RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN TIARET
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUES
Département de Mathématiques

MÉMOIRE MASTER

Présenter en vue de l'obtention du diplôme de master

Spécialité :
« Mathématiques»

Option :
«Analyse Fonctionnelle et Applications »

Présenté Par :

KADDA Karima
et
FARES Khadidja

Sous L'intitulé :

Sur les inégalités de hardy pour les fonctions quasi-monotones

Soutenu publiquement le 25/ 06/ 2024
à Tiaret devant le jury composé de :

Mr MAAZOUZ Kadda	MCA	Université de Tiaret	Président
Mme KHELIFA Hizia	MCB	Université de Tiaret	Examinateuse
Mr OURDANI Abderrahmane	MCB	Université de Tiaret	Encadreur

Année universitaire :2023/2024

Remerciements :

Avant tout, nous remercions le bon dieu le tout puissant qui nous a aidé à accomplir ce modeste travail, nous tenons également à adresser nos sincères remercients à notre respectueux encadreur

Dr. OUARDANI Abderrahmane qui par ses conseils nous a orienté vers le bon chemin sans oublier notament M : le Pr : (Maazouz Kadda) pour nous avoir fait l'honneur de présider le jury de notre mémoire. Et Madame :(Khelifa Hizia) pour s'être intéresse à ce travail et d'avoir bien vouloir nous honoré de sa présence parmi les membres du jury. Nous tenons aussi à remercier tout enseignant qui nous a soutenu de prés ou de loin surtout **Dr.BENALI Halim**, nous considérons ce mémoire comme le fruit de cinq ans de labeur et d'efforts, tout en espérant qu'il vous présente une petite récompense. Merci encore une fois pour tout ce que vous avez fait pour notre intérêt et notre réussite

Je dédie ce travail :

A mon cher père

A mon cher père **Abdelkader**, aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour. l'estime, le dévouement et le respect que j'ai toujours eu pour toi.

Ce travail est le fruit de tes sacrifices que tu as consentis pour mon éducation et ma formation.

Je te dédie ce travail en témoignage de mon profond amour. Puisse Dieu, le tout puissant, te préserver et t'accorder santé, longue vie et bonheur

A ma chère mère

A ma très chère mère, honorable, aimable **Khada** tu représentes pour moi le symbole de la bonté par excellence, la source de tendresse et l'exemple du dévouement qui n'a pas cessé de m'encourager. Ta prière et ta bénédiction m'ont été un grand secours pour mener à bien mes études. Aucune dédicace ne saurait être assez éloquente pour exprimer ce que tu mérites pour tous les sacriFices depuis ma naissance, durant mon enfance et même à l'âge adulte

A mes chers frères et sœurs

A mes chers frères **Habibo** et **Mohamed, Sofiane, Rafik** et à mes soeurs **Aziza** et **Selsabil** en témoignage de l'attachement, de l'amour et de l'affectation que je porte pour vous. Vous êtes toujours dans mon cœur. Je vous remercie d'être l'épaule sur laquelle je peux toujours compter.

Je vous dédie ce travail avec tous mes vœux de bonheur, de santé et de reussite.

A mes chers amis

karima

Je dédie ce travail :

A mon cher père

A mon cher père **Khaled**, aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour. l'estime, le dévouement et le respect que j'ai toujours eu pour toi.

Ce travail est le fruit de tes sacrifices que tu as consentis pour mon éducation et ma formation.

Je te dédie ce travail en témoignage de mon profond amour. Puisse Dieu, le tout puissant, te préserver et t'accorder santé, longue vie et bonheur

A ma chère mère

A ma très chère mère, honorable, aimable **Meryem** tu représentes pour moi le symbole de la bonté par excellence, la source de tendresse et l'exemple du dévouement qui n'a pas cessé de m'encourager. Ta prière et ta bénédiction m'ont été un grand secours pour mener à bien mes études. Aucune dédicace ne saurait être assez éloquente pour exprimer ce que tu mérites pour tous les sacriFices depuis ma naissance, durant mon enfance et même à l'âge adulte

A mes chers frères et sœurs

A mes chers frères **Tayeb** et **Abdelhak, Sid ahmed** et à mes soeurs **Hafidha** et **Imen** en témoignage de l'attachement, de l'amour et de l'affectation que je porte pour vous. Vous êtes toujours dans mon cœur. Je vous remercie d'être l'épaule sur laquelle je peux toujours compter.

Je vous dédie ce travail avec tous mes vœux de bonheur, de santé et de reussite.

A mes chers amis

Khadidja

Table des matières

Résumé du mémoire

Introduction :
Les inégalités de Hardy sont des éléments fondamentaux de l'analyse mathématique moderne. Leur importance dépasse les résultats théoriques, car elles ont des applications concrètes dans divers domaines comme la physique mathématique, la théorie du contrôle et la théorie de l'approximation. Ces inégalités offrent des informations cruciales sur le comportement des fonctions intégrables, rendant ces outils indispensables pour les mathématiciens et les chercheurs.

Objectif : L'objectif de ce travail est de présenter quelques résultats sur l'inégalité intégrale de Hardy.

Structure : Le mémoire est divisée en quatre chapitres :
Chapitre 1 : Définitions, théorèmes et inégalités intégrales (Hölder, Minkowski, Hilbert) dans l'espace de Lebesgue classique L_p.

Chapitre 2 : Inégalités classiques de Hardy.
(Présentation des inégalités classiques de Hardy)

Chapitre 3 : Extension des inégalités intégrales définies sur $(0;\infty)$ à $\mathbb{R}$et $\mathbb{R}^n$ et généralisation de certaines inégalités intégrales.

Chapitre 4 : Inégalités intégrales pour les fonctions quasi-monotones dans les espaces de Lebesgue pondérés.

Historique et Formulation des Inégalités de Hardy :
Au début du vingtième siècle, Hardy a prouvé des inégalités fondamentales qui ont été généralisées par la suite.

Par exemple, pour $p > 1$, si $f^p \in L^1(0,\infty)$ et $F(x) := \int_0^x f(t)dt$ avec $f(x) \geq 0$, alors l'inégalité suivante est satisfaite :

$\int_0^\infty \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx < \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty (f(x))^p dx$, où la constante $\left(\frac{p}{p-1}\right)^p$ est optimale.

Conclusion
Les inégalités de Hardy et leurs extensions jouent un rôle crucial dans l'analyse mathématique, permettant de comprendre et de résoudre des problèmes complexes dans divers domaines scientifiques. Cette mémoire présente une exploration approfondie de ces inégalités, fournissant ainsi une base solide pour des recherches futures et des applications pratiques.

Introduction

Les inégalités de Hardy représentent des piliers fondamentaux de l'analyse mathématique moderne. Leurs importance s'étend bien au-delà des résultats théoriques, car ils trouvent des applications concrètes dans de nombreux domaines, tels que la physique mathématique, la théorie du contrôle, la théorie de l'approximation et bien d'autres. Leur capacité à fournir des informations cruciales sur le comportement des fonctions intégrables fait d'elles des outils indispensables pour les mathématiciens et les chercheurs dans diverses disciplines. En continuant à explorer et à comprendre ces inégalités, nous approfondissons notre compréhension des structures sous-jacentes des systèmes mathématiques, ouvrant ainsi la voie à de nouvelles découvertes et avancées dans le vaste domaine de l'analyse mathématique.

L'objectif de travail est de donner quelques résultats concernant l'inégalité intégrale de Hardy

-Cet mémoire est divisé en quatres chapitres.

Dans le premier chapitre, on donne des définitions, des théorèmes, et des inégalités intégrales (Hölder, Minkowski, Hilbert) dans l'espace de Lebesgue classique L^P. Dans le deuxième chapitre, on considéré les inégalités classiques de Hardy, et dans le troisième chapitre on se propose d'étendre les inégalité intégrale que sont définis dans $(0.\infty)$ à $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$ et généralisé avec quelques inégalités intégrales, et dans le quatriéme chapitre nous en discuterons sur quelques inégalités intégrales pour les fonctions quasi-monotones dans les espaces de Lebesgue pondérés.

Au début du vingtième siècle, dans [1] Hardy a prouvé l'inégalité suivante

Si $p > 1,\ f^p \in L_{1(0,\infty)}$ et

$$F(x) := \int_0^x f(t)dt, \quad \text{avec} \quad f(x) \geq 0,$$

alors,

$$\int_0^\infty \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx < \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty (f(x))^p dx, \tag{1}$$

avec $f \neq 0$. La constante $\left(\frac{p}{p-1}\right)^p$ est optimale, et pour

$$F(x) := \int_x^\infty f(t)dt, \quad \text{avec} \quad f(x) \geq 0,$$

on a
$$\int_0^\infty (F(x))^p \, dx < p^p \int_0^\infty (xf(x))^p dx, \tag{2}$$
avec $f \neq 0$. La constante p^p est optimale.

En outre, en 1928 Hardy a prouvé une forme généralisée de (1) et (2) à savoir que Soient $p > 1, \ \alpha \neq 1$ et
$$0 < \int_0^\infty t^{-a}(tf(t))^p dt < \infty,$$
$F(x)$ une fonction définie par :
$$F(x) = \int_0^x f(t)dt, \quad \text{si} \quad \alpha > 1; \quad F(x) = \int_x^\infty f(t)dt, \quad \text{si} \quad \alpha < 1,$$
alors
$$\int_0^\infty x^{-\alpha} F^p(x) dx \leq \left(\frac{p}{|\alpha - 1|} \right)^p \int_0^\infty t^{-\alpha}(tf(t))^p dt. \tag{3}$$

Ainsi Hardy a fait remarquer que si α et $F(x)$ satisfont aux conditions précédentes mais $0 < p < 1$, alors
$$\int_0^\infty x^{-\alpha} F^p(x) dx > \left(\frac{p}{|\alpha - 1|} \right)^p \int_0^\infty t^{-\alpha}(tf(t))^p dt. \tag{4}$$

Chapitre 1

Préliminaires et notations

1.1 La mesure de Lebesgue sur la tribu des boréliens

Existe-t-il une application λ, définie sur tout $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, t.q. l'image par λ d'un intervalle de $\mathbb{R}$ soit la longueur de cet intervalle. Le théorème suivant donne l'existence d'une telle application définie seulement sur la tribu des boréliens de $\mathbb{R}$, notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Cette application s'appelle la mesure de Lebesgue.

Théorème 1.1.1. *(**Carathéodory**) Il existe une et une seule mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, notée λ et appelée mesure de Lebesgue sur les boréliens, t.q. $\lambda(]a,b[) = b-a$, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ t.q. $-\infty < a < b < +\infty$.*

Soit $A \subset \mathbb{R}$. On définit$\lambda^* A$ par :

$$\lambda^* A = \inf_{(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \in E_A} \sum_{i=1}^{n} l(A_i), \tag{1.1}$$

où E_A est l'ensemble des familles dénombrables d'intervalles ouverts dont l'union contient A, $l(A_i)$ représente la longueur de l'intervalle A_i.

Remarque 1.1.1. *L'application λ^* définie de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ n'est pas σ-additive (ce n'est donc pas une mesure). Par contre la restriction de λ^* à $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est une mesure, qu'on note λ, mesure de Lebesgue.*

Définition 1.1.1. *Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. On pose*

$$\lambda^* A = \inf \left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} l(I_n);\ (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_A \right\},$$

avec $E_A = \left\{ (I_n)_{n\in\mathbb{N}};\ I_n = (a_n, b_n),\ -\infty < a_n \leq b_n < +\infty,\ \forall n \in \mathbb{N},\ A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \right\}$,
et $l(I) = b - a$ *si* $I = (a,b),\ -\infty < a \leq b < 1.$

1.2 Fonction mesurable

Définition 1.2.1. *Soient (E, T) un espace mesurable et F un ensemble muni d'une topologie. Une fonction f, définie de E dans F, est une fonction T-mesurable si $f^{-1}(A) \in T$, pour tout $A \in \mathcal{B}(F)$. (Ce qui est équivalent à dire que la tribu $f^{-1}(\mathcal{B}(F)) = \{f^{-1}(B),\ B \in \mathcal{B}(F)\}$ est incluse dans T ou encore que la tribu $T_f = \{B \in \mathcal{P}(F),\ f^{-1}(B) \in T\}$ contient $\mathcal{B}(F)$.*

Théorème 1.2.1 (Théorème de Fubini). *Soient E un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$ et $F \subset \mathbb{R}^m$ (un ensemble mesurable) et la fonction $f(x, y)$ intégrable sur $E \times F$. Alors pour presque tous Les $x \in E$, $f(x, y)$ est intégrable sur F, pour presque tous les $y \in F$, $f(x, y)$ est intégrable sur E et*

$$\int_{E\times F} f(x,y)dxdy = \int_E \left(\int_F f(x,y)dy\right) dx = \int_F \left(\int_E f(x,y)dx\right) dy. \tag{1.2}$$

Preuve : Voir [4], [8].

Remarque 1.2.1. *Si f n'est pas intégrable sur $E \times F$, alors les intégrales itérées peuvent ne pas exister ou exister et être différentes.*

Preuve : Voir [5].

