}\} \\ \mathbb{Z}_h &= \{z \in \mathbb{C}, \frac{-\pi}{h} < Im(z) \leq \frac{\pi}{h}\} \end{aligned}$$

Pour $h = 0$, *on a* $\mathbb{C}_0 = \mathbb{C}$ *et* $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{C}$

Définition 1.22. *Une fonction* $p : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *est dite régressive si :*

$$1 + \mu(t)p(t) \neq 0, \quad \forall t \in \mathbb{T}^k$$

On note L'ensemble des fonctions régressives et rd-continues par :

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathbb{T}) = \mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$$

et on note par $\mathcal{R}^+ = \{p : \mathbb{T} \to \mathbb{R} : 1 + \mu(t)p(t) > 0\}$ *pour tout* $t \in \mathbb{T}$ *l'ensemble des fonctions régressives positives.*

Définition 1.23. *On définit dans* $\mathcal{R}(\mathbb{T})$

- $(p \oplus q)(t) = p(t) + q(t) + \mu(t)p(t)q(t)$; *pour tout* $t \in \mathbb{T}^k$, *et* $p, q \in \mathcal{R}$.
- $(p \ominus q)(t) = (p \oplus (\ominus q))(t) = \dfrac{p(t) - q(t)}{1 + \mu(t)q(t)}$; *pour tout* $t \in \mathbb{T}^k$, *et* $p, q \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$.

Définition 1.24. *Si* $p \in \mathcal{R}$, *alors on définit la fonction exponentielle par :*

$$e_p(t,s) = \exp\Big(\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\Big) \text{ pour } t, s \in \mathbb{T}$$

Où $\xi_h : \mathbb{C}_h \to \mathbb{Z}_h$ *est la trnsformation cylindrique définie par :*

$$\xi_h(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{h}\log(1 + zh) & \text{si } h > 0 \\ z & \text{si } h = 0 \end{cases}$$

Où log *désigne le logarithme nipérien .*
Donc on a

$$e_p(t,s) = \exp\Big(\int_s^p \frac{\log(1 + \mu(\tau)p(\tau))}{\mu(\tau)}\Delta\tau\Big) \text{ pour } t, s \in \mathbb{T}$$

Remarque 1.4.

1. *Soit* $p \in \mathcal{R}$ *et* $t_0 \in \mathbb{T}$ *fixé, la fonction* $e_p(., t_0)$ *est définie comme la solution unique du problème de Cauchy :*
$$y^{\Delta}(t) = p(t)y(t).$$
2. *On a :* $e_p^{\Delta}(t,s) = p(t)e_p(t,s)$.
3. *Pour* $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, $\mu(t) = 0$. *On a :*
$$e_p(t,s) = \exp\left(\int_s^t p(\tau)\Delta\tau\right).$$
Si p est une constante, alors $e_p(t,s) = e^{p(t-s)}$ *et* $e_0(t,s) = 1$, *et* $e_1(t,0) = e^t$.

Théorème 1.12. *:Si* $p,\ q \in \mathcal{R}$, *alors*

1. $e_0(t,s) \equiv 1$ *et* $e_p(t,t) \equiv 1$
2. $e_p(\sigma(t), s) = (1 + \mu(t)p(t))e_p(t,s)$
3. $\dfrac{1}{e_p(t,s)} = e_{\ominus p}(t,s)$, $e_p(t,s) = \dfrac{1}{e_p(s,t)} = e_{\ominus p}(s,t)$
4. $e_p(t,s)e_p(s,r) = e_p(t,r)$ $\ e_p(t,s)e_q(t,s) = e_{p\oplus q}(t,s)$.

1.3 Calcul fractionnaire conforme sur les échelles de temps

Dans ce chapitre, nous présentons quelques définitions et résultats des intégrales et des dérivées fractionnaires conformes sur des échelles de temps. Pour plus de détails, le lecteur pourra consulter [1, 9, 10, 11].

1.3.1 Dérivée fractionnaire conforme

Définition 1.25. (*La dérivée fractionnaire conforme*) *Soit $\phi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $\alpha \in (0, 1]$. La dérivée fractionnaire conforme d'ordre α de ϕ est définie par :*

$$\phi^{(\alpha)}(t) := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\phi(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - \phi(t)}{\varepsilon} \tag{1.2}$$

pour tout $t > 0$. Si $\phi^{(\alpha)}(t)$ existe et est finie, on dit que ϕ est α-differentiable en t.

Définition 1.26. (*La delta dérivée fractionnaire conforme*) *Soit $\phi : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction, $t \in \mathbb{T}^\kappa$, et soit $\alpha \in]0, 1]$. Pour $t > 0$, on définit le réel $\phi_\Delta^{(\alpha)}(t)$ (supposons qu'il existe) vérifiant : pour tout $\epsilon > 0$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_t \subset \mathbb{T}$ (i.e., $\mathcal{V}_t :=]t - \delta, t + \delta[\cap \mathbb{T}$) de t, $\delta > 0$, tel que*

$$\left| [\phi(\sigma(t)) - \phi(s)]\, t^{1-\alpha} - \phi_\Delta^{(\alpha)}(t)\, [\sigma(t) - s] \right| \leq \epsilon\, |\sigma(t) - s| \ \text{ pour tout } s \in \mathcal{V}_t. \tag{1.3}$$

- On appelle $\phi_\Delta^{(\alpha)}(t)$ la delta dérivée fractionnaire conforme de ϕ d'ordre α en t, et on définit la delta dérivée fractionnaire conforme de ϕ en 0 par $\phi_\Delta^{(\alpha)}(0) = \lim_{t \to 0^+} \phi_\Delta^{(\alpha)}(t)$.

-On dit que ϕ est delta différentiable fractionnaire conforme d'ordre α sur $\mathbb{T}^\kappa$ si $\phi_\Delta^{(\alpha)}(t)$ existe pour tout $t \in \mathbb{T}^\kappa$.

Remarque 1.5. *(i) Si $\alpha = 1$, on a $\phi_\Delta^{(\alpha)} = \phi^\Delta$.*

(ii) Si $\alpha = 0$, nous notons $\phi_\Delta^{(\alpha)} = \phi$.

(iii) Si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, alors $\phi_\Delta^{(\alpha)} = \phi^{(\alpha)}$ est la dérivée fractionnaire conforme de ϕ d'ordre α(voir Définition 1.25).

Nous introduisons l'espace suivant :

$$C_{rd}^{\alpha}([a,b]_{\mathbb{T}},\mathbb{R}) = \{\phi \ delta \ différentiable \ fractionnaire \ conforme \\ d'ordre \ \alpha \ sur \ [a,b]_{\mathbb{T}} \ et \ \phi_{\Delta}^{(\alpha)} \in C_{rd}([a,b]_{\mathbb{T}},\mathbb{R})\}.$$

Théorème 1.13. *Soit $\alpha \in]0,1]$ et $\phi : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$. Alors on a :*

(i) Si ϕ est delta différentiable fractionnaire conforme d'ordre α en $t > 0$, alors ϕ est continue en t.

(ii) Si ϕ est continue en t et t est dispersé à droite, alors ϕ est delta différentiable fractionnaire conforme d'ordre α en t et

$$\phi_{\Delta}^{(\alpha)}(t) = \frac{\phi(\sigma(t)) - \phi(t)}{\mu(t)} t^{1-\alpha} = t^{1-\alpha}\phi^{\Delta}(t).$$

(iii) Si t est dense à droite, alors ϕ est delta différentiable fractionnaire conforme d'ordre α en t si et seulement si la limite $\lim_{s\to t} \frac{\phi(t)-\phi(s)}{(t-s)} t^{1-\alpha}$ existe et est finie, dans ce cas on a $\phi_{\Delta}^{(\alpha)}(t) = \lim_{s\to t} \frac{\phi(t)-\phi(s)}{(t-s)} t^{1-\alpha} = t^{1-\alpha}\phi'(t)$.

(iv) Si ϕ est delta différentiable fractionnaire conforme d'ordre α en t, alors $\phi(\sigma(t)) = \phi(t) + (\mu(t))t^{\alpha-1}\phi_{\Delta}^{(\alpha)}(t)$.

Exemple 1.3.1. *Soit $\alpha \in (0,1]$. Les fonctions suivantes $f, g, h : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ définies par $f(t) = t$, $g(t) \equiv \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $h(t) = e_p(t,a)$, $p \in \mathcal{R}_{\mu}$, sont delta différentiables fractionnaires conformes d'ordre α avec*

$$f_{\Delta}^{(\alpha)}(t) = t^{1-\alpha}, \quad g_{\Delta}^{(\alpha)}(t) = 0 \quad et \quad h_{\Delta}^{(\alpha)}(t) = t^{1-\alpha} p \ e_p(t,a).$$

Théorème 1.14. (*Les propriétés de delta dérivée fractionnaire conforme*) *Soit $\phi, \varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ sont delta différentiables fractionnaires conformes d'ordre α. Alors,*

(i) La somme $\phi + \varphi$ est delta différentiable fractionnaire conforme d'ordre α et $(\phi+\varphi)_{\Delta}^{(\alpha)} = \phi_{\Delta}^{(\alpha)} + \varphi_{\Delta}^{(\alpha)}$;

(ii) Pour toute constante $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda\phi$ est delta différentiable fractionnaire conforme d'ordre α et $(\lambda\phi)_{\Delta}^{(\alpha)} = \lambda\phi_{\Delta}^{(\alpha)}$;

(iii) Si ϕ et φ sont continues, alors le produit $\phi\varphi$ est delta différentiable fractionnaire conforme d'ordre α et

$$(\phi\varphi)_{\Delta}^{(\alpha)} = \phi_{\Delta}^{(\alpha)}\varphi + (\phi \circ \sigma)\varphi_{\Delta}^{(\alpha)} = \phi_{\Delta}^{(\alpha)}(\varphi \circ \sigma) + \phi\varphi_{\Delta}^{(\alpha)};$$

(v) Si $\varphi(t)\varphi(\sigma(t)) \neq 0$, tout point $t \in \mathbb{T}^\kappa$ et si ϕ et φ sont continues, alors ϕ/φ est delta différentiable fractionnaire conforme d'ordre α

$$\left(\frac{\phi}{\varphi}\right)_\Delta^{(\alpha)} = \frac{\phi_\Delta^{(\alpha)}\varphi - \phi\varphi_\Delta^{(\alpha)}}{\varphi(\varphi \circ \sigma)}. \tag{1.4}$$

Remarque 1.6. - *Si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, la Δ-dérivée équivaut à la dérivée au sens classique et les équations aux échelles de temps deviennent des équations différentielles.*
- Si $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, les équations aux échelles de temps deviennent des équations aux différences finies.

