RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN TIARET
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUES
Département de Mathématiques

MÉMOIRE DE MASTER

Présenter en vue de l'obtention du diplôme de master

Spécialité :
« Mathématiques »

Option :
« Analyse Fonctionnelle et Applications »

Présenté Par :

- **MERIDJA Kheira**
- **MECIF Imane**

Sous L'intitulé :

Étude l'existence et l'unicité de quelques problèmes d'équations différentielles d'ordre fractionnelle.

Soutenu publiquement le 26/05 /2024

À Tiaret devant le jury composé de :

Mr SOUID Mohammed Said	Professeur	Université Ibn Khaldon Tiaret	Président
Mr MOKHTARI Mokhtar	MCA	Université Ibn Khaldon Tiaret	Encadreur
Mr SOFRANI Mohamed	MCB	Université Ibn Khaldon Tiaret	Examinateur

Année universitaire : 2023/2024

بسم الله الرحمن الرحيم

{ وَآخِرُ دَعْوَاهُمْ أَنِ الْحَمْدُ لِلَّهِ رَبِّ الْعَالَمِينَ }

إني أشكر الله وافر الشكر على توفيقه لي واعانتي على إتمام دراستي العلمية.

لطالما تمنيت ان تقر عينه برؤيتي في يوم كهذا الى الذي يوسده التراب الى سر مناضلتي واجتهادي الى ابي الثاني ... ما أصعب الاشتياق لأحد لم تراه أبداً ولن يأتي مثله أحد، ولن يعوض مكانه أحد، الى من كانت سندا لي وونيسة روحي وفؤادي في المنام الى امي الغالية أسأل الله أن يغفر لكما ويرحمكما.

الى ضلعي الثابت واماني الأبدي الى ذلك الصدر الحنون الذي احتواني كلما كنت بحاجته الى المبسم امي وابي الغاليين كل الشكر والعرفان لمن لا أحصيه فضلًا وتقديرًا، لمن شجعني ودعمني إن كنت في أوائل الصفوف أو كنت الأخيرة، أبي الغالي.. إنها ليست كلمات حب فحبي أكبر من أن تستوعبه السطور، ولا كلمات شكر ففضلك وتضحياتك أكبر من أن تشكره الكلمات، ورغم هذا أقول لكِ إني أشكرك من أعمق نقطة في قلبي، امي الغالية ...وإن لم أكن قادرًا على منحهما من الثناء الوفيرَ، فهما في القلب ملوكًا وأغلى رفيقا.

الى من ساندوني بكل حب عند ضعفي وأزاحوا عن طريقي المتاعب ممهدين لي الطريق، زارعين مبادئ الثقة والاصرار، الى من شدّ الله بهم عضدي فكانو خيرًا معين اخوتي.

إن قلت شكراً فشكري لن يوفيكم، حقاً سعيتم فكان السعي مشكوراً، فرسالة شكر وامتنان أطيّرها لكم اخواتي....

قد ننسى من شاركنا الضحك، لكن لا ننسى من شاركنا البكاء. شكرًا عائلتي على ما قدمتموه لي....

شكرًا لكم يا اخواتي سارة، شيماء وايمان، لن أقول شكرًا فقط على ما قدمتم ولكن شكرًا لكونكم اخواتي،

أسعدكم الله دهورًا وألبسكم من تقواه نورًا.

تتسابق الكلمات وتتزاحم العبارات لتنظم عقد شكر الذي لا يستحقه

الا أنتم وكلمات الثناء لا توفيكم حقكم شكرا

سارة نور الهدى وصبرينة ادام الله فرحكم.

والى زميلاتي فاطمة الزهراء وياسمين أتمنى لكن المزيد من التألق والنجاح.

خيرات

Remerciement

Avant tout, nous remercions Dieu Tout-Puissant de nous

donner du courage et de nous guiderpour pouvoir mener à bien

cet humble travail.

A notre promoteur Mr Mokhtari Mokhtar

Nous adressons nos sincères remerciements et notre appréciation, pour tous les conseils etorientations qu'il nous a donnés, afin de s'assurer que cette recherche soit complétée et présentée de la manière requise.

A Mr.Souid Mohammed Said

Nous sommes ravis de vous avoir dans le jury de ce travail, nous tenons à vous exprimer notreprofonde gratitude pour avoir bien voulu accepter de présider le jury de cette thèse. Veuillez compter sur notre gratitude et notre considération respectueuse.

A Mr.Sofrani Mohamed

Nous sommes reconnaissantes de l'honneur que vous nous en acceptiez d'examiner notremodeste travail, Veuillez trouver dans le travail l'expression de notre attention, et

le témoignage de profonde et sincère considération.

Un grand Merci aux enseignants ainsi que l'administration de faculté Mathématique quiont veillé sur notre formation et suivi durant

tout le cursus d'étude

Enfin, nous tenons à remercier tous ceux qui ont contribué

par leurs conseils ou leursencouragements

à ce travail.

Résumé

L'objectif principale de ce travail est d'étudier l'existence et l'unicité d 'équations différentielles d'ordre fractionnelle
Ce mémoire se composant on trois chapitres

Chapitre 1 : Nous rappellerons quelques définitions de base et faits préliminaires sur les dérivées et les intégrales fractionnaires .

Chapitre 2 : Nous chercherons une solution intégrables pour les équations différentielles implicites d'ordre fractionnaire avec condition non locale.

Chapitre 3 : Nous introduiserons le problème de valeur limite multiterme des équations différentielles fractionnaires de CAPUTO d'ordre variable.

Table des matières

Introduction

L'analyse des équations différentielles d'ordre fractionnaire s'avère être une extension naturelle et significative des équations différentielles classiques, permettant de modéliser des phénomènes plus complexes et diversifiés présents dans la nature et les sciences de l'ingénieur.
L'existence et l'unicité des solutions pour ces équations sont souvent établies en utilisant des théories et des techniques avancées, telles que les opérateurs fractionnaires, les espaces de Banach, et les méthodes de points fixes.
L'existence des solutions des équations différentielles fractionnaires peut être démontrée en utilisant des méthodes variées, telles que les théorèmes de Schauder ou de Banach sur les points fixes, et d'autres techniques fonctionnelles.
Ces méthodes reposent généralement sur la transformation des équations différentielles en équations intégrales de Volterra, où les opérateurs fractionnaires tels que l'intégrale de Riemann-Liouville ou de Caputo jouent un rôle central.
L'unicité des solutions est souvent prouvée en montrant que toute solution possible doit converger vers une solution unique, en utilisant des principes de contraction et des estimations appropriées dans les espaces fonctionnels concernés.
Les conditions suffisantes pour l'unicité incluent souvent des hypothèses de Lipschitz sur les termes non-linéaires de l'équation.

Notation

Dans tout ce qui suit ,nous utiliserons les notations suivantes :
$\Gamma(.)$ La fonction Gamma.

$B(.,.)$ La fonction Béta.

I^n Intégrale fractionnaire d'ordre n.

$I^{\alpha}_{a_+}$ L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α à gauche.

$I^{\alpha}_{b_-}$ L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α à droite.

$D^{\alpha}_{a_+}$ La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α à gauche.

$D^{\alpha}_{b_-}$ La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α à droite.

${}^cD^{\alpha}_{a_+}$ La dérivée fractionnaire de CAPUTO d'ordre α à gauche.

${}^cD^{\alpha}_{b_-}$La dérivée fractionnaire de CAPUTO d'ordre α à droite.

$\mathbb{N}1,2,3...$ L' ensemble des nombres naturels .

$\mathbb{C}$ L' ensemble des nombres complexe.

$||.||$ La norme.

$C(J;\mathbb{R})$ Espace des fonctions continues sur J et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

L_p Espace de Lebesgue.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre nous présentons des notations, définitions et des théorèmes utilisés dans ce mémoire.

1.1 Rappels sur les Espaces Fonctionnels

Définition 1.1. *(Espace vectoriel normé)*

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,on appelle norme sur l'espace E toute application notée $||.||$ définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}_+$,vérifiant pour tout x, y dans E et α dans $\mathbb{K}$.

1. $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2. $||\alpha x|| = |\alpha| ||x|| \quad ; \forall \alpha \in \mathbb{R}$

3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

Définition 1.2. *(Espace métrique complet)*

On dit que E est un espace métrique complet si toute suite de Cauchy de E converge dans E.

Définition 1.3. *(Espace de Banach)*

Tout espace vectoriel normé est appelé espace de Banach

Définition 1.4. *(Espace $C(J;\mathbb{R})$)*

L'espace des fonctions continues sur J dans $\mathbb{R}$ muni de la norme :

$$||x||_\infty = \sup ||x(t)|| : t \in J$$

Définition 1.5. *(Espace de Lebesgue)*

Soit $\Omega = [a, b](-\infty \leq a \leq b \leq \infty)$ et$1 \leq p \leq \infty$.

1. Si $1 \leq p < \infty$ l'espace $L_p(\Omega)$ est définit par :

$$L_p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; \quad f mesurable sur \Omega \;\; et \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty \right\}$$

.

Que l'on munit de la norme $||f||_{l_p} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$

2. Pour $p = \infty$ l'espace $L_{\infty}(\Omega)$ est l'espace des fonctions mesurables , f bornées presque partout sur Ω on note :

$$||f||_{l_{\infty}} = \sup ess_{x \in \Omega} |f(x)| < \infty$$

Définition 1.6. *(Ensemble convexe)*

Soit E espace factoriel sur un corps $\mathbb{K}$ et $\mathbb{K} \subset E$ on dit que $\mathbb{K}$ est convexe si :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{K}^2, \forall \theta \in [0, 1], \theta x + (1 - \theta) y \in \mathbb{K}$$

Définition 1.7. *(Ensemble Compact)*

Soit E espace factoriel normée et $\mathbb{K} \subset E$ on dit que E est compact si tout suite d'élément de $\mathbb{K}$ admet un sous suite convergente vers un point dans $\mathbb{K}$

1.2 Calcule fractionnaire :

1.2.1 Bref historique :

1.2.2 Théorie de dérivation fractionnaire :

Est un sujet presque aussi ancien que le calcul classique tel que nous le connaissons aujourd'hui, ces origines remontent à la fin du 17^{eme} siècle,
L'époque ou **Newton** et **Leibniz** ont développé les fondements de calcul différentiel et intégral .
En particulier, **Leibniz** a présenté le symbole $\frac{d^n f}{dt^n}$ pour désigner la n^{eme} dérivée d'une fonction f.
Quand il a annoncé dans une lettre à **L'hôpital** (apparemment avec l'hypothèse implicite que $n \in \mathbb{N}$, **L'hôpital** a répondu :
Que signifie $\frac{d^n f}{dt^n}$ si $n = \frac{1}{2}$?
Cette lettre de **L'hôpital**, écrite en 1695, est aujourd'hui admise comme le premier incident de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire,et le

fait que **L'hôpital** a demandé spécifiquement pour $n = \frac{1}{2}$, c'est à dire une fraction (nombre rationnel) a en fait donné lieu au nom de cette partie des mathématiques.
Les dérivées non entières possèdent un effet de mémoire qu' elles partagent avec plusieurs matériaux tels que les matériaux viocs élastiques ou polymère. Ce fait est également une des raisons pour lesquelles le calcul fractionnaire a connu récemment un grand intérêt.
L 'utilisation de l'effet mémoire des dérivée fractionnaire dans la construction des modèle matériels simples est livrée avec un coût élevé en ce qui concerne la résolution numérique.
Tout en utilisant un algorithme de discrétisation des dérivées non entières on doit tenir compte de sa structure non locale qui signifie en général un haut stockage d'information et une grande complexité de l'algorithme.
De nombreuses tentatives pour résoudre les équations faisant intervenir différents types d'opérateurs d'ordre non entier peuvent être trouvées dans la littérature.

