RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN TIARET
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUES
Département de Mathématiques

MÉMOIRE MASTER

Présenter en vue de l'obtention du diplôme de master

Spécialité :
« Mathématiques »

Option :
« analyse fonctionnelle et Applications»

Présenté Par :
Gaamouci Abdellah et Ghaouti Fatima

Sous L'intitulé :

Stabilisation et observation d'état des systèmes non-linéaires

Soutenu publiquement le 05 /06 / 2024
à Tiaret devant le jury composé de :

Mr Baghdad Said	MCA	Université de Tiaret	Président
Mr Khelifa Hizia	MCB	Université de Tiaret	Examinateur
Mr Boumaaza Mokhtar	MCB	Université de Tiaret	Encadreur

Année universitaire : 2023/2024

TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES FIGURES

NOTATIONS

$\mathbb{R}$	:	L'ensemble des Nombres réels.
$\mathbb{R}_+$	:	L'ensemble des Nombres réels positifs.
$\mathbb{R}^n$	:	$\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n.
$\bar{\mathbb{R}}$	:	$\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.
$\alpha(.)$	:	Une fonction de classe $\mathcal{K}$.
$\beta(.,.)$	:	Une fonction de classe $\mathcal{KL}$.
$\dot{V}$	:	$\dfrac{\partial V}{\partial t} + \dfrac{\partial V}{\partial x}(t,x)f(t,x)$ la dérivée de $V(t,x)$.
$\\|\cdot\\|_n$	:	Norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.
J	:	$= [0, \infty)$.
$\Omega_{t,c}$	:	L'ensemble qui dépend du temps.
S_1	:	$= \{x \in B/W_1(x) \leq c\}$ l'intérieur de B_r.
B_r	:	$= \{x \in \mathbb{R}^n, \\|x\\| \leq r\}$ la boule de centre $0 \in \mathbb{R}^n$ et de rayon r > 0.
R	:	La région d'attraction de $\mathbb{B}$
D	:	Un domaine de $\mathbb{R}^n$ contenant 0.
$\dot{x}(t)$	:	$= \dfrac{dx}{dt}$ dérivée temporelle.
$C^1(\mathbb{R}^n)$	:	ensemble des fonctions continûment différentiables.
$\vert.\vert$	:	valeur absolue ou module.
$exp(A),\ ou\ e^A$	:	exponentielle de la matrice A.
x^T	:	transposé du vecteur x.

ABRÉVIATION

UAS	:	Uniformément asymptotiquement stable.
UES	:	Uniformément exponentiellement stable.
GES	:	Globalement exponentiellement stable.
GPUS	:	Globalement pratiquement uniformément stable.
GUES	:	Globalement uniformément exponentiellement stable.
GPUAS	:	Globalement pratiquement uniformément asymptotiquement stable.
GU PES	:	Globalement uniformément pratiquement exponentiellement stable.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Un système dynamique est un ensemble d'objets ou de phénomènes liés entre eux et isolés artificiellement du monde extérieur. Sa modélisation vise à établir les relations qui lient les variables caractéristique de ce processus entre elles et à représenter rigoureusement son comportement dans un domaine de fonctionnement donné. Elle nécessite dans cet objectif, un ensemble de technique permettant se disposer d'une représentation mathématique du système étudie. Dans le même sens, on peut dire que la modélisation théorique exige une connaissance précise des phénomènes intervenant dans le système et une aptitude à les représenter par des équations mathématiques. Et par conséquent, elle conditionne les méthodes qui seront utilisées par la suite, pour analyser ses propriétés.

Le thème général de ce mémoire s'inscrit dans le cadre des systèmes non linéaires non autonome. L'objectif consiste à résoudre certains problèmes qui sont d'importance majeure dans la théorie du contrôle. Ces problèmes sont liés à la stabilité de certains systèmes non linéaires. Ce sujet a attiré l'attention de nombreux chercheurs [**2,3,4**].

Ce mémoire divisé en deux parties, dans le premier chapitre, nous commençons par donner des définitions, ainsi que quelques résultats sur le problème d'analyse de la stabilité pour le système

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x(t)) \\ \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{0.0.1}$$

Où $t \geq t_0 \geq 0, x(t) \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est continue en t.

Pour ce type du système, on donne des conditions suffisantes pour garantir la stabilité on se référera souvent à la théorie de Lyapunov [**11,13**], cette théorie étudie comment les systèmes dynamiques évoluent au fil du temps. Elle utilise des fonctions de Lyapunov pour évaluer la stabilité des systèmes en fonction de leurs conditions initiales. Cette théorie trouve des applications dans de nombreux domaine et est utilisée pour analyser la stabilité des systèmes linéaires et non linéaires. Elle est développée par le mathématicien russe Alexandre Lyapunov au 19ème siècle.

Dans le deuxième chapitre des principes de séparations pour différentes classes de systèmes linéaires autonomes et non autonome.

Nous avons donné un principe de séparation pour une classe de système non linéaires à partie nominale linéaire de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t) + f(t, x(t)) \\ \\ y(t) = C(t)x(t) \end{cases} \tag{0.0.2}$$

Où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est l'état du système, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ est la sortie du système, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est l'entrée de contrôle et $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}, B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$,
$C(t) \in \mathbb{R}^{p \times m}$ sont des matrices bornées continues en fonction du temps. La fonction $f(t, x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est continue, localement Lipschitzienne en x.

Motivé par l'approche de Lyapunov, un principe de séparation est donné pour les systèmes non linéaires perturbés

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + f(t,x) \\ \\ y = Cx \end{cases} \tag{0.0.3}$$

Sous une restriction que la perturbation $f(t,x)$ est délimitée par la somme d'une fonction continue Lipschitzienne où le système nominale est censé à être globalement asymptotiquement stabilisable par un feedback linéaire. Une approche pratique de la stabilité est obtenue.

CHAPITRE 1

GÉNÉRALITÉ ET RAPPEL DE STABILITÉ

1.1 Introduction

La notion de stabilité joue un rôle primordial dans l'étude du comportement des systèmes dynamiques et dans la synthèse de lois de commande pour ces systèmes. Ainsi, le problème de la stabilité des systèmes dynamiques a été et reste un sujet de préoccupation majeur du travail des automaticiens et des ingénieurs [**7**]. Dans la littérature, il existe plusieurs notions de stabilité, très souvent liées aux natures des systèmes étudiées, à ses environnements, à ses spécications et aux performances désirées.

Parmi ces notions de stabilité, la plus connue est la stabilité au sens de Lyapunov, établie en 1892 par le mathématicien russe Lyapunov [**9**]. Sa contribution consiste en une caractérisation qualitative de la stabilité par une étude des trajectoires des systèmes dynamiques, en utilisant des fonctions auxiliaires appelées aujourd'hui fonctions de Lyapunov. Ainsi, la stabilité au sens de Lyapunov est la plus connue et utilisée dans la littérature. Néanmoins, plusieurs travaux présentent d'autres notions de stabilité qui permettent de résoudre plusieurs cas pratiques d'étude des systèmes. On citera la bornitude de l'état, la stabilité entrée-sortie [**9**], la stabilité pratique [**11**].

Dans ce chapitre, on donnera la définition de la stabilité au sens de Lyapunov, et quelques résultats relatifs à cette notion dans le cas des systèmes autonomes. Ensuite, on présentera les notions de stabilité pratique. [1]

1.2 Stabilité au sens de Lyapunov

1.2.1 Préliminaires et définitions

On considère un système non linéaire non autonome de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) \\ \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1.2.1}$$

où $t \geq t_0 \geq 0, x(t) \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est continue.

Théorème 1.2.1. ***(Existence et unicité)[7].***
Si f est une fonction continue en t et localement Lipschitzienne en x, c'est à dire, il existe une constante strictement positive L tel que

$$\| f(t,x) - f(t,y) \| \leq L \| x - y \| \tag{1.2.2}$$

pour tout $x, y \in B(x_0, r)$ et pour tout $t \in [t_0, t_1]$, Alors, il existe $\delta > 0$, tel que l'équation (1.2.1) avec $x(t_0) = x_0$ admet une unique solution sur $[t_0, t_0 + \delta]$.

Définition 1.2.1. ***(Point d'équilibre)[17].***
On dit que point $x^* \in \mathbb{R}^n$ est un point d'équilibre du système (1.2.1) si :

$$f(t, x^*) = 0, \quad t \geq 0.$$

Remarque 1.2.1. *Sans perte de généralité. On peut supposer dans tout le reste que l'origine est une point d'équilibre du système (1.2.1).*
En effet, si x^* est un point d'équilibre, on pose $y = x - x^*$ alors :

$$y^* = x^* \Longrightarrow f(t,x) = f(t, y + x^*) = g(y).$$

$g(0) = f(t, x^*) = 0$ alors, 0 est un point d'équilibre.
Pour simplifier, on peut supposer dans tout le reste que l'origine est le point d'équilibre de (1.2.1). La solution passant par l'emplacement x_0 au temps $t = t_0$ est également notée $x(t, t_0, x_0)$ tel que $x(t, t_0, x_0) = x_0$.

1. Alexander Mikhaïlovich Lyapunov : Mathématicien et physicien russe. Après des études à l'université de Saint-Pétersbourg (où il est élève de P.L. Tchebychev), il est assistant puis professeur à l'université de Kharkov. En 1902, il est nommé professeur à l'université de Saint-Pétersbourg.

Définition 1.2.2. ***(Définition intuitive de la stabilité)[14].*** *Si le système dynamique est "légèrement" perturbé de son point d'équilibre, le même système reste "proche" de ce point d'équilibre. On dira alors que le point d'équilibre est stable.*

Cette définition intuitive de la stabilité traduit la capacité d'un système dynamique, pour des conditions initiales données, de rester très proche d'un point d'équilibre suite à une perturbation.

Considérons comme exemple illustratif une bille sur une surface sphérique comme montré sur la figure (1.1). Dans le schéma de gauche de la figure, suite à une légère perturbation de la position d'équilibre, la bille reste proche de sa position d'équilibre appelée stable, alors que dans le schéma de droite, la bille ne reste pas proche de sa position d'équilibre qui est alors appelée instable.

La traduction mathématique de cette définition intuitive de la stabilité est donnée par le graphique suivante.

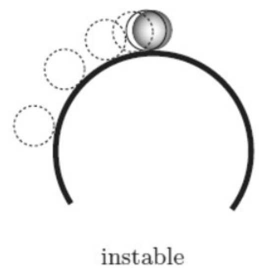

FIGURE 1.1 – Illustration de la définition intuitive de la stabilité

Définition 1.2.3. ***(Stabilité au sens de Lyapunov)[9,6].*** *On dit que* $x = 0$ *est un point d'équilibre stable, si :* $\forall \varepsilon > 0, \ \forall t_0 \geq 0, \ \exists \delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$, *tel que*

$$\|x_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0.$$

Cela signifie que, quel que soit le rayon ε d'une boule centrée sur l'équilibre, il est possible de trouver une sous-boule de rayon $\delta(\varepsilon)$, telle que la trajectoire issue de n'importe quelle condition initiale dans cette sous-boule de rayon δ ne quittera jamais la boule de rayon ε.

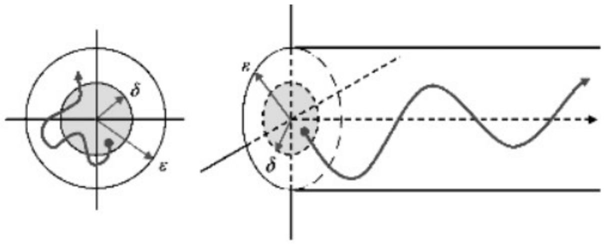

FIGURE 1.2 – Illustration de la stabilité au sens de Lyapunov

Remarque 1.2.2. *La stabilité du système ne donne pas la convergence des solutions vers l'origine, et cela la notion de La stabilité seule est insuffisante pour l'étude du comportement des solutions. On définit alors la notion d'attractivité.*

Définition 1.2.4. ***(Attractivité)[9,6]****. On dit que l'origine $x = 0$ est :*

- *Un point d'équilibre attractif, s'il existe un voisinage de l'origine $U(0)$, tel que*
$$\forall x_0 \in U(0), \lim_{t \longrightarrow +\infty} x(t, t_0, x_0) = 0.$$
- *Un point d'équilibre globalement attractif si :*
$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \lim_{t \longrightarrow +\infty} x(t, t_0, x_0) = 0.$$

Définition 1.2.5. ***(Instabilité)[14]****. Un système dynamique est dit instable au sens de Lyapunov lorsqu'il n'est pas stable au sens de la définition(1,2,3).*

Définition 1.2.6. ***(Stabilité asymptotique)[9,6]****.*
On dit que l'origine $x = 0$ est :

(i) *Un point d'équilibre asymptotiquement stable(ou noté AS), s'il est stable et attractif.*

(ii) *Un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable(ou noté GAS), s'il est stable et globalement attractif.*

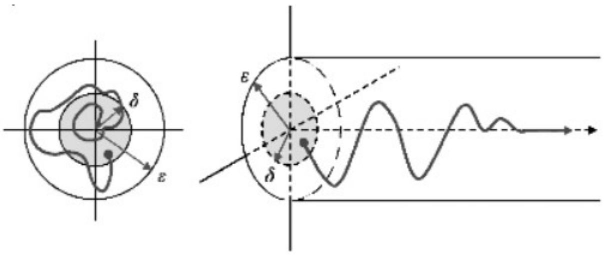

FIGURE 1.3 – Illustration de la stabilité asymptotique

Définition 1.2.7. ***(Bornitude uniforme)[18].***
La solution de (1.2.1) est dite uniformément bornée, s'il existe une constante strictement positive a, telle que $\forall \alpha \in]0, a[$, il existe une fonction $c(.)$ croissante vérifiant :

$$\|x_0\| < \alpha \Longrightarrow \|x(t, t_0, x_0)\| < c(\alpha), \quad \forall t \geq t_0.$$

Elle est dite globalement uniformément bornée, si la propriété précédente est vraie pour tout $\alpha > 0$.

Définition 1.2.8. ***(Stabilité uniforme)[6].***

(i) *On dit que l'origine $x = 0$ est un point d'équilibre uniformément stable (ou noté US) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta(\varepsilon) > 0$, tel que*

$$\|x_0\| < \delta \Longrightarrow \|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0.$$

(ii) *L'origine est un point d'équilibre globalement uniformément stable (noté GUS), s'il est uniformément stable et toutes les solutions du système (1.2.1) sont globalement uniformément bornée.*

Remarque 1.2.3. *La stabilité uniforme entraine la stabilité, mais la réciproque n'est pas toujours vraie. L'exemple suivant montre que la réciproque est fausse.*

Exemple 1.2.1. *Considérons l'équation différentielle suivante :*

$$\dot{x}(t) = (6t\ sin(t) - 2t)x.$$

où $t \in \mathbb{R}$. La solution de condition initiale (t_0, x_0) est donnée par :

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_0)\ exp\ \Big[\int_{t_0}^{t}(6s\ sin(s) - 2s)ds\Big] \\ &= x(t_0)\ exp\ \Big[6\ sin(t) - 6t\ cos(t) - t^2 - 6\ sin(t_0) + 6t_0\ cos(t_0) + t_0^2\Big]. \end{aligned}$$

Ensuite, du fait que le terme $-t^2$ est dominant pour tout t_0, on peut lier $exp\ \Big[6\ sin(t) - 6t\ cos(t) - t^2 - 6\ sin(t_0) + 6t_0\ cos(t_0) + t_0^2\Big]$ par une constante $c(t_0)$ qui dépend de t_0 :

$$|x(t)| < |x(t_0)|c(t_0), \quad \forall t \geq t_0.$$

Ainsi, pour un $\varepsilon > 0$ donné, on peut choisir $\delta = \varepsilon/c(t_0)$ pour indiquer que l'origine est stable. Maintenant, si nous supposons que t_0 prend des valeurs continues
$t_0 = 2n\pi, \quad n \in I\!N$ et $x(t, t_0, x_0)$ s'évalue en $t_0 + \pi$, alors

$$x(t_0 + \pi, t_0, x_0) = x_0 exp[(4n + 1)(6 - \pi)\pi].$$

Donc, pour un $\varepsilon > 0$, donné, il n'y a pas de δ indépendant de t_0, ce qui permet de dire que l'origine $x = 0$ est uniformément stable.