1.3.2 Intégrale fractionnaire conforme

Maintenant, nous introduisons delta α-intégrale fractionnaire conforme sur les echelles de temps.

Définition 1.27. *Soit $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction régulière et $0 < \alpha \leq 1$. On définit delta α-intégrale fractionnaire de g par :*

$$\int g(t)\Delta^\alpha t := \int g(t)t^{\alpha-1}\Delta t.$$

Définition 1.28. *Soit $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction régulière et $0 < \alpha \leq 1$. On définit delta α-intégrale fractionnaire indéfinie de g d'ordre α par :*

$$G(t) = \int g(t)\Delta^\alpha t.$$

On définit delta α-intégrale fractionnaire de Cauchy par :

$$\int_a^b g(t)\Delta^\alpha t = G(b) - G(a) \text{ pour tout } a, b \in \mathbb{T}.$$

Exemple 1.3.2. *Soit $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, $\alpha = \frac{1}{2}$, et $g(t) = t$. Alors*

$$\int_1^{10^{\frac{2}{3}}} g(t)\Delta^\alpha t = \int_1^{10^{\frac{2}{3}}} t.t^{\frac{1}{2}-1}\Delta t = \int_1^{10^{\frac{2}{3}}} t^{\frac{1}{2}}dt = 6.$$

Théorème 1.15. *Soit $\alpha \in (0,1]$. Si $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est une fonction rd-continue, alors il existe une fonction $G : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que :*

$$G_{\Delta}^{(\alpha)}(t) = g(t), \quad \textit{pour tout} \quad t \in \mathbb{T}^k.$$

- La fonction G est appelée la fonction α-primitive de g.

Théorème 1.16. *Si $a, b, c \in \mathbb{T}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha \in (0,1]$, et $f, g \in C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$. Alors,*

(i) $\displaystyle\int_a^b [\lambda f(t) + g(t)]\Delta^\alpha t = \lambda \int_a^b f(t)\Delta^\alpha t + \int_a^b g(t)\Delta^\alpha t\,;$

(ii) $\displaystyle\int_a^b f(t)\Delta^\alpha t = -\int_b^a f(t)\Delta^\alpha t$ *et* $\displaystyle\int_a^a f(t)\Delta^\alpha t = 0\,;$

(iii) $\displaystyle\int_a^b f(t)\Delta^\alpha t = \int_a^c f(t)\Delta^\alpha t + \int_c^b f(t)\Delta^\alpha t\,;$

(iv) s'il existe $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ avec $|f(t)| \leq g(t)$ pour tout $t \in [a,\ b]_{\mathbb{T}}$, alors $\left|\int_a^b f(t)\Delta^\alpha t\right| \leq \int_a^b g(t)\Delta^\alpha t\,;$

(v) si $f(t) > 0$ pour tout $t \in [a,\ b]_{\mathbb{T}}$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\Delta^\alpha t \geq 0.$

Chapitre 2

Existence de solutions pour des équations dynamiques sur les échelles de temps

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions l'existence de solutions pour d'équation dynamique non-linéaire du premier ordre sur les échelles de temps suivante :

$$x^{\Delta}(t) = f(t, x^{\sigma}(t)), \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{T}^k, \tag{2.1}$$

sataisfont l'une des conditions de bord suivantes (condition de Cauchy ou condition périodique) :

$$\text{Condition de Cauchy (initiale) sur } \mathbb{T}, \qquad x(a) = x_0, \tag{2.2}$$

$$\text{Condition périodique sur } \mathbb{T}, \qquad x(a) = x(b). \tag{2.3}$$

Ici, $\mathbb{T}$ est une echelle de temps bornnée ou on notera $a = \min \mathbb{T}$, $b = \max \mathbb{T}$, $\mathbb{T}_0 = \mathbb{T} - \{b\}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{T}^k \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

À l'aide de la méthode des sous et sur-solutions et le théorème de point fixe de Schauder, on établit des résultats d'existence pour les deux problèmes $(2.1), (2.2)$ et $(2.1), (2.3)$.

- La méthode de sous et sur-solutions a été appliquée pour les deux problèmes $(2.1),(2.2)$ et $(2.1),(2.3)$ avec $(\mathbb{T}=\mathbb{R})$, par Hattabi et al. [16] :

$$x'(t)=f(t,x(t)),\quad \text{pour tout}\, t\in[a,b],\; 0<a<b,\; x(a)=x_0\,(resp., x(a)=x(b)).$$

- Dans [14], Cabada et al. ont établi un théorème d'existence pour l'équation dynamique non-linéaire du premier ordre (2.1) avec des conditions fonctionnelles non linéaires aux bords :

$$x^{\Delta}(t)=f(t,x^{\sigma}(t)),\qquad \text{pour}\;\; t\in[a,b]_{\mathbb{T}},\; a,b\in\mathbb{R},\qquad B(x(a),x)=0,$$

2.2 Résultat d'existence pour le problème (2.1),(2.2)

Dans cette section, nous allons prouver l'existence d'une solution qui est localisée entre la sur et la sous-solution du problème (2.1),(2.2).

Définition 2.1. *On dit que $x\in C^1_{rd}(\mathbb{T},\mathbb{R})$ est une solution de (2.1)(2.2) si elle satisfait l'équation (2.1) sur $\mathbb{T}^k$ et la condition (2.2).*

Nous introduisons ici les notions de sur et sous-solutions de (2.1),(2.2).

Définition 2.2. *Une fonction $\delta\in C^1_{rd}(\mathbb{T},\mathbb{R})$ est appelée sur-solution de* $(2.1),(2.2)$*, si*

$$\begin{cases}\delta^{\Delta}(t)\geq f(t,\delta^{\sigma}(t)), & \textit{pour tout}\;\; t\in\mathbb{T}^k;\\ \delta(a)\geq x_0.\end{cases}\tag{2.4}$$

De la même façon, une fonction $\gamma\in C^1_{rd}(\mathbb{T},\mathbb{R})$ est appelée sous-solution de $(2.1),(2.2)$ *si*

$$\begin{cases}\gamma^{\Delta}(t)\leq f(t,\gamma^{\sigma}(t)), & \textit{pour tout}\; t\in\mathbb{T}^k;\\ \gamma(a)\leq x_0.\end{cases}\tag{2.5}$$

Nous définissons l'ensemble :

$$[\gamma,\delta]=\{x\in C(\mathbb{T},\mathbb{R}):\gamma(t)\leq x(t)\leq\delta(t),\;\text{pour tout}\; t\in\mathbb{T}\}.$$

Lemme 2.1. *Le problème de Cauchy (à valeur initiale)*

$$\begin{cases} x^{\Delta}(t) + x(\sigma(t)) = g(t), \quad t \in \mathbb{T}_0; \\ x(a) = x_0. \end{cases} \tag{2.6}$$

avec $x_0 \in \mathbb{R}$ *et* $g \in C^1_{rd}(\mathbb{T}_0, \mathbb{R})$, *admet une solution unique* $x \in C^1_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$, *donnée par*

$$x(t) := \int_a^t e_1(s,t)g(s)\Delta s + x_0 e_1(a,t), \quad \text{pour tout} \quad t \in \mathbb{T}. \tag{2.7}$$

Preuve 2.1. *Soit* x *est solution du problème (2.6), on a :*

$$x^{\Delta}(t) + x^{\sigma}(t) = g(t), \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{T}^k.$$

et

$$\begin{aligned} [e_1(t,a)x(t)]^{\Delta} &= e_1(t,a)x^{\Delta}(t) + [e_1(t,a)]^{\Delta}\, x^{\sigma}(t) \\ &= e_1(t,a)x^{\Delta}(t) + e_1(t,a)x^{\sigma}(t) \\ &= e_1(t,a)[x^{\Delta}(t) + x^{\sigma}(t)] \\ &= e_1(t,a)g(t). \end{aligned}$$

On intégré les deux cotés de cette égalité sur $[a,t]$ *et on obtient*

$$x(t)e_1(t,a) - x(a) = \int_a^t e_1(s,a)g(s)\Delta s.$$

Par le Théorème 1.12, *on obtient*

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{e_1(t,a)}\left[x(a) + \int_a^t e_1(s,a)g(s)\Delta s\right] \\ &= x(a)e_1(a,t) + \int_a^t e_1(a,t)e_1(s,a)g(s)\Delta s \\ &= x(a)e_1(a,t) + \int_a^t e_1(s,t)g(s)\Delta s \\ &= x_0 e_1(a,t) + \int_a^t e_1(s,t)g(s)\Delta s. \end{aligned}$$

Afin de démontrer le théorème d'existence, nous aurons recours au problème modifié suivant :

$$\begin{cases} x^{\Delta}(t) + x(\sigma(t)) = f(t, \overline{x}(\sigma(t))) + \overline{x}(\sigma(t)), \quad t \in \mathbb{T}^k, \\ x(a) = x_0, \end{cases} \tag{2.8}$$

où

$$\overline{x}(t) = \max\Big\{\gamma(t),\ \min\{x(t), \delta(t)\}\Big\}, \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{T}. \tag{2.9}$$

Il est clair qu'une solution x de (2.8) telle que $\gamma(t) \leq x(t) \leq \delta(t)$ pour tout $t \in \mathbb{T}$ (c-à-d. $x \in [\gamma, \delta]$) est une solution de (2.1)(2.2).

Définissons l'opérateur $\mathcal{B}_1 : C(\mathbb{T}, \mathbb{R}) \to C(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ par

$$\mathcal{B}_1(x)(t) = \int_a^t e_1(s,t)\left(f(s, \overline{x}(\sigma(s))) + \overline{x}(\sigma(s))\right)\Delta s + x_0 e_1(a,t) \tag{2.10}$$

.

D'après le Lemme 2.1, les points fixes de l'opérateur $\mathcal{B}_1$ sont les solutions du problème (2.8).