1.2.3 Fonctions spéciales :

1. **Fonction Gamma d'Euler :** est une fonction qui prolonge le factorielle aux valeurs réelles et complexes.
   pour $Re(\alpha) > 0$ on définie $\Gamma(\alpha)$ par :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt, \quad \forall\alpha \in]0, +\infty[. \tag{1.1}$$

   Propriétés de la Fonction Gamma d'Euler :

   La fonction Γ s'étend(en une fonction holomorphe) a $\mathbb{C}\backslash Z^-$
   tout entier On a :
   $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$
   et pour n entier on a : $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ et pour n entier on a :
   $\Gamma(n + 1) = n!$.

   Démonstration 1.1.

   (a) par intégration par partie,on obtient

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha+1) &= \int_0^{+\infty} t^{\alpha}e^{-t}dt. \\ &= [-t^{\alpha}e^{-t}]_{t=0}^{t=+\infty} + \alpha\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt. \\ &= \alpha\Gamma(\alpha).\end{aligned}$$

   (b) De $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ et puisque $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$, on déduite,

$$\begin{aligned}\Gamma(2) &= 1.\Gamma(1) = 1! \\ \Gamma(3) &= 2.\Gamma(2) = 2 \times 1! = 2!. \\ \Gamma(4) &= 3.\Gamma(3) = 3 \times 2! = 3!.\end{aligned}$$

   Alors ,par récurrence on obtient

$$\Gamma(n + 1) = n.\Gamma(n) = n!$$

2. **Fonction Béta d'Euler :** est définie par :

$$B(\alpha + \beta) = \int_0^1 \tau^{\alpha-1}(1 - \tau)^{\beta-1}dt.$$

   avec $Re(\beta) > 0$ et $Re(\alpha) > 0$

Propriétés de la Fonction Béta d'Euler :

1. La fonction Béta est symétrique c'est -à-dire que :

$$B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha)$$

2. Elle peut prendre aussi la forme intégrale :

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(t+1)^{\alpha+\beta}} dt.$$

Remarque 1.1.
Les fonction Gamma et Béta sont reliées par la relation :

$$B(\alpha + \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}$$

1.2.4 La dérivée et Intégrale fractionnaire :

Considérons une fonction h définie pour $t > a$,
on pose

$$(Ih)(t) = \int_a^t h(s) ds$$

$$(I^2 h)(t) = \int_a^t (Ih)(u) du = \int_a^t \left(\int_a^u h(s) ds \right) du$$

En répétant n fois on obtient d'après la formule de **Cauchy**

$$(I^n h)(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-s)^{n-1} h(s) ds$$

En utilisent la fonction Γ d'Euler (1.1) on aura la définition suivante :

1.2.5 L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville :

Définition 1.8. *([14,15])*

Intégrale fractionnaire $\mathbb{R}_+$ de la fonction $h \in L^1([a, b], R_+)$ et continue est défini par :

$$I_a^\alpha h(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds$$

où $\Gamma(.)$ est la fonction Gamma.
si $a = 0$ on écrit

$$I_{b_-}^\alpha h(t) = I_{a_+}^\alpha h(t) = h(t)$$

1.2.6 Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville :

Définition 1.9. *([14,15])*

La dérivée fractionnaire au sens de **Riemann-Liouville** d' ordre $\alpha > 0$ de la fonction $h \in L^1([a,b], \mathbb{R}_+)$, est donnée par :

$$(D^{\alpha}_{a+}h)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} h(s)ds.$$

ici $n = [\alpha] + 1$ et $[\alpha]$ désigne la partie entière de α.
si $\alpha \in (0,1]$, alors

$$(D^{\alpha}_{a+}h)(t) = \frac{d}{dt} I^{1-\alpha}_{a+} h(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{ds} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} h(s)ds$$

.

Remarque 1.2. *1. pour* $\alpha = 0$

$$D^0_{b_-} h(t) = D^0_{a_+} h(t) = h(t)$$

2. pour $\alpha = n$

$$D^n_{b_-} h = (-1)^{(n)} h^{(n)}$$
$$D^n_{a_+} h = h^{(n)}$$

1.2.7 Dérivée fractionnaire de CAPUTO :

Définition 1.10. *([14,15])*

La dérivée fractionnaire au sens de **CAPUTO** d'ordre $\alpha > 0$ de la fonction $h \in L^1([a,b], \mathbb{R}_+)$,et continue est définie par :

$$({}^cD^{\alpha}_{a+}h)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} h^{(n)}(s)ds.$$

où $n = [\alpha] + 1$.si $\alpha \in (0,1]$, alors

$$({}^cD^{\alpha}_{a+}h)(t) = I^{1-\alpha}_{a+} \frac{d}{dt} h(t) = \int_a^t \frac{(t-s)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{ds} h(s)ds$$

1.3 Quelques propriétés :

([14,15])Soient $\alpha, \beta > 0$ Alors on a :

1. $I^{\alpha} : L^1(J, \mathbb{R}_+) \longrightarrow L^1(J, \mathbb{R}_+)$ et si $f \in L^1(J, \mathbb{R}_+)$, alors
$$I^{\alpha} I^{\beta} f(t) = I^{\beta} I^{\alpha} f(t) = I^{\alpha+\beta} f(t)$$
2. si $f \in L^p(J, \mathbb{R}_+), 1 \leq p \leq +\infty$, alors$\|I^{\alpha} f\|_{L_p} \leq \frac{T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \|f\|_{L_p}$.
3. L'opérateur intégrale d'ordre fractionnaire I^{α} est linéaire et borné de l'espace $L^1(J)$ dans lui-même.
4. $\lim_{\alpha \longrightarrow n} I^{\alpha} f(t) = I^n f(t), n = 1, 2 \ldots$ uniformément.
5. $I_a^0 h(t) = I_d h(t) = h(t)$.
6. La dérivée fractionnaire de **CAPUTO** d'une constante égale à zéro.
7. ${}^c D_a^{\alpha}$ est non inverse à droit de I_a^{α} c-a-d $I_a^{\alpha c} D_a^{\alpha} \neq I_d$ mais ${}^c D_a^{\alpha} I_a^{\alpha} = I_d$.
8. La dérivée fractionnaire de **CAPUTO** et **Riemann-Liouville** sont linéaires

Lemme 1.

Soit $\alpha > 0$,l'équation différentielle
$$({}^c D^{\alpha} h)(t) = 0$$
admet les solutions $h(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots + c_{n-1} t^{n-1}, c_i \in \mathbb{R}$,
$i = 0, 1, 2, \ldots, n-1, n = [\alpha] + 1$.

Lemme 2.

Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$ alors
$$I^{\alpha c} D_a^{\alpha} h(t) = h(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k$$
Le lemme 2 est écrit autrement ce la forme .

Lemme 3.

Soit $\alpha > 0$ alors

$$I^{\alpha c}D^{\alpha}h(t) = h(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots + c_{n-1}t^{n-1},$$

pour $c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, \ldots, n-1, n = [\alpha] + 1$.

Définition 1.11.

Soit E un espace de **Banach** et $T : E \longrightarrow E$ un opérateur

1. T est dit **continu** si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E tel que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x dans E,la suite $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers Tx.
2. T est dit **compact**,si pour tout borné B de E,$T(B)$ est relativement compact.
3. T est dit **complètement continu** si T est continu et si l'image de tout borné B de E est relativement compact
.

Définition 1.12.

Soit $C(J, \mathbb{R})$ L'espace des fonctions continues d'un intervalle compact J de $\mathbb{R}$ dans l'espace de **Banach** X, M un sous ensemble de $C(J, \mathbb{R})$.

1. M est dit **équicontinu** si est seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall t_1, t_2 \in J :$$
$$\|t_1 - t_2\| \leq \delta \Rightarrow \|f(t_1) - f(t_2)\| \leq \varepsilon, \forall f \in M.$$

2. M est dit **uniformément borné** si et seulement si :
$\exists c > 0 : \|f(t)\| \leq c, \forall t \in J$ et $\forall f \in M$

1.4 Fonction de Green :

Soit $p, q, f \in C([a, b])$ où $p \in C^1([a, b]), a < b$ et $(\alpha_i, \beta_i) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall i = 1, 2$
$|\alpha_1| + |\alpha_2|, |\beta_1| + |\beta_2| \neq 0$ on considère les équations différentielles ordinaires

$$(H)(py')' + qy = 0$$

$$(NH)(py')' + qy = f$$

ainsi que les conditions aux bords associées :

$$(CB)_h \begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0 \\ \beta_1 y(b) - \beta_2 y'(b) = 0 \end{cases}$$

$$(CB)_{nh} \begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \gamma \\ \beta_1 y(b) - \beta_2 y'(b) = \delta \end{cases}$$

Proposition 1.1.

On appelle fonction de **Green** associée au problème homogène $(H) - (CB)_h$ une fonction $G : [a, b] \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés :
(a) G est continue sur $[a, b] \times [a, b]$;

(b) G est symétrique :$G(x, y) = G(y, x), \forall (x, y) \in [a, b]^2$;

(c) $\dfrac{\partial G}{\partial x}(x, y)$ est continue pour tout $x \neq y$

(d) $\dfrac{\partial G}{\partial x}(y^+, y) - \dfrac{\partial G}{\partial x}(y^-, y) = \dfrac{1}{p(y)}$ pour tout $y \in [a, b]$;

(e) La fonction partielle $x \longrightarrow G(x, y)$ est solution de l'équation (H) pour tout $x \neq y$;
(f) la fonction partielle $x \longrightarrow G(x, y)$ vérifie les condition $(CH)_h$ pour tout $y \in [a, b]$.

1.4.1 Existence et unicité :

Théorème 1.1. ***(Existence et unicité de la fonction de Green) :***

supposons que le problème homogène $(H)-(CB)_h$ n'admet pas de solution non triviale.Alors ,il existe une (et une seule)fonction G ne dépendant pas de f ,et dite fonction de **Green** telle que ,pour toute fonction f ,la solution y de problème non homogène $(NH) - (CB)_h$,s'écrit de manière unique sous la forme : č

$$y(t) = \int_a^b G(t, s) f(s) ds$$

.

(i) Méthode de Calcul la fonction G :
Soit $\varnothing_1$ et $\varnothing_2$ les solution respectives des problèmes à condition initiales

$$(H) + \begin{cases} \varnothing_1(a) = \alpha_2 \\ \varnothing_1'(a) = -\alpha_1 \end{cases} \quad et(H) + \begin{cases} \varnothing_2(b) = \beta_2 \\ \varnothing_2'(b) = \beta_1 \end{cases}$$

Alors : $\varnothing_1, \varnothing_2 \neq 0$ sont linéairement indépendantes car sinon $\varnothing_1$ (et aussi $\varnothing_2$) serait solution du problème $(p_0) := (H) + (CB)_h$ contredisant l'hypothèse .
Soit donc $W \neq 0$ leur **Wronskien** et G la fonction de **Green** définie par

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{\varnothing_1(t)\varnothing_2(s)}{p(t)W(t)}, a \leq t \leq s, \\ \\ \frac{\varnothing_1(s)\varnothing_2(t)}{p(s)W(s)}, s \leq t \leq b, \end{cases}$$

Remarquons que le produit pW est constant.

