RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN TIARET
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUES
Département de Mathématiques

MÉMOIRE MASTER

Présenter en vue de l'obtention du diplôme de master

Spécialité :
« Mathématiques»

Option :
«Analyse Fonctionnelle et Applications »

Présenté Par :

BOULEBBA Asma
et
LAREK karima

Sous L'intitulé :

Sur les séries de Dirichlet et fonctions arithmétique

Soutenu publiquement le 23/ 06/ 2024
à Tiaret devant le jury composé de :

M MAAZOUZ kadda	MCA	Université de Tiaret	Président
Mme SABIT Souhila	MCA	Université de Tiaret	Examinateuse
M LAIB Ilias	MCA	Université de Alger	Encadreur

Année universitaire :2023/2024

REMERCIEMENS

En premier lieu, nous remercions ≪ *ALLAH* ≫ le tout Puissant qui nous a donnè la force, la volonté et le courage pour accomplir ce modeste travail.

Nos vifs remerciements vont à notre encadreur :Mr LAIB Ilias, docteur a l'ecole Nationale Supérieure de Technologie des Systèmes Autonomes ,pour ses précieux conseils et son aide durant toute la période de travail

Nous voulons exprimer nos remerciements les plus dévoué aux membres du jury, Mr MAAZOUZ Kadda et Mme SABIT Souhila qui nous ont honorées en acceptant d'examiner ce travail.

Nous voulons remercier aussi tous les enseignants du départment de mathématuque.

Dédicace

Je dédie ce travail :

à

Mon pére Mohamed et Ma mére Mimouna pour tous leurs sacrifices, leurs amours, leurs tendresses, leurs soutiens et leurs priéres tout au long de mes étude.

à

Mon frére défunt mhamed : ton souvenir vit éternellement dans mon coeur.

à

Mes soeurs Alya, Zineb, Hanane et Mes fréres Djilali, Rabeh, Ahmed, Mouloud, Benchohra, Soufiane,pour leurs soutiens, leurs encouragements et leurs aides pendant tous les moments difficiles de ma vie.

à

les enfants de la famille Soundess, Ines, Moad, Rayan, Walid

à

Ma binome ASMA , je t'éxprime tout mon amour dávoir été á mes cótes durant ce travail et pour ton soutien et ton aide précieuse.

à

Mes amies et mes cammarades

KARIMA

Dédicace

Je dédie ce travail :

à

Mon cher pére Ahmed, qui nous a quittés il ya quatre mois, je ténvoi ces mots le jour de ma remise de diplome.Malgré la douleur de la séparation, ta mémoire et ton amour remplissent mon coeur et m'aident à continuer ce voyage j'aurais aimé que tu sois sur que tu me regardes du ciel avec une fierté indesriptible.

à

Ma mére Mimouna pour tous leur sacrifice, leur amour, leur tendresse, leur soutien et leur priére tout au long de mes étude.

à

Ma soeur lamia, pour leur soutien, leur encouragement et leur aide pendant tous les moments difficiles de ma vie.

à

Ma binome KARIMA qui m'a accompagné dans ce travail, je vous remercie pour votre soutien et vos efforts afin de présenter ce travail de la meilleure facon possible

à

Tous mes amies surtous(nadjet, manel, ghezlan, houda, fadhila, ahlem, keltoum, sara, meriem, hanaa, khadidja, ikram, Nouni, zahra, zineb)

ASMA

Résumé

Une fonction arithmétique est une application définie de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{C}$elle est dite multiplicative si et seulement si $f(1) = 1$ *et* $f(nm) = f(n)f(m)$ avec n et m sont premiers entre eux, et elle est dite complétement multiplicative si $f(nm) = f(n)f(m)$ pour tout m et n dans $\mathbb{N}^*$, de plus elle est dite spécialement multiplicative si f est la convolution de Dirichlet de deux fonctions complétement multiplicatives.
On appelle fonction arithmétique de deux variables toute application définie de $\mathbb{N}^*$, dans $\mathbb{C}$. Pour toute fonction arithmétique de deux variables f_2, on pose

$$L(f_2, s_1, s_2) = \sum_{n_1,n_2=1}^{+\infty} \frac{f_2(n_1, n_2)}{n_1^{s_1} n_2^{s_2}}, \ s_1, s_2 \in \mathbb{C}.$$

La fonction $L(f_2, s_1, s_2)$ est appelée la série de Dirichlet multiple associée à f_r.
Il est connu que $D(f_2, s_1)$ est définie comme produit infini sur les nombres premiers dans son domaine de convergence absolue

$$D(f_2, s_1) = \prod_p .(\sum_{n>0} \frac{f_{2(p^{s_1})}}{p^{ns_1}}) \ (Euler 1737).$$

Dans cette mémoire, on généralise le produit eulérien à des parties multiplicatives de $\mathbb{N}$ où une partie multiplicative $\mathbb{A}$ est définie par :$1 \in \mathbb{A}$ *et* $(\forall n, m \in \mathbb{N}^*, nm \in \mathbb{A} \iff n \in \mathbb{N} \wedge m \in \mathbb{A})$. Le produit Eulérien devient

$$D(f_2, s_1) = \prod_{p \in \mathbb{A}} (1 - \frac{f_2(p)}{p^{s_1}})^{-1}$$

avec f_1 est complètement multiplicative. Aussi, on considère de Dirichlet multiples définie par

$$D(f_2, s_1, s_2) = \sum_{\substack{n_1,n_2=1 \\ (n_1,n_2)=1}}^{+\infty} \frac{f_2(n_1, n_2)}{n_1^{s_1} n_2^{s_2}},$$

où $f_2(n_1, n_2) = f(n_1)f(n_2)$ et f est une fonction arithmétique complètement multiplicative ou spécialement multiplicative.En utilesant le produit Eulérien généralisé,on obtient des formuls explicites pour les séries. $D(f_2, s_1, s_2)$ exprimées par la fonction ς de Riemann et des produits infinis sur les nombres premiers.

Mots-clés

Produit eulérien, fonction arithmétique multiplicative,fonction ζ de Riemann, fonction L de Dirichlet, série de Dirichlet multiple.

Table des matières

Notations

$\mathbb{C}$	Ensemble des nombres complexes.
$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{N}^*$	Ensemble des nombres naturels non nuls.
p	un nombre premier
$m \vert n$	m divise n.
$m \nmid n$	m ne divise pas n.
$p^\alpha \parallel n$	p^α divise n et $p^{\alpha+1}$ ne divise pas n.
$\sum\limits_{n\leq x}$	Somme étendue à tous les entiers $n \in [1, x]$.
$\prod\limits_{p\leq x}$	Produit étendue à tous les entiers $p \in [2, x]$. De plus $\prod\limits_{p} = \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \prod\limits_{p\leq x}$
$v_p(n)$	La valiation p-adique de n, $v_p(n)$ est l'entier k tel que p^k divise n et p^{k+1} ne divise pas n.
$n = \prod\limits_{p^\alpha \Vert n} p^\alpha = \prod\limits_{p} p^{v_p(n)}$	Factorisation de n en facteurs premiers.
$\gcd(m, n)$ (et (m, n))	Le plus grand commun diviseur de m et n.
$lcm[m, n]$	Le plus petit multiple commun de entiers m et n.
Le mot " entier "	(sans précision supplémentaire) désigne un entier naturel non nul.
$f = O(g)$	signier qu'il existe une constante $C > 0$ et un réel x_0 tel que pour tout $x \geq x_0$, on a $\vert f(x)\vert \leq cg(x)$.
$[a, b]$	désigne l'ensemble des nombres réels x tel que $a \leq x \leq b$.

Introduction

Létude des fonctions arithmétiques est un thème central en théorie analytique des nombres.Une fonction arithmétique est une application de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{C}$.On peut la considérer comme une suite complexe définie sur $\mathbb{N}^*$.Une catégorie particulière de ces fonctions est intensément étudiée. Il s'agit des fonctions arithmétiques multiplicatives. Une fonction arithmétique f est dite multiplicative si l'on a $f(1) = 1$ et $f(nm) = f(n)f(m)$ alors que n et m sont premiers entre eux dans $\mathbb{N}^*$. donc létude de certaines propréités de ces fonction est liée aux proprítés des séries de Dirichlet. Et en mathématiques, une série Dirichlet est une série $f(s)$ de fonctions définies sur l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes et associée à une suite (a_n) de nombres complexes de l'une des deux façons suivantes :

$$f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s} \; ou \; f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-s\lambda_n}$$

Ici, la suite (λ_n) est réelle, positive, strictement croissante et non bornée. Le domaine de convergence absolue d'une série de Dirichlet est soit un demi-plan ouvert de $\mathbb{C}$, limité par une droite dont tous les points ont même abscisse ,soit l'ensemble vide, soit $\mathbb{C}$ tout entier. Le domaine de convergence simple est de même nature. Sure le domaine de convergence simple,la fonction définie par la série est holomorphe. Si la partie réelle des tend vert$+\infty$, la fonction somme, si elle existe, tend vert 0.

Les séries de Dirichlet interviennent en théorie analytique des nombres.Dirichlet en analyse certaines, les séries L de Dirichlet,pour démontrer en 1837 le théorème de la progression arithmétique ,selon le quel il existe une infinité de nombres premiers dans toute progression arithmétique $an + b$ dés que a et b sont premiers entre eux. Elles ne furent étudiées qu'a partir des travaux d'Eugène, qui en fait son sujet de thèse en 1894.Mais sa thèse fut l'objet de nombreuses critiques et provoqua ainsi de nouveaux travaux. La définition des fonctions presque périodiques par Harald Bohr permit de montrer que les fonctions définies par les série de Dirichlet à coefficients positifs sont presque périodiques dans le demi-plan de convergence absolue.

Dans ce mémoire, il s'agit d'exposer sur les séries de Dirichlet et fonctions arithmétiques.en expliquera avec trois chapitres.
Au premier chapitre, on exposera de généralites sur fonctions arithmétiques, définition et propiétés et formule sommatoire, puis la convolution de Dirichlet et fonction multiplicative, et enfin l'inverse d'une fonction complétement multiplicative.
Au deuxiéme chapitre, on donnera l'aide principale des séries de Dirichlet et quelques propiétés analytiques et de définitions, ainsi que l'abscisse de convergence et d'holomorphie et l'unicité des coefficients de la série, puis la fonction zéta de Rieman..., on ya expliquera le produit Eulérien.
Au troisième chapitre on présentera les séries de deux variables de Dirichlet puis les fonctions arithmétiques multiplicatives et additives de deux variables, enfin l'achéve avec le calcul effectif de série de Dirichlet de deux variables et donnera son application.

Chapitre 1

Sur les Fonctions arithmétiques

En général, il y a deux types de fonctions arithmétiques, à savoir les fonctions additives et multiplicatives. Dans ce chapitre, on s'intéresse aux fonctions multiplicatives, où on introduit les outils importants qui seront d'un grand intérêt dans les chapitres qui suivent .

1.1 fonction arithmétique

Définition 1.1. *On appelle fonction arithmétique, toute application f définie de $\mathbb{N}^*$ dans le corps $\mathbb{C}$.*

1.2 Quelques fonctions arithmétiques usuelles

1. **La Fonction nombre de diviseurs** $d(n)$

Définition 1.2. *Pour tout entier $n \geq 1$, on note par $d(n)$ le nombre de diviseurs de n qui définie par :*

$$d(n) = card\,\{d \in \mathbb{N}^*, d \mid n\,\} = \sum_{d|n} 1. \tag{1.1}$$

2. **La Fonction somme de diviseurs** $\sigma(n)$

Définition 1.3. *Pour tout entier $n \geq 1$, la fonction somme de diviseurs $\sigma(n)$ est définie par :*

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d. \tag{1.2}$$

3. **La Fonction** $\omega(n)$

Définition 1.4. *La Fonction* $\omega(n)$ *est définie par :*

$$\omega(n) = \begin{cases} 0 & si \;\; n = 1, \\ k & si \;\; n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i} \;\; avec \, n \geq 2. \end{cases} = \sum_{p|n} 1 = \sum_{p^m \| n} 1 \tag{1.3}$$

4. **La Fonction** $\Omega(n)$

Définition 1.5. *La Fonction* $\Omega(n)$ *est définie par :*

$$\Omega(n) = \begin{cases} 0 & si \;\; n = 1, \\ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i & si \;\; n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i} \;\; avec \, n \geq 2. \end{cases} = \sum_{p^m | n} 1 \tag{1.4}$$

5. **La Fonction de Mobius**

Définition 1.6. *La Fonction de Mobius* $\mu(n)$ *est définie comme suit :*

$$\mu(n) = \begin{cases} 0 & si \; n \; est \; divisible \; par \; un \; carré \; parfait, \\ (-1)^{\omega(n)} & autrement; \end{cases} \tag{1.5}$$

Théorème 1.1. *Si* $n \geq 1$ *on a*

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \left[\frac{1}{n}\right] = \begin{cases} 1; & si \;\; n = 1 \\ 0; & si \;\; n > 1. \end{cases} \tag{1.6}$$

Preuve 1.1. *La formule est évidente si* $n = 1$. *Supposons donc que* $n > 1$ *et* $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$. *Dans la somme* $\sum_{d|n} \mu(d)$ *les seuls termes qui non nuls sont* $d = 1$ *et de ces diviseurs de* n *sont des produits de nombres premiers distincts, alors*

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \mu(1) + \mu(p_1) + \cdots + \mu(p_k) + \mu(p_1 p_2) + \cdots + \mu(p_{k-1} p_k) + \cdots + \mu(p_1 p_2 \cdots p_k$$

$$= 1 + \binom{k}{1}(-1) + \binom{k}{2}(-1)^2 + \cdots + \binom{k}{k}(-1)^k = (1-1)^k = 0.$$

■

6. **La fonction indicatrice d'Euler**

Définition 1.7. *La Fonction indicatrice d'Euler $\varphi(n)$ est définie par :*

$$\varphi(n) = card\ \{m \in \mathbb{N}^*,\ m \leq n \wedge (n,m) = 1\} = \sum_{\substack{m \leq n \\ (m,n)=1}} 1. \tag{1.7}$$

Théorème 1.2. *Si $n \geq 1$ on a :*

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n. \tag{1.8}$$

Preuve 1.2. *On considère l'ensemble $S = \{1, 2, \cdots, n\}$. Nous distribuions les entiers de S en sous-ensembles disjoints comme suit :*
Pour tout diviseur d de n, on a

$$A(d) = \{k :\ (k,n) = d, 1 \leq k \leq n\}$$

. Le sous-ensemble $A(d)$ contient les éléments de S qui ont d comme pgcd avec n, si $f(d)$ désigne le nombre d'entiers en $A(d)$ nous avons

$$\sum_{d|n} f(d) = n.$$

mais $(k;n) = d$ si et seulement si $(k/d; n/d) = 1$; et $0 < k \leq n$ si et seulement si $0 < k/d \leq n/d$. Par conséquent, si on prend $q = k/d$, il existe une correspondance un par un entre les éléments $A(d)$ et ceux des entiers q satisfaisant $0 < q \leq n/d$, $(q; n/d) = 1$. Le nombre q est égale à $\varphi(n/d)$. D'où $f(d) = \varphi(n/d)$ et on a :

$$\sum_{d|n} \varphi(n/d) = n.$$

et par suite

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

■

L'indicatrice d'Euler et la fonction de Mobius sont reliés par la formule suivante :

Théorème 1.3. *Si $n \geq 1$ on a :*

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d}. \tag{1.9}$$

Preuve 1.3. *On peut écrire la somme (1.9) de la fonction $\varphi(n)$ comme suit :*

$$\varphi(n) = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{(n,k)}\right]$$

avec k parcourt tous les entier n, en utilisant le théoréme (1.1) et en remplaçons n par $(n;k)$ on obtient :

$$\varphi(n) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{d|(n,k)} \mu(d) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{d|n \\ d|k}} \mu(d).$$

Pour un diviseur d fixé de n nous devons sommer sur tous les k dans le domaine $1 \leq k \leq n$ qui sont multiplée par d . Si on écrit $k = qd$, alors $1 \leq k \leq n$ si et seulement si $1 \leq q \leq n/d$. D'ou on peut écrire le dernier somme de $\varphi(n)$ comme

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} \sum_{q=1}^{n/d} \mu(d) = \sum_{d|n} \mu(d) \sum_{q=1}^{n/d} 1 = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d}.$$

■

Théorème 1.4. *Supposons que $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n > 1$; et $n = p_1^{u_1} p_2^{u_2} \cdots p_r^{u_r}$, on a :*

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right). \tag{1.10}$$

Preuve 1.4. *Soient $p_1, \cdots, p_r$ les diviseurs premiers distincts de n, le produit peut être écrit sous la forme :*

$$\prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$
$$= \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = 1 - \sum \frac{1}{p_i} + \sum \frac{1}{p_i p_j} - \sum \frac{1}{p_i p_j p_k} + \cdots + \sum \frac{(-1)^r}{p_1 p_2 \cdots p$$

Il est claire que dans la somme $\sum_{p} \frac{1}{p_i p_j p_k}$ on considère tous les produits possible $p_i p_j p_k$ des facteurs du nombre n. Notons que dans le membre droit de légalité tout terme est de la forme $\pm 1/d$ où d est un diviseur de n qui est égale à 1 ou bien produit de nombres premiers distincts. Le numérateur ± 1 est exactement $\mu(d)$. Comme $\mu(d) = 0$ si d est divisible par le carré de tout p_i, donc on a

$$\prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}.$$

Cela preuve le théorème.