Définition 1.2.9. ***(Attractivité uniforme).***

(a) *On dit que l'origine $x = 0$ est un point d'équilibre uniformément attractif (noté UA), s'il existe un voisinage $U(0)$ de l'origine, tel que $\forall x_0 \in U(0), \quad \forall \varepsilon > 0$ il existe $T = T(\varepsilon)$, tel que :*

$$\|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq T + t_0.$$

(b) *L'origine $x = 0$ est un point d'équilibre globalement uniformément attractif (noté GUA), si $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \forall \varepsilon > 0$ il existe $T = T(\varepsilon)$, tel que :*

$$\|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq T + t_0.$$

Définition 1.2.10. ***(Stabilité asymptotique uniforme)[6].***

(a) *L'origine est un point d'équilibre uniformément asymptotiquement stable (noté UAS), s'il est uniformément stable et uniformément attractif.*

(b) *L'origine est un point d'équilibre globalement uniformément asymptotiquement stable (noté GUAS), s'il globalement uniformément stable et attractif. L'exemple suivant montre que la stabilité est uniforme mais l'attractivité est non uniforme :*

Exemple 1.2.2. *Considérons l'équation différentielle suivante :*

$$\dot{x}(t) = \frac{-x}{1+t}, \quad t \geq t_0$$

où $t \in \mathbb{R}$. *La solution de condition initiale* (t_0, x_0) *est donnée par :*

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_0)\ exp \int_{t_0}^{t} -\frac{1}{1+s} ds \\ &= x(t_0) \frac{1+t_0}{1+t}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$|x(t)| \leq |x(t_0)|, \quad \forall t \geq t_0.$$

Alors, pour $\varepsilon > 0$ *donné, il existe* $\delta = \varepsilon$ *tel que :*

$$|x(t_0)| < \delta \Longrightarrow |x(t)| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0.$$

D'où l'origine est un point d'équilibre uniformément stable.
D'autre part, la fonction $x(t)$ *converge vers 0, quand* t *tend vers* ∞, *d'une manière non uniforme, donc*

$$|x(t)| = \left| x(t_0) \frac{1+t_0}{1+t} \right| < \varepsilon.$$

donc,

$$t > t_0 + \left(\frac{|x(t_0)|}{\varepsilon}(1+t_0) - 1 - t_0 \right).$$

Ainsi, pour $\varepsilon > 0$ *donné, il n'existe pas de* T *indépendant de* t_0 *qui permet de dire que l'origine* $x = 0$ *est uniformément attractive.*

Définition 1.2.11. ***(Stabilité exponentielle)[6].***

(a) *L'origine $x = 0$ est un point d'équilibre exponentiellement stable, s'il existe un voisinage de l'origine $U(0)$, $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$, tels que*

$$\|x(t, t_0, x_0)\| \leq \lambda_1 \|x_0\| e^{\lambda_2 (t-t_0)}, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad \forall x_0 \in U(0).$$

(b) *L'origine $x = 0$ est un point d'équilibre globalement exponentiellement stable, s'il existe un $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$, tels que*

$$\|x(t, t_0, x_0)\| \leq \lambda_1 \|x_0\| e^{\lambda_2 (t-t_0)}, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Exemple 1.2.3. *Considérons le système décrit par*

$$\dot{x} = -(1 + sin(x^2))x.$$

Il est clair que $x = 0$ est un point d'équilibre.
La solution du système est donnée par

$$x(t) = x(0)\ exp \int_0^t -(1 + sin(x^2(s)))ds.$$

On a $\forall t \geq 0$, $|x(t)| < \lambda |x(0)|\ exp(-t)$. D'où la stabilité exponentielle du système en question.

Remarque 1.2.4. *Il est important de noter que le caractère exponentiellement stable du système conduit nécessairement à une stabilité asymptotique de ce dernier.*

Pour étudier la stabilité du système, on se réfère souvent à la théorie de Lyapunov. En théorie qualitative, on l'appelle la méthode directe car elle ne nécessite pas de résoudre le système.

1.3 Théorie de Lyapunov

L'utilisation des fonctions définies positives est l'une des techniques les plus efficaces pour analyser la stabilité de systèmes gouvernés par des équations différentielles ordinaires. L'utilisation de ces fonctions fournit des critères permettant de tirer des conclusions sur la stabilité ou la stabilité asymptotique d'un point d'équilibre sans qu'il soit nécessaire d'intégrer le système d'équations. Les résultats remontent au 19 ème siècle, attribués à Lyapunov.

1.3.1 Fonction de comparaison

Définition 1.3.1. ***(Fonction de classe $\mathcal{K}$)[18]***
Une fonction continue $\alpha(.) : [0, a] \longrightarrow [0, +\infty]$ appartient à la classe $\mathcal{K}$ (ou est une $\mathcal{K}$-fonction) si elle est strictement croissante et si $\alpha(0) = 0$. Une $\mathcal{K}$ -fonction appartient à la classe $\mathcal{K}_\infty$ si de plus $a = +\infty$ et $\alpha(x) \longrightarrow +\infty$ quand $t \longrightarrow +\infty$.

Exemple 1.3.1. *Donnons deux exemples de fonctions de classe $\mathcal{K}$ et de classe $\mathcal{K}_\infty$:*

1. *α définie par $\alpha(r) = arctan(r)$ est strictement croissante car*
$$\alpha'(r) = \frac{1}{1+r^2} > 0.$$
Ainsi, α appartient à la classe $\mathcal{K}$, mais α n'appartient pas à la classe $\mathcal{K}_\infty$ car $\lim\limits_{r \longrightarrow +\infty} \alpha(r) = \frac{\pi}{2}$.
2. *Soit $c > 0$, α définie par $\alpha(r) = r^c$ est strictement croissante car*
$$\alpha'(r) = cr^{c-1}.$$
De plus, $\lim\limits_{r \longrightarrow +\infty} \alpha(r) = +\infty$, donc α appartient à la classe $\mathcal{K}_\infty$.

Définition 1.3.2. ***(Fonction de classe $\mathcal{KL}$)[18]***
Une fonction continue $\beta : [0, a] \times [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ est dite de classe $\mathcal{KL}$, si pour tout t fixé, l'application $s \longrightarrow \beta(s, t)$est de classe $\mathcal{K}$ et pour tout s fixé, l'application $s \longrightarrow \beta(s, t)$ est décroissante et $\beta(s, t) \longrightarrow 0$ quand $t \longrightarrow +\infty$.

Exemple 1.3.2. *Soit $k > 0$, β définie par $\beta(r, s) = \dfrac{r}{ksr + 1}$ est strictement croissante en r car*
$$\frac{\partial \beta}{\partial r}(r, s) = \frac{1}{(ksr + 1)^2} > 0.$$
et strictement décroissante en s car
$$\frac{\partial \beta}{\partial s}(r, s) = \frac{-kr^2}{(ksr + 1)^2} < 0.$$
De plus, $\lim \beta(r, s) = 0$; donc β appartient à la classe $\mathcal{KL}$.

Le lemme suivant résume certaines propriétés des fonctions des classes $\mathcal{K}$ et $\mathcal{KL}$.

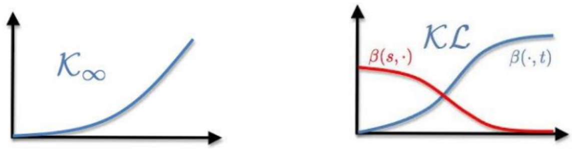

FIGURE 1.4 – Les fonctions $\mathcal{K}_\infty$ et $\mathcal{KL}$

Lemme 1.3.1. *[19] Soient $\alpha_1(.)$ et $\alpha_2(.)$ deux fonctions de classe $\mathcal{K}$ sur $[0, a[$, $\alpha_3(.)$, $\alpha_4(.)$ deux fonctions de classe $\mathcal{K}_\infty$ et $\beta(.,.)$ une fonction de classe $\mathcal{KL}$. On note l'inverse de $\alpha_i(.)$ par $\alpha_i^{-1}(.)$. Alors,*

* *$\alpha_1^{-1}(.)$ définie sur $[0, \alpha_1(a)[$ est de classe $\mathcal{K}$.*
* *$\alpha_3^{-1}(.)$ définie sur $[0, \infty[$ est de classe $\mathcal{K}_\infty$.*
* *$\alpha_1 \circ \alpha_2$ est de classe $\mathcal{K}$.*
* *$\alpha_3 \circ \alpha_4$ est de classe $\mathcal{K}_\infty$.*
* *$\sigma(r, s) = \alpha_1(\beta(\alpha_2(a)), s)$ est de classe $\mathcal{KL}$.*

Définition 1.3.3. *Une fonction est une $\mathcal{N}$ fonction $\alpha(t) : J \longrightarrow (0, \infty)$ si elle est à valeur positive et non décroissante.*

Définition 1.3.4. *Une fonction est une $\mathcal{NK}_\infty$ fonction $\beta(s, t) : J \times J \longrightarrow J$ si $\beta(s, .) \in \mathcal{N}$ et $\beta(., t) \in \mathcal{K}_\infty$.*
Voici une autre formulation des notions de stabilité en utilisant les fonctions de classe $\mathcal{K}$ et $\mathcal{KL}$, les démonstrations des propositions suivantes peuvent être consultées dans l'ouvrage [9].

Proposition 1.3.1. *[3]. Le point d'équilibre $x = 0$ du système (1.2.1) est :*

- ***Uniformément stable** : Si et seulement s'il existe une fonction $\alpha(.)$ de classe $\mathcal{K}$ et une constante strictement positive c indépendante de t_0, telle que*

$$\|x(t, t_0, x_0)\| \leq \alpha(\|x_0\|), \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad \forall \|x_0\| \leq c \tag{1.3.1}$$

- ***Globalement uniformément stable** : Si et seulement si l'inégalité précédente est satisfaite pour toute condition initiale $x_0 \in \mathbb{R}^n$.*

• ***Uniformément asymptotiquement stable*** *: Si et seulement s'il existe une fonction* $\beta(.,.)$ *de classe* $\mathcal{KL}$ *et une constante strictement positive c indépendante de* t_0*, telle que*

$$\|x(t, t_0, x_0)\| \leq \beta(\|x_0\|, t - t_0), \forall t \geq t_0, \forall \|x_0\| \leq c. \tag{1.3.2}$$

• ***Globalement uniformément asymptotiquement stable*** *: Si et seulement si l'inégalité (1.3.2) est satisfaite pour toute condition initiale* $x_0 \in \mathbb{R}^n$*.*

• ***Exponentiellement stable*** *: Si et seulement si l'inégalité (1.3.2) est satisfaite avec*

$$\beta(t, s) = kre^{\gamma s}, \quad k > 0, \quad \gamma > 0 \tag{1.3.3}$$

• ***Globalement exponentiellement stable*** *: Si et seulement si l'inégalité (1.3.3) est satisfaite pour toute condition initiale* $x_0 \in \mathbb{R}^n$*.*

Définition 1.3.5. ***(Fonctions définies positives)[17].***
Une fonction continue $V(.,.) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *est définie positive, si* $V(t, 0) = 0$ *et s'il existe une fonction* $\varphi(y)$ *définie positive, telle que*

$$V(t, y) \geq \varphi(y), \ \forall t \geq t_0, \ \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Lemme 1.3.2. *Une fonction* $V(t, y)$ *est définie positive, s'il existe* $\varphi(.)$ *de classe* $\mathcal{K}$*, telle que* $V(t, 0)$ *et*

$$V(t, y) \geq \varphi(\|V\|), \ \forall t \geq t_0, \ \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Une fonction V est dite définie négative si $-V$ *est une fonction définie positive.*

Définition 1.3.6. ***(Fonction semi-définies positives).***

1. *Une fonction* $v : U \longrightarrow \mathbb{R}$ *est semi définie positive (respectivement semi définie négative), s'il existe un voisinage U de 0, tel que*

(a) $v(0) = 0.$

(b) *Pour tout* $y \in U, v(y) > 0$ *(respectivement* $v(y) < 0$*).*

2. *Elle est dite définie positive (respectivement définie négative) s'il existe un voisinage U de 0, tel que*

(a) $v(0) = 0$.

(b) *Pour tout* $y \in U \backslash 0,\ v(y) > 0$ *(respectivement* $v(y) < 0$*).*

Définition 1.3.7. ***(Fonction décrescente).***
Une fonction $V(t, y)$ *est décrescente, si* $V(t, 0) = 0,\ \forall t \geq t_0$ *et s'il existe une fonction* $\psi(y)$ *définie positive, telle que*

$$V(t, y) \leq \psi(y),\ \forall t \geq t_0,\ \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Lemme 1.3.3. *Une fonction* $V(t, y)$ *est définie positive, s'il existe* $\psi(.)$ *de classe* $\mathcal{K}$*, telle que* $V(t, 0)$ *et*

$$V(t, y) \leq \psi(\|y\|),\ \forall t \geq t_0,\ \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Définition 1.3.8. ***(Fonction propre).***
Une fonction $V(t, x)$ *est propre (ou radialement non bornée) si*

$$\lim_{\|x\| \longrightarrow +\infty} V(t, x) = +\infty$$

uniformément en t.

Définition 1.3.9. ***(Fonction de Lyapunov)[11,20].***
On considère le système (1.2.1). Soit $U(0)$ *un voisinage de 0 et*

$$V : \mathbb{R}_+ \times U(0) \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

une fonction continue et différentiable sur $U(0)$*.*

- *On dit que V est une fonction de Lyapunov au sens large en 0, si elle vérifie les deux propriétés suivantes :*

(a) *V est définie positive.*

(*b*) $\dot{V}(t,x) \leq 0$ *pour tout* $x \in U(0)$.

- *On dit que* V *est une fonction de Lyapunov stricte en 0, si elle vérifie les deux propriétés suivantes :*

(*a*) V *est définie positive.*

(*b*) $\dot{V}(t,x) < 0$ *pour tout* $x \in U(0)\backslash 0$.

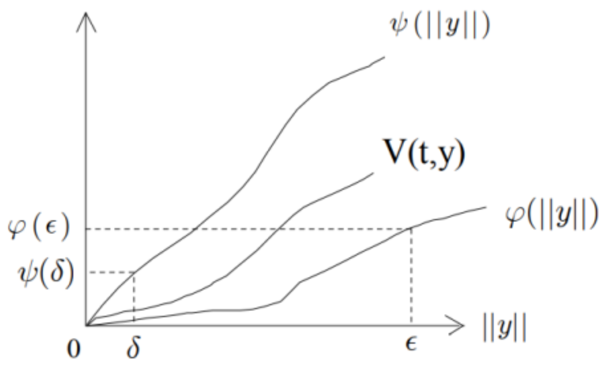

FIGURE 1.5 – Fonction définie positive et décrescente

.

Lemme 1.3.4. *Une fonction continue* $V(t,x)$ *est propre, s'il existe une fonction* $\alpha(.)$ *de classe* $\mathcal{K}_\infty$, *telle que*

$$V(t,x) \geq \alpha(\|x\|), \quad \forall t \geq t_0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Remarque 1.1. *La dérivée de* $V(t,x)$ *le long des trajectoires de (1.2.1) est notée par* $\dot{V}(t,x)$ *où*

$$\dot{V}(t,x) = \frac{\partial V}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial V}{\partial x}(t,x) f(t,x).$$

Théorème 1.3.1. *[19]. L'origine* $x = 0$ *est un point d'équilibre de (1.2.1) et* D *un domaine de* $\mathbb{R}^n$ *contenant 0. Soit* $V : [0, +\infty[\times D \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction de Lyapunov continûment différentiable (de classe* C^1*), telle que*

$$W_1(x) \leq V(t,x) \leq W_2(x).$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial V}{\partial x}(t,x) \leq -W_3(x).$$

Pour tout $t \geq 0$ et $x \in D$ avec $W_1(x)$ et $W_2(x)$ sont continue et définie positives.

1. *Si $W_3(x) = 0$ sur D, alors l'origine $x = 0$ est uniformément stable.*

2. *Si $W_3(x)$ est continue et définie positive sur D, alors l'origine $x = 0$ est uniformément asymptotiquement stable.*

3. *Si $D = \mathbb{R}^n$, $W_3(x)$ est continue sur D et $W_1(x)$ est propre ou radialement non bornée, alors l'origine $x = 0$ est globalement uniformément asymptotiquement stable.*

Lemme 1.3.5. *[19]. Soit $V : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Lyapunov continue et définie positive sur $D \subset \mathbb{R}^n$ qui contient l'origine. Soit $B(0,r) \subset D$ pour un certain $r > 0$ où $B(0,r)$ désigne la boule de centre 0 et de rayon r. Alors, ils existent des fonctions de classe $\mathcal{K}$, α_1 et α_2 définie sur $[0, r[$, telle que*

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|). \tag{1.3.4}$$

pour tout $x \in B(0,r)$.
Si $D = \mathbb{R}^n$ et les fonctions α_1 et α_2 sont définies sur $[0, +\infty[$ alors l'inégalité (1.3.4) est vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. De plus, $V(x)$ est propre alors α_1 et α_2 peuvent être choisies de classe $\mathcal{K}_\infty$.

Lemme 1.3.6. *[19]. On considère l'équation différentielle autonome*

$$\dot{y} = -\alpha(y), \quad y(t_0) = y_0. \tag{1.3.5}$$

Avec $\alpha(.)$ une fonction localement Lipschitzienne et de classe $\mathcal{K}$ définie sue $[0, a[$. Pour tout $0 \leq y_0 \leq a$, cette équation admet une unique solution définie pour tout $t_0 \leq t$. De plus,

$$y(t) = \sigma(y_0, t - t_0).$$

Avec $\sigma(r,s)$ est une fonction de classe $\mathcal{KL}$ définie sur $[0, a[\times[0, +\infty[$.