Proposition 2.1. *Soit $f : \mathbb{T}^k \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.*
Si $\gamma, \delta \in C^1_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ sont respectivement sous et sur solutions de (2.1)(2.2), *tel que $\gamma(t) \leq \delta(t)$, pour tout $t \in \mathbb{T}$, alors l'opérateur $\mathcal{B}_1$ est compact.*

Preuve : On va montrer que $\mathcal{B}_1$ satisfait les conditions du théorème d'Arzelà-Ascoli, la preuve est donnée en plusieures étapes.
Etape 1 : $\mathcal{B}_1$ est continu.
Soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $C(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ convergeant vers $x \in C(\mathbb{T}, \mathbb{R})$. Alors pour

tout $t \in \mathbb{T}$, on a :

$$\begin{aligned}
&\Big|\mathcal{B}_1(x_n(t)) - \mathcal{B}_1(x(t))\Big| \\
&\qquad = \Big| \int_{[a,t)_{\mathbb{T}}} e_1(s,t)\Big((f(s,\overline{x_n}(\sigma(s))) - f(s,\overline{x}(\sigma(s)))) \\
&\qquad\qquad\qquad + (\overline{x_n}(\sigma(s)) - \overline{x}(\sigma(s)))\,\Delta s\Big| \\
&\qquad \leq \int_{[a,t)_{\mathbb{T}}} |e_1(s,t)|\Big(|f(s,\overline{x_n}(\sigma(s))) - f(s,\overline{x}(\sigma(s)))| \\
&\qquad\qquad\qquad + |\overline{x_n}(\sigma(s)) - \overline{x}(\sigma(s))|)\,\Delta s \\
&\qquad \leq K\int_{[a,b)_{\mathbb{T}}} \Big(|f(s,\overline{x_n}(\sigma(s))) - f(s,\overline{x}(\sigma(s)))| \\
&\qquad\qquad\qquad + |\overline{x_n}(\sigma(s)) - \overline{x}(\sigma(s))|)\,\Delta s.
\end{aligned}$$

où $K := \max_{s,t\in\mathbb{T}} |e_1(s,t)|$. Puisqu'il existe une constante $R > 0$ tel que $\|\overline{x}\|_{C(\mathbb{T},\mathbb{R})} < R$, il existe un indice N tell que $\|\overline{x_n}\|_{C(\mathbb{T},\mathbb{R})} \leq R$ pour tout $n > N$. Ainsi, f uniformément continue sur $\mathbb{T}^k \times B_R(0)$. Alors pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe un $\delta > 0$ tel que $x, y \in \mathbb{R}$ où

$$|y - x| < \delta < \frac{\varepsilon}{2K(b-a)}, \quad |f(s,y) - f(s,x)| < \frac{\varepsilon}{2K(b-a)},$$

pour tout $s \in \mathbb{T}^k$. Par hypothèse, il est possible de trouver un indice $\hat{N} > N$ tel que $\|\overline{x_n} - \overline{x}\|_{C(\mathbb{T},\mathbb{R})} < \delta$ pour $n > \hat{N}$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned}
\Big|\mathcal{B}_1(x_n(t)) - \mathcal{B}_1(x(t))\Big| &\leq K\int_{[a,b)_{\mathbb{T}}} \left(\frac{\varepsilon}{2K(b-a)} + \frac{\varepsilon}{2K(b-a)}\right)\Delta s \\
&\leq \varepsilon,
\end{aligned}$$

ce qui nous convainc de la continuité de $\mathcal{B}_1$.

Etape 2 : L'ensemble $\mathcal{B}_1(C(\mathbb{T},\mathbb{R}))$ est relativement compact.
Considérons une suite $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{B}_1(C(\mathbb{T},\mathbb{R}))$ pour tout $n \in N$ il existe une suite $(x_n)_{n\in N} \in C(\mathbb{T},\mathbb{R})$ tell que $y_n = \mathcal{B}_1(x_n(t))$ pour tout $n \in N$. Nous

avons

$$\begin{aligned}
&\Big|\mathcal{B}_1(x_n)(t)\Big| \\
&\quad\leq \int_{[a,b)_{\mathbb{T}}} |e_1(s,t)| \left(|f(s,\overline{x_n}(\sigma(s)))| + |\overline{x_n}(\sigma(s))|\right) \Delta s + e_1(a,t)|x_0| \\
&\quad\leq K\Big[\int_{[a,b)_{\mathbb{T}}} \left(|f(s,\overline{x_n}(\sigma(s)))| + |\overline{x_n}(\sigma(s))|\right) \Delta s + |x_0|\Big].
\end{aligned}$$

Puisque

$$|\overline{x}_n(s)| \leq R, \qquad \text{pour tout } s \in \mathbb{T} \text{ et tout } n \in \mathbb{N}.$$

Comme $\mathbb{T}^k \times \overline{B}\,(0,R)$ est un ensemble sur $\mathbb{T}\times\mathbb{R}$ et f étant continue sur $\mathbb{T}^k \times \overline{B}\,(0,R)$, nous pouvons déduire l'existance d'une constante $A>0$, telle que

$$|f(s,\overline{x}_n(s)| \leq A, \qquad \text{pour tout } s \in \mathbb{T}^k \quad \text{et} \quad \text{tout } n \in \mathbb{N}.$$

Donc,

$$|y_n(t)| = |\mathcal{B}_1(x_n)(t)| \leq K\Big[(b-a)(A+R) + |x_0|\Big] < +\infty.$$

Ainsi, la suite $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée sur $\mathcal{C}(\mathbb{T},\mathbb{R})$.
D'autre part, pour tout $t_1 < t_2 \in \mathbb{T}$, on a

$$\begin{aligned}
&\Big|\mathcal{B}_1\left(x_n\right)\left(t_2\right) - \mathcal{B}_1\left(x_n\right)\left(t_1\right)\Big| \\
&\quad\leq \int_{[a,t_1]_{\mathbb{T}}} |e_1(s,t_2) - e_1(s,t_1)| \left|\Big(f(s,\overline{x_n}(\sigma(s))) + \overline{x_n}(\sigma(s))\Big)\right|\Delta s \\
&\qquad + \int_{[t_1,t_2]_{\mathbb{T}}} |e_1(s,t_2)| \left|\Big(f(s,\overline{x_n}(\sigma(s))) + \overline{x_n}(\sigma(s))\Big)\right|\Delta s \\
&\qquad + |x_0||e_1(a,t_2) - e_1(a,t_1)|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{[a,b)_{\mathbb{T}}} |e_1(a,t_2) - e_1(a,t_1)|\, |e_1(s,a)| \Big(|f(s,\overline{x_n}(\sigma(s)))| + |\overline{x_n}(\sigma(s))|\Big)\Delta s \\
&\quad + \int_{[t_1,t_2]_{\mathbb{T}}} |e_1(s,t_2)| \Big(\, |f(s,\overline{x_n}(\sigma(s)))| + |\overline{x_n}(\sigma(s))|\Big)\Delta s \\
&\quad + |x_0||e_1(a,t_2) - e_1(a,t_1)| \\
&\leq |e_1(a,t_2) - e_1(a,t_1)|\Big[D\ (A+R)(b-a) + |x_0|\Big] \\
&\qquad\qquad + K\Big(A+R\Big)|t_2 - t_1|,
\end{aligned}$$

où $D := \max_{s\in\mathbb{T}}\{e_1(s,a)\}$. Donc, la suite $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue.
Par le théorème d'Arzelà-Ascoli, on obtient que l'ensemble $\mathcal{B}_1\left(C(\mathbb{T},\mathbb{R})\right)$ est relativement compacte dans $C(\mathbb{T},\mathbb{R})$. Ainsi, $\mathcal{B}_1$ est compacte.

Nous pouvons maintenant démontrer le résultat d'existence suivant.

Théorème 2.1. *Soit $f : \mathbb{T}^k \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.*
Si $\gamma, \delta \in C^1_{rd}(\mathbb{T},\mathbb{R})$ sont respectivement sous et sur solutions de (2.1)(2.2), tel que : $\forall t \in \mathbb{T},\ \gamma(t) \leq \delta(t)$, alors le problème (2.1)(2.2) admet une solution $x \in C^1_{rd}(\mathbb{T},\mathbb{R})$, telle que :

$$\gamma(t) \leq x(t) \leq \delta(t),\ \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}.$$

Preuve.
Par la Proposition 2.1, l'opérateur $\mathcal{B}_1$ est compact. Ainsi, par le Théorème du point fixe de Schauder, $\mathcal{B}_1$ admet un point fixe. Le Lemme 2.1 nous assure que ce point fixe est une solution du problème (2.8). Il suffit donc de démontrer que pour toute solution x de (2.8), $x \in [\gamma, \delta]$, c'est-à-dire $\gamma(t) \leq x(t) \leq \delta(t)$ pour tout $t \in \mathbb{T}$.
Soit $x \in C^1_{rd}(\mathbb{T},\mathbb{R})$ la solution de (2.8), prouvons d'abord que :

$$\gamma(t) \leq x(t), \quad \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}.$$

Procédons par l'absurde, il existe $t_1, t_2 \in \mathbb{T}$, $t_1 < t_2$ tel que $\gamma(t_1) = x(t_1)$ et

$$x(t) \leq \gamma(t) \textit{ pour tout } t \in]t_1, t_2[.$$

D'aprés la définition de $\bar{x}$ on a

$$x^{\Delta}(t) = f(t, \gamma(\sigma(t))) + \gamma(\sigma(t)) - x(\sigma(t)).$$

Donc

$$x(t) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t} \Big[f(s, \gamma\left(\sigma(s)\right)) + (\gamma(\sigma(s)) - x(\sigma(s)))\Big]\Delta s.$$

En utilusant le fait que γ est une sous solution de (2.1)(2.2) (c'est à dire $\gamma^{\Delta}(s) \leq f(s, \gamma(\sigma(s))))$, l'inégalité ci-dessus nous donne :

$$\begin{array}{rcl}\gamma(t) - \gamma(t_1) & \leq & \displaystyle\int_{t_1}^{t} f(s, \gamma(\sigma(s)))\Delta s \\ & < & \displaystyle\int_{t_1}^{t} \Big[f(s, \gamma(\sigma(s))) + (\gamma(\sigma(s)) - x(\sigma(s)))\Big]\Delta s \\ & = & x(t) - x(t_1) < \gamma(t) - \gamma(t_1).\end{array}$$