$\blacksquare$

Théorème 1.5. *L'indicatrice d'Euler a les proprietés suivantes :*

1. $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$ *pour tout premier* p *et* $\alpha \geq 1$.
2. $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)(d/\varphi(d))$ *tel que* $d = (m, n)$.
3. $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ *si* $(m, n) = 1$.

7. **La fonction de Von Mangolt**

Définition 1.8. *La fonction de Von Mangolt est définie par :*

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & si \;\; n = p^\alpha \; avec \; \alpha \geq 1. \\ 0 & sinon \end{cases} \tag{1.11}$$

Théorème 1.6. *Si* $n \geq 1$, *on a :*

$$\log n = \sum_{d|n} \Lambda(d). \tag{1.12}$$

8. **La Fonction de Liouville**

Définition 1.9. *La fonction de Liouville est définie par :*

$$\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)}. \tag{1.13}$$

9. **La Fonction caractéristique $f_{\mathcal{P}}$:**

Soient $\mathcal{P}$ un ensemble finie ou infini des nombres premiers et $f_{\mathcal{P}}$ la fonction arithmétique définie par

$$f_{\mathcal{P}}(P) = \begin{cases} 1, \text{ si } \;\; p \notin \mathcal{P}. \\ 0, \text{ si } \;\; p \in \mathcal{P}. \end{cases} \tag{1.14}$$

Deux classes de fonctions arithmétiques jouent un rôle particulièrement important : les fonctions additives et les fonctions multiplicatives .

1.3 Fonctions arithmétiques additives et multiplicatives

1.3.1 Fonctions arithmétiques additives

Définition 1.10. *On dit qu'une fonction arithmétique* f *est additive si* $f(1) = 0$ *et* $f(mn) = f(m) + f(n)$ *lorsque* $(m, n) = 1$. *Si la relation* *tient pour tout m, n, alors on dit que la fonction est complètement additive De plus , si $f(p^\alpha) = f(p)$ pour tout nombre premier p et tout entier positif α, on dit alors que f est fortement additive . On désigne respectivement par $\mathcal{A}$, $\mathcal{CA}$ et $\mathcal{TA}$ l'ensemble des fonctions additives , complètement additives et fortement additives .*

Exemple 1.1. *Les fonctions $\omega(n)$ et $\log n$ sont additivesm et la fonction $\Omega(n)$ est complètement additive .*

1.3.2 Fonctions arithmétiques multiplicatives

Définition 1.11. *On dit qu'une fonction arithmétique f est multiplicative si $f(1) = 1$ et $f(mn) = f(m)f(n)$ lorsque $(m, n) = 1$.*

Définition 1.12. *On dit qu'une fonction arithmétique f est complètement multiplicative si $f(mn) = f(m)f(n)$ pour tout m, n. De plus, si f est une fonction multiplicative telle que $f(p^\alpha) = f(p)$ pour tout premier p, on dit alors que f est une fonction fortement multiplicative.*

Exemple 1.2.

1. *Les fonctions arithmétiques $d(n)$, $\sigma(n)$, $\mu(n)$ et $\varphi(n)$ sont multiplicatives [1].*
2. *Les fonctions $\lambda(n)$, $f_{\mathcal{P}}(n)$ sont complètement multiplicatives [1].*
3. *Les fonctions $\mathbf{1}$, δ et id définies par :*

$$\mathbf{1}(n) = 1, \ n \geq 1, \tag{1.15}$$

$$\delta(1) = 1 \ \text{ et } \ \delta(n) = 0, \ n \geq 2. \tag{1.16}$$

$$id(n) = n, \ \ \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{1.17}$$

sont complètement multiplicatives.

On désigne respectivement par $\mathcal{M}$ et $\mathcal{CM}$ l'ensemble des fonctions multiplicatives et l'ensemble des fonctions complétement multiplicatives et par $\mathcal{TM}$ l'ensemble des fonctions fortement multiplicatives. Il est clair que, $\mathcal{CM} \subset \mathcal{M}$. Le résultat suivant montre que pour connaitre une fonction multiplicative f (respectivement complètement multiplicative) , il suffit de connaitre $f(p^k)$ (respectivement $f(p)$), pour tout entier $k \geq 1$ et tout nombre premier p.

Théorème 1.7. *Soit f une fonction arithmétique.*

1. *Si f est multiplicative, alors $f(1) = 1$. De plus, elle est entièrement déterminée par ses valeurs aux puissances des nombres premiers.*

2. *Si f est complètement multiplicative, alors elle est entièrement déterminée par ses valeurs aux nombres premiers.*

Preuve 1.5. *Tout d'abord supposons que f soit multiplicative et remarquons que $f(1) = f(1)f(1)$. comme $f(1) \neq 0$, on en déduit immédiatement que $f(1) = 1$.*
Maintenant soit $n \in \mathbb{N}^*$. Ecrivons la factorisation canonique de n en produit de facteurs premiers ,

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$$

Comme f est multiplicative , on a

$$f(n) = f(p_1^{k_1}) f(p_2^{k_2}) \cdots f(p_r^{k_r})$$

ce qui preuve l'assertion (1). Si , on suppose de plus que f est complètement multiplicative, alors si $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$, on a

$$f(n) = f(p_1)^{k_1} f(p_2)^{k_2} \cdots f(p_r)^{k_r},$$

ce qui preuve que f est déterminée par les valeurs $f(p)$, avec p premier.

■

Caractéristiques des fonctions multiplicatives

Théorème 1.8. *[1] Soit f une fonction arithmétique telle que $f(1) = 1$, on a :*

1. *f est multiplicative si et seulement si : $f\left(\prod_{p^\alpha \| n} p^\alpha\right) = \prod_{p^\alpha \| n} f(p^\alpha)$, pour tout nombre premier p et tout entier positif α.*
2. *Si f est multiplicative, alors : f est complètement multiplicative si et seulement si : $f(p^\alpha) = f(p)^\alpha$, pour tout nombre premier p et tout entier $\alpha \geq 1$.*

Proposition 1.1. *Si f et g sont deux fonctions arithmétiques multiplicatives, alors il en est de même pour les fonctions fg et f/g , $(g \neq 0)$.*
(Le produit fg est définie par : $(fg)(n) = f(n)g(n),\ n \in \mathbb{N}^*$).

Théorème 1.9. *Soit f une fonction multiplicative. La fonction F définie par :*

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d), \text{ pour tout } n \geq 1, \tag{1.18}$$

est multiplicative .

La preuve est basée sur le lemme suivant :

Lemme 1. *Soint $m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $(m,n) = 1$ et d un diviseur de mn . alors d s'écrit de facon unique sous la forme $d = d_1 d_2$ où $d_1 \mid m$ et $d_2 \mid n$.*

Preuve 1.6. *Prouvons d'abord l'existence de d_1 et d_2. Ecrivons*

$$m = p_1^{\alpha_1} p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}, \quad \text{et} \quad n = p_{k+1}^{\alpha_{k+1}} p_{k+2}^{\alpha_{k+2}} \cdots p_{k+r}^{\alpha_{k+r}}.$$

Notons que comme $(m,n) = 1$, les nombres premiers qui interviennent dans la factorisation de m sont tous différents de ceux qui interviennent dans la factorisation de n . On a alors

$$mn = p_1^{\alpha_1} p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k} p_{k+1}^{\alpha_{k+1}} p_{k+2}^{\alpha_{k+2}} \cdots p_{k+r}^{\alpha_{k+r}}.$$

Si d est un diviseure de mn , l'entier d s'écrit nécessairment sous la forme

$$d = p_1^{\beta_1} p_1^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k} p_{k+1}^{\beta_{k+1}} \cdots p_{k+r}^{\beta_{k+r}}.$$

où $\beta_i \leq \alpha_i$, pour tout $i = 1, 2, \cdots, k + r$. Définissons alors

$$d_1 = p_1^{\beta_1} p_1^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}, \quad \text{et} \quad d_2 = p_{k+1}^{\beta_{k+1}} \cdots p_{k+r}^{\beta_{k+r}}.$$

On a $d = d_1 d_2$ et $d_1 \mid m$, $d_2 \mid n$, ce qui preuve l'existence de la décomposition.
Il rest à prouver l'unicité. Soit $d = d_1 d_2 = d_1' d_2'$, avec $d_1, d_1' \mid m$, $d_2, d_2' \mid n$. Soit $D = (d_1, d_2')$. Alors D divise d_1 et donc m et D divise d_2' et donc n . Ainsi $D | (m, n) = 1$ et donc $(d_1, d_2') = 1$. Comme d_2' divise $d_1 d_2$, le lemme de Gauss implique alors que $d_2' | d_2$. Par symétrie, on obtient que $d_2 | d_2'$ et donc $d_2' = d_2$. On en déduit alors aussi que $d_1 = d_1'$, ce qui achève la prouve de l'unicité.

■

Démonstration du théorème 1.9

Preuve 1.7. *Soient n et m deux entiers positifs tels que $(n; m) = 1$. On pose $d = d_1 d_2$ où $d_1 \mid n$ et $d_2 \mid m$. Dans ce cas on aura $(d1; d2) = 1$. Par conséquent*

$$F(nm) = \sum_{d|mn} f(d) = \sum_{d_1 d_2 | nm} f(d_1 d_2) = \sum_{d_1 | n, d_2 | m} f(d_1 d_2).$$

Comme $(d1; d2) = 1$, on obtient

$$F(nm) = \sum_{d_1|n, d_2|m} f(d_1) f(d_2) = \sum_{d_1|n} \sum_{d_2|m} f(d_1) f(d_2) = \sum_{d_1|n} f(d_1) \sum_{d_2|m} f(d_2) = F(n)F(m)$$

■

1.4 La convolution de Dirichlet

La convolution de Dirichlet, encore appelée produit de convolution de Dirichlet est une loi de composition interne définie sur lensemble des fonctions arithmétiques. Le mathématicien Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet développe ce produit en 1837 .

Définition 1.13. *Le produit de convolution de deux fonctions arithmétiques f et g est la fonction $f * g$ définie par :*

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} g(d)f\left(\frac{n}{d}\right) \tag{1.19}$$

En particulier, on a :

1. $(f * g)(1) = f(1)g(1)$.
2. $(f * g)(p) = f(1)g(p) + f(p)g(1)$,
3. Pour tout p^m, on a :

$$(f * g)(p^m) = \sum_{k=0}^{m} f(p^k)g(p^{m-k}) \tag{1.20}$$

Remarque 1.1. *Il est parfois utile d'écrire la convolution de Dirichlet sous la forme :*

$$(f * g)(n) = \sum_{ab=n} f(a)g(b), \quad (a, b \in \mathbb{N}^*). \tag{1.21}$$

Exemple 1.3.

1. *On a* $\sum_{d|n} 1$, *donc* $d = \mathbf{1} * \mathbf{1}$,
2. $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$, *donc* $\sigma = id * \mathbf{1}$,
3. $\sum_{d|n} \mu(d) = \delta(n)$ *(voir le théorème (1.1)), donc* $\mu * \mathbf{1} = \delta$,
4. $\sum_{d|n} \mu(d)\frac{n}{d} = \varphi(n)$ *(la relation (1.9)), donc* $\mu * id = \varphi$,
5. $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$ *(voir le théorème (1.2)), donc* $\varphi * \mathbf{1} = id$,
6. $\sum_{d|n} \Lambda(d) = \log n$ *(le théorème (1.6)), donc* $\Lambda * \mathbf{1} = \log$.

La convolution de Dirichlet vérifie elle aussi les propriétés de commutativité, de distributivité et d'associativité. En effet, la proposition suivante est facilement démontrable.

Proposition 1.2. *Si f, g et h sont des fonctions arithmétiques, alors*

1. $f * g = g * f$.
2. $(f * g) * h = f * (g * h)$.
3. $f * (g + h) = f * g + f * h$.

Preuve 1.8.

1. $*$ *est commutative : Cette propriété est une conséquence directe de la définition.*
2. $*$ *est associative : pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :*

$$\begin{aligned}((f * g) * h)(n) &= \sum_{d|n} (f * g)(d) h\left(\frac{n}{d}\right) \\ &= \sum_{dq=n} (f * g)(d) h(q) \\ &= \sum_{dq=n} \sum_{ab=d} f(a) g(b) h(q) \\ &= \sum_{abq=n} f(a) g(b) h(q) \\ &= \sum_{a|n} f(a) \sum_{bq=n/a} g(b) h(q) \\ &= \sum_{a|n} f(a) \sum_{b|(n/a)} g(b) h\left(\frac{n}{ab}\right) \\ &= \sum_{a|n} f(a)(g * h)\left(\frac{n}{a}\right) = \Big(f * (g * h)\Big)(n).\end{aligned}$$

3. $*$ *est distributive par rapport laddition : pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :*

$$\begin{aligned}(f * (g + h))(n) &= \sum_{d|n} f(d) \left(g\left(\frac{n}{d}\right) + h\left(\frac{n}{d}\right)\right) \\ &= (f * g)(n) + (f * h)(n).\end{aligned}$$

Aussi, Si A désigne l'ensemble des fonctions arithmétiques, on peut facilement vérifier que $(A, +, *)$ est un anneau commutatif. De plus, cet anneau possède un élément neutre pour la convolution. En effet, la fonction indicatrice δ définie par :

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1, \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \tag{1.22}$$

est l'élément neutre pour cet anneau.