1.3 Espaces $\mathcal{L}_p$ et L_p

Définition 1.3.1 (Les espaces $\mathcal{L}_p$). *Soient (E, T, m) un espace mesuré, $1 \le p < +\infty$ et f une fonction définie de E dans $\mathbb{R}$, mesurable.*

1. *On dit que $f \in \mathcal{L}_p = \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ si $\int_E |f|^p \, dm < +\infty$. On pose alors*

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p \, dm\right)^{\frac{1}{p}},$$

   La fonction $\|\cdot\|_p : \mathcal{L}_p(E) \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\|f\|_p = \|f\|_{p(E)} = \left(\int_E |f|^p \, dm\right)^{\frac{1}{p}},$$

   est non négative et défini semi norme. La fonction identiquement nulle n'est pas la seule à satisfaire $\|f\|_p = 0$, et donc $\|\cdot\|_p$ n'est pas une norme dans le sens habituel du terme et par conséquent c'est une semi-norme sur $\mathcal{L}_p(E)$. C'est à dire :

$$\|f\|_p = 0 \Rightarrow f = 0 \,(p.p).$$

2. *On dit que f n'appartient pas à $\mathcal{L}_p$ si $\int |f|^p \, dm = \infty$ et on pose alors $\|f\|_p = \infty$.*

Définition 1.3.2 (Les espaces L_p). *Soient (E, T, m) un espace mesuré, $1 \leq p < +\infty$ et f une fonction définie de E dans $\mathbb{R}$, mesurable.*

1. *On définit l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ comme l'ensemble des classes d'équivalence des fonctions de $\mathcal{L}_p$ pour la relation d'équivalence (= p.p). En l'absence d'ambiguïté on notera L_p l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.*
2. *Soit $F \in L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. On pose $\|F\|_p = \|f\|_p$ si $f \in F$.*

1.4 Espace de Lebesgue

Définition 1.4.1. *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$, un ensemble mesurable avec $0 < p < \infty$ et soit $f : E \to \mathbb{C}$. On dit que $f \in L_p(E)$ si :*

(1) *f est mesurable sur E.*

(2) $\|f\|_{L_p(E)} = \left(\int_E |f|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$

Exemple 1.1. *Soit*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & si \quad x \in E_1 \\ -1, & si \quad x \in E/E_1. \end{cases}$$

Avec $E_1 \subset E$, E_1 non mesurable, alors :

(1) *n'est pas vérifiée.*

(2) $\|f\|_{L_p(E)} = \left(\int_E dx\right)^{\frac{1}{p}} = |E|^{\frac{1}{p}}$. *Donc $f \notin L_p(E)$.*

Définition 1.4.2. *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$, un ensemble mesurable et soit $f : E \to \mathbb{C}$. On dit que $f \in L_\infty(E)$ si :*

(1) *f est mesurable sur E.*

(2) $\|f\|_{L_\infty(E)} = \sup_{x \in E} vrais\, |f(x)| = \inf \sup_{x \in E} |f(x)| < \infty.$

Définition 1.4.3. *Soit w une fonction de poids (une fonction positive mesurable) sur E. Pour $0 < p \leq \infty$ l'espace $L_{p,w}(E)$ est l'espace des fonctions mesurables sur E telles que,*

$$\|f\|_{L_{p,w}(E)} := \left(\int_E |f(x)|^p \, w(x) dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \qquad pour \quad 0 < p < \infty,$$

et

$$\|f\|_{L_{\infty,w}(E)} := \sup_{x \in E} |f(x)| \, w(x) < \infty.$$

- L'opérateur usuel de Hardy H (de la moyenne) défini sur $L_P(0, \infty)$ par
$$(Hf)(x) := \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt.$$
- L'opérateur de Hardy généralisé noté H_w défini sur l'espace $L_{p,w}(0, \infty)$ par
$$(H_w f)(r) := \frac{1}{W(r)} \int_0^r f(x) w(x) dx,$$
où $0 < W(r) := \int_0^r w(t) dt < \infty$ pour tout $r > 0$.

- L'opérateur de Hardy dans $\mathbb{R}^n$, noté $\widetilde{H}_n$, défini sur $L_p(\mathbb{R}^n)$ par

$$\left(\widetilde{H}_n f\right)(r) := \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} f(y)dy,$$

  où B_r désigne la boule de centre zéro et de rayon $r > 0$ dans $\mathbb{R}^n$ et $|B_r|$ sa mesure.
  Rappelons que $|B_r| = r^n v_n$, où $v_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$ est le volume de la boule unité, Γ étant la fonction d'Euler définie pour $x > 0$ par $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-x}dt$, on a $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ et $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Lemme 1 (**Inégalité de Young**). *Soient* $a, b \in \mathbb{R}_+$ *et* $p, q \in (1, +\infty)$ *t.q.* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Alors :*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Lemme 2 (**Inégalité de Hölder**). *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré et* $p, q \in (1, +\infty)$ *t.q.* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Si* $f \in L_p(E)$ *et* $g \in L_q(E)$, *alors* $fg \in L_1(E)$ *et*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q .$$

Lemme 3 (**Inégalité de Minkowski**). *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré.*
Si $1 \leq p < \infty$, $f, g \in L_p(E)$, *alors* $f + g \in L_p(E)$ *et*

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p .$$

Si $0 < p < 1$, $f, g \in L_p(E)$, *alors* $f + g \in L_p(E)$ *et*

$$\|f+g\|_p \leq 2^{\frac{1}{p}-1} \|f\|_p + \|g\|_p .$$

Chapitre 2

Inégalités classiques de Hardy

Dans l'inégalité de Hölder, souvent on souleve la question suivante :
A quelle condition les deux membres de l'inégalité citée sont éguaux ?. Chose qu'on éclaircit à l'aide du théorème suivant :

Théorème 2.0.1. *Soit l'inégalité de Hölder (en détails voir l'annexe),*

$$\|fg\|_{L_{i(1)}} \leq \|f\|_{L_{p'(\mathrm{M})}} \|g\|_{L_{\mu(\mathrm{im})}}, \tag{2.1}$$

où $\left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{p'} = 1\right)$.

Dans (2.1) *il y'a égalité, si et seulement si existent les constantes* $A \geq 0$ *et* $B \geq 0$, $A^2 + B^2 \neq 0$ *telles que,*

$$A \cdot |f(x)|^{\mathrm{P}} = B \cdot |g(x)|^{\mathrm{P}'} \ \textit{p.p sur } \Omega, \tag{2.2}$$

1. *a) Si la condition* (2.1) *est vérifiée et* $A = 0$, *alors* $g(x) \sim 0$ *sur* Ω *et les deux membres de* (2.1) *sont nuls. D'une manière analogue on raisonne si* $B = 0$.
   b) Soit dans (2.2) $A > 0$ *et* $B > 0$, *alors*

$$|g(x)| = C|f(x)|^{p-1}, \qquad \textit{où} \quad C = \left(\frac{A}{B}\right)^{1/p'},$$

   et chacun des deux membres de (1.15) est égal a $\|f\|^p_{L^p_p\,\{\}}$.

2. *On suppose qu'il existe un sou-ensemble* $E \subset \Omega$, *mes* $E > 0$ *et pour lequel* (2.2) *n'est pas vérifiée.*
   On pose

$$F(x) = \frac{f(x)}{\|f\|_{L_{p(\Omega)}}} \qquad \textit{et} \qquad G(x) = \frac{g(x)}{\|g\|_{L_{p'(\Omega)}}},$$

   on obtient

$$|F(x)|^p \neq |G(x)|^{p'}, \quad \forall x \in E_i,$$

et d'aprés l'inégalité de Young

$$|F(x) \cdot G(x)| \leq \frac{|F(x)|^p}{p} + \frac{|G(x)|^{p'}}{p'}, \quad \forall x \in \Omega, \tag{2.3}$$

sur E (2.3) est stricte.

Lemme 4. *Si les fonctions f et g à valeurs réelles sont intégrables sur un ensemble mesurable Ω et $f(x) \leq g(x)$, p.p, alors*

$$\int_\Omega f(x)dx \leq \int_\Omega g(x)dx,$$

si $f(x) < g(x)$ sur le sous-ensemble E avec $mes(E) > 0$, alors

$$\int_\Omega f(x)dx < \int_\Omega g(x)dx.$$

Par application du lemme on obtient

$$\int_\Omega |F(x) \cdot G(x)|dx < \frac{1}{p}\int_\Omega |F(x)|^p dx + \frac{1}{p'}\int_\Omega |G(x)|^{p'} dx = 1$$

d'où on déduit que l'inégalité dans (2.1) est stricte.

Pour $0 < p < 1$ et $p = \infty$, on raisonne de la même manière.

Les Théorèmes $2.1, 2.2, 2.3$ et 2.4 et leurs preuves figurent dans [1].

Théorème 2.0.2. *Soient $p > 1$, $f(x) \geq 0$, $f \in L_{p(0,x)}$, $x > 0$ et $f^p \in L_{1(0,\infty)}$. $F(x)$ une fonction définie par :*

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt, \ x > 0,$$

alors,

$$\int_0^\infty \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx < \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty (f(x))^p dx, \tag{2.4}$$

avec $f \neq 0$. La constante $\left(\frac{p}{p-1}\right)^p$ est optimale.

Pour la preuve on utilise le lemme suivant.

Lemme 5. *Si $p > 1$, $f \in L_{p(0,x)}$, $\forall a \geq x$ et*

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt,$$

alors, $F(x) = o(x^{\frac{1}{p'}})$, pour x suffisamment petit.

Démonstration. D'aprés l'inégalité de Hölder,

$$(F(x))^p \leq \int_0^x (f(t))^p dt \left(\int_0^x dt\right)^{p-1} = x^{p-1}\int_0^x (f(t))^p dt_1,$$

d'où $F(x) = o\left(x^{\frac{1}{p}}\right)$. □

Démonstration. Du théorème 2.0.2. Si $0 < \xi < \eta$, on a

$$\begin{aligned}\int_\xi^\eta \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx &= -\frac{1}{p-1}\int_\xi^\eta (F(x))^p \left(\frac{d}{dx}x^{1-p}\right) dx \\ &= \frac{\xi^{1-p}F^p(\xi)}{p-1} - \frac{\eta^{1-p}F^p(\eta)}{p-1} + \frac{p}{p-1}\int_\xi^\eta x^{1-p}(F(x))^{p-1} f(x)dx.\end{aligned}$$

D'aprés le lemme 11 $\xi^{1-p}F^p(\xi) \longrightarrow 0, quand f^p$ est intégrable et $\xi \longrightarrow 0$, d'où

$$\begin{aligned}\int_0^\eta \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx &\leq \frac{p}{p-1}\int_0^\eta \left(\frac{F(x)}{x}\right)^{p-1} f(x)dx \\ &\leq \frac{p}{p-1}\left\{\int_0^\eta \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^\eta (f(x))^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

donc

$$\int_0^\eta \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx \leq \frac{p}{p-1}\left\{\int_0^\eta \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^\eta (f(x))^p dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.5}$$

Si $f(x)$ est non nulle sur $(0, \eta)$, le membre gauche de (2.5) est strictement positif, d'où de (2.5) on déduit

$$\int_0^\eta \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\eta (f(x))^p dx, \tag{2.6}$$

quand $\eta \longrightarrow \infty$ on obtient (2.4), sauf que $<$ est remplacé par $\leq$. En particulier, l'intégrale du membre gauche de (2.4) est fini. Par conséquent, toutes les intégrales dans (2.5) sont finies lorsque η tend vers ∞ et

$$\int_0^\infty \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx \leq \frac{p}{p-1}\left\{\int_0^\infty \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^\infty (f(x))^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{2.7}$$

dans (2.7) le signe $\leq$ peut être remplacé par $<$, à moins que $x^{-p}(F(x))^p$ et $(f(x))^n$ soient effectivement proportionnelles. Ceci transformerait $f(x)$ en une puissance de x, alors $\int_0^\infty (f(x))^p dx$ serait divergente. Alors si f est non nulle, on déduit de (2.7)

$$\int_0^\infty \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx < \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty (f(x))^p dx,$$

Pour démontrer que la constante $\left(\frac{p}{p-1}\right)^p$ est optimale, on considère la fonction $f_c(x),\ 0 < \varepsilon < (p-1)/p$ définie par :

$$f_\epsilon(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in (0;1) \\ x^{-\varepsilon-\frac{1}{p}}, & \text{si } x \in [1;\infty) \end{cases}$$

on trouve que

$$\int_0^\infty \left(x^{-1}\int_0^x f_\varepsilon(t)dt\right)^p dx = \frac{1}{\varepsilon p\left(-\varepsilon - \frac{1}{p} + 1\right)^p},$$

et

$$\int_0^\infty (f_z(t))^p\, dt = \frac{1}{\varepsilon p}.$$

Si la constante $\left(\frac{p}{p-1}\right)^n$ dans (2.4) n'est pas optimale, alors, il existe une constante K, avec $K < \left(\frac{p}{p-1}\right)^p$ telle que (2.4) reste valable si l'on remplace $\left(\frac{p}{p-1}\right)^p$ par K. En particulier, on a

$$\int_0^\infty \left(x^{-1}\int_0^x f_\varepsilon(t)dt\right)^p dx < K\int_0^\infty (f_\varepsilon(t))^p\, dt,$$

et puis

$$\frac{1}{\varepsilon p\left(-\varepsilon - \frac{1}{\mu} + 1\right)^p} < K\frac{1}{\varepsilon p},$$

il s'ensuit que $\left(\frac{p}{p-1}\right)^p \leq K$, quand $\varepsilon \longrightarrow 0$. De cette contradiction on déduit que $\left(\frac{p}{p-1}\right)^p$ est la constante optimale dans (2.4). $\square$

Théorème 2.0.3. *Soient $p > 1,\ f(x) \geq 0$ et $f^p \in L_{1(0,\infty)},\ f(x) \in L_{p(x,\infty)}$. $F(x)$ une fonction définie par :*

$$F(x) = \int_x^\infty f(t)dt, x > 0,$$

alors

$$\int_0^\infty (F(x))^p dx < p^p \int_0^\infty (xf(x))^p dx,$$

avec $f \neq 0$. La constante p^p est optimale.

Démonstration. La preuve est analogue au théorème 2.0.2. $\square$

Théorème 2.0.4. *Soient $p > 1,\ \alpha \neq 1,\ 0 < \int_0^\infty t^{-a}(tf(t))^p dt < \infty$ et $F(x)$ une fonction définie par :*

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt, (\alpha > 1); F(x) = \int_x^\infty f(t)dt, (\alpha < 1),$$

alors
$$\int_0^\infty x^{-\alpha} F^p(x)dx \leq \left(\frac{p}{|\alpha - 1|}\right)^p \int_0^\infty t^{-\alpha}(tf(t))^p dt. \tag{2.8}$$

Pour la démonstration on utilise le lemme suivant

Lemme 6. *Soient $p > 1$ et $K(x, y) \geq 0$ une fonction homogène de degré -1 telle que*
$$\int_0^\infty K(x, 1)x^{-1/p}dx = \int_0^\infty K(1, y)y^{-1/p'}dy = k,$$

alors
$$\int_0^\infty \int_0^\infty K(x, y)f(x)g(y)dxdy \leq k \left(\int_0^\infty (f(x))^\mu dx\right)^{1/p} \left(\int_0^\infty (g(y))^{p'} dy\right)^{1/p'}, \tag{2.9}$$

avec $f \neq 0$ ou $g \equiv 0$, si $K(x, y)$ est positive.
$$\int_0^\infty dy \left(\int_0^\infty K(x, y)f(x)dx\right)^p \leq k^p \int_0^\infty (f(x))^p dx, \tag{2.10}$$

avec $f \neq 0$, si $K(x, y)$ est positive,
$$\int_0^\infty dx \left(\int_0^\infty K(x, y)g(y)dy\right)^{p'} \leq k^{p'} \int_0^\infty (g(y))^{p'} dy, \tag{2.11}$$

avec $g \neq 0$, si $K(x, y)$ est positive.