C'est une contradiction. Donc $\gamma(t) \leq x(t)$ *pour tout* $t \in \mathbb{T}$.
En suivant un raisonnement similaire à la partie précédente, nous montrons maintenant que :

$$x(t) \leq \delta(t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{T}.$$

Supposons qu'il existe $t_1, t_2 \in \mathbb{T}, t_1 < t_2$ tel que $\delta(t_1) = x(t_1)$ et

$$x(t) \geq \delta(t) \text{ pour tout } t \in]t_1, t_2[.$$

En utilusant la définition de $\bar{x}$ on a

$$x^{\Delta}(t) = f(t, \delta(\sigma(t))) + (\delta(\sigma(t)) - x(\sigma(t))).$$

Donc

$$x(t) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t} \Big[f(s, \delta(\sigma(s))) - (x(\sigma(s)) - \delta(\sigma(s))) \Big] \Delta s.$$

En utilusant le fait que δ est une sur solution de (2.1)(2.2) (c'est à dire $\delta^{\Delta}(s) \geq f(s, \delta(\sigma(s)))$). On obtient donc

$$\begin{aligned} \delta(t) - \delta(t_1) &\geq \int_{t_1}^{t} f(s, \delta(\sigma(s))) ds \\ &> \int_{t_1}^{t} \Big[f(s, \delta(\sigma(s))) - (x(\sigma(s)) - \delta(\sigma(s))) \Big] \Delta s \\ &= x(t) - x(t_1) > \delta(t) - \delta(t_1). \end{aligned}$$

C'est une contradiction, donc : $\delta(t) \geq x(t)$ *pour tout* $t \in \mathbb{T}$.
Ceci montre que le problème (2.8) à une solution dans l'intervalle $[\gamma, \delta]$ qui est la solution de (2.1)(2.2).

2.3 Résultat d'existence pour le problème (2.1)(2.3)

Dans cette partie, nous allons prouver l'existence d'une solution qui est localisée entre la sur et la sous-solution du problème (2.1)(2.3).

Définition 2.3. *On dit que* $x \in C^1_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ *est une solution de (2.1),(2.3) si elle satisfait l'équation (2.1) sur* $\mathbb{T}^k$ *et la condition (2.3).*

Introduisons la définition de sous et sur-solution de ce problème.

Définition 2.4. *Une fonction* $\delta \in C^1_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ *est appelée sur-solution de* (2.1)(2.3), *si*

$$\begin{cases} \delta^{\Delta}(t) \geq f(t, \delta^{\sigma}(t)), & \text{pour tout } \ t \in \mathbb{T}^k; \\ \delta(a) \geq \delta(b). \end{cases} \tag{2.11}$$

De même façon, une fonction $\gamma \in C^1_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ *est appelée sous-solution de* (2.1)(2.3) *si*

$$\begin{cases} \gamma^{\Delta}(t) \leq f(t, \gamma^{\sigma}(t)), & \text{pour tout } t \in \mathbb{T}^k, \\ \gamma(a) \leq \gamma(b). \end{cases} \tag{2.12}$$

Lemme 2.2. *Le problème périodique*

$$\begin{cases} x^{\Delta}(t) + x(\sigma(t)) = g(t), & t \in \mathbb{T}_0; \\ x(a) = x(b). \end{cases} \tag{2.13}$$

avec $g \in C^1_{rd}(\mathbb{T}_0, \mathbb{R})$, *admet une solution unique* $x \in C^1_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$, *donnée par*

$$x(t) = \frac{1}{e_1(t,a)} \left(\frac{1}{e_1(b,a) - 1} \int_a^b e_1(s,a) g(s) \Delta s + \int_a^t e_1(s,a) g(s) \Delta s \right), \quad t \in \mathbb{T}.$$

Preuve.
Soit x est solution du problème (2.13), on a :

$$\begin{aligned} \Big[x(t) e_1(t,a)\Big]^{\Delta} &= x^{\Delta}(t) e_1(t,a) + e_1(t,a) x(\sigma(t)), \\ &= e_1(t,a) g(t). \end{aligned}$$

On intégré les deux cotés de cette égalité sur $[a, t]_{\mathbb{T}}$ et on obtient

$$x(t) e_1(t,a) - x(a) = \int_a^t e_1(s,a) g(s) \Delta s. \tag{2.14}$$

Donc,

$$x(t) = e_1(a,t) \left(x(a) + \int_a^t \ e_1(s,a) g(s) \Delta s \right) \tag{2.15}$$

Par (2.13) et (3.9), on obtient

$$x(a) = \frac{1}{e_1(b,a)-1}\int_a^b e_1(s,a)g(s)\Delta s. \tag{2.16}$$

Maintenant en substituant (3.10) à (3.9), on obtient

$$\begin{aligned} x(t) &= e_1(a,t)\left(\frac{1}{e_1(b,a)-1}\int_a^b e_1(s,a)g(s)\Delta s + \int_a^t e_1(s,a)g(s)\Delta s\right) \\ &= \frac{1}{e_1(t,a)}\left(\frac{1}{e_1(b,a)-1}\int_a^b e_1(s,a)g(s)\Delta s + \int_a^t e_1(s,a)g(s)\Delta s\right). \end{aligned}$$

En suivant un raisonnement similaire à la section précédente, nous pouvons obtenir le théorème d'existence suivant.

Théorème 2.2. *Soit $f : \mathbb{T}^k \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.*
Si $\gamma, \delta \in C^1_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ sont respectivement sous et sur solutions de (2.1)(2.3) tel que $\gamma(t) \leq \delta(t)$, pour tout $t \in \mathbb{T}$, sur $\mathbb{T}$, alors le problème (2.1)(2.3) admet une solution $x \in C^1_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$, telle que

$$\gamma(t) \leq x(t) \leq \delta(t) \ \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}.$$

Pour y arriver, il suffit d'utiliser le problème modifié suivant :

$$\begin{cases} x^{\Delta}(t) + x(\sigma(t)) = f(t, \overline{x}(\sigma(t))) + \overline{x}(\sigma(t)), \quad t \in \mathbb{T}^k, \\ x(a) = x(b), \end{cases} \tag{2.17}$$

où

$$\overline{x}(t) = \max\Big\{\gamma(t),\ \min\{x(t), \delta(t)\}\Big\}, \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{T}. \tag{2.18}$$

Il est clair qu'une solution x de (2.17) telle que $\gamma(t) \leq x(t) \leq \delta(t)$ pour tout $t \in \mathbb{T}$ (c-à-d. $x \in [\gamma, \delta]$) est une solution de (2.1)(2.3).
Ensuite, on démontre que l'opérateur $\mathcal{B}_2 : C(\mathbb{T}, \mathbb{R}) \to C(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ tel que

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_2(x)(t) = e_1(a,t)\Bigg(&\frac{1}{e_1(b,a)-1}\int_a^b e_1(s,a)\left(f(s, \overline{x}(\sigma(s))) + \overline{x}(\sigma(s))\right)\Delta s \\ &+ \int_a^t e_1(s,a)\left(f(s, \overline{x}(\sigma(s))) + \overline{x}(\sigma(s))\right)\Delta s\Bigg), \end{aligned}$$

est compact. Finalement, on démontre que toute solution du problème 2.17 est élément de $[\delta, \gamma]$.

2.4 Exemples

Dans cette partie nous donnons quelques exemples d'applications.

Exemple 2.4.1. *Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps bornée. On considère le problème à valeur initiale suivant :*

$$\begin{cases} x^{\Delta}(t) = -\dfrac{x^3(t)}{2} + \cos(\frac{\pi}{2}x(t)) + \dfrac{1-t}{4}, \text{ pour tout } t \in \ [0,1[_{\mathbb{T}}, \\ x(0) = \dfrac{1}{2}. \end{cases} \tag{2.19}$$

Ici $f(t,x(t)) = -\dfrac{x^3(t)}{2} + \cos(\frac{\pi}{2}x(t)) + \dfrac{1-t}{4}$*. Il est clair que* f *est une fonction continue sur* $[0,1]_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R}$ *et* $\gamma(t) = -1$*,* $\delta(t) = 1$*, sont respectivement sous et sur-solutions de* (2.19)*, avec* $\gamma(t) \leq \delta(t)$ *pour* $t\,[0,1]_{\mathbb{T}}$*. En effet,*

$$\begin{cases} \gamma^{\Delta}(t) = 0 \leq f(t,\gamma(t)) = \dfrac{3-t}{4}, \quad \text{pour tout } t \in [0,1[_{\mathbb{T}} \quad \text{et } \gamma(0) = -1 \leq \dfrac{1}{2}, \\ \delta^{\Delta}(t) = 0 \geq f(t,\delta(t)) = -\dfrac{1+t}{4} \quad \text{pour tout } t \in [0,1[_{\mathbb{T}} \quad \text{et } \delta(0) = 1 \geq \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Le Theoreme 2.1 *implique que le problème (2.19) admet une solution* $x \in C^1_{rd}([0,1]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ *telle que*

$$-1 \leq x(t) \leq 1 \text{ pour tout } t \in [0,1]_{\mathbb{T}}.$$

Exemple 2.4.2. *On considère le problème périodique suivant :*

$$\begin{cases} x^{'}(t) = \dfrac{-x(t)}{1+\sin^2(\pi x(t)}, \text{ pour tout } t \in= [1,2[, \\ x(1) = x(2). \end{cases} \tag{2.20}$$

Ici $\mathbb{T} = [1,2]$ *est un intervalle réel,* $\alpha = 1$ *et* $f(t,x(t)) = \dfrac{-x(t)}{1+\sin^2(\pi x(t)}$*. Il est clair que* f *est une fonction continue sur* $[1,2] \times \mathbb{R}$ *et* $\gamma(t) = -1$*,* $\delta(t) = 1$*, sont respectivement sous et sur-solutions de* (2.20)*, avec* $\gamma(t) \leq \delta(t)$ *pour* $t \in [1,2]$*. En effet,*

$$\begin{cases} \gamma^{'}(t) = 0 \leq f(t,\gamma(t)) = 1, \quad \text{pour tout } t \in [1,2[\quad \text{et } \gamma(1) \leq \gamma(2), \\ \delta^{'}(t) = 0 \geq f(t,\delta(t)) = -1 \quad \text{pour tout } t \in [1,2[\quad \text{et } \delta(1) = 1 \geq \delta(2). \end{cases}$$