Remarque 1.2. *Toute fonction arithmétique f vérifier l'égalité :*

$$(\delta * f)(n) = f(n), \quad \textit{pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Définition 1.14. *Soit f une fonction arithmétique. On dira que la fonction arithmétique g est l'inverse de f si $f * g = g * f = \delta$. Cet inverse sera noté f^{-1}. II est important de mentionner que si f possède un inverse, il sera unique.*

Le résultat suivant caractérise les éléments inversibles de cet anneau.

Théorème 1.10. *Une fonction arithmétique a un élément inverse si et seulement si $f(1) \neq 0$.*

Preuve 1.9. *Supposons que f soit inversible, donc il existe $g \in A$ tq $f * g = \delta$, Alors*

$$(f * g)(1) = \delta(1) = 1$$

et comme

$$(f * g)(1) = \sum_{d|1} f(d)g\left(\frac{1}{d}\right) = f(1)g(1)$$

on en déduit que $f(1)g(1) = 1$. Donc on a, nécssairement $f(1) \neq 0$. Réciproquement, supposons $f(1) \neq 0$. On cherche $g \in A$ telle que $f * g = \delta$; c'est-à-dire $f(1)g(1) = 1$ et pour tout $n \geq 2$,

$$\sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right) = 0.$$

On va construire g par récurence. Premièrement on définit $g(1) = 1/f(1)$. Supposons sons avoir construit $g(1), \cdots, g(n-1)$. Alors on veut

$$0 = f(1)g(n) + \sum_{\substack{1<d\leq n \\ d|n}} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right),$$

Donc on pose

$$g(n) = -\frac{1}{f(1)} \sum_{\substack{1<d\leq n \\ d|n}} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right),$$

par récurence, on construit $g \in A$ telle que $f * g = \delta$.

1.5 Convolution de Dirichlet et fonctions multiplicatives

Théorème 1.11. *Soient f, g deux fonctions arithmétiques multiplicatives, Alors la fonction arithmétique $f * g$ est aussi multiplicative.*

Preuve 1.10. *On a d'abord*

$$(f * g)(1) = f(1)g(1) = 1.$$

Soit maintenant m et n deux entiers premiers entre eux. Nous avons

$$(f * g)(mn) = \sum_{d|mn} g(d) f\left(\frac{mn}{d}\right),$$

et par suit

$$\begin{aligned}
(f * g)(mn) &= \sum_{d_1|m} \sum_{d_2|n} g(d_1 d_2) f\left(\frac{mn}{d_1 d_2}\right) \\
&= \sum_{d_1|m} \sum_{d_2|n} f\left(\frac{m}{d_1}\right) f\left(\frac{n}{d_2}\right) g(d_1) g(d_2) \\
&= (f * g)(m)(f * g)(n).
\end{aligned}$$

Corollaire 1.1. *Soit $f \in A$ une fonction multiplicative. Alors f est inversible et f^{-1} est multiplicative.*

Preuve 1.11. *Comme f est multiplicative alors $f(1) = 1$. D'après le théorème (1.10), f est inversible. Il reste à montrer que $g = f^{-1}$ est multiplicative. Soit h la fonction multiplicative qui est égale g en tout puissanced'un nombre premier, c'est-à-dire*

$$h(p^k) = g(p^k)$$

pour tout nombre premier p et tout entier $k \geq 1$, La fonction h est uniquement déterminée et le théoréme (1.11)implique $u = f * h$ est multiplicative. Pour tout nombre premier p et tout entier $k \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}
(\mu)(p^k) &= \sum_{d|p^k} f(d) h\left(\frac{p^k}{d}\right) \\
&= \sum_{j=0}^{k} f(p^j) h(p^{k-j}) \\
&= \sum_{j=0}^{k} f(p^j) g(p^{k-j}) \\
&= (f * g)(p^k) = \delta(p^k)
\end{aligned}$$

Donc u et δ coincident sur les puissances des nombres premiers. Comme elles sont multiplicative, alors

$$f * h = \mu = \delta$$

Par unicité de l'inverse, on a $f^{-1} = h$ et f^{-1} est multiplicative.

Corollaire 1.2. *L'ensemble des fonctions arithmétiques multiplicatives, muni du produit de convolution, forme un groupe abélien.*

Preuve 1.12. *découle immédiatement du corollaire (1.1) et de la proposition (1.2).*

Corollaire 1.3. *Soient f, g et h des fonctions arithmétiques. Si $f * g = h$ et f, h sont multiplicatives, alors g est multiplicative.*

Preuve 1.13. *L'equation $f * g = h$ implique que $g = f^{-1} * h$, comme f est multiplicative, alors f^{-1} est multiplicative (le corollaire (1.1)). Ainsi si f^{-1} et h sont multiplicatives, alors $f^{-1} * h$ est multiplicative (le théorème (1.11)), donc g est multiplicative.*

Exemple 1.4.

1. **Multiplicativité de φ** *: On sait que $\varphi * \mathbf{1} = id$ et les fonctions $\mathbf{1}$, id sont multilicatives, donc d'après le corollaire (1.3), on a φ est multiplicative.*
2. **Multiplicativité de d et σ** *: Comme $d = \mathbf{1} * \mathbf{1}$, et la fonction $\mathbf{1}$ est multiplicative, alors la fonction d est multiplicative (le théorème (1.11)). De même, le fait que $\sigma = id * \mathbf{1}$, et les fonctions id, $\mathbf{1}$ sont multiplicatives, entraine que σ est multiplicative.*

■

1.6 L'inverse d'une fonction complètement multiplicative

Théorème 1.12. *Soit f une fonctions arithmétique multiplicative, Alors f est complètement multiplicative si et seulement si $f^{-1} = \mu f$.*

Preuve 1.14. *Soit $g(n) = \mu(n) f(n)$ pour tout $n \geq 1$. Si f est complètement multiplicative, on obtient*

$$(g * f)(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f(d) f\left(\frac{n}{d}\right) = f(n) \sum_{d|n} \mu(d) = f(n) I(n) = I(n).$$

Comme $f(1) = 1$ et $I(n) = 0, \quad \forall\, n > 1$. donc $g = f^{-1}$.
Réciproquement, supposons $f^{-1} = \mu f$. pour montrer que f est complètement multiplicative, il suffit de montrer que $f(p^\alpha) = f(p)^\alpha$ pour tout p^α. L'équation $f^{-1} = \mu f$ implique que

$$\sum_{d|n} \mu(d) f(d) f\left(\frac{n}{d}\right) = 0, \quad \forall\, n > 1,$$

Donc, posons $n = p^\alpha$, on obtient

$$\mu(1) f(1) f(p^\alpha) + \mu(p) f(p) f(p^{\alpha-1}) = 0$$

D'où, $f(p^\alpha) = f(p) f(p^{\alpha-1})$, Cela implique que $f(p^\alpha) = f(p)^\alpha$. Ce qui preuve que f est complètement multiplicative.

$\blacksquare$

Théorème 1.13. *une fonctions multiplicative f est complètement multiplicative si et seulement si*

$$f(g * h) = fg * fh$$

pour toutes fonctions arithmétiques g et h.

Preuve 1.15.
Si f est complètement multiplicative alors, pour toutes les fonctions g et h, et tout n, on a

$$\begin{aligned}(f(g * h))(n) &= f(n) \sum_{d|n} g(d) h\left(\frac{n}{d}\right) \\ &= \sum_{d|n} f(d) g(d) f\left(\frac{n}{d}\right) h\left(\frac{n}{d}\right) \\ &= (fg * fh)(n).\end{aligned}$$

réciproquement, supposons que l'équation tienne pour $g = 1$ et $h = \mu$. On a alors,

$$\delta = f\delta = f(I * \mu) = fI * f\mu = f * \mu f$$

ce qui donne $f^{-1} = \mu f$, et par suite f est complètement multiplicative.

$\blacksquare$

Théorème 1.14. *Soit f une fonction arithmétique multiplicative. On a*

$$\sum_{d|n} \mu(d) f(d) = \prod_{p|n} (1 - f(p))\,.$$

Preuve 1.16. *Soit*
$$g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f(d),$$
alors g est multiplicative. Donc pour déterminer g il suffit de calculer $g(p^\alpha)$. On a
$$g(p^\alpha) = \sum_{d|p^\alpha} \mu(d) f(d) = \mu(1) f(1) + \mu(p) f(p) = 1 - f(p).$$
D'où
$$g(n) = \prod_{p|n} g(p^\alpha) = \prod_{p|n} (1 - f(p)).$$
∎

Exemple 1.5.

1. **L'inverse de** $\varphi(n)$ *: On sait que $\varphi = \mu * id$, donc $\varphi^{-1} = \mu^{-1} * id^{-1}$, or $id^{-1} = id \cdot \mu$ car id est complètement multiplicative, alors*
$$\varphi^{-1} = \mu^{-1} * id \cdot \mu = \mathbb{1} * id \cdot \mu,$$
Cela implique que
$$\varphi^{-1}(n) = \sum_{d|n} d\mu(d),$$
D'après le théorème (1.14), on obtient
$$\varphi^{-1}(n) = \prod_{p|n} (1 - p).$$

2. **L'inverse de** $\lambda(n)$ *: On a $\lambda(n)$ est complètement multiplicative, alors*
$$\lambda^{-1}(n) = \mu(n)\lambda(n) = \mu^2(n) = |\mu(n)|$$

1.6.1 Formule d'inversion de Mobius

Théorème 1.15. *Soit f une fonction arithmétique et notons pour tout $n \geq 1$,*
$$F(n) = \sum_{d|n} f(d).$$
On a
$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) F\left(\frac{n}{d}\right).$$

Preuve 1.17. *Par hypothèse , on a $F = f * 1\!\!I$. D'où*

$$f = \delta * f = \mu * 1\!\!I * f = \mu * f * 1\!\!I = \mu * F.$$

Ce qui donne le résultat.

■

$\omega(n)$	$\begin{cases} 0, \text{ si } n = 1 \\ k, \text{ si } n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}. \end{cases}$	1	additive
$\Omega(n)$	$\begin{cases} 0, \text{ si } n = 1 \\ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i, \text{ si } n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}. \end{cases}$	m	complètement additive
$\log(n)$	$\log n$	$\log p^m$	complètement additive
$\Lambda(n)$	$\begin{cases} \log p, \text{ si } n = p^m, \\ 0, \text{ sinon.} \end{cases}$	$\log p$	ni additive ni multiplicative, $\boxed{\log = \Lambda * 1\!\!I}$.

Table 1.1 – Quelques fonctions arithmétiques.

$\delta(n)$	$\begin{cases} 1, \text{ si } n = 1 \\ 0, \text{ sinon.} \end{cases}$	0	l'élément neutre pour la C.D $\boxed{\delta * f = f * \delta = f}$, complètement multiplicative.
$id(n)$	n	p^m	complètement multiplicative
$s(n)$	$\begin{cases} 1, \text{ si } n = m^2, \ m \in \mathbb{N}^* \\ 0, \text{ sinon.} \end{cases}$	$\begin{cases} 1, \text{ si } m \text{ est pair,} \\ 0, \text{ si } m \text{ est impair.} \end{cases}$	
$\mu(n)$	$\begin{cases} 1, \text{ si } n = 1, \\ (-1)^k, \text{ si } n = \prod_{i=1}^{k} p_i, \\ (\ p_i \textit{ distincts}), \\ 0, \text{ sinon.} \end{cases}$	$\begin{cases} -1, \text{ si } m = 1, \\ 0, \text{ si } m > 1. \end{cases}$	$\sum_{d\mid n} \mu(d) = 0 \text{ si } n \geq 2$, $\boxed{\mu * 1\!\!I = \delta}$.
$\mu^2(n)$	$\begin{cases} 1, \text{ si } n \text{ est sans facteur carré,} \\ 0, \text{ sinon.} \end{cases}$	$\begin{cases} 1, \text{ si } m = 1, \\ 0, \text{ si } m > 1. \end{cases}$	

Table 1.2 – Quelques fonctions multiplicatives.

$\lambda(n)$	$\begin{cases} 1, \text{ si } \; n=1, \\ (-1)^{\sum_{i=1}^{k}\alpha_i}, \text{ si } n=\prod\limits_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}. \end{cases}$	$(-1)^m$	$\sum\limits_{d\mid n}\lambda(d)=s(n)$, $\boxed{\lambda * \mathbb{1} = s}$, complètement multiplicative.
$\varphi(n)$	$card\{1 \leq m \leq n: \; (m,n)=1\}$	$p^m(1-1/p)$	$\sum\limits_{d\mid n}\varphi(d)=n$, $\boxed{\varphi * \mathbb{1} = id}$.
$d(n)$	$\sum\limits_{d\mid n} 1$	$m+1$	$\boxed{d = \mathbb{1} * \mathbb{1}}$.
$\sigma(n)$	$\sum\limits_{d\mid n} d$	$\dfrac{p^{m+1}-1}{p-1}$	$\boxed{\sigma = \mathbb{1} * id}$.

TABLE 1.3 – Quelques fonctions multiplicatives.

1.7 Formule sommatoire

Définition 1.15. *Soit f une fonction arithmétique, et soit $x \geq 1$. La fonction $F(x)$ définie par $F(x) = \sum\limits_{n \leq x} f(n)$ est dite fonction sommatoire de f.*

Exemples

1. **La fonction $\pi(x)$** : Pour tout $x \geq 0$, on désigne par $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x

$$\begin{aligned} \pi(x) &= card\{p, \text{ tel que } p \text{ premier et } p \leq x\} \\ &= \sum_{p \leq x} 1 \end{aligned} \tag{1.23}$$

avec $\pi(x) = 0$ pour $0 \leq x < 2$.