Démonstration. Maintenant on passe à la preuve du théorème 2.0.4. On prend
$$\begin{cases} K(x, y) = \frac{y^{r-1}}{x^r}, & \text{si } x \leq y \\ K(x, y) = 0, & \text{si } x > y \end{cases}$$

Pour $r < \frac{1}{p'}$. On a
$$k = \int_0^\infty x^{-r-1/p}dx = \int_0^1 x^{-r-1/p}dx = \frac{p}{p - pr - 1}.$$

Dans ce cas les inégalités (2.10) et (2.11) donnent
$$\int_0^\infty y^{p(r-1)} \left(\int_0^y x^{-r} f(x)dx\right)^p dy \leq \left(\frac{p}{p - pr - 1}\right)^p \int_0^\infty (f(x))^p dx, \tag{2.12}$$

et
$$\int_0^\infty x^{-rp'} \left(\int_x^\infty y^{r-1} g(y)dy\right)^{p'} dx \leq \left(\frac{p}{p - pr - 1}\right)^{p'} \int_0^\infty (g(y))^{p'} dy. \tag{2.13}$$

Définition 2.0.4. *Une fonction $M(x,y)$ est appelée homogène de degré s si :*

$$\forall k > 0; M(x,y) = k^s M(x,y).$$

En changeant la notation dans (2.12) et (2.13). Pour cela on pose

$$h(x) = x^{-r} f(x) \text{ et } p(r-1) = -\alpha,$$

puisque $r < 1/p'$ alors, $\alpha = p(1-r) > p(1 - 1/p') \geq 1$ et (2.12) devient

$$\int_0^\infty y^{-\alpha} \left(\int_0^y h(x)dx \right)^p dy \leq \left(\frac{p}{\alpha - 1} \right)^p \int_0^\infty x^{-\alpha}(xh(x))^p dx. \tag{2.14}$$

D'une manière analogue on pose

$$H(y) = y^{r-1} g(y) \text{ et } r'p' = \alpha,$$

donc on a $\alpha = rp' < 1$ (car $r < 1/p'$) et (2.13) devient

$$\int_0^\infty x^{-\alpha} \left(\int_x^\infty H(y)dy \right)^{p'} dx \leq \left(\frac{p'}{1-\alpha} \right)^{p'} \int_0^\infty y^{-\alpha}(yH(y))^{p'} dy, \tag{2.15}$$

car

$$\frac{p}{p - pr - 1} = \frac{p'}{1 - rp'} = \frac{p'}{1-\alpha}.$$

Donc de (2.14) et (2.15), on obtient

$$\int_0^\infty x^{-a} F^p(x)dx \leq \left(\frac{p}{|\alpha - 1|} \right)^p \int_0^\infty t^{-a}(tf(t))^p dt,$$

pour $p > 1$ et

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt, (\alpha > 1); F(x) = \int_x^\infty f(t)dt, (\alpha < 1),$$

d'où l'inégalité (2.8). $\square$

L'inégalité classique de Hardy pour les quasi-normes, est exprimée à l'aide du théorème suivant.

Théorème 2.0.5. *Soient* $0 < p < 1,\ \alpha \neq 1,\ 0 < \int_0^\infty t^{-\alpha}(tf(t))^p dt < \infty$ *et* $F(x)$ *une fonction définie par :*

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt, \quad (\alpha > 1); \quad F(x) = \int_x^\infty f(t)dt, \quad (\alpha < 1),$$

alors,

$$\int_0^\infty x^{-\alpha} F^p(x)dx > \left(\frac{p}{|\alpha - 1|} \right)^p \int_0^\infty t^{-\alpha}(tf(t))^p dt.$$

On obtient le même resultat en changeant le signe dans les inégalitées (2.9), (2.10) et (2.11) et on considère la fonction elle même. Dans ce qui suit on se propose de donner d'autres démonstrations des inégalités classiques de Hardy.

On considère la fonction f à une seule variable définie sur $(0, \infty)$. Considérons les deux opérateurs H_1 et H_2 définis de la manière suivante :

$$(H_1 f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(y) dy \forall x > 0,$$

(C'est la valeur moyenne de f sur l'intervalle $(0; x)$) et

$$(H_2 f)(x) = \frac{1}{x} \int_x^\infty f(y) dy \forall x > 0.$$

Théorème 2.0.6. *Soient* $1 \leq p \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p} = 1$, $f(x) \geq 0$, $x^\alpha f(xz)$ *mesurable sur* $(0, \infty) \times (0, 1)$ *et* $x^\alpha f(xz) \in L_{p(0,\infty)}$ *pour presque tous les* $z \in (0, 1)$, *alors*

$$\|x^a (H_1 f)(x)\|_{L_{p(0;\infty)}} \leq \left(\frac{1}{p'} - \alpha \right)^{-1} \|x^\alpha f(x)\|_{L_{p(0;\infty)}}, \quad si \quad \alpha < \frac{1}{p'}, \tag{2.16}$$

et

$$\|x^\alpha (H_2 f)(x)\|_{L_{p(0;\infty)}} \leq \left(\alpha - \frac{1}{p'} \right)^{-1} \|x^\alpha f(x)\|_{L_{p(0;\infty)}}, \quad si \quad \alpha > \frac{1}{p'}, \tag{2.17}$$

avec $\left(\frac{1}{p'} - \alpha \right)^{-1}$ *et* $\left(\alpha - \frac{1}{p'} \right)^{-1}$, *sont les constantes optimales dans* (2.16) *et* (2.17) *(i.e. les plus petites possibles).*

Le calcul de la constante dans (2.16) **:**

On suppose qu'il existe une constante $A > 0$ telle que ;

$$\|x^\alpha (H_1 f)(x)\|_{L_\rho\{(i)\infty)} \leq A \|x^\alpha f(x)\|_{L_{p(0;\infty)}},$$

ce qui implique

$$\frac{\|x^\alpha (H_1 f)(x)\|_{L_{p(0;\infty)}}}{\|x^\alpha f(x)\|_{L_{p\{0;\infty)}}} \leq A, \tag{2.18}$$

On considère la fonction f_ϵ, $\epsilon > 0$ définie par :

$$f_\epsilon(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in (0; 1) \\ x^{-\alpha - \frac{14}{P}}, & \text{si } x \in [1; \infty) \end{cases}$$

$f_\epsilon(x)$ est une fonction intégrable sur l'intervalle $(0,1)$ et aussi sur $[1,\infty)$, alors on a :

$$\begin{aligned}
\|x^\alpha (H_1 f_\epsilon)(x)\|_{L_{p(0)=)}} &= \left(\int_0^1 x^{(\alpha-1)p+p}dx + \int_1^\infty x^{(\alpha-1)p}\left|\int_0^x y - \frac{1+\epsilon}{p}dy\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\frac{1}{\alpha p+1} + \int_1^\infty \frac{x^{(\alpha-1)p}x^{-\alpha p-(1+\epsilon)+p}}{\left(-\alpha - \frac{1+\epsilon}{p}+1\right)^p}dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\frac{1}{\alpha p+1} + \frac{1}{\epsilon\left(-\alpha - \frac{1+i}{p}+1\right)^p}\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

d'autre part

$$\begin{aligned}
\|x^\alpha f_\epsilon(x)\|_{L_\mu(a;)} &= \left(\int_0^1 x^{\alpha\mu}dx + \int_1^\infty x^{\alpha\mu}x^{-\alpha p-(1+\epsilon)}dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\frac{1}{\alpha p+1} + \frac{1}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

on sait que le nombre $\left[\frac{1}{\alpha p+1} + \frac{1}{\epsilon}\right]^{\frac{1}{p}}$ est non nul, dans ce cas on peut revenir à l'inégalité (2.18) comme suit.

$$\frac{\|x^\alpha (H_1 f)(x)\|_{L_p(0,\infty)}}{\|x^\alpha f(x)\|_{L_{p\{(i)\infty)}}} \leq A \Leftrightarrow \frac{\left(\frac{1}{\alpha p+1} + \frac{1}{\epsilon\left(-\alpha-\frac{1+t}{p}+1\right)^p}\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\frac{1}{\alpha p+1} + \frac{1}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{p}}} \leq A,$$

c'est à dire

$$\begin{aligned}
(2.18) &\Leftrightarrow \frac{\left(\frac{1}{\alpha p+1} + \frac{1}{\epsilon\left(-\alpha-\frac{1+\epsilon}{p}+1\right)^p}\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\frac{1}{\alpha p+1} + \frac{1}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{p}}} \leq A \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{\frac{1}{\alpha p+1} + \frac{1}{\epsilon\left(-\alpha-\frac{1+\epsilon}{p}+1\right)^p}}{\frac{1}{\alpha p+1} + \frac{1}{\epsilon}}\right)^{\frac{1}{n}} \leq A \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{\epsilon}{\frac{\epsilon}{\alpha p+1} + \frac{1}{\left(-\alpha-\frac{1+\epsilon}{p}+1\right)^p}}\right)^{\frac{1}{p}} \leq A
\end{aligned}$$

quand $\epsilon \to 0$, on trouve $\left(-\alpha + \frac{1}{p^2}\right)^{-1} \leq A$. Alors, $\left(\frac{1}{p'} - \alpha\right)^{-1}$ est la constante optimale dans (2.15).

Le calcul de la constante dans (2.16) **:** Soit la constante $B > 0$ telle que

$$\|x^{\alpha}(H_2 f)(x)\|_{L_{p(0;ix)}} \leq B \|x^{\alpha} f(x)\|_{L_{p(\hat{G};\infty)}},$$

considérons la fonction $f_\epsilon,\ \epsilon > 0$ définie par :

$$f_\epsilon(x) = \begin{cases} x^{-a-\frac{1-r}{r}}, & \text{si } x \in (0;1] \\ 0, & \text{si } x \in (1;\infty) \end{cases}$$

On a

$$\|x^{\alpha}(H_2 f_e)(x)\|_{L_{p(0;ix)}} \leq B \|x^{\alpha} f_\ell(x)\|_{L_{p(0;\infty;)}},$$

D'aprèés des calculs analogues aux précédents, on obtient

$$\|x^{\alpha}(H_2 f_\epsilon)(x)\|_{L_{p(0,\infty)}} = \left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\alpha - \frac{1}{p'} - \frac{\epsilon}{p}\right)^{-1},$$

car

$$\left|-\alpha + \frac{1}{p'} + \frac{\epsilon}{p}\right|^p = \left(\alpha - \frac{1}{p'} - \frac{\epsilon}{p}\right)^p,$$

pour $-\alpha + \frac{1}{p} + \frac{\epsilon}{p} < 0$ et

$$\|x^{\alpha} f_\epsilon(x)\|_{L_{p\left\{0_j\infty\right)}} = \left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{p}},$$

d'où l'on déduit que

$$\left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\alpha - \frac{1}{p'} + \frac{\epsilon}{p}\right)^{-1} \leq B \left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{p}},$$

alors

$$\left(\alpha - \frac{1}{p'} + \frac{\epsilon}{p}\right)^{-1} \leq B,$$

pour $\epsilon \to 0$, on conclut

$$\left(\alpha - \frac{1}{p'}\right)^{-1} \leq B.$$

Ce qui fait que $\left(\alpha - \frac{1}{p'}\right)^{-1}$ est la constante optimale dans (2.16).

Théorème 2.0.7. *Pour $1 \leq p \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p} = 1$, $x^{\alpha} f(x) \in L_{p(0,\infty)}$, il n'eriste pas de $A > 0$ telles que les inégalités suivantes soient vérifiées :*

$$\|x^{a}(H_1 f)(x)\|_{L_{p(0;\infty)}} \leq A \|x^{a} f(x)\|_{L_{p(0,\infty)}}, \quad si \quad \alpha \geq \frac{1}{p'}, \tag{2.19}$$

et

$$\|x^{a}(H_2 f)(x)\|_{L_{p(0;\infty)}} \leq A \|x^{a} f(x)\|_{L_{p(0,\infty)}}, \quad si \quad \alpha \leq \frac{1}{p'}. \tag{2.20}$$

Démonstration. La démonstration comprend deux parties :

i. Soient $1 \leq p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

1. Si $\alpha \geq \frac{1}{p'}$ et $\varphi_\delta(x)$, $\delta > 0$ une fonction définie par :

$$\varphi_\delta(x) = x^{-a-\frac{L+d}{P}}\chi(1,\infty)(x),$$

où $\chi_{(1,\infty)}$ est la fonction caractéristique de l'intervalle $(1,\infty)$. Alors pour $x \geq 2$

$$\begin{aligned} (H_1\varphi_\delta)(x) &= \frac{1}{x}\int_0^x \varphi_\delta(t)dt \\ &= \frac{1}{x}\int_1^x t^{-a-\frac{1+\delta}{p}}dt \geq \frac{C_1}{x} \end{aligned}$$

où $C_1 = \int_1^2 t^{-a-\frac{1+\delta}{p}}dt$.

Comme $\alpha \geq 1/p'$, on a $\alpha p - p \geq -1$ et alors

$$\|x^\alpha \varphi_\delta(x)\|_{L_{p(0,\infty)}} = \delta^{-\frac{1}{p}} < \infty.$$

En vertu de l'inégalité (I) on déduit que

$$\|x^\alpha (H_1\varphi_{ij})(x)\|_{L_{p\{0,\infty\}}} \geq C_1\left(\int_1^\infty x^{\alpha\beta-p}dx\right)^{\frac{1}{p}} = \infty,$$

donc on conclut que l'inégalité (2.19) n'a pas lieu.