Lemme 1.3.7. ***(Lemme de comparaison)***.
On considère l'équation différentielle

$$\dot{u} = f(t, u), \quad u(t_0) = u_0.$$

Où $f(t, u)$ est continue en t et localement Lipschitzienne en u, pour tout $t \geq 0$ et tout $u \in J \subset \mathbb{R}^n$. Soit $[t_0, T[$ (T pourrait être l'infini) l'intervalle maximal de la solution de $u(t)$ et on suppose que $u(t) \in J$ pour tout $t \in [t_0, T[$. Soit $v(t)$ une fonction continue dont la dérivée à droite $\dot{v}(t)$ satisfait l'inéquation différentielle

$$\dot{v}(t) \leq f(t, v(t)), \quad v(t_0) = u_0.$$

Où $v(t) \in J$ pour tout $t \in [t_0, T[$ avec

$$\dot{v}(t) = \lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{v(t+h) - v(t)}{h}.$$

Alors,

$$v(t) \leq u(t), \; t \in [t_0, T[.$$

Exemple 1.3.3. *On considère l'équation différentielle*

$$\dot{x} = f(x) = -(1 + x^2)x, \quad x(0) = a.$$

a une solution unique sur $[0, t_1[$ pour certains $t_1 > 0$ car $f(x)$ est localement Lipschitzienne. Soit $v(t) = x^2(t)$. La fonction $v(t)$ est différentiable et sa dérivée est bornée par

$$\dot{v} = 2x(t)\dot{x}(t) = -2x^2(t) - 2x^4(t) \leq -2x^2(t).$$

Donc, $v(t)$ satisfait l'inéquation différentielle

$$\dot{v}(t) \leq -2v(t), \quad v(0) = a^2.$$

Soit u(t) une solution de l'équation différentielle

$$\dot{u}(t) = -2u, \quad u(0) = a^2 \Longrightarrow u(t) = a^2 e^{-2t}.$$

Alors, en utilisant le lemme de comparaison, la solution $x(t)$ est bien définie pour tout $t \geq 0$ et satisfait

$$|x(t)| = \sqrt{v(t)} \leq e^{-t}|x|, \quad \forall t \geq 0.$$

Remarque 1.2. *Si $\alpha(.)$ n'est pas localement Lipschitzienne, on peut choisir une fonction $\beta(.)$ localement Lipschitzienne de classe $\mathcal{K}$ telle que*

$$\alpha(r) \geq \beta(r).$$

Dans le domaine où on s'intéresse.

Exemple 1.3.4. *Soit $\alpha(r) = \sqrt{r}$ est une fonction de classe $\mathcal{K}$ mais non localement Lipschitzienne en $r = 0$. On définie la fonction β par :*

$$\begin{cases} \beta(r) = r \quad si\ r < 1 \\ \\ \beta(r) = \sqrt{r} \quad si\ r \geq 1 \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{K}$ et localement Lipschitzienne. De plus, $\alpha(r) \geq \beta(r) \quad \forall r \geq 0$.

Preuve. *1. Si $W_3 = 0$ sur D, on choisit $r > 0$ assez petit tel que $B_r \subset D$ et*

$$0 < c < \alpha = \min_{\|x\|=r} W_1(x).$$

Alors,

$$S_1 = \{\ x \in B_r / W_1(x) \leq c\}.$$

est à l'intérieur de B_r.
On définit l'ensemble qui dépend du temps $\Omega_{t,c}$:

$$\Omega_{t,c} = \{\ x \in B_r / V(t,x) \leq c\}.$$

L'ensemble $\Omega_{t,c}$ contient $S_2 = \{\ x \in B_r / W_2(x) \leq c\}$ car

$$W_2(x) \leq c \Longrightarrow V(t,x) \leq c.$$

D'autre part, $\Omega_{t,c}$ est inclus dans la boule $\{\ x \in B_r / W_1(x) \leq c\}$ car

$$V(t,x) \leq c \Longrightarrow W_1(x) \leq c. \tag{1.3.6}$$

Donc,

$$\{\ x \in B_r / W_2(x) \leq c\} \subseteq \Omega_{t,c} \subseteq \{\ x \in B_r / W_1(x) \leq c\} \subset B_r \subset D, \forall t \geqslant 0.$$

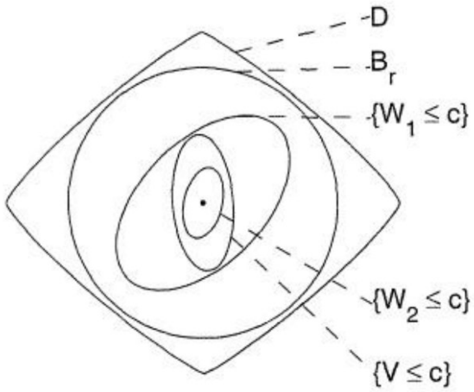

FIGURE 1.6 – Représentation géométrique des ensembles de la preuve du théorème 1.3.1.

On a $V(t,x) \leqslant 0$ sur D, donc toute trajectoire $x(t)$ de condition initiale $x(t_0)$ dans $\Omega_{t,c}$ reste dans $\Omega_{t,c}$ pour tout $t \geqslant t_0$. Alors, toutes trajectoires de condition initiale dans l'ensemble S_2 restent dans $\Omega_{t,c} \subset S_1$ pour tout $t \geqslant t_0$, donc ces trajectoires sont définies et bornées pour tout $t \geqslant t_0$. D'après le lemme (1.3.4) et la remarque (1.2), il existe des fonctions de classe $\mathcal{K}$ et localement Lipschitzienne $\alpha_1(.)$et $\alpha_2(.)$ définies sur $[0,r[$ vérifiant $\forall t \geqslant 0$ et $\forall x \in D$, tels que

$$\alpha_1(\|x\|) \leqslant W_1(x) \leqslant V(t,x) \leqslant W_2(x) \leqslant \alpha_2(\|x\|).$$

Alors,

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leqslant \alpha_1^{-1}(V(t,x)) \\ &\leqslant \alpha_1^{-1}(V(t_0,x(t_0))) \\ &\leqslant \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\|x(t_0\|)). \end{aligned}$$

D'après le lemme (1.3.1). $\alpha^{-1} \circ \alpha_2$ est une fonction de classe $\mathcal{K}$. Ce qui implique que $x = 0$ est uniformément stable.

2. *On a W_3 est définie positive alors il existe une fonction de classe $\mathcal{K}$, telle que*

$$W_3(x) \geqslant \alpha_3(\|x\|).$$

On a

$$\dot{V}(t,x) \leqslant -\alpha_3(\|x\|) \leqslant -\alpha_3(\alpha_2^{-1}(V(t,x))) = -\alpha(V(t,x)).$$

La fonction $\alpha(.)$ est de classe $\mathcal{K}$ définie sur $[0, \alpha_1(r)[$ d'après le lemme (1.3.1). On doit supposer que $\alpha(.)$ est localement Lipschitzienne (Voit la remarque (1.2)). Soit l'équation différentielle du première ordre :

$$\dot{y} = -\alpha(y), \quad y(t_0) = V(t_0, x(t_0)) \geqslant 0.$$

Il est clair que

$$V(t, x(t)) \leqslant y(t), \quad \forall t \geqslant t_0.$$

D'après le lemme (1.3.5), il existe une fonction $\sigma(r, s)$ de classe $\mathcal{KL}$ définit sur $[0, \alpha_1(r)[\times[0, +\infty[$ telle que

$$V(t, x(t)) \leq \sigma(V(t_0, x(t_0)), t - t_0), \quad \forall V(t_0, x(t_0)) \in [0, \alpha_1(r)$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leqslant \alpha_1^{-1}(V(t, x(t))) \\ &\leqslant \alpha_1^{-1}(\sigma(V(t_0, x(t_0)), t - t_0)) \\ &\leqslant \alpha_1^{-1}(\sigma(\alpha_2(x(t_0)), t - t_0)) \\ &= \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0). \end{aligned}$$

D'après le lemme (1.3.1), $\beta(.,,)$ est une fonction de classe $\mathcal{KL}$. Donc, l'inéquation (1.3.2) est satisfaite ce qui implique que $x = 0$ est uniformément asymptotiquement stable.

3. *Si $D = \mathbb{R}^n$, les fonctions α_1, α_2 et α_3 sont définie sur $[0, +\infty[$. Alors, α et aussi β sont indépendantes de c. On a $W_1(x)$ est radialement non bornée alors on peut choisir c assez grande de sorte que la condition initiale dans l'ensemble $\{W_2(x) \leq c\}$. Donc, (1.3.2) est satisfaite pour toute condition initiale ce qui implique que l'origine est globalement uniformément asymptotiquement stable.*

Théorème 1.3.2. ***(Théorème de stabilité exponentielle).***
L'origine $x = 0$ est un point d'équilibre de (1.2.1) et D un domaine de $\mathbb{R}^n$ contenant 0. Soit $V : [0, +\infty[\times D \longrightarrow \mathbb{R}$ un fonction de Lyapunov continûment différentiable, telle que

$$k_1\|x\|^2 \leq V(t, x) \leq k_2\|x\|^2. \tag{1.3.7}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x) \leq -k_3\|x\|^2. \tag{1.3.8}$$

$$\left\|\frac{\partial V}{\partial x}\right\| \leq k_4\|x\|^2. \tag{1.3.9}$$

$\forall t \geq t_0$ et $\forall x \in D$, avec k_1, k_2, k_3 et k_4 des constantes positives. Alors, l'origine $x = 0$ est exponentiellement stable.
Si $D = \mathbb{R}^n$, alors l'origine $x = 0$ est globalement exponentiellement stable.

1.3.2 Systèmes linéaires et linéarisation

Cas autonome
Considérons le système

$$\dot{x} = Ax, \tag{1.3.10}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ et A est une matrice carrée d'ordre n. L'origine est un point d'équilibre de (1.3.10).

Théorème 1.3.3. *L'origine est globalement asymptotiquement stable si, et seulement si, toutes les valeurs propres de A ont une parties réelles strictement négatives. On dit dans ce cas que A est de Horwitz*[2]
Cas non-autonome
Soit le système linéaire non-autonome :

$$\dot{x} = A(t)x(t). \tag{1.3.11}$$

Où $A(t)$ est continue pour tout $t \geq 0$, admet l'origine comme point d'équilibre.

La stabilité de l'origine du système linéaire non-autonome (1.3.11) peut être complètement caractérisé en utilisant la résolvante[3] *du système. La solution de (1.3.11) est donnée par*

$$x(t, t_0, x_0) = \Phi(t, t_0)x_0.$$

2. En mathématique, une matrice carrée A est appelle matrice de Horwitz si toutes les valeurs propres de A ont une partie réels strictement négative c'est à dire $R[\lambda_i] < 0$ pour tout valeur propre λ_i.

3. On appelle matrice résolvante (ou opérateur résolvant) en t_0 du système l'unique solution du système différentiel féfini sur I par
$R'(t) = A(t)R(t)$, $R(t_0) = In$ où $R : I \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$, on la note $R(t, t_0)$.

Où $\Phi(t,t_0)$ est la résolvante de $A(t)$ définit par

$$\frac{\partial \Phi(t,t_0)}{\partial t} = A(t)\Phi(t,t_0), \quad \Phi(t,t) = I.$$

$$\Phi(t,t_0)\Phi(t_0,s) = \Phi(t,s) \quad et \quad \Phi(t_0,t) = \Phi^{-1}(t,t_0).$$

Le théorème suivant caractérise la stabilité asymptotique uniforme en tenant compte du résolvante de $A(t)$.

Théorème 1.3.4. *[9].*
Supposons que l'origine est un point d'équilibre uniformément asymptotiquement stable du système (1.3.11) si et seulement si, la résolvante satisfait l'inégalité

$$\parallel \Phi(t,t_0) \parallel \leq ke^{-\gamma(t-t_0)}, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0.$$

pour des constantes strictement positives k et γ.

Remarque 1.3.1. *Ce théorème permet de montre que pour un système linéaire non autonome, l'uniforme asymptotique stabilité de l'origine est équivalente à la stabilité exponentielle.*
On suppose qu'il existe une matrice $P(t)$ définie, positive, symétrique, bornée et continûment différentiable vérifiant pour tout $t \geq 0$,

$$0 < c_1 I \leq P(t) \leq c_2 I, \quad (c_1 > 0, c_2 > 0),$$

et

$$-P(t) = P(t)A(t) + A^T(t)P(t) + \varphi(t). \tag{1.3.12}$$

où $\varphi(t)$ est continue symétrique définie positive, c'est à dire,

$$\varphi(t) \geq c_3 I > 0, \quad \forall t \geq 0, \quad (c_3 > 0).$$

Considérons la fonction de Lyapunov candidate

$$V(t,x) = x^T P(t) x.$$

Donc

$$c_1 \parallel x \parallel^2 \leq V(t,x) \leq c_2 \parallel x \parallel^2 .$$

De plus, elle est propre puisque $c_1 \parallel x \parallel^2$ *est une fonction de classe* $\mathcal{K}_\infty$.

La dérivée de $V(t,x)$ *le long des trajectoires du système (1.3.11) est donnée par :*

$$\begin{aligned} \dot{V}(t,x) &= x^T \dot{P}(t)x + x^T P(t)\dot{x} + \dot{x}^T P(t)x \\ &= x^T(\dot{P}(t) + P(t)A(t) + A^T(t)P(t))x \\ &= -x^T \varphi(t)x \leq -c_3 \parallel x \parallel^2 . \end{aligned}$$

Alors $\dot{V}(t,x)$ *est définie négative.*
Toutes les hypothèses du Théorème (1.3.2) sont satisfaites globalement. Par conséquent, l'origine est globalement exponentiellement stable.

Théorème 1.3.5. *Supposons que l'origine est un point d'équilibre uniformément asymptotiquement stable du système (1.3.11). Supposons que* $A(t)$ *est continue et bornée. Alors pour tout matrice* $\varphi(t)$ *définie, positive, symétrique, bornée et continue, il existe une matrice* $P(t)$ *définie positive symétrique, bornée et continument différentiable, qui satisfait (1.3.12).*

Donc $V(t,x) = x^T P(t)x$ *est une fonction de Lyapunov pour le système qui satisfait les hypothèses du Théorème 1.3.2.*

Remarque 1.3.2. *La stabilité asymptotique uniforme du système (1.3.11) ne peut pas être caractérisée par les valeurs propres. Khalil dans [**9**] donne l'exemple suivante .*

On considére le système linéaire

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t). \tag{1.3.13}$$

Avec

$$A = \begin{pmatrix} -1 + 1,5\cos^2 t & 1 - 1,5\sin t\cos t \\ -1 - 1,5\sin t\cos t & -1 + 1,5\sin^2 t \end{pmatrix}$$

Donc les valeurs propres de $A(t)$ sont

$$\lambda_1 = \frac{-1+i\sqrt{7}}{4} \quad et \quad \lambda_2 = \frac{-1-i\sqrt{7}}{4}.$$

De plus, la résolvante de $A(t)$est

$$\phi(t,0) = \begin{pmatrix} e^{0,5t}\cos t & e^{-t}\sin t \\ -e^{0,5t}\sin t & e^{-t}\cos t \end{pmatrix}$$

Alors, le système (1.3.13) n'est pas asymptotiquement stable.

Maintenant, on revient au système (1.2.1) dans le cas où f est une fonction continûment différentiable, U un voisinage de 0 et en supposons que l'origine est un point d'équilibre et aussi la matrice Jacobienne $\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]$ est uniformément bornée et Lipschitzienne sur U, c'est à dire, ils existent des constantes strictement positives k et L telles que

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right\| \leq k, \quad \forall x \in U, \quad \forall t \geq t_0.$$

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x_1) - \frac{\partial f}{\partial x}(t,x_2)\right\| \leq L \parallel x_1 - x_2 \parallel, \quad \forall x_1, x_2 \in U, \quad \forall t \geq t_0.$$

La fonction f peut être récrite de la façon suivante

$$f(t,x) = f(t,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(t,z)x.$$

Où $z \in]0,x[$. Alors

$$f(t,x) = A(t)x + g(t,x).$$

Avec

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t,0) \quad et \quad g(t,x) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(t,z) - \frac{\partial f}{\partial x}(t,0)\right]x.$$

Théorème 1.3.6. *Supposons que l'origine est un point d'équilibre du système non-linéaire (1.2.1) où f est continûment différentiable, U est un voisinage de 0 et* $\left[\dfrac{\partial f}{\partial x}\right]$ *est uniformément bornée et Lipschitzienne sur U. Si l'origine est un point d'équilibre exponentiellement stable du système linéaire (1.3.11) alors elle est aussi un point d'équilibre exponentiellement stable du système (1.2.1).*

Le théorème (1.3.6) montre que si le linéarisé d'un système non-linéaire au voisinage de l'origine est un point d'équilibre exponentiellement stable du système non-linéaire.

1.4 Les systèmes perturbés

On considére le système

$$\dot{x} = f(t, x(t)) + g(t, x(t)), \tag{1.4.1}$$

où $f(.,.)$ et $g(.,.)$ sont deux fonctions continues par morceaux par rapport à la première variable et localement Lipschitzienne par rapport à la deuxième variable. On peut voir ce système comme perturbation du système nominale

$$\dot{x} = f(t, x). \tag{1.4.2}$$

La perturbation $g(.,.)$ peut résulté des erreurs de modélisation des non-linéarités ou des incertitude qui existent dans n'importe quel modèle réel. Une analyse complète de l'étude de stabilité des systèmes perturbés de la forme (1.4.1) sont faite que [**7,10**].

Pour l'étude de la stabilité de ses systèmes, on souhaite toujours garder la stabilité du système perturbé pour une classe de perturbation. C'est à dire, on veut que la perturbation $g(t, x)$ qui est supposée un terme déstabilisant n'influe pas sur la stabilité du système qui est assurée par le système nominale. La préservation de la stabilité du système perturbé dépend de la stabilité du système nominale et de la perturbation.