2. **La fonction $\theta(x)$** : Pour tout $x \geq 0$, on définit la première fonction de Tchebychev $\theta(x)$ par

$$\theta(x) = \sum_{p \leq x} \ln p \quad \text{ avec } \theta(x) = 0 \text{ pour } 0 \leq x < 2.$$

3. **La fonction $\psi(x)$** : Pour tout $x \geq 0$, on définit la deuxième fonction de Tchebychev $\psi(x)$ par

$$\psi(x) = \sum_{p^v \leq x} \ln p \quad \text{ avec } \psi(x) = 0 \text{ pour } 0 \leq x < 2.$$

Pour $x \geq 2$, on peut écrire

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \sum_{p^v \leq x} \ln p = \sum_{p \leq x} \ln p + \sum_{p^2 \leq x} \ln p + \sum_{p^3 \leq x} \ln p + \cdots + \sum_{p^m \leq x} \ln p \\ &= \sum_{p \leq x} \ln p + \sum_{p \leq x^{1/2}} \ln p + \sum_{p \leq x^{1/3}} \ln p + \cdots + \sum_{p \leq x^{1/m}} \ln p \\ &= \theta(x) + \theta(x^{1/2}) + \cdots + \theta(x^{1/m}) \quad \text{où } m = \left[\frac{\ln x}{\ln 2}\right].\end{aligned}$$

Théorème 1.16. *Soit $\{a(n)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de nombres complexes, et soit $A(t) = \sum\limits_{1 \leq n \leq t} a(n)$ avec $A(t) = 0$ pour $t < 1$, x et y deux nombres réels tels que $0 < y < x$ et $f : [y, x] \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Alors on a*

$$\sum_{y < n \leq x} a(n) f(n) = A(x) f(x) - A(y) f(y) - \int_y^x A(t) f'(t) dt.$$

Preuve 1.18. *On pose $m = [y]$ et $k = [x]$. Alors on a $A(y) = A(m)$, $A(x) = A(k)$ de plus*

$$\sum_{y < n \leq x} a(n) f(n) = \sum_{n=m+1}^{k} a(n) f(n),$$

et pour tout $n \geq 1$, on a

$$a(n) = \sum_{i=1}^{n} a(i) - \sum_{i=1}^{n-1} a(i) = A(n) - A(n-1). \tag{1.24}$$

Cela implique

$$\begin{aligned}\sum_{y < n \leq x} a(n) f(n) &= \sum_{y < n \leq x} \{A(n) - A(n-1)\} f(n) \\ &= \sum_{y < n \leq x} A(n) f(n) - \sum_{y < n \leq x} A(n-1) f(n),\end{aligned}$$

et par (1.24) on obtient

$$\sum_{y < n \leq x} a(n) f(n) = \sum_{n=m+1}^{k} A(n) f(n) - \sum_{n=m+1}^{k} A(n-1) f(n)$$

sachant que

$$\sum_{n=m+1}^{k} A(n-1) f(n) = \sum_{n=m}^{k-1} A(n) f(n+1),$$

il vient

$$\sum_{y<n\leq x} a(n)f(n) = \sum_{n=m+1}^{k} A(n)f(n) - \sum_{n=m}^{k-1} A(n)f(n+1).$$

Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{y<n\leq x} a(n)f(n) &= \sum_{n=m+1}^{k-1} A(n)f(n) + A(k)f(k) - \sum_{n=m+1}^{k-1} A(n)f(n+1) - A(m)f(m+1) \\
&= \sum_{n=m+1}^{k-1} A(n)\{f(n) - f(n+1)\} + A(k)f(k) - A(m)f(m+1) \\
&= -\sum_{n=m+1}^{k-1} A(n) \int_{n}^{n+1} f'(t)dt + A(k)f(k) - A(m)f(m+1).
\end{aligned}$$

Puisque $n \leq t < n+1$ *on a* $A(t) = A(n)$, *il sensuit*

$$A(n) \int_{n}^{n+1} f'(t)dt = \int_{n}^{n+1} A(t)f'(t)dt,$$

d'où

$$\begin{aligned}
\sum_{y<n\leq x} a(n)f(n) &= -\sum_{n=m+1}^{k-1} \int_{n}^{n+1} A(t)f'(t)dt + A(k)f(k) - A(m)f(m+1) \\
&= -\int_{m+1}^{k} A(t)f'(t)dt + A(k)f(k) - A(m)f(m+1),
\end{aligned}$$

on écrit $A(k)f(k)$ *et* $A(m)f(m+1)$ *sous les formes suivantes :*

$$\begin{aligned}
A(k)f(k) &= A(k)(f(k) + f(x) - f(x)) \\
&= -\int_{k}^{x} A(t)f'(t)dt + A(x)f(x) \text{ (car } A(x) = A(k)), \quad (1.25)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
-A(m)f(m+1) &= -A(m)(f(m+1) + f(y) - f(y)) \\
&= -\int_{y}^{m+1} A(t)f'(t)dt - A(y)f(y) \text{ (car } A(y) = A(m)).
\end{aligned}$$

Enfin, on obtient

$$\sum_{y<n\leq x} a(n)f(n) = -\int_{m+1}^{k} A(t)f'(t)dt - \int_{k}^{x} A(t)f'(t)dt + A(x)f(x)$$

$$-\int_{y}^{m+1} A(t)f'(t)dt - A(y)f(y)$$

$$= A(x)f(x) - A(y)f(y) - \int_{y}^{x} A(t)f'(t)dt.$$

Théorème 1.17. *Pour $x \geq 1$ on a*

$$\sum_{n\leq x} \frac{1}{n} = \ln x + \gamma + \mathcal{O}\left(x^{-1}\right)$$

où $\gamma = 1 - \int_{1}^{\infty} \frac{\{t\}}{t} dt = 0.577\cdots$.

Preuve 1.19. *On applique la formule* (1.24) *avec* $a(n) = 1$ *et* $f(t) = 1/t$. *On a alors* $A(t) = \sum_{n\leq t} 1 = [t]$ *et on écrit*

$$\sum_{n\leq x} \frac{1}{n} = \sum_{n\leq x} a(n) f(n)$$

$$= A(x)f(x) - A(1)f(1) - \int_{1}^{x} A(t)f'(t)dt,$$

donc

$$\sum_{n\leq x} \frac{1}{n} = \frac{[x]}{x} + \int_{1}^{x} \frac{[t]}{t^2} dt$$

$$= 1 - \frac{\{x\}}{x} + \int_{1}^{x} \frac{dt}{t} - \int_{1}^{x} \frac{\{t\}}{t^2} dt$$

$$= \ln x + \gamma + \mathcal{O}\left(x^{-1}\right).$$

Chapitre 2

Séries de Dirichlet et quelques propriétés analytiques

Les séries de Dirichlet interviennent dans l'estimation des valeurs moyennes des fonctions arithmétiques. Par le biais d'une formule classique de Perron ,on détermine la partie principale et une majoration du reste. Dans ce chapitre on étudié de près ces séries et quelques unes de leurs propriétés analytiques.

2.1 Définitions et théorèmes

Définition 2.1. *Soit f une fonction arithmétique, la série de Dirichlet associée à f est une série de la forme*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)n^{-s}.$$

tel que $s = \sigma + it$ avec $\sigma = Re(s)$ et $t = Im(s)$.
Les fonctions f(n) sont appelées souvent les coefficients de la série de Dirichlet ,si la série est converge dans un domaine de convergence on écrit

$$D_f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} f(n)n^{-s}.$$

telle que $D_f(s)$ représente une fonction holomorphe dans le demi-plan de convergence.Elle est parfois appelée série génératrice de $f(n)$. On écrit en général $s = \sigma + it$ la décomposition en partie réelle et imaginaire de la variable d'une série de Dirichlet.Cela sera fait ci-dessous parfois sans mention explicite.

Définition 2.2. *Soit*

$$D_f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} f(n)n^{-s}.$$

une série de Dirichlet. L'abscisse de convergence absolue σ_a est définie comme étant le plus petit nombre réel σ_a tel que si$\sigma > \sigma_a$,
alors $\sum_{n\geq 1} |f(n)|n^{\sigma}$ converge, donc

$$\sigma_a = \inf\{\sigma : \sum_{n\geq 1} |f(n)|n^{-\sigma} < +\infty\}.$$

Pour déterminer la région de convergence d'une série de Dirichlet nous avons les résultats suivants.

Théorème 2.1. *Soit f une fonction arithmétique et $D_f(s)$ sa série de Dirichlet associée. On suppose qu'il existe un réel δ et pour tout $\varepsilon > 0$ une constante $C(\varepsilon)$ telle que pour tout entier $n \geq 1$ on a*

$$|f(n)| \leq C(\varepsilon)n^{\delta+\varepsilon}$$

alors
1) La série de Dirichlet $D_f(s)$ converge absolument sur le demi-plan $Re(s) > 1 + \delta$.
2) Soit $\varepsilon > 0$ la série $D_f(s)$ converge normalement sur le demi-plan fermé $Re(s) \geq 1 + \delta + \varepsilon$.

Preuve 2.1. *On suppose que $Re(s) > 1 + \delta$, alors il existe $\alpha > 0$ tel que $Re(s) \geq 1 + \delta + \alpha$, donc on a*

$$|f(n)n^{-s}| \leq |f(n)|n^{-\sigma} \leq C(\frac{\alpha}{2})n^{-1-\frac{\alpha}{2}},$$

et comme la série $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-1-\frac{\alpha}{2}}$ est convergente alors $D_f(s)$ converge absolument sur le demi-plan $Re(s) > 1 + \delta$ Pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $Re(s) \geq 1 + \delta + \varepsilon$ on a $|f(n)n^{-s}| \leq C(\frac{\alpha}{2})n^{-1-\frac{\alpha}{2}}$ et la série $\sum_{n=1}^{+\infty} C(\frac{\alpha}{2})n^{-1-\frac{\alpha}{2}}$ est une série convergente donc on a la convergence normale.

■

Théorème 2.2. *Si une série de Dirichlet $\sum_{n\geq 1} f(n)n^{-s}$ converge pour $s_0 \in \mathbb{C}$, alors elle converge dans le demi-plan $\sigma > \sigma_0$. De plus elle converge uniformément sur tout secteur du type*

$$D_\theta(s_0) = \{s \in \mathbb{C} \backslash Re(s - s_0) > 0 \quad et \quad |\arg(s - s_0)| \leq \theta \quad ou \quad \theta < \frac{\Pi}{2}\}$$

La démonstration du théorème (2.2) repose sur le lemme suivant

Lemme 2. *Soient a, b deux réels tels que $0 \leq a \leq b$ alors pour tout $s \in \mathbb{C}$ avec $\sigma = Re(s) > 0$, on a*

$$|e^{-as} - e^{-bs}| \leq \tfrac{|s|}{\sigma}(e^{-a\sigma} - e^{-b\sigma}).$$

Preuve 2.2. *On a*

$$e^{-as} - e^{-bs} = s \int_a^b e^{-ts} dt$$

d'où

$$\begin{aligned} |e^{-as} - e^{-bs}| &\leq |s| \int_a^b |e^{-ts}| dt = |s| \int_a^b e^{-t\sigma} dt \\ &= \frac{|s|}{\sigma}(e^{-a\sigma} - e^{-b\sigma}). \end{aligned}$$

■

Preuve 2.3. *(Démonstration du théorème 2.2)*
Soit $s \in \mathbb{C}, \sigma > \sigma_0$. Posons $u_n = f(n) n^{-s_0}, v_n = n^{s_0 - s}$et pour $q \geq p$

$$S_{(p,q)} = \sum_{n=p}^{q} u_n v_n = \sum_{n=p}^{q} \frac{f(n)}{n^s}$$

et

$$U_{(p,q)} = \sum_{n=p}^{q} u_n = \sum_{n=p}^{q} \frac{f(n)}{n^{s_0}}.$$

Par hypothèse, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N(\varepsilon)$ tel que

$$q \geq p \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |U_{p,q}| \leq \varepsilon$$

De plus si $\sigma > \sigma_0$, remarquons que

$$|v_n| = \frac{1}{n^{\sigma - \sigma_0}} < 1$$

En utilisant une transformation d'Abel (avec la convention que $U_{p,p-1} = 0$), on a

$$\begin{aligned}\sum_{n=p}^{q} \frac{f(n)}{n^s} &= \sum_{n=p}^{q} u_n v_n = \sum_{n=p}^{q} (U_{p,n} - U_{p,n-1}) v_n \\ &= \sum_{n=p}^{q} U_{p,n} v_n - \sum_{n=p}^{q} U_{p,n-1} v_n \\ &= \sum_{n=p}^{q} U_{p,n} v_n - \sum_{k=p-1}^{q-1} U_{p,k} v_{k+1} \\ &= U_{p,q} v_q + \sum_{n=p}^{q-1} U_{p,n}(v_n - v_{n+1}).\end{aligned}$$

D'où, pour $q \geq p \geq N(\varepsilon)$, on a

$$\left| \sum_{n=p}^{q} \frac{f(n)}{n^s} \right| \leq \varepsilon |v_q| + \varepsilon \sum_{n=p}^{q-1} |v_n - v_{n+1}| \leq \varepsilon \left(1 + \sum_{n=p}^{q-1} |v_n - v_{n+1}| \right)$$

Or

$$|v_n - v_{n+1}| = \left| \frac{1}{n^{s-s_0}} - \frac{1}{(n+1)^{s-s_0}} \right| = \left| e^{-(s-s_0)\ln n} - e^{-(s-s_0)\ln(n+1)} \right|$$

En appliquant le lemme 2 à $a = \ln n$, $b = \ln(n+1)$, on obtient

$$|v_n - v_{n+1}| \leq \frac{|s - s_0|}{\sigma - \sigma_0} \left(\frac{1}{n^{\sigma-\sigma_0}} - \frac{1}{(n+1)^{\sigma-\sigma_0}} \right)$$

D'où

$$\begin{aligned}\left| \sum_{n=p}^{q} \frac{f(n)}{n^s} \right| &\leq \varepsilon \left(1 + \frac{|s - s_0|}{\sigma - \sigma_0} \sum_{n=p}^{q-1} \left(\frac{1}{n^{\sigma-\sigma_0}} - \frac{1}{(n+1)^{\sigma-\sigma_0}} \right) \right) \\ &= \varepsilon \left(1 + \frac{|s - s_0|}{\sigma - \sigma_0} \left(\frac{1}{p^{\sigma-\sigma_0}} - \frac{1}{q^{\sigma-\sigma_0}} \right) \right).\end{aligned}$$

alors,

$$\left| \sum_{n=p}^{q} \frac{f(n)}{n^s} \right| \leq \varepsilon \left(1 + \frac{|s - s_0|}{\sigma - \sigma_0} \right). \tag{2.1}$$

Ceci montre donc que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^s}$ vérifie le critère de Cauchy donc elle converge.

Il reste à montrer la convergence uniforme dans $D_\theta(s_0)$ où $\theta < 0 < \frac{\pi}{2}$. Remarquons que si $s \in D_\theta(s_0)$, il existe $\alpha = \alpha(s)$ tel que

$$\cos(\alpha) = \frac{\sigma - \sigma_0}{s - s_0} \text{ et } |\alpha| \leq \theta.$$

D'où,

$$\frac{|s - s_0|}{\sigma - \sigma_0} = \frac{1}{\cos(\alpha)} \leq \frac{1}{\cos(\theta)}$$

ce qui avec la relation (2.1) implique que, pour tout $s \in D_\theta(s_0)$, on a

$$\left| \sum_{n=p}^{q} \frac{f(n)}{n^s} \right| \leq \varepsilon \left(1 + \frac{1}{\cos(\alpha)} \right).$$

Ainsi la série $\sum_{n \geq 1} \frac{f(n)}{n^s}$ vérifie le critère de Cauchy uniforme sur $D_\theta(s_0)$,donc elle converge uniformément sur $D_\theta(s_0)$.

■

2.2 Abscisse de convergence

Le résultat suivant est un analogue de l'existence du rayon de convergence pour les série entières.

Corollaire 2.1. *Soit $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ une série de Dirichlet. On note*

$$E_c = \left\{ \sigma \in \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^\sigma} \text{ converge} \right\}$$

et

$$\sigma_c = \begin{cases} \inf E_c, & \text{si } E_c \neq \varnothing \\ +\infty, & \text{si } E_c = \varnothing \end{cases}.$$

Alors

- *Si $\mathcal{R}e(s) > \sigma_c$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ converge.*
- *Si $\mathcal{R}e(s) < \sigma_c$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ diverge.*

On appelle σ_c l'abscisse de convergence de la série de Dirichlet et le demi-plan $\mathcal{R}e(s) > \sigma_c$ le demi-plan de convergence.