2. Si $\alpha \leq \frac{1}{p}$ et $\psi_\delta(x)$, $\delta > 0$ une fonction définie par :

$$\psi_\delta(x) = x^{-\alpha-\frac{L-d}{P}}\chi_{(0,1)}(x),$$

alors $\alpha + (1-\delta)/p < 1$ et quand $0 < x < 1/2$, on a

$$(H_2\psi_\delta)(x) = \frac{1}{x}\int_x^1 y^{-\mathrm{a}-\left(\frac{1-f}{p}\right)}dy \geq \frac{C_2}{x},$$

où $C_2 = \int_{1/2}^1 y^{-\alpha-\left(\frac{1-6}{p}\right)}dy$. Donc quand $\alpha \leq 1/p'$ on a $\alpha p - p \leq -1$, alors

$$\|x^a \psi_\delta(x)\|_{L_{p(0,\infty)}} = \delta^{-\frac{1}{p}} < \infty.$$

d'autre part on a

$$\|x^a (H_2\psi_s)(x)\|_{L_{p(0,\infty)}} \geq C_2\left(\int_0^{1/2} x^{ap-p}dx\right)^{\frac{1}{p}} = \infty,$$

donc on conclut que l'inégalité (2.20) n'a pas lieu.

ii. Si $p=\infty$, d'une manière analogue on prouve qu'il n'existe pas des constantes $A>0$ et $B>0$ telles que les inégalités suivantes soient vérifiées :

$$\begin{aligned}\left\|x^{\alpha}\left(H_{1} f\right)(x)\right\|_{L_{\infty\{(1;\infty)}} &\leq A\left\|x^{\alpha} f(x)\right\|_{L_{\infty(0,\infty)}} \\ \left\|x^{a}\left(H_{2} f\right)(x)\right\|_{L_{\infty(0,\infty)}} &\leq B\left\|x^{\alpha} f(x)\right\|_{L_{\infty(t;\infty)}} .\end{aligned}$$

□

Définition 2.0.5. *Soient $1 \leq p \leq \infty,\ \alpha \in \mathbb{R}$, l'espace $L_{P,a(0,\infty)}$ est l'espace de toutes les fonctions mesurables sur $(0,\infty)$ telles que;*

$$\|f\|_{L_{P(0,\infty)}}=\left\|x^{o} f(x)\right\|_{L_{P(0,\infty)}}<\infty .$$

Soit $0<a<b<\infty$, on pose

$$\left(H_{3} f\right)(x)=\frac{1}{x} \int_{a x}^{b x} f(y) d y, \forall x>0 .$$

2.1 Nouveau type de l'inégalité intégrale de Hardy($p<0$)

Les enoncés des théorèmes suivants et leurs preuves ont fait l'objet de la publication de Bicheng Yang (voir [3]). Ensuite des inégalités analogues à celles de l'auteur de la publication, de plus ces dernières ont été étendues à $\mathbb{R}^n$. On sait que si $p>1$ et $0<\int_0^\infty t^{-r}(tf(t))^p dt<\infty$ on a l'inégalité suivante

$$\int_{0}^{\infty} x^{-r} F^{p}(x) d x<\left(\frac{p}{|r-1|}\right)^{p} \int_{0}^{\infty} t^{-r}(t f(t))^{p} d t, \tag{2.21}$$

où la constante $\left(\frac{p}{|r-1|}\right)^{\mu}$ est optimale.

On considère une nouvelle inégalité intégrale du type de Hardy, pour $p<0$ avec une constante optimale.

Théorème 2.1.1. *Si $p<0,\quad r \neq 1,\quad f(t) \geq 0$ et $0<\int_0^\infty t^{-r}(tf(t))^p dt<\infty,\quad F(x)$ une fonction définie par :*

$$F(x)=\int_{0}^{x} f(t) d t,(r<1), \qquad F(x)=\int_{x}^{\infty} f(t) d t,(r>1),$$

alors, on a

$$\int_{0}^{\infty} x^{-r} F^{p}(x) d x<\left(\frac{-p}{|r-1|}\right)^{p} \int_{0}^{\infty} t^{-r}(t f(t))^{p} d t, \tag{2.22}$$

où le facteur $\left(\frac{-p}{|r-1|}\right)^{p}$ est la constante optimale.

Pour la démonstration, nous avons besoin de ce type d'inégalité intégrale de Hölder.

Proposition 2.1. *Si* $p < 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f(t), g(t) \geq 0$ *et*

$$\left(\int_E |f(t)|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad \left(\int_E |g(t)|^q \, dt\right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

alors

$$\int_E f(t)g(t)dt \geq \left(\int_E f^p(t)dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E g^q(t)dt\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{2.23}$$

On a une égalité si et seulement s'il existe des constantes c et d, telles quelles ne soient pas nulles simultanément et

$$cf^p(t) = dg^q(t), \quad dans\, E.$$

Lemme 7. *Si* $p < 0, \quad r < 1, \quad f(t) \geq 0$ *et* $0 < \int_0^\infty t^{-r}(tf(t))^p dt < \infty$, *alors*

$$\int_0^\infty x^{-r} \left(\int_0^x f(t)dt\right)^p dx < \left(\frac{p}{r-1}\right)^p \int_0^\infty t^{-r}(tf(t))^p dt, \tag{2.24}$$

où le facteur $\left(\frac{p}{r-1}\right)^\mu$ *est la constante optimale. En particulier,*
(*i*) *pour* $= 0$, *on a*

$$\int_0^\infty \left(\int_0^x f(t)dt\right)^p dx < (-p)^p \int_0^\infty (tf(t))^p dt, \tag{2.25}$$

(*ii*) *pour* $r = p$, *on a*

$$\int_0^\infty \left(\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}\right)^p dx < \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty f^p(t)dt, \tag{2.26}$$

(*iii*) *pour* $r = 1 + p$, *on a*

$$\int_0^\infty x^{-1} \left(\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}\right)^p dx < \int_0^\infty t^{-1} f^p(t)dt, \tag{2.27}$$

où les facteurs dans les inégalités (2.25), (2.26) *et* (2.27) *sont les constantes optimales.*

Lemme 8. *Si* $p < 0$, $r > 1$, $f(t) \geq 0$ *et* $0 < \int_0^\infty t^{-r}(tf(t))^p dt < \infty$, *alors*

$$\int_0^\infty x^{-r} \left(\int_x^\infty f(t)dt\right)^p dx < \left(\frac{p}{1-r}\right)^p \int_0^\infty t^{-r}(tf(t))^\mu dt, \tag{2.28}$$

où le facteur $\left(\frac{p}{1-r}\right)^p$ *est la constante optimale. En particulier,* *(i) pour $r = 2$, on a*

$$\int_0^\infty x^{-2}\left(\int_x^\infty f(t)dt\right)^p dx < (-p)^p \int_0^\infty t^{p-2} f^p(t)dt, \tag{2.29}$$

(ii) pour $r = 1-p$, on a

$$\int_0^\infty x^{p-1}\left(\int_x^\infty f(t)dt\right)^p dx < \int_0^\infty t^{2p-1} f^p(t)dt, \tag{2.30}$$

où les facteurs dans les inégalités (2.29) *et* (2.30) *sont les constantes optimales.*

Théorème 2.1.2. *Soient $p < 0$, $\alpha \neq 1-p$, $f(t) \geq 0$ et $0 < \int_0^\infty t^{-a}(f(t))^p dt < \infty$, alors*

1. *si $\alpha < 1-p$*

$$\int_0^\infty x^{-\alpha}\left(H_1 f\right)^p(x)dx < \left(\frac{p}{\alpha+p-1}\right)^p \int_0^\infty t^{-\alpha}(f(t))^p dt, \tag{2.31}$$

où le facteur $\left(\frac{p}{\alpha+p-1}\right)^p$ est la constante optimale et $\left(H_1 f\right)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$

2. *si $\alpha > 1-p$*

$$\int_0^\infty x^{-\alpha}\left(H_2 f\right)^P(x)dx < \left(\frac{-p}{\alpha+p-1}\right)^p \int_0^\infty t^{-\alpha}(f(t))^p dt, \tag{2.32}$$

où le facteur $\left(\frac{-p}{\alpha+p-1}\right)^p$ est la constante optimale et $\left(H_2 f\right)(x) = \frac{1}{x}\int_x^\infty f(t)dt$.

Chapitre 3

Éxtension de certaines inégalités de Hardy

On se propose d'étendre les inégalités (2.16) et (2.17) qui sont définis dans $(0, \infty)$ à $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$. Jusqu'a présent on a considéré les inégalités de Hardy pour $1 \leq p \leq \infty$, dans la deuxième partie de ce chapitre on aborde les analogues de (2.16) et (2.17) pour $0 < p < 1$.

3.1 Extension à $\mathbb{R}$

On pose

$$\left(\widetilde{H}_1 f\right)(x) := \frac{1}{2x} \int_{-x}^{x} f(y) dy,$$

et

$$\left(\widetilde{H}_2 f\right)(x) := \frac{1}{2x} \int_{|y| \geq x} f(y) dy.$$

Soient $1 \leq p \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $x^\alpha f(xz)$ mesurable sur $\mathbb{R} \times (-1, 1)$ et $x^\alpha f(xz) \in L_{p(\mathbb{R})}$ pour presque tous les $z \in (-1, 1)$, alors

i. Si $\alpha < \frac{1}{p'}$, on a

$$\left\| |x|^\alpha \left(\widetilde{H}_1 f\right)(x) \right\|_{L_{p(\mathbb{R})}} \leq \left(\frac{1}{p'} - \alpha\right)^{-1} \left\| |x|^\alpha f(x) \right\|_{L_{p(\mathbb{R})}}.$$

ii. Si $\alpha \geq \frac{1}{p'}$, on a

$$\left\| |x|^\alpha \left(\widetilde{H}_2 f\right)(x) \right\|_{L_{p(\mathbb{R})}} \leq \left(\alpha - \frac{1}{p'}\right)^{-1} \left\| |x|^\alpha f(x) \right\|_{L_{p(\mathbb{R})}}.$$

3.2 Extension à $\mathbb{R}^n$

Soient $x \in \mathbb{R}^a$, $r = |x| > 0$, $B_r = \{y \in \mathbb{R}^n;\ |y| < r\}$, $1 \leq p \leq \infty$, $f(x)$ une fonction mesurable sur B_r. Considérons les deux opérateures suivants :

$$\left(\widetilde{H}_1 f\right)(x) := \frac{1}{mes(B_r)} \int_{B_r} f(y)dy,$$

et

$$\left(\widetilde{H}_2 f\right)(x) := \frac{1}{mes(B_r)} \int_{\mathbb{R}^n \backslash B_r} f(y)dy.$$

Théorème 3.2.1. *Soient* $1 \leq p \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ *et* $f(r, \xi) \in L_{p(S_{n-1})}$, *où* S_{n-1} *désigne la sphère unité dans* $\mathbb{R}^n$ *, alors*

i. Si $\alpha < \frac{n}{p'}$

$$\left\| |x|^\alpha \left(\widetilde{H}_1 f\right)(x) \right\|_{L_{p(\mathbb{R}^n)}} \leq \left(\frac{1}{p'} - \frac{\alpha}{n}\right)^{-1} \left\| |x|^\alpha f(x) \right\|_{L_{p(\mathbb{R}^n)}}.$$

ii. Si $\alpha > \frac{n}{p'}$

$$\left\| |x|^\alpha \left(\widetilde{H}_2 f\right)(x) \right\|_{L_{p(\mathbb{R}^n)}} \leq \left(\frac{\alpha}{n} - \frac{1}{p'}\right)^{-1} \left\| |x|^\alpha f(x) \right\|_{L_{p(\mathbb{R}^n)}}.$$

3.3 Inégalités de Hardy pour les quasi-normes

Pour les quasi-normes dans $L_p(0 < p < 1)$ les inégalités (2.16) et (2.17) ne sont plus valables pour les fonctions seulement mesurables. Pour obtenir l'analogue de (2.16) et (2.17) on peut considérer la classe des fonctions monotones. C'est ce qui est exprimé dans le théorème suivant :

Théorème 3.3.1. *:*

i. Soient $0 < p < 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $\alpha < \frac{1}{p}$, $f(x) \geq 0$ *une fonction monotone définie sur* $(0, \infty)$*, alors, il existe une constante* $C > 0$ *telle que :*

$$\left\| x^\alpha \left(H_1 f\right)(x) \right\|_{L_{p(0,\infty)}} \leq C \left\| x^\alpha f(x) \right\|_{L_{p(\mathrm{Q},\infty)}}. \tag{3.1}$$

ii. Soient $0 < p < 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $\alpha > \frac{1}{p'}$, $f(x) \geq 0$ *une fonction décroissante définie sur* $(0, \infty)$*, alors, il éxiste une constante* $C' > 0$ *telle que :*

$$\left\| x^a \left(H_2 f\right)(x) \right\|_{L_{p(0;\infty)}} \leq C' \left\| x^a f(x) \right\|_{L_{p(0,\infty)}}. \tag{3.2}$$

3.4 Nouveau type de l'inégalité intégrale de Hardy(p<0)

Les enoncés des théorèmes suivants et leurs preuves ont fait l'objet de la publication de Bicheng Yang (voir [3]). Ensuite on aborde des inégalités analogues à celles de l'auteur de la publication, de plus ces derniàres ont été étendues à $\mathbb{R}^n$. On sait que si $p > 1$ et $0 < \int_0^\infty t^{-r}(tf(t))^p dt < \infty$ on a l'inégalité suivante

$$\int_0^\infty x^{-r}F^p(x)dx < \left(\frac{p}{|r-1|}\right)^p \int_0^\infty t^{-r}(tf(t))^p dt, \tag{3.3}$$

où la constante $\left(\frac{p}{|r-1|}\right)^\mu$ est optimale. Dans cette partie on considère une nouvelle inégalité intégrale du type de Hardy, c'est-à-dire l'analogue de (3.3) pour $p < 0$ avec une constante optimale.