Les systèmes perturbée considérés ici sont à travers lesquels la perturbation vérifie

$$g(t,0) = 0, \forall t \geq 0.$$

Cela veut dire que l'origine $x = 0$, qui est un point d'équilibre pour le système nominale , reste un point d'équilibre du système perturbé.

Le théorème suivant établit la stabilité exponentielle de l'origine du système perturbé, si l'on suppose que l'origine est exponentiellement stable et la perturbation vérifie une condition de bornitude .

Théorème 1.4.1. *[10]*
Supposons que l'origine du système nominale(1.4.2)est UES. Soit $V(t,x)$ une fonction de Lyapunov du système nominale vérifiant les inégalités (1.3.7), (1.3.8) et (1.3.9) sur $\mathbb{R}_+ \times B_r$.
Supposons que la perturbation $g(t,x)$ satisfait

$$\| g(t,x(t)) \| \leq \gamma \| x(t) \|, \quad \gamma < \frac{c_3}{c_4}. \tag{1.4.3}$$

Alors, l'origine du système perturbé (1.4.1) est un point d'équilibre UES. Si de plus, toutes les conditions sont satisfaites globalement alors l'origine est $GUES$.

Preuve. *Soit $V(t,x)$ une fonction de Lyapunov du système nominal vérifiant les inégalités (1.3.7), (1.3.8) et (1.3.9) sur $\mathbb{R}^n \times B_r$. Choisissons $V(t,x)$ comme fonction de Lyapunov du système perturbé et en la dérivant le long des solutions du système perturbé(1.4.1) on obtient*

$$\dot{V}(t,x) \leq -c_3 \| x \|^2 + \left\| \frac{\partial V}{\partial x}(t,x) \right\| \| g(t,x) \| . \tag{1.4.4}$$

En utilisant les estimations (1.3.7),(1.3.9) ,(1.4.3) on obtient

$$\dot{V}(t,x) \leq -(c_3 - \gamma c_4) \| x \|^2 . \tag{1.4.5}$$

On conclure que l'origine est UES si les hypothèses sont satisfaites localement, et il est $GUES$ si les hypothèses sont globaux.

On va énoncer un autre résultat établissant que l'origine du système nominale est GUAS en utilisant les mêmes techniques. Plus précisément, on suppose que l'origine du système nominale est GUAS et la perturbations vérifie

$$\| g(t,x) \| \leq \gamma\varphi(x). \tag{1.4.6}$$

Où $\varphi(.)$ est une fonction de classe $\mathcal{K}$, alors l'origine du système perturbé (1.4.1) est GUAS.

Théorème 1.4.2. *[10]*
Supposons que l'origine du système nominale (1.4.2) est UES .Soit $V(t,x)$ une fonction de Lyapunov du système nominale vérifiant l'inégalité (1.3.7) sur $\mathbb{R}_+ \times B_r$ et,

$$\dot{V}(t,x) = \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x) \leq -c_3\varphi(x).$$

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \leq c_4\varphi(x).$$

Où $\varphi(.)$ est une fonction de classe $\mathcal{K}$. Si la perturbation $g(t,x)$ satisfait l'inégalité (1.4.6) avec $\gamma < \frac{c_3}{c_4}$, alors l'origine du système perturbé (1.4.1) est un point d'équilibre UAS. Si de plus, toutes les conditions sont satisfaites globalement alors l'origine est GUAS.

1.5 Stabilité pratique

L'analyse de la stabilité pratique des systèmes non-linéaire est étudiée par plusieurs auteurs notamment dans [**11,2,4**].

Certains systèmes peuvent être instables et pourtant ces systèmes peuvent osciller suffisamment prés de cet état pour que leurs performances soient acceptables. Pour faire face à ces situations, nous avons besoin d'une notion de stabilité plus adaptée à plusieurs situation que la stabilité de Lyapunov, un concept appelé stabilité pratique. Cette stabilité introduite par La-Salle et Lefschetz, concerne l'analyse quantitative par opposition à l'analyse de Lyapunov qui est de nature qualitative. Ainsi, contrairement à la stabilité de Lyapunov, l'étude de la stabilité pratique ramène à l'étude de la stabilité d'une boule centrée à l'origine. C'est pourquoi nous commençons par donner la définition de la stabilité uniforme et de l'attractivité uniforme d'une boule bornée $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n, \| x \| \leq r\}$.

Dans cette section, on présente la stabilité uniforme et l'attractivité uniforme d'une boule fermée B_r présentées par Corles dans [**18**].

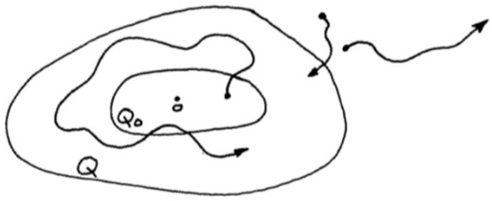

FIGURE 1.7 – Illustration de la stabilité pratique

Définition 1.5.1. ***(Stabilité uniforme** B_r**)** .*
B_r est dite uniformément stable, si pour tout $\varepsilon > r$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que $\forall t_0 \geq 0$,

$$\| x_0 \| < \delta \Rightarrow \| x(t, t_0, x_0) \| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0 \tag{1.5.1}$$

Soit $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n$ un voisinage de l'origine.

Définition 1.5.2. ***(Attractivité uniforme de** B_r **)***
B_r est dite uniformément attractive, si pour tout $\varepsilon > r$ il existe $c > 0$ et il existe $T(\varepsilon, x_0) > 0$ telles que pour tout $t_0 \in \mathbb{R}_+$, $\forall \| x_0 \| < c$,

$$\| x(t, t_0, x_0) \| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0 + T(\varepsilon, x_0). \tag{1.5.2}$$

Définition 1.5.3. ***(Stabilité asymptotique uniforme pratique)***

i) On dite que le système (1.2.1) est pratiquement uniformément asymptotiquement stable s'il existe une boule $B_r \subset \mathbb{R}^n$ telle que B_r soit uniformément stable et uniformément attractive.

ii) On dite que le système (1.2.1) est globalement pratiquement uniformément asymptotiquement stable s'il existe pratiquement uniformément stable et si $\forall\varepsilon > 0$ *et* $\forall c > 0$*, il existe* $T(\varepsilon, x_0) > 0$ *telle que pour tout* $t_0 \in \mathbb{R}_+, \quad \forall \parallel x_0 \parallel < c,$

$$\parallel x(t, t_0, x_0) \parallel < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0 + T(\varepsilon, x_0). \tag{1.5.3}$$

Définition 1.5.4. ***(Stabilité exponentielle)***

i) La boule B_r *est uniformément exponentiellement stable, s'il existe* $\gamma > 0, \; k > 0$ *telles que pour tout* $t_0 \in \mathbb{R}_+, \; x_0 \in U(0)$

$$\parallel x(t, t_0, x_0) \parallel \leq r + k \parallel x_0 \parallel exp(-\gamma(t - t_0)). \tag{1.5.4}$$

ii) La boule B_r *est globalement exponentiellement stable si et seulement si, l'inégalité (1.5.4) est satisfaite pour tout condition initiale* $x_0 \in \mathbb{R}^n$*. On dite dans ce cas que le système est globalement pratiquement fortement stable.*

Théorème 1.5.1. *Considérons le système (1.2.1). Supposons qu'il existe une fonction* $V(.,.) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *de classe* C^1*, deux fonctions* $\alpha_1(.)$ *et* $\alpha_2(.)$*de classe* $\mathcal{K}_\infty$*, une fonction* $\alpha_3(.)$ *de classe* $\mathcal{K}$ *et un réel positif r suffisamment petit telles que les inégalités suivantes sont satisfaite pour tout* $t \in \mathbb{R}_+$ *et* $x \in \mathbb{R}^n$*.*

$$\alpha_1(\parallel x \parallel) \leq V(t, x) \leq \alpha_2(\parallel x \parallel). \tag{1.5.5}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}(f(t, x)) \leq -\alpha_3(\parallel x \parallel) + r. \tag{1.5.6}$$

Alors, le système est globalement pratiquement stable avec

$$B_r = \{x \in \mathbb{R}^n / \parallel x \parallel \leq \alpha_1^{-1} \circ \alpha_2 \circ \alpha_3^{-1}(r)\}.$$

Preuve. *La démonstration comportera trois étapes.*

- $\star$ *La première partie : sera consacré à la bornitude globale uniforme des solutions du système (1.2.1) .Soit* $\delta > 0$ *tel que* $\parallel x_0 \parallel < \delta$ *et choisissons* $\hat{\delta} = \max(\delta, R)$ *avec* $R = \alpha_3^{-1}(r)$*.*

Tout d'abord considérons la fonction $c(.)$ *sur* $]0,\infty[$ *définie par*

$$c(\delta)=\begin{cases}(\alpha_1^{-1}\circ\alpha_2)(R), & si \quad \delta\leq R.\\ \\ (\alpha_1^{-1}\circ\alpha_2)(\delta), & si \quad \delta>R.\end{cases}$$

En tenant compte de la (1.5.5) on a $\hat{\delta}\leq(\alpha_1^{-1}\circ\alpha_2)(\hat{\delta})$.
Il s'ensuit que

$$\| x(t_0) \| \;=\; \| x_0 \|\leq\hat{\delta}\leq(\alpha_1^{-1}\circ\alpha_2)(\hat{\delta}).$$

Supposons qu'il existe $t_2>t_0$ *tel que* $\| x(t_2) \|>(\alpha_1^{-1}\circ\alpha_2)(\hat{\delta})$. *Puisque* $x(.)$ *est continue sur sur* $[t_0,t_2]$, *il existe* $t_1>t_0$ *tel que* $\| x(t_1) \|=\hat{\delta}$ *et donc* $\| x(t) \|\geq\hat{\delta}$ *pour tout* $t\in[t_1,t_2]$. *Il est ainsi clair d'après (1.5.5) et (1.5.6) que*

$$\begin{aligned}\alpha_1(\| x(t_2) \|)&\leq V(t_2,x(t_2))\\ &=V(t_1,x(t_1))+\int_{t_1}^{t_2}\dot{V}(\tau,x(\tau))d\tau\\ &\leq\alpha_2(\| x(t_1) \|)+\int_{t_1}^{t_2}(-\alpha_3(\| x(\tau) \| +r)d\tau\\ &\leq\alpha_2(\hat{\delta})+\int_{t_1}^{t_2}(-\alpha_3(R)+r)d\tau,\end{aligned}$$

ce qui entraine $\| x(t_2) \|\leq(\alpha_1^{-1}\circ\alpha_2)(\hat{\delta})$, *d'où une contradiction.*

Enfin, on aura $\| x(t) \|\leq c(\delta), t\geq t_0$ *si* $\| x_0 \|\leq\delta$, *puisque* $\| x_0 \|\leq\hat{\delta}$ *et* $R\leq\hat{\delta}$.

- ⋆ *Dans deuxième partie : nous intéressons à la stabilité uniforme de la boule* B_r. *Prenons* $\varepsilon>(\alpha_1^{-1}\circ\alpha_2)(R)$. *On considère* $(\alpha_1^{-1}\circ\alpha_2)(\delta)=\varepsilon$, *alors* $\delta(\varepsilon)=(\alpha_2^{-1}\circ\alpha_1)(\varepsilon)>R>0$.
  Donc, d'après l'étape (1), on a $\| x_0 \|\leq\delta(\varepsilon)$ *alors*

$$\| x(t) \|\leq(\alpha_1^{-1}\circ\alpha_2)(\delta(\varepsilon))=\varepsilon,\quad\forall t\geq t_0.$$

⋆ *Dans troisième étape : On montre que B_r est globalement uniformément attractive.*
Soit $\delta > 0$ tel que $\| x_0 \| < \delta$, on considère $\bar{c} > (\alpha_1^{-1} \circ \alpha_2)(R)$ et $\bar{R} = (\alpha_2^{-1} \circ \alpha_1)(\bar{c})$ alors $\bar{R} > R$ et donc par définition

$$c(\bar{R}) = (\alpha_1^{-1} \circ \alpha_2)(\bar{R}) = \bar{c}.$$

Ainsi, si $\delta \leq \bar{R}$ alors $\| x_0 \| \leq \bar{R}$ il s'ensuit que, d'après l'étape (1), $\| x(t) \| \leq c(\bar{R}) = \bar{c}$. Maintenant par l'absurde, on considère que $\delta > \bar{R}$ et on suppose que

$$\| x(t) \| > \bar{R}, \forall t \in [t_0, t_1] \tag{1.5.7}$$

avec $t_1 = t_0 + T(\bar{c}, \delta)$ et $T(\bar{c}, \delta) = \frac{\alpha_2(\delta) - \alpha_1(\bar{R})}{\alpha_3(\bar{R}) - r}$.

En tenant compte de (1.5.5) et (1.5.6), on obtient

$$\begin{aligned} \alpha_1(\| x(t_1) \|) &\leq V(t, x(t_1)) \\ &= V(t_0, x(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} \dot{V}(\tau, x(\tau)) d\tau \\ &\leq \alpha_2(\| x(t_0) \|) + \int_{t_0}^{t_1} (-\alpha_3(\| x(\tau) \|) + r) d\tau \\ &\leq \alpha_2(\delta) + T(\bar{c}, \delta)[-\alpha_3(\bar{R}) + r], \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \alpha_1(\| x(t_1) \|) &= \alpha_2(\delta) + \frac{\alpha_2(\delta) - \alpha_1(\bar{R})}{\alpha_3(\bar{R}) - r}[-\alpha_3(\bar{R}) + r] \\ &= \alpha_1(\bar{R}). \end{aligned}$$

Par conséquent $\| x(t_1) \| \leq \bar{R}$, $\forall t \in [t_0, t_1]$, ce qui contrer dit (1.5.7).
Alors, il existe $t_2 \in [t_0, t_1]$ tel que $\| x(t_2) \| \leq \bar{R}$. Donc comme conséquence de la bornitude uniforme des solutions dans l'étape (1), on aura $\| x(t) \| \leq c(\bar{R}) = \bar{c}$, $\forall t \geq t_2$.

D'où on conclut que,

$$\parallel x(t) \parallel \leq \bar{c}, \forall t \geq t_1 = t_0 + T(\bar{c}, \delta).$$

Le théorème suivante donne des conditions pour que le système (1.2.1) soit globalement uniformément pratiquement exponentiellement stable.

Théorème 1.5.2. ***(Stabilité exponentielle pratique)****.*
On considère le système (1.2.1). S'il existe une fonction $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *continument différentiable vérifiant :*

$$k_1 \parallel x \parallel^2 \leq V(t,x) \leq k_2 \parallel x \parallel^2 . \tag{1.5.8}$$

$$\dot{V}(t,x) \leq -k_3 V(t,x) + r. \tag{1.5.9}$$

Pour tout $t \geq 0$ *et* $x \in \mathbb{R}^n$*, où* k_1, k_2, k_3 *et* r *sont des constantes strictement positive.*
Alors, le système (1.2.1) est globalement pratiquement uniformément exponentiellement stable .
De plus, B_α *est globalement uniformément exponentiellement stable avec*

$$\alpha = \sqrt{\frac{r}{k_1 k_3}}.$$

Preuve. *La dérivée de* V *le long des trajectoire du système (1.2.1) est donnée par :*

$$\begin{aligned}\dot{V}(t,x) &= \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x) \\ &\leq -k_3 V(t,x) + r.\end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$V(t,x) \leq V(t_0,x_0) e^{-k_3(t-t_0)} + \frac{r}{k_3}$$

Alors

$$\parallel x(t,t_0,x_0) \parallel \leq \sqrt{\frac{k_2}{k_1}} \parallel x_0 \parallel e^{-\frac{k_3}{2}(t-t_0)} + \sqrt{\frac{r}{k_1 k_3}}.$$

1.6 Stabilisation

Dans cette section nous allons aborder le problème de la stabilisation des systèmes contrôlés linéaires et non-linéaires.

1.6.1 Stabilisations des systèmes contrôlés linéaires

Cas autonome

On appelle système linéaire contrôlé, tout système de la forme

$$\dot{x}(t) = Ax + Bu. \tag{1.6.1}$$

$A \in M_{(n,n)}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{(n,p)}(\mathbb{R})$.

On considère le système linéaire (1.6.1), on dit que alors qu'il est stabilisable par un feedback, s'il existe une matrice $K \in M_{(p,n)}(\mathbb{R})$ telle que le feedback $u = Kx$ stabilise (1.6.1), autrement dit, le système en boucle fermée $\dot{x} = Ax + BKx$ est asymptotiquement stable.

Définition 1.6.1. *On dit que la paire (A, B) est contrôlable, si le rang de la matrice $(BAB...A^{n-1}B)$ est égale à n. Dans ce cas, il existe une matrice $K \in M_{(p,n)}(\mathbb{R})$ telle que le système $\dot{x} = (A + BK)x$ soit asymptotiquement stable (les valeurs propres de $(A + BK)$ sont à parties réelles strictement négatives).*

Cas non autonome

On considère le système linéaire contrôlé de la forme

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t). \tag{1.6.2}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $B(t) \in \mathbb{R}^{n\times m}$

Définition 1.6.2. *On dit que le système linéaire (1.6.2) est stabilisable par un feedback, s'il existe une matrice $K(t) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, telle que le système en boucle fermée*

$$\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)K(t)x(t).$$

Est asymptotiquement stable.