Preuve 2.4. *Supposons tout d'abord que* $E_c = \varnothing$ *et soit* $s_0 \in \mathbb{C}$. *Il s'agit de montrer que la série* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ *diverge. Supposons au contraire qu'elle converge. Alors le théorème (2.2)implique que, pour tout* $s \in \mathbb{C}$, $\mathcal{R}e(s) > \mathcal{R}e(s_0)$ *,la série* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ *converge.En particulier* $\sigma = \mathcal{R}e(s) \in E_c$, *ce qui est contraire à l'hypothèse.*
Supposons maintenant que $E_c \neq \varnothing$.*Si* $E_c = \mathbb{R}$, *alors pour tout* $\sigma \in \mathbb{R}$ *, la série* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ *converge et on a* $\sigma_c = -\infty$. *Il s'agit alors de montrer que pour tout* $s \in \mathbb{C}$, *la série* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ *converge. C'est à nouveau une conséquence du théorème 2.2, puisque si* $s \in \mathbb{C}$, *alors* $\mathcal{R}e(s) > \sigma_0$ *avec* $\sigma_0 \in E_c$.
On peut donc supposer maintenant que $E_c \neq \varnothing$ *et* $E_c \neq \mathbb{R}$.*Dans ce cas ,il est facile de voir que* σ_c *est fini.Soit* $s \in \mathbb{C}$ *,* $\mathcal{R}e(s) > \sigma_c$. *Alors il existe* $\sigma_0 \in E_c$ *tel que* $\mathcal{R}e(s) > \sigma_0 \geq \sigma_c$. *Le théorème* 2.2 *implique une nouvelle fois que la série* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ *converge. Finalement il reste à montrer que si* $s \in \mathbb{C}$, $\mathcal{R}e(s) < \sigma_c$ *,la série* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ *diverge.Par l'absurde ,supposons qu'il existe* $s \in \mathbb{C}$ *,* $\mathcal{R}e(s) < \sigma_c$ *, telle que la série* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ *converge.*
Alors si $\mathcal{R}e(s) < \sigma_1 < \sigma_c$, *le théorème* 2.2 *implique que* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^{\sigma_1}}$ *converge, ce qui contredit la définition de* σ_c.

■

Corollaire 2.2. *Soit* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ *une série de Dirichlet. On note*

$$E_a = \left\{ \sigma \in \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^\sigma} \text{ converge absolument} \right\}$$

et

$$\sigma_a = \begin{cases} \inf E_a, & si \ \ E_a \neq \varnothing \\ +\infty, & si \ \ E_a = \varnothing \end{cases}$$

Alors

- *Si* $\mathcal{R}e(s) > \sigma_a$ *,la série* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ *converge absolument.*
- *Si* $\mathcal{R}e(s) < \sigma_a$ *,la série* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ *ne converge pas absolument.*

On appelle σ_a l'abscisse de convergence absolue de la série de Dirichlet et le demi-plan $\mathcal{R}e(s) > \sigma_a$ le demi-plan de convergence absolu.

Preuve 2.5. *Remarquons que*

$$\left|\frac{f(n)}{n^s}\right| = \frac{|f(n)|}{n^{\mathcal{R}e(s)}}$$

et donc la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ *converge absolument si et seulement le série* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|f(n)|}{n^\sigma}$ *converge, où* $\sigma = \mathcal{R}e(s)$*. De plus*

$$E_a = \left\{\sigma \in \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^\sigma} \text{ converge absolument}\right\}$$

Il suffit donc d'appliquer le corollaire 2.1 à la série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s}$.

■

Proposition 2.1. *Soit* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ *une série de Dirichlet. Alors on a*

$$\sigma_a - 1 \leq \sigma_c \leq \sigma_a$$

Preuve 2.6. *Si la série* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^\sigma}$ *converge absolument, alors elle converge et donc* $\sigma_c \leq \sigma_a$*. Pour prouver la deuxième inégalité, choisissons* $\sigma > \sigma_c + 1$*. Alors il existe* σ_0 *tel que*
$\sigma - 1 > \sigma_0 > \sigma_c$*. Comme la série* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^\sigma}$ *converge, la suite* $(f(n)n^{-\sigma_0})_n$ *est bornée par une constante, disons* M*. Écrivons donc*

$$\frac{|f(n)|}{n^\sigma} = \frac{|f(n)|}{n_0^\sigma}\frac{1}{n^{\sigma-\sigma_0}} \leq \frac{M}{n^{\sigma-\sigma_0}}.$$

Or $\sigma - \sigma_0 > 1$*, donc la série* $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-(\sigma-\sigma_0)}$ *converge et donc la série* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^\sigma}$ *est absolument convergente. Ainsi* $\sigma_a \leq \sigma_c + 1$.

■

2.3 Holomorphie et unicité des coefficients

Le résultat suivant précise le régularité de la somme d'une série de Dirichlet sur son demi-plan de convergence.

Théorème 2.3. *Soit*

$$F(s)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{f(n)}{n^s},\quad \mathcal{R}e(s)>\sigma_c$$

une série de Dirichlet. Alors la fonction F est holomorphe sur le demi-plan $\mathcal{R}e(s)>\sigma_c$ et ,pour $k\geq 0$,on a

$$F^{(k)}(s)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{f(n)(-\log n)^k}{n^s},\quad \mathcal{R}e(s)>\sigma_c.$$

Preuve 2.7. *Rappelons le théorème de Weierstrass : si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert Ω du plan complexe et si $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur tout compact $K\subset\Omega$, alors la fonction f est holomorphe sur Ω et pour tout $k\geq 0$, on a*

$$f^{(k)}(z)=\lim_{n\longrightarrow+\infty}f_n^{(k)}(z),\quad z\in\Omega.$$

Fixons donc K un compact contenu dans le demi-plan $\mathcal{R}e(s)>\sigma_c$. Il est facile de voir qu'il existe $s_0\in\mathbb{C}$ et $0\leq\alpha<\pi/2$ tel que $\mathcal{R}e(s_0)>\sigma_c$ et $K\subset D_\theta(s_0)$. D'après le théorème 2.2, la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{f(n)}{n^s}$ converge uniformément vers F sur $D_\theta(s_0)$ donc sur K. Le théorème de Weierstrass permet alors d'en déduire que F est holomorphe sur $\mathcal{R}e(s)>\sigma_c$. De plus, on a

$$F^{(k)}(s)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{f(n)(-\log n)^k}{n^s},$$

(On remarque que :$F_N'(s)=\sum\limits_{n=1}^{N}\frac{f(n)(-\log n)}{n^s}$).

■

Le résultat suivant est un résultat d'unicité.

Proposition 2.2. *Soit*

$$F(s)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{f(n)}{n^s},\quad \mathcal{R}e(s)>\sigma_c$$

une série de Dirichlet. Supposons que, pour tout entier $N\geq 0$, on a

$$\lim_{\sigma\longrightarrow+\infty}N^\sigma F(\sigma)=0.$$

Alors $f(n)=0$, pour tout $n\geq 1$.

Preuve 2.8. *Montrons le résultat par récurrence. Soit $\sigma_1 > \sigma_c$. La série converge uniformément sur $[\sigma_1, +\infty[$, d'après le théorème 2.2. Donc on peut écrire que*

$$\lim_{\sigma \longrightarrow +\infty} F(\sigma) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{\sigma \longrightarrow +\infty} f(n) n^{-\sigma}.$$

Remarquons que

$$\lim_{\sigma \longrightarrow +\infty} f(n) n^{-\sigma} = \begin{cases} f(1), & si \;\; n = 1 \\ 0, & sinon. \end{cases}$$

Ainsi, en utilisant l'hypothèse, on obtient que f(1)=0. Supposons maintenant que $f(1) = f(2) = \cdots = f(N-1) = 0$. Alors

$$N^{\sigma} F(\sigma) = \sum_{n=N}^{+\infty} f(n) N^{\sigma} N^{-\sigma}.$$

En faisant tendre $\sigma \longrightarrow +\infty$, on obtient que $f(N) = 0$.

■

En particulier, la proposition suivante implique immédiatement le résulta suivant.

Corollaire 2.3. *Soient $F(s) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ et $G(s) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{g(n)}{n^s}$ deux séries de Dirichlet et supposons qu'il existe un réel σ_0 tel que $F(\sigma) = G(\sigma)$ pour tout $\sigma > \sigma_0$. Alors $f(n) = g(n)$, pour tout $n \geq 1$.*

2.4 Produit de deux séries de Dirichlet

Théorème 2.4. *Soient $F(s) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ et $G(s) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{g(n)}{n^s}$ deux séries de Dirichlet d'abscisse de convergence absolue respectivement σ_a^F et σ_a^G. Notons σ_a l'abscisse de convergence absolue de la série de Dirichlet $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(f*g)(n)}{n^s}$. Alors*

(i) $\sigma_a \leq max(\sigma_a^F, \sigma_a^G)$.

(ii) Pour tout $s \in \mathbb{C}$, $\mathcal{R}e(s) > max(\sigma_a^F, \sigma_a^G)$, on a

$$F(s)G(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(f*g)(n)}{n^s}.$$

Preuve 2.9. *Pour* $\sigma = \mathcal{R}e(s) > max(\sigma_a^F, \sigma_a^G)$ *, on a*

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{(f*g)(n)}{n^s} \right| &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|(f*g)(n)|}{n^\sigma} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \sum_{dd'=n} f(d)g(d') \right| n^{-\sigma} \\
&\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{dd'=n} \frac{|f(d)|\,|g(d')|}{n^{-\sigma}}, \\
&\leq \left(\sum_{d=1}^{+\infty} \frac{|f(d)|}{d^\sigma} \right) \left(\sum_{d'=1}^{+\infty} \frac{g(d')}{d'^\sigma} \right).
\end{aligned}$$

Ce qui prouve que la série de Dirichlet $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(f*g)(n)}{n^s}$ *converge absolument pour tout* $s \in \mathbb{C}$ *tel que* $\mathcal{R}e(s) > max(\sigma_a^F, \sigma_a^G)$. *Ainsi on a* $\sigma_a \leq max(\sigma_a^F, \sigma_a^G)$, *ce qui prouve le point* (i).
Pour le point (ii), *on a*

$$\begin{aligned}
F(s)G(s) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{f(k)g(m)}{k^s m^s} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \sum_{km=n} f(k)g(m), \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(f*g)(n)}{n^s}.
\end{aligned}$$

■

Corollaire 2.4. *Soient* $F(s) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ *et* $G(s) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{g(n)}{n^s}$ *deux séries de Dirichlet d'abscisse de convergence absolue respectivement* σ_a^F *et* σ_a^G.
Si $f * g = \delta$, *alors pour tout* $s \in \mathbb{C}$, $\mathcal{R}e(s) > max(\sigma_a^F, \sigma_a^G)$,
on a

$$G(s) = \frac{1}{F(s)}$$

Preuve 2.10. *La série de Dirichlet associée* δ *est*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\delta(n)}{n^s} = 1$$

Donc, d'après le théorème 2.4, on a

$$F(s)G(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\delta)(n)}{n^s} = 1.$$

$\blacksquare$

2.5 La fonction zêta de Riemann

La fonction ζ est très importante en arithmétique puisqu'elle intervient dans la formule d'Euler (la relation 2.20), elle fait donc un lien entre les entiers naturels et les nombres premiers. C'est aussi la série de Dirichlet la plus simple et la plus célèbre puisqu'elle est associée la fonction constante $\mathbb{1}$. Elle est définie par

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \mathcal{R}e(s) > 1 \tag{2.2}$$

Il est immédiat de vérifier que la série de Dirichlet $\sum\limits_{n\geq 1} n^{-s}$ converge absolument pour $\mathcal{R}e(s) > 1$. Ainsi ,d'après le théorème 2.3 ,la fonction ζ est analytique sur $\mathcal{R}e(s) > 1$.

Théorème 2.5. *La fonction ζ se prolonge en une fonction méromorphe sur le demi-plan*
$\mathcal{R}e(s) > 0$, avec un unique pôle, d'ordre 1, en $s = 1$.

2.6 La fonction L de Dirichlet

Caractères d'un groupe abélien fini

Définition 2.3. *Soit G un groupe abélien fini. On appelle l'homomorphisme $\chi : \ G \longrightarrow \mathbb{C}^*$ un caractère de G. Les caractères de G forment le groupe $(Hom(G, \mathbb{C}^*), \times)$ qu'on note $\hat{G}$ et qu'on appelle dual de G.*

On définit l'unité e de $\hat{G}$ par $e(a) = 1$ pour tout $a \in G$.
Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On considère maintenant le groupe multiplicatif $\left(\dfrac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}\right)^*$ des éléments inversibles de l'anneau $\dfrac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}$. c'est un groupe abélien fini d'ordre $\varphi(m)$. Ce groupe admet donc $\varphi(m)$ caractère.

Caractères de Dirichlet

Définition 2.4. *E tant donné un caractère $\tilde{\chi}$ de $\left(\dfrac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}\right)^*$, on appelle caractère modulo m (caractère de Dirichlet) associé à $\tilde{\chi}$ l'application χ de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $\chi(a) = \tilde{\chi}(\bar{a})$ si $pgcd(a, m) = 1$ ($\bar{a}$ désigne la classe de a dans $\left(\dfrac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}\right)^*$), et $\chi(a) = 0$ si $pgcd(a, m) \neq 1$.*

On remarque que si χ est un caractère modulo m, $\chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$ quels que soient les entiers a et b, c'est-à-dire χ est complètement multiplicative. On définit le caractère principal modulo m comme étant la fonction égale à 1 pour $pgcd(a, m) = 1$ et 0 sinon, c'est-à-dire la fonction indicatrice des entiers premiers à m.

$$\chi_0(a) = \begin{cases} 1 & \text{si,} \quad pgcd(a, m) = 1, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{2.3}$$

Définition 2.5. *Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et un caractère χ modulo m. On définit la fonction L de Dirichlet associée à χ par :*

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} \tag{2.4}$$

Comme $|\chi(n)n^{-s}| \leq n^{-\mathcal{R}e(s)}$, on voit que les termes de $L(s, \chi)$ sont dominés en valeur absolue par les termes correspondants de $\zeta(\mathcal{R}e(s))$. Donc $L(s, \chi)$ converge pour $\mathcal{R}e(s) > 1$.