(ii)Existence et unicité d' une solution :

1. La fonction F définie par
   $F(t) = \int_a^b G(t,s)f(s)ds = \frac{\varnothing_2(t)}{pW} \int_a^t \varnothing_1(s)ds + \dfrac{\varnothing_1(t)}{pW} \int_t^b \varnothing_2(s)f(s)ds$
   est solution du problème $(NH) + (CB)_h$
2. La fonction H définie par
   $H(t) = \int_a^b G(t,s)f(s)ds = \frac{\varnothing_2(t)}{pW} \int_a^t \varnothing_1(s)ds + \dfrac{\varnothing_1(t)}{pW} \displaystyle\int_t^b \varnothing_2(s)f(s)ds +$ $\psi_1(t) + \psi_2(t)$
   est solution du problème $(NH) + (CB)_h$; où $\psi_1(t) et \psi_2(t)$ les uniques solutions des problèmes :

$$(H) + \begin{cases} \alpha_1\psi_1(a) + \alpha_2\psi_1'(a) = \gamma \\ \beta_1\psi_1(b) + \beta_2\psi_1'(b) = 0 \end{cases} \quad et(H) + \begin{cases} \alpha_1\psi_2(a) + \alpha_2\psi_2'(a) = 0 \\ \beta_1\psi_2(b) + \beta_2\psi_2'(b) = \delta \end{cases}$$

Exemple : Considérons le problèmes

$$\begin{cases} y'' = f(t), a < t < b \\ y(a) = \gamma, y(b) = \delta \end{cases} \tag{1.2}$$

Constructions les fonctions $\varnothing_1 et \varnothing_2$ solutions des problèmes mes

$$\begin{cases} \varnothing_1''(t) = 0, \\ \varnothing_1'(a) = 0, \\ \varnothing_1(a) = -1, \end{cases} et \begin{cases} \varnothing_2''(t) = 0, \\ \varnothing_2'(b) = 0, \\ \varnothing_2(b) = -1, \end{cases} \tag{1.3}$$

Alors $\varnothing_1(t) = (a - t), \varnothing_2(t) = (b - t)$et $W(\varnothing_1, \varnothing_2) = b - a$
D'ou la fonction de **Green** :

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{(t-a)(s-b)}{(b-a)}, a \le t \le s, \\ \frac{(s-a)(t-a)}{(b-a)}, s \le t \le b, \end{cases}$$

La solution unique du problème $(1,2)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_a^b G(t,s)f(s)ds \\ &= \frac{\varnothing_2(t)}{pW}\int_a^t \varnothing_1(s)f(s)ds + \frac{\varnothing_1(t)}{pW}\int_t^b \varnothing_2(s)f(s)ds + \psi_1(t) + \psi_2(t) \\ &= \frac{t-b}{b-a}\int_a^t (s-a)f(s)ds + \frac{t-a}{b-a}\int_t^b (s-b)f(s)ds + \delta\frac{t-a}{b-a} + \gamma\frac{b-t}{b-a} \end{aligned}$$

1.5 Quelques théorèmes du point fixe :

1.5.1 Théorème du point fixe de Banach :

Définition :
Soit (X, d)un espace métrique .une application $T : X \longrightarrow X$ est dite **Lipschitzienne** s'il existe une constante k (appelée constante de **Lipschitz**) telle que :

$$d(T(x), T(y)) \le kd(x, y)$$

pour tout $x, y \in X$.
une application **Lipschitzienne** avec une constante de **Lipschitz** $K < 1$ est appelée contraction.
Théorème 1.4.1 : (Théorème du point fixe de Banach) :
Soit (X, d) un espace métrique complet .une application $T : X \longrightarrow X$ est une contraction avec la constante de Lipschitz k .
Alors T a un point fixe unique $x \in X$.

1.5.2 Théorème du point fixe de Schauder :

Théorème 1.4.2 :([14,15])
Soit E un espace de **Banach** et Q un sous ensemble fermé borné convexe de E et $F : Q \longrightarrow Q$ est continue tel que $\overline{F(Q)}$ compact .
Alors F a au moins un point fixe dans Q.

Chapitre 2

Solutions intégrables pour les équations différentielles implicites d'ordre fractionnaire avec condition non locale

Introduction :

Nous s'intéressons dans ce chapitre à l'existence et l'unicité des solutions intégrables pour le problème non local de l'équation différentielle implicite d'ordre fractionnaire :

$$^{c}D^{\alpha}y(t) = f(t, y(t), ^{c}D^{\alpha}y(t)), t \in J := [0, T], 0 < \alpha \leq 1 \tag{2.1}$$

$$y(0) = y_0 - g(y) \tag{2.2}$$

Soit $f : J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction donnée et $g : L^1(J, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, y_0 et $^{c}D^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire de **Caputo** d'ordre α.

La condition non locale peut être plus utile que la condition initiale standard pour décrire certains phénomènes physiques.

Le but de ce chapitre est de présenter les notations, les définitions et les préliminaires dont nous avons besoin tout au long de ce travail.

Théorème 2.1.

Soit $\Omega \subseteq L^p(J, \mathbb{R}), 1 \leq p \leq \infty$ si :
(i) Ω est borné dans $L^P(J, \mathbb{R})$,
et
(ii) $u_h \to u$ comme $h \to 0$ uniformément par rapport á $u \in \Omega$.
Alors Ω est relativement compact dans $L^p(J, \mathbb{R})$.
Où

$$u_h(t) = \frac{1}{h} \int_h^{t+h} u(s)ds$$

2.1 Existence de solutions :

Nous commençons par définir ce que nous entendons par solution intégrable du problème non local(2.1)-(2.2).

Définition 2.1.

Par solution du problème(2.1)-(2.2) on entend une fonction $y \in L^1(J, \mathbb{R})$ qui satisfait la condition $y(0) = y_0 - g(y)$ et l'équation

$${}^cD^\alpha y(t) = f(t, y(t), {}^c D^\alpha y(t)) \ \text{ sur } \ J$$

Pour l'existence de solution au problème (2.1)-(2.2), nous avons besoin du lemme auxiliaire suivant :

Lemme 4.

la solution du problème (2.1)-(2.2) peut être exprimé par l'équation intégrale

$$y(t) = y_0 - g(y) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} x_y(s) ds, \tag{2.3}$$

où x_y est la solution de la fonctionnelle équation intégrale

$$x(t) = f\left(t, y_0 - g(y) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} x_y(s) ds, x(t)\right). \tag{2.4}$$

Preuve :
Soit ${}^{c}D^{\alpha}y(t) = x_y(t)$ dans l'équation (2.1) ,alors

$$x_y(t) = f(t, y(t), x_y(t)) \tag{2.5}$$

et

$$y(t) = y(0) + I^{\alpha}x_y(t)$$

$$y(t) = y_0 - g(y) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} x_y(s) ds \tag{2.6}$$

Introduisons les hypothèses suivantes :
(H1) $f : J \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est mesurable en $t \in J$, pour tout $(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$,

et continu dans $(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, pour presque tout $t \in J$.

(H2) Il existe $a \in L^1(J, \mathbb{R})$ deux constante $b_1 > 0$ et $0 < b_2 < 1$ telle que

$$|f(t, u_1, u_2)| \leq |a(t)| + b_1|u_1| + b_2|u_2|, \forall t \in J, \forall (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2.$$

(H3) Il existe deux constante $k_1 > 0$ et $0 < k_2 < 1$ telle que

$$|f(t, x_1, y_1) - f(t, x_2, y_2)| \leq k_1|x_1 - x_2| + k_2|y_1 - y_2|, \forall t \in J, \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$$

(H4) Il existe a constante $M > 0$ telle que

$$|g(y)|) \leq M, \forall y \in L^1(J, \mathbb{R}).$$

(H5) Il existe a constante $k > 0$ telle que

$$|g(y) - g(y')| \leq k\|y - y'\|_{L_1}, \forall y, y' \in L^1(J, \mathbb{R}).$$

Notre premier résultat est basé sur théorème 2.1.

Théorème 2.2.

Supposons que les hypothèses **(H1),(H2),(H4)** satisfaites .si

$$\frac{b_1 T^\alpha}{(1-b_2)\Gamma(\alpha+1)} < 1, \tag{2.7}$$

Alors le problème point non local (2.1)-(2.2) a au moins une solution $y \in L^1(J, \mathbb{R})$

Preuve :

Transformons le problème (2.1) -(2.2) en un problème de point fixe. Considérons l'opérateur

$$H : L^1(J, \mathbb{R}) \longrightarrow L^1(J, \mathbb{R})$$

Défini par :

$$(H_y)(t) = y_0 - g(y) + I^\alpha x_y(t), \tag{2.8}$$

où

$$x_y(t) = f(t, y_0 - g(y) + I^\alpha x_y(t), x_y(t)).$$

L'opérateur H est bien défini pour chaque $y \in L^1(J, \mathbb{R})$ à partir des hypothèses **(H1),(H2)**et **(H4)**, on obtient :

$$\begin{aligned}\|H_y\|_{L_1} = & \int_0^T |Hx(t)|dt \\ = & \int_0^T |y_0 - g(y) + I^\alpha x_y(t)|dt\end{aligned}$$

$$\leq \ T(|y_0| + M) + \int_0^T \left(\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |x_y(s)|ds \right) dt \tag{2.9}$$

Et

$$\begin{aligned}|x_y(t)| &= f(t, y(t), x_y(t)) \\ &\leq |a(t)| + b_1|y(t)| + b_2|x_y(t)|.\end{aligned}$$

Ainsi

$$|x_y(t)| \leq \frac{|a(t)| + b_1|y(t)|}{1-b_2} \tag{2.10}$$

En remplaçant (2.10) dans l'inégalité (2.9), on obtient :

$$\begin{aligned}
\|Hy\|_{L_1} &\leq T(|y_0|+M)+\int_0^T\left(\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha}-1}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{|a(s)|+b_1|y(s)|}{1-b_2}\right)ds\right)dt \\
&\leq T(|y_0|+M)+\frac{T^{\alpha}}{(1-b_2)\Gamma(\alpha+1)}\|a\|_{L_1} \\
&+ \frac{b_1}{1-b_2}\int_0^T\left(\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}|y(s)|ds\right)dt.
\end{aligned}$$

$$\|Hy\|_{L_1} \leq T(|y_0|+M)+\frac{T^{\alpha}}{(1-b_2)\Gamma(\alpha+1)}\|a\|_{L_1}+\frac{b_1T^{\alpha}}{(1-b_2)\Gamma(\alpha+1)}\|y\|_{L_1} < +\infty \tag{2.11}$$

Clairement, les points fixes de l'opérateur H sont des solutions du problème (2.1)-(2.2)
Soit :

$$r=\frac{T(|y_0|+M)+\frac{T^{\alpha}}{(1-b_2)\Gamma(\alpha+1)}\|a\|_{L_1}}{1-\frac{b_1T^{\alpha}}{(1-b_2)\Gamma(\alpha+1)}}$$

Et considérons l'ensemble

$$B_r=\left\{y\in L^1(J,\mathbb{R}) :\|y\|_{L_1}\leq r\right\}.$$

Clairement B, est non vide borné, convexe et fermé.Nous allons maintenant montrer que H satisfait l'hypothèse du théorème 2.1.
La preuve est donnée en plusieurs étapes :
Étape1 : $H(B_r)\subset B_r$.
pour chaque $y\in B_r$, de$(2.7)et(2.11)$ nous obtenons

$$\begin{aligned}
\|Hy\|_{L_1} &\leq T(|y_0|+M)+\frac{T^{\alpha}}{(1-b_2)\Gamma(\alpha+1)}\|a\|_{L_1}+\frac{b_1T^{\alpha}}{(1-b_2)\Gamma(\alpha+1)}\|y\|_{L_1} \\
&\leq r
\end{aligned}$$

puis $H(B_r)\subset B_r$.