Théorème 3.4.1. *Si $p < 0, \quad r \neq 1, \quad f(t) \geq 0$ et $0 < \int_0^\infty t^{-r}(tf(t))^p dt < \infty, \quad F(x)$ une fonction définie par :*

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt, (r < 1), \qquad F(x) = \int_x^\infty f(t)dt, (r > 1),$$

alors, on a

$$\int_0^\infty x^{-r}F^p(x)dx < \left(\frac{-p}{|r-1|}\right)^p \int_0^\infty t^{-r}(tf(t))^p dt, \tag{3.4}$$

où le facteur $\left(\frac{-p}{|r-1|}\right)^p$ est la constante optimale.

Pour la démontration le, nous avons besoin de ce type d'inégalité intégrale de Hölder.

Proposition 3.1. *Si $p < 0, \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \ f(t), \ g(t) \geq 0$ et $f \in L_{p(E)}, \ g \in L_{q(E)}$, alors*

$$\int_E f(t)g(t)dt \geq \left(\int_E f^p(t)dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E g^q(t)dt\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{3.5}$$

On a une égalité si et seulement s'il existe des constantes c et d, telles quelles ne soient pas nulles simultanément et

$$cf^p(t) = dg^q(t), \qquad \textit{dans } E.$$

Lemme 9. *Si $p < 0, \quad r < 1, \quad f(t) \geq 0$ et $0 < \int_0^\infty t^{-r}(tf(t))^p dt < \infty$, alors*

$$\int_0^\infty x^{-r}\left(\int_0^x f(t)dt\right)^p dx < \left(\frac{p}{r-1}\right)^p \int_0^\infty t^{-r}(tf(t))^p dt, \tag{3.6}$$

oé le facteur $\left(\frac{p}{r-1}\right)^\mu$ est la constante optimale.

En particulier,

i. pour $r = 0$*, on a*

$$\int_0^\infty \left(\int_0^x f(t)dt\right)^p dx < (-p)^p \int_0^\infty (tf(t))^p dt, \tag{3.7}$$

ii. pour $r = p$*, on a*

$$\int_0^\infty \left(\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}\right)^p dx < \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty f^p(t)dt, \tag{3.8}$$

iii. pour $r = 1+p$*, on a*

$$\int_0^\infty x^{-1} \left(\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}\right)^p dx < \int_0^\infty t^{-1} f^p(t)dt, \tag{3.9}$$

où les facteurs dans les inégalités (3.7)*,* (3.8) *et* (3.9) *sont les constantes optimales.*

Lemme 10. *Si* $p < 0,\ r > 1,\ f(t) \geq 0$ *et* $0 < \int_0^\infty t^{-r}(tf(t))^p dt < \infty$*, alors*

$$\int_0^\infty x^{-r} \left(\int_x^\infty f(t)dt\right)^p dx < \left(\frac{p}{1-r}\right)^p \int_0^\infty t^{-r}(tf(t))^\mu dt, \tag{3.10}$$

où le facteur $\left(\frac{p}{1-r}\right)^p$ *est la constante optimale.*

En particulier,

i. pour $r = 2$*, on a*

$$\int_0^\infty x^{-2} \left(\int_x^\infty f(t)dt\right)^p dx < (-p)^p \int_0^\infty t^{p-2} f^p(t)dt, \tag{3.11}$$

ii. pour $r = 1-p$*, on a*

$$\int_0^\infty x^{p-1} \left(\int_x^\infty f(t)dt\right)^p dx < \int_0^\infty t^{2p-1} f^p(t)dt, \tag{3.12}$$

où les facteurs dans les inégalités (3.11) *et* (3.12) *sont les constantes optimales.*

Dans ce qui suit on établi l'analogue de (3.6) et (3.10). Il s'avère que la seule difference est le changement du paramètre r dans la constante, c'est-à-dire à la place de r apparait $\alpha + p$.

Théorème 3.4.2. *Soient* $p < 0,\ \alpha \neq 1-p, f(t) \geq 0$ *et* $0 < \int_0^\infty t^{-a}(f(t))^p dt < \infty$*, alors*

1. si $\alpha < 1-p$

$$\int_0^\infty x^{-\alpha} \left(H_1 f\right)^p (x)dx < \left(\frac{p}{\alpha+p-1}\right)^p \int_0^\infty t^{-\alpha}(f(t))^p dt, \tag{3.13}$$

où le facteur $\left(\frac{p}{\alpha+p-1}\right)^p$ *est la constante optimale et* $\left(H_1 f\right)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$*,*

2. si $\alpha > 1-p$

$$\int_0^\infty x^{-\alpha} \left(H_2 f\right)^P (x)dx < \left(\frac{-p}{\alpha+p-1}\right)^p \int_0^\infty t^{-\alpha}(f(t))^p dt, \tag{3.14}$$

où le facteur $\left(\frac{-p}{\alpha+p-1}\right)^p$ *est la constante optimale et* $\left(H_2 f\right)(x) = \frac{1}{x}\int_x^\infty f(t)dt$*.*

3.4.1 Extension de quelques inégalités à $\mathbb{R}^n$

Théorème 3.4.3. *Soient* $p < 0$, $\alpha \neq n(1-p)$, $f(t) \geq 0$ *et* $\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-\alpha} (f(x))^p \, dx < \infty$, $f(r,\xi) \in L_{p(S_{n-1})}$, *où* S_{n-1} *désigne la sphère unité dans* $\mathbb{R}^n$ *, alors*

i. Si $\alpha < n(1-p)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-\alpha} \left(\widetilde{H}_1 f\right)^p (x) dx < \left(\frac{np}{\alpha + n(p-1)}\right)^p \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-\alpha} (f(x))^p \, dx. \tag{3.15}$$

où $\left(\widetilde{H}_1 f\right)(x) = \frac{1}{mes(B_r)} \int_{B_r} f(t) dt$,

ii. Si $\alpha > n(1-p)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-\alpha} \left(\widetilde{H}_2 f\right)^p (x) dx < \left(\frac{-np}{\alpha + n(p-1)}\right)^p \int_{\mathbb{R}^n / B_r} |x|^{-\alpha} (f(x))^p \, dx. \tag{3.16}$$

où $\left(\widetilde{H}_2 f\right)(x) = \frac{1}{mes(B_r)} \int_{\mathbb{R}^n / B_r} f(t) dt$.

Chapitre 4

Quelques Inégalités intégrales pour les fonctions quasi-monotone dans les espaces de Lebesgue pondérés

Il est bien connu que pour les espaces L_p avec $0 < p < 1$, l'inégalité de Hardy est non satisfaite pour les fonctions mesurables arbitraires non négatives, mais elle est satisfait pour les fonctions non négatives non croissantes (voir [3] pour plus de détails).

Dans [4] l'inégalité de type Hardy pour $0 < p < 1$ a été prouvée sous des hypothèses plus faibles sur f mais toujours de type monotonie. Le résultat a été prouvé pour la variante à n-dimensions de l'opérateur de Hardy, à savoir pour l'opérateur H défini pour toutes les fonctions $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ par

$$(Hf)(t) = \frac{1}{v_n t^n} \int_{B_t} f(y)dy, \quad 0 < t < \infty,$$

où B_t est la boule de centre 0 et de rayon t et v_n est le volume de la boule unité en $\mathbb{R}^n$.

Théorème 4.0.4. *Soient* $0 < p < 1$, $\alpha < n - \frac{1}{p}$ *et* $M > 0$. *De plus, soit* f *une fonction non-négative mesurable sur* $\mathbb{R}^n$ *telle que* $\|f(x)|x|^{\frac{n}{p'}}\|_{L_p(Br)} < \infty$ *et*

$$\|f(x)\|_{L_1(B_r)} \leq M \left\| f(x)|x|^{\frac{n}{p'}} \right\|_{L_p(B_r)} \tag{4.1}$$

pour tout $r > 0$, *avec* $p' = \frac{p}{p-1}$.

Alors

$$\|f^{\alpha}(Hf)(t)\|_{L_p(0,\infty)} \leq N \left\| f(x)|x|^{\alpha - \frac{n-1}{p}} \right\|_{L_p(\mathbb{R}_n)}, \tag{4.2}$$

où

$$N = v_n^{-1}((n-\alpha)p - 1)^{-\frac{1}{p}} M. \tag{4.3}$$

L'opérateur pondéré de type Hardy $(H_w f)(t)$ est défini comme suit

$$(H_w f)(t) = \frac{1}{W(t)} \int_0^t f(x)w(x)dx.$$

où $0 < W(t) := \int_0^t w(x)dx < \infty$ pour tout $r > 0$, et $w(x)$ est une fonction de poid. Notez que pour $w(x) = 1$ l'opérateur H_w est l'opérateur de Hardy classique

$$(Hf)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt.$$

Plus tard, les résultats de [4] ont été étendus à l'opérateur pondéré de type Hardy (voir [1] pour plus de détails).

L'objectif de ce travail dans cet chapitre est d'étendre les résultats de [1] à d'autres opérateurs de type Hardy pour les fonctions quasi-monotones.

4.1 Fonction quasi-monotone

La définition suivante a été introduite dans [10].

Définition 4.1.1 (Fonction quasi-monotone)**.** *On dit qu'une fonction non négative f est quasi-monotone sur $]0, \infty[$, si pour un nombre réel α, $x^\alpha f(x)$ est une fonction décroissante ou croissante. Plus précisément, étant donné $\beta \in \mathbb{R}$, on dit que $f \in Q_\beta$ si $x^{-\beta} f(x)$ n'est pas croissante et $f \in Q^\beta$ si $x^{-\beta} f(x)$ n'est pas décroissant.*

Les lemmes suivants généralisent le Lemme 2.1 et le Lemme 2.2 de [9].

Lemme 11. *Soit $0 < p < 1,\ C_1 > 0,\ w$ une fonction de poid sur $(0, \infty)$, telle que*

$$x^{-\beta} w(x) \leq C_1 y^{-\beta} w(y),\ \textit{pour } \beta \geq 0,\ 0 < y < x < \infty, \tag{4.4}$$

alors, pour tout $0 < x < r < \infty$

$$\left(\int_0^x y^{-\beta} w(y) y^{p-1} dy\right)^{1-\frac{1}{p}} \leq A_2 x^{p-2} \frac{1}{r^{-\frac{\beta}{p}} w^{\frac{1}{p}}(r)} \int_0^x t^{-\beta} w(t) dt, \tag{4.5}$$

où $A_2 = C_1^{\frac{2}{p}-1} p^{\frac{1}{p}-1}$.

Démonstration. D'aprés (4.4), pour $0 < y < x < r < \infty$, on a

$$y^{-\beta} w(y) \geq C_1^{-1} x^{-\beta} w(x),$$

ainsi

$$y^{-\beta} w(y) y^{p-1} \geq C_1^{-1} x^{-\beta} w(x) y^{p-1}.$$

En intégrant sur $(0, x)$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^x y^{-\beta} w(y) y^{p-1} dy \geq & \int_0^x C_1^{-1} x^{-\beta} w(x) y^{p-1} dy \\ =& C_1^{-1} x^{-\beta} w(x) \frac{x^p}{p} \\ \geq & C_1^{-2} r^{-\beta} w(r) \frac{x^p}{p}.\end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse $0 < p < 1$, nous avons $1 - \frac{1}{p} < 0$, donc

$$\left(\int_0^x y^{-\beta} w(y) y^{p-1} dy\right)^{1-\frac{1}{p}} \leq C_1^{\frac{2}{p}-2} r^{-\beta\left(1-\frac{1}{p}\right)} \frac{w(r)}{w^{\frac{1}{p}}(r)} \frac{x^{p-1}}{p^{1-\frac{1}{p}}}. \tag{4.6}$$

Soit $0 < t < x < r$, par conséquent $r^{-\beta} w(r) \leq C_1 t^{-\beta} w(t)$.
En intégrant la dernière inégalité sur $(0, x)$, on obtient

$$\int_0^x r^{-\beta} w(r) dt \leq \int_0^x C_1 t^{-\beta} w(t) dt,$$

alors

$$w(r) \leq \frac{C_1}{x r^{-\beta}} \int_0^x t^{-\beta} w(t) dt. \tag{4.7}$$

Par conséquent en appliquant (4.6) et (4.7), on trouve

$$\begin{aligned}\left(\int_0^x y^{-\beta} w(y) y^{p-1} dy\right)^{1-\frac{1}{p}} &\leq C_1^{\frac{2}{p}-2} r^{-\beta\left(1-\frac{1}{p}\right)} \frac{x^{p-1}}{w^{\frac{1}{p}}(r) p^{1-\frac{1}{p}}} \frac{C_1}{x r^{-\beta}} \int_0^x t^{-\beta} w(t) dt \\ &= C_1^{\frac{2}{p}-1} p^{\frac{1}{p}-1} x^{p-2} \frac{1}{r^{-\frac{\beta}{p}} w^{\frac{1}{p}}(r)} \int_0^x t^{-\beta} w(t) dt.\end{aligned}$$

□

Nous considérons l'opérateur de type Hardy $F_{w,\beta}$ donné par

$$\left(F_{w,\beta} f\right)(r) = \int_0^r \frac{x^{-\beta} f(x) w(x)}{W_\beta(x)} dx,$$

où $0 < W_\beta(x) := \int_0^x t^{-\beta} w(t) dt < \infty$ pour tout $x > 0$.