2.7 Exemples de séries de Dirichlet

(1) **La fonction δ :** La série de Dirichlet associée à la fonction δ est

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\delta(n)}{n^s} = 1. \tag{2.5}$$

(2) **La fonction $\mathbb{1}$:** La série de Dirichlet associée à la fonction $\mathbb{1}$ est la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\mathbb{1}(n)}{n^s}$ qui converge absolument vers $\zeta(s)$ pour $\mathcal{R}e(s) > 1$, c'est-à-dire

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathbb{1}(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s), \quad \mathcal{R}e(s) > 1.$$

(3) **La fonction** $d(n)$ **:** On a $d = \mathbb{1} * \mathbb{1}$, donc, La série de Dirichlet associée à la fonction $d(n)$ converge absolument pour $\mathcal{R}e(s) > 1$ vers ζ^2, c'est-à-dire

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d(n)}{n^s} = (\zeta(s))^2, \quad \mathcal{R}e(s) > 1. \tag{2.6}$$

(4) **La fonction** $id(n)$ **:** La série de Dirichlet associée à la fonction $id(n)$ converge absolument pour $\mathcal{R}e(s) > 2$ et on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{id(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{s-1}} = \zeta(s-1), \quad \mathcal{R}e(s) > 2. \tag{2.7}$$

(5) **La fonction** $\sigma(n)$ **:** On a $\sigma = id * \mathbb{1}$, donc La série de Dirichlet associée à la fonction $\sigma(n)$ converge absolument pour $\mathcal{R}e(s) > 2$, avec de plus

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sigma(n)}{n^s} = \zeta(s)\zeta(s-1), \quad \mathcal{R}e(s) > 2. \tag{2.8}$$

(6) **La fonction** $\mu(n)$ **:** Puisque $|\mu(n)| \leq 1$, la série de Dirichlet de μ, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$ converge absolument pour $\mathcal{R}e(s) > 1$, comme $\mu * \mathbb{1} = \delta$, alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}, \quad \mathcal{R}e(s) > 1. \tag{2.9}$$

(7) **La fonction** $\varphi(n)$ **:** On sait que $\varphi = id * \mu$, alors La série de Dirichlet associée à la fonction $\varphi(n)$ converge absolument pour $\mathcal{R}e(s) > 2$, est donnée par

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}, \quad \mathcal{R}e(s) > 2. \tag{2.10}$$

(8) **La fonction** $s(n)$ **:** On a $s(n) = \begin{cases} 1 & \text{si}, \quad n = m^2, \quad (m \in \mathbb{N}^*) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

La série de Dirichlet associée à la fonction $s(n)$ est donnée par

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{m^{2s}} = \zeta(2s), \quad \mathcal{R}e(s) > 1/2. \tag{2.11}$$

(9) **La fonction** $\mu^2(n)$ **:** La fonction $\mu^2(n)$ vérifier l'identité $\mu^2 * s = \mathbb{1}$, donc La série de Dirichlet associée à la fonction $\mu^2(n)$ est la série :

$F(s) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\mu^2(n)}{n^s}$ qui converge absolument pour $\mathcal{R}e(s) > 1$, d'où $F(s)\zeta(2s) = \zeta(s)$, ceci implique que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu^2(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}, \quad \mathcal{R}e(s) > 1. \tag{2.12}$$

(10) **La fonction** $\log(n)$ **:** Pour $\mathcal{R}e(s) > 1$, on a $\zeta'(s) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\log(n)}{n^s}$, d'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(n)}{n^s} = -\zeta'(s), \quad \mathcal{R}e(s) > 1. \tag{2.13}$$

(11) **La fonction** $\Lambda(n)$ **:** La fonction $\Lambda(n)$ vérifier l'identité $\Lambda * \mathbb{1} = \log$, donc pour $\mathcal{R}e(s) > 1$ on a $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\Lambda(n)}{n^s}\zeta(s) = -\zeta'(s)$, d'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}, \quad \mathcal{R}e(s) > 1. \tag{2.14}$$

(12) **La fonction** $\lambda(n)$ **:** La fonction $\lambda(n)$ vérifier l'identité $\lambda * \nVdash = s$, donc pour $\mathcal{R}e(s) > 1$ on a $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\lambda(n)}{n^s}\zeta(s) = \zeta(2s)$, d'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s} = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}, \quad \mathcal{R}e(s) > 1. \tag{2.15}$$

2.8 Produit Eulérien

2.8.1 Produits infinis

Définition 2.6. *[3] Soit $(f_n(s))_n$ une suite de fonctions continues dans un ouvert U de $\mathbb{C}$. On dit que le produit infini $\prod\limits_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur une partie $A \subset U$ si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *On a $\lim\limits_{n} f_n(s) = 1$ uniformément sur A.*
2. *La série de terme général $\ln(f_n(s))$ qui est définie pour n assez grand, converge normalement sur A.*
   Si on pose $f_n = 1 + u_n$, une condition équivalente pour que le produit infini $\prod\limits_{n\geq 1} f_n$, converge normalement sur A ,il faut et il suffit que la série $\sum\limits_{n} u_n$ converge normalement sur A.

Définition 2.7. *Soit $(f_n(s))_n$ une suite de fonctions continues dans un ouvert U de $\mathbb{C}$. On dit que le produit infini $\prod_{n\geq 1}(1+f_n)$ converge absolument si le produit $\prod_{n\geq 1}(1+|f_n|)$ converge.*

Proposition 2.3. *[7] Soit $(f_n(s))_n$ une suite de fonctions continues dans un ouvert U de $\mathbb{C}$.*

1. *Si le produit infini $\prod_{n\geq 1}(1+f_n)$ est converge absolument, alors il est converge et de plus on a*
$$\left|\prod_{n\geq 1}(1+f_n)\right| \leq \prod_{n\geq 1}(1+|f_n|)$$
2. *Si $w = \prod_{n\geq 1}(1+f_n)$ est converge absolument alors $w = 0$ si et seulement si il existe $m \geq 1$ tel que $f_m = -1$.*
3. *Si $f_n \geq 0$ pour tout n, alors le produit $\prod_{n\geq 1}(1+f_n)$ est converge absolument si et seulement si la série $\sum_{n\geq 1} f_n$, est absolument convergente.*
4. *Soit $f_n : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ telle que $\sum_{n\geq 1} f_n(s)$ converge uniformément sur les compacts dans U. Alors le produit infini*
$$f(s) = \prod_{n\geq 1}(1+f_n(s))$$
converge absolument pour $s \in U$, et uniformément sur ces compacts. De plus, la fonction f est une fonction holomorphe sur U.

2.8.2 Formule du Produit Eulérien

Le théorème suivant, découvert par Euler en 1737, est parfois appelé la version analytique du théorème fondamental de l'arithmétique.

Théorème 2.6. *Soit f une fonction arithmétique multiplicative telle que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} |f(n)|$ soit convergente.*

1. *Pour tout nombre premier p, la série $\sum_{m=0}^{+\infty} f(p^m) = 1 + \sum_{m=1}^{+\infty} f(p^m)$ est absolument convergente et on a*
$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) = \prod_{p}(1 + f(p) + f(p^2) + \cdots) \tag{2.16}$$

2. *Si la fonction f est complètement multiplicative alors*
   (a) *Quel que soit p un nombre premier, on a $|f(p)| < 1$.*
   (b) *La série $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ se met sous la forme*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) = \prod_{p} \left(\frac{1}{1 - f(p)} \right) \tag{2.17}$$

Preuve 2.11.

1. *Pour tout nombre premier p, on a*

$$1 + \sum_{m=1}^{+\infty} |f(p^m)| \leq \sum_{m=0}^{+\infty} |f(n)|$$

qui est convergente. donc la série $1 + \sum_{m=1}^{+\infty} f(p^m)$ est absolument convergente.

• *Soit $x \geq 2$, on pose*

$$p(x) = \prod_{p \leq x} \left(1 + \sum_{m=1}^{+\infty} f(p^m) \right)$$

qui est un produit fini de séries absolument convergentes. Si on note les nombres premiers qui sont x par $p_1, p_2, \cdots, p_r$, on peut écrire $p(x)$ sous la forme suivante

$$p(x) = \prod_{p \leq x} \left(1 + \sum_{m=1}^{+\infty} f(p_1^m) \right) \times \prod_{p \leq x} \left(1 + \sum_{m=1}^{+\infty} f(p_2^m) \right) \times \cdots \times \prod_{p \leq x} \left(1 + \sum_{m=1}^{+\infty} f(p_r^m) \right)$$

Puisque le produit est fini, les séries sont absolument convergentes et la fonction f est multiplicative, alors on peut effectuer le produit et arranger ses termes sous la forme d'une somme de la façon suivante

$$p(x) = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r \in \mathbb{N}} f(p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots \times p_r^{\alpha_r}) = \sum_{n \in A} f(n)$$

où A est l'ensemble des nombres $n \in \mathbb{N}^*$ dont les facteurs premiers p sont $\leq x$,
$A = \{n \in \mathbb{N}^* : \ (p$ *premier et* $p|n) \Rightarrow p \leq x\}$. *On aura alors*

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} f(n) - p(x) \right| = \left| \sum_{n \in B} f(n) \right| \leq \sum_{n \in B} |f(n)|$$

où B est l'ensemble des nombres $n \in \mathbb{N}^*$ dont les facteurs premiers p sont $> x$,
$B = \{n \in \mathbb{N}^* :\ (p \text{ premier et } p|n|) \Rightarrow p > x\}$. *La définition de B montre clairement que $n \in B, n > x$. Alors*

$$\sum_{n\in B} |f(n)| \leq \sum_{n>x} |f(n)| \longrightarrow 0\ (x \longrightarrow +\infty).$$

$\sum\limits_{n>x} |f(n)| \longrightarrow 0$ *car c'est le reste de la série convergente* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f(n)|$. *Donc*

$$\lim_{x\to+\infty} \left| \sum_{n=1}^{+\infty} f(n) - p(x) \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} f(n) - \lim_{x\to+\infty} p(x) = 0$$

Par suite

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) = \lim_{x\to+\infty} p(x) = \prod_{p} (1 + f(p) + f(p^2) + \cdots)$$

2. (a) *Puisque la série* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |f(n)|$ *est convergente alors son terme général* $f(n) \longrightarrow 0, (n \to +\infty)$, *par suite il existe $N_0 > 1$ tel que*

$$|f(n)| < 1,\ (\forall n \geq n_0).$$

Supposons qu'il existe un nombre premier p vérifiant $|f(p)| \geq 1$. Alors il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $p^m > N_0$, et on aura alors $|f(p^m)| = |f(p)|^m \geq 1$, contradiction.

(b) *En vertu de (a), l'égalité*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) = \lim_{x\to+\infty} p(x) = \prod_{p} (1 + f(p) + f(p^2) + \cdots),$$

devient

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) &= \prod_{p} (1 + f(p) + f(p^2) + \cdots),\\ &= \prod_{p} (1 + f(p) + f(p)^2 + \cdots),\\ &= \prod_{p} \left(\frac{1}{1 - f(p)} \right)\end{aligned}$$

car la somme $\sum\limits_{n\geq n_0} f(p)^n$ *est une progression géométrique de raison* $f(p)$.

■

Le résultat suivant montre qu'une série de Dirichlet associée à une fonction arithmétique multiplicative admet une représentation en produit infini sur son demi-plan de convergence absolue. Cette représentation qui fait intervenir un produit qui porte uniquement sur les nombres premiers est fondamentale en arithmétique.

Théorème 2.7. *Soient f une fonction arithmétique multiplicative et σ_a l'abscisse de convergence absolue de la série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s}$. Alors*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_p \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(p^n)}{p^{ns}} \right), \quad \mathcal{R}e(s) > \sigma_a. \tag{2.18}$$

Et si f est complètement multiplicative, alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{f(p)}{p^s} \right)^{-1}, \quad \mathcal{R}e(s) > \sigma_a. \tag{2.19}$$

Preuve 2.12. *Découle immédiatement du théorème (2.6).*

■

2.8.3 Exemples de produit Eulérien

(1) **La fonction Zêta de Riemann :** Le produit eulérien le plus célèbre est celui de la fonction zêta de Riemann, ζ est la série de Dirichlet associée à la fonction constante $\mathbb{1}$;, D'après le théorème (2.7) ,on a

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}, \quad \mathcal{R}e(s) > 1. \tag{2.20}$$

(2) **La fonction de Mobius :** On a μ est multiplicative et la série de Dirichlet $D_\mu(s)$ converge absolument pour $\mathcal{R}e(s) > 1$. D'après (2.9) son produit eulérien est

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \prod_p (1 - p^{-s}), \quad \mathcal{R}e(s) > 1. \tag{2.21}$$

(3) **La fonction φ :** Pour $\mathcal{R}e(s) > 2$, on a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$, d'où la relation (2.20) implique que

$$\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1 - p^{-s}}{1 - p^{1-s}}, \quad \mathcal{R}e(s) > 2. \tag{2.22}$$

(4) **La fonction** λ **:** Pour $\mathcal{R}e(s) > 1$, on a $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s} = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}$, d'après (2.20).on obtient

$$\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1+p^{-s}}, \quad \mathcal{R}e(s) > 1. \tag{2.23}$$

(5) **La fonction** χ **:** Soient $k \geq 1$ (k entier) et χ un caractère modulo k puisque χ est complètement multiplicative, d'après le théorème (2.7) on a

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1-\chi(p)p^{-s}}, \quad \mathcal{R}e(s) > 1. \tag{2.24}$$

(6) **La fonction** χ_0 **:** Pour $\chi = \chi_0$ le caractère principal modulo k, on a

$$L(s,\chi_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\chi_0(n)}{n^s} = \prod_{p \nmid k} \frac{1}{1-p^{-s}} = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} \prod_{p|k} (1-p^{-s}),$$

d'où

$$L(s,\chi_0) = \zeta(s) \prod_{p|k} (1-p^{-s}), \quad \mathcal{R}e(s) > 1. \tag{2.25}$$

(7) **La fonction** f_p **:** $f_{\mathcal{P}}$ est complètement multiplicative, donc d'après le théorème (2.7), on a $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{f_{\mathcal{P}}(n)}{n^s} = \prod\limits_{p \notin \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$, d'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f_{\mathcal{P}}(n)}{n^s} = \zeta(s) \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right), \quad \mathcal{R}e(s) > 1. \tag{2.26}$$

Chapitre 3

Série de deux variable de Dirichlet

3.1 Fonctions arithmétiques multiplicatives et additives de deux variables

Fonction arithmétique de deux variable

Définition 3.1. *On appelle fonction arithmétique de deux ($n \in \mathbb{N}^*$) variables tout application f définie de $(\mathbb{N}^*)^2$ dans le corps $\mathbb{C}$.*
On désigne par $\mathcal{A}_2$ l'ensemble des fonctions arithmétiques de deux variables.

Définition 3.2. *(voir [10], [9], [17])*
Soit $f \in \mathcal{A}_2$. On dit que f est multiplicative si f est non identiquement nulle et elle vérifiée la propriété suivante :

$$f(m_1n_1, m_2n_2) = f(m_1, m_2)f(n_1, n_2)$$

pour tout $m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$ tels que $\gcd(m_1m_2, n_1n_2) = 1$. *On désigne par $\mathcal{M}_2$ l'ensemble des fonctions arithmétiques multiplicatives de deux variables.*

Remarque 3.1. *Si $f \in \mathcal{A}_2$ est multiplicative, alors $f(1,1) = 1$.*
En autre ,une fonction multiplicative est complètement déterminée par les valeurs $f(p^{\nu_1}, p^{\nu_2})$, où p parcourt tous les nombres premiers et $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{N}$.De plus on peut écrit

$$f(n_1, n_2) = \prod_p f(p^{v_p(n_1)}, p^{v_p(n_2)}), \quad \textit{pour tout} \;\; n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*. \tag{3.1}$$

Fonction fermement multiplicative

Définition 3.3. *Soit $f \in \mathcal{A}_2$. On dit que f est fermement multiplicative(voir [5]) si f est non identiquement mule et elle vérifiée*

$$f(m_1n_1, m_2n_2) = f(m_1, m_2)f(n_1, n_2)$$

pour tout $m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$ tels que $\gcd(m_1, n_1) = \gcd(m_2, n_2) = 1$. *On désigne par $\mathcal{F}_2$ l'ensemble des fonctions arithmétiques de deux variables fermement multiplicatives .*

Remarque 1. *Si $f \in \mathcal{A}_2$ est fermement multiplicative, alors $f(1,1) = 1$. En autre, une fonction fermement multiplicative est complètement déterminée par ses valeurs à $(1,1,p^\nu,1,1)$, où p parcourt tous les nombres premiers et $\nu \in \mathbb{N}$. On peut écrit*

$$f(n_1,n_2) = \prod_p \left(f(p^{v_p(n_1)},1) f(1,p^{v_p(n_2)}) \right), \quad \textit{pour tout} \quad n_1,n_2 \in \mathbb{N}^*. \quad (3.2)$$

Lemme 3. *Tout fonction $f \in \mathcal{A}_2$ fermement multiplicative est multiplicative. Ainsi, Si $f \in \mathcal{F}_2$, alors pour tout $n_1,n_2 \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$f(n_1,n_2) = f(n_1,1)f(1,n_2). \quad (3.3)$$

De ce Lemme on obtient immédiatement la propriété suivante :

Proposition 3.1. *Une fonction $f \in \mathcal{A}_2$ est fermement multiplicative si et seulement s'il existe des fonctions multiplicatives $f_1, f_2 \in \mathcal{M}_1$ (d'une seule variable) telles que*

$$f(n_1,n_2) = f_1(n_1)f_2(n_2) \quad \textit{pour tout} \quad n_1,n_2 \in \mathbb{N}^*.$$

Dans ce cas

$$f_1(n) = f(n,1), f_2(n) = f(1,n) \quad \textit{pour chaque} \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Dans le cas de fonctions à une seule variable ,la notion d'une fonction fermement multiplicative se réduit à celle d'une fonction multiplicative. Pour deux variable les concepts d'une fonction multiplicative et d'une fonction fermement multiplicative sont différents.