Le Theoreme 2.2 *implique que le problème (2.20) admet une solution* $x \in C^1([1,2],\mathbb{R})$ *telle que*

$$-1 \leq x(t) \leq 1 \text{ pour tout } t \in [1,2].$$

Chapitre 3

Existence de solutions pour des équations dynamiques fractionnaires conformes sur les échelles de temps

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions l'existence de solutions pour d'équation dynamique fractionnaire conforme non-linéaire sur les échelles de temps suivante :

$$x_{\Delta}^{(\alpha)}(t) = f(t, x^{\sigma}(t)), \qquad \text{pour tout } t \in I = [a, b]_{\mathbb{T}}, \tag{3.1}$$

sataisfont l'une des conditions de bord suivantes (condition de Cauchy ou condition périodique) :

$$x(a) = x_0, \tag{3.2}$$

$$x(a) = x(\sigma(b)). \tag{3.3}$$

Où, $\mathbb{T}$ est une échelle de temps bornée, $J = [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}$ avec $a, b \in \mathbb{T}$, $0 \leq a < b$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_{\Delta}^{(\alpha)}(t)$ désigne la delta dérivée fractionnaire conforme de x d'ordre $\alpha \in (0, 1]$ en t et $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

À l'aide de la méthode des sous et sur-solutions et le théorème de point fixe de Schauder, on établit des résultats d'existence pour les deux problèmes

$(3.1), (3.2)$ et $(3.1), (3.3)$.

- L'existence de solutions pour le problème $(3.1), (3.2)$ (resp., $(3.1), (3.3)$) avec $\alpha = 1$ a été obtenue dans le Chapitre 2 :

$$x^{\Delta}(t) = f(t, x^{\sigma}(t)), \text{ pour tout } t \in I = \mathbb{T}^k, \ x(a) = x_0 \ (resp., x(a) = x(b)).$$

- La méthode de sous- et sur-solution a été appliquée pour le problème $(3.1), (3.2)$ (resp., $(3.1), (3.3)$) avec $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ par Hattabi et al. [16] :

$$x^{\alpha}(t) = f(t, x(t)), \quad \text{pour tout } t \in [a, b], \ 0 < a < b, \ x(a) = x_0 \ (resp., x(a) = x(b)).$$

- La méthode de tube solution (cette méthode est équivalente à la méthode de sous- et sur-solution) a été appliquée pour le problème $(3.1), (3.2)$, par Khel et al. [20].

- Dans [9], Bendouma et al. ont établi un théorème d'existence pour l'équation dynamique fractionnaire conforme (3.1) avec des conditions fonctionnelles non linéaires aux bords :

$$x^{\Delta}(t) = f(t, x^{\sigma}(t)), \quad \text{pour} \quad t \in I, \quad H(x; x^{\sigma}(b)) = 0 \text{ ou } \ B(x(a), x) = 0,$$

3.2 Résultat d'existence pour le problème (3.1)(3.3)

Dans cette section, nous allons prouver l'existence d'une solution qui est localisée entre la sur et la sous-solution du problème (3.1),(3.3).

Définition 3.1. *Une fonction $x \in C_{rd}^{\alpha}(J, \mathbb{R})$ est dite solution de* (3.1)(3.2) *si elle satisfait l'équation (3.1) sur I, et la condition (3.2).*

Nous introduisons maintenant les notions de sur et sous-solutions de ce problème.

Définition 3.2. *Une fonction $w \in C_{rd}^{\alpha}(J, \mathbb{R})$ est appelée sur-solution de* (3.1)(3.3)*, si*

$$\begin{cases} w_{\Delta}^{(\alpha)}(t) \geq f(t, w^{\sigma}(t)), & \textit{pour tout} \ \ t \in I, \\ w(a) \geq w(\sigma(b)). \end{cases} \tag{3.4}$$

De même façon, une fonction $v \in C^\alpha(I,\mathbb{R})$ *est appelée sous-solution de* (3.1)(3.3) *si*

$$\begin{cases} v_\Delta^{(\alpha)}(t) \leq f(t, v^\sigma(t)), \quad \text{pour tout } t \in I, \\ v(a) \leq v(\sigma(b)). \end{cases} \tag{3.5}$$

Nous définissons l'ensemble (le secteur) :

$$[v,w] = \{x \in C_{rd}^\alpha(J,\mathbb{R}) : v(t) \leq x(t) \leq w(t), \text{ pour tout } t \in J\}.$$

Lemme 3.1. *Le problème périodique*

$$\begin{cases} x_\Delta^{(\alpha)}(t) + \alpha t^{1-\alpha}\, x(\sigma(t)) = g(t), \quad t \in I; \\ x(a) = x(\sigma(b)). \end{cases} \tag{3.6}$$

avec $e_\alpha(\sigma(b),a) \neq 1$ *et* $g \in C_{rd}^\alpha(I,\mathbb{R})$, *admet une solution unique* $x \in C_{rd}^\alpha(J,\mathbb{R})$, *donnée par*

$$x(t) := e_\alpha(a,t)\left(\frac{1}{e_\alpha(\sigma(b),a)-1}\int_{[a,\sigma(b)]_\mathbb{T}} e_\alpha(s,a)g(s)\Delta^\alpha s + \int_{[a,t]_\mathbb{T}} e_\alpha(s,a)g(s)\Delta^\alpha s\right), \quad t \in J, \tag{3.7}$$

Preuve.
Soit x est solution du problème (3.6), on a :

$$\Big[x(t)e_\alpha(t,a)\Big]_\Delta^{(\alpha)} = x_\Delta^{(\alpha)}(t)e_\alpha(t,a) + \alpha t^{1-\alpha} e_\alpha(t,a)x(\sigma(t)),$$
$$= e_\alpha(t,a)g(t).$$

On intégré les deux cotés de cette égalité sur $[a,t]_\mathbb{T}$ et on obtient

$$x(t)e_\alpha(t,a) - x(a) = \int_{[a,t]_\mathbb{T}} e_\alpha(s,a)g(s)\Delta^\alpha s. \tag{3.8}$$

Donc,

$$x(t) = e_\alpha(a,t)\left(x(a) + \int_{[a,t]_\mathbb{T}} e_\alpha(s,a)g(s)\Delta^\alpha s\right) \tag{3.9}$$

Par (3.6) et (3.9), on obtient

$$x(a) = \frac{1}{e_\alpha(\sigma(b),a)-1}\int_{[a,\sigma(b)]_\mathbb{T}} e_\alpha(s,a)g(s)\Delta^\alpha s. \tag{3.10}$$

Maintenant en substituant (3.10) à (3.9), on obtient

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{e_\alpha(a,t)}{e_\alpha(\sigma(b),a)-1}\int_{[a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}}} e_\alpha(s,a)g(s)\Delta^\alpha s + e_\alpha(a,t)\int_{[a,t]_{\mathbb{T}}} e_\alpha(s,a)g(s)\Delta^\alpha s \\ &= e_\alpha(a,t)\left(\frac{1}{e_\alpha(\sigma(b),a)-1}\int_{[a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}}} e_\alpha(s,a)g(s)\Delta^\alpha s + \int_{[a,t]_{\mathbb{T}}} e_\alpha(s,a)g(s)\Delta^\alpha s\right). \end{aligned}$$

Pour, l'étude de ce problème nous considérons le problème modifié suivant :

$$\begin{cases} x_\Delta^{(\alpha)}(t) + \alpha\, t^{1-\alpha}\, x(\sigma(t)) = f(t, \overline{x}(\sigma(t))) + \alpha\, t^{1-\alpha}\, \overline{x}(\sigma(t)), \quad t \in I, \\ x(a) = x(\sigma(b)), \end{cases} \tag{3.11}$$

où

$$\overline{x}(t) = \begin{cases} v(t), & \text{si } x(t) < v(t), \\ x(t), & \text{si } v(t) \leq x(t) \leq w(t), \\ w(t), & \text{si } x(t) > w(t), \end{cases} \tag{3.12}$$

avec $v(t) \leq w(t)$ pour tout $t \in J$.
Il est clair qu'une solution x de (3.11) telle que $v(t) \leq x(t) \leq w(t)$ pour tout $t \in J$ (c-à-d. $x \in [v,w]$) est une solution de (3.1)(3.3).

Définissons l'opérateur $\mathcal{H}_2 : C(J,\mathbb{R}) \to C(J,\mathbb{R})$ par

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_2(x)(t) = e_\alpha(a,t)\Bigg(&\frac{1}{e_\alpha(\sigma(b),a)-1}\int_{[a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}}} e_\alpha(s,a)\left(f(s,\overline{x}(\sigma(s))) + \alpha\, s^{1-\alpha}\, \overline{x}(\sigma(s))\right)\Delta^\alpha s \\ &+ \int_{[a,t]_{\mathbb{T}}} e_\alpha(s,a)\left(f(s,\overline{x}(\sigma(s))) + \alpha\, s^{1-\alpha}\, \overline{x}(\sigma(s))\right)\Delta^\alpha s\Bigg). \end{aligned}$$

.

D'après le Lemme 3.1, les points fixes de l'opérateur $\mathcal{H}_2$ sont les solutions du problème (3.11).

Proposition 3.1. *Soit $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Si $v, w \in C_{rd}^\alpha(J,\mathbb{R})$ sont respectivement sous et sur solutions de (3.1)(3.3), tel que $v \leq w$ sur J, alors l'opérateur $\mathcal{H}_2$ est compact.*

Preuve : La preuve est donnée en plusieures étapes.
Etape 1 : Montrons tout d'abord la continuité de l'opérateur $\mathcal{H}_2$.

Soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $C(J,\mathbb{R})$ convergeant vers $x \in C(J,\mathbb{R})$. Alors pour tout $t \in J$, on a :

$$\begin{aligned}
&\Big|\mathcal{H}_2(x_n(t)) - \mathcal{H}_2(x(t))\Big| \\
&\quad \leq |e_\alpha(a,t)|\Big[\frac{1}{e_\alpha(\sigma(b),a)-1}\int_{[a,\sigma(b))_{\mathbb{T}}} |e_\alpha(s,a)|\Big(\,|f(s,\overline{x_n}(\sigma(s))) - f(s,\overline{x}(\sigma(s)))| \\
&\qquad\qquad + \alpha|s^{1-\alpha}||\overline{x_n}(\sigma(s)) - \overline{x}(\sigma(s))|\Big)\Delta^\alpha s \\
&\qquad + \int_{[a,t)_{\mathbb{T}}} |e_\alpha(s,a)|\Big(\,|f(s,\overline{x_n}(\sigma(s))) - f(s,\overline{x}(\sigma(s)))| \\
&\qquad\qquad + \alpha|s^{1-\alpha}||\overline{x_n}(\sigma(s)) - \overline{x}(\sigma(s))|\Big)\Delta^\alpha s\Big] \\
&\quad \leq M^2G(K+1)\int_{[a,\sigma(b))_{\mathbb{T}}} \Big(|f(s,\overline{x_n}(\sigma(s))) - f(s,\overline{x}(\sigma(s)))| \\
&\qquad\qquad + D|\overline{x_n}(\sigma(s)) - \overline{x}(\sigma(s))|\Big)\Delta s.
\end{aligned}$$

où $M := \max_{s,t\in J}|e_\alpha(s,t)|$, $D = \max_{s\in J}|s^{1-\alpha}|$, $G = \max_{s\in J}|s^{\alpha-1}|$ et $K = \dfrac{1}{e_\alpha(\sigma(b),a)-1}$. Puisqu'il existe une constante $R > 0$ tel que $\|\overline{x}\|_{C(J,\mathbb{R})} < R$, il existe un indice N tell que $\|\overline{x_n}\|_{C(J,\mathbb{R})} \leq R$ pour tout $n > N$. Ainsi, f uniformément continue sur $J \times B_R(0)$. Alors pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe un $\delta > 0$ tel que $x, y \in \mathbb{R}$ où

$$|y-x| < \delta < \frac{\varepsilon}{2DM^2G(K+1)(\sigma(b)-a)}, |f(s,y)-f(s,x)| < \frac{\varepsilon}{2M^2G(K+1)(\sigma(b)-a)},$$

pour tout $s \in I$. Par hypothèse, il est possible de trouver un indice $\hat{N} > N$ tel que $\|\overline{x_n} - \overline{x}\|_{C(J,\mathbb{R})} < \delta$ pour $n > \hat{N}$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned}
&\Big|\mathcal{H}_2(x_n(t)) - \mathcal{H}_2(x(t))\Big| \\
&\quad \leq M^2G(K+1)\int_{[a,\sigma(b))_{\mathbb{T}}} \left(\frac{\varepsilon}{2M^2G(K+1)(\sigma(b)-a)} + \frac{D\varepsilon}{2DM^2G(K+1)(\sigma(b)-a)}\right)\Delta s \\
&\quad \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

ce qui nous convainc de la continuité de $\mathcal{H}_2$.

Etape 2 : L'ensemble $\mathcal{H}_2(C(J,\mathbb{R}))$ est relativement compact.

Considérons une suite $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{H}_2(C(J,\mathbb{R}))$ pour tout $n \in N$ il existe une suite $(x_n)_{n\in N} \in C(J,\mathbb{R})$ tell que $y_n = \mathcal{H}_2(x_n(t))$ pour tout $n \in N$. Nous avons

$$\Big|\mathcal{H}_2(x_n)(t)\Big| \leq M^2G(K+1)\int_{[a,\sigma(b))_{\mathbb{T}}}\Big(|f(s,\overline{x_n}(\sigma(s)))| + D|\overline{x_n}(\sigma(s))|\Big)\Delta s.$$

Puisque

$$|\overline{x}_n(\sigma(s))| \leq R, \qquad \text{pour tout } s \in I \text{ et tout } n \in \mathbb{N}.$$

Comme $I \times \overline{B}(0,R)$ est un ensemble sur $J \times \mathbb{R}$ et f étant continue sur $I \times \overline{B}(0,R)$, nous pouvons déduire l'existance d'une constante $A > 0$, telle que

$$|f(s,\overline{x}_n(\sigma(s))| \leq A, \qquad \text{pour tout } s \in I \quad \text{et} \quad \text{tout } n \in \mathbb{N}.$$

Donc,

$$|y_n(t)| = |\mathcal{H}_2(x_n)(t)| \leq M^2G(K+1)(A+DR)(\sigma(b)-a) = L < +\infty.$$

Ainsi, la suite $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée sur $\mathcal{C}(J,\mathbb{R})$.
D'autre part, pour tout $t_1 < t_2 \in J$, on a

$$\begin{aligned}
&\Big|\mathcal{H}_2(x_n)(t_2) - \mathcal{H}_2(x_n)(t_1)\Big| \\
&\leq MKG\,|e_\alpha(a,t_2) - e_\alpha(a,t_1)|\int_{[a,\sigma(b))_{\mathbb{T}}}\Big(|f(s,\overline{x_n}(\sigma(s)))| + D\,|\overline{x_n}(\sigma(s))|\Big)\Delta s \\
&\quad + MG\,|e_\alpha(a,t_2) - e_\alpha(a,t_1)|\Big(\int_{[a,t_1]_{\mathbb{T}}}|f(s,\overline{x_n}(\sigma(s)))| + D\,|\overline{x_n}(\sigma(s))|\Big)\Delta s \\
&\quad + M^2G\int_{[t_1,t_2]_{\mathbb{T}}}\Big(|f(s,\overline{x_n}(\sigma(s)))| + D|\overline{x_n}(\sigma(s))|\Big)\Delta s \\
&\leq MG(K+1)\,|e_\alpha(a,t_2) - e_\alpha(a,t_1)|\int_{[a,\sigma(b))_{\mathbb{T}}}\Big(|f(s,\overline{x_n}(\sigma(s)))| + D\,|\overline{x_n}(\sigma(s))|\Big)\Delta s \\
&\quad + MG|e_\alpha(a,t_2)|\int_{[t_1,t_2]_{\mathbb{T}}}\Big(|f(s,\overline{x_n}(\sigma(s)))| + D|\overline{x_n}(\sigma(s))|\Big)\Delta s \\
&\leq MG(K+1)(A+DR)(\sigma(b)-a)|e_\alpha(a,t_2) - e_\alpha(a,t_1)| \\
&\qquad\qquad + M^2(A+DR)(\sigma(b)-a)|t_2-t_1|.
\end{aligned}$$

On a $\Big|\mathcal{H}_2(x_n)(t_2) - \mathcal{H}_2(x_n)(t_1)\Big| \to 0$ quand $t_2 - t_1 \to 0$. Donc, la suite $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue.
Par le théorème d'Arzelà-Ascoli, on obtient que l'ensemble $\mathcal{H}_2(C(J,\mathbb{R}))$ est

relativement compacte dans $C(J,\mathbb{R})$. Ainsi, $\mathcal{H}_2$ est compacte.

Nous pouvons maintenant démontrer le résultat d'existence suivant.

Théorème 3.1. *Soit $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $v, w \in C^{\alpha}_{rd}(J,\mathbb{R})$ sont respectivement sous et sur solutions de* (3.1)(3.3)*, tel que $v \leq w$ sur J, alors le problème* (3.1)(3.3) *admet une solution $x \in C^{\alpha}_{rd}(J,\mathbb{R})$, telle que $v(t) \leq x(t) \leq w(t)$ pour tout $t \in J$.*

Preuve.
Par la Proposition 3.1, l'opérateur $\mathcal{H}_2$ est compact. Ainsi, par le Théorème du point fixe de Schauder, $\mathcal{H}_2$ admet un point fixe. Le Lemme 3.1 nous assure que ce point fixe est une solution du problème (3.11). Il suffit donc de démontrer que pour toute solution x de (3.11), $x \in [v, w]$.
Soit $x \in C^{\alpha}_{rd}(J,\mathbb{R})$ la solution de (3.11), prouvons d'abord que :

$$v(t) \leq x(t), \quad \textit{pour tout } t \in J.$$

Procédons par l'absurde, il existe $t_1, t_2 \in J$, $t_1 < t_2$ tel que $v(t_1) = x(t_1)$ et

$$x(t) \leq v(t) \textit{ pour tout } t \in]t_1, t_2[.$$

D'aprés la définition de $\bar{x}$ on a

$$x^{(\alpha)}_{\Delta}(t) = f(t, v(\sigma(t))) + \alpha\ t^{1-\alpha}\ (v(\sigma(t)) - x(\sigma(t)))$$

Donc

$$x(t) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t} s^{\alpha-1}\Big[f(t, v(\sigma(t))) + \alpha\ t^{1-\alpha}\ (v(\sigma(t)) - x(\sigma(t)))\Big]\Delta s.$$

En utilusant le fait que v est une sous solution de (3.1)(3.3) (c'est à dire $v^{(\alpha)}_{\Delta}(s) \leq f(s, v(\sigma(s))))$, l'inégalité ci-dessus nous donne :

$$\begin{aligned} v(t) - v(t_1) &\leq \int_{t_1}^{t} s^{\alpha-1} f(s, v(\sigma(s)))\Delta s \\ &< \int_{t_1}^{t} s^{\alpha-1}\Big[f(s, v(\sigma(s))) + \alpha\ s^{1-\alpha}\ (v(\sigma(s)) - x(\sigma(s)))\Big]\Delta s \\ &= x(t) - x(t_1) < v(t) - v(t_1). \end{aligned}$$

C'est une contradiction. Donc $v(t) \leq x(t)$ *pour tout* $t \in J$.
En suivant un raisonnement similaire à la partie précédente, nous montrons maintenant que :

$$x(t) \leq w(t) \textit{ pour tout } t \in J.$$

Supposons qu'il existe $t_1, t_2 \in I, t_1 < t_2$ tel que $w(t_1) = x(t_1)$ et

$$x(t) \geq w(t) \textit{ pour tout } t \in]t_1, t_2[.$$

En utilusant la définition de $\bar{x}$ on a

$$x_\Delta^{(\alpha)}(t) = f(t, w(\sigma(t))) + \alpha\ t^{1-\alpha}\ (w(\sigma(t)) - x(\sigma(t))).$$

Donc

$$x(t) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t} s^{\alpha-1}\Big[f(s, w(\sigma(s))) - \alpha\ s^{1-\alpha}\ (x(\sigma(s)) - w(\sigma(s)))\Big]\Delta s.$$

En utilusant le fait que w est une sur solution de (3.1)(3.3) (c'est à dire $w_\Delta^{(\alpha)}(s) \geq f(s, w(\sigma(s)))$). On obtient donc

$$\begin{aligned} w(t) - w(t_1) &\geq \int_{t_1}^{t} s^{\alpha-1} f(s, w(\sigma(s)))\Delta s \\ &> \int_{t_1}^{t} s^{\alpha-1}\Big[f(s, w(s)) - \alpha\ s^{1-\alpha}\ (x(\sigma(s)) - w(\sigma(s)))\Big]\Delta s \\ &= x(t) - x(t_1) > w(t) - w(t_1). \end{aligned}$$

C'est une contradiction, donc : $w(t) \geq x(t)$ *pour tout* $t \in J$.
Ceci montre que le problème (3.11) à une solution dans $[v, w]$ qui est la solution de (3.1)(3.3).