1.6.2 Stabilisation des systèmes contrôlés non-linéaires

Cas non autonome

Soit le système contrôlé

$$\dot{x} = f(t, x, u). \tag{1.6.3}$$

Où $x \in \mathbb{R}^n$ c'est l'état et $u \in \mathbb{R}^m$ c'est l'entrée.

Définition 1.6.3. *On dit que le système (1.6.3) est stabilisable, s'il existe une fonction continue $u(t, x)$ telle que l'origine du système (1.6.3) en boucle fermée par $u(t, x)$ soit asymptotiquement stable. La fonction $u(t, x)$ s'appelle feedback (ou contrôleur).*

Remarquons que la théorie de la stabilité des systèmes linéaires est simple. Aussi, une approche de la stabilisation des systèmes non linéaires se réfère à cette théorie. Il s'agit d'associer au système (1.6.3) un système plus simple dont l'étude permet d'avoir des renseignements sur le système initial. La méthode classique lorsque $f(t, 0, 0) = 0$, est de considérer le linéarisé à l'origine, c'est à dire :

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ \\ A(t) = \dfrac{\partial f}{\partial x}, \quad B(t) = \dfrac{\partial f}{\partial u}. \end{cases} \tag{1.6.4}$$

On sait alors que si (1.6.4) est stabilisable, (1.6.3) l'est aussi et avec le même feedback, mais cette méthode ne permet de conclure que localement.

Cas autonome

Dans le cas des système non linéaires, pour la stabilisation locale dans le cas autonome des conditions nécessaires ont été données dans **[15,8]** et diverses techniques (techniques d'approximation, linéarisation,...)on été utilisées pour obtenir des feedbacks stabilisants. Pour les résultats de stabilisation globale, ils sont essentiellement basés sur les techniques de Lyapunov .
Le théorème suivant donne des conditions nécessaires de stabilisation asymptotique d'un système non linéaire par une commande de classe C^1.

Théorème 1.6.1. *[15]*
Si le système $\dot{x} = f(x, u)$ admet un feedback stabilisant de classe C^1 dans un voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$ alors :

1. *Le système linéarisé n'admet pas de modes incontrôlables associés à des valeurs propres strictement positives.*
2. *Il existe un voisinage V de $(0, 0)$ tel que pour tout $\xi \in V$, il existe un contrôle $u_\xi(.)$ défini sur $[0, \infty[$ qui ramène le système de l'état $x = \xi$ en $t = 0$ à l'état $x = 0$ en $t = \infty$. En d'autres termes, si $x(t)$ est une solution de $\dot{x} = f(x, u_\xi)$ vérifiant $x(0) = \xi$ alors, $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = 0$.*
3. *L'application $\gamma : U \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $(x, u) \longmapsto f(x, u)$ est surjective sur un voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^n$.*

Définition 1.6.4. *Un système de la forme $\dot{x} = f(x, u)$ qui vérifie la condition (2) du Théorème (1.6.1) sera dir stabilisable en boucle ouverte ou encore asymptotiquement contrôlable à l'origine.*

1.7 Observateur

On considère le système entrée-sortie suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, u) \\ \\ y = h(t, x) \end{cases} \tag{1.7.1}$$

où $\dot{x} = f(t, x, u)$ est un système contrôlé, $x \in \mathbb{R}^n$ l'état du système, $u \in \mathbb{R}^m$ l'entrée du système (contrôle du système) et $y \in \mathbb{R}^p$ la sortie du système. $h(t, x)$ est une fonction de classe C^1 qui s'appelle fonction d'observation.

Le but d'un observateur est de trouver une estimation de la valeur courante de l'état en fonction des entrées et des sorties passées.

Définition 1.7.1. *(**Observateur asymptotique**)*
On appelle observateur asymptotique local de (1.7.1) tout système de la forme

$$(\hat{S}) : \dot{\hat{x}} = G(t, \hat{x}, y, u).$$

Vérifiant les deux propriétés suivantes :

i) Si pour tout t_0, $\hat{x}_0 = x_0$ *alors* $\hat{x}(t) = x(t)$ *pour tout* $t \geq t_0$.

ii) Il existe un voisinage $U \subset \mathbb{R}^n$ *tel que pour toute erreur initiale*

$$\hat{x}_0 - x_0 \in U$$

on a $\hat{x}(t) - x(t) \in U, \ \forall t \geq t_0$ *et* $\lim\limits_{t \longrightarrow \infty} \| \hat{x}(t) - x(t) \| = 0.$

Cet observateur est asymptotique globale si dans (ii) on remplace U par $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.7.2. *(**Observateur exponentiel**)*
On appelle observateur exponentiel locale de (1.7.1) *tout système de la forme*

$$(\hat{S}) : \dot{\hat{x}} = G(t, \hat{x}, y, u).$$

Vérifiant les deux propriétés suivantes :
i) Si pour tout t_0, $\hat{x}_0 = x_0$ *alors* $\hat{x}(t) = x(t)$ *pour tout* $t \geq t_0$.
ii) Il existe un voisinage $U \subset \mathbb{R}^n$ *tel que pour toute erreur initiale*

$$\hat{x}_0 - x_0 \in U$$

on a :

$$\| \hat{x}(t) - x(t) \| \leq \lambda_1 \| \hat{x}_0 - x_0 \| e^{-\lambda_2 (t - t_0)}.$$

Avec λ_1 *et* λ_2 *sont des constantes positives.*
Cet observateur est exponentiel globale si dans (ii) on remplace U par $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.7.3. *(**Observateur exponentiel pratique**)*
On appelle observateur exponentiel pratique de (1.7.1) tout système de la forme

$$(\hat{S}) : \dot{\hat{x}} = G(t, \hat{x}, y, u).$$

Vérifiant les deux propriétés suivantes : Pour tout erreur initiale

$$\hat{x}_0 - x_0 \in \mathbb{R}^n$$

on a

$$\| \hat{x}(t) - x(t) \| \leq \lambda_1 \| \hat{x}_0 - x_0 \| e^{-\lambda_2 (t - t_0)} + r, \quad \forall t \geq t_0.$$

Avec λ_1 *et* λ_2 *et r sont des constantes positives.*

Définition 1.7.4. *(**observateur exponentiel pratique fort**)*
On appelle observateur exponentiel pratique de (1.7.1) tout système de la forme

$$(\hat{S}_\theta) : \dot{\hat{x}} = G_\theta(t, \hat{x}, y, u).$$

Vérifiant pour tout $\theta \geq 0$*, il existe* $\lambda(\theta), K(\theta), p(\theta) > 0$ *tels que pour tout erreur initiale* $\hat{x}_0 - x_0$*,*

$$\| \hat{x}(t) - x(t) \| \leq p(\theta) + K(\theta) \| \hat{x}_0 - x_0 \| e^{-\lambda(\theta)(t-t_0)}.$$

Avec $\lambda(\theta) \longrightarrow +\infty$ *et* $p(\theta) \longrightarrow 0$ *lorsque* $\theta \longrightarrow +\infty$ *.*

Cas linéaire

On considère le système linéaire entrée-sortie de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ \\ y = Cx \end{cases} \tag{1.7.2}$$

où $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m$ et $y \in \mathbb{R}^p$.
A une matrice constante $(n \times n)$, B une matrice constante $(n \times m)$ et C une matrice constante $(p \times n)$.

Définition 1.7.5. *On dit que paire (A,C) est observable si et seulement si le rang de la matrice* $(C^T(CA)^T(CA^2)^T......(CA^{n-1})^T)^T$ *est égale à n .*

Théorème 1.7.1. *Si (A,C) est observable, alors il existe une matrice de gain* $L_{(n \times p)}$ *telle que (A - LC) est une matrice de Horwitz .*

Définition 1.7.6. *(**Observateur de Luenberger**)*
On appelle observateur de Luenberger du système linéaire (1.7.2) un modèle de l'état de la forme :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu - L(C\hat{x} - y).$$

Où L est la matrice de gain définie dans le théorème (1.7.1) .

Conséquence

Si la pair (A,C) est observable, alors on peut concevoir un observateur du type :

$$(\hat{S}) : \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu - L(C\hat{x} - y).$$

En fait, si on pose $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$, l'erreur entre l'estimation $\hat{x}(t)$ et l'état du système (1.7.2), alors on aura

$$\dot{e}(t) = (A - LC)e(t).$$

Cette équation s'appelle l'équation de l'erreur qui globalement exponentiellement stable d'après le théorème (1.7.1), vue que la matrice (A - LC) est de Horwitz. Il s'ensuit que $(\hat{S})$ est un observateur exponentiel pour le système (1.7.2).

1.8 Conclusion

Ce chapitre a été consacré d'une part à quelques rappels sur les concepts relatifs à la stabilité (stabilité au sens de Lyapunov, théorème de Lyapunov) et à l'observabilité (rappels sur quelques définitions sur la notion d'observabilité et formulation du principe d'estimation d'état).

CHAPITRE 2

PRINCIPE DE SÉPARATION

2.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de trouver un principe de séparation basé sur l'analyse des systèmes en cascade [**4**]. On donne des conditions suffisantes pour garantir la stabilité exponentielle pratique uniforme globale du système en boucle fermé par un feedback d'état estimé.

2.2 Classe de systèmes à partie nominale linéaire autonome

1. On considère une classe de systèmes incertains qui est décrite par les équations

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Bf(t,x) \\ \\ y = Cx \end{cases} \tag{2.2.1}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ (l'état), $u \in \mathbb{R}^m$(l'entré) et $y \in \mathbb{R}^p$ (la sortie), les matrices A, B, C, sont données par :

$$A = \text{blockdiag}[A_1, ..., A_p], \quad A_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{r_i \times r_i}$$

$$B = \text{blockdiag}[B_1, ..., B_p], \quad B_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{r_i \times 1}$$

$$C = \text{blockdiag}[C_1, ..., C_p], \quad C_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{1 \times r_i}$$

où $1 \leqslant i \leqslant p$ et $n = r_1 + ... + r_p$.
La notation $A = \text{blockdiag}[A_1, ..., A_p]$ représente la matrice dont la diagonale est formée par les blocs (A_i), où $1 \leqslant i \leqslant p$. La fonction inconnue $f(t, x)$ est utilisée pour représenter l'incertitude non linéaire. Le système sans incertitude, qui est appelé système nominal, est décrit par

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ \\ y = Cx \end{cases} \tag{2.2.2}$$

On suppose que l'hypothèse suivante est acquise.
$(\mathcal{H}_1)$ f(.,.) est globalement uniformément bornée, c'est à dire,

$$\|f(t, x)\| \leq M, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n.$$

où M est une constante positive.
Dans cette section, on montre qu'on peut choisir des matrices K et L de sorte que le feedback linéaire

$$u(x) = Kx. \tag{2.2.3}$$

rend le système (2.2.1) globalement pratiquement fortement stable et que le système

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu - L(C\hat{x} - y). \tag{2.2.4}$$

Soit un observateur pratique fort pour le système (2.2.1). On vérifie enfin que le système en boucle fermée par le compensateur linéaire

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + BK\hat{x} - L(C\hat{x} - y) \\ \\ u(\hat{x}) = K\hat{x} \end{cases} \tag{2.2.5}$$

est globalement pratiquement fortement stable.

2.2.1 Stabilisation par retour d'état

On considère le feedback linéaire (2.2.3) où K est choisie comme suit

$$K = blockdiag[K_1, ..., K_p], \quad K_i = \big(\frac{\alpha_1^i}{\varepsilon^{r_i}}, ..., \frac{\alpha_{r_i}^i}{\varepsilon}\big).$$

Les réels α_j^i sont choisis de sorte que les racines de

$$s^{r_i} + \alpha_1^i s^{r_i - 1} + \ + \alpha_{ri}^i = 0.$$

Soient à parties réelles strictement négatives, pour tout $i = 1, ..., p$ et $0 < \varepsilon < 1$.
Le système en boucle fermée (2.2.1)-(2.2.3) est donné par

$$\dot{x} = (A + BK)x + Bf(t, x). \tag{2.2.6}$$

Soient

$$\begin{aligned} \tilde{k}_i &= \alpha_1^i, ..., \alpha_{r_i}^i \\ \tilde{k} &= \text{blockdiag}[\tilde{k}_1, ..., \tilde{k}_P] \\ \tilde{A}_K &= A + BK \\ D_i &= \begin{pmatrix} \varepsilon^{r_i - 1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \\ D(\varepsilon) &= \text{blockdiag}[D_1, ..., D_p] \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

Alors, on a

$$\tilde{A}K = \varepsilon D^{-1}(\varepsilon)(A + BK)D(\varepsilon).$$

On pose $\chi = D(\varepsilon)^{-1}x$, le système (2.2.6) devient

$$\chi = \frac{1}{\varepsilon}\tilde{A}_K\chi + Bf(t, D(\varepsilon)\chi). \tag{2.2.8}$$

Pour tout $|\varepsilon| \leq 1$,

$$\|x\| \leq \|\chi\|.$$

Si on vérifie que le système (2.2.8) est globalement pratiquement fortement stable alors il en est de même pour le système (2.2.6).

Ce qui nous amène au résultat suivant.

Théorème 2.2.1. *Sous l'hypothèse $(\mathcal{H}_1)$, le système (2.2.6) est globalement pratiquement fortement stable.*

2.2.2 Conception d'un observateur

On considère l'observateur (2.2.4) où L est donnée par

$$L = \text{blockdiag}[L_1, ..., L_p], \quad L_i = \begin{pmatrix} \frac{\beta_1^i}{\varepsilon} \\ \vdots \\ \frac{\beta_{r_i}^i}{\varepsilon^{r_i}} \end{pmatrix}_{r_i \times 1}$$

Les constantes β_j^i sont choisies de sorte que les racines de l'équation

$$s^{r_i} + \beta_1^i s^{r_i - 1} + \ldots + \beta_{r_i}^i = 0.$$

Soient à parties réelles strictement négatives, pour tout $i = 1, ..., p$. Notons $e = \hat{x} - x$, l'erreur entre l'estimation $\hat{x}$ donnée par l'observateur (2.2.4) et l'état réel x du système (2.2.1). Son équation est représentée par

$$\dot{e} = (A - LC)e - Bf(t, x). \tag{2.2.9}$$

Posons

$$\tilde{L} = \text{blockdiag}[\tilde{L}_1, ..., \tilde{L}_p]$$

$$\tilde{L}_i = \begin{pmatrix} \beta_1^i \\ \vdots \\ \beta_{r_i}^i \end{pmatrix}$$

$$\dot{A}_L = A - LC$$

alors
$$\dot{A}_L = \varepsilon D(\varepsilon)^{-1}(A - LC)D(\varepsilon).$$
Où $D(\varepsilon)$ est donnée par (2.2.7). En posant $\eta = D(\varepsilon)^{-1}(\hat{x}-x)$, l'équation de l'erreur devient
$$\dot{\eta} = \frac{1}{\varepsilon}\tilde{A}_L\eta - Bf(t,x) \tag{2.2.10}$$
Il est clair que
$$\|e\| \leq \|\eta\|.$$
Si on montre que le système (2.2.10) est globalement pratiquement fortement stable alors il en est de même pour le système (2.2.9).
On déduit alors le résultat suivant.

Théorème 2.2.2. *Considérons le système incertain* (2.2.1)*. Si l'hypothèse* ($\mathcal{H}_1$) *est satisfaite, alors on peut choisir L de sorte que le système (2.2.4) soit un observateur exponentiel pratique fort pour (2.2.1).*

On se propose maintenant de vérifier que le système (2.2.1) est globalement pratiquement stabilisable par le compensateur linéaire (2.2.5). En effectuant les mêmes changements de variables, le système en boucle fermée peut se mettre sous la forme :
$$\dot{\chi} = \frac{1}{\varepsilon}\tilde{A}_K\chi + \frac{1}{\varepsilon}B\tilde{K}\eta + Bf(t, D(\varepsilon)\chi). \tag{2.2.11}$$
$$\dot{\eta} = \frac{1}{\varepsilon}\tilde{A}_L\eta + Bf(t, D(\varepsilon)\chi). \tag{2.2.12}$$
On a le résultat suivant.

Théorème 2.2.3. *Sous l'hypothèse* ($\mathcal{H}_1$) *le système (2.2.11) est globalement pratiquement fortement stable.*

2. On considère maintenant le système dynamique suivant
$$\begin{cases} \dot{x} & = Ax + Bu + f(t,x) \\ \\ y & = Cx \end{cases} \tag{2.2.13}$$
où $t \in \mathbb{R}_+$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^p$ et $y \in \mathbb{R}^q$.
La fonction $f\ :\ [0,+\infty[\times\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est continue, localement

Lipschitzienne en x uniformément en t. Les matrices $A_{(n\times n)}$, $B_{(n\times p)}$ et $C_{(q\times n)}$ sont des matrices constantes.

Donnant ce lemme technique.