Lemme 12. *Soit $0 < p < 1$, $C_2 > 0,$, w une fonction de poids sur $(0, \infty)$, satisfaisant la condition (4.4). Si f est une fonction mesurable de Lebesgue non négative sur $(0, \infty)$, telle que pour presque tout $0 < x < \infty$,*

$$f(x) \leq \frac{C_2}{x^{-\beta-\frac{1}{1-p}}} \left(\int_0^x y^{-\beta} w(y) y^{p-1} dy\right)^{-\frac{1}{p}} \left(\int_0^x \left(y^{-\beta} f(y)\right)^p w(y) y^{p-1} dy\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{4.8}$$

alors, pour tout $0 < y < r < \infty$

$$\left(F_{w,\beta} f\right)(r) \leq \frac{p C_2^{1-p} C_1}{r^{-\frac{\beta}{p}} w^{\frac{1}{p}}(r)} \left(\int_0^r \left(y^{-\beta} f(y)\right)^p w(y) y^{p-1} dy\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{4.9}$$

Démonstration. En appliquant (4.8), on a

$$x^{-\beta(1-p)}f^{1-p}(x) \leq C_2^{1-p}x\left(\int_0^x y^{-\beta}w(y)y^{p-1}dy\right)^{-\frac{1}{p}(1-p)}\left(\int_0^x \left(y^{-\beta}f(y)\right)^p w(y)y^{p-1}dy\right)^{\frac{1}{p}(1-p)},$$

ainsi

$$\begin{aligned}x^{-\beta}f(x)w(x) \leq & C_2^{1-p}x\left(\int_0^x y^{-\beta}w(y)y^{p-1}dy\right)^{1-\frac{1}{p}} f^p(x)w(x)x^{-\beta p}\left(\int_0^x \left(y^{-\beta}f(y)\right)^p w(y)y^{p-1}dy\right)^{\frac{1}{p}-1}\\ =& pC_2^{1-p}x\left(\int_0^x y^{-\beta}w(y)y^{p-1}dy\right)^{1-\frac{1}{p}} x^{1-p}\left[\left(\int_0^x \left(y^{-\beta}f(y)\right)^p w(y)y^{p-1}dy\right)^{\frac{1}{p}}\right]'.\end{aligned}$$

En utilisant (4.5), pour $0 < y < x < r$, on trouve

$$x^{-\beta}f(x)w(x) \leq pC_2^{1-p}x\left(C_1x^{p-2}\frac{1}{r^{-\frac{\beta}{p}}w^{\frac{1}{p}}(r)}\int_0^x t^{-\beta}w(t)dt\right)x^{1-p}\left[\left(\int_0^x \left(y^{-\beta}f(y)\right)^p w(y)y^{p-1}dy\right)^{\frac{1}{p}}\right]',$$

de là

$$\frac{x^{-\beta}f(x)w(x)}{\int_0^x t^{-\beta}w(t)dt} \leq pC_2^{1-p}C_1\frac{1}{r^{-\frac{\beta}{p}}w^{\frac{1}{p}}(r)}\left[\left(\int_0^x \left(y^{-\beta}f(y)\right)^p w(y)y^{p-1}dy\right)^{\frac{1}{p}}\right]'.$$

En intégrant sur l'intervalle $(0, r)$, on obtient

$$\int_0^r \frac{x^{-\beta}f(x)w(x)}{\int_0^x t^{-\beta}w(t)dt}dx \leq pC_2^{1-p}C_1\frac{1}{r^{-\frac{\beta}{p}}w^{\frac{1}{p}}(r)}\left(\int_0^r \left(y^{-\beta}f(y)\right)^p w(y)y^{p-1}dy\right)^{\frac{1}{p}}.$$

La preuve est complète. □

Lemme 13. *Soit* $0 < p < 1,\ C_3 > 0,\ w$ *une fonction de poids sur* $(0, \infty)$*, telle que*

$$y^{-\beta}w(y) \leq C_3x^{-\beta}w(x),\ \textit{for}\ \beta \geq 0,\ 0 < y < x < \infty. \tag{4.10}$$

1. *si pour tout* $0 < x < r < \infty$*, alors*

$$\left(\int_0^x y^{-\beta}w(y)y^{p-1}dy\right)^{1-\frac{1}{p}} \geq C_3x^{p-2}\frac{1}{r^{-\frac{\beta}{p}}w^{\frac{1}{p}}(r)}\int_0^x t^{-\beta}w(t)dt. \tag{4.11}$$

2. *Si* f *est une fonction mesurable de Lebesgue non négative sur* $(0, \infty)$*, telle que pour presque tout* $0 < x < \infty$*,*

$$f(x) \geq \frac{C_4}{x^{-\beta-\frac{1}{1-p}}}\left(\int_0^x y^{-\beta}w(y)y^{p-1}dy\right)^{-\frac{1}{p}}\left(\int_0^x \left(y^{-\beta}f(y)\right)^p w(y)y^{p-1}dy\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{4.12}$$

où $A_1 > 0$*, alors pour tout* $r > 0$

$$\left(F_{w,\beta}f\right)(r) \geq \frac{pC_4^{1-p}C_3}{r^{-\frac{\beta}{p}}w^{\frac{1}{p}}(r)}\left(\int_0^r \left(y^{-\beta}f(y)\right)^p w(y)y^{p-1}dy\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{4.13}$$

Démonstration. Les preuves de (4.11) et (4.13) sont similaires à celles du Lemme 11 et du Lemme 12 respectivement. □

Théorème 4.1.1. *Soit* $0 < p < 1$*, w une fonction de poids sur* $(0, \infty)$*, satisfaisant la condition* (4.4) *et* $\alpha < -\frac{\beta+1}{p}$*. Si f est une fonction mesurable de Lebesgue non négative sur* $(0, \infty)$*, satisfaisant* (4.8)*, alors pour tout* $0 < y < x < r < \infty$

$$\|r^{\alpha}\left(F_{w,\beta}f\right)(r)\|_{L_{p,w}(0,\infty)} \leq C_5 \left\|y^{\alpha+1-\frac{\beta}{p'}}f(y)\right\|_{L_{p,w}(0,\infty)}, \tag{4.14}$$

où p' est le conjugué de p et $C_5 = C_2^{1-p}C_1^{\frac{2}{p}-1}\left(-\alpha - \frac{\beta+1}{p}\right)^{-\frac{1}{p}}$.
Si w et f satisfont respectivement (4.10), (4.12)*, alors* (4.14) *tient dans le sens inverse.*

Démonstration. Nous avons

$$\|r^{\alpha}\left(F_{w,\beta}f\right)(r)\|_{L_{p,w}(0,\infty)} = \left(\int_0^{\infty} r^{\alpha p}\left(F_{w,\beta}f\right)^p(r)w(r)dr\right)^{\frac{1}{p}},$$

à partir de (4.9), on trouve

$$\begin{aligned}\|r^{\alpha}\left(F_{w,\beta}f\right)(r)\|_{L_{p,w}(0,\infty)} \leq& \left(\int_0^{\infty} r^{\alpha p}\left(p^p C_2^{(1-p)p}C_1^p\frac{1}{r^{-\beta}w(r)}\int_0^r\left(y^{-\beta}f(y)\right)^p w(y)y^{p-1}dy\right)w(r)dr\right)^{\frac{1}{p}}\\ =& pC_2^{1-p}C_1\left(\int_0^{\infty} r^{\alpha p+\beta}\left(\int_0^r\left(y^{-\beta}f(y)\right)^p w(y)y^{p-1}dy\right)dr\right)^{\frac{1}{p}}\\ =& pC_2^{1-p}C_1\left(\int_0^{\infty}\left(\int_y^{\infty} r^{\alpha p+\beta}dr\right)y^{-\beta p}f^p(y)w(y)y^{p-1}dy\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

En appliquant l'hypothèse $\alpha < -\frac{\beta+1}{p}$, nous avons $\alpha p + \beta + 1 < 0$, donc

$$\begin{aligned}\|r^{\alpha}\left(F_{w,\beta}f\right)(r)\|_{L_{p,w}(0,\infty)} \leq& pC_2^{1-p}C_1\left(\int_0^{\infty}\left(-\frac{y^{\alpha p+\beta+1}}{\alpha p+\beta+1}\right)y^{-\beta p}f^p(y)w(y)y^{p-1}dy\right)^{\frac{1}{p}}\\ =& \frac{pC_2^{1-p}C_1}{(-\alpha p-\beta-1)^{\frac{1}{p}}}\left(\int_0^{\infty}\left(y^{\alpha+1-\frac{\beta}{p'}}f(y)\right)^p w(y)dy\right)^{\frac{1}{p}}\\ =& \frac{C_2^{1-p}C_1^{\frac{2}{p}-1}}{\left(-\alpha-\frac{\beta+1}{p}\right)^{\frac{1}{p}}}\left\|y^{\alpha+1-\frac{\beta}{p'}}f(y)\right\|_{L_{p,w}(0,\infty)}.\end{aligned}$$

La preuve est complète. □

En mettant $\beta = 0$ dans (4.14), on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 4.1.1. *Soit $0 < p < 1$, $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, w une fonction de poids sur $(0, \infty)$, satisfaisant la condition*

$$w(x) \leq C_1 w(y), \text{ for } 0 < y < x < \infty, \tag{4.15}$$

et $\alpha < -\frac{1}{p}$. Si f est une fonction mesurable de Lebesgue non négative sur $(0, \infty)$, telle que pour presque tout $0 < x < \infty$,

$$f(x) \leq \frac{C_2}{x^{-\frac{1}{1-p}}} \left(\int_0^x w(y) y^{p-1} dy \right)^{-\frac{1}{p}} \left(\int_0^x f^p(y) w(y) y^{p-1} dy \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{4.16}$$

alors pour tout $0 < y < x < r < \infty$

$$\left\| r^\alpha \left(F_w f \right)(r) \right\|_{L_{p,w}(0,\infty)} \leq C_6 \left\| y^{\alpha+1} f(y) \right\|_{L_{p,w}(0,\infty)}, \tag{4.17}$$

où

$$\left(F_w f \right)(r) := \int_0^r \frac{f(x) w(x)}{W(x)} dx,$$

$0 < W(x) := \int_0^x w(t) dt < \infty$ for all $x > 0$ and $C_6 = C_2^{1-p} C_1^{\frac{2}{p}-1} \left(-\alpha - \frac{1}{p} \right)^{-\frac{1}{p}}$.

Lemme 14. *Soit $0 < p < 1$, $C_1 > 0$, w une fonction de poids sur $(0, \infty)$, satisfaisant la condition (4.4), alors pour tout $0 < x < r < \infty$*

$$\left(\int_{\frac{x}{2}}^x y^{-\beta} w(y) y^{p-1} dy \right)^{1-\frac{1}{p}} \leq 2 C_1^{\frac{2}{p}-1} \left(\frac{2^p - 1}{p\, 2^p} \right)^{1-\frac{1}{p}} \frac{x^{p-2}}{r^{-\frac{\beta}{p}} w^{\frac{1}{p}}(r)} \int_{\frac{x}{2}}^x t^{-\beta} w(t) dt. \tag{4.18}$$

Démonstration. Par (4.4), pour $0 < y < x < r < \infty$, on a

$$y^{-\beta} w(y) \geq C_1^{-1} x^{-\beta} w(x),$$

alors

$$y^{-\beta} w(y) y^{p-1} \geq C_1^{-1} x^{-\beta} w(x) y^{p-1}.$$

En intégrant sur $(\frac{x}{2}, x)$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\frac{x}{2}}^x y^{-\beta} w(y) y^{p-1} dy \geq & \int_{\frac{x}{2}}^x C_1^{-1} x^{-\beta} w(x) y^{p-1} dy \\ = & C_1^{-1} x^{-\beta} w(x) \frac{x^p}{p} \left(1 - \frac{1}{2^p} \right) \\ \geq & C_1^{-2} r^{-\beta} w(r) \frac{x^p}{p} \left(\frac{2^p - 1}{2^p} \right). \end{aligned}$$

Puisque $0 < p < 1$, on a $1 - \frac{1}{p} < 0$, donc

$$\left(\int_{\frac{x}{2}}^x y^{-\beta} w(y) y^{p-1} dy \right)^{1-\frac{1}{p}} \leq C_1^{\frac{2}{p}-2} r^{-\beta\left(1-\frac{1}{p}\right)} \frac{w(r) x^{p-1}}{w^{\frac{1}{p}}(r)} \left(\frac{2^p - 1}{p\, 2^p} \right)^{1-\frac{1}{p}}, \tag{4.19}$$

pour $0 < t < r < \infty,\ r^{-\beta}w(r) \le C_1 t^{-\beta}w(t)$, par intégration sur $(\frac{x}{2}, x)$,

$$\int_{\frac{x}{2}}^{x} r^{-\beta}w(r)dt \le \int_{\frac{x}{2}}^{x} C_1 t^{-\beta}w(t)dt,$$

alors

$$w(r) \le \frac{2C_1}{xr^{-\beta}} \int_{\frac{x}{2}}^{x} t^{-\beta}w(t)dt. \tag{4.20}$$

Par conséquent de (4.19) et (4.20), on obtient

$$\begin{aligned}\left(\int_{\frac{x}{2}}^{x} y^{-\beta}w(y)y^{p-1}dy\right)^{1-\frac{1}{p}} &\le C_1^{\frac{2}{p}-2} r^{-\beta\left(1-\frac{1}{p}\right)} \frac{x^{p-1}}{w^{\frac{1}{p}}(r)} \left(\frac{2^p-1}{p\,2^p}\right)^{1-\frac{1}{p}} \left[\frac{2C_1}{xr^{-\beta}} \int_{\frac{x}{2}}^{x} t^{-\beta}w(t)dt\right] \\ &= 2C_1^{\frac{2}{p}-1} \left(\frac{2^p-1}{p\,2^p}\right)^{1-\frac{1}{p}} \frac{x^{p-2}}{r^{-\frac{\beta}{p}} w^{\frac{1}{p}}(r)} \int_{\frac{x}{2}}^{x} t^{-\beta}w(t)dt.\end{aligned}$$