Fonction complètement multiplicative

Définition 3.4. *Soit $f \in \mathcal{A}_2$. On dit que f est complètement multiplicative si $f \neq 0$ et*

$$f(m_1n_1, m_2n_2) = f(m_1,m_2)f(n_1,n_2)$$

pour tout $m_1,m_2,n_1,n_2 \in \mathbb{N}^*$. On désigne par $\mathcal{C}_2$ l'ensemble des fonctions arithmétiques de deux variables complètement multiplicatives. Notons que R. Vaidyanathaswamy [17] utilise le terme "fonction linéaire " pour désigner des telles fonctions.

Proposition 3.2. *Une fonction $f \in \mathcal{A}_2$ est complètement multiplicative si et seulement s'il existe des fonctions d'une seule variable $f_1, f_2 \in \mathcal{C}_1$ complètement multiplicatives telles que*

$$f(n_1,n_2) = f_1(n_1)f_2(n_2) \quad \textit{pour tout} \quad n_1,n_2 \in \mathbb{N}^*.$$

Dans ce cas

$$f_1(n) = f(n,1), f_2(n) = f(1,n) \quad \textit{pour chaque} \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

fonction arithmétique additive

Définition 3.5. *Soit $f \in \mathcal{A}_2$.*

1. *On dit que f est additive si $f(1,1) = 0$ et*

$$f(m_1 n_1, m_2 n_2) = f(m_1, m_2) + f(n_1, n_2)$$

pour tout $m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$ tels que $\gcd(m_1 m_2, n_1 n_2) = 1$.

2. *On dit que f est fermement additive si $f(1,1) = 0$ et*

$$f(m_1 n_1, m_2 n_2) = f(m_1, m_2) + f(n_1, n_2)$$

pour tout $m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$ tels que $\gcd(m_1, n_1) = \gcd(m_2, n_2) = 1$.

3. *On dit que f est complètement additive si $f(1,1) = 0$ et*

$$f(m_1 n_1, m_2 n_2) = f(m_1, m_2) + f(n_1, n_2)$$

pour tout $m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$.

Exemple 3.1.

1. *Les fonctions $(n_1, n_2) \longmapsto \gcd(n_1, n_2)$ et $(n_1, n_2) \longmapsto lcm[n_1, n_2]$ sont multiplicatives pour tout $2 \in \mathbb{N}^*$*
2. *Les fonctions $(n_1, n_2) \longmapsto n_1 n_2$ et $(n_1, n_2) \longmapsto n_1 \lambda(n_2)$ sont complètement multiplicatives.*
3. *Les fonctions $(n_1, n_2) \longmapsto d(n_1) d(n_2)$ et $(n_1, n_2) \longmapsto d(n_1)\sigma(n_2)$ sont fermement multiplicatives, mais non pas complètement multiplicatives.*
4. *Soient $h \in \mathcal{M}_1$ et $f \in \mathcal{M}_2$. Alors Les fonctions $(n_1, n_2) \longmapsto h(n_1)h(n_2)$ et $(n_1, n_2) \longmapsto h(f(n_1, n_2))$ sont multiplicatives. En particulier, les fonctions $(n_1, n_2) \longmapsto h(\gcd(n_1, n_2))$ et $(n_1, n_2) \longmapsto h(lcm[n_1, n_2])$ sont multiplicatives.*
5. *Le produit et le quotient des fonctions multiplicatives sont multiplicatives.*
6. *Si $f \in \mathcal{M}_2$, alors la fonction $\bar{f} \in \mathcal{A}_1$ définie par : $\bar{f}(n) = f(n, n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ est multiplicative.*

Définition 3.6. *On définit la fonction σ de deux variables par :*

$$\sigma(n_1, n_2) = \sum_{d_1 | n_1, d_2 | n_2} \gcd(d_1, d_2). \tag{3.4}$$

Théorème 3.1. *[6] Pour tout $m, n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $\sigma(n_1, n_2)$ peut être écrit sous la forme suivante :*

$$\sigma(n_1, n_2) = \sum_{d \mid \gcd(m,n)} \varphi(d) d(m/d) d(n/d). \tag{3.5}$$

Preuve 3.1. *on a $\sigma(m, n) = \sum_{a|m, b|n} \gcd(a, b)$, on utilise la formule de Gauss $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$, on obtient*

$$\begin{aligned}
\sigma(m,n) &= \sum_{a|m,b|n} \sum_{d \mid \gcd(a,b)} \varphi(d) \\
&= \sum_{\substack{ax=m \\ by=n}} \sum_{\substack{di=a \\ dj=b}} \varphi(d) \\
&= \sum_{\substack{dix=m \\ djy=n}} \varphi(d) \\
&= \sum_{\substack{du=m \\ dv=n}} \varphi(d) \sum_{\substack{ix=u \\ jy=v}} 1 \\
&= \sum_{\substack{du=m \\ dv=n}} \varphi(d) d(u) d(v) \\
&= \sum_{d \mid \gcd(m,n)} \varphi(d) d(m/d) d(n/d).
\end{aligned}$$

■

Corollaire 3.1. *Pour tout $n_1, n_2 \in (\mathbb{N}^*)^2$, on a*

$$\sigma(n_1, n_2) = \sum_{d \mid \gcd(n_1,n_2)} \varphi(d) d(n_1/d) d(n_2/d). \tag{3.6}$$

3.2 Convolutions de fonctions arithmétiques de deux variables

La convolution de Dirichlet

Définition 3.7. *Soient $f, g \in \mathcal{A}_2$. Le produit de convolution de f et g est la fonction $f * g$ définie par :*

$$(f * g)(n_1, n_2) = \sum_{d_1|n_1, d_2|n_2} f(d_1, d_2 g(n_1/d_1, n_2/d_2). \tag{3.7}$$

On peut définir le produit de convolution de la manière suivante :

Définition 3.8. *Soient $f, g \in \mathcal{A}_2$. Le produit de convolution $f * g$ est donné par :*

$$(f * g)(n_1, n_2) = \sum_{\substack{a_i b_i = n_i \\ a_i, b_i \in \mathbb{N} \\ i=1,2}} f(a_1, a_2) g(b_1, b_2). \tag{3.8}$$

Remarque 3.2.

1. *L'ensemble $(\mathcal{A}_2, +, *)$ est un anneau commutative, l'élément neutre pour la convolution est la fonction δ_2 donné par :*

$$\delta_2(n_1, n_2) = \begin{cases} 1 & si \;\; n_1 = n_2 = 1, \\ 0 & autrement \end{cases} \tag{3.9}$$

2. *Une fonction $f \in \mathcal{A}_2$ est inversible si et seulement si $f(1,1) \neq 0$*
3. *La fonction constante $\nVdash_2$ dans $\mathcal{A}_2$ est définie par : $\nVdash_2(n_1, n_2) = 1$ pour tout*
$n_1, n_2, \in \mathbb{N}^*$. L'inverse de la fonction $\nVdash_2$ est la fonction μ_2 définie par :

$$\mu_2(n_1, n_2) = \mu(n_1)\mu(n_2) \tag{3.10}$$

4. *Si $f, g \in \mathcal{F}_2$, avec les notations de la proposition (3.1), on a*

$$(f * g)(n_1, n_2) = (f_1 * g_1)(n_1)(f_r * g_2)(n_2)$$

et

$$f^{-1}(n_1, n_2) = (f_1^{-1})(n_1)(f_2^{-1})(n_2)$$

D'où $f * g \in \mathcal{F}_2$ et $f^{-1} \in \mathcal{F}_2$. on en déduit

$$(\mathcal{F}_2, *) \leq (\mathcal{M}_2, *)$$

Lemme 4. *[16] Pour tout fonction $f \in \mathcal{A}_2^{(1)}$, l'inverse $f^{-1} \in \mathcal{A}_2^{(1)}$ peut être construit de manière récursive comme suit;*

$$f^{-1}(1,1) = \frac{1}{(1,1)}$$

$$f^{-1}(n_1, n_2) = -\frac{1}{f(1,1)} \sum_{\substack{a_i b_i = n_i \\ b_i \neq n_i \\ i=1,2}} f(a_1, a_2) f^{-1}(b_1, b_2), \quad (n_1, n_2) \neq (1,1)$$

3.3 Série de Dirichlet de deux variable

Définition 3.9. *Soit $f \in \mathcal{A}_2$. La série de deux varible de Dirichlet associée a f est donnée par :*

$$D(f, s_1, s_2) = \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} \frac{f(n_1, n_2)}{n_1^{s_1} n_2^{s_2}}. \tag{3.11}$$

Remarque 2. *Comme dans le cas d'une seule variable, si $D(f; s_1, s_2)$ est absolument convergente en tout point $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, alors elle est absolument convergente en tout point $(s_1, s_2) \in \mathbb{C}^2$ avec $\mathcal{R}e(s_j) \geq \mathcal{R}e(z_j)$ $(1 \leq j \leq 2)$.*

Proposition 3.3. *[10] Soient $f, g \in \mathcal{A}_2$. Si $D(f; s_1, s_2)$ et $D(g; s_1, s_2)$ sont absolument convergentes, alors $D(f * g; s_1, s_2)$ est également absolument convergente et*

$$D(f * g; s_1, s_2) = D(f; s_1, s_2) D(g; s_1, s_2).$$

Ainsi, si $f \in \mathcal{A}_2^{(1)} = \{f \in \mathcal{A}_2 : \ f(1,1) \neq 0\}$,alors

$$D(f^{-1}; s_1, s_2) = D(f; s_1, s_2)^{-1},$$

il en est de mème dans le cas d'une série absolument convergente.

3.4 Produit Eulérien généralisé

Définition 3.1. *Une partie A de $\mathbb{N}^*$ est dite multiplicative si, et seulement si, elle contient 1 et vérifie*

$$\forall m, n \in \mathbb{N}^* : \ n \in A \wedge m \in A \Leftrightarrow nm \in A$$

Cette définition implique immédiatement que toute partie multiplicative contenant un nombre n différent de 1 est infinie, car elle contiendrait la partie infinie $\{n^\alpha \ / \alpha \in \mathbb{N}\}$.
À titre d'exemple, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ et tout r-uplet $(n_1, \cdots, n_r)$ dans $(\mathbb{N}^*)^r$ la partie

$$A = \left\{ n \ / \text{il existe } (n_1, \cdots, n_r) \in (\mathbb{N}^*)^r \text{ avec } (n_1, \cdots, n_r) = 1 \text{ et } n = \prod_{i=1}^{r} n_i \right\}$$

est multiplicative. On a le résultat suivant

Théorème 3.2. ***(produit d'Euler généralisé)***
Pour toute fonction arithmétique multiplicative f et toute partie multiplicative A de $\mathbb{N}^*$ contenant une infinité de nombres premiers telle que $\sum_{n\in \mathrm{A}} |f(n)| < \infty$, *on a*

$$\sum_{n\in \mathrm{A}} f(n) = \prod_{p\in \mathrm{A}} \left(1 + f(p) + f(p^{\alpha}) + \cdots\right) \tag{3.12}$$

Si de plus la fonction f est complètement mutiplicative, alors pour tout $p \in \mathrm{A}$, on a $|f(p)| < 1$ et la formule (1) devient

$$\sum_{n\in \mathrm{A}} f(n) = \prod_{p\in \mathrm{A}} \frac{1}{1 - f(p)}. \tag{3.13}$$

Preuve 3.2. *Soit $x \in \mathbb{R}$ suffisamment grand et $\{p_1, \ldots, p_r\}$ l'ensemble des nombres premiers de A qui sont $\leq x$. On pose*

$$p(x) = \prod_{p\leq x,\ p\in \mathrm{A}} \left(1 + f(p) + f(p^{\alpha}) + \cdots\right).$$

La quantité $p(x)$ est un produit fini de séries absolument convergentes. Puisque la fonction $f(n)$ est multiplicative et A est une partie multiplicative, alors $p(x) = \sum_{n\in \mathrm{X}} f(n)$ *où*

$$\mathrm{X} = \{p_1^{\alpha_1} \times \cdots \times p_r^{\alpha_r} \ / \ \alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{N}\} \subset \mathrm{A}.$$

On a donc

$$\sum_{n\in \mathrm{A}} f(n) - p(x) = \sum_{n\in \mathrm{A}-\mathrm{X}} f(n).$$

Montrons que tout $n \in \mathrm{A} - \mathrm{X}$ admet au moins un facteur premier $p \in \mathrm{A}$ et $p > x$. Soit $n \in \mathrm{A} - \mathrm{X}$. On a $n \geq 2$ car $1 \in \mathrm{A} \cap \mathrm{X}$ donc $1 \notin \mathrm{A} - \mathrm{X}$. Ecrivons $n = q_1^{\beta_1} \times \cdots \times q_s^{\beta_s}$ où $s \in \mathbb{N}^*$, $q_1, \ldots, q_s$ des nombres premiers et $\beta_i \in \mathbb{N}^*$ $(\forall i)$. Puisque $n \in \mathrm{A}$ alors $\{q_1, \ldots, q_s\} \subset \mathrm{A}$. Si on suppose que $q_i \leq x$ $(\forall i)$, alors la multiplicativité de A impliquerait que $n \in \mathrm{X}$ contradiction avec le fait que $n \notin \mathrm{X}$. On en déduit qu'il existe au moins $q \in \{q_1, \ldots, q_s\}$ tel que $q > x$. De là vient que $n \in \mathrm{A} - \mathrm{X} \Rightarrow (n \in A$ et $n > x)$ ce qui implique que

$$\left|\sum_{n\in \mathrm{A}} f(n) - p(x)\right| \leq \sum_{n\in \mathrm{A}-\mathrm{X}} |f(n)| \leq \sum_{n\in \mathrm{A},\ n>x} |f(n)| \to 0 \ \ (x \to +\infty).$$

Alors

$$\sum_{n\in \mathrm{A}} f(n) = \lim_{x\to+\infty} p(x) = \prod_{p\in \mathrm{A}} \left(1 + f(p) + f(p^{\alpha}) + \cdots\right).$$

On suppose que la fonction f est complètement multiplicative. Soit $p \in \mathrm{A}$ un nombre premier. Puisque la série $\sum_{n\in\mathrm{A}} f(p^n) = \sum_{n\in\mathrm{A}} (f(p))^n$ est convergente alors la suite $(f(p^n))_n = ((f(p))^n)_n$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$, alors il existe N_0 tel que $|f(p)|^n < 1$ pour $n \geq N_0$ ce qui implique que $|f(p)| < 1$. L'inégalité $|f(p)| < 1$ pour tout $p \in \mathrm{A}$ implique que

$$\prod_{p\in\mathrm{A}} (1 + f(p) + f(p^\alpha) + \cdots) = \prod_{p\in\mathrm{A}} \left(\frac{1}{1-f(p)}\right).$$