Lemme 2.2.1. *Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$, alors*

$$a^n + b^n \leq \frac{1}{n}(a+b)n, \quad \forall n \in]0,1[.$$

Introduisant les hypothèses suivantes :
$(\mathcal{H}_2)$ La paire de matrices (A, B) est contrôlable. Il existe alors une matrice constante $K(p \times n)$ telle que les valeurs propres de A_K sont à parties réelles strictement négatives où $A_K = A + BK$. Ce qui implique que pour toute matrice Q_1 définie positive symétrique,

$$Q_1 \geq c_1 I, \quad c_1 > 0.$$

Il existe une matrice P_1 définie positive symétrique,

$$c_2 I < P_1 < c_3 I, \quad c_2 > 0, \quad c_3 > 0.$$

Telle que

$$A_K^T P_1 + P_1 A_K = -Q_1. \tag{2.2.14}$$

On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} &c_1\|x\|^2 \leq x^T Q_1 x. \\ &c_2\|x\|^2 \leq x^T P_1 x \leq c_3\|x\|^2. \end{aligned}$$

$(\mathcal{H}_3)$ Il existe une fonction $\psi(t)$, telle que pour tout $t \geq 0$,

$$\|f(t,x)\| \leq \psi(t). \tag{2.2.15}$$

Avec

$$\int_0^{+\infty} \psi(s)ds \leq M < +\infty.$$

Stabilisation pratique :

Théorème 2.2.4. *Sous les hypothèses* $(\mathcal{H}_2)$ *et* $(\mathcal{H}_3)$*, le système* (2.2.13) *en boucle fermée par le feedback linéaire* $u(x) = Kx$*, est globalement uniformément pratiquement exponentiellement stable.*

Preuve. *nous considérons une fonction de Lyapunov quadratique* $V(t, x) = x^T P_1 x$*. En prenant en compte et la dérivée de* V *le long des trajectoires du système* (2.2.13) *est donnée par :*

$$\begin{aligned}\dot{V}(t, x) &= \dot{x}^T P_1 x + x^T P_1 \dot{x} \\ &= (A_K x + f(t, x))^T P_1 x + x^T P_1 (A_K x + f(t, x)) \\ &\leq -x^T Q_1 x + 2\|P_1\| \|f(t, x)\| \|x\| \leq -c_1 \|x\| + 2c_3 \psi(t) \|x\| \\ &\leq -\frac{c_1}{c_3} V(t, x) + 2\frac{c_3}{\sqrt{c_2}} \psi(t) \sqrt{V(t, x)}.\end{aligned}$$

Soit $v(t) = \sqrt{V(t, x)}$*. La dérivée de* v *est donnée par* $\dot{v}(t) = \dfrac{\dot{V}(t, x)}{2\sqrt{V(t, x)}}$*, ce qui implique que*

$$\dot{v}(t) \leq -\frac{c_1}{2c_3} v(t) + \frac{c_3}{\sqrt{c_2}} \psi(t).$$

En intégrant entre t_0 *et* t*, on obtient* $\forall t \geq t_0$*,*

$$v(t) \leq v(t_0) e^{-\frac{c_1}{2c_3}(t - t_0)} + \frac{c_3}{\sqrt{c_2}} \int_{t_0}^{t} \psi(s) e^{-\frac{c_1}{2c_3}(t - s)} \, ds.$$

Qui implique que

$$v(t) \leq v(t_0) e^{-\frac{c_1}{2c_3}(t - t_0)} + \frac{c_3}{\sqrt{c_2}} M.$$

Il en résulte que

$$\|x(t)\| \leq \sqrt{\frac{c_3}{c_2}} \|x\| e^{-\frac{c_1}{2c_3}(t - t_0)} + \frac{c_3}{c_2} M.$$

Par conséquent, l'estimation ci-dessus montre la stabilité exponentielle uniforme globale de B_α*, avec* $\alpha = \dfrac{c_3}{c_2} M$ *nous avons prouvé ce système* (2.2.13) *en boucle fermée avec le linéaire feedback* $u(x) = Kx$ *est globalement fortement pratiquement stable.*

Exemple 2.2.1. *On considère le système*

$$\dot{x} = Ax + Bu + f(t, x).$$

Avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad f(t, x) = \frac{1}{1 + t^2}.$$

Le système $\dot{x} = Ax + Bu$ est globalement uniformément stabilisable exponentiellement, on peut prendre un linéaire feedback loi $u(x) = Kx$, $K = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ tel que $A+BK$ est la matrice de Hurwitz. La solution de l'équation de Lyapunov $PA + A^T P = -I$ est donné par

$$\begin{pmatrix} 5/16 & -1/4 \\ -1/4 & 7/16 \end{pmatrix}$$

Soit $V(t, x) = x^T Px$ ce qui satisfait l'hypothèse $(\mathcal{H}_2)$ où

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 6 - \frac{6 - 2\sqrt{7}}{16} > 0, \quad c_3 = 6 - \frac{6 + 2\sqrt{7}}{16} > 0.$$

De plus, la fonction $f(t, x)$ est continue et vérifie l'hypothèse $(\mathcal{H}_3)$, parce que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{\pi}{2} < 1$. Ainsi, toutes les hypothèses du théorème précédent sont vérifiées. Nous concluons que le système S est globalement uniformément stable de manière pratiquement exponentielle par $u(x) = Kx$.

Maintenant, nous allons traiter une autre classe de systèmes en prenant à la place de l'hypothèse $(\mathcal{H}_3)$ la suivante.
$(\mathcal{H}'_3)$ On suppose qu'il existe une constante $M' > 0$, tel que

$$\|f(t, x)\| \leq M'. \tag{2.2.16}$$

Notons que, si l'on remplace M' par $M' \longrightarrow 0$ comme $t \longrightarrow +\infty$, nous supposerons que $f(t, 0) = 0, \ \forall t \geq 0$, de telle sorte que l'origine devient un point d'équilibre.

Théorème 2.2.5. *Sous les hypothèses $(\mathcal{H}_2)$ et $(\mathcal{H}'_3)$, le système (2.2.13) en boucle fermée avec feedback linéaire $u(x) = Kx$ est globalement uniformément stable pratiquement exponentiellement.*

Preuve. *Nous considérons une fonction quadratique de Lyapunov condidate $V(t,x) = x^T P_1 x$. Compte tenu de (2.2.14) (2.2.15), la dérivée de V le long des trajectoires du système (2.2.13) est donnée par*

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t,x) &= \dot{x}^T P_1 x + x^T P_1 \dot{x} \\
&= (A_K x + f(t,x))^T P_1 x + x^T P_1 (A_K x + f(t,x)) \\
&\leq -x^T Q_1 x + 2\|P_1\|\|f(t,x)\|\|x\| \leq -c_1\|x\|^2 + 2c_3 M'\|x\| \\
&\leq -\frac{c_1}{c_3} V(t,x) + 2\frac{c_3}{\sqrt{c_2}} M' \sqrt{V(t,x)}.
\end{aligned}$$

Soit $v(t) = \sqrt{V(t,x)}$. La dérivée de v est donnée par $\dot{v}(t) = \dfrac{\dot{V}(t,x)}{2\sqrt{V(t,x)}}$, ce qui implique que

$$\dot{v}(t) \leq -\frac{c_1}{2c_3} v(t) + \frac{c_3}{\sqrt{c_2}} M'.$$

En integrant entre t_0 et t, on obtient $\forall t \geq t_0$,

$$v(t) \leq v(t_0) e^{-\frac{c_1}{2c_3}(t-t_0)} + \frac{2c_3^2}{\sqrt{c_2}c_1} M'.$$

Il s'ensuit cela,

$$\|x(t)\| \leq \sqrt{\frac{c_3}{c_2}} \|x_0\| e^{-\frac{c_1}{2c_3}(t-t_0)} + \frac{2c_3^2}{c_2 c_1} M'.$$

Cela donne la stabilité exponentielle uniforme globale de B_v, avec

$$v = \frac{2c_3^2}{\sqrt{c_2}c_1} M'.$$

Nous avons prouvé que le système (2.2.13) en boucle fermée avec feedback linéaire $u(x) = Kx$ est globalement fortement stable en pratique.

2.2.3 Conception d'observateur pratique

On considère le système (2.2.13) satisfaisant les l'hypothèses suivantes.
$(\mathcal{H}_4)$ Le couple (A, C) est observable. Donc il existe une matrice constante $L_{(n\times q)}$ telle que les valeurs propres de A_L sont à parties réelles strictement négatives où $A_L = A - LC$. Ce qui implique que pour toute

matrice Q_2 définie positive symétrique $Q_2 \geq b_1 I, b_1 > 0$. Il existe une matrice symétrique définie positive P_2

$$b_2 I < P_2 < b_3 I, \quad b_2 > 0, \quad b_3 > 0.$$

telle que

$$A_L^T P_2 + P_2 A_L = -Q_2, \quad ou \quad A_L = A - LC. \tag{2.2.17}$$

Pour concevoir l'observateur, on considère le système dynamique

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + f(t,\hat{x}) - L(C\hat{x} - y). \tag{2.2.18}$$

Où $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ est l'état estimé de $x(t)$, dans le sens que $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ satisfait l'estimation suivante :

$$\|e(t)\| \leq \lambda_1 \|e(t_0)\| e^{-\lambda_2 (t-t_0)} + r, \quad \forall t \geq t_0.$$

Proposition 2.2.1. *Sous les hypothèses $(\mathcal{H}_3)$ et $(\mathcal{H}_4)$, le système (2.2.18) est un observateur exponentielle pratique pour le système (2.2.13).*

Preuve. *On considère maintenant l'équation d'erreur avec*
$e = \hat{x} - x$,

$$\dot{e} = \dot{\hat{x}} - \dot{x} = (A - LC)e + f(t,\hat{x}) - f(t,x). \tag{2.2.19}$$

Nous considérons la fonction quadratique de Lyapunov candidate,

$$W(t,e) = e^T P_2 e.$$

En tenant compte (2.2.16), la dérivée de W le long des trajectoires du système (2.2.19) est donnée par

$$\begin{aligned}
\dot{W}(t,e) &= \dot{e}^T P_2 e + e^T P_2 \dot{e} \\
&= (A_L e + f(t,\hat{x}) - f(t,x))^T P_2 e + e^T P_2 (A_L e + f(t,\hat{x}) - f(t,x)) \\
&\leq -e^T Q_2 e + 2\|P_2\| \|f(t,\dot{x}) - f(t,x)\| \|e\| \\
&\leq -b_1 \|e\|^2 + 4 b_3 \psi(t) \|e\| \\
&\leq -\frac{b_1}{b_3} W(t,e) + 4\frac{b_3}{\sqrt{b_2}} \psi(t) \sqrt{W(t,e)}.
\end{aligned}$$

Soit $w(t) = \sqrt{W(t,e)}$. *La dérivée de* w *est donnée par* $\dot{w}(t) = \dfrac{\dot{w}(t,e)}{2\sqrt{W(t,e)}}$, *ce qui implique que*

$$\dot{w}(t) \leq -\frac{b_1}{2b_3}w(t) + 2\frac{b_3}{\sqrt{b_2}}\psi(t).$$

En intégrant entre t_0 *et* t, *on obtient* $\forall t \geq t_0$,

$$w(t) \leq w(t_0)e^{-\frac{b_1}{2b_3}(t-t_0)} + \frac{2b_3}{\sqrt{b_2}}\int_{t_0}^{t}\psi(s)e^{-\frac{b_1}{2b_3(t-s)}}ds.$$

On a,

$$w(t) \leq w(t_0)e^{-\frac{b_1}{2b_3}(t-t_0)} + \frac{2b_3}{\sqrt{b_2}}M.$$

Il en résulte que,

$$\|e(t)\| \leq \sqrt{\frac{b_3}{b_2}}\|e(t_0)\|e^{-\frac{b_1}{2b_3}(t-t_0)} + \frac{2b_3}{b_2}M.$$

La dernière estimation montre la stabilité exponentielle uniforme globale de $B_{\mathcal{K}}$ *en respectant l'équation d'erreur avec* $\mathcal{K} = \dfrac{2b_3}{b_2}M$. *Par conséquent, nous pouvons en déduire que, (2.2.19) est globalement pratiquement exponentiellement stable. Nous concluons que, l'origine du système (2.2.18) est un observateur exponentiel pratique pour le système (2.2.13).*

Proposition 2.2.2. *Sous les hypothèses* $(\mathcal{H}'_3)$ *et* $(\mathcal{H}_4)$, *le système (2.2.18) est un observateur exponentielle pratique pour le système (2.2.13).*

Preuve. *On considère maintenant l'équation d'erreur avec*

$$e = \hat{x} - x,$$

$$\dot{e} = \dot{\hat{x}} - \dot{x} = (A - LC)e + f(t,\hat{x}) - f(t,x). \tag{2.2.20}$$

La fonction quadratique de Lyapunov condidate peut être prise comme

$$W(t,e) = e^T P_2 e.$$

En tenant compte (2.2.16), la dérivée de W le long des trajectoires du système (2.2.20) est donnée par

$$\begin{aligned}
\dot{W}(t,e) &= \dot{e}^T P_2 e + e^T P_2 \dot{e} \\
&= (A_L e + f(t,\hat{x}) - f(t,x))^T P_2 e + e^T P_2 (A_L e + f(t,\hat{x}) - f(t,x)) \\
&\leq -e^T Q_2 e + 2\|P_2\| \|f(t,\dot{x}) - f(t,x)\| \|e\| \\
&\leq -b_1 \|e\|^2 + 4 b_3 M' \|e\| \\
&\leq -\frac{b_1}{b_3} W(t,e) + 4\frac{b_3}{\sqrt{b_2}} M' \sqrt{W(t,e)}.
\end{aligned}$$

Soit $w(t) = \sqrt{W(t,e)}$. *La dérivée de* w *est donnée par* $\dot{w}(t) = \dfrac{\dot{w}(t,e)}{2\sqrt{W(t,e)}}$, *ce qui implique que*

$$\dot{w}(t) \leq -\frac{b_1}{2b_3} w(t) + 2\frac{b_3}{\sqrt{b_2}} M'.$$

En intégrant entre t_0 *et* t *,on obtient* $\forall t \geq t_0$,

$$w(t) \leq w(t_0) e^{-\frac{b_1}{2b_3}(t-t_0)} + \frac{4b_3^2}{\sqrt{b_2} b_1} M'.$$

Il en résulte que,

$$\|e(t)\| \leq \sqrt{\frac{b_3}{b_2}} \|e(t_0)\| e^{-\frac{b_1}{2b_3}(t-t_0)} + \frac{4b_3^2}{b_2 b_1} M'.$$

La dernière inégalité implique la stabilité exponentielle uniforme globale de B_η *avec* $\eta = \dfrac{4b_3^2}{b_2 b_1} M'$. *On peut donc en déduire que l'origine du système (2.2.19) est globalement pratiquement exponentiellement stable. Il s'ensuit que le système (2.2.18) est un observateur exponentiel pratique pour le système (2.2.13). Notons que, si l'on suppose que* $M' = M'(t)$ *qui tend vers zéro quand tend vers* $+\infty$, *alors les solutions de l'équation d'erreur convergent exponentiellement vers zéro.*

2.2.4 Principe de séparation

On considère le système (2.2.13) contrôlé par le feedback linéaire

$$u(\hat{x}) = K\hat{x}$$

estimé par l'observateur (2.2.18).

Théorème 2.2.6. *Sous les hypothèses $(\mathcal{H}_2)$, $(\mathcal{H}_3)$ et $(\mathcal{H}_4)$, le système*

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + BK\hat{x} + f(t,\hat{x}) - LCe \\ \\ \dot{e} = (A - LC)e + f(t,\hat{x}) - f(t,x) \end{cases} \tag{2.2.21}$$

est globalement pratiquement uniformément exponentiellement stable.