La preuve est complète. □

Lemme 15. *Soit* $0 < p < 1,\ C_2 > 0,\ w$ *une fonction de poids sur* $(0, \infty)$*, satisfaisant la condition* (4.4)*. Si* f *est une fonction Lebesgue mesurable non négative sur* $(0, \infty)$*, telle que pour presque tout* $0 < x < \infty$ *et* $\frac{x}{2} < \lambda < x$*,*

$$f(x) \le \frac{C_2}{x^{-\beta-\frac{1}{1-p}}} \left(\int_{\frac{x}{2}}^{x} y^{-\beta}w(y)y^{p-1}dy\right)^{-\frac{1}{p}} \left(\int_{\lambda}^{x} \left(y^{-\beta}f(y)\right)^p w(y)y^{p-1}dy\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{4.21}$$

alors, pour tout $0 < y < r < \infty$

$$\left(P_{w,\beta}f\right)(r) \le \left(\frac{2^p-1}{p^{\frac{1}{1-p}}\,2^p}\right)^{1-\frac{1}{p}} \frac{2C_2^{\frac{2}{p}-p}}{r^{-\frac{\beta}{p}} w^{\frac{1}{p}}(r)} \left(\int_{\frac{r}{2}}^{r} \left(y^{-\beta}f(y)\right)^p w(y)y^{p-1}dy\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{4.22}$$

où $P_{w,\beta}$ *est l'opérateur de type Hardy défini par*

$$\left(P_{w,\beta}f\right)(r) = \int_{\frac{r}{2}}^{r} \frac{x^{-\beta}f(x)w(x)}{\psi_\beta(x)}dx,$$

et $0 < \psi_\beta(x) := \int_{\frac{x}{2}}^{x} t^{-\beta}w(t)dt < \infty$ *pour tout* $x > 0$*.*

Démonstration. En utilisant la preuve comme dans les lemmes 12 et (4.21), on obtient

$$x^{-\beta}f(x)w(x) \le pC_2^{1-p}x \left(\int_{\frac{x}{2}}^{x} y^{-\beta}w(y)y^{p-1}dy\right)^{1-\frac{1}{p}} x^{1-p} \left[\left(\int_{\lambda}^{x} \left(y^{-\beta}f(y)\right)^p w(y)y^{p-1}dy\right)^{\frac{1}{p}}\right]'.$$

En utilisant (4.18), pour $0 < y < x < r$, on trouve

$$x^{-\beta} f(x)w(x) \leq pC_2^{1-p} x \left(2C_2^{\frac{2}{p}-1} \left(\frac{2^p-1}{p\,2^p} \right)^{1-\frac{1}{p}} \frac{x^{p-2}}{r^{-\frac{\beta}{p}} w^{\frac{1}{p}}(r)} \int_{\frac{x}{2}}^{x} t^{-\beta} w(t)dt \right)$$
$$x^{1-p} \left[\left(\int_{\lambda}^{x} \left(y^{-\beta} f(y)\right)^p w(y) y^{p-1} dy \right)^{\frac{1}{p}} \right]',$$

ainsi

$$\frac{x^{-\beta} f(x)w(x)}{\int_{\frac{x}{2}}^{x} t^{-\beta} w(t)dt} \leq \left(\frac{2^p-1}{p^{\frac{1}{1-p}} 2^p} \right)^{1-\frac{1}{p}} \frac{2C^{\frac{2}{p}-p}}{r^{-\frac{\beta}{p}} w^{\frac{1}{p}}(r)} \left[\left(\int_{\lambda}^{x} \left(y^{-\beta} f(y)\right)^p w(y) y^{p-1} dy \right)^{\frac{1}{p}} \right]'.$$

En intégrant sur $(\frac{r}{2}, r)$, on obtient

$$\int_{\frac{r}{2}}^{r} \frac{x^{-\beta} f(x)w(x)}{\int_{\frac{x}{2}}^{x} t^{-\beta} w(t)dt} dx \leq \left(\frac{2^p-1}{p^{\frac{1}{1-p}} 2^p} \right)^{1-\frac{1}{p}} \frac{2C_2^{\frac{2}{p}-p}}{r^{-\frac{\beta}{p}} w^{\frac{1}{p}}(r)} \left(\int_{\frac{r}{2}}^{r} \left(y^{-\beta} f(y)\right)^p w(y) y^{p-1} dy \right)^{\frac{1}{p}}.$$

La preuve est complète. □

Remarque 4.1.1. *Si w satisfait (4.10) et f est une fonction mesurable de Lebesgue non négative sur $(0, \infty)$, telle que pour presque tout $0 < x < \infty$ et $\frac{x}{2} < \lambda < x$,*

$$f(x) \geq \frac{C_7}{x^{-\beta-\frac{1}{1-p}}} \left(\int_{\frac{x}{2}}^{x} y^{-\beta} w(y) y^{p-1} dy \right)^{-\frac{1}{p}} \left(\int_{\lambda}^{x} \left(y^{-\beta} f(y)\right)^p w(y) y^{p-1} dy \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (4.23)$$

où $C_7 > 0$, alors (4.22) est tient dans le sens inverse.

Théorème 4.1.2. *Soit $0 < p < 1$, $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, w une fonction de poids sur $(0, \infty)$, satisfaisant la condition (4.4) et $\alpha < -\frac{\beta+1}{p}$. Si f est une fonction mesurable de Lebesgue non négative sur $(0, \infty)$, satisfaisant (4.21), alors pour tout $0 < y < x < r < \infty$*

$$\left\| r^{\alpha} \left(P_{w,\beta} f\right)(r) \right\|_{L_{p,w}(0,\infty)} \leq \frac{2C_2^{1-p} C_1^{\frac{2}{p}-1}}{\left(-\alpha - \frac{\beta+1}{p}\right)^{\frac{1}{p}}} \left(\frac{2^p-1}{p\,2^p} \right)^{1-\frac{1}{p}} \left\| y^{\alpha+1-\beta p'} f(y) \right\|_{L_{p,w}(0,\infty)}. \quad (4.24)$$

Si w et f satisfont respectivement (4.10), (4.23), alors (4.24) est tient dans le sens inverse.

Démonstration.

$$\left\| r^{\alpha} \left(P_{w,\beta} f\right)(r) \right\|_{L_{p,w}(0,\infty)} = \left(\int_0^{\infty} r^{\alpha p} \left(P_{w,\beta} f\right)^p (r) w(r) dr \right)^{\frac{1}{p}},$$

et par (4.22), on a

$$\begin{aligned}
&\|r^{\alpha}\left(P_{w,\beta}f\right)(r)\|_{L_{p,w}(0,\infty)}\\
&\leq\left(\int_0^{\infty} r^{\alpha p}\left[\left(\frac{2^p-1}{p^{\frac{1}{1-p}}\,2^p}\right)^{1-\frac{1}{p}}\frac{2C_2^{1-p}C_1^{\frac{2}{p}-1}}{r^{-\frac{\beta}{p}}w^{\frac{1}{p}}(r)}\left(\int_{\frac{r}{2}}^{r}\left(y^{-\beta}f(y)\right)^p w(y)y^{p-1}dy\right)^{\frac{1}{p}}\right]^p w(r)dr\right)^{\frac{1}{p}}\\
&=2C_2^{1-p}C_1^{\frac{2}{p}-1}\left(\frac{2^p-1}{p^{\frac{1}{1-p}}\,2^p}\right)^{1-\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\infty} r^{\alpha p+\beta}\left(\int_{\frac{r}{2}}^{r}\left(y^{-\beta}f(y)\right)^p w(y)y^{p-1}dy\right)dr\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq 2C_2^{1-p}C_1^{\frac{2}{p}-1}\left(\frac{2^p-1}{p^{\frac{1}{1-p}}\,2^p}\right)^{1-\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\infty} r^{\alpha p+\beta}\left(\int_0^{r}\left(y^{-\beta}f(y)\right)^p w(y)y^{p-1}dy\right)dr\right)^{\frac{1}{p}}\\
&=2C_2^{1-p}C_1^{\frac{2}{p}-1}\left(\frac{2^p-1}{p^{\frac{1}{1-p}}\,2^p}\right)^{1-\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\infty}\left(\int_y^{\infty} r^{\alpha p+\beta}dr\right)\left(y^{-\beta}f(y)\right)^p w(y)y^{p-1}dy\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Par l'hypothèse $\alpha<-\frac{\beta+1}{p}$, nous avons $\alpha p+\beta+1<0$, donc

$$\begin{aligned}
&\|r^{\alpha}\left(P_{w,\beta}f\right)(r)\|_{L_{p,w}(0,\infty)}\\
&\leq 2C_2^{1-p}C_1^{\frac{2}{p}-1}\left(\frac{2^p-1}{p^{\frac{1}{1-p}}\,2^p}\right)^{1-\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\infty}\left(-\frac{y^{\alpha p+\beta+1}}{\alpha p+\beta+1}\right)y^{-\beta p}f^p(y)w(y)y^{p-1}dy\right)^{\frac{1}{p}}\\
&=\frac{2C_2^{1-p}C_1^{\frac{2}{p}-1}}{(-\alpha p-\beta-1)^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{2^p-1}{p^{\frac{1}{1-p}}\,2^p}\right)^{1-\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\infty}\left(y^{\alpha+1-\beta p'}f(y)\right)^p w(y)dy\right)^{\frac{1}{p}}\\
&=\frac{2C_2^{1-p}C_1^{\frac{2}{p}-1}}{\left(-\alpha-\frac{\beta+1}{p}\right)^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{2^p-1}{p\,2^p}\right)^{1-\frac{1}{p}}\left\|y^{\alpha+1-\beta p'}f(y)\right\|_{L_{p,w}(0,\infty)}.
\end{aligned}$$

La preuve est complète. □

Lemme 16. *Soit* $0<p<1,\ C_1>0,\ w$ *une fonction de poids sur* $(0,\infty)$, *satisfaisant la condition* (4.4), *alors pour tout* $0<x<r<\infty$

$$\left(\int_{\frac{x}{2}}^{x} y^{-\beta}w(y)y^{p-1}dy\right)^{1-\frac{1}{p}}\leq 2C_1^{\frac{2}{p}-1}\left(\frac{2^p-1}{p\,2^p}\right)^{1-\frac{1}{p}}\frac{x^{p-1}}{r^{-\frac{\beta}{p}+1}w^{\frac{1}{p}}(r)}\int_{\frac{r}{2}}^{r} t^{-\beta}w(t)dt. \tag{4.25}$$

Démonstration. Pour $0<t<r<\infty,\ r^{-\beta}w(r)\leq C_1t^{-\beta}w(t)$, par intégration sur $(\frac{r}{2},r)$,

$$\int_{\frac{r}{2}}^{r} r^{-\beta}w(r)dt\leq\int_{\frac{r}{2}}^{r} C_1t^{-\beta}w(t)dt,$$

ainsi

$$w(r)\leq\frac{2C_1}{r^{-\beta+1}}\int_{\frac{r}{2}}^{r} t^{-\beta}w(t)dt. \tag{4.26}$$

Par conséquent par (4.19) et (4.26), on obtient

$$\begin{aligned}\left(\int_{\frac{x}{2}}^{x} y^{-\beta}w(y)y^{p-1}dy\right)^{1-\frac{1}{p}} &\leq C_1^{\frac{2}{p}-2} r^{-\beta\left(1-\frac{1}{p}\right)} \frac{x^{p-1}}{w^{\frac{1}{p}}(r)} \left(\frac{2^p-1}{p\,2^p}\right)^{1-\frac{1}{p}} \left[\frac{2C_1}{r^{-\beta+1}} \int_{\frac{r}{2}}^{r} t^{-\beta}w(t)dt\right] \\ &= 2C_1^{\frac{2}{p}-1} \left(\frac{2^p-1}{p\,2^p}\right)^{1-\frac{1}{p}} \frac{x^{p-1}}{r^{-\frac{\beta}{p}+1} w^{\frac{1}{p}}(r)} \int_{\frac{r}{2}}^{r} t^{-\beta}w(t)dt.\end{aligned}$$

La preuve est complète. □

Lemme 17. *Soit $0 < p < 1$, $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, w une fonction de poids sur $(0, \infty)$, satisfaisant la condition (4.4). Si f est une fonction mesurable de Lebesgue non négative sur $(0, \infty)$, telle que pour presque tout $0 < x < \infty$ et $\frac{x}{2} < \lambda < x$,*

$$f(x) \leq \frac{C_2}{x^{-\beta}} \left(\int_{\frac{x}{2}}^{x} y^{-\beta}w(y)y^{p-1}dy\right)^{-\frac{1}{p}} \left(\int_{\lambda}^{x} \left(y^{-\beta}f(y)\right)^p w(y)y^{p-1}dy\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad (4.27)$$

alors, pour tout $0 < y < r < \infty$

$$\left(\Gamma_{w,\beta}f\right)(r) \leq \left(\frac{2^p-1}{p^{\frac{1}{1-p}}\,2^p}\right)^{1-\frac{1}{p}} \frac{2C_2^{1-p}C_1^{\frac{2}{p}-1}}{r^{-\frac{\beta}{p}+1} w^{\frac{1}{p}}(r)} \left(\int_{\frac{r}{2}}^{r} \left(y^{-\beta}f(y)\right)^p w(y)y^{p-1}dy\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad (4.28)$$

où $\Gamma_{w,\beta}$ est l'opérateur pondéré défini par

$$\left(\Gamma_{w,\beta}f\right)(r) = \frac{1}{\varphi_\beta(r)} \int_{\frac{r}{2}}^{r} x^{-\beta}f(x)w(x)dx,$$

et $0 < \varphi_\beta(r) := \int_{\frac{r}{2}}^{r} t^{-\beta}w(t)dt < \infty$ our tout $r > 0$.