Étape2 : H est continue .
comme g est une fonction continue , par l'hypothèse **(H1)** nous pouvons en déduire que H est continue.
Étape3 : H est Compact
Nous allons montrer que $H(B_r)$ est relativement compact.
Clairement $H(B_r)$ est borné dans $L^1(J,\mathbb{R})$, alors **(i)** du théorème 2.2 est satisfait.
Il reste à montrer $(Hy)_h\longrightarrow(Hy)$ dans $L^1(J,\mathbb{R})$ pour chaque $y\in B_r$

Soit $y \in B_r$,alors nous avons

$$\begin{aligned}
\|(Hy)_h - (Hy)\|_{L^1} &= \int_0^T |(Hy)_h(t) - (Hy)(t)|dt \\
&= \int_0^T \left| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} (Hy)(s)ds - (Hy)(t) \right| dt \\
&\leq \int_0^T \left(\frac{1}{h} \int_t^{t+h} |(Hy)(s) - (Hy)(t)|ds \right) dt \\
&\leq \int_0^T \left(\frac{1}{h} \int_t^{t+h} |I_{0^+}^{\alpha} x_y(s) - I_{0^+}^{\alpha} x_y(t)|ds \right) dt.
\end{aligned}$$

Puisque $x \in B_r \subset L^1(J, \mathbb{R})$ et hypothèse **(H2)** qui implique $f \in L^1(J, \mathbb{R})$ et d' après la proposition 2.1(v),il s'ensuit que $I^{\alpha} F^1(J, \mathbb{R})$, alors nous avons

$$\frac{1}{h} \int_t^{t+h} |\varphi(s) - \varphi(t)|ds \longrightarrow 0$$

Comme $h \longrightarrow 0, t \in J$.
Où
$\varphi(.) := I_{0^+}^{\alpha} f(., y_0 - g(y) + I_{0^+}^{\alpha} x_y(.), x_y(.))$.
D'où

$$(Hy)_h \longrightarrow (H)$$

uniformément comme $h \longrightarrow 0$.
Alors d'après le théorème 2.2 $H(B_r)$,est relativement compact.
Suite aux étapes 1 à 3 et au théorème 2.2 nous concluons que H est continu et compact.
En conséquence du théorème 2.1 le problème $(2.1) - (2.2)$ a au moins une solution dans B_r.
Le résultat suivant est basé sur le principe de contraction de **Banach**.

Théorème 2.3.

supposons que les condition **(H1),(H3)** et **(H5)** soient vérifiées .si

$$kT + \frac{k_1 T^\alpha}{(1-k_2)\Gamma(\alpha+1)} < 1 \tag{2.12}$$

Alors : Le problème $(2.1)-(2.2)$ a une solution unique $y \in L^1(J, \mathbb{R})$.

preuve :

Nous utiliserons le principe de contraction de **Banach** pour prouver que H définie par (2.8) a un point fixe.

Soit $y, z \in L^1(J, \mathbb{R})$, et $t \in J$. Alors nous avons,

$$|(Hy)(t) - (Hz)(t)| \leq |g(y) - g(z)| + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |x_y(s) - x_z(s)| \tag{2.13}$$

puis

$$|(Hy)(t) - (Hz)(t)| \leq k\|y - z\|_{L_1} + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |x_{y(s)} - x_{z(s)}| ds \tag{2.14}$$

par contre, on a pour tout $t \in J$

$$\begin{aligned} |x_y(t) - x_z(t)| &= |f(t, y(t), x_y(t)) - f(t, z(t), x_z(t))| \\ &\leq k_1|y(t) - z(t)| + k_2|x_{y(t)} - x_{z(t)}|. \end{aligned}$$

puis

$$|x_{y(t)} - x_{z(t)}| \leq \frac{k_1}{1-k_2} |y(t) - z(t)| \tag{2.15}$$

On remplace l'inégalité (2.15) in égalité (2.13) on obtient

$$\begin{aligned} \|(Hy) - (Hz)\|_{L_1} &\leq T|g(y) - g(z)| + \int_0^T \left(\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |x_y(s) - x_z(s)| ds \right) dt \\ &\leq Tk\|y - z\|_{L_1} + \int_0^T \left(\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |x_y(s) - x_z(s)| ds \right) dt \\ &\leq Tk\|y - z\|_{L_1} + \frac{k_1}{1-k_2} \int_0^T \left(\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |y(s) - z(s)| ds \right) dt \\ &\leq Tk\|y - z\|_{L_1} + \frac{T^\alpha k_1}{(1-k_2)\Gamma(\alpha+1))} \|y - z\|_{L_1} \\ &\leq \left(kT + \frac{T^\alpha k_1}{(1-k_2)\Gamma(\alpha+1))} \right) \|y - z\|_{L_1}. \end{aligned}$$

par conséquent par (2.12) H est une contraction.
Conséquence du principe de contraction de **Banach**, on en déduit que H a un point fixe qui est une solution du problème $(2.1) - (2.2)$.

2.2 Exemple

Conséquence le problème fractionnaire non local suivant :

$$ {}^cD^\alpha y(t) \;\; = \tfrac{e^{-t}}{(e^t+7)(1+\|y(t)|+|{}^cD^\alpha y(t)|}, \quad t \in J := [0,1], \;\; \alpha \in (0,1], \qquad (2.16)$$

$$y(0) \;\; = \tfrac{4}{7}\int_0^T y(t)dt. \qquad (2.17)$$

Ensemble

$$f(t,y,z) = \frac{e^{-t}}{(e^t+7)(1+y+z)}, \quad (t,y,z) \in J \times [0,+\infty) \times [0,+\infty)$$

Soit $y, z \in [0,+\infty)$ et $t \in J$, alors nous avons :

$$\begin{aligned}
|f(t,y_1,z_1) - f(t,y_2,z_2)| &= \left| \frac{e^{-t}}{e^t+7}\left(\frac{1}{1+y_1+z_1} - \frac{1}{1+y_2+z_2}\right)\right| \\
&\leq \frac{e^{-t}(|y_1-y_2|+|z_1-z_2|)}{(e^t+7)(1+y_1-y_2)+(1+z_1-z_2)} \\
&\leq \frac{e^{-t}}{(e^t+7)}(|y_1-y_2|+|z_1-z_2|) \\
&\leq \frac{1}{8}|y_1-y_2| + \frac{1}{8}|z_1-z_2|.
\end{aligned}$$

D'où : La condition **(H3)** est vérifiée avec $k_1 = k_2 = \frac{1}{8}$ a aussi

$$|g(x) - g(y)| \leq \frac{4}{7}\|x-y\|_{L_1}$$

Donc :(H5) est satisfait de $k = \frac{4}{7}$ est satisfait de $T-1$ .En effet nous vérifier que la condition (2.12)

$$
\begin{aligned}
kT + \frac{k_1 T^\alpha}{(1-k_2)\Gamma(\alpha+1)} &= \frac{4}{7} + \frac{\frac{1}{8}}{\left(1-\frac{1}{8}\right)\Gamma(\alpha+1)} \\
&< \frac{4}{7} + \frac{\frac{1}{8}}{\frac{7}{8}\Gamma(\alpha+1)} \\
&< \frac{4}{7} + \frac{1}{7\Gamma(\alpha+1)} \\
&< \frac{4}{7} + \frac{3}{7\Gamma(\alpha+1)}
\end{aligned}
$$

et

$$
\frac{4}{7} + \frac{3}{7\Gamma(\alpha+1)} < 1 \Leftrightarrow \Gamma(\alpha+1) > 1 \tag{2.18}
$$

D'après le théorème 3.2, le problème $(2.16) - (2.17)$ admet une unique solution intégrable sur $[0, 1]$.

Chapitre 3

Problème de valeur limite multiterme des équations différentielles fractionnaires de CAPUTO d'ordre variable

3.1 Introduction

L'idée principale du calcul fractionnaire est de constituer les nombres naturels dans l'ordre des opérateurs de dérivation avec les rationnels.
Bien que cette idée soit préliminaire et simple, elle implique des effets et des résultats remarquables qui décrivent certains phénomènes physiques, dynamiques, de modélisation, de théorie du contrôle, de bio-ingénierie et d'applications biomédicales.
Inspiré par [14] , nous traitons du problème des valeurs limites (PVI)

$$\begin{cases} {}^cD_{0^+}^{u(t)}x(t) + f_1(t, x(t), I_{0^+}^{u(t)}x(t)) = 0, \quad t \in J := [0, T], \\ x(0) = 0, \quad x(T) = 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

où $1 < u(t) \leq 2, f_1 : J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et ${}^cD_{0^+}^{u(t)}$,$I_{0^+}^{u(t)}$ sont la dérivée fractionnaire de **Caputo** et l'intégrale de **Rimann-Lioville** d'ordre variable $u(t)$.
Dans cet article, nous cherchons une solution de (3.2). De plus, nous étudions la stabilité du résultat obtenu solution de (3.2) au sens d'**Ulam-Hyers (UH)**.

3.2 Préliminaires

Cette section présente quelques définitions fondamentales importantes qui seront nécessaires pour obtenir nos résultats dans les sections suivantes.
Le symbole $C(J,\mathbb{R})$ représente l'espace de **Banach** des fonctions continues $\chi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ avec la norme

$$\|\chi\| = \sup\{|\chi(t)| : t \in \mathbb{R}\}.$$

Pour $-\infty < a_1 < a_{2\|} < +\infty$, nous considérons les applications
$u(t) : [a_1, a_2] \longrightarrow (0, +\infty)$ et $v(t) : [a_1, a_2] \longrightarrow (n-1, n)$.
Alors, l'intégrale fractionnaire de **Riemann-Liouville** gauche (IFRL) d'ordre variable $u(t)$ pour la fonction $f_2(t)$ [14] est

$$I_{a_1^+}^{u(t)} f_2(t) = \int_{a_1}^{t} \frac{(t-s)^{u(t)-1}}{\Gamma(u(t))} f_2(s)ds, \quad t > a_1, \tag{3.2}$$

et la dérivée fractionnaire de **Caputo** gauche (DFC) d'ordre variable $v(t)$ pour la fonction $f_2(t)$[14] est

$${}^{c}D_{a_1^+}^{v(t)} f_2(t) = \int_{a_1}^{t} \frac{(t-s)^{n-v(t)-1}}{\Gamma(n-v(t))} f_2^n(s)ds, t > a_1, \tag{3.3}$$

Comme prévu, dans le cas où $u(t)$ et $v(t)$ sont constants, CFD et RLFI avec la dérivée fractionnaire standard de **Caputo** et l'intégrale fractionnaire de **Riemann-Liouville**,voir,
par exemple, [14]. Rappelez-vous l'observation cruciale suivante.

Lemme 5.

Soit $\alpha_1, \alpha_2 > 0, a_1 > 0, f_2 \in L(a_1, a_2), {}^c D_{a_1^+}^{\alpha_1} f_2 \in L(a_1, a_2)$.
Alors l' équation différentielle.

$${}^{c}D_{a_1^+}^{\alpha_1} f_2 = 0$$

La solution unique

$$f_2(t) = \omega_0 + \omega_1(t-a_1) + \omega_2(t-a_1)^2 + \ldots + \omega_{n-1}(t-a_1)^{n-1}$$

Et

$$I_{a_1^+}^{\alpha_1}({}^{c}D_{a_1^+}^{\alpha_1}) f_2(t) = f_2(t) + \omega_0 + \omega_1(t-a_1) + \omega_2(t-a_1)^2 + \ldots + \omega_{n-1}(t-a_1)^{n-1}$$

Avec :
$n-1 < \alpha_1 \leq n, \omega_l \in \mathbb{R}, \quad l = 0, 1, \ldots, n-1.$ de plus :

$${}^{c}D_{a_1^+}^{\alpha_1} I_{a_1^+}^{\alpha_1} f_2(t) = f_2(t)$$

Et

$$I^{\alpha_1}_{a_1^+} I^{\alpha_2}_{a_1^+} f_2(t) = I^{\alpha_2}_{a_1^+} I^{\alpha_1}_{a_1^+} f_2(t) = I^{\alpha_1+\alpha_2}_{a_1^+} f_2(t)$$

Remarque 3.1.

([14]) Notez que la propriété du semi-groupe n'est pas remplie pour les fonctions générales $u(t), v(t)$, c'est-à-dire,

$$I^{u(t)}_{a_1^+} I^{v(t)}_{a_1^+} f_2(t) \neq I^{u(t)+v(t)}_{a_1^+} f_2(t)$$

Exemple 3.1.