3.3 Résultat d'existence pour le problème (3.1)(3.2)

Nous citons maintenant la défnition des sous et sur-solutions du problème (3.1)(3.2).

Définition 3.3. *On dit qu'une fonction* $w \in C_{rd}^{\alpha}(J, \mathbb{R})$ *est une sur-solution de* (3.1)(3.2)*, si*
(i) $w^{(\alpha)}(t) \geq f(t, w^{\sigma}(t))$, *pour tout* $t \in I$ *;*

(ii) $w(a) \geq x_0$.
De même, on dit qu'une fonction $v \in C^{\alpha}_{rd}(J, \mathbb{R})$ *est une sous-solution de* (3.1)(3.2) *si*
(i) $v^{(\alpha)}(t) \leq f(t, v^{\sigma}(t))$, *pour tout* $t \in I$ *;*
(ii) $v(a) \leq x_0$.

Nous définissons l'ensemble (le secteur) :

$$[v, w] = \{x \in C^{\alpha}_{rd}(J, \mathbb{R}) : v(t) \leq x(t) \leq w(t), \text{ pour tout } t \in J\}.$$

Lemme 3.2. *Le problème à valeur initiale*

$$\begin{cases} x^{(\alpha)}_{\Delta}(t) + \alpha t^{1-\alpha}\, x(\sigma(t)) = g(t), & t \in I; \\ x(a) = x_0. \end{cases} \tag{3.13}$$

avec $g \in C^{\alpha}_{rd}(I, \mathbb{R})$*, admet une solution unique* $x \in C^{\alpha}_{rd}(J, \mathbb{R})$*, donnée par*

$$x(t) := x_0 e_{\alpha}(a, t) + \int_{[a,t]_{\mathbb{T}}} e_{\alpha}(s, t) g(s) \Delta^{\alpha} s, \quad t \in J, \tag{3.14}$$

Preuve.
Soit x est solution du problème (3.13), on a :

$$\begin{aligned} \Big[x(t) e_{\alpha}(t, a)\Big]^{(\alpha)}_{\Delta} &= x^{(\alpha)}_{\Delta}(t) e_{\alpha}(t, a) + \alpha t^{1-\alpha} e_{\alpha}(t, a) x(\sigma(t)), \\ &= e_{\alpha}(t, a) g(t). \end{aligned}$$

On intégré les deux cotés de cette égalité sur $[a, t]_{\mathbb{T}}$ et on obtient

$$x(t) e_{\alpha}(t, a) - x(a) = \int_{[a,t]_{\mathbb{T}}} e_{\alpha}(s, a) g(s) \Delta^{\alpha} s. \tag{3.15}$$

D'ou

$$x(t) = e_{\alpha}(a, t) \left(x(a) + \int_{[a,t]_{\mathbb{T}}} e_{\alpha}(s, a) g(s) \Delta^{\alpha} s \right). \tag{3.16}$$

Donc,

$$x(t) = x_0 e_{\alpha}(a, t) + \int_{[a,t]_{\mathbb{T}}} e_{\alpha}(s, t) g(s) \Delta^{\alpha} s. \tag{3.17}$$

Pour, l'étude de ce problème nous considérons le problème modifié suivant :

$$\begin{cases} x_{\Delta}^{(\alpha)}(t) + \alpha\ t^{1-\alpha}\ x(\sigma(t)) = f(t, \overline{x}(\sigma(t))) + \alpha\ t^{1-\alpha}\ \overline{x}(\sigma(t)), \quad t \in I, \\ x(a) = x_0, \end{cases} \tag{3.18}$$

où

$$\overline{x}(t) = \begin{cases} v(t), & \text{si } x(t) < v(t), \\ x(t), & \text{si } v(t) \leq x(t) \leq w(t), \\ w(t), & \text{si } x(t) > w(t), \end{cases} \tag{3.19}$$

avec $v(t) \leq w(t)$ pour tout $t \in J$.
Il est clair qu'une solution x de (3.18) telle que $v(t) \leq x(t) \leq w(t)$ pour tout $t \in J$ (c-à-d. $x \in [v, w]$) est une solution de (3.1)(3.2).

Définissons l'opérateur $\mathcal{H}_1 : C(I, \mathbb{R}) \to C(I, \mathbb{R})$ par :

$$\mathcal{H}_1(x)(t) = \int_{[a,t]_{\mathbb{T}}} e_{\alpha}(s,t) \left(f(s, \overline{x}(\sigma(s))) + \alpha\ s^{1-\alpha}\ \overline{x}(\sigma(s)) \right) \Delta^{\alpha} s + x_0 e_{\alpha}(a,t)$$

D'après le Lemme 3.2, les points fixes de l'opérateur $\mathcal{H}_1$ sont les solutions du problème (3.18).

En utilisant un raisonnement similaire à la preuve du Proposition 3.1, on peut aussi obtenir le résultat suivant.

Proposition 3.2. *Soit $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Si $v, w \in C_{rd}^{\alpha}(J, \mathbb{R})$ sont respectivement sous et sur solutions de (3.1)(3.2), tel que $v \leq w$ sur J, alors l'opérateur $\mathcal{H}_1$ est compact.*

En suivant un raisonnement similaire au Théorème 3.1, nous pouvons obtenir le théorème d'existence suivant.

Théorème 3.2. *Soit $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $v, w \in C_{rd}^{\alpha}(J, \mathbb{R})$ sont respectivement sous et sur solutions de* (3.1)(3.2)*, tel que $v \leq w$ sur J, alors le problème* (3.1)(3.2) *admet une solution $x \in C_{rd}^{\alpha}(J, \mathbb{R})$, telle que $v(t) \leq x(t) \leq w(t)$ pour tout $t \in J$.*

Preuve.
Par la Proposition 3.2, l'opérateur $\mathcal{H}_1$ est compact. Ainsi, par le Théorème

du point fixe de Schauder, $\mathcal{H}_1$ admet un point fixe. Le Lemme 3.2 nous assure que ce point fixe est une solution du problème (3.18). Il suffit donc de démontrer que pour toute solution x de (3.18), $x \in [v, w]$.
Soit $x \in C^{\alpha}_{rd}(J, \mathbb{R})$ la solution de (3.18), on prouve que :

$$v(t) \leq x(t), \quad \textit{pour tout } t \in J.$$

et

$$x(t) \leq w(t), \quad \textit{pour tout } t \in J.$$

Ceci montre que le problème (3.18) admet une solution x sataisfait $v(t) \leq x(t) \leq w(t)$ pour tout $t \in J$ qui est une solution du problème (3.1)(3.2).

Remarque 3.1. *Les résultats (Théorèmes* 3.2 *et* 3.1*) de Chapitre 3 généralisent les résultats précédents (Théorèmes* 2.1 *et* 2.2*) donnés dans le Chapitre 2 pour l'équation dynamique non-linéaire du premier ordre :*

$$x^{\Delta}(t) = f(t, x^{\sigma}(t)), \ \textit{pour tout } t \in I.$$

3.4 Exemples

Dans cette partie nous donnons quelques exemples d'applications.

Exemple 3.4.1. *On considère le problème périodique suivant :*

$$\begin{cases} x_{\Delta}^{(\frac{1}{3})}(t) = \dfrac{-t + 2 - x^7(\sigma(t))}{\sqrt{t}}, & t \in I = [1, 3]_{\mathbb{T}}, \\ x(1) = x(\sigma(3)). \end{cases} \tag{3.20}$$

Ici, $\alpha = \frac{1}{3}$ *et* $f(t, x) = \dfrac{-t + 2 - x^7(\sigma(t))}{\sqrt{t}}$ *est une fonction continue sur* $[1, 3]_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R}$. *On peut vérifier que* $\gamma = -1$ *et* $\delta = 1$ *sont respectivement sous et sur-solutions de* (3.20), *avec* $\gamma(t) \leq \delta(t)$ *pour* $t \in [1, \sigma(3)]$. *En effet,*

$$\begin{cases} \gamma_{\Delta}^{(\frac{1}{3})}(t) = 0 \leq f(t, \gamma^{\sigma}(t)) = \dfrac{3 - t}{\sqrt{t}}, \quad t \in I = [1, 3]_{\mathbb{T}}, \quad \gamma(1) \leq \gamma(\sigma(3)), \\ \delta_{\Delta}^{(\frac{1}{3})}(t) = 0 \geq f(t, \delta^{\sigma}(t)) = \dfrac{1 - t}{\sqrt{t}}, \quad t \in I = [1, 3]_{\mathbb{T}}, \quad \delta(1) \geq \delta(\sigma(3)), \end{cases}$$

Alors, le Theoreme 3.1 *implique que le problème* (3.20) *admet une solution* $x \in C_{rd}^{\frac{1}{3}}([1,\sigma(3)]_{\mathbb{T}},\mathbb{R})$ *telle que*

$$-1 \leq x(t) \leq 1 \text{ pour tout } t \in [1,\sigma(3)]_{\mathbb{T}}.$$

Exemple 3.4.2. *On considère le problème périodique suivant :*

$$\begin{cases} x_{\Delta}^{(\alpha)}(t) = -\dfrac{x^3(t)}{2} + \cos(\frac{\pi}{2}x(t)) + \sqrt{e^t}, \quad \text{pour tout} \quad t \in I = [0,N]_{\mathbb{Z}}, \;\; N \in \mathbb{Z}^* \\ x(0) = x(N+1). \end{cases} \tag{3.21}$$