Preuve. *Afin d'étudier le problème de stabilisation via un observateur, on considère le système en cascade*

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \varphi(t,\hat{x}) + g(t,\hat{x})e \\ \\ \dot{e} = h(t,\hat{x},e) \end{cases} \tag{2.2.22}$$

où $\varphi(t,\hat{x}) = A\hat{x} + BK\hat{x} + f(t,\hat{x})$, $g(t,\hat{x}) = -LC$

$$h(t,\hat{x},e) = (A - LC)e + f(t,\hat{x}) - f(t,x)$$

On a, $\dot{\hat{x}} = \varphi(t,\hat{x})$ *est globalement pratiquement fortement stable et la fonction de Lyapunov associée peut être prise comme* $v(t,\hat{x}) = \sqrt{\hat{x}^T P_1 x}$. *Cette fonction de Lyapunov satisfait*

$$c_2\|\hat{x}\| \leq v(t,\hat{x}) \leq c_3\|\hat{x}\|. \tag{2.2.23}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,\hat{x}) + \frac{\partial v}{\partial \hat{x}}\varphi(t,\hat{x}) \leq -c_4 v(t,\hat{x}) + \frac{c_3}{\sqrt{c_2}}\psi(t),$$

$\dfrac{\partial v}{\partial \hat{x}} \leq \dfrac{c_3}{\sqrt{c_2}}$ *où* $c_4 = \dfrac{c_1}{2c_3}$.
Aussi, $\dot{e} = h(t,x,\hat{e})$ *est globalement pratiquement fortement stable et l'estimation suivante peut être obtenue*

$$\|e(t)\| \leq \sqrt{\frac{b_3}{b_2}}\|e(t_0)\|e^{-\dfrac{b_1}{2b_3}(t-t_0)} + \frac{2b_3}{b_2}M.$$

Par conséquent, la dérivée de v le long des trajectoires du système (2.2.18) *est donnée en utilisant (2.2.22) et (2.2.23).*

$$\begin{aligned}
\dot{v}(t,\hat{x}) &= \frac{\partial v}{\partial t}(t,\hat{x}) + \frac{\partial v}{\partial \hat{x}}\varphi(t,\hat{x}) + \frac{\partial v}{\partial \hat{x}}g(t,\hat{x})e \\
&\leq -c_4 v(t,\hat{x}) + \frac{c_3}{\sqrt{c_2}}\psi(t) + \frac{c_3}{\sqrt{c_2}}\|LC\|\|e\| \\
&\leq -c_4 v(t,\hat{x}) + \frac{c_3}{\sqrt{c_2}}\psi(t) + \frac{c_3}{\sqrt{c_2}}\|LC\|\left(\sqrt{\frac{b_3}{b_2}}\|e(t_0)\|e^{-\dfrac{b_1}{2b_3}(t-t_0)} + \frac{2b_3}{b_2}M\right).
\end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\dot{v}(t,\hat{x}) \leq -c_4 v(t,\hat{x}) + \lambda\|e(t_0)\|e^{-\gamma(t-t_0)} + \frac{c_3}{\sqrt{c_2}}\psi(t) + R,$$

où

$$\lambda = \frac{c_3}{\sqrt{c_2}}\|LC\|\sqrt{\frac{b_3}{b_2}}, \quad \gamma = -\frac{b_1}{2b_3}, \quad R = \frac{2b_3c_3}{b_2\sqrt{c_2}}M\|LC\|.$$

En intégrant entre t_0 et t, on obtient $\forall t \geq t_0$,

$$\begin{aligned}
v(t,\hat{x}) &\leq v(t_0,\hat{x}_0)e^{-c_4(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t}\left(\lambda\|e(t_0)\|e^{-\gamma(t-t_0)} + \frac{c_3}{\sqrt{c_2}}\psi(t) + R\right)e^{-c_4(t-s)}ds \\
&\leq v(t_0,\hat{x}_0)e^{-c_4(t-t_0)} + \lambda\|e(t_0)\|\int_{t_0}^{t} e^{-c_4(t-s)}e^{-\gamma(s-t_0)}ds + \int_{t_0}^{t}\left(R + \frac{c_3}{\sqrt{c_2}}\psi(t)\right)e^{-c_4(t-s)}ds \\
&\leq v(t_0,\hat{x}_0)e^{-c_4(t-t_0)} + \lambda\|e(t_0)\|\int_{t_0}^{t} e^{-c_4 t}e^{c_4 s}e^{-\gamma s}e^{\gamma t_0}ds + \frac{c_3}{\sqrt{c_2}}M + R\left[\frac{1}{c_4}e^{-c_4(t-s)}\right]_{t_0}^{t} \\
&\leq v(t_0,\hat{x}_0)e^{-c_4(t-t_0)} + \lambda\|e(t_0)\|e^{-c_4 t}e^{\gamma t_0}\int_{t_0}^{t} e^{c_4 s}e^{-\gamma s}ds + \frac{c_3}{\sqrt{c_2}}M + \frac{R}{c_4}\left[1 - e^{-c_4(t-t_0)}\right].
\end{aligned}$$

Donc, il existe des constantes positives β et μ, telle que

$$v(t,\hat{x}) \leq v(t_0,\hat{x}_0)e^{-c_4(t-t_0)} + \lambda\beta\|e(t_0)\|e^{-\mu(t-t_0)} + \frac{c_3}{\sqrt{c_2}}M + \frac{R}{c_4}\left[1 - e^{-c_4(t-t_0)}\right].$$

Soit $\delta = \min(c_4, \mu)$ et $l = \max(\sqrt{c_3}, \lambda\beta)$, on obtient

$$v(t,\hat{x}) \leq l(\|\hat{x_0}\|, \|e_0\|)e^{-\delta(t-t_0)} + \frac{c_3}{\sqrt{c_2}}M + \frac{R}{c_4}.$$

Il s'ensuit que

$$\|\hat{x}(t)\| \leq \frac{l}{\sqrt{c_2}}(\|\hat{x_0}, e_0\|)e^{-\delta(t-t_0)} + \frac{c_3}{c_2}M + \frac{R}{c_4\sqrt{c_2}}.$$

Ensuite, le système (2.2.22) en cascade est globalement pratiquement exponentiellement stable.

Nous utiliserons le même argument que dans le théorème pour prouver un résultat analogique lorsque f est une fonction bornée.

Théorème 2.2.7. *Sous les hypothèses $(\mathcal{H}_2)$, $(\mathcal{H}_3')$ et $(\mathcal{H}_4)$, le système (2.2.21)est globalement pratiquement uniformément exponentiellement stable.*

Preuve. *Afin d'étudier le problème de stabilisation via un observateur, on considère le système (2.2.22) avec $k(t,\hat{x}) = A\hat{x}+BK\hat{x}+f(t,\hat{x})$, qui satisfont*

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,\hat{x}) + \frac{\partial v}{\partial \hat{x}}k(t,\hat{x}) \leq -c_4 v(t,x_1) + r_1,$$

où $r_1 = \dfrac{c_3}{\sqrt{c_2}c_1}$. Deuxièment, $\dot{e} = h(t,x,\hat{e})$ est globalement pratiquement fortement stable et l'estimation suivante peut être obtenue :

$$\|e(t)\| \leq \sqrt{\frac{b_3}{b_2}}\|e(t_0)\|e^{-\frac{b_1}{2b_3}(t-t_0)} + \frac{4b_3^2}{b_2 b_1}M'.$$

En utilisant (2.2.22) et (2.2.23), la dérivée de v le long des trajectoires du système (2.2.19) est donnée par :

$$\begin{aligned}
\dot{v}(t,\hat{x}) &= \frac{\partial v}{\partial t}(t,\hat{x}) + \frac{\partial v}{\partial \hat{x}}k(t,\hat{x}) + \frac{\partial v}{\partial \hat{x}}g(t,\hat{x})e \\
&\leq -c_4 v(t,\hat{x}) + r_1 + \frac{c_3}{\sqrt{c_2}}\|LC\|\|e\| \\
&\leq -c_4 v(t,\hat{x}) + r_1 + \frac{c_3}{\sqrt{c_2}}\|LC\|\left(\sqrt{\frac{b_3}{b_2}}\|e(t_0)\|e^{-\frac{b_1}{2b_3}(t-t_0)} + \frac{4b_3^2}{b_2 b_1}M'\right),
\end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\dot{v}(t,\hat{x}) \leq -c_4 v(t,\hat{x}) + \lambda\|e(t_0)\|e^{-\gamma(t-t_0)} + R_1.$$

Où $R_1 = r_1 \dfrac{4b_3^2 c_3}{b_2 b_1 \sqrt{c_2}} M\|LC\|$.
En intégrant entre t_0 *et* t, *on obtient* $\forall t \geq t_0$,

$$\begin{aligned}
v(t,x_1) &\leq v(t_0,\hat{x}_0)e^{-c_4(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t}\left(\lambda\|e(t_0)\|e^{-\gamma(t-t_0)} + R_1\right)e^{-c_4(t-s)}ds \\
&\leq v(t_0,\hat{x}_0)e^{-c_4(t-t_0)} + \lambda\|e(t_0)\|\int_{t_0}^{t} e^{-c_4(t-s)}e^{-\gamma(s-t_0)}ds + R_1\int_{t_0}^{t} e^{-c_4(t-s)}ds \\
&\leq v(t_0,\hat{x}_0)e^{-c_4(t-t_0)} + \lambda\|e(t_0)\|\int_{t_0}^{t} e^{-c_4 t}e^{c_4 s}e^{-\gamma s}e^{\gamma t_0}ds + R_1\left[\frac{1}{c_4}e^{-c_4(t-s)}\right]_{t_0}^{t} \\
&\leq v(t_0,\hat{x}_0)e^{-c_4(t-t_0)} + \lambda\|e(t_0)\|e^{-c_4 t}e^{\gamma t_0}\int_{t_0}^{t} e^{c_4 s}e^{-\gamma s}ds + \frac{R_1}{c_4}\left[1 - e^{-c_4(t-t_0)}\right].
\end{aligned}$$

Donc, il existe des constantes positives β *et* μ, *telle que*

$$v(t,x_1) \leq v(t_0,\hat{x}_0)e^{-c_4(t-t_0)} + \lambda\beta\|e(t_0)\|e^{-\mu(t-t_0)} + \frac{R_1}{c_4}\left[1 - e^{-c_4(t-t_0)}\right].$$

On a $v(t,x_1) \leq l(\|\hat{x_0}\|, \|e_0\|)e^{-\delta(t-t_0)} + \dfrac{R_1}{c_4}$ *pour incertain* $l > 0$.
Ce qui implique que

$$\|\hat{x}(t)\| \leq \frac{l}{\sqrt{c_2}}(\|\hat{x_0}, e_0\|)e^{-\delta(t-t_0)} + \frac{R_1}{c_4\sqrt{c_2}}.$$

Alors, le système en cascade (2.2.22) globalement pratiquement exponentiellement stable.

2.3 Classe de système à partie nominale linéaire non-autonome

On considère le système dynamique

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + f(t,x(t)) \\ \\ y(t) = C(t)x(t) \end{cases} \tag{2.3.1}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est l'état du système , $u(t) \in \mathbb{R}$ est l'entrée et $y(t) \in \mathbb{R}$ est la sortie du système .

La fonction $f(t, x(t)) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est continue localement Lipschitzienne en x uniformément en t. Il existe une constante positive f_0 telle que

$$\| f(t,0) \| \leq f_0 \ , \quad \forall t \geq 0.$$

Le système nominale associé est définie par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ \\ y(t) = C(t)x(t) \end{cases} \tag{2.3.2}$$

$\| \, . \, \|$ c'est la forme euclidienne qui correspond aux matrice .

Définition 2.3.1. *La paire $(A(t), B(t))$ est uniformément contrôlable s'il existe Δ et $\alpha(\Delta)$ telle que le Grammian de contrôlabilité $I(t-\Delta, t)$ satisfait*

$$I(t-\Delta, t) = \int_{t-\Delta}^{t} \psi(t-\Delta, \tau) B(\tau) B^T(\tau) \psi^T(t-\Delta, \tau) d\tau \geq \alpha(\Delta) I > 0.$$

avec $\psi(t, \tau)$ c'est la matrice de transition de l'état qui est définie par :

$$\frac{\partial \psi(t, t_0)}{\partial t} = A(t)\psi(t, t_0), \quad \psi(t,t) = I.$$

$$\psi(t, t_0)\psi(t_0, s) = \psi(t, s) \quad et \quad \psi^{-1}(t, t_0) = \psi(t_0, t).$$

2.3.1 Stabilisation pratique

Nous prouvons dans cette sous-section la stabilisation du système (2.3.1) par un candidat au contrôle par feedback d'état. On suppose que le système (2.3.2) est uniformément contrôlable (voir **[20]**).

Proposition 2.3.1. *Si (A(t),B(t)) est uniformément contrôlable alors le système en boucle fermé par $u(t) = K(t)x(t)$ est globalement pratiquement uniformément stable exponentiellement.*

Pour toute matrice $\varphi_1(t)$ définie positive symétrique

$$\varphi_1(t) \geq c_1 I, \quad c_1 > 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Il existe une matrice $P_1(t)$ définie positive symétrique

$$c_2 I < P_1(t) < c_3 I, \quad c_2 > 0, \quad c_3 > 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Telle que

$$A_K^T(t)P_1(t) + P_1(t)A_K(t) + \dot{P}_1(t) = -\varphi_1(t), \tag{2.3.3}$$

où

$$A_K(t) = A(t) + B(t)K(t).$$

Maintenant, nous prouvons la stabilité uniforme pratique globale de (2.3.1). Nous supposerons l'hypothèse suivante.
$(\mathcal{A}_1)$ Supposons que

$$\|f(t,x)\| \leq \gamma(t)\|x\|^{\frac{1}{2}}, \ \forall t \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.3.4}$$

où $\gamma : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue non négative avec

$$\int_0^{+\infty} \gamma^2(s)ds \leq M_\gamma < +\infty$$

Théorème 2.3.1. *Sous l'hypothèse $(\mathcal{A}_1)$, le système (2.3.2)en boucle fermé par le feedback linéaire $u(t) = K(t)x(t)$ est globalement pratiquement uniformément exponentiellement stable.*

Preuve. *Considérons la fonction de Lyapunov $V(t,x(t)) = x^T(t)P_1(t)x(t)$. la dérivée de V le long des trajectoires du système (2.3.1) est donnée par*

$$\dot{V}(t,x(t)) \leq -\frac{c_1}{c_3}V(t,x(t)) + \frac{2c_3\gamma(t)}{c_2^{\frac{3}{4}}}V(t,x)^{\frac{3}{4}}.$$

En utilisant le changement suivant $v(t) = V(t,x(t))^{\frac{1}{4}}$. Alors, $v(t)$ satisfait l'estimation suivante

$$v(t) \leq v(t_0)e^{-\frac{c_1}{4c_3}(t-t_0)} + \frac{c_3}{2c_2^{\frac{3}{4}}}\left(\int_{t_0}^{t} \gamma(s)e^{\frac{c_1}{4c_3}(s-t_0)}ds\right)e^{-\frac{c_1}{4c_3}(t-t_0)}.$$

Un simple calcul montre que,

$$\left(\int_{t_0}^{t} \gamma(s)e^{\frac{c_1}{4c_3}(s-t_0)}ds\right)e^{-\frac{c_1}{4c_3}(t-t_0)} \leq \sqrt{\frac{2c_3M_\gamma}{c_1}}.$$

Ainsi, nous obtenons

$$v(t) \leq v(t_0)e^{-\frac{c_1}{4c_3}(t-t_0)} + \frac{c_3}{2c_2^{\frac{3}{4}}}\sqrt{\frac{2c_3M_\gamma}{c_1}}.$$

Il s'ensuit que,

$$\|x(t)\| \leq 2\sqrt{\frac{c_3}{c_2}}\|x_0\|e^{-\frac{c_1}{2c_3}(t-t_0)} + \frac{c_3^3M_\gamma}{c_1c_2^2}.$$

Cela implique la stabilité exponentielle uniforme globale de B_κ, avec

$$\kappa = \frac{c_3^3M_\gamma}{c_1c_2^2}.$$

Par conséquent, le système (2.3.1) en boucle fermée avec feedback linéaire $u(t) = K(t)x(t)$ est globalement pratiquement uniformément stable exponentiellement.

2.3.2 Conception d'observateur pratique

Pour la notion d'observateur, nous visons à simplifier la conception de ce système en exploitant la forme linéaire du système nominal. Le système (2.3.2) est supposé être uniformément observable [**20**].

Définition 2.3.2. *La paire $(A(t),C(t))$ est uniformément observable s'il existe Δ et $\alpha(\Delta)$ telles que le Grammian d'observabilité $J(t-\Delta,t)$ satisfait*

$$J(t-\Delta,t) = \int_{t-\Delta}^{t} \psi(t-\Delta,\tau)C(\tau)C^T(\tau)\psi^T(t-\Delta,t)d\tau \geq \alpha(\Delta)I > 0$$

avec $\psi(t,\tau)$ c'est la matrice de transition de l'état.