Soit

$$u(t) = t, \quad t \in [0,3], \quad v(t) = \begin{cases} 3, & t \in [0,2] \\ 4, & t \in]2,3], \end{cases} \quad f_2(t) = 1, \quad t \in [0,4]$$

$$\begin{aligned}
I^{u(t)}_{0^+} I^{v(t)}_{0^+} f_2(t) &= \int_0^t \frac{(t-s)^{u(t)-1}}{\Gamma(u(t))} \int_0^s \frac{(s-\tau)^{v(s)-1}}{\Gamma(v(s))} f_2(\tau) d\tau ds \\
&= \int_0^t \frac{(t-s)^{t-1}}{\Gamma(t)} \left[\int_0^2 \frac{(s-\tau)^2}{\Gamma(3)} d\tau + \int_2^s \frac{(s-\tau)^3}{\Gamma(4)} d\tau \right] ds \\
&= \int_0^t \frac{(t-s)^{t-1}}{\Gamma(t)} \left[\frac{(s-2)^3 - s^3}{6} + \frac{(s-2)^4}{24} \right] ds \\
&= \int_0^t \frac{(t-s)^{t-1}}{\Gamma(t)} \left[\frac{s^4 - 8s^3 + 12s - 16}{24} \right] ds \\
Et & \\
I^{u(t)+v(t)}_{0^+} f_2(t) &= \int_0^t \frac{(t-s)^{u(t)+v(t)-1}}{\Gamma(u(t)+v(t))} f_2(s) ds
\end{aligned}$$

Donc nous obtenons

$$
\begin{aligned}
I_{0^+}^{u(t)} I_{0^+}^{v(t)} f_2(t)|_{t=3} &= \int_0^3 \frac{(3-s)^2}{\Gamma(3)} \left[\frac{s^4 - 8s^3 + 12s - 16}{24}\right] ds \\
&\simeq -949,38, \\
I_{0^+}^{u(t)} I_{0^+}^{v(t)} f_2(t)|_{t=3} &= \int_0^3 \frac{(3-s)^{u(t)+v(t)-1}}{\Gamma(u(t)+v(t))} f_2(s) ds \\
&= \int_0^2 \frac{(3-s)^4}{\Gamma(5)} ds + \int_2^3 \frac{(3-s)^6}{\Gamma(7)} ds \\
&= \frac{1}{24} \int_0^2 (s^4 - 12s^3 + 54s^2 - 108s + 81) ds \\
&+ \frac{1}{720} \int_2^3 (s^6 - 18s^5 + 135s^4 - 540s^3 + 145s^2 - 1458s + 729) ds \\
&= 2,01 + 0,56. \\
&\simeq 2,57
\end{aligned}
$$

Alors, on obtient

$$I_{0^+}^{u(t)} I_{0^+}^{v(t)} f_2(t)|_{t=3} H \neq I_{0^+}^{u(t)+v(t)} f_2(t)|_{t=3}.$$

Lemme 6. *([14])*

Soit $u : J \longrightarrow (1,2]$ être une fonction continue, alors pour

$$f_2 \in C_\delta(J, \mathbb{R}) = \left\{ f_2(t) \in C(J, \mathbb{R}), t^\delta f_2(t) \in C(J, \mathbb{R}), 0 \leq \delta \leq 1 \right\},$$

l'intégrale fractionnaire d'ordre variable $I_{0^+}^{u(t)} f_2(t)$ existe pour tout point sur J.

Lemme 7. *([14])*

Soit $u : J \longrightarrow (1,2]$ être une fonction continue, alors

$$I_{0^+}^{u(t)} f_2(t) \in C(J, \mathbb{R})$$

pour $f_2 \in C(J, \mathbb{R})$.

Définition 3.1.

([14]) Soit $I \subset \mathbb{R}, I$ est appelé intervalle généralisé s'il s'agit soit d'un intervalle, soit de $\{a_1\}$,ou$\{\}$.
Un ensemble fini ρ est appelé une partition de I si chaque x dans I appartient exactement à l'un des éléments généralisés intervalles E dans ρ .
Une fonction $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite constante par morceaux par rapport à la partition ρ de I elle, pour tout $E \in \rho$, g est constante sur E.

Définition 3.2. *([14])*

L'équation de (3.1) est (UH) stable s'il existe $c_{f_1} > 0$ tel que, pour tout $\epsilon > 0$ et pour toute solution $z \in C(J, \mathbb{R})$ de l'inégalité suivante

$$\left| {}^c D_{0^+}^{u(t)} z(t) + f_1(t, z(t), I_{0^+}^{u(t)} z(t)) \right| \leq \epsilon, \quad t \in J, \tag{3.4}$$

Il existe une solution $x \in C(J, \mathbb{R})$ de l'équation (3.2).
Avec $|z(t) - x(t)| \leq c_{f_1} \epsilon, \quad t \in J.$

3.3 Existence de solutions

Iintroduisons l'hypothèse suivante.
(H1) Soit $n \in \mathbb{N}$ Soit $n$un entier appartenant à $\mathbb{N}$,
$\rho = \{J_1 := [0, T_1], J_2 := (T_1, T_2], J_3 := (T_2, T_3], ..., J_n := (T_{n-1}, T]\}$
Soit une partition de l'intervalle J, et soit $u(t) : J \longrightarrow (1, 2]$ une fonction constante par morceaux par rapport à ρ c'est-à-dire,

$$u(t) = \sum_{l=1}^{n} u_l I_l(t) = \begin{cases} u_1, & si \quad t \in J_1, \\ u_2, & si \quad t \in J_2, \\ \vdots \\ u_n, & si \quad t \in J_n, \end{cases}$$

où $1 < u_l \leq 2$ sont des constantes, et I_l est l'indicateur de l'intervalle $J_l := (T_{l-1}, T_l], = 1, 2, ..., n$ (avec $T_0 = 0, T_n = T$) tel que

$$I_l(t) = \begin{cases} 1, & pour \quad t \in J_l, \\ o, & pour \quad ailleurs \end{cases}$$

Pour chaque $l \in \{1, 2, ..., n\}$, le symbole $E_l = C(J_l, \mathbb{R})$ indique l'espace de **Banach** des fonctions continues $x : J_l \longrightarrow \mathbb{R}$ équipé de la norme

$$\|x\|_{E_l} = \sup_{t \in J_l} |x(t)| .$$

Alors, pour tout $t \in J_l, l = 1, 2, ..., n$, la dérivée fractionnaire de **Caputo** gauche d'ordre variable $u(t)$ pour la fonction $x(t) \in C(J, \mathbb{R})$, définie par

(3.3), pourrait être présentée comme une somme de dérivées fractionnaires de **Caputo** gauche d'ordres constants $u_l = 1, 2, ..., n$,

$$ {}^cD_{0^+}^{u(t)}x(t) = \int_0^{T_1} \frac{(t-s)^{1-u_1}}{\Gamma(2-u_1)} x^{(2)}(s)ds + \ldots + \int_{T_{l-1}}^{t} \frac{(t-s)^{1-u_l}}{\Gamma(2-u_l)} x^{(2)}(s)ds \quad (3.5)$$

D'après (3.5), PVI (3.2) peut être écrite pour n'importe quel
$t \in J_l, = 1, 2, ..., n$, sous la forme,

$$\int_0^{T_1} \frac{(t-s)^{1-u_1}}{\Gamma(2-u_1)} x^{(2)}(s)ds + \ldots + \int_{T_{l-1}}^{t} \frac{(t-s)^{1-u_l}}{\Gamma(2-u_l)} x^{(2)}(s)ds + f_1(t, x(t), I_{0^+}^{u_l}x(t)) = 0, t \in J_l. \quad (3.6)$$

Dans ce qui suit ,nous présentons la solution de PVI (3.2).

Définition 3.3.

PVI (3.2) a une solution s'il existe des fonction $x_l, l = 1, 2, ..., n$, de sort que $x_l \in C([0, T_l], \mathbb{R})$ remplissant Eq (3.6) et $x_l(0) = 0 = x_l(T_l)$.

Soit la fonction $x \in C(J, \mathbb{R})$, tel que $x(t) = 0$ sur $t \in [0, T_{l-1}]$ et il résout l'équation intégrale (3.6).
Alors (3.6) se réduit à

$$ {}^cD_{T_{l-1}^+}^{u_l}x(t) + f_1(t, x(t), I_{T_{l-1}^+}^{u_l}x(t)) = 0, \quad t \in J_l$$

Nous traiterons du PVI suivant :

$$\begin{cases} {}^cD_{T_{l-1}^+}^{u_l}x(t) + f_1(t, x(t), I_{T_{l-1}^+}^{u_l}x(t)) = 0, \quad t \in J_l \\ x(T_{l-1}) = 0, \quad x(T_l) = 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

Pour notre propos, le lemme à venir sera la pierre angulaire de la solution de PVI (3.7).

Lemme 8.

Soit $l \in \{1, 2, ..., n\}$ un entier naturel ,$f_1 \in C(J_l \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, et il existe un nombre $\delta \in (0, 1)$ tel que $t^\delta f_1 \in C(J_l \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Alors la fonction $x \in E_l$ est une solution de PVI(3.7) si et seulement si x solution l'équation intégrale

$$x(t) = \int_{T_{l-1}}^{T_l} G_l(t, s) f_1(s, x(s), I_{T_{l-1}^+}^{u_l}x(s))ds \quad (3.8)$$

ou $G_l(t, s)$ est la fonction de **Green** définie par

$$G_l(t, s) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(u_l)} \left[(T_l - T_{l-1})^{-1}(t - T_{l-1})(T_l - s)^{u_l-1} - (t-s)^{u_l-1} \right], \quad T_{l-1} \leq s \leq t \leq T_l \\ \\ \frac{1}{\Gamma(u_l)} (T_l - T_{l-1})^{-1}(t - T_{l-1})(T_l - s)^{u_l-1}, \quad T_{l-1} \leq t \leq s \leq T_l, \end{cases}$$

Ou : $l = 1, 2, ..., n$.

Démonstration 3.1.

Nous supposons que $x \in E_l$ est une solution de PVI(3.7).
En employant l'opérateur des $I^{u_l}_{T^+_{l-1}}$ deux côtés de (3.7) et en considérant le lemme 2.1, on trouve

$$x(t) = \omega_1 + \omega_2(t - T_{l-1}) - I^{u_l}_{T^+_{l-1}} f_1(t, x(t), I^{u_l}_{T^+_{l-1}} x(t)), \quad t \in J_l.$$

par $x(T_{l-1}) = 0$ on obtient a $\omega_1 = 0$
Soit $x(t)$ satisfaisant $x(T_l) = 0$.
Ainsi ,on observe que

$$\omega_2 = (T_l - T_{l-1})^{-1} I^{u_l}_{T^+_{l-1}} f_1(T_l, x(T_l), I^{u_l}_{T^+_{l-1}} x(T_l))$$

Puis on trouve

$$x(t) = (T_l - T_{l-1})^{-1}(t - T_{l-1}) I^{u_l}_{T^+_{l-1}} f_1(T_l, x(T_l), I^{u_l}_{T^+_{l-1}} x(T_l))$$
$$-I^{u_l}_{T^+_{l-1}} f_1(t, x(t), I^{u_l}_{T^+_{l-1}} x(t)), \quad t \in J_l$$

Par la continuité de la fonction de **Green** qui implique que

$$x(t) = \int_{T_{l-1}}^{T_l} G_l(t, s) f_1(s, x(s), I^{u_l}_{T^+_{l-1}} x(s)) ds.$$

Inversement, soit $x \in E_l$ une solution de l'équation intégrale (3.8).
Concernant la continuité de la fonction $t^\delta f_1$ et le lemme 2.1, on en déduit que x est la solution de PVI (3.7).
La proposition suivante sera nécessaire.

Proposition 3.1.

Supposons que $t^{\delta} f_1 : J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, (\delta \in (0,1))$ est une fonction continue, $u(t) : J \longrightarrow (1,2]$ satisfait (H1), alors les fonctions de **Green** du problème de valeur limite (3.6) satisfait
les propriétés suivantes :

1. $G_l(t,s) \geq 0$ pour tout $T_{l-1} \leq t \leq s \leq T_l$,
2. $\max_{t \in J_l} G_l(t,s) = G_l(s,s), \quad s \in J_l$,
3. $G_l(s,s)$ a un maximum unique donné par

$$\max_{s \in J_l} G_l(t,s) = \frac{1}{\Gamma(u_l+1)} \left[(T_l - T_{l-1})(1 - \frac{1}{u_l}) \right]^{u_l - 1},$$

où $l = 1, 2, ..., n$.