Ici $0 < \alpha \leq 1$, $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ *et* $f(t,x(t)) = -\dfrac{x^3(t)}{2} + \cos(\frac{\pi}{2}x(t)) + \sqrt{e^t}$. *Il est clair que* f *est une fonction continue sur* $[0,N]_{\mathbb{Z}} \times \mathbb{R}$. *On peut vérifier que* $\gamma = 0$ *et* $\delta = 2$ *sont respectivement sous et sur-solutions de* (3.21), *avec* $\gamma(t) \leq \delta(t)$ *pour* $t \in [0,N+1]_{\mathbb{Z}}$. *En effet,*

$$\begin{cases} \gamma_{\Delta}^{(\alpha)}(t) = 0 \leq f(t,\gamma^{\sigma}(t)) = 1 + \sqrt{e^t}, \quad t \in I = [0,N]_{\mathbb{Z}}, \quad \gamma(0) \leq \gamma(N+1), \\ \delta_{\Delta}^{(\alpha)}(t)(t) = 0 \geq f(t,\delta^{\sigma}(t)) = -5 + \sqrt{e^t}, \quad t \in I = [0,N]_{\mathbb{Z}}, \quad \delta(0) \geq \delta(N+1). \end{cases}$$

D'aprés le Théorème 3.1, *le problème* (3.21) *admet une solution* $x \in C_{rd}^{\alpha}([0,N+1]_{\mathbb{Z}},\mathbb{R})$ *telle que* $0 \leq x(t) \leq 2$ *pour tout* $t \in [0,N+1]_{\mathbb{Z}}$.

Remarque 3.2. *Si* $\alpha = 1$, *on a :*

$$(3.21) \Leftrightarrow \begin{cases} x^{\Delta}(t) = \Delta x(t) = x(t+1) - x(t) = -\dfrac{x^3(t)}{2} + \cos(\frac{\pi}{2}x(t)) + \sqrt{e^t}, \; t \in I, \\ x(0) = x(N+1), \end{cases}$$

d'aprés le Théorème 3.1, *le problème* (3.21) *admet une solution* $x \in C_{rd}^{1}([0,N+1]_{\mathbb{Z}},\mathbb{R})$ *telle que* $0 \leq x(t) \leq 2$ *pour tout* $t \in [0,N+1]_{\mathbb{Z}}$.

Exemple 3.4.3. On considère le problème à valeur initiale suivant :

$$\begin{cases} x^{(\frac{1}{4})}(t) = -\frac{1}{2}\sin^3(\frac{\pi}{4}x(t)) - t + \frac{3}{2} \quad \text{pour tout} \quad t \in [1,2], \\ x(1) = -1. \end{cases} \tag{3.22}$$

Ici, $\mathbb{T} = [1,2]$ est un intervalle réel, $\alpha = \frac{1}{4}$ et $f(t,x) = -\frac{1}{2}\sin^3(\frac{\pi}{4}x(t)) - t + \frac{3}{2}$. Il est clair que f est une fonction continue sur $[1,2] \times \mathbb{R}$. On peut vérifier que

$v = -2$ et $w = 2$ sont respectivement sous et sur-solutions de (3.22), avec $v(t) \leq w(t)$ pour $t \in [1, 2]$. En effet,

$$v^{(\frac{1}{4})}(t) = 0 \leq f(t, v(t)) = 2 - t,\ t \in I, \quad v(1) = -2 \leq -1,$$

et

$$w^{(\frac{1}{4})}(t) = 0 \geq f(t, w(t)) = 1 - t,\ t \in I, \quad w(1) = 2 \geq -1,$$

Alors, le Theoreme 3.2 implique que le problème (3.22) admet une solution $x \in C^{\frac{1}{4}}([1, 2], \mathbb{R})$ telle que

$$-2 \leq x(t) \leq 2 \text{ pour tout } t \in [1, 2].$$

Conclusion

Notre but principal, dans ce mémoire, est de présenter des résultats d'existence de solutions pour des équations différentielles non-linéaires du premier ordre sur les échelles de temps et pour des équations différentielles fractionnaires conformes non-linéaires d'ordre $\alpha \in]0,1]$ sur les échelles de temps avec des conditions de bord. Ces résultats ont été obtenus grâce a la méthode des sous et sur solutions et le théorème de point fixe de Schauder. La technique utilisée est de transformer le problème initial en un problème de point fixe de sorte que si l'on prouve qu'une solution du problème modifié existe, elle est aussi solution du problème initial (original).

Bibliographie

[1] T. Abdeljawad, *On conformable fractional calculus*, J. Comput. Appl. Math. **279** (2015), 57–66.

[2] R.P. Agarwal, M. Bohner and W-T. Li, *Nonoscillation and oscillation : Theory for fonctional differential equations*, Mercel Dekkar, Inc., New York, 2004.

[3] D. Anderson, J. Bullock, L. Erbe, A. Peterson and H. Tran, *Nabla dynamic equations on time scales,* Panamer. Math. J. 13 (2003), no. 1, 1-47.

[4] D.R. Anderson and D.J. Ulness, *Properties of the Katugampola fractional derivative with potential application in quantum mechanics*, J. Math. Phys. **56** (2015), no. 6, 063502, 18 pp.

[5] H. Batarfi, J. Losada, J.J. Nieto and W. Shammakh, *Three-Point Boundary Value Problems for Conformable Fractional Differential Equations*, J. Funct. Spaces. **2015** (2015), Art. ID 706383, 6 pp.

[6] B. Bendouma, A. Cabada and A. Hammoudi, *Existence of solutions for conformable fractional problems with nonlinear functional boundary conditions*, Malaya Journal of Mathematik. **7** (2019), no. 4, 700-708.

[7] B. Bendouma, A. Cabada and A. Hammoudi, *Existence results for systems of conformable fractional differential equations,* Archivum Mathematicum (BRNO). **55** (2019), 69-83.

[8] B. Bendouma, A. Benaissa Cherif and A. Hammoudi, *Systems of first-order nabla dynamic equations on time scales*, Malaya Journal of Mathematik. **6** (2018), no. 4, 757-765.

[9] B. Bendouma and A. Hammoudi. Nonlinear functional boundary value problems for conformable fractional dynamic equations on time scales. *Mediterr. J. Math.* https ://doi.org/10.1007/s00009-019-1302-5. 16–25, 2019.

[10] B. Bendouma and A. Hammoudi, *A nabla conformable fractional calculus on time scales*, Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications. **7** (2019), no. 1, 202-216.

[11] N. Benkhettou, S. Hassani and D.F.M. Torres, *A conformable fractional calculus on arbitrary time scales*, J. King Saud Univ. Sci. **28** (2016), no. 1, 93-98.

[12] M. Bohner and A. Peterson, *Dynamic equations on time scales.* Birkhäuser Boston. Boston, MA, 2001.

[13] M. Bohner and A. Peterson, *Advances in dynamic equations on time scales.* Birkhäuser Boston., Boston, MA, 2003.

[14] A. Cabada and D.R. Vivero, *Existence of solutions of first–order dynamic equations with nonlinear functional boundary value conditions*, Nonlinear Anal. Theory Methods Appl. **63** (2005), no. 5–7, 697–706.

[15] A. Granas and J. Dugundji, *Fixed Point Theory.* Springer Monographs in Mathematics. Springer, New York 2003.

[16] A. Hattabi, M. Kadari and M. Khaoui, *Méthode des sur et sous solutions appliquée aux équations différentielles fractionnaires conformes,* Mémoire soutenu (2021-2022), Université Ibn Khaldoun de Tiaret.

[17] S. Hilger, *Analysis on measure chains a unified approach to continuous and discrete calculus,* Results Math.18 (1990), 18-56.

[18] T. Jankowski, *Boundary problems for fractional differential equations*, Appl. Math. Lett. **28** (2014), 14-19.

[19] R. Khalil, M. Al Horani, A. Yousef, M. Sababheh, A new definition of fractional derivative, J. Comput. Appl. Math. **264** (2014), 65–70.

[20] R. Khel and Z. Khedim, *Existence de solutions pour des équations dynamiques fractionnaires conformes sur les échelles de temps,* Mémoire soutenu (2019-2020), Université Ibn Khaldoun de Tiaret.

[21] A. Kilbas, M.H. Srivastava and J.J. Trujillo, *Theory and Application of Fractional Differential Equations*, North Holland Mathematics Studies 204, 2006.

[22] R.L. Magin, *Fractional calculus in Bioengineering*, CR in Biomedical Engineering **32** (2004), no. 1, 1–104.

[23] K.S. Miller and B. Ross, *Fractional difference calculus*, Proceedings of the International Symposium on Univalent Functions, Fractional Calculus and Their Applications, Nihon University, Koriyama, Japan, (1989), 139-152.

[24] D. O'Regan, *Existence theory for nonlinear ordinary differential equations*, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1997.

[25] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press : San Diego, 1999.

[26] R. Precup, *Methods in Nonlinear Integral Equations*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, 2002.

[27] S.G. Samko, A.A. Kilbas and O.I. Marichev, *Fractional integrals and derivatives. Theory and Applications*, Gordon and Breach Science Publishers, Yverdon, ,Switzerland, 1993.

[28] A. Shi and S. Zhang, *Upper and lower solutions method and a fractional differential equation boundary value problem*, Electr. J. Qual. Theory. Differ. Equ. **30** (2009), 13 pages.

[29] K. Shugui, C. Huiqing, Y. Yaqing and G. Ying, *Existence and uniqueness of the solutions for the fractional initial value problem*, Electr. J. Shanghai Normal University (Natural Sciences), **45**(20016), no. 3, 313–319.

[30] S. Zhang and X. Su, *The existence of a solution for a fractional differential equation with nonlinear boundary conditions considered using upper and lower solutions in reverse order*, Comput. Math. Appl. **62** (2011), no. 3, 1269-1274.

[31] Y. Wang, J. Zhou and Y. Li, *Fractional Sobolev's Spaces on Time Scales via Conformable Fractional Calculus and Their Application to a Fractional Differential Equation on Time Scales*, Adv. Math. Phys. (2016), 1–21.