Pour désigner un observateur pour le système (2.3.1), on considère le système

$$\dot{\hat{x}} = A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t) + f(t,\hat{x}(t)) - L(t)(C(t)\hat{x}(t) - y(t)) \qquad (2.3.5)$$

où $\hat{x}(t)$ est l'état estimité de $x(t)$ et $L(t) \in \mathbb{R}^2$ est le feedback gain de l'observateur à déterminer afin que $\hat{x}(t)$ tend à $x(t)$ exponentiellement. L'une de ces conceptions est la conception bien connue du filtre de Kalman [**16**], dans lequel le feedback gain de l'observateur $L(t)$ est choisi comme

$$L(t) = \varphi(t)C^T(t)V_2^{-1}(t) \qquad (2.3.6)$$

où $\varphi(t)$ satisfait une équation de Riccati différentielle directe

$$\dot{\varphi}(t) = A(t)\varphi(t)+\varphi(t)A^T(t)+V_1(t)-\varphi(t)C^T(t)V_2^{-1}(t)C(t)\varphi(t), \ \ \varphi(0) = \varphi_0 > 0 \tag{2.3.7}$$

dans lequel $V_1(t) > 0$, $V_2(t) > 0$ et $V_1(t)$, $V_2(t)$, $V_1^{-1}(t)$, $V_2^{-1}(t)$ sont tous uniformément bornés. L'équation de l'erreur est donnée par :

$$\dot{e}(t) = \dot{\hat{x}}(t) - \dot{x}(t) = (A(t) - L(t)C(t)e(t) + f(t, \hat{x}(t)) - f(t, x(t))) \tag{2.3.8}$$

Proposition 2.3.2. *[12] Si $(A(t), C(t))$ est uniformément observable alors le système $\dot{e}(t) = A_L(t)e(t) = (A(t) - L(t)C(t))e(t)$ est globalement uniformément exponentiellement stable.*
Le système $\dot{e}(t) = A_L(t)e(t)$ est globalement uniformément exponentiellement stable.
Alors, pour toute matrice $\varphi_2(t)$ définie positive symétrique

$$\varphi_2(t) \geq b_1 I, \quad b_1 > 0, \quad \forall t \geq 0,$$

il existe une matrice $P_2(t)$ définie positive symétrique

$$b_2 I < P_2(t) < b_3 I, \quad b_2 > 0, \quad b_3 > 0, \forall t \geq 0,$$

telle que

$$A_L^K(t)P_2(t) + P_2(t)A_L(t) + \dot{P}_2(t) = -\varphi_2(t), ou\ A_L(t) = A(t) - L(t)C(t) \tag{2.3.9}$$

$(\mathcal{A}_2)$ *Suppose que*

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq \gamma(t)\|x-y\|^{\frac{1}{2}}, \quad \forall t \geq 0,\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \ f(t,0) = 0 \tag{2.3.10}$$

où $\gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est une fonction continue non négative avec

$$\int_0^{+\infty} \gamma^2(s)ds \leq M_\gamma < +\infty.$$

Théorème 2.3.2. *Sous l'hypothèse $(\mathcal{A}_2)$, le système (2.3.5) est un observateur pratique exponentiel pour le système (2.3.1).*

Preuve. *Considérons la fonction de Lyapunov $Y(t, e(t)) = e^T(t)P_2(t)e(t)$. la dérivée de Y le long des trajectoires du système (2.3.8) est donnée par*

$$\dot{Y}(t, e(t)) \leq -\frac{b_1}{b_3}Y(t, e(t)) + \frac{2b_3\gamma(t)}{b_2^{\frac{3}{4}}}Y(t, e)^{\frac{3}{4}}.$$

En utilisant le changement suivant $y(t) = Y(t, e(t))^{\frac{1}{4}}$. *Alors,* $y(t)$ *satisfait l'estimation suivante*

$$y(t) \leq y(t_0) e^{-\frac{b_1}{4b_3}(t-t_0)} + \frac{b_3}{2b_2^{\frac{3}{4}}} \left(\int_{t_0}^{t} \gamma(s) e^{\frac{b_1}{4b_3}(s-t_0)} ds \right) e^{-\frac{b_1}{4b_3}(t-t_0)}.$$

Un simple calcul montre que,

$$\left(\int_{t_0}^{t} \gamma(s) e^{\frac{b_1}{4b_3}(s-t_0)} ds \right) e^{-\frac{b_1}{4b_3}(t-t_0)} \leq \sqrt{\frac{2b_3 M_\gamma}{b_1}}.$$

Ainsi, nous obtenons

$$y(t) \leq y(t_0) e^{-\frac{b_1}{4b_3}(t-t_0)} + \frac{b_3}{2b_2^{\frac{3}{4}}} \sqrt{\frac{2b_3 M_\gamma}{b_1}}.$$

Il s'ensuit que,

$$\|e(t)\| \leq 2\sqrt{\frac{b_3}{b_2}} \|e(t_0)\| e^{-\frac{b_1}{2b_3}(t-t_0)} + \frac{b_3^3 M_\gamma}{b_1 b_2^2}.$$

Cela implique la stabilité exponentielle uniforme globale de B_η, *avec*

$$\eta = \frac{b_3^3 M_\gamma}{b_1 b_2^2}.$$

On en déduit que le système (2.3.8) est globalement pratiquement stable exponentiellement.
Par conséquent, le système (2.3.5) est un observateur exponentiel pratique pour le système (2.3.1).

2.3.3 Principe de séparation

Maintenant, pour obtenir un principe de séparation pour (2.3.1). Nous considérons le système (2.3.1) contrôlé par feedback linéaire $u(t) = K(t)\hat{x(t)}$ et estimé avec l'observateur (2.3.5).

Théorème 2.3.3. *Sous l'hypothèse* $(\mathcal{A}_2)$ *et le fait*

$$\frac{b_1}{b_3} < \frac{c_1}{c_3}$$

le système

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t) + f(t, \hat{x}(t)) - L(t)C(t)e(t) \\ \\ \dot{e}(t) = (A(t) - L(t)C(t))e(t) + f(t, \hat{x}(t)) - f(t, x(t)) \end{cases} \tag{2.3.11}$$

est globalement pratiquement uniformément stable exponentiellement.

Preuve. *Afin d'étudier le problème de stabilisation via un observateur, on considère le système*

$$\dot{\hat{x}}(t) = (t, \hat{x}(t)) + g(t, \hat{x}(t))e(t) \tag{2.3.12}$$

$$\dot{e}(t) = h(t, \hat{x}(t), e(t)) \tag{2.3.13}$$

où,

$$\psi(t, \hat{x}(t)) = (A(t) + B(t)K(t))\hat{x}(t) + f(t, \hat{x}(t)), \quad g(t, \hat{x}(t)) = -L(t)C(t)$$

et

$$h(t, \hat{x}(t), e(t)) = (A(t) - L(t)C(t))e(t) + f(t, \hat{x}(t)) - f(t, x(t)).$$

Nous avons, $\dot{\hat{x}}(t) = \psi(t, \hat{x}(t))$ *est globalement pratiquement uniformément stable exponentiellement avec la fonction de Lyapunov associée à ce système peut être considérée comme*

$$v(t, \hat{x}(t)) : \mathbb{R}_+ \times D \to \mathbb{R}^n,$$

avec $D = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| > 1\}$ *et* $v(t, \hat{x}(t)) = (\hat{x}^T(t)P_1(t)\hat{x}(t))^{\frac{1}{4}}$, *qui satisfait*

$$\sqrt{c_2}^{\frac{1}{2}} \|\hat{x}(t)\|^{\frac{1}{2}} \leq v(t, \hat{x}(t)) \leq \sqrt{c_3}^{\frac{1}{2}} \|\hat{x}(t)\|^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t, \hat{x}(t)) + \frac{\partial v}{\partial \hat{x}(t)}\psi(t, \hat{x}(t)) \leq -\frac{c_1}{4c_3}v(t, \hat{x}(t)) + \frac{c_3}{2c_2^{\frac{3}{4}}}\gamma(t)$$

et

$$\frac{\partial v}{\partial \hat{x}}(t, \hat{x}(t)) \leq \frac{c_3}{2c_2^{\frac{3}{4}}}.$$

La dérivée de v le long des trajectoires du système (2.3.12) est donnée par

$$\dot{v}(t, \hat{x}(t)) \leq -\frac{c_1}{2c_3}v(t, \hat{x}(t)) + \frac{c_3}{2c_2^{\frac{3}{4}}}\gamma(t) + \frac{c_3}{2c_2^{\frac{3}{4}}}\|L(t)C(t)\| \times \left(2\sqrt{\frac{b_3}{b_2}}\|e(t_0)\|e^{-\frac{b_1}{2b_3}(t-t_0)} + \frac{b_3^3 M_\gamma}{b_1 b_2^2}\right).$$

Puisque $L(t)C(t)$ est uniformément borné pour tout $t \geq t_0 \geq 0$, alors il existe $R_1 > 0$, tel que

$$\|L(t)C(t)\| \leq R_1, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0.$$

Alors,

$$\dot{v}(t, \hat{x}(t)) \leq -\frac{c_1}{2c_3}v(t, \hat{x}(t) + \lambda\|e(t_0)\|e^{-\frac{b_1}{2b_3}(t-t_0)} + \frac{c_3}{2c_2^{\frac{3}{4}}}\gamma(t) + R$$

avec

$$\lambda = \frac{c_3}{c_2^{\frac{3}{4}}}R_1\sqrt{\frac{b_3}{b_2}},$$
$$R = \frac{c_3}{2c_2^{\frac{3}{4}}}R_1\frac{b_3^3 M_\gamma}{b_1 b_2^2}$$

En utilisant le changement suivant

$$y(t) = v(t)e^{\frac{c_1}{2c_3}(t-t_0)}.$$

On obtient,

$$y(t) \leq y(t_0) + \int_{t_0}^{t} \lambda\|e(t_0)\|e^{\left(-\frac{b_1}{2b_3}+\frac{c_1}{2c_3}\right)(s-t_0)}ds + \frac{c_3}{2c_2^{\frac{3}{4}}}\int_{t_0}^{t}\gamma(s)e^{\frac{c_1}{2c_3}(s-t_0)}ds + \int_{t_0}^{t} R\, e^{\frac{c_1}{2c_3}(s-t_0)}ds.$$

Alors,

$$v(t) \leq v(t_0)e^{-\frac{c_1}{2c_3}(t-t_0)} + \frac{2\lambda b_3 c_3}{b_3 c_1 - b_1 c_3}\|e(t_0)\|e^{-\frac{b_1}{2b_3}(t-t_0)} + \frac{c_3}{2c_2^{\frac{3}{4}}}\sqrt{\frac{c_3 M_\gamma}{c_1}} + \frac{2Rc_3}{c_1}.$$

Alors,

$$\|\hat{x}(t)\| \leq 2\sqrt{\frac{c_3}{c_2}}\|\hat{x_0}\|e^{-\dfrac{b_1}{b_3}(t-t_0)} + \frac{8\lambda^2 b_3^2 c_3^2}{\sqrt{c_2}(b_3c_1 - b_1c_3)^2}\|e(t_0)\|^2 e^{-\dfrac{b_1}{b_3}(t-t_0)} +$$

$$\frac{c_3^3 M_\gamma}{2c_2^2 c_1} + \frac{8R^2 c_3^2}{\sqrt{c_2}c_1^2}, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad \forall \|\hat{x_0}\| > 1 \quad \forall \|e(t_0)\| > 1.$$

Laisser

$$k = max\left(2\sqrt{\frac{c_3}{c_2}}, \ \frac{8\lambda^2 b_3^2 c_3^2}{\sqrt{c_2}(b_3c_1 - b_1c_3)^2}\right).$$

Ainsi,

$$\|\hat{x}(t)\| \leq k\|\hat{x_0}, e(t_0)\|^2 e^{-\dfrac{b_1}{b_3}(t-t_0)} + \frac{c_3^3 M_\gamma}{2c_2^2 c_1} + \frac{8R^2 c_3^2}{\sqrt{c_2}c_1^2},$$

$\forall t \geq t_0 \geq 0, \quad \forall \|\hat{x}_0\| > 1, \quad \forall \|e(t_0)\| > 1.$ *Le système en cascade (17) est alors globalement pratiquement uniformément stable exponentiellement.*

Donnons maintenant un exemple pour illustrer l'applicabilité de notre résultat.

Exemple 2.3.1. *on considère le système*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + f(t, x(t)) \\ \\ y(t) = C(t)x(t) \end{cases} \tag{2.3.14}$$

avec $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$,

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$$C(t) = \begin{pmatrix} 1 & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

et

$$f(t, x(t)) = \gamma(t)h(x)$$

avec $\gamma(t) = e^{-t}$, $h(x)$ *satisfait* $\|h(x) - h(y)\| \leq k\|x - y\|^{\frac{1}{2}}$, $\quad k > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$ *et* $h(0) = 0$. *Le contrôle proposé (7) est ensuite appliqué au système avec le* *paramètres de conception suivants* $P(0) = I$*,* $R_1(t) = I$*,* $R_2(t) = I$ *dans (8). La matrice* $P(t)$ *est calculé en résolvant l'équation de Riccati (8). La fonction* $f(t, x(t))$ *est continue et satisfait l'hypothèse* $(\mathcal{A}_1)$ *car*

$$\int_0^{+\infty} e^{-2t} = \frac{1}{2}.$$

Nous concluons que le système (2.3.1) peut être globalement pratiquement uniformément stable exponentiellement. Le gain de rétroaction de l'observateur $L(t)$ *doit être choisi comme (2.3.6) en résolvant l'équation de Riccati (2.3.7). Nous concluons que le système (2.3.5) est un observateur exponentiel pratique pour le système (2.3.14). Ainsi, si* $\frac{b_1}{b_3} < \frac{c_1}{c_3}$ *le théorème (2.3.3) est satisfait. Nous concluons que le système (2.3.11) est globalement uniforme, pratiquement exponentiellement stable.*

2.4 Conclusion

Cet chapitre présente le principe de séparation des systèmes dynamiques non linéaires variant dans le temps. Il s'avère que le système peut être très stable globalement en observant feedback estimée de l'état fournie par la conception de l'observateur.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Durant tout au long de ce mémoire, nous avons cité plusieurs problèmes de contrôle : la contrôlabilité, la stabilisation, l'observabilité et l'estimation de l'état. Nous avons accordé une attention particulière aux problèmes de stabilisation et de l'estimation. Le problème de stabilisation d'un système consiste à construire un retour d'état, ou feedback (ou encore un régulateur), c'est-à-dire une fonction $x \to u(x)$ tel que le point que l'on cherche à atteindre (l'équilibre) soit asymptotiquement stable pour le système bouclé $\dot{x} = f(x, u(x))$. La contrôlabilité est indispensable pour stabiliser un tel système, en effet, pour atteindre le point d'équilibre, le système doit être contrôlable. Un tel feedback est dit bouclage statique. Souvent on ne mesure pas tout l'état x, mais une partie y de x. On peut se demander si la connaissance partielle de cet état permet de reconstituer l'état complet. c'est le problème de l'observabilité. Dans ce cas, stabiliser le système entier revient à construire un feedback par retour de sortie dynamique, il s'agit donc de construire une fonction $y \to u(y, \hat{x})$, où $\hat{x}$ est l'état estimé de x, telle que l'équilibre du système en boucle fermé soit asymptotiquement stable. Estimer x revient à construire un observateur asymptotique $\hat{x}$ de x, i.e. une fonction dynamique de l'observable y tel que $\hat{x}(t) - x(t) \to 0$ quand $t \to \infty$.

Le problème de construction d'un régulateur en fonction de l'observateur asymptotique de l'état pour un système contrôlable et observable s'appelle synthèse régulateur observateur. Ce problème est loin d'être résolu dans le cas des systèmes non linéaires.

Les deux difficultés majeures du problème de stabilisation des systèmes non linéaires sont

1. comment construire le régulateur ?.
2. Une fois le régulateur construit comment analyser la stabilité asymptotique du système en boucle fermée.

De même, la synthèse d'observateur asymptotique est un problème d'actualité, largement inverti par les automaticiens.

Dans le cas des systèmes linéaires, les deux problèmes sont complètement résolus.

L'analyse de la stabilité de Lyapunov joue un rôle primordial aussi dans les problèmes de stabilisation que dans les problèmes de la synthèse d'observateur. Nous avons consacré, à cet effet, le premier chapitre aux différentes méthodes de Lyapunov pour la stabilité des systèmes linéaires et non linéaires, et la stabilisations des systèmes contrôlés linéaires et non linéaires.

Dans le deuxième chapitre, nous nous sommes concentrés sur le principe de séparation dans deux cas : Classe de systèmes à partie nominale linéaire autonome et classe de systèmes à partie nominale linéaire non autonome.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. M. Lyapunov (1847), Problème général de la stabilité du mouvement, Princeton University Press, Princeton.

[2] Benabdallah, A., Ellouze, I, and Hammami, M. A. (2009), Practical stability of nonlinear time-varying cascade systems. Journal of Dynamical and Control Systems, 15, 45-62.

[3] Chaillet, A.,and Loría, A. (2006). Necessary and sufficient conditions for uniform semiglobal practical asymptotic stability : Application to cascaded systems. Automatica, 42(11), 1899-1906.

[4] Chaillet, A., and Loría, A. (2006). Uniform global practical asymptotic stability for time-varying cascaded systems. European journal of control, 12(6), 595-605.

[5] Corless, M., and Leitmann, G. (1981). Continuous state feedback guaranteeing uniform ultimate boundedness for uncertain dynamic systems, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 26, no. 5, pp. 1139-1143.

[6] Ellouze, I. (2010). Etude de la stabilité et de la stabilisation des systèmes à retard et des systèmes impulsifs (Doctoral dissertation, Université Paul Verlaine-Metz ; Université de Sfax).

[7] Hahn, W. (1967). Stability of Motion Springer. New York, USA.

[8] J. M. Coron (1990), A necessary condition for feedback stabilisation, Systems and Control Letters, Vol. 14, pp. 227-232.

[9] Khalil. H.K, (2002). Nonlinear Systems. Macmillan, New York, 3ed edition.

[10] Khalil, H. K, and Grizzle, J. W. (2002). Nonlinear systems (Vol. 3). Upper Saddle River, NJ : Prentice hall.

[11] Lakshmikantham, V.,and Leela, S., Martynyuk, A. A. (1990). Practical stability of nonlinear systems.World Scientific.

[12] M.S.Chen and C.Y.Kao (1997). Control of linear time-varying systems using forward Riccati equation, Journal of Dynamics systems, Measurement and Control 119, 536-540.

[13] Moulay, E. (2007). Stabilité des équations différentielles ordinaires.

[14] Philippe P. Müllhaupt (2009). Introduction à l'Analyse et à la Commande des Systèmes Non Linéaire. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne,.

[15] R. W. Brockett (1983), Differential geometric control theory in chapitre Asymptotic stability and Feedback stabilization, Brockett, Milmann, Sussmann, pp. 181-191.

[16] R.E.Kalman and R.S.Bucy (1961). New Results in Linear Filtering and Prediction Theory, ASME Journal of Basic Engineering, 95-108.

[17] Slotine, J. J. E.,and Li, W. (1991). Applied nonlinear control (Vol. 199, No. 1, p. 705). Englewood Cliffs,NJ : Prentice hall.

[18] Soldatos, A. G, and Corless, M. (1991). Stabilizing uncertain systems with bounded control. Dynamics and Control, 1(3), 227-238.

[19] Sontag, E. D. (1984). A concept of local observability. systems and control Letters, 5(1) :41-47.

[20] Vidyasagar, M. (2002). Nonlinear systems analysis. Society for Industrial and Applied Mathematics.

[21] W.J.Rugh.(1993). Linear System Theory, Prentice-Hall, Englewood Cliffs .