Démonstration. En appliquant (4.27), on a

$$x^{-\beta}f(x)w(x) \leq pC_2^{1-p} \left(\int_{\frac{x}{2}}^{x} y^{-\beta}w(y)y^{p-1}dy\right)^{1-\frac{1}{p}} x^{1-p} \left[\left(\int_{\lambda}^{x} \left(y^{-\beta}f(y)\right)^p w(y)y^{p-1}dy\right)^{\frac{1}{p}}\right]'.$$

Par conséquent, de (4.25) il s'ensuit que, pour $0 < y < x < r$,

$$\begin{aligned}x^{-\beta}f(x)w(x) \leq pC_2^{1-p} &\left(2C_1^{\frac{2}{p}-1} \left(\frac{2^p-1}{p\,2^p}\right)^{1-\frac{1}{p}} \frac{x^{p-1}}{r^{-\frac{\beta}{p}+1} w^{\frac{1}{p}}(r)} \int_{\frac{r}{2}}^{r} t^{-\beta}w(t)dt\right) \\ &x^{1-p} \left[\left(\int_{\lambda}^{x} \left(y^{-\beta}f(y)\right)^p w(y)y^{p-1}dy\right)^{\frac{1}{p}}\right]',\end{aligned}$$

En intégrant sur $(\frac{r}{2}, r)$, il resulte

$$\int_{\frac{r}{2}}^{r} x^{-\beta} f(x)w(x)dx \leq \left(\frac{2^p-1}{p^{\frac{1}{1-p}}2^p}\right)^{1-\frac{1}{p}} \frac{2C_2^{1-p}C_1^{\frac{2}{p}-1}}{r^{-\frac{\beta}{p}+1}w^{\frac{1}{p}}(r)} \int_{\frac{r}{2}}^{r} t^{-\beta}w(t)dt \left(\int_{\frac{r}{2}}^{r} \left(y^{-\beta}f(y)\right)^p w(y)y^{p-1}dy\right)^{\frac{1}{p}}.$$

ainsi

$$\frac{1}{\int_{\frac{r}{2}}^{r} t^{-\beta}w(t)dt} \int_{\frac{r}{2}}^{r} x^{-\beta} f(x)w(x)dx \leq \left(\frac{2^p-1}{p^{\frac{1}{1-p}}2^p}\right)^{1-\frac{1}{p}} \frac{2C_2^{1-p}C_1^{\frac{2}{p}-1}}{r^{-\frac{\beta}{p}+1}w^{\frac{1}{p}}(r)} \left(\int_{\frac{r}{2}}^{r} \left(y^{-\beta}f(y)\right)^p w(y)y^{p-1}dy\right)^{\frac{1}{p}}.$$

La preuve est complète. □

Théorème 4.1.3. *Soit $0 < p < 1$, $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, w une fonction de poids sur $(0,\infty)$, satisfaisant la condition (4.4) et $\alpha < 1 - \frac{\beta+1}{p}$. Si f est une fonction mesurable de Lebesgue non négative sur $(0,\infty)$, satisfaisant (4.27), alors pour tout $0 < y < x < r < \infty$*

$$\left\|r^{\alpha}\left(\Gamma_{w,\beta}f\right)(r)\right\|_{L_{p,w}(0,\infty)} \leq \frac{2C_2^{1-p}C_1^{\frac{2}{p}-1}}{\left(1-\alpha-\frac{\beta+1}{p}\right)^{\frac{1}{p}}} \left(\frac{2^p-1}{p\,2^p}\right)^{1-\frac{1}{p}} \left\|y^{\alpha-\beta p'}f(y)\right\|_{L_{p,w}(0,\infty)}. \tag{4.29}$$

Si w satisfait (4.10) et f est une fonction mesurable de Lebesgue non négative sur $(0,\infty)$, telle que pour presque tout $0 < x < \infty$ et $\frac{x}{2} < \lambda < x$,

$$f(x) \geq \frac{C_2}{x^{-\beta}} \left(\int_{\frac{x}{2}}^{x} y^{-\beta}w(y)y^{p-1}dy\right)^{-\frac{1}{p}} \left(\int_{\lambda}^{x} \left(y^{-\beta}f(y)\right)^p w(y)y^{p-1}dy\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{4.30}$$

alors (4.28) et (4.29) sont tient dans le sens inverse.

Démonstration.

$$\left\|r^{\alpha}\left(\Gamma_{w,\beta}f\right)(r)\right\|_{L_{p,w}(0,\infty)} = \left(\int_0^{\infty} r^{\alpha p}\left(\Gamma_{w,\beta}f\right)^p(r)w(r)dr\right)^{\frac{1}{p}},$$

et par (4.28), on a

$$\|r^{\alpha}\left(\Gamma_{w,\beta}f\right)(r)\|_{L_{p,w}(0,\infty)}$$
$$\leq\left(\int_0^{\infty} r^{\alpha p}\left[\left(\frac{2^p-1}{p^{\frac{1}{1-p}}\,2^p}\right)^{1-\frac{1}{p}}\frac{2C_2^{1-p}C_1^{\frac{2}{p}-1}}{r^{-\frac{\beta}{p}+1}w^{\frac{1}{p}}(r)}\left(\int_{\frac{r}{2}}^{r}\left(y^{-\beta}f(y)\right)^p w(y)y^{p-1}dy\right)^{\frac{1}{p}}\right]^p w(r)dr\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$=2C_2^{1-p}C_1^{\frac{2}{p}-1}\left(\frac{2^p-1}{p^{\frac{1}{1-p}}\,2^p}\right)^{1-\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\infty} r^{\alpha p+\beta-p}\left(\int_{\frac{r}{2}}^{r}\left(y^{-\beta}f(y)\right)^p w(y)y^{p-1}dy\right)dr\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq 2C_2^{1-p}C_1^{\frac{2}{p}-1}\left(\frac{2^p-1}{p^{\frac{1}{1-p}}\,2^p}\right)^{1-\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\infty} r^{\alpha p+\beta-p}\left(\int_0^{r}\left(y^{-\beta}f(y)\right)^p w(y)y^{p-1}dy\right)dr\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$=2C_2^{1-p}C_1^{\frac{2}{p}-1}\left(\frac{2^p-1}{p^{\frac{1}{1-p}}\,2^p}\right)^{1-\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\infty}\left(\int_y^{\infty} r^{\alpha p+\beta-p}dr\right)\left(y^{-\beta}f(y)\right)^p w(y)y^{p-1}dy\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Comme $\alpha<1-\frac{\beta+1}{p}$, alors $\alpha p+\beta-p+1<0$, donc

$$\|r^{\alpha}\left(\Gamma_{w,\beta}f\right)(r)\|_{L_{p,w}(0,\infty)}$$
$$\leq 2C_2^{1-p}C_1^{\frac{2}{p}-1}\left(\frac{2^p-1}{p^{\frac{1}{1-p}}\,2^p}\right)^{1-\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\infty}\left(-\frac{y^{\alpha p+\beta-p+1}}{\alpha p+\beta-p+1}\right)y^{-\beta p}f^p(y)w(y)y^{p-1}dy\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$=\frac{2C_2^{1-p}C_1^{\frac{2}{p}-1}}{(-\alpha p-\beta+p-1)^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{2^p-1}{p^{\frac{1}{1-p}}\,2^p}\right)^{1-\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\infty}\left(y^{\alpha-\beta p'}f(y)\right)^p w(y)dy\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$=\frac{2C_2^{1-p}C_1^{\frac{2}{p}-1}}{\left(1-\alpha-\frac{\beta+1}{p}\right)^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{2^p-1}{p\,2^p}\right)^{1-\frac{1}{p}}\left\|y^{\alpha-\beta p'}f(y)\right\|_{L_{p,w}(0,\infty)}.$$

La preuve est complète. □

Lemme 18. *Soit* $0<p<1,\ C>0,\ w$ *une fonction de poids sur* $(0,\infty)$, *satisfaisant la condition* (4.4), *alors pour tout* $0<x<r<\infty$

$$\left(\int_0^{x} y^{-\beta}w(y)y^{p-1}dy\right)^{1-\frac{1}{p}}\leq A_2x^{p-1}\frac{1}{r^{1-\frac{\beta}{p}}w^{\frac{1}{p}}(r)}\int_0^{r}t^{-\beta}w(t)dt. \tag{4.31}$$

Démonstration. La preuve est similaire à celle du Lemme 11. □

Lemme 19. *Soit* $0<p<1$, $C>0$, $A_1>0$, w *une fonction de poids sur* $(0,\infty)$, *satisfaisant la condition* (4.4). *Si* f *est une fonction mesurable de Lebesgue non négative sur* $(0,\infty)$, *telle que pour presque tout* $0<x<\infty$,

$$f(x)\leq\frac{A_1}{x^{-\beta}}\left(\int_0^{x}y^{-\beta}w(y)y^{p-1}dy\right)^{-\frac{1}{p}}\left(\int_0^{x}\left(y^{-\beta}f(y)\right)^p w(y)y^{p-1}dy\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{4.32}$$

alors, pour tout $r > 0$

$$\left(S_{w,\beta}f\right)(r) \leq pA_1^{1-p}A_2 \frac{1}{r^{1-\frac{\beta}{p}}w^{\frac{1}{p}}(r)} \left(\int_0^r \left(y^{-\beta}f(y)\right)^p w(y)y^{p-1}dy\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{4.33}$$

Démonstration. La preuve est similaire à celle du Lemme 12. □

Nous considérons l'opérateur de type Hardy $S_{w,\beta}$ donné par

$$\left(S_{w,\beta}f\right)(x) = \frac{1}{W_\beta(x)} \int_0^x t^{-\beta}f(t)w(t)dt,$$

où $0 < W_\beta(x) := \int_0^x t^{-\beta}w(t)dt < \infty$ pour tout $x > 0$, $w(t)$ est une fonction de poids sur $(0, \infty)$.

Remarque 4.1.2. *Si* w *satisfait* (4.10) *et* f *est une fonction mesurable de Lebesgue non négative sur* $(0, \infty)$, *telle que pour presque tout* $0 < x < \infty$,

$$f(x) \geq \frac{A_1}{x^{-\beta}} \left(\int_0^x y^{-\beta}w(y)y^{p-1}dy\right)^{-\frac{1}{p}} \left(\int_0^x \left(y^{-\beta}f(y)\right)^p w(y)y^{p-1}dy\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{4.34}$$

où $A_1 > 0$, *alors* (4.33) *est vérifier dans le sens inverse.*

Théorème 4.1.4. *Soit* $0 < p < 1$, $C > 0$, $A_1 > 0$, w *une fonction de poids sur* $(0, \infty)$, *satisfaisant la condition* (4.4) *et* $\alpha < 1 - \frac{\beta+1}{p}$. *Si* f *est une fonction mesurable de Lebesgue non négative sur* $(0, \infty)$, *satisfaisant* (4.32), *alors pour tout* $r > 0$

$$\left\|r^\alpha \left(S_{w,\beta}f\right)(r)\right\|_{L_{p,w}(0,\infty)} \leq A_1^{1-p}C^{\frac{2}{p}-1}\left(1 - \alpha - \frac{\beta+1}{p}\right)^{-\frac{1}{p}} \left\|y^{\alpha-\beta p'}f(y)\right\|_{L_{p,w}(0,\infty)}. \tag{4.35}$$

Si w *et* f *satisfont respectivement* (4.10), (4.34), *alors* (4.35) *tient dans le sens inverse.*

Démonstration. La preuve est similaire à celle du théorème 11. □

Remarque 4.1.3. *En mettant* $\beta = 0$ *dans* (4.35), *on obtient le théorème 2.1 de [9].*

Conclusion

L'inégalité de Hardy joue un rôle crucial en théorie des fonctions quasi-monotones, fournissant un outil essentiel pour étudier leur croissance asymptotique. Cette inégalité, exprimée par $\int_0^x f(t)\,dt \leq \frac{f(x)}{2x}$, établit une relation profonde entre l'intégrale d'une fonction et son comportement aux limites. En particulier, pour les fonctions quasi-monotones, où $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$, cette inégalité renforce la décroissance contrôlée des fonctions et leur comportement asymptotique. En combinant cela avec des techniques d'analyse fonctionnelle, on peut mieux appréhender les propriétés de ces fonctions dans divers contextes mathématiques. Ainsi, l'étude des fonctions quasi-monotones bénéficie grandement de l'inégalité de Hardy, offrant une perspective plus profonde sur leur comportement global et leurs implications dans divers domaines mathématiques.
En combinant cela avec des techniques d'analyse fonctionnelle, on peut mieux appréhender les propriétés de ces fonctions dans divers contextes mathématiques. Ainsi, l'étude des fonctions quasi-monotones bénéficie grandement de l'inégalité de Hardy, offrant une perspective plus profonde sur leur comportement global et leurs implications dans divers domaines mathématiques.

La recherche menée dans cette mémoire a permis de démontrer des extensions de certaines inégalités de Hardy, notamment leur généralisation à différents espaces et conditions. Cela ouvre la voie à des applications plus larges et à une compréhension plus fine des phénomènes décrits par ces inégalités. En résumé, l'inégalité de Hardy et ses extensions constituent un pilier fondamental dans l'étude des fonctions quasi-monotones et leurs applications en analyse mathématique.

Bibliographie

[1] A. Benrabeh, Théorie de la mesure et de l'intégration (cours et exercices corrigés), Universté 08 Mai 1945 Guelma, 2015-2016.

[2] A. Tarek, H. Imane, Quelques propriétés et applications des espaces de Lebesgue et de Morrey, Université de Tiaret, Mémoire de Master Promotion. 2019/ 2020.

[3] A. Ouardani, Les inégalités de Hardy et leurs variantes, Université de Tiaret, 2009.

[4] Brezis, Haïm, Analyse fonctionnelle théorie et applications, edition masson, 1983.

[5] Burenkov, VI, Function spaces, Main integral inequalities related to L_p-spaces, Peoples' Friendship University of Russia, 1989.

[6] Hardy, G.H., J.E. Littlewood, et G. Polya. Inequalities. Cambridge Univ. Press, (reprint), 1962.

[7] N. Azzouz, Inégalités de Hardy et applications, Universté AbdelHamid IBn Badis de Mostaganem, 2016.

[8] Lieb, Elliott H and Loss, Michael, Analysis, volume.14, American Mathematical Soc, 2001.

[9] N. Azzouz, B. Halim, A. Senouci, An inequality for the weighted Hardy operator for $0 < p < 1$, Eurasian Math. j. 4 (2013), no. 3, 127-131.

[10] J. Bergh, V. Burenkov, L.-E. Persson, Best constants in reversed Hardy's inequalities for quasi-monotone functions, Eurasian Math. Acta Sci. Math. (Szeged) 59 (1994), 223-241.

[11] V.I. Burenkov. On the exact constant in the Hardy inequality with $0 < p < 1$ for monotone functions, Trudy Matem. Inst. Steklov 194 (1992), 58-62 (in Russian) ; English translation in proc. Steklov Inst. Math. 194 (1993), no. 4, 59-63.

[12] A. Senouci, T. Tararykova, Hardy-type inequality for $0 < p < 1$, Evraziiskii Matematicheskii Zhurnal, 2 (2007), 112-116.