Démonstration 3.2.

Soit $\varphi(t,s) = (T_l - T_{l-1})^{-1}(t - T_{l-1})(T_l - s)^{u_l-1} - (t-s)^{u_l-1}$.
On voit que

$$\begin{aligned} \varphi_t(t,s) &= (T_l - T_{l-1})^{-1}(T_l - s)^{u_l-1} - (u_l - 1)(t-s)^{u_l-2} \\ &\leq (T_l - T_{l-1})^{-1}(T_l - T_{l-1})^{u_l-1} - (T_l - T_{l-1})^{u_l-2} \\ &= 0, \end{aligned}$$

ce qui signifie que $\varphi(t,s)$ est décroissant par rapport à t donc

$\varphi(t,s) \geq \varphi(T_l, s) = 0 \quad$ pour : $T_{l-1} \leq s \leq t \leq T_l$

Ainsi, à partir de cela et de l'expression de $G_l(t,s)$, nous avons $G_l(t,s) \geq 0$ pour tout $T_{l-1} \leq t \leq s \leq T_l, \quad l = 1, ..., n.$

Puis que $\varphi(t,s)$ est décroissant par rapport à t alors $\varphi(t,s) \leq \varphi(s,s)$ pour $T_{l-1} \leq s \leq t \leq T_l$. Par contre, pour $T_{l-1} \leq s \leq t \leq T_l$, on obtient

$$(T_l - T_{l-1})^{-1}(t - T_{l-1})(T_l - s)^{u_l-1} \leq (T_l - T_{l-1})^{-1}(s - T_{l-1})(T_l - s)^{u_l-1}$$

Ceux-ci assurent que

$$\max_{T \in [T_{l-1} - T_l]} G_l(t,s) = G_l(s,s), \quad s \in [T_{l-1} - T_l], \quad l = 1, ..., n.$$

De plus, nous vérifions (3.3) de la proposition (3.2).

Clairement, les points maximaux de $G_l(s,s)$ ne sont pas T_{l-1} et T_l, $l = 1, ..., n$.
Pour $s \in [T_{l-1}, T_l], l = 1, ..., n$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{dG_l(s,s)}{ds} &= \frac{1}{\Gamma(u_l)}(T_l - T_{l-1})^{-1}\left[(T_l - s)^{u_l-1} - (u_l-1)(s-T_{l-1})(T_l-s)^{u_l-2}\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(u_l)}(T_l - T_{l-1})^{-1}(T_l - s)^{u_l-2}\left[(T_l - s) - (u_l-1)(s-T_l)\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(u_l)}(T_l - T_{l-1})^{-1}(T_l - s)^{u_l-2}\left[T_l + (u_l-1)T_{l-1} - u_l s\right]
\end{aligned}$$

ce qui implique que les points maximaux de $G_l(s,s)$ sont
$s = \frac{T_l + (u_l-1)T_{l-1}}{u_l}$, $l = 1, ..., n$. Ainsi, pour $l = 1, ..., n$,

$$\begin{aligned}
\max_{s \in [T_{l-1}, T_l]} G_l(s,s) &= G_l\left(\frac{T_l + (u_l-1)T_{l-1}}{u_l}, \frac{T_l + (u_l-1)T_{l-1}}{u_l}\right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(u_l+1)}\left[(T_l - T_{l-1})(1 - \frac{1}{u_l})\right]^{u_l-1}
\end{aligned}$$

Nous prouverons les résultats d'existence pour PVI (3.7).
Le premier résultat est basé sur le théorème 2.1.

Théorème 3.1.

Si les conditions du lemme 3.2 sont satisfaites, et il existe des constantes $K, L > 0$ telles que $t^\delta |f_1(t,y_1,z_1) - f_1(t,y_2,z_2)| \leq K|y_1 - y_2| + L|z_1 - z_2|$ pour tout $y_i, z_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, t \in \mathbb{R}_l$, et l'inégalité

$$\frac{(T_l^{1-\delta} - T_{l-1}^{1-\delta})((T_l - T_{l-1})(1 - \frac{1}{u_l}))^{u_l-1}}{(1-\delta)\Gamma(u_l+1)}\left(K + \frac{L(T_l - T_{l-1})^{u_l}}{\Gamma(u_l+1)}\right) < 1 \quad (3.9)$$

est vérifiée.
Alors PVI (3.7) possède au moins une solution dans E_l.

Démonstration 3.3.

On construit l'opérateur

$$W : E_l \longrightarrow E_l$$

comme suit :

$$Wx(t) = \int_{T_{l-1}}^{T_l} G_l(t,s) f_1(s, x(s), I_{T_{l-1}^+}^{u_l} x(s)) ds, \quad t \in J_l \quad (3.10)$$

Il résulte des propriétés des intégrales fractionnaires et de la continuité de la fonction $t^{\delta} f_1$ que l'opérateur $W : E_l \longrightarrow E_l$ défini en (3.20) est bien défini.

$$R_l \geq \frac{\frac{f^\star}{\Gamma(u_l+1)}(T_l - T_{l-1})^{u_l}(1-\frac{1}{u_l})^{u_l-1}}{1 - \frac{(T_l^{1-\delta}-T_{l-1}^{1-\delta})((T_l-T_{l-1})(1-\frac{1}{u_l}))^{u_l-1}}{(1-\delta)\Gamma(u_l+1)}\left(K + L\frac{(T_l-T_{l-1})^{u_l}}{\Gamma(u_l+1)}\right)}$$

avec

$$f^\star = \sup_{t\in J_l} |f_1(t,0,0)| .$$

On considère l'ensemble

$$B_{R_l} = \left\{x \in E_l, \|x\|_{E_l} \leq R_l\right\} .$$

Il est clair que B_{R_l}, est non vide, fermé, convexe et délimité.
Nous démontrons maintenant que W satisfait l'hypothèse du théorème 2.1.
Nous prouverons ù cela en trois phases.

Étape1 : Réclamationă :$W(B_{R_l}) \subset W(B_{R_l})$.
Pour $x \in B_{R_l}$, par la proposition 3.2, on a :

$$\begin{aligned}
|Wx(t)| &= \left|\int_{T_{l-1}}^{T_l} G_l(t,s) f_1(s, x(s), I^{u_l}_{T^+_{l-1}} x(s)) ds\right| \\
&\leq \int_{T_{l-1}}^{T_l} G_l(t,s) \left|f_1(s, x(s), I^{u_l}_{T^+_{l-1}} x(s))\right| ds \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(u_l+1)} \left((T_l - T_{l-1})(1-\frac{1}{u_l})\right)^{u_l-1} \\
&\times \int_{T_{l-1}}^{T_l} \left|f_1(s, x(s), I^{u_l}_{T^+_{l-1}} x(s)) - f_1(s,0,0)\right| ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(u_l+1)} \left((T_l - T_{l-1})(1-\frac{1}{u_l})\right)^{u_l-1} \int_{T_{l-1}}^{T_l} |f_1(s,0,0)|\, ds \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(u_l+1)} \left((T_l - T_{l-1})(1-\frac{1}{u_l})\right)^{u_l-1} \int_{T_{l-1}}^{T_l} s^{-\delta}(K|x(s)| + L\left|I^{u_l}_{T^+_{l-1}} x(s)\right|) ds. \\
&+ \frac{f^\star}{\Gamma(u_l+1)}(T_l - T_{l-1})^{u_l}(1-\frac{1}{u_l})^{u_l-1} \\
&\leq \frac{(T_l^{1-\delta} - T_{l-1}^{1-\delta})((T_l - T_{l-1})(1-\frac{1}{u_l}))^{u_l-1}}{(1-\delta)\Gamma(u_l+1)} \left(K + L\frac{(T_l - T_{l-1})^{u_l}}{(\Gamma(u_l+1))}\right) R_l \\
&+ \frac{f^\star}{\Gamma(u_l+1)}(T_l - T_{l-1})^{u_l}(1-\frac{1}{u_l})^{u_l-1} \\
&\leq R_l
\end{aligned}$$

ce qui veut dire que $W(B_{B_l}) \subseteq B_{B_l}$.
Étape 2 : Affirmation W est continu.
Nous supposons que la suite (x_n) converge vers x dans E_l, et $t \in J_l$. Alors :

$$\begin{aligned}
&\Big|(Wx_n)(t) - (Wx)(t)\Big| \\
\leq\ & \int_{T_{l-1}}^{T_l} G_l(t,s)\Big|f_1(s, x(s), I^{u_l}_{T^+_{l-1}}x(s)) - f_1(s, x(s), I^{u_l}_{T^+_{l-1}}x(s))\Big|ds \\
\leq\ & \frac{1}{\Gamma(u_l+1)}\left((T_l - T_{l-1})\left(1 - \frac{1}{u_l}\right)\right)^{u_l-1} \\
\times\ & \int_{T_{l-1}}^{T_l} s^{-\delta}\left(K\Big|x_n(s) - (x)(s)\Big| + LI^{u_l}_{T^+_{l-1}}\Big|x_n(s) - (x)(s)\Big|\right)ds \\
\leq\ & \frac{K}{\Gamma(u_l+1)}\left((T_l - T_{l-1})\left(1 - \frac{1}{u_l}\right)\right)^{u_l-1} \|x_n - x\|_{E_l}\int_{T_{l-1}}^{T_l} s^{-\delta}ds \\
+\ & \frac{L}{\Gamma(u_l+1)}\left((T_l - T_{l-1})\left(1 - \frac{1}{u_l}\right)\right)^{u_l-1} \left\|I^{u_l}_{T^+_{l-1}}(x_n - x)\right\|_{E_l}\int_{T_{l-1}}^{T_l} s^{-\delta}ds \\
\leq\ & \frac{K(T_l^{1-\delta} - T_{l-1}^{1-\delta})((T_l - T_{l-1})(1 - \frac{1}{u_l}))^{u_l-1}}{(1-\delta)\Gamma(u_l+1)}\|x_n - x\|_{E_l} \\
+\ & \frac{L(T_l - T_{l-1})^{2u_l-1}(T_l^{1-\delta} - T_{l-1}^{1-\delta})(1 - \frac{1}{u_l})^{u_l-1}}{(1-\delta)\Gamma(u_l+1)}\|x_n - x\|_{E_l} \\
\leq\ & \frac{(T_l^{1-\delta} - T_{l-1}^{1-\delta})((T_l - T_{l-1})(1 - \frac{1}{u_l}))^{u_l-1}}{(1-\delta)\Gamma(u_l+1)}\left(K + L\frac{(T_l - T_{l-1})^{u_l}}{\Gamma(u_l+1)}\right)\|x_n - x\|_{E_l},
\end{aligned}$$

C'est-à-dire que nous obtenons

$$\Big|(Wx_n)(t) - (Wx)(t)\Big| \longrightarrow 0 \quad si \quad n \longrightarrow \infty$$

Donc : l'opérateur W est continu sur E_l.
Étape 3 : W est compact.
Nous allons maintenant montrer que $W(B_{R_l})$ est relativement compact, ce qui signifie que W est compact.
Clairement, $W(B_{R_l})$ est uniformément borné car, à l'étape1, nous avons $W(B_{R_l}) = \{W(x) : x \in B_{R_l}\} \subset W(B_{R_l})$,
donc pour chaque $x \in B_{R_l}$, nous avons $\|W(x)\|_{E_l} \leq R_l$, ce qui signifie que $W(B_{R_l})$ est borné.
Il reste à indiquer que $W(B_{R_l})$ est équicontinu

Pour $t_1, t_2 \in J_l$, $t_1 < t_2$, et $x \in B_{R_l}$, on a.

$$
\begin{aligned}
& |(Wx)(t_2) - (Wx)(t_1)| \\
= & \left| \int_{T_{l-1}}^{T_l} G_l(t_2,s) f_1(s,x(s),I^{u_l}_{T^+_{l-1}} x(s)) ds - \int_{T_{l-1}}^{T_l} G_l(t_1,s) f_1(s,x(s),I^{u_l}_{T^+_{l-1}} x(s)) ds \right| \\
\leq & \int_{T_{l-1}}^{T_l} |G_l(t_2,s) - G_l(t_1,s)| \left| f_1(s,x(s),I^{u_l}_{T^+_{l-1}} x(s)) \right| ds \\
\leq & \int_{T_{l-1}}^{T_l} |G_l(t_2,s) - G_l(t_1,s)| \left| f_1(s,x(s),I^{u_l}_{T^+_{l-1}} x(s)) - f_1(s,0,0) \right| ds \\
+ & \int_{T_{l-1}}^{T_l} |G_l(t_2,s) - G_l(t_1,s)| \left| f_1(s,0,0) \right| ds \\
\leq & \int_{T_{l-1}}^{T_l} |G_l(t_2,s) - G_l(t_1,s)[[s^{-\delta}(K|x(s)| + L \left| I^{u_l}_{T^+_{l-1}} x(s) \right|)] ds \\
+ & f^\star \int_{T_{l-1}}^{T_l} |G_l(t_2,s) - G_l(t_1,s)| ds \\
\leq & \left(K \|x\|_{E_l} + L \left\| I^{u_l}_{T^+_{l-1}} x \right\|_{E_l} \right) \int_{T_{l-1}}^{T_l} s^{-\delta} |G_l(t_2,s) - G_l(t_1,s)| ds \\
+ & f^\star \int_{T_{l-1}}^{T_l} |G_l(t_2,s) - G_l(t_1,s)| ds \\
\leq & T_{l-1}^{-\delta} \left(K + L \frac{(T_l - T_{l-1})^{u_l}}{\Gamma(u_l+1)} \right) \|x\|_{E_l} \left(\int_{T_{l-1}}^{T_l} |G_l(t_2,s) - G_l(t_1,s)| ds \right) \\
+ & f^\star \int_{T_{l-1}}^{T_l} |G_l(t_2,s) - G_l(t_1,s)| ds
\end{aligned}
$$

par la continuité de la fonction de **Green** G_l.
D'où $\|(Wx)(t_2) - (Wx)(t_1)\|_{E_l} \longrightarrow 0$ comme $|t_2 - t_1| \longrightarrow 0$. Cela implique que $W(B_{R_l})$ est équicontinu.

Par conséquent, toutes les conditions du théorème 2.1 sont remplies, et il existe donc $\widetilde{x}_l \in B_{R_l}$ tel que $W\widetilde{x}_l = \widetilde{x}_l$ qui est une solution de PVI (3.7). Depuis $B_{R_L} \subset E_l$ l'affirmation du théorème 3.2 est prouvée.
Le deuxième résultat est basé sur le principe de contraction de **Banach**.

Théorème 3.2.

Soit les conditions du théorème 3.2 satisfaites .Alors PVI (3.7) a une solution unique dans E_l.

Démonstration 3.4.

Nous utiliserons le principe de contraction de **Banach** pour prouver que W défini dans (3.20) a un point fixe unique .
pour $x(t), y(t) \in E_l$ par la proposition (3.2),on obtient que.

$$\begin{aligned}
&\Big|(Wx)(t) - (Wy)(t)\Big| \\
= &\left|\int_{T_{l-1}}^{T_l} G_l(t,s) f_1(s, x(s), I_{T_{l-1}^+}^{u_l} x(s)) - \int_{T_{l-1}}^{T_l} G_l(t,s) f_1(s, y(s), I_{T_{l-1}^+}^{u_l} y(s)) ds\right| \\
\leq &\int_{T_{l-1}}^{T_l} G_l(t,s) \left| f_1(s, x(s), I_{T_{l-1}^+}^{u_l} x(s)) - f_1(s, y(s), I_{T_{l-1}^+}^{u_l} y(s))\right| ds \\
\leq &\frac{1}{\Gamma(u_l+1)} \left((T_l - T_{l-1})\left(1 - \frac{1}{u_l}\right)\right)^{u_l - 1} \\
\times &\int_{T_{l-1}}^{T_l} s^{-\delta}\left(k\Big|x(s) - y(s)\Big| + L I_{T_{l-1}^+}^{u_l}\Big|x(s) - y(s)\Big|\right) ds \\
\leq &\frac{K}{\Gamma(u_l+1)} \left((T_l - T_{l-1})\left(1 - \frac{1}{u_l}\right)\right)^{u_l - 1} \|x - y\|_{E_l} \int_{T_{l-1}}^{T_l} s^{-\delta} ds \\
+ &\frac{L(T_l - T_{l-1})^{2u_l - 1}(1 - \frac{1}{u_l})^{u_l - 1}}{(\Gamma(u_l+1))^2} \|x - y\|_{E_l} \int_{T_{l-1}}^{T_l} s^{-\delta} ds \\
\leq &\frac{1}{\Gamma(u_l+1)} \left((T_l - T_{l-1})\left(1 - \frac{1}{u_l}\right)\right)^{u_l - 1} \\
\times &\left(K + \frac{L(T_l - T_{l-1})^{u_l}}{(\Gamma(u_l+1))}\right) \|x - y\|_{E_l} \int_{T_{l-1}}^{T_l} s^{-\delta} ds \\
\leq &\frac{(T_l^{1-\delta} - T_{l-1}^{1-\delta})((T_l - T_{l-1})(1 - \frac{1}{u_l}))^{u_l - 1}}{(1-\delta)\Gamma(u_l+1)} \left(K + \frac{L(T_l - T_{l-1})^{u_l}}{\Gamma(u_l+1)}\right) \|x - y\|_{E_l}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, par (3.9),l'opérateur W est une contraction.Par conséquent ,par le principe de contraction de **Banach**,W a un point fixe unique $\widetilde{x_l} \in E_l$, qui est l'unique solution du problème (3.7) ,l'affirmation du théorème (3.2) est prouvée.
Nous allons maintenant prouver le résultat de l'existence de.PVI (3.2).

Nous introduisons l'hypothèse suivante :
$(H2)$ soit $f_1 \in C(J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ et il existe un nombre $\delta \in (0,1)$ tel que :
$t^\delta f_1 \in C(J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$et il existe constantes $K, L > 0$ telles que
$t^\delta |f_1(t, y_1, z_1) - f_1(t, y_2, z_2)| \leq K|y_1 - y_2| + L|z_1 - z_2|$
pour tout $y_1, y_2, z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ et $t \in J$.

Théorème 3.3.

Soit les conditions $(H1), (H2)$ et l'inégalité (3.9) satisfaites pour tout $l \in \{1, 2, ..., n\}$.
Alors le problème (3.2) possède au moins une solution dans $C(J, \mathbb{R})$.

Démonstration 3.5.

Pour tout $l \in \{1, 2, ..., n\}$ d'après le théorème 3.2 PVI (3.7) possède au moins une solution $\widetilde{x} \in E_l$. pour tout $l \in \{1, 2, ..., n\}$,nous définissons la fonction

$$x_l = \begin{cases} 0, & t \in [0, T_{l-1}], \\ \widetilde{x}_l, & t \in J_l. \end{cases}$$

Ainsi, la fonction $x_l \in C([0, T_l], R)$ résout l'équation intégrale (3.6) pour $t \in J_l$ avec $x_l(0) = 0, x_l(T_l) = \widetilde{x}_l(T_l) = 0$.
Alors la fonction

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t), & t \in J_1 \\ x_2(t) = \begin{cases} 0, & t \in J_1 \\ \widetilde{x}_2, & t \in J_2 \end{cases} \\ \vdots \\ x_l(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, T_{l-1}] \\ \widetilde{x}_l, & t \in J_l \end{cases} \end{cases} \tag{3.11}$$

est une solution de PVI (3.2) dans $C(J, \mathbb{R})$.

3.4 ULAM-HYERS stabilité

Théorème 3.4.

Soit les condition $(H1), (H2)$ et l'inégalité(3.9) satisfaites.
Alors PVI (3.2) est (UH) stable.

Démonstration 3.6.

Soit $\epsilon > 0$ un nombre arbitraire et la fonction $z(t)$ de $z \in C(J_l, \mathbb{R})$ satisfait l'inégalité (3.4).
Pour tout $l \in \{1, 2, ..., n\}$,on définit les fonction $z_1(t) \equiv z(t)$, $t \in [0, T_1]$, et pour $l = 2, 3, ..., n$:

$$z_l(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, T_{l-1}], \\ z(t), & t \in J_l. \end{cases}$$

Pour toute $l \in \{1, 2, ..., n\}$, selon Eq.(3.5) pour $t \in J$,nous obtenons

$${}^cD^{u(t)}_{T^+_{l-1}} z_l(t) = \int_{T_{l-1}}^{t} \frac{(t-s)^{1-u_l}}{\Gamma(2-u_l)} z^{(2)}(s)ds.$$

En prenant le (IFC) $I^{u_l}_{T^+_{l-1}}$ des deux côtés de l'inégalité (3.4),nous obtenons

$$\begin{aligned} \left| z_l(t) + \int_{T_{l-1}}^{T_l} G_l(t,s) f_1(s, z_l(s), I^{u_l}_{T^+_{l-1}} z_l(s))ds \right| &\leq \epsilon \int_{T_{l-1}}^{t} \frac{(t-s)^{u_l-1}}{\Gamma(u_l)} ds \\ &\leq \epsilon \frac{(T_l - T_{l-1})^{u_l}}{\Gamma(u_l+1)}. \end{aligned}$$

D'après le théorème 3.4 ,PVI (3.2) a une solution a $x \in C(J, \mathbb{R})$ définie par $x(t) = x_l(t)$ pour $t \in J_l, l = 1, 2, ..., n$,
où

$$x_l = \begin{cases} 0, & t \in [0, T_{l-1}], \\ \widetilde{x}_l, & t \in J_l, \end{cases} \tag{3.12}$$

Et $\widetilde{x}_l \in E_l$ est une solution de (3.7) . D'après le lemme (3.2),l'équation intégrale

$$\widetilde{x}_l(t) = \int_{T_{l-1}}^{T_l} G_l(t,s) f_1(s, \widetilde{x}_l(s), I^{u_l}_{T^+_{l-1}} \widetilde{x}_l(s))ds \tag{3.13}$$

Tient.Soit $t \in J_l$, $l = 1, 2, ..., n$. Ensuite ,par Eqs.(3.22) et (3.23) ,on obtient :

$$
\begin{aligned}
\Big|z(t)-x(t)\Big| &= \Big|z(t)-x_l(t)\Big| \\
&= \Big|z_l(t)-\widetilde{x}_l(t)\Big| \\
&= \Big|z_l(t)-\int_{T_{l-1}}^{T_l} G_l(t,s) f_1(s,\widetilde{x}_l(s), I^{u_l}_{T^+_{l-1}}\widetilde{x}_l(s))ds\Big| \\
&\le \Big|z_l(t)-\int_{T_{l-1}}^{T_l} G_l(t,s) f_1(s,\widetilde{x}_l(s), I^{u_l}_{T^+_{l-1}}z_l(s))ds\Big| \\
&+ \Big|\int_{T_{l-1}}^{T_l} G_l(t,s) f_1(s,z_l(s), I^{u_l}_{T^+_{l-1}}z_l(s))ds \\
&- \int_{T_{l-1}}^{T_l} G_l(t,s) f_1(s,\widetilde{x}_l(s), I^{u_l}_{T^+_{l-1}}\widetilde{x}_l(s))ds\Big| \\
&\le \Big|z_l(t)+\int_{T_{l-1}}^{T_l} G_l(t,s) f_1(s,z_l(s), I^{u_l}_{T^+_{l-1}}z_l(s))ds\Big| \\
&+ \Big|\int_{T_{l-1}}^{T_l} G_l(t,s) f_1(s,z_l(s), I^{u_l}_{T^+_{l-1}}z_l(s))ds \\
&- \int_{T_{l-1}}^{T_l} G_l(t,s) f_1(s,\widetilde{x}_l(s), I^{u_l}_{T^+_{l-1}}\widetilde{x}_l(s))ds\Big|ds \\
&\le \epsilon\frac{(T_l-T_{l-1})^{u_l}}{\Gamma(u_l+1)}+\frac{1}{\Gamma(u_l+1)}\left((T_l-T_{l-1})\left(1-\frac{1}{u_l}\right)\right)^{u_l-1} \\
&\times \int_{T_{l-1}}^{T_l}\Big|f_1(s,z_l(s), I^{u_l}_{T^+_{l-1}}z_l(s))ds - f_1(s,\widetilde{x}_l(s), I^{u_l}_{T^+_{l-1}}\widetilde{x}_l(s)\Big|ds \\
&\le \epsilon\frac{(T_l-T_{l-1})^{u_l}}{\Gamma(u_l+1)}+\frac{1}{\Gamma(u_l+1)}\left((T_l-T_{l-1})\left(1-\frac{1}{u_l}\right)\right)^{u_l-1} \\
&\times \int_{T_{l-1}}^{T_l} s^{-\delta}\left(K\Big|z_l(s)-\widetilde{x}_l(s)\Big| + LI^{u_l}_{T^+_{l-1}}\Big|z_l(s)-\widetilde{x}(s)\Big|\right)ds \\
&\le \epsilon\frac{(T_l-T_{l-1})^{u_l}}{\Gamma(u_l+1)}+\frac{1}{\Gamma(u_l+1)}\left((T_l-T_{l-1})\left(1-\frac{1}{u_l}\right)\right)^{u_l-1} \\
&\times (K\|z_l-\widetilde{x}_l\|_{E_l}+L\|I^{u_l}_{T^+_{l-1}}(z_l-\widetilde{x})\|_{E_l})\int_{T_{l-1}}^{T_l} s^{-\delta}ds
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \epsilon\frac{(T_l-T_{l-1})^{u_l}}{\Gamma(u_l+1)}+\frac{(T_l^{1-\delta}-T_{l-1}^{1-\delta})((T_l-T_{l-1})(1-\frac{1}{u_l}))^{u_l-1}}{(1-\delta)\Gamma(u_l-1)}\\
&\times \left(K\|z_l-\widetilde{x}_l\|_{E_l}+L\frac{(T_l-T_{l-1})^{u_l}}{\Gamma(u_l+1)}\|z_l-\widetilde{x}_l\|_{E_l}\right)\\
&\leq \epsilon\frac{(T_l-T_{l-1})^{u_l}}{\Gamma(u_l+1)}+\frac{(T_l^{1-\delta}-T_{l-1}^{1-\delta})((T_l-T_{l-1})(1-\frac{1}{u_l}))^{u_l-1}}{(1-\delta)\Gamma(u_l+1)}\\
&\times \left(K+L\frac{(T_l-T_{l-1})^{u_l}}{\Gamma(u_l+1)}\right)\|z_l-\widetilde{x}\|_{E_l}\\
&\leq \epsilon\frac{(T_l-T_{l-1})^{u_l}}{\Gamma(u_l+1)}+\mu\|z-x\|,
\end{aligned}
$$

Où :

$$
\mu=\max_{l=1,2,\dots,n}\frac{(T_l^{1-\delta}-T_{l-1}^{1-\delta})((T_l-T_{l-1})(1-\frac{1}{u_l}))^{u_l-1}}{(1-\delta)(\Gamma(u_l+1)}\left(K+L\frac{(T_l-T_{l-1})^{u_l}}{\Gamma(u_l+1)}\right).
$$

Alors

$$
(1-\mu)\|z-x\|\leq \epsilon\frac{(T_l-T_{l-1})^{u_l}}{\Gamma(u_l+1)}
$$

On obtient ,pour chacun $t\in \mathbb{R}_l$,

$$
\Big|z(t)-x(t)\Big|\leq \|z-x\|\leq \epsilon\frac{(T_l-T_{l-1})^{u_l}}{(1-\mu)\Gamma(u_l+1)}:=c_{f_1}\epsilon.
$$

Donc :PVI(3.2) est stable.

3.5 Exemple

Considérons le problème de valeur limite fractionnaire suivant :

$$
\begin{cases}
{}^cD_{0^+}^{u(t)}x(t)+\frac{t^{\frac{-1}{2}}}{6e^t(1+|x(t)|+|I_{0^+}^{u(t)}x(t)|)}=0, \quad t\in J:=[0,4],\\
x(0)=0, \quad x(4)=0.
\end{cases}
\tag{3.14}
$$

Soit

$$
f_1(t,y,z)=\frac{t^{\frac{-1}{2}}}{6e^t(1+y+z)}, \quad (t,y,z)\in[0,4]\times[0,+\infty)\times[0,+\infty).
$$

$$
u(t)=\begin{cases}
\frac{9}{5}, \quad t\in J_1:=[0,2],\\
\frac{5}{4}, \quad t\in J_2:=]2,4].
\end{cases}
\tag{3.15}
$$

Par suite nous avons :

$$\begin{aligned}
t^{\frac{1}{2}}\Big|f_1(t,y_1,z_1)-f_1(t,y_2,z_2)\Big| &= \left|\frac{1}{6e^t}\left(\frac{1}{1+y_1+z_1}-\frac{1}{1+y_2+z_2}\right)\right| \\
&\leq \frac{(\Big|y_1-y_2\Big|+\Big|z_1-z_2\Big|)}{6e^t(1+y_1+z_1)(1+y_2+z_2)} \\
&\leq \frac{1}{6e^t}(|y_1-y_2|+|z_1-z_2|) \\
&\leq \frac{1}{6}|y_1-y_2|+\frac{1}{6}|z_1-z_2|.
\end{aligned}$$

Par conséquent, la condition $(H2)$ est vérifiée avec $\delta=\frac{1}{6}$ et $K=L=\frac{1}{6}$.
par (3.25),d'après (3.7),nous considérons deux PVI auxiliaires pour
les équations différentielles fractionnaires de **Caputo** d'ordre constant

$$\begin{cases} {}^cD_{0^+}^{\frac{9}{5}}x(t)+\frac{t^{\frac{-1}{2}}}{6e^t(1+|x(t)|+I_{0^+}^{\frac{9}{5}}x(t))}=0, \quad t\in J_1, \\ x(0)=0, \quad x(2)=0. \end{cases} \tag{3.16}$$

et

$$\begin{cases} {}^cD_{1^+}^{\frac{5}{4}}x(t)+\frac{t^{\frac{-1}{2}}}{6e^t(1+|x(t)|+I_{1^+}^{\frac{5}{4}}x(t))}=0, \quad t\in J_2, \\ x(2)=0, \quad x(4)=0. \end{cases} \tag{3.17}$$

Ensuite ,nous prouvons que la condition (3.9) est remplie pour $l=1$.
En effet

$$\begin{aligned}
&\frac{(T_1^{1-\delta}-T_0^{1-\delta})((T_1-T_0)(1-\frac{1}{u_1}))^{u_1-1}}{\Gamma(u_1+1)(1-\delta)}\left(K+L\frac{(T_1-T_0)^{u_1}}{\Gamma(u_1+1)}\right) \\
&\qquad = \frac{(2^{\frac{1}{2}})(\frac{8}{9})^{\frac{4}{5}}}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{14}{5})}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6\Gamma(\frac{14}{5})}\right)\backsimeq 0.1955<1.
\end{aligned}$$

Conséquence ,la condition (3.9) est réalisée.
D'après le théorème 3.2 ,le problème (3.26) a une solution $\widetilde{x_1}\in E_1$ On prouve que la condition (3.9) est remplie pour $l=1$ En effet,

$$\begin{aligned}
&\frac{(T_2^{1-\delta}-T_1^{1-\delta})((T_2-T_1)(1-\frac{1}{u_2}))^{u_2-1}}{\Gamma(u_2+1)(1-\delta)}\times\left(K+L\frac{(T_2-T_1)^{u_2}}{\Gamma(u_2+1)}\right) \\
&\qquad = \frac{(2^{\frac{1}{2}})(\frac{4}{5})^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{9}{4})}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6\Gamma(\frac{9}{4})}\right)\backsimeq 0.0375<1.
\end{aligned}$$

Ainis, la condition (3.9)est satisfaite . D'après le théorème 3.2 PVI (3.7) possède une solution $\widetilde{x_2} \in E_2$.
Alors :d'après le théorème 3.4 PVI (3.14)a une solution

$$x(t) = \begin{cases} \widetilde{x_1}(t), & t \in J_1, \\ x_2(t), & t \in J_2 \end{cases}$$

où

$$x_2(t) = \begin{cases} 0, t \in J_1, \\ \widetilde{x_2}(t), t \in J_2, \end{cases}$$

D'après le théorème 3.5 PVI (3.24) est (UH)stable.

Conclusion

En résumé, l'étude de l'existence et de l'unicité des solutions pour les équations différentielles d'ordre fractionnaire enrichit la compréhension théorique et les applications pratiques des systèmes dynamiques.
Elle nécessite une approche rigoureuse et souvent sophistiquée, combinant des méthodes analytiques et numériques pour surmonter les complexités inhérentes à la nature fractionnaire des dérivées et intégrales.

Bibliographie

[1] k.Deimling, Nonlinear Functional Analysis, Springer-Verlag, 1985

[2] A. M. A. El-Sayed, Sh. A. Abd El-Salam, Lp-solution of weighted Cauchy-type problem of a differ-integral functional equation, Intern.J. Nonlinear Sci. 5 (2008) 281- 288.

[3] A.M.M. El-Sayed, H.H.G. Hashem, Integrable and continuous solutions of a nonlinear quadratic integral equation, Electron. J. Qual.Theory Differ. Equ. 2008, No. 25, 1-10.

[4] L. Byszewski and V. Lakshmikantham,Theorem about the existenceand uniqueness of a solution of a nonlocal abstract Cauchy problemin a Banach space, Appl. Anal. 40 (1991), 11-19.

[5] A.A. Kilbas, Hari M. Srivastava, and Juan J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations. North-Holland Mathematics Studies, 204. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006.

[6] V. Lakshmikantham, J.V. Devi, Theory of fractional differential equations in a Banach space, Eur. J. Pure Appl. Math. 1 (2008) 38-45.

[7] Benchohra, M., Lazreg, J.E. : Existence and Ulam stability for nonlinear implicit fractional differential equations with Hadamard derivative. Stud. Univ. Babes ? ?Bolyai, Math. 62(1), 27 ?38 (2017)

[8] Bouazza, Z., Etemad, S., Souid, M.S., Rezapour, S., Martinez, F., Kaabar, M.K.A. : A study on the solutions of a multiterm FBVP of variable order. J. Funct. Spaces 2021, Article ID 9939147 (2021)

[9] M. Benchohra and B. A. Slimani . Existence And Uniqueness Of Solutions To Impulsive Fractional Differential Equations. Electronic Journal of Differential Equations, (2009) 10, 1-11

[10] M. Benchohra, S. Hamani and S.K. Ntouyas, Boundary value problems for differential equations with fractional order, Surveys Math. Appl. 3 (2008), 1-12.

[11] M. Benchohra and M. S. Souid, Integrable Solutions For Implicit Fractional Order Functional Differential Equations with Infinite Delay, Archivum Mathematicum (BRNO) Tomus 51 (2015), 67-76 .

[12] M. Benchohra and M. S. Souid, L1 -Solutions of Boundary Value Problems for Implicit Fractional Order Differential Equations, Surveys in Mathematics and its Applications 10 (2015), 49-59.

[13] M. Benchohra and M. S. Souid. L1 -Solutions for Implicit Fractional Order Differential Equations with Nonlocal Conditions. Filomat, 30(6), (2016) 1485-1492.

[14] Z.Bouazza, M.Souid and H.GÃijnerhan ; VMultiterm boundary value problem of Caputo fractional differential equations of variable order - Advances in Difference Equations - (2021) 2021 :400

[15] T.Benoumran ,M.Souid, Integrable solutions for implicit fractional order differential equations with nonlocal condition - Journal of Interdisciplinary Mathemati.