Proposition 3.4. *Soient $f \in \mathcal{M}_2$ et $\sigma_a = (\sigma_{1a}, \sigma_{2a})$ l'abscisse de convergence absolue de la série multiple de Dirichlet $D(f, s_1, s_2) = \sum_{n_1,n_2=1}^{\infty} \frac{f(n_1,n_2)}{n_1^{s_1} n_2^{s_2}}$, alors*

$$D(f; s_1, s_2) = \prod_p \sum_{\nu_1,\nu_2=0}^{\infty} \frac{f(p^{\nu_1}, p^{\nu_2})}{p^{\nu_1 z_1 + \nu_2 z_2}}, \quad \mathcal{R}e(s_j) \geq \sigma_{j_a} \ (1 \leq j \leq 2). \quad (3.14)$$

Proposition 3.5. *Soit $f \in \mathcal{M}_2$. Pour tout $(s_1, s_2) \in \mathbb{C}^2$, la série $D(f; s_1, s_2)$ est absolument convergente si et seulement si*

$$\prod_p \sum_{\substack{\nu_1,\nu_2=0 \\ \nu_1+\nu_2\geq 1}}^{\infty} \frac{|f(p^{\nu_1}, p^{\nu_2})|}{p^{\nu_1 \mathcal{R}e(z_1) + \nu_2 \mathcal{R}e(z_2)}} < \infty.$$

Théorème 3.3. *[16] Soit $f \in \mathcal{A}_2^{(1)}$ et $D(f; s_1, s_2)$ la série multiple se Dirichlet associée. On suppose qu'il existe $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n_1, n_2 \in (\mathbb{N}^* - \{1\})^2$, on a*

$$f(n_1, n_2) = O(n_1^{l_1} n_2^{l_2}).$$

Alors la série $D(f; s_1, s_2)$ converge absolument dans

$$\{(s_1, s_2) \in \mathbb{C}^2 |\ \mathcal{R}e(s_j) > 1 + l_j \ (j = 1, 2)\}.$$

Corollaire 3.2. *[16] Soit $f \in \mathcal{A}_2^{(1)}$. Si $D(f; s_1, s_2)$ et $D(f^{-1}; s_1, s_2)$ sont absolument convergentes sur $R \subset \mathbb{C}^r$, alors $D(f; s_1, s_2)$ n'a pas de zéros dans R.*

Preuve 3.3. *Soit $(s_1, s_2) \in R$. En appliquant la proposition (3.3), on obtient*

$$D(f; s_1, s_2) D(f^{-1}; s_1, s_2) = D(\delta_2; s_1, s_2) = 1.$$

$\blacksquare$

Lemme 5. *[16] Pour $\alpha > 1$, on a*

$$\sum_{d|n} d^{\alpha} \leq n^{\alpha}\zeta(\alpha).$$

Preuve 3.4. *On a*

$$\sum_{d|n} d^{\alpha} = n^{\alpha}\sum_{d|n}\left(\frac{d}{n}\right)^{\alpha} = n^{\alpha}\sum_{d|n}\frac{1}{d^{\alpha}} \leq n^{\alpha}\zeta(\alpha).$$

■

Théorème 3.4. *[16] Soit $f \in \mathcal{A}_2^{(1)}$. On suppose qu'ils existent une constante $C > 0$ et $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ tels que $|f(n_1, n_2)| \leq C n_1^{l_1} n_2^{l_2}$.
pour tout $n_1, n_2 \in (\mathbb{N}^* - \{1\})^2$. On pose $\alpha_j > 1 + l_j$ $(j = 1, 2)$ vérifiant*

$$\zeta(\alpha_1 - l_1)\zeta(\alpha_2 - l_2) \leq 1 + |f(1,1)|/C$$

Alors ,on a

$$|f^{-1}(n_1, n_2)| \leq \frac{n_1^{l_1} n_2^{l_2}}{|f(1,1)|}$$

Preuve 3.5. *En preuve le théorème en procédant par induction sur $n_1 + n_2$. dans le cas où $n_1 + n_2 = 2$ i.e $(n_1, n_2) = (1,1)$, alors on a*

$$|f^{-1}(1,1)| = \frac{1}{|f(1,1)|}$$

En suite, doit $d > k$ on suppose que $|f^{-1}(n_1, n_2)| \leq \dfrac{n_1^{l_1} n_2^{l_2}}{|f(1,1)|}$ pour tout $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ satisfaisant $n_1 + n_2 < d$. Alors pour tout $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ vérifiant $n_1 + n_2 = d$, d'après le lemme (4), on obtient

$$\begin{aligned}
|f^{-1}(n_1, n_2)| &\leq \left|\frac{1}{f(1,1)}\right| \sum_{\substack{a_i b_i = n_i \\ b_i \neq n_i \\ i=1,2}} |f(a_1, a_2)||f^{-1}(b_1, b_2)| \\
&\leq \frac{C}{|f(1,1)|^2} \sum_{\substack{a_i b_i = n_i \\ b_i \neq n_i \\ i=1,2}} a_1^{l_1} b_1^{\alpha_1} a_2^{l_2} b_2^{\alpha_2} \\
&= \frac{C}{|f(1,1)|^2}\left\{ n_1^{l_1} n_2^{l_2} \left(\sum_{b_1|n_1} b_1^{\alpha_1 - l_1}\right)\left(\sum_{b_2|n_2} b_2^{\alpha_2 - l_2}\right) - n_1^{\alpha_1} n_2^{\alpha_2} \right\} \\
&\leq \frac{C}{|f(1,1)|^2}\left(\zeta(\alpha_1 - l_1) n_1^{\alpha_1} \zeta(\alpha_2 - l_2) n_2^{\alpha_2} - n_1^{\alpha_1} n_2^{\alpha_2}\right) \\
&\leq \frac{n_1^{l_1} n_2^{l_2}}{|f(1,1)|}.
\end{aligned}$$

Ce qui preuve le théorème.

$\blacksquare$

Théorème 3.5. *[16] Soient f et α_1, α_2 satisfaisant aux conditions du théorème (3.4). Alors $D(f; s_1, s_2)$ et $D(f^{-1}; s_1, s_2)$ n'ont pas de zéros dans la région*

$$\{(s_1, s_2) \in \mathbb{C}^2 |\ \mathcal{R}e(s_j) > 1 + \alpha_j\ (j = 1, 2)\}$$

De plus, dans la même région, $D(f; s_1, s_2)$ et $D(f^{-1}; s_1, s_2)$ vérifient la relation

$$(D(f; s_1, s_2))^{-1} = D(f^{-1}; s_1, s_2)$$

Preuve 3.6. *Comme $f(n_1, n_2) = O(n_1^{l_1} n_2^{l_2})$, alors $D(f; s_1, s_2)$ est absolument convergent dans*

$$\{(s_1, s_2) \in \mathbb{C}^2 |\ \mathcal{R}e(s_j) > 1 + l_j\ (j = 1, 2)\}$$

Comme $f^{-1}(n_1, n_2) = O(n_1^{\alpha_1} n_2^{\alpha_2})$, alors $D(f^{-1}; s_1, s_2)$ est absolument convergent dans

$$\{(s_1, s_2) \in \mathbb{C}^2 |\ \mathcal{R}e(s_j) > 1 + \alpha_j\ (j = 1, 2)\}$$

Nous obtenons donc le théorème en utilisant le corollaire (3.2)

$\blacksquare$

3.5 Calcul effectif de séries de Dirichlet de deux variable

Théorème 3.6. *Soient f une fonction arithmétique complètement multiplicative et $a \in \mathbb{R}$ tels que $\sum\limits_{n\geq 1} \left|\frac{f(n)}{n^s}\right| < \infty$ dans le demi plan $D_a = \{s \in \mathbb{C} \ \ / \ \Re(s) > a\}$. Pour tout $r-$uplet $(s_1, s_2,)$ $(r \geq 2)$ de nombres complexes dans D_a, on a*

$$\sum_{n_1=1}^{+\infty} \sum_{\substack{n_2=1 \\ (n_1,n_2)=1}}^{+\infty} \frac{f(n_1) f(n_2)}{n_1^{s_1} n_2^{s_2}} = \prod_{i=1}^{r} L(s_i, f) \prod_{p} \left(1 - \frac{(f(p))^r}{p^{s_1+s_2}}\right). \tag{3.15}$$

Pour la démonstration on utilise les lemmes préparatifs suivants :

Lemme 6. *Soient f une fonction arithmétique complètement multiplicative telle que*
$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{f(n)}{n^s}\right| < \infty$ *dans un domaine $D \subset \mathbb{C}$. Pour tout $s \in D$ et tout $m \in \mathbb{N}^*$,on a*

$$\sum_{\substack{n=1 \\ (n,m)=1}}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s} = L(s, f) \prod_{p|m} \left(1 - \frac{f(p)}{p^s}\right) \tag{3.16}$$

3.6 Applications

On applique le second théorème sur des fonctions arithmétiques complètement multiplicatives on obtient les formules suivantes :
Soient $s_1,\ s_2, \in D_1$ $(r=2)$ où $D_1 = \{s \in \mathbb{C} \ / \ \Re(s) > 1\}$.
1. La formule suivante a lieu

$$\sum_{\substack{n_1=1 \\ (n_1,n_2)=1}}^{+\infty} \sum_{n_2=1}^{+\infty} \frac{1}{n_1^{s_1} n_2^{s_2}} = \frac{\zeta(s_1)\zeta(s_2)}{\zeta(s_1+s_2)}.$$

L'origine de cette dernière formule est (cf.T.M.Apostol [1], (page 248, Ex. 15), (Voir la formule (17) dans [10]).
2. Pour tout nombre entier $k \geq 1$ et χ un caractère modulo k, on a

$$\sum_{\substack{n_1=1 \\ (n_1,n_2,)=1}}^{+\infty} \sum_{n_2=1}^{+\infty} \frac{\chi(n_1)\chi(n_2)}{n_1^{s_1} n_2^{s_2}} = \frac{L(s_1,\chi)L(s_2,\chi)}{L(s_1+s_2)}.$$

3. Pour $\chi = \chi_0$ le caractère principal modulo k, on a

$$\sum_{\substack{n_1=1 \\ (n_1,n_2)=1}}^{+\infty} \sum_{n_2=1}^{+\infty} \frac{\chi_0(n_1)\chi_0(n_2)}{n_1^{s_1} n_2^{s_2}} = \frac{\prod\limits_{m=1}^{2} \zeta(s_m) \prod\limits_{m=1}^{2} \prod\limits_{p|k} \left(1 - \frac{1}{p^{s_m}}\right)}{\zeta(s_1+s_2) \prod\limits_{p|k} \left(1 - \frac{1}{p^{s_1+s_2}}\right)}.$$

4. Soit $\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)}$ la fonction lambda de Liouville avec $\Omega(n) = \sum\limits_{p^k \| n} k$, on a

$$\sum_{\substack{n_1=1 \\ (n_1,n_2)=1}}^{+\infty} \sum_{n_2=1}^{+\infty} \frac{\lambda(n_1)\lambda(n_2)}{n_1^{s_1} n_2^{s_2}} = \prod_{i=1}^{2} \frac{\zeta(2s_i)}{\zeta(s_i)} \times \frac{1}{\zeta(s_1+s_2)}.$$

5. soient $\mathcal{P}$ un ensemble finie ou infinie des nombres premiers et f_p la fonction arithmétique définie par $f_p = 1$ si $p \notin \mathcal{P}$ et $f_p = 0$ si $p \in \mathcal{P}$. On a

$$\sum_{\substack{n_1=1 \\ (n_1,n_2)=1}}^{+\infty} \sum_{n_2=1}^{+\infty} \frac{f_p(n_1) f_p(n_2)}{n_1^{s_1} n_2^{s_2}} = \frac{\zeta(s_1)\zeta(s_2)}{\zeta(s_1+s_2)} \prod_{i=1}^{2} \prod_{p \in P} \left(1 - \frac{1}{p^{s_i}}\right) \prod_{p \in P} \left(1 - \frac{1}{p^{s_1+s_2}}\right)^{-1}. \tag{3.17}$$

Conclusion

Le but du mémoire est d'étudier les propriétés des fonctions arithmétiques et leur relation avec la série de dirichlet et d'essayer de généraliser les propriétés de la série de dirichlet á deux varibles et de trouver des moyens efficaces de les calculer et de les relier á la série de dirichlet bien connue

Bibliographie

[1] T. M. APOSTOL, *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer-Verlag Berlin, 1976.

[2] B. Amaziane and M.El Ossmani , *Convergence Analysis of an Approximation to Miscible Fluid Flows in Porous Media by Combining Mixed Finite Element and Finite Volume Methods,* Wiley InterScience (www.interscience.wiley.com). DOI 10.1002/num. 2029, 2007.

[3] H.CARTAN , *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes, HERMANN , éditeurs des sciences et des arts ,* 1997.

[4] . A. J. HILDEBRAND, Introduction to Analytic Number Theory, math 531 Lecture Notes , Fall 2005.

[5] P. Haukkanen, *Derivation of arithmetical functions under the Dirichlet convolution, International Journal of Number Theory ,Vol.*14*, No.* 05*, pp.* $1257 - 1264$*,* 2018.

[6] M. Hampejs, N. Holighaus ,L. Tóth, C. Wiesmeyr, On the subgroups of the group $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$, Preprint , 2012, arXiv :1211.1797 [math.GR].

[7] E.KOWALSKI , *Un cours de théorie analytique, Société Mathématique de France ,*2004*.*

[8] D.P.Parent , Exercices de Théoré des Nombres, Gauthier-Villars , Paris , 1978.

[9] R. Sivaramakrishnan, *Classical Theory of Arithmetic Functions, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics ,Vol.*126*.(Marcel Dekker ,Inc ,*1989*).*

[10] L. Tóth, Multiplicative arithmetic functions of several variables : a survey, in Mathematics Without Boundaries, Surveys in Pure Mathematics. Th. M. Rassias, P. Pardalos (Eds.), Springer, New York, 2014 , $483 - 514$. arXiv :1310.7053[math.NT]

[11] L. Tóth, *A survey of gcd-sum functions, J. Integer Sequences,* 13 (2010)*, Article* 10.8.1 ,23 *pp.*

[12] L.Tóth, Menon's identity and arithmetical sums representing functions of several variables, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec.Torino , $69(2011), 97-110$.

[13] L.Tóth, *Some remarks on a paper of V. A. Liskovets, Integers,* $12(2012), 97-111$.

[14] L.Tóth, Sums of products of Ramanujan sums, Ann. Univ. Ferrara, $58(2012), 183-197$.

[15] L. Tóth, *Two generalizations of the Busche-Ramanujan identities,Int.J. Number Theory,* $9(2013), 1301-1311$.

[16] TOMOKAZU ONOZUKA, The multiple Dirichlet product and the multiple Dirichlet series, Preprint , 2016 , arXiv :1601.05924v1 [math.NT].

[17] R. Vaidyanathaswamy, *The theory of multiplicative arithmetic functions, Trans. Amer.Math.Soc.,* 33(1931)*,* $579